UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Generalización de patrones utilizando GeoGebra: Aplicación para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

CECILIA VIANEY MUÑOZ CHÁVEZ

DIRIGIDA POR

DRA. LILIA PATRICIA AKÉ TEC

REPOSITORIO INSTITUCIONAL DGBSDI-UAQ

Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales de Información

Generalización de patrones utilizando Geogebra: Aplicación para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula

por

Cecilia Vianey Muñoz Chávez

se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

Clave RI: IGLIN-272180

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Generalización de patrones utilizando GeoGebra: Aplicación para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
CECILIA VIANEY MUÑOZ CHÁVEZ

DIRIGIDA POR
DRA. LILIA PATRICIA AKE TEC

Dra. Lilia Patricia Aké Tec ______________________
Presidente

M en C Luisa Ramírez Granados ______________________
Secretario

MDM Teresa de Jesús Valerio López ______________________
Vocal

M en C Patricia Isabel Spíndola Yáñez ______________________
Suplente

MDM Cecilia Hernández Garciadiego ______________________
Suplente

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo presentar una secuencia didáctica para promover el razonamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través del uso del software libre GeoGebra. El marco teórico considera tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico, que refieren a la generalización de patrones figurales, la sucesión matemática y el uso de GeoGebra. Se utilizó una metodología cualitativa, basada en el diseño de tareas que considera tres etapas: selección de la sucesión, adaptación de la sucesión a un patrón figural y finalmente generación del patrón figural en GeoGebra. Como resultado se presenta el diseño de actividades relacionadas con patrones figurativos y su adaptación al entorno de GeoGebra. Se concluye que los patrones resultan ser una herramienta para introducir el álgebra escolar ya que la notación algebraica y la noción de sucesión están relacionadas. Además, el uso del software propuesto contribuye al enfoque del docente y del alumno para aplicar la tecnología como herramienta de apoyo para el aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

ABSTRACT

This study's objective is to present a didactic proposal to promote algebraic reasoning in high school students working with GeoGebra. The theoretical framework considers three axes: didactic, mathematical and technological, that refer to the generalization of figural patterns, mathematical succession and GeoGebra. A qualitative methodology, design-based task, that considers three stages: succession selection, succession adaptation to a figural pattern and finally generation of the figural pattern in GeoGebra. As a result, design of activities related to figural patterns and their adaptation to GeoGebra's environment is presented. It is concluded that patterns turn out to be a tool to introduce school algebra since algebraic notation and notion of succession are related. In addition, using proposed software contributes teacher and student's approach to apply technology as a support tool for learning and teaching algebra.

DEDICATORIA

A mi esposo por su apoyo y amor incondicional durante mi carrera y antes de ella. A mis padres por darme un hogar lleno de amor y educarme con el valor de la superación personal; en cada uno de mis logros su nombre siempre estará presente. A mis hermanos por acompañarme en cada una de las etapas de mi vida y ser parte de mi proceso de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme llegar a la culminación de esta etapa. Agradezco también el apoyo y comprensión de mi esposo en el desarrollo de este trabajo. A mi familia por mantenerse siempre unida y por impulsarme para llegar a esta nueva meta y a quienes también doy las gracias por su apoyo y por confiar en mí siempre.
Agradezco a mis maestros y compañeros por su ayuda. A mi asesora de tesis la Dra. Lilia Patricia Aké Tec y a las personas que han hecho posible el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del álgebra siempre ha representado un área de difícil acceso conceptual para los estudiantes de secundaria y niveles posteriores. La enseñanza de esta rama de las matemáticas también ha representado un reto para los docentes, quienes tienen por objetivo el desarrollo de aprendizajes significativos en álgebra en los estudiantes. Frente a esta realidad actual, en este trabajo se propone como una ruta para el desarrollo del razonamiento algebraico, la generalización de patrones con apoyo del software de GeoGebra. La generalización de los patrones permite al estudiante describir el patrón y comunicar los cambios que se presentan en las posiciones de las figuras. También promueve la necesidad de utilizar literales para registrar el patrón en su término n-ésimo. Por otro lado, el ambiente dinámico de GeoGebra promueve que los estudiantes validen sus posibles expresiones de la regla general al poder generar las figuras de posiciones muy grandes. De esta manera, atendiendo al diseño de esta secuencia didáctica, el contenido de este trabajo está articulado en 5 capítulos.

En el capítulo 1 se desarrolla una parte fundamental del trabajo de tesis: el planteamiento del problema, es decir, se especifican la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos. Además, se contextualiza con los antecedentes y se justifica el desarrollo de este estudio.

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos en los que se basa la presente investigación, los cuales se dividen en tres ejes: didáctico, matemático y tecnológico. Además, se presentan algunas definiciones de las palabras generalización y patrones sobre las cuales gira esta tesis, así como tres acciones propuestas por Carmona (2016) para definir un patrón.

El capítulo 3 muestra la metodología aplicada para el diseño de la secuencia didáctica. Esta metodología es de tipo cualitativo y presenta el diseño de tareas relativas a la generalización de patrones utilizando GeoGebra. Este diseño se desarrolla en tres etapas: (1) selección de la sucesión, (2) adaptación de la sucesión a un patrón figural, (3) generación del patrón figural en GeoGebra.

En el capítulo 4 se presenta el desarrollo de las sucesiones en GeoGebra comenzando con el análisis de una secuencia figural para obtener el patrón que la represente. Después con el patrón encontrado se lleva a cabo un segundo análisis para el diseño de este en GeoGebra. Además, se presenta una serie de preguntas a responder con la sucesión generada, mismas que forman parte de la secuencia didáctica.

Por último, en el capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas de esta tesis, así como una evaluación de los resultados obtenidos tomando como parámetros los objetivos que se describen más adelante. Además, se proponen posibles líneas de continuidad de la investigación presentada.

.

CAPÍTULO 1.
Problemática de la investigación

En el presente capítulo se desarrollan los antecedentes del estudio, el problema de investigación, así como el objetivo general y los objetivos específicos. Finalmente, el capítulo se cierra con la justificación del estudio.

1.1. Antecedentes

Cuando hablamos de generalización se hace referencia a la capacidad de ver una generalidad a través de lo particular y ver lo particular en lo general (López, 2016). El término ha sido estudiado y definido por varios autores a través de los años, coincidiendo la mayoría de ellos en que la generalización es un elemento indispensable para el desarrollo del pensamiento matemático en general y para López (2016), en particular, lo es para el desarrollo del razonamiento algebraico ya que permite la posibilidad de la abstracción matemática. Según este autor uno de los acercamientos más convenientes al iniciar el desarrollo del Pensamiento Algebraico es el determinar patrones de comportamiento. La importancia radica en que en esa generalización hay una justificación sobre la forma en la que cambian los datos proporcionados y lo más interesante es ver como obtenemos aquellos que aún no han sido proporcionados. Esto es, la capacidad de predecir valores (López, 2016).

Un trabajo realizado por Carmona en el 2016 en la Ciudad de México y, con estudiantes de bachillerato reveló que el potencial de este grupo de personas para reconocer patrones en sucesiones de objetos matemáticos y no matemáticos es alto. Sin embargo, no cuentan con un discurso formal y organizado de sus percepciones, pero sí logran identificar las peculiaridades del patrón que analizan. Para este autor, un patrón es una regla o ley de formación de una sucesión finita o infinita, de objetos matemáticos o no matemáticos (Carmona, 2016). Esta investigación de Carmona, fue realizada bajo el sustento de autores como Lee y Freiman (2006) quienes afirman que "la exploración de patrones es una actividad central en toda la matemática y las ciencias en general" (2006, citados por Carmona, 2016, p.6), también afirman que "el enfrentamiento temprano con tareas en las que se pide intentar expresar patrones matemáticamente, es una excelente herramienta para aprender el lenguaje algebraico y participar en actividades relacionadas con él" (Lee y Freiman, 2006, citados por Carmona, 2016, p.6).

Otra investigación más que habla sobre el pensamiento algebraico y su relación con las actividades que involucran la generalización de patrones es la que llevó a cabo Chalé (2013). Su estudio fue desarrollado en México con estudiantes de secundaria y, permitió detectar tres formas en las que la visualización influye en la elaboración de patrones gráficos que propician un buen acercamiento al álgebra. La primera de ellas va de la mano con la generalización factual que brinda la posibilidad de discriminar partes de las secuencias propuestas a partir de determinadas propiedades. En segundo lugar, se tiene la generalización contextual que tiene que ver con la posición de los elementos vinculada con la numeración de los mismos. Y por último expone que la visualización influye en la generalización de formulación simbólica que abstrae la regla que sigue la secuencia estudiada. Chalé menciona que las conclusiones obtenidas en su investigación son fuertes bases para seguir desarrollando la visualización simbólica que puede ser una muy buena estrategia para que a través de información gráfica se lleve al estudiante a detectar la regla que conforma el patrón de la secuencia.

Estudios realizados fuera del país como la investigación hecha por Castro y Ruiz (2018) en la Universidad de Granada en España, confirman que la enseñanza de las matemáticas debe tener entre sus prioridades fomentar las generalizaciones y las acciones asociadas a las mismas. Los autores, en esta investigación, exponen diferentes argumentos en el que la generalización de patrones es útil para la resolución de problemas, asimismo es útil para introducir el álgebra escolar y para visibilizar su potencial para fomentar el pensamiento matemático desde la educación infantil hasta bachillerato. Además, para Barbosa y Vale (2015) "los patrones se asocian comúnmente al pensamiento algebraico debido a la presencia en ellos de la abstracción y la generalización" (2015, citados por Castro y Ruiz, 2018, p.91).

Por otro lado, trabajos colombianos como el de Bautista et al. (2021), que se enfocó en analizar el razonamiento algebraico, usando patrones y secuencias geométricas, de 38 estudiantes de quinto grado de educación básica en una institución educativa, llegan a la conclusión de que, si bien la mayoría de los estudiantes lograron identificar un patrón en las secuencias, también hay ciertas limitaciones al explicar el porqué de las generalizaciones a las que llegaban para encontrar la posición n de la sucesión. Los autores, luego de llevar a cabo un diagnóstico con un grupo de estudiantes con actividades que involucran encontrar el patrón para determinar el número que le corresponde a la figura n, concluyeron que el álgebra es una pieza clave del éxito en el aprendizaje de las matemáticas. También afirman que las situaciones de variación y cambio son el fundamento principal de los procesos de generalización por lo que mediante actividades específicas se puede lograr que los estudiantes progresen en su desempeño algebraico.

Rojas y Vergel (2013) por su parte presentan un conjunto de actividades relacionadas con la generalización de patrones figurales y numéricos que después de analizarlos coincide con Bautista et al. (2021) en que son una buena estrategia para introducir el álgebra en la escuela. Por otro lado, en un estudio más reciente Vergel (2015) realizó una investigación con niños de 9 y 10 años colombianos para mostrar su desempeño en actividades de generalización de patrones, destacando la metodología que estos usan para consolidar un resultado, es decir, el proceso mediante el cual determinan el patrón requerido. Su investigación muestra que recursos semióticos como los gestos, el movimiento y la actividad perceptual son importantes en la manifestación del razonamiento algebraico en edades tempranas. Reafirmando así lo que muchos autores más expresan al decir que la generalización de patrones es una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.

Algunos autores como Ramírez (2017) exponen que, en la generalización realizada por los estudiantes, una de las mayores dificultades está en la designación simbólica de lo indeterminado, si bien, es posible encontrar una relación entre los elementos de la secuencia y expresarlo en una frase representativa usando como sujeto el número de la figura, el paso a la designación simbólica no se da (p. 4). Lo previo nos da un indicio de que es necesario lograr pasar hacia ese sentido algebraico al proponer una regla o fórmula que proporcione el valor de cualquier término. Rojas y Vergel (2013) citan a Radford (2006) al resaltar la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización. Además, aseguran que trabajar con actividades sobre generalización de patrones figurales es una buena estrategia para introducir el álgebra en el aula y que además posibilita a los estudiantes el poder acercarse a situaciones importantes para el desarrollo del razonamiento algebraico.

Sin ser menos importante, también existen estudios relacionados que llevan a reflexionar sobre el papel del docente para el desarrollo del razonamiento algebraico, utilizando la generalización de patrones. Por ejemplo, Zapatera (2018) propone incitar a los maestros a ir introduciendo el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos de modo que se les proporcione una herramienta que les sirva en su práctica docente. También afirma que: "La comunidad docente debe tomar conciencia de introducir el álgebra en sus alumnos y planificar tareas con patrones para desarrollar el pensamiento algebraico" (p. 66).

Todos estos estudios nos llevan a proponer actividades sobre patrones considerando que según las investigaciones son actividades ideales para promover este proceso de generalización que lleva a un excelente desarrollo de las competencias algebraicas. Asimismo, se propone el uso del software GeoGebra para modelar patrones lineales específicos que lleven a la generalización dado que según la revisión de la literatura la mayoría de los estudios son en lápiz y papel.

1.2. Descripción del problema

El estudio del álgebra en los distintos niveles educativos ha sido a través de los años un tema de vital importancia debido a que es la base del lenguaje matemático, esto según Janvier (1987), Kaput (1999) y Duval (1993), (citados por Flores y Auzmendi, 2016). Sin embargo, el aprendizaje del álgebra se hace difícil a la mayoría de los estudiantes (Castro, 2012) y de ahí la importancia de desarrollar estrategias que permitan a los alumnos y profesores desarrollar el pensamiento algebraico de manera correcta.

Muñoz y Ríos (2008) mencionan que la mayoría de los estudiantes e incluso docentes no les encuentran la utilidad a varios de los conceptos algebraicos y debido a esto no le dedican el tiempo suficiente a la implementación de actividades que permitan trabajar con generalizaciones que después conlleven a conjeturar y extraer relaciones importantes a partir del análisis de un caso determinado. Castro (2012) también menciona que la enseñanza tradicional que recibieron las personas en algún curso del álgebra en su etapa escolar ha hecho que cuando piensan en "álgebra" lo relacionan con la solución de ecuaciones, factorización de polinomios, funciones y gráficas. Lo previo ha hecho que la enseñanza esté estrechamente ligada a la concepción que tengan de la materia los diseñadores del currículo y los profesores que lo ponen en práctica.

En el álgebra también encontramos dificultades como la comprensión de lo que se está estudiando. En este sentido, Flores y Auzmendi (2016) expresan que ésta tiene una estrecha relación con los procesos de matematización dado que los estudiantes deben matematizar las situaciones mediante la extracción y reconocimiento de las matemáticas contenida en una situación del mundo real. Así mismo, proponen que para que un estudiante obtenga un alto nivel de comprensión es necesario que pueda usar los procesos de matematización que incluyen pensar, razonar, argumentar, justificar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, y representar. Castro (2012) expresa que dentro de las principales nociones que producen dificultad en el estudio del álgebra se encuentran:

- Clausura para las expresiones algebraicas.
- El lenguaje algebraico al que no le "ven" sentido y que los lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre generalización de ciertas propiedades.
- Preservación de la jerarquía de las operaciones.
- Uso de paréntesis.
- Percepción del signo igual como expresión de una equivalencia.

Castro (2012) también hace una clasificación de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra; en el primer grupo encontramos aquellas que son intrínsecas al objeto; en el segundo las que son inherentes al propio sujeto y en el último las que son consecuencia de las técnicas de enseñanza. En ese caso nos centraremos en el segundo grupo pues las dificultades están relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización que desempeñan un papel fundamental en el álgebra. El autor resalta también el hecho de que la generalización se considera como un camino hacia el aprendizaje del álgebra.

Sánchez y del Valle (2016) mencionan por su parte algunas de las causas de las dificultades en el álgebra entre las que destacan: (a) el tratamiento inadecuado de los símbolos, (b) generalización aritmético-algebraica, (c) álgebra como proceso de operacionalización, (d) falta de comprensión por quien enseña, (d) uso inadecuado del lenguaje, (e) ausencia del desarrollo abstracto, entre otros. También reconocen que hay dificultades de índole operacional como lo son: (1) la forma de ver el signo igual, (2) dificultades en la notación algebraica y, (3) falta de habilidad para expresar métodos y procedimientos para resolver problemas.

Por otra parte, hablando de errores dentro del álgebra, es importante reconocer el origen de estos. Muchos autores como Castellanos y Obando (2009) consideran que estos errores "surgen por las estrategias y reglas que cada alumno utiliza para la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas" (p. 2). Estos autores ponen especial énfasis en aspectos como la naturaleza y significado de los símbolos y letras, así como el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos, pues consideran que a estos se les atribuyen la mayoría de las veces los errores dentro del álgebra. También resaltan que los errores que se cometen al hacer generalizaciones de expresiones algebraicas, producto del análisis de determinadas situaciones, son una preocupación de los profesores de matemáticas en educación secundaria y media superior (o bachillerato).

López y Rodríguez (2012) clasifican los errores en el campo del álgebra en cuatro grupos:

- Errores de tipo conceptual: Mal uso de teoremas, propiedades, leyes y axiomas.
- Errores de tipo interpretativo.
- Errores de tipo procedimental.
- Errores de tipo imaginario.

En general el desempeño de los estudiantes en la materia del álgebra está en un nivel bajo, así lo refleja un análisis hecho por García et al. (2018) donde muestran que según los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos de los países miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), las puntuaciones más bajas en matemáticas se tienen en los estudiantes de Brasil y México. García et al. (2008) recalcan de igual forma la necesidad de que se incluyan, en las instituciones de educación superior y media superior, políticas de apoyo a estudiantes que carecen de las habilidades básicas en matemáticas. Los autores muestran los resultados de una encuesta realizada a 79 profesores de matemáticas a nivel universidad de 21 países en la que el 30% de estos encuestados afirma que la causa de que los alumnos tengan dificultades en matemáticas al pasar del bachillerato a la universidad es la falta de preparación en el nivel medio superior, así como una falta de desarrollo de habilidades básicas en matemáticas. Avilés (2013) por su parte, además de expresar que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una tarea complicada en el sistema educativo, también hace notar que es necesario que se motive al alumno pues los estudiantes de esta época no sienten el deseo de superación y les da igual estudiar o no.

La información recabada muestra el grave problema que existe en el ámbito del álgebra, por lo que es necesario implementar estrategias de enseñanza como apoyo al alumno en el camino de proveerlo de un pensamiento matemático con bases sólidas en el álgebra. Lo previo se logra mediante la implementación de actividades sobre generalización que permitirán además desarrollar otras habilidades como el análisis, la argumentación y la capacidad de utilizar diferentes métodos para la resolución de un problema. De esta manera, se plantea la siguiente pregunta que delimita el problema de investigación para la tesis:

¿Cuáles son las características que deben considerarse para el diseño de una secuencia didáctica para el desarrollo del razonamiento algebraico articulada en la generalización de patrones y el software GeoGebra?

Para contestar la anterior pregunta planteada se definieron el siguiente objetivo general y los objetivos específicos.

1.2.1. Objetivo general y objetivos específicos

Dada la descripción del problema y la descripción de los antecedentes se plantea el siguiente objetivo general (OG) de tesis:

> OG: Diseñar una secuencia didáctica, utilizando GeoGebra, para el desarrollo del razonamiento algebraico en el aula

Para la consecución del objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

OE1: Documentar actividades sobre generalización de patrones desde los reportes de investigación
OE2: Rediseñar las actividades para el trabajo en el aula a nivel bachillerato
OE3: Articulación de las actividades con apoyo en el software GeoGebra para el diseño de la secuencia didáctica.

1.3. Justificación del estudio

Derivado del análisis de la literatura antes citada y en respuesta a la evidente necesidad de buscar nuevas formas de desarrollar actividades que propicien el desarrollo de competencias algebraicas nace la propuesta de incorporar el software GeoGebra en la modelación de patrones lineales. La importancia de esto recae en que si bien hay mucha investigación referente a la importante relevancia que tiene el uso de la generalización de patrones como una estrategia que impulsa de manera significativa el desarrollo del pensamiento algebraico, la mayoría de estas investigaciones han sido llevadas a cabo en lápiz y papel. De esta manera, la propuesta que presenta esta tesis tiene el plus de brindar al estudiante la posibilidad de explorar una función totalmente diferente de GeoGebra ya que principalmente esta herramienta es usada para la graficar funciones, figuras geométricas, cuerpos geométricos, resolución de sistemas de ecuaciones, entre otras utilidades.

Con la implementación del uso de GeoGebra para la modelación de patrones lineales mediante la utilización de diferentes comandos que este software nos proporciona, se pretende apoyar al alumno en la búsqueda de patrones dada una cierta secuencia y encaminarlo así a la generalización de estos. De esta manera el alumno podrá visualizar las secuencias de manera gráfica y podrá analizar al mismo tiempo el comportamiento de estas y cómo es que el patrón encontrado es el correcto. En este sentido los beneficiarios de esta implementación serán principalmente profesores y estudiantes que estén interesados en comenzar o reforzar su desarrollo del pensamiento algebraico pues como lo menciona la literatura consultada, estas actividades de generalización de patrones son una de las mejores estrategias para lograr reforzar este pensamiento.

Es importante mencionar de igual manera que con este proyecto se impulsa al profesor a entrar en una nueva manera de ver los patrones en una secuencia mediante el uso de una herramienta tecnológica. Lo previo, además de apoyar al alumno en uno de los campos que son base de las matemáticas, lo estará también introduciendo en el uso de este software matemático que tiene una importante relevancia pues favorece la visualización. Recordemos que la visualización de los problemas mediante recursos gráficos es una herramienta que permite tener una primera idea de lo que se quiere resolver y de esta manera comenzar a desarrollar el proceso para llegar a la solución.

CAPÍTULO 2.
Fundamentación teórica

Los aspectos teóricos por considerar en esta investigación van desde las múltiples definiciones de las palabras generalización y patrones, hasta la importancia de estos términos como parte fundamental del desarrollo del razonamiento algebraico. Se incluye de igual manera la importancia de la tecnología como parte de las estrategias para desarrollar este razonamiento. Lo recabado de diversos escritos de autores que han estudiado estos temas es muy amplio y, aunque las definiciones y puntos de vista de cada uno de ellos son muy particulares podemos encontrar una misma esencia en todos ellos y se percibe una coincidencia en el punto de que el trabajo con patrones es una de las bases más importantes para desarrollar el pensamiento algebraico. De esta manera, este capítulo se articula en tres ejes: fundamento didáctico, fundamento matemático, fundamento tecnológico.

2.1. Fundamento didáctico: naturaleza de los patrones

El término patrón es una regla o ley de formación de una sucesión finita o infinita de objetos matemáticos o no matemáticos (Carmona, 2016). Zapatera (2018) entiende como patrón a aquellas sucesiones de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla. También en su trabajo de investigación cita a los autores Castro, Cañadas y Molina (2010) cuando definen a un patrón como: “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (p. 55). El análisis de un patrón está orientado a la determinación del término n-ésimo. Es en este sentido que, Carmona (2016) hace énfasis en las acciones para definir un patrón las cuales son:

- Acción 1. Describir el patrón. Muchas veces para los estudiantes es difícil comunicar lo que han percibido por lo que en esta etapa se sugiere que se realicen intentos por expresar la percepción en voz alta.
- Acción 2. Registrar un patrón. En esta etapa hay que plasmar las ideas en un lenguaje visible utilizando símbolos, una comunicación escrita o bien recursos gráficos. Al escribir las ideas y discutirlas se contribuye a que el estudiante pueda comprobarlas y modificarlas
- Acción 3. Validar la formulación. En esta etapa se verifica la utilidad de la regla encontrada que permite determinar la posición n-ésima.

En la siguiente Figura 2.1, se presenta un patrón. Se advierte que en la posición 1, se tiene cuatro cuadritos, en la segunda posición hay siete cuadritos, y así sucesivamente. Lo previo se corresponde con la acción 1 de describir el patrón. La segunda acción consiste en registrar el patrón, es decir, describir con algún lenguaje el patrón. Por ejemplo, en la primera posición hay 3 cuadritos más 1; en la segunda posición hay 6 cuadritos más 1; en la tercera posición hay 9 cuadritos más 1. Esto se aproxima a la necesidad de utilizar símbolos: $a_n = 3n + 1$. Finalmente, la tercera acción de validar la formulación consiste en verificar si lo encontrado es válido para todas las posiciones y para el término n-ésimo.

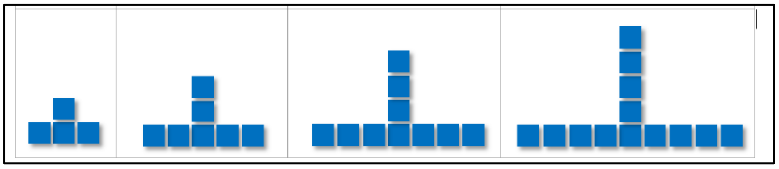


Figura 2.1: Patrón figural en el contexto geométrico de carácter lineal
Fuente: López (2016, p. 94)

El estudio de los patrones está fuertemente ligado a la noción de generalización. Así lo indica López (2016) cuando cita a Mason et al. (1985) y expresa que "la generalización permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto en común a todas ellas" (p. 56). En este sentido, es la capacidad de ver una generalidad a través de lo particular y ver lo particular en lo general. El autor también resalta que la importancia de generalizar un comportamiento está en la justificación sobre la forma en la que cambian los datos proporcionados y, más aún, en la obtención de aquellos que no han sido proporcionados. Esto es, la capacidad de predecir valores. López, también cita al Grupo Azarquiel (1993), en Serres, (2007, p. 177) al definir tres fases de la generalización:

- Fase 1. Visión de la regularidad, la diferencia y la relación entre las partes. Es decir, comenzar por distinguir entre las características de cada situación analizada, aquello que no cambia y que es común a todas ellas.
- Fase 2. Exposición verbal. En esta fase toca comunicar lo que se observó, es decir, el modelo detectado.
- Fase 3. Expresión escrita. Formalizar las ideas para que quede un registro de ellas.

Otros autores como Kinach (2014) coinciden en que la generalización es una forma de razonamiento y un acto de abstracción fundamental en las matemáticas: "Se refiere ya sea a identificar elementos comunes en todos los casos o de aumentar la comunalidad más allá del dominio del patrón original" (Kinach, 2014, citado por López, 2016, p. 56). Encaminar entonces la definición de generalización hacia una definición puntual de generalización de patrones es una tarea que han hecho varios autores; en el caso de López (2016) expresa que: "para poder generalizar el patrón de comportamiento es necesario, en primera instancia, el análisis de la forma en la que se dan los cambios entre estados, tanto de manera numérica como visual” (p. 75), es decir, hay que encontrar esas características comunes entre los objetos que están siendo estudiados.

En las investigaciones de Zapatera (e.g. Zapatera, 2018; Zapatera y Callejo, 2011) se establecen las siguientes estrategias para resolver problemas de generalización de patrones lineales:

- Estrategias aditivas. El estudiante observa el patrón de crecimiento y realiza un recuento dibujando la figura o sumando el patrón de crecimiento hasta llegar al término requerido partiendo de una figura cualquiera o de la primera figura.
- Estrategias funcionales. El estudiante relaciona la posición de la figura y el número de elementos de ésta mediante la función afín $f(n) = a \bullet n + b\ (b \neq 0)$

  Donde:

  a = Patrón de crecimiento

  b = Término independiente que se mantiene constante
- Estrategias proporcionales. El estudiante halla el número de elementos mediante razonamientos proporcionales en base a la función lineal $f(n) = an$, donde no se considera el término independiente que se mantiene constante (ver Figura 2.2)

Estrategias
- E. aditivas
  - Dibujo
  - Recuento iterativo → f(n) = f(1) + (n-1) ·a
  - Recuento recursivo → f(n) = f(p) + (n-p) ·a
- E. funcionales
  - Función local → f(n) = a·n +b, n determinado
  - Función global → f(n) = a·n +b, n indeterminado
- E. proporcionales → f(n) = a·n

Figura 2.2: Estrategias identificadas en la generalización de patrones

Fuente: Zapatera (2018, p. 55)

En la siguiente Figura 2.3 se resumen las características del fundamento didáctico relativo al estudio de los patrones.

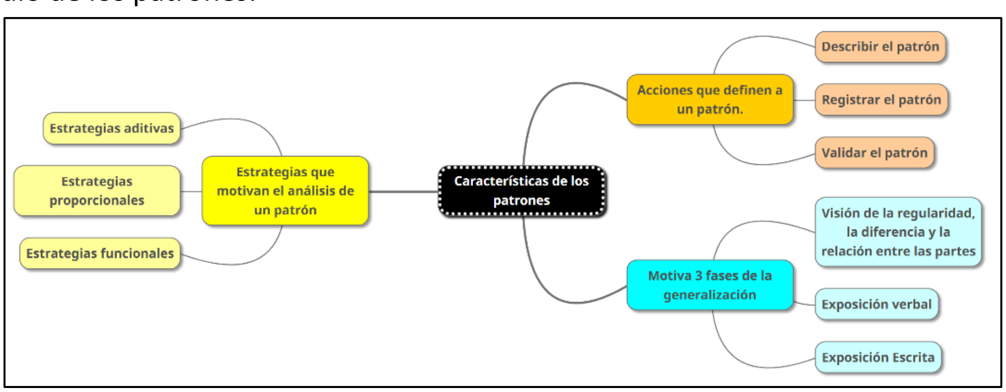


Figura 2.3: Características de los patrones

Fuente: Elaboración propia

2.2. Fundamento matemático: sucesión

El análisis de patrones está relacionado con la noción de sucesión y la generación de una relación funcional que describe el comportamiento del patrón. Es importante también definir que es una sucesión. En el caso de la Real Academia propone la siguiente definición de sucesión: Aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, es decir, la sucesión será de puntos, de números de un cierto tipo, de funciones, etc. Si son esos los elementos del conjunto imagen, estas sucesiones pueden ser lineales o cuadráticas y de acuerdo con estas, es posible encontrar ciertas leyes que permitan descifrar el término n. Estas leyes son lo que conocemos como patrones, de los que ya se habló anteriormente, es decir, aquello que es común entre los elementos de la sucesión, esto es, una relación biunívoca entre los elementos del conjunto de los números naturales y el conjunto formado por todos los elementos de la sucesión. En este proceso de obtener el patrón de una secuencia van involucradas acciones que tienen que ver con procedimientos lógicos como el análisis, la síntesis, la abstracción y la generalización.

Por otro lado, Collins (1987) también propone, al expresar una sucesión como: un número de cosas o acontecimientos que se presentan uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón definido, por lo general moviéndose por etapas hacia un resultado particular. Stewart et al. (2010) define una sucesión como un conjunto de objetos, números, figuras, etc., colocados en un orden específico en donde hay un primer término, el cual puede denominarse a_1, un segundo término a_2, un tercero a_3 y así sucesivamente, con "n" entero y a_n el n-ésimo término. Siendo "a" una función en "n".

De esta manera, se puede comenzar a indagar a cerca de la utilidad de este término pues desde los primeros cursos de educación básica el estudiante comienza a estudiar secuencias y conforme va avanzando en su trayecto educativo, se acerca el estudio de las sucesiones. En el marco de este trabajo se aborda esta noción a partir de patrones figurales lineales que serán generados en GeoGebra. Se retoma como ejemplo la Figura 2.1, antes aludida en la que las posiciones refieren a los términos de la sucesión: $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13$.

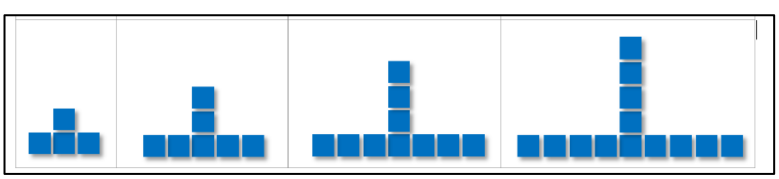


Figura 2.1: Patrón figural en el contexto geométrico de carácter lineal
Fuente: López (2016, p. 94)

El comportamiento para el n-ésimo término de la secuencia está dada por $a_n = 3n + 1$ o bien $a_n = (2n + 1) + n$

2.3. Fundamento tecnológico: GeoGebra

Pasando al campo tecnológico resalta mucho lo expresado por Avecilla et al. (2015):

> “Los estudiantes pueden beneficiarse de diferentes formas de integración de la tecnología, nuevas oportunidades de aprendizaje se proporcionan en entornos tecnológicos, lo que podría proveer a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento en base a la visualización y exploración de objetos y conceptos matemáticos en entornos multimedia” (p.121).

Lo previo tiene mucho sentido y sobre todo utilidad en esta época donde usar la tecnología ya se considera una obligación. Dentro de estas cuestiones tecnológicas sin duda las herramientas visuales tienen gran impacto en el análisis matemático debido a que facilita la vinculación del aprendizaje con la aportación de soluciones matemáticos a problemas específicos. Es aquí donde entra el software GeoGebra como herramienta facilitadora de procesos de abstracción, con esta herramienta según puede mostrarse como construir una relación entre un modelo geométrico y un modelo algebraico (Avecilla et al., 2015). Esto es un apoyo considerable a la hora de trabajar en el reconocimiento de patrones en sucesiones que lleven consigo a la generalización de estos pues tendremos una representación visual de lo que se está estudiando y de esta forma tendremos una mejor idea de a donde se quiere llegar. Avecilla et al. (2015) al realizar una serie de experimentos de la integración de GeoGebra en los procesos de enseñanza concluye que con esto se logra desarrollar la intuición en los alumnos, esto mediante la visualización de los procesos matemáticos que permiten la conexión entre la representación simbólica y visual.

Por otra parte Jiménez y Jiménez (2017) citan a Duarte y Martínez (2015) al expresar que las matemáticas son consideradas la base de los procesos complejos del conocimiento, donde es necesario que las personas posean el pensamiento crítico, reflexivo y analítico y donde estas desarrollan la capacidad para razonar, formular y solucionar problemas, por lo que es muy importante en los primeros años de la formación intelectual de cada persona para desarrollar las competencias matemáticas básicas. Partiendo entonces de esta necesidad de implementar estrategias que propicien el desarrollo del pensamiento matemático, Jiménez y Jiménez (2017) proponen que una buena herramienta para alcanzar este desarrollo es incluir la tecnología dentro de la enseñanza ya que de esta manera se despierta en gran medida el interés del alumno en las actividades.

Vemos entonces que los autores citados anteriormente coinciden en la necesidad de incluir en la enseñanza de las matemáticas recursos tecnológicos, específicamente en esta ocasión se propone el uso de GeoGebra que, para Ruiz et al. (2013) es potenciador del pensamiento variacional dentro del cual se encuentra el manejo de funciones y la identificación de patrones existentes en secuencias. Por su parte Díaz (2018) expresa que este software permite analizar mejor el objeto de estudio que se tenga pues se puede observar desde diferentes perspectivas dicho objeto.

Hablemos también de los beneficios que esta interfaz ofrece, comenzando con que es muy fácil de usar puesto que tiene comandos sencillos y una sección de ayuda. Al tener estas características apoya al estudiante en un aprendizaje guiado y experimental. Además, dado que es una herramienta muy flexible se pueden personalizar los gráficos y modelos que el alumno crea para así tener un trabajo más adaptado a lo que se busca y que por supuesto proporcione los elementos requeridos para dar solución al problema planteado.

Lo expuesto anteriormente reafirma la importancia de incluir una herramienta tecnológica en las estrategias de enseñanza de las matemáticas, en especial en materia del álgebra que es la base de esta disciplina. Esta herramienta fungirá como un apoyo visual al estudiante quien podrá a través de ella modelar aquello que requiera y al mismo tiempo comenzará a adquirir otras habilidades como lo son el análisis.

CAPÍTULO 3.
Metodología del estudio

La metodología del estudio es de tipo cualitativo que presenta el rediseño de tareas relativas a la generalización de patrones utilizando GeoGebra y adaptadas al nivel bachillerato. El rediseño o diseño de tareas siempre ha jugado un papel importante en la investigación en Matemática Educativa, pues tal como lo señala García (2019) las tareas son el fundamento del aprendizaje matemático. Sin embargo, no siempre ha sido un foco de interés entre los investigadores. El autor señala que generalmente en las investigaciones se pone mayor relevancia en los resultados, mientras que el proceso de diseño de las tareas se suele presentar sin profundidad. Además, según García (2019), una interpretación del diseño de tareas como trayectorias hipotéticas de aprendizaje permite describir objetivos de aprendizaje sobre un objeto matemático, así como las tareas a utilizar para lograrlos aunado a las hipótesis asumidas sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. De esta manera cobra relevancia la parte de las actividades propuestas para lograr los objetivos esperados, que es precisamente el enfoque de esta propuesta. En este sentido, se desarrolla el procedimiento que se utilizó para el rediseño de las tareas en las cuales se consideraron 3 ejes como fundamentación: Didáctico, Matemático y Tecnológico. Estos tres ejes justifican la elección y potencial de los patrones como medio para favorecer el razonamiento algebraico a través de uso de la tecnología.

A partir de esta fundamentación, se procedió como primera parte del diseño a la concepción del patrón figural, la cual se desarrolla en tres etapas: (1) selección de la sucesión, (2) adaptación de la sucesión a un patrón figural, (3) generación del patrón figural en GeoGebra. Posteriormente, como segunda parte se propusieron consignas, es decir, preguntas específicas para que los estudiantes generaran acciones matemáticas.

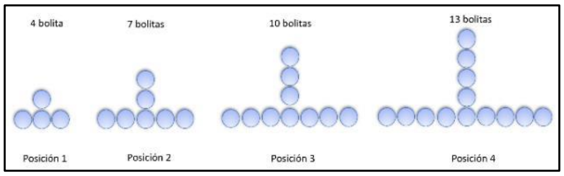
3.1. Primera parte: concepción del patrón figural

Durante la *primera etapa* de selección de la sucesión se determina el término n-ésimo de la sucesión. Para ejemplificar esta etapa a continuación se presenta la siguiente expresión:

$$a_n = 3n + 1 \quad con\; n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Una vez determinado el término n-ésimo, en la *segunda etapa* se adapta a un patrón figural, este patrón figural puede ser pensado de diferentes formas. Por ejemplo, en la Fig. 3.1 se aprecia que la secuencia del patrón figural lineal 1 y 2 se comportan de acuerdo con la expresión (1):

Patrón figural lineal 1



Patrón figural lineal 2

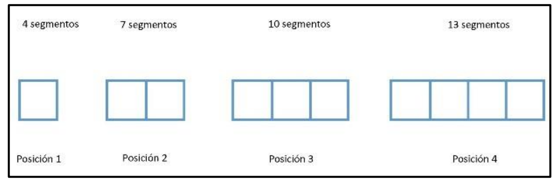


Figura 3.1: Patrones figurales lineales equivalentes
Fuente: Creación propia

De esta manera la adaptación de la sucesión al patrón figural es relevante debido a la influencia del análisis visual. Por ejemplo, para el patrón figural lineal 2, de la figura 3.1 se puede obtener la expresión (1) si visualmente se advierte que el segmento vertical que cierra el último cuadrado es constante, es decir, en la primera posición hay 3 segmentos más un segmento que cierra el cuadro (remarcado en color morado), en la segunda posición hay seis segmentos más un segmento que cierra el cuadrado y así sucesivamente. Esto se puede ver en la Fig. 3.2:

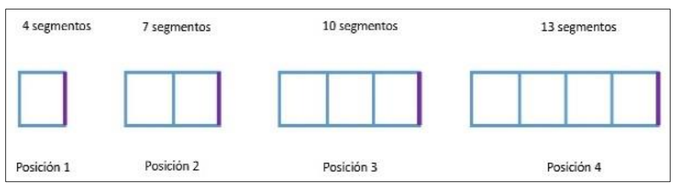


Figura 3.2: Patrón lineal equivalente descompuesto
Fuente: Creación propia

Mientras tanto, en el patrón figural lineal 1, de la figura 3.1, se puede analizar visualmente para agrupar las bolitas. Así, en la segunda posición, hay dos grupos de dos bolitas en la horizontal y sobra una bolita; en la línea vertical hay un grupo de dos bolitas. En la tercera posición, hay dos grupos de 3 bolitas en la horizontal, sobra una bolita y en la línea vertical hay un grupo de tres bolitas. Este razonamiento se puede apreciar en la Figura 3.3:

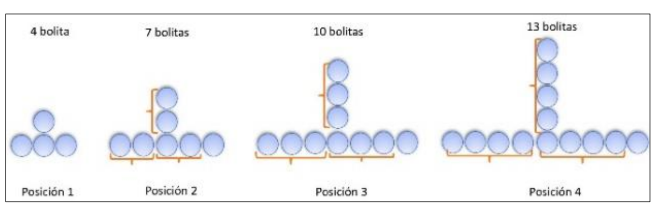


Figura 3.3: Patrón figural lineal descompuesto
Fuente: Creación propia

Con la descomposición anterior se obtiene la expresión (2) y se advierte que, (1) y (2) son expresiones equivalentes.

$$a_n = (2n + 1) + n \quad con\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

En la *tercera etapa*, una vez seleccionada la sucesión y adaptada a algún patrón figural se procede su incorporación en el ambiente GeoGebra. Mostraremos un ejemplo con la incorporación del patrón en la Fig. 3.4, que evidencia que GeoGebra facilita el análisis visual del patrón al generar tantos elementos de la sucesión como se defina.

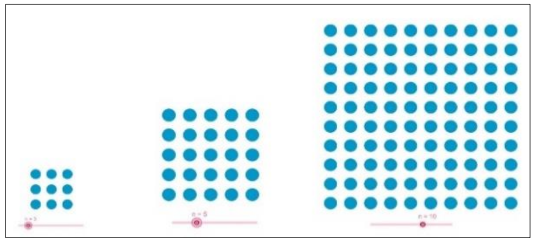


Figura 3.4: Patrón figural cuadrático en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Una de las limitaciones del trabajo en lápiz y papel es que precisamente reproducir la secuencia de figuras dadas. Con GeoGebra se favorece la generación de diversas posiciones del patrón y coadyuba a que el estudiante valide sus propuestas para el término n-ésimo.

3.2. Segunda parte: propuesta de consignas

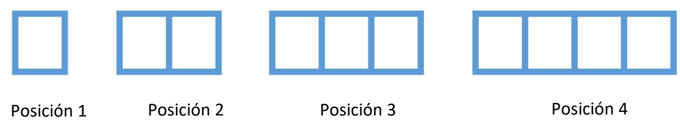
Una vez determinados las expresiones que se corresponden con las secuencias de figuras, es necesario, plantear preguntas a los estudiantes para generar la actividad matemática correspondiente. Esta parte es relevante porque los patrones al ser desarrollados desde preescolar hasta bachillerato, las consignas o preguntas se adaptan al nivel educativo.

Para la generación de las consignas utilizamos el posicionamiento de Zapatera (2018) quien alude que las consignas de generalización se proponen de acuerdo a:

a) Una generalización cercana en las que se solicita calcular el valor $f(n)$ para n "pequeño", por ejemplo $n = 5$ y que se puede obtener mediante recuento utilizando dibujos o llevando el recuento a través de una tabla de valores.
b) Una de generalización lejana en las que se pide calcular el valor de $f(n)$ para n "grande" y que requiere la identificación de un comportamiento invariante que no necesariamente se ajusta a una regla general.
c) Una expresión de la regla general que puede ser denotada de manera verbal, pero idóneamente en niveles educativos avanzados tendría que ser una expresión algebraica. Esta regla general permite calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n.
d) Un proceso inverso para hallar el valor de la posición (n), dado el número de elementos $f(n)$.

De esta manera, una tarea puede estructurarse de la siguiente forma:

Analiza la siguiente figura y utiliza el material dispuesto en GeoGebra para contestar las preguntas que se te plantean:



1. En la posición 7, ¿cuántos palitos habrán formando los cuadrados adosados?
2. En la posición 18, ¿cuántos palitos habrán formando los cuadrados adosados?
3. ¿Cuántos palitos habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 49 palitos, ¿en qué posición nos encontramos?

Figura 3.5: Ejemplo de tarea sobre un patrón figural lineal
Fuente: Creación propia

De acuerdo con lo desarrollado en este apartado, en el siguiente capítulo se detallan los resultados obtenidos explicitando el proceso de diseño de las tareas.

CAPÍTULO 4.
Secuencia didáctica: Patrones, Sucesiones y GeoGebra

Dada una sucesión de dibujos, figuras geométricas o solamente números, hay varias preguntas que pueden surgir, una de ellas es ¿qué figura o que número sigue? Para contestarla es necesario hacer un análisis de esta con la finalidad de identificar aquello que se agrega a la figura o número anterior, o bien, como es que van formándose las nuevas figuras. En algunos de estos casos es inmediato percibir cual es el cambio, sin embargo, en algunos otros se recomienda ir haciendo un análisis más detallado.

Este cambio de una figura a otra es lo que definimos como patrón de la secuencia, y es aquella expresión que va a permitir pasar de una figura a otra, o más aún poder decir exactamente será la figura en una posición enésima sin la necesidad de ir dibujando figura por figura.

Es importante hacer mención que en este estudio haremos referencia a patrones lineales, es decir, aquellos en donde la diferencia entre términos de una sucesión es un valor constante y por tanto podríamos decir que es un poco más sencillo la obtención del patrón que necesitamos. Ejemplo de un patrón lineal es el que se obtiene de la sucesión de números se aprecia en la siguiente Figura 4.1.

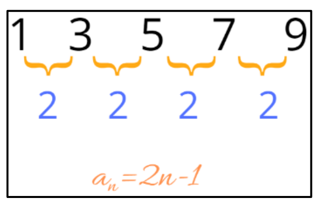


Figura 4.1: Sucesión lineal
Fuente: Elaboración propia

donde puede verse que cada término se obtiene al sumarle dos unidades al término anterior, lo cual nos llevará a la obtención del patrón $a_n = 2n - 1$, donde n representa la posición del término, la cual es multiplicada por 2 y se le resta una unidad.

Por otro lado, también se presentan patrones cuadráticos, mismos que pueden llegar a ser un poco más complejos y en los cuales para llegar al siguiente valor de la sucesión se le suma un valor que también va creciendo, este valor resulta ser constante. A continuación, se expone esta situación en la Figura 4.2:

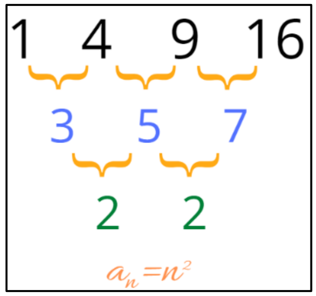
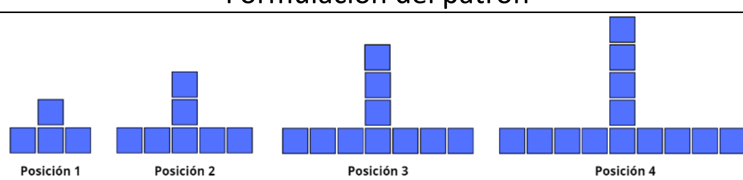


Figura 4.2: Sucesión cuadrática
Fuente: Elaboración propia

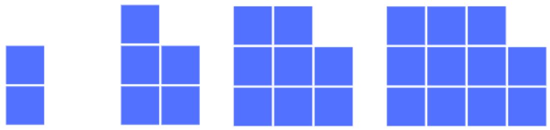
En este ejemplo notamos que el patrón que sigue esta secuencia está dado por $a_n = n^2$, donde de igual forma la n representa la posición del término.

A continuación, se presenta una tabla en donde se recopilan secuencias de figuras y las preguntas que de desprenden de las mismas, las cuales son un apoyo para encontrar el patrón de la secuencia. Si bien, el análisis de un patrón consiste en determinar una regla general que describa todos los términos de la secuencia hasta la posición n-ésima, también es posible promover un acercamiento pautado. Esto lo sugiere Zapatera (2018) quien indica que es posible promover un análisis de los patrones a través de encontrar términos cercanos, lejanos y el proceso inverso (este último consiste en determinar la posición dado como información el número de elementos).

Tabla 1.

Formulación del patrón	Término n-ésimo
 1. En la posición 6 y 7, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida? 2. En la posición 17 y 18, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida? 3. Si tenemos 73 cuadritos morados, ¿en qué posición nos encontramos? 4. ¿Cuántos cuadritos morados habrá en la posición n-ésima?	$\boldsymbol{a_n = 3n + 1}$

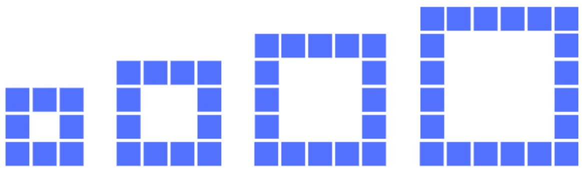
$a_n = 3n - 1$



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

1. En la posición 7 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?
2. En la posición 13 y 15, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?
3. Si tenemos 89 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?
4. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

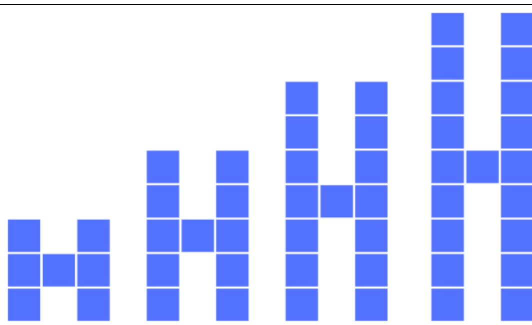
$a_n = 4n + 4$



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

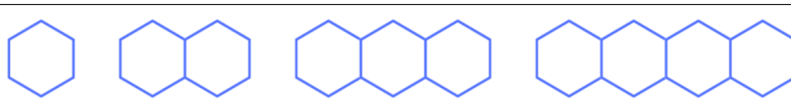
5. En la posición 6 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán el margen del cuadrado blanco?
6. En la posición 15 y 16, ¿cuántos palitos habrán el margen del cuadrado blanco?
7. Si tenemos 204 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?
8. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

$a_n = 4n + 3$



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

1. En la posición 5 y 6, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?
2. En la posición 16 y 17, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?
3. Si tenemos 143 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?
4. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?



$a_n = 5n + 1$

Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

---

1. En la posición 5 y 6, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?
2. En la posición 15 y 16, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?
3. Si tenemos 211 palitos, ¿en qué posición nos encontramos?
4. ¿Cuántos palitos habrá en la posición n-ésima?

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se desarrollarán la construcción de los patrones, pero previamente se introducirán los comandos a utilizar en GeoGebra.

4.1. Introducción a los comandos de GeoGebra

Antes de comenzar con la construcción de los patrones en GeoGebra, iniciaremos con una exploración de esta herramienta y de las funciones que se utilizarán para la elaboración de las secuencias. En la siguiente Figura 4.6 se muestra la pantalla de inicio de esta herramienta, donde se aprecia que tenemos una sección de una cuadrícula con un plano cartesiano, lo que permitirá que los cálculos que hagamos sean más fáciles; además GeoGebra brinda las opciones de dibujar puntos, rectas, segmentos de rectas, polígonos, rectas paralelas, curvas, entre otras funciones, lo que también será importante para el objetivo buscado.

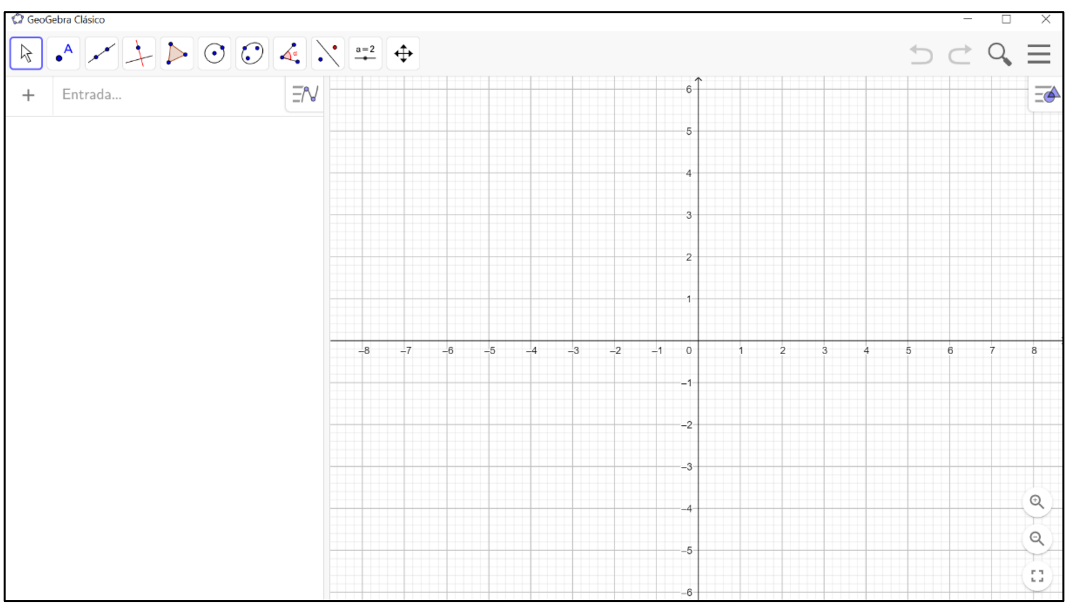
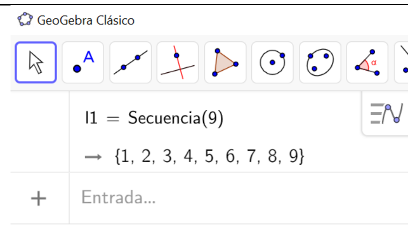
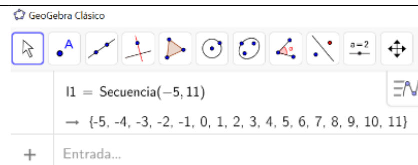
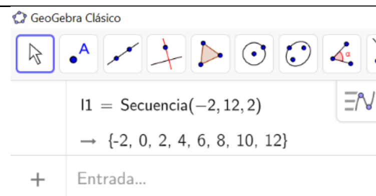
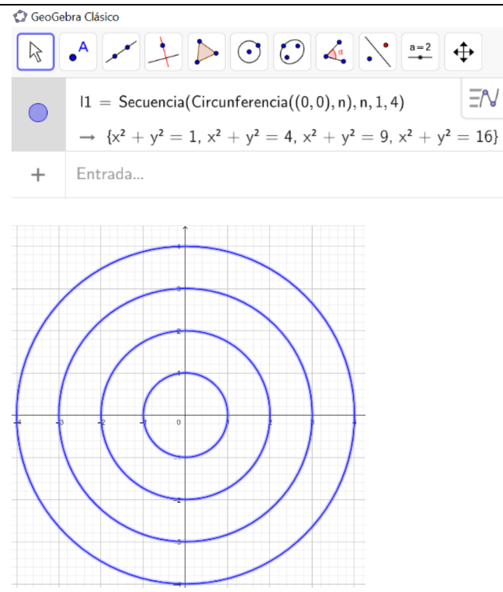
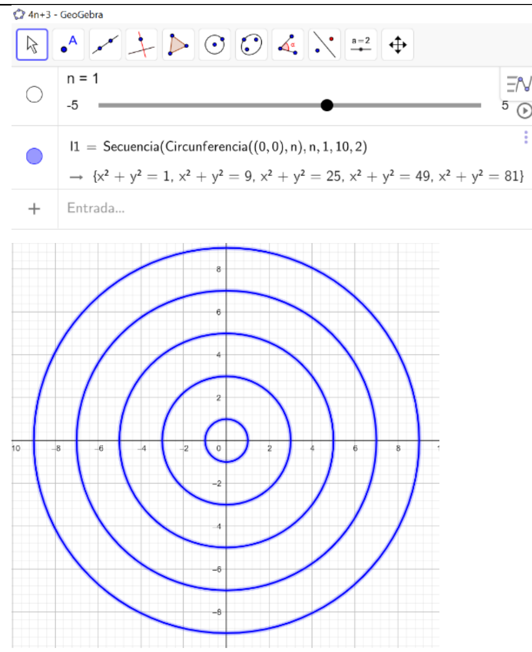
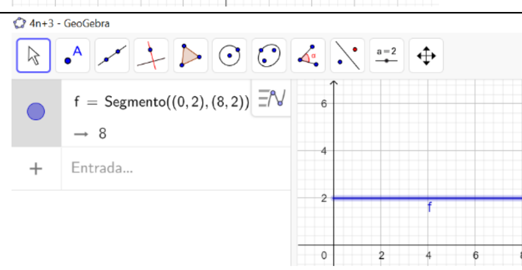
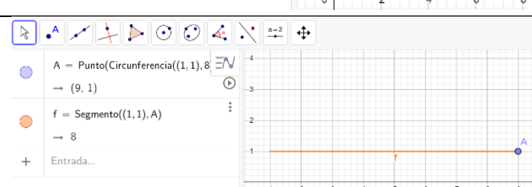


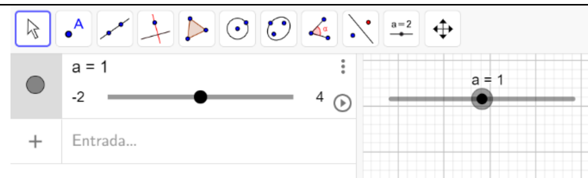
Figura 4.6: Pantalla de inicio de GeoGebra
Fuente: Elaboración propia

Ahora bien, en el apartado de entrada se ingresa la expresión que se desea graficar, y es aquí en donde estaremos trabajando con algunas funciones muy específicas de GeoGebra, las cuales se muestran a continuación en la Tabla 2.

Tabla 2.

Comando	Atributos	Descripción	Ejemplo
	<Valor final>	Crea una lista de números enteros de 1 hasta el valor final indicado.	
Secuencia	<Valor inicial>, <Valor final>	Crea la lista de números enteros desde el valor inicial hasta el valor final.	
	<Valor inicial>, <Valor final>, <Incremento>		

	<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>	
	<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>, <Incremento>	
Segmento	<Punto (extremo)>, <Punto (extremo)>	
	<Punto (extremo)>, <Número (longitud)>	

Deslizador	<Mín>, <Máx>, <Incremento>, <Velocidad>, <Longitud>, <Es Ángulo>, <Horizontal>, <Animación>, <Aleatoria Booleana>	

Fuente: Creación propia

4.2. Análisis de la primera sucesión: término n-ésimo $a_n = 3n + 1$

Haremos una primera inspección de la secuencia que se presenta a continuación en la Figura 4.3.

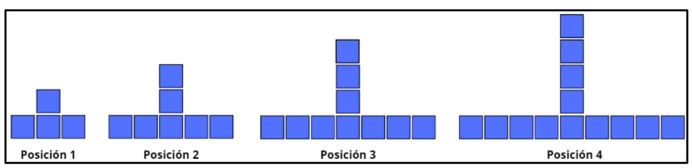


Figura 4.3: Sucesión gráfica $a_n = 3n + 1$

Fuente: Elaboración propia

Se puede notar primeramente que si contamos el número de cuadrados que forman cada figura, se tiene que la primera posición tiene 4 cuadrados, la segunda 7, la tercera 10 y la cuarta 13, con esta información puede elaborarse un diagrama como los presentados al principio de este capítulo, el cual queda de la siguiente manera (Figura 4.4):

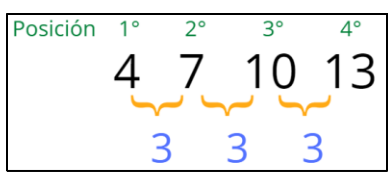


Figura 4.4: Sucesión numérica de $a_n = 3n + 1$

Fuente: Elaboración propia

Este gráfico permite ver que, para obtener el 5° término, basta sumarle tres unidades al término anterior, sin embargo, esto aún no nos da la expresión algebraica para el patrón que se busca. Por esto es necesario analizar un poco más cada figura, y sobre todo se tiene que encontrar una relación entre el número de cuadrados y el término al que corresponde cada figura. Observando la siguiente Figura 4.5 pueden hacerse varias anotaciones.

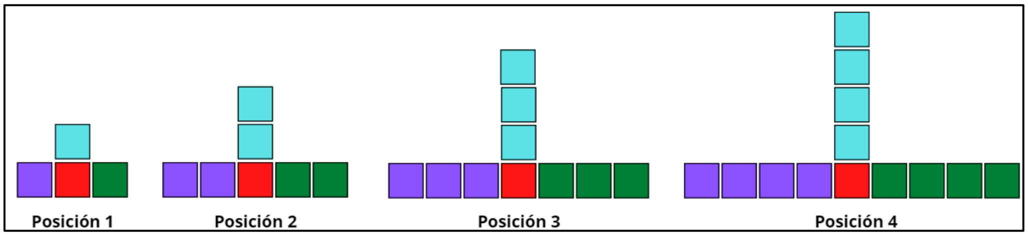


Figura 4.5: Sucesión grafica de $a_n = 3n + 1$ por bloques
Fuente: Elaboración propia

- El número de cuadrados que forman cada figura va aumentando de tres en tres empezando en el número 4, algo que ya se había expuesto.
- Notemos que hay un cuadrado que permanece fijo en todas las figuras y que además es de alguna manera el centro de la figura (cuadrado rojo).
- En cada figura hay tres grupos de cuadrados con la misma cantidad de estos que rodean al cuadrado rojo en tres de los lados del cuadrado.

En el tercer punto puede observarse la relación entre el término de la sucesión y la cantidad de cuadrados que tiene la figura, pues notemos que en la posición 1 hay tres grupos de un cuadrito, en la posición 2 hay tres grupos de 2 cuadritos, en la posición 3 hay tres grupos de tres cuadritos y en la posición 4 tenemos tres grupos de cuatro cuadrados. De este análisis podemos deducir que en la posición n habrá $3n$ cuadritos que rodean al cuadrito rojo, entonces completamos esta expresión con ese cuadrito rojo constante, y la expresión final sería: $3n + 1$, en donde n es la posición de la figura.

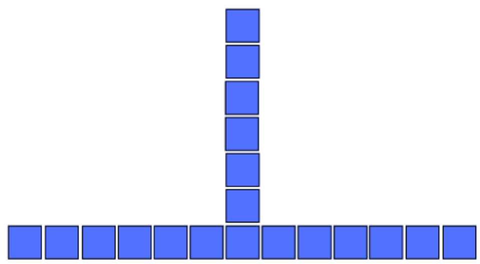
De esta forma hemos obtenido el patrón que sigue esta secuencia de figuras y podremos dibujar las posiciones que nos pidan o bien a partir de una posición y decir cuántos cuadritos formarán esta figura, esto respondería a las preguntas planteadas en la tabla 1, las cuales se responderán a continuación y se exponen los procedimientos para las mismas.

1. En la posición 6 y 7, ¿cuántos cuadritos morados habrán formado la T invertida?

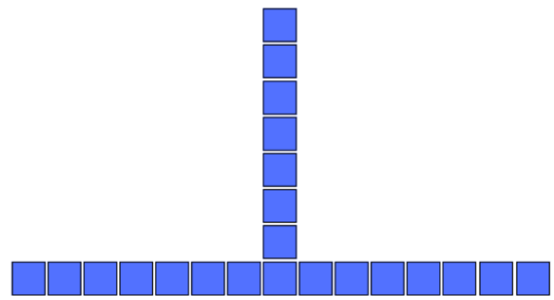
   Para responder esta pregunta se realizará una sustitución de la variable n dentro del patrón que ya encontramos, es decir:

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$3n + 1$	6	$3(6) + 1 = 18 + 1 = \mathbf{19}$
$3n + 1$	7	$3(7) + 1 = 21 + 1 = \mathbf{22}$

Teniendo ya estas respuestas también se pueden dibujar las figuras en las posiciones pedidas, las cuales son las siguientes:



Posición 6



Posición 7

2. En la posición 17 y 18, ¿cuántos cuadritos morados habrán formado la T invertida?

   Haremos el mismo procedimiento de la pregunta anterior

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$3n+1$	17	$3(17)+1=51+1=\mathbf{52}$
$3n+1$	18	$3(18)+1=54+1=\mathbf{55}$

   Los gráficos correspondientes son demasiado grandes, sin embargo, con el patrón establecido y la comprensión de este sabemos que forma tendrán estos gráficos.

3. Si tenemos 73 cuadritos morados, ¿en qué posición nos encontramos?

   Este proceso es el inverso de las dos preguntas anteriores pues ahora nos dan la cantidad de cuadritos y el procedimiento a realizar es el despeje de la variable n de la expresión del patrón de la secuencia.

Patrón	Despeje de n	Número de cuadritos en la posición n	Posición (n)
$3n+1$	$n=\frac{Num\ de\ cuadritos\ en\ la\ posición\ n-1}{3}$	73	$n=\frac{73-1}{3}$ =**24**

4. ¿Cuántos cuadritos morados habrá en la posición n-ésima?

   La respuesta a esta pregunta ya se ha dado al determinar el patrón de la sucesión porque esta expresión vale para cualquier número n.

4.2.1 Construcción de la sucesión en GeoGebra: término n-ésimo $a_n = 3n + 1$

En el análisis de los patrones figurales, llega un punto en el que dibujar la figura en una posición donde n empieza a crecer mucho, resulta complicado pues la cantidad de cuadritos a dibujar va creciendo de acuerdo con la expresión encontrada. Por ejemplo, en la posición 50 para la primera sucesión descrita con el patrón $3n + 1$, se tendrían que dibujar 151 cuadrados, y este número es relativamente grande. Por esto se propone el uso de la herramienta GeoGebra para modelar estos patrones y sea ahora el software quien vaya dando la figura en la posición que sea requerida. Esto coadyuba a que el estudiante pueda validar la expresión para el término n-ésimo.

Recordemos la primera sucesión con patrón lineal que estudiamos y lo que compete ahora es programar esa sucesión en GeoGebra para de esta manera lograr visualizar la figura en la posición que se desee. Para esto se tomará en cuenta el análisis que ya fue realizado y se sumará el trabajo en el plano cartesiano, lo que ayudará a establecer otra relación entre los vértices de los cuadrados y su posición dentro de la secuencia.

Observando los siguientes gráficos resaltan varios puntos de apoyo partiendo del hecho de tomar como primer vértice del primer cuadrado de la figura al origen del plano, es decir, el punto $(0,0)$ y de ahí se establecen cuales serían los siguientes vértices. En la elaboración de las figuras de la secuencia se hará uso en primer lugar del comando *Segmento* con los atributos (<Punto(extremo)>,<Punto(extremo)>), y este se insertará en una S*ecuencia* en donde se definirá una variable n asociada a un deslizador, lo que permitirá que se obtenga la figura en la posición n-ésima. Comenzaremos este proceso de análisis descomponiendo la figura en dos partes: la base horizontal de la figura y la parte vertical.

Parte 1: Segmentos horizontales

Centrándonos en la base horizontal de la figura, se dibuja un primer segmento que corresponderá a la base de la figura, lo llamaremos segmento 1. Para trazar dicho segmento necesitamos dos puntos, el primero de ellos siempre será $P_1(0,0)$ y el segundo punto tendra como ordenada el punto 0, resta solo encontrar una relación entre la abscisa de este punto y la posición que ocupa en la secuencia. A continuación se presentan las primeras cuatro figuras de la secuencia en el plano cartesiano y los puntos que forman el segmento base del mismo (ver Figura 4.7).

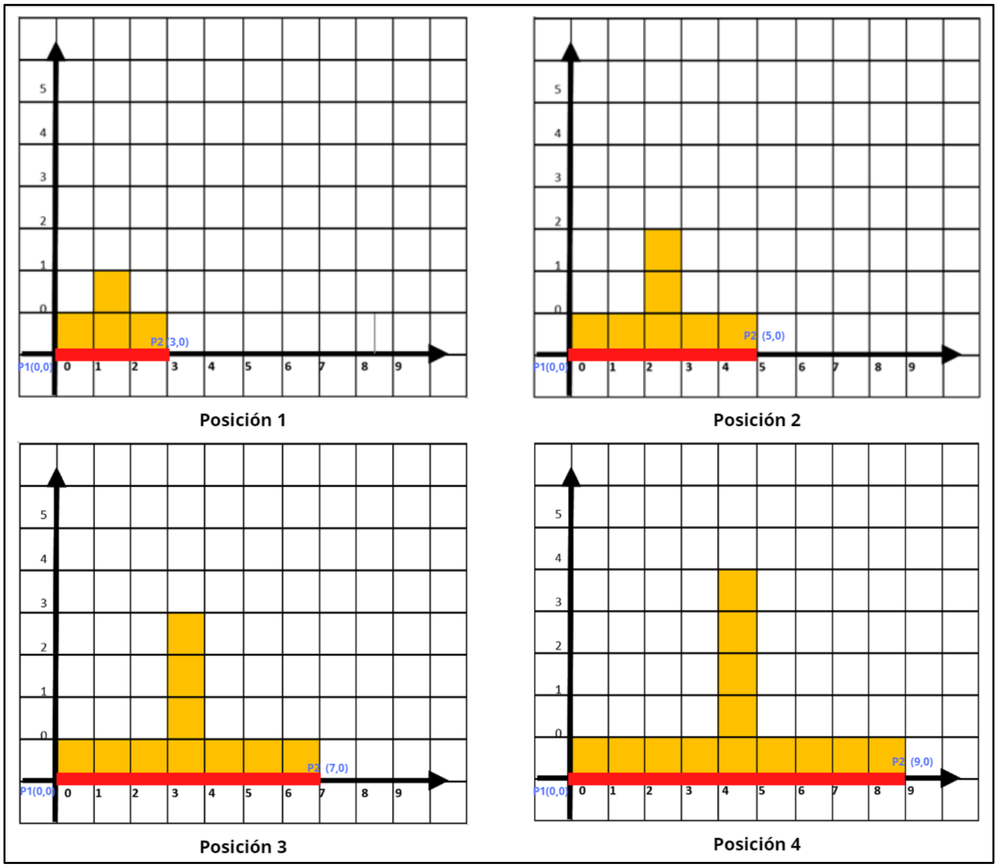


Figura 4.7: Primeros gráficos de la sucesión $a_n = 3n + 1$
Fuente: Creación propia

En la posición 1 la abscisa es 3, en la posición 2 es 5, en la 3 es 7 y en la 4 es 9. Ahora, ¿que tienen que ver estos números con la posición? Recordemos el primer análisis que se hizo para obtener el patrón de la secuencia, este se basó en la idea de que tenemos un cuadrado que funge como centro y alrededor de él se encontraban tres grupos de cuadrados con la cantidad de cuadros correspondiente a la posición, lo mismo ocurre aquí solo que esta vez serían dos grupos de cuadrados, lo que resultaría en una expresión de la forma $2i + 1$, donde i será la variable que irá cambiando en el deslizador que usaremos. Con esto se establecen los dos puntos extremos del segmento 1 serían $P_1(0,0)$ y $P_2(2i + 1,0)$, donde i varía desde la posición 1 hasta n. Para lograr que esto suceda en GeoGebra se usará ahora el comando *Secuencia* con los atributos (<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>). En la parte de expresión se tomaría el segmento 1 con la variable i, el valor inicial 1 y el final n. Al ingresar esta secuencia a GeoGebra se obtiene lo siguiente (ver Figura 4.8).

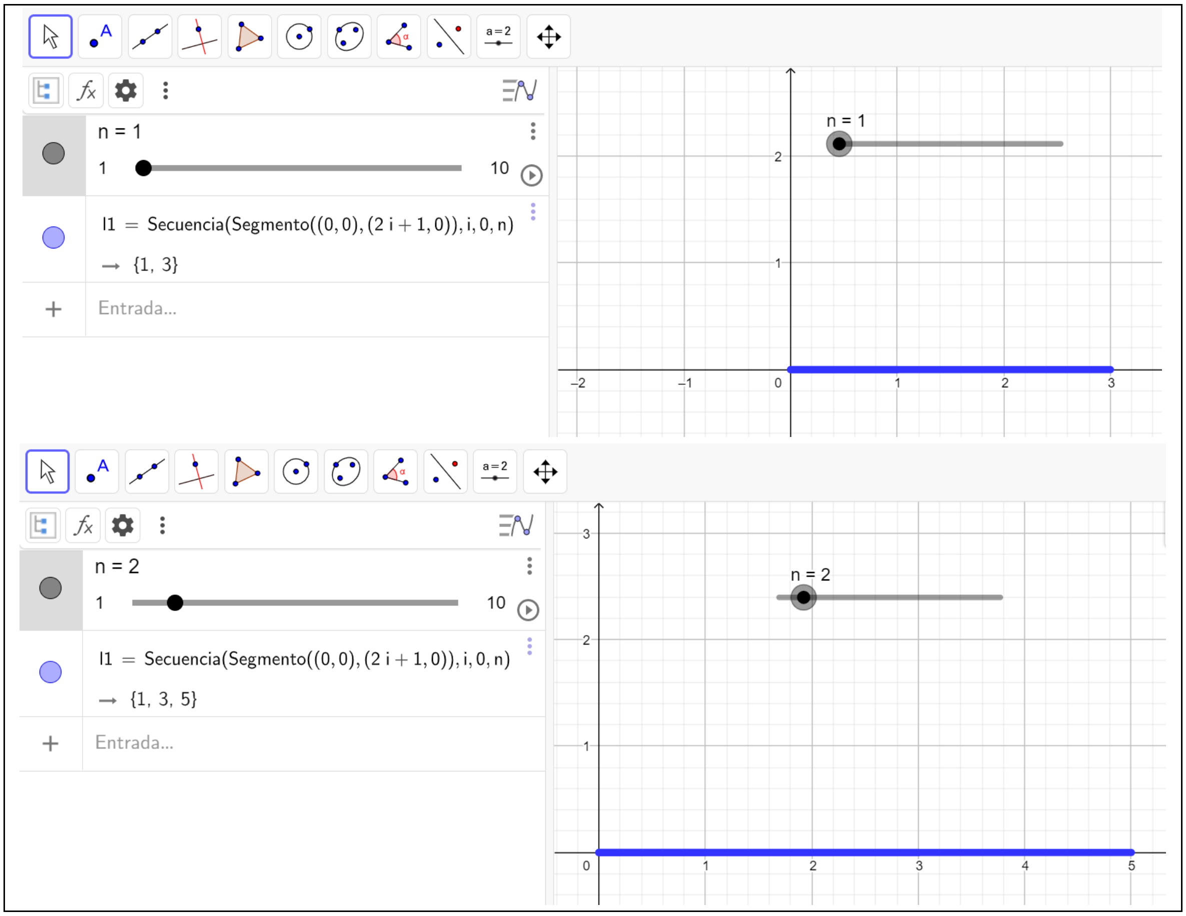


Figura 4.8: Segmento 1 en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Como puede observarse ya se tiene la base de la figura, que denotamos como segmento 1. El siguiente segmento por considerar es el paralelo al segmento 1 pero que está desplazado una unidad hacia arriba y que llamaremos segmento 2, por lo que los puntos extremos de este último serán $P_1(0,1)$ y $P_2(2i+1,1)$, donde lo que cambia es la coordenada de la ordenada que en este caso es 1. Luego, la nueva secuencia en GeoGebra se vería de la siguiente forma (ver Figura 4.9).

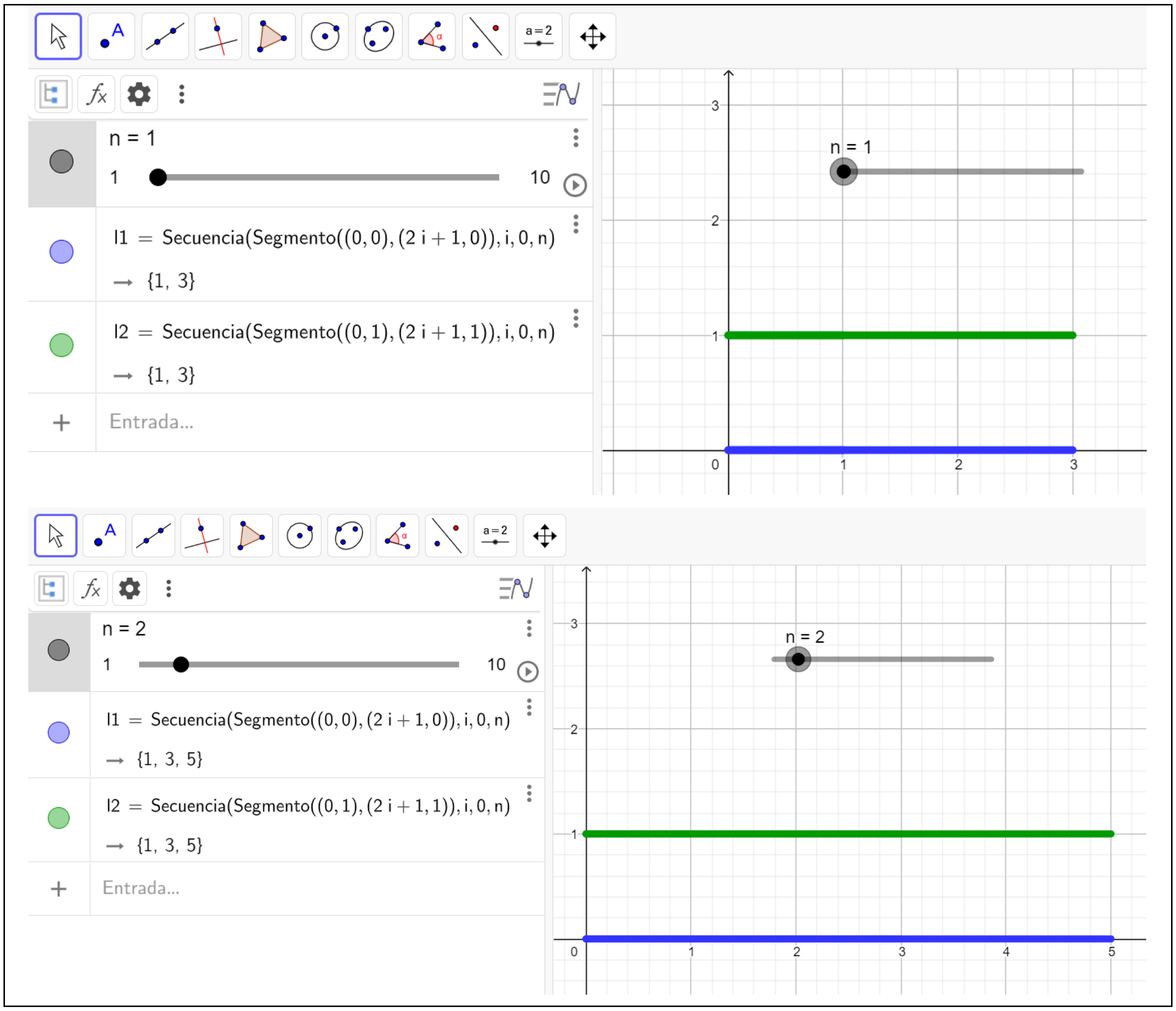


Figura 4.9: Segmento 2 en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Parte 2: Segmentos verticales

Para graficar la parte vertical de la figura, se comienza dibujando los segmentos verticales que dividirán al rectángulo que se forma en la parte de abajo en cuadrados que en este caso medirán una unidad por lado. Aquí usaremos nuevamente los comandos secuencia y segmento. Para definir los puntos extremos de los segmentos verticales que necesitamos y que en este caso le llamaremos segmento 3 a todo el conjunto de ellos, puede notarse que estos segmentos tendrán coordenadas $(i, 0)$ y $(0,1)$, donde i varía desde 1 hasta $2n+1$ pues recordemos que el último segmento que cerrará el rectángulo tendrá como puntos extremos los puntos $(2n+1,0)$ y $(2n+1,1)$ por el análisis que se hizo anteriormente. Entonces la secuencia queda definida de la siguiente manera (ver Figura 4.10).

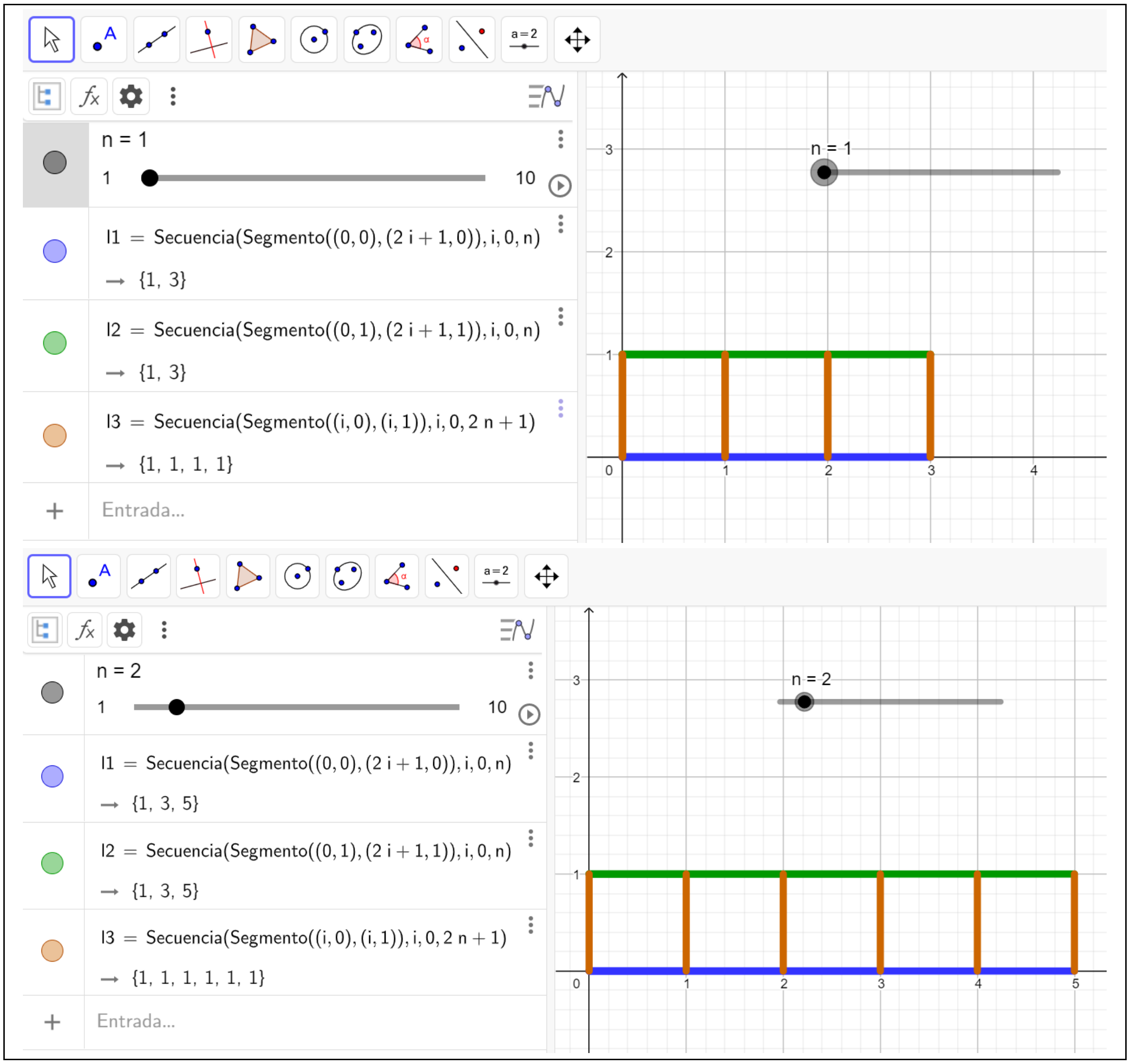


Figura 4.10: Segmento 3 en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Se tiene lista ya la parte de abajo de la figura, y solo queda graficar el tercer grupo de cuadritos que rodea a la figura por la parte de arriba. Se fijará la atención en los siguientes puntos extremos del segmento que delimita al rectángulo que se desea construir y se denotará como segmento 4.

La abscisa del primer punto extremo del segmento 4 tiene la forma $(n, 1)$ donde n indica la posición de la figura en la secuencia, y el otro extremo tendrá como coordenadas $(n, n + 1)$. Como estos dos puntos dependen de estrictamente de n, no es necesario usar el comando secuencia, con el comando segmento será más que suficiente. A continuación, se presenta la figura con este nuevo elemento agregado (ver Figura 4.11).

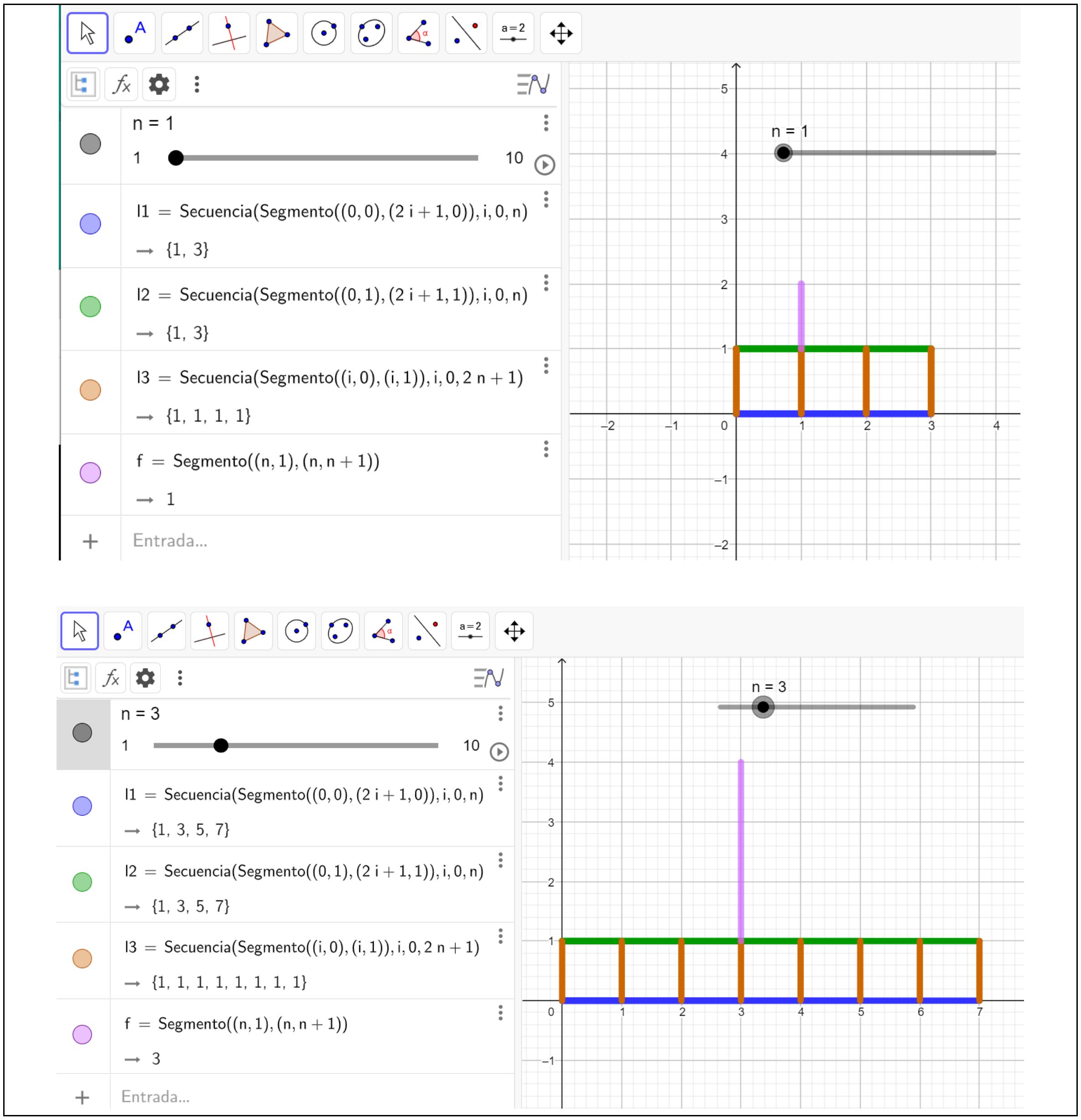


Figura 4.11: Segmento 4 en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Para graficar el siguiente segmento que es paralelo al anterior solo necesita ser desplazado una unidad hacia la derecha y las nuevas coordenadas serán $(n + 1,1)$ y $(n + 1, n + 1)$. Esto se pude apreciar en la siguiente Figura 4.12.

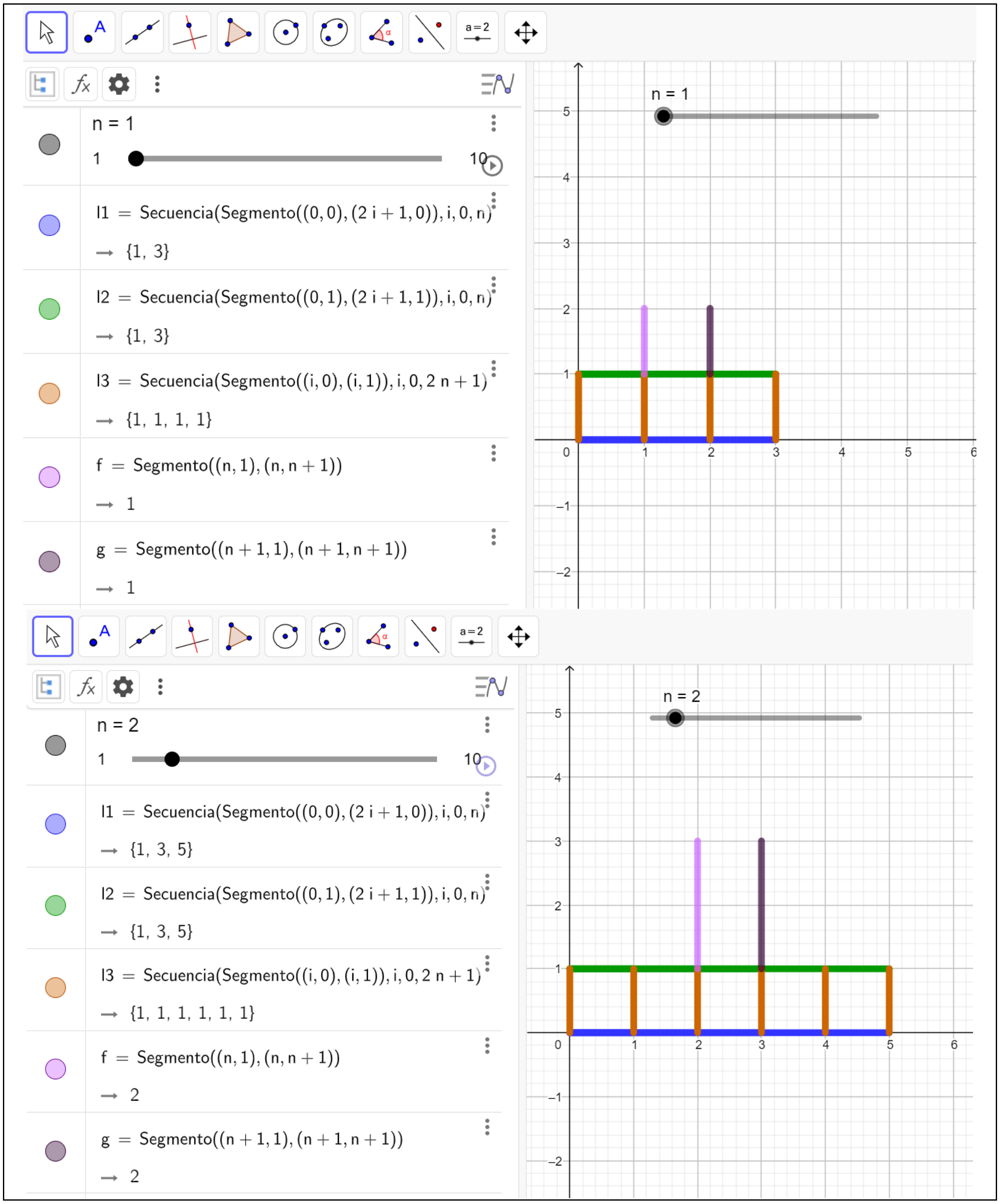


Figura 4.12: Segmento 4 en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Para graficar los segmentos que dividen a este último rectángulo que se está construyendo en cuadrados de una unidad de lado se usará una secuencia parecida a la creada anteriormente. Puede notarse que los extremos de cada segmento buscado tienen la forma

(n, i) y $(n+1, i)$, donde la variable i la haremos variar entre 1 y $n+1$. De esta forma se ha creado la secuencia pedida (ver Figura 4.13).

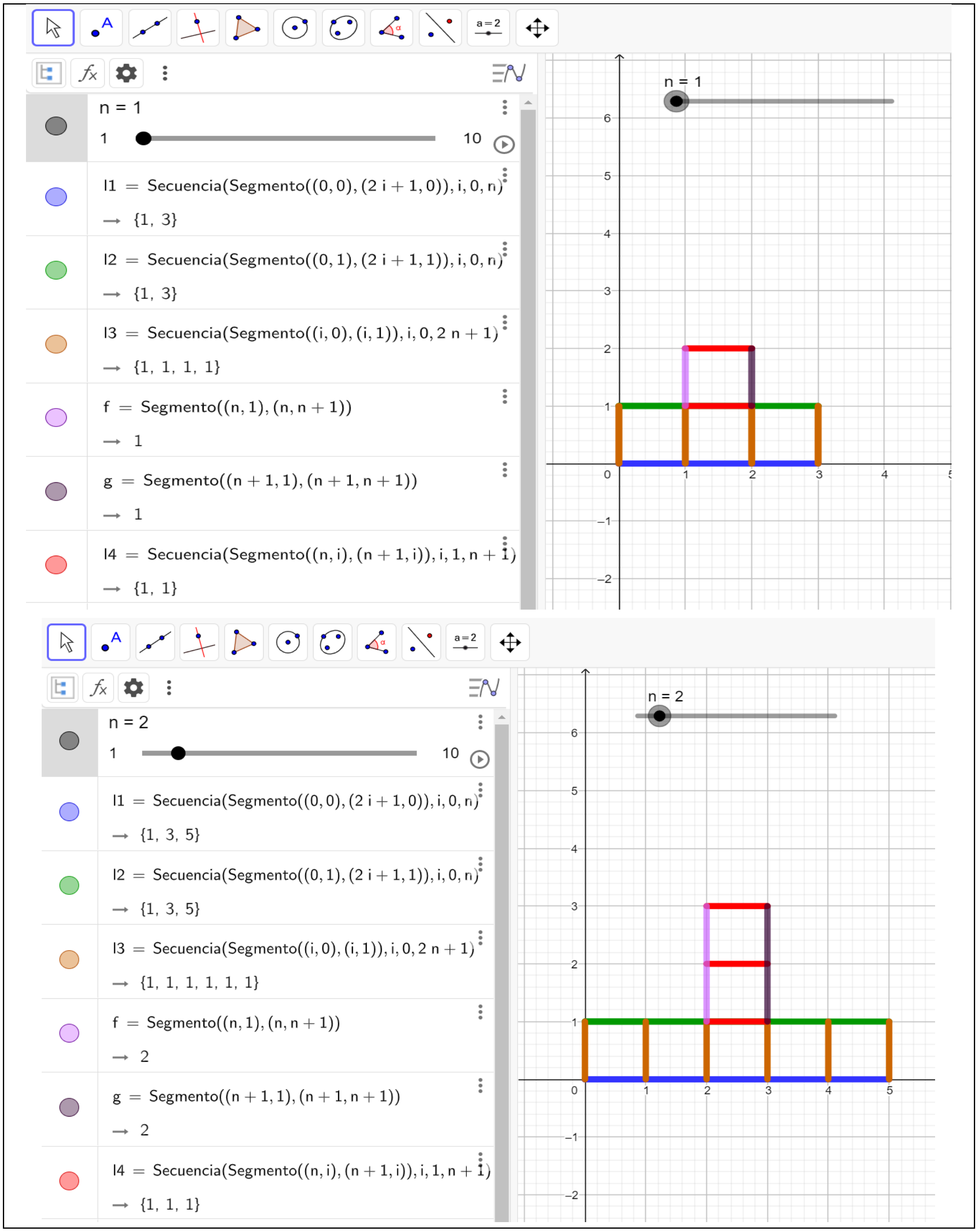


Figura 4.13: Segmentos horizontales pequeños

Fuente: Creación propia

4.3. Análisis de la segunda sucesión: término n-ésimo $a_n = 3n - 1$

Una primera inspección de la secuencia se presenta a continuación en la Figura 4.14.

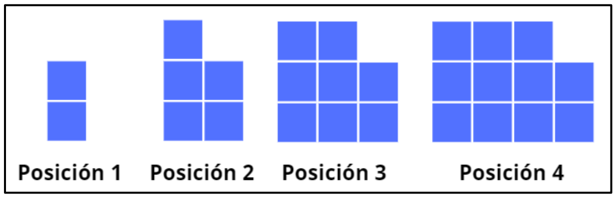


Figura 4.14: Sucesión $a_n = 3n - 1$
Fuente: Creación propia

Se puede notar primeramente que si contamos el número de cuadrados que forman cada figura, se tiene que la primera posición tiene 2 cuadrados, la segunda 5, la tercera 8 y la cuarta 11, esto puede mostrarse visualmente como se describe a continuación en la Figura 4.15:

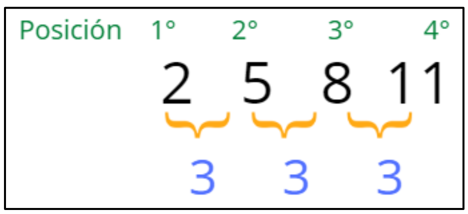


Figura 4.15: Sucesión numérica de $a_n = 3n - 1$
Fuente: Creación propia

Es posible notar que, para obtener el 5° término de la sucesión, basta sumarle tres unidades al término anterior, igual que en el ejemplo pasado, sin embargo, esto aún no nos da la expresión algebraica para el patrón que se busca, pues si bien en los dos ejemplos vistos hasta ahora la secuencia va aumentando de tres en tres, el patrón que siguen no es el mismo. Para encontrar el patrón correspondiente a esta secuencia es necesario analizar un poco más cada figura, y encontrar nuevamente una relación entre el número de cuadrados y el término al que corresponde cada figura. A partir de la siguiente Figura 4.16 pueden hacerse varias anotaciones.

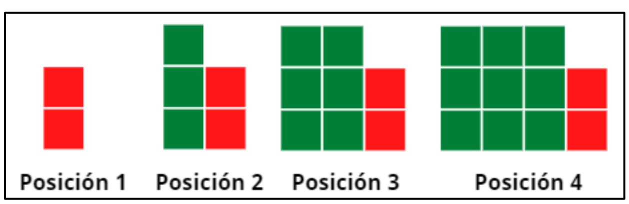


Figura 4.16: Sucesión gráfica de $a_n = 3n - 1$ por bloques
Fuente: Creación propia

- El número de cuadrados que forman cada figura va aumentando de tres en tres empezando en la posición 2, algo que ya se había expuesto.
- Notemos que la columna derecha de cada figura siempre tiene dos cuadritos (columna roja).
- En la posición 1 hay cero columnas de 3 cuadritos, en la posición 2 hay una columna de tres cuadritos, en la tercera posición hay dos columnas de tres cuadritos.

Ahora bien, lo que sigue es encontrar una relación entre la posición de la figura y el número de columnas de tres cuadritos que posee. Esta relación indica que, si en la posición 1 hay cero columnas, esto quiere decir que hay $n-1$ columnas. Para estar seguros de que la expresión es correcta solo basta sustituir la posición que se desee en esta expresión. Siguiendo con este análisis, puede notarse que se tendrán entonces $3(n-1)$ cuadritos que formarán las columnas de tres cuadritos en cada figura, y a esto se le sumará la columna de 2 cuadritos que es constante. La expresión final está representada por: $3(n-1)+2$, donde n es la posición de la figura. Más aún, este patrón puede simplificarse usando álgebra y dando como resultado la expresión: $3n-1$. En este sentido, el patrón promueve la obtención de expresiones equivalentes.

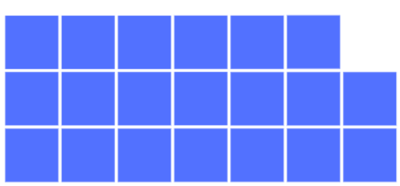
A continuación, se responden las preguntas propuestas en la Tabla 1 para esta secuencia y se exponen los procedimientos requeridos para contestarlas.

1. En la posición 7 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?

   Se procede a realizará una sustitución de la variable n dentro del patrón que ya encontramos, es decir:

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$3n-1$	7	$3(7)-1=21-1=\mathbf{20}$
$3n-1$	8	$3(8)-1=24-1=\mathbf{23}$

   Las gráficas correspondientes en estas posiciones son las siguientes:



Posición 7

Posición 8

2. En la posición 13 y 15, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?

   Haremos el mismo procedimiento de la pregunta anterior

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$3n-1$	13	$3(13)-1=39-1=\mathbf{38}$
$3n-1$	15	$3(15)-1=45-1=\mathbf{44}$

Las figuras en estas posiciones ya son demasiado grandes, sin embargo, con el patrón establecido ya se puede tener una idea de la forma de los gráficos.

3. Si tenemos 89 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

   En esta pregunta se realiza el mismo proceso inverso expuesto en el ejemplo pasado.

Patrón	Despeje de n	Número de cuadritos en la posición n	Posición (n)
$3n-1$	$n=\dfrac{Num\ de\ cuadritos\ en\ la\ posición\ n+1}{3}$	89	$n=\frac{89+1}{3}$ =**30**

4. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

   La respuesta a esta pregunta ya se ha dado al determinar el patrón de la sucesión porque esta expresión vale para cualquier número n.

4.3.1 Construcción de la sucesión en GeoGebra: término n-ésimo $a_n = 3n - 1$

En esta seción se describe el análisis de la sucesión anterior para poder trasladarla a GeoGebra y lograr visualizar figuras en posiciones alejadas. Esto se logrará siguiendo un proceso similar al expuesto para la sucesión anterior, en donde se buscó una relación entre los vértices de los cuadrados y la posición que ocupa cada figura en la sucesión.

Observando los siguientes gráficos (ver más adelante la Figura 4.17) resaltan varios puntos de apoyo partiendo del hecho de tomar como primer vértice del primer cuadrado de la figura al origen del plano, es decir, el punto $(0,0)$ y de ahí se establecen cuales serían los siguientes vértices. En la elaboración de las figuras de la secuencia se hará uso en primer lugar del comando *Segmento* con los atributos (<Punto(extremo)>,<Punto(extremo)>), y este se insertará en una secuencia en donde se definirá una variable n asociada a un deslizador, lo que permitirá que se obtenga la figura en la posición n-ésima. Para la construcción, la figura será descompuesta nuevamente en dos partes: un rectángulo de altura de 3 cuadritos y ancho variable de acuerdo a la posición de la figura y, por otro lado, una columna de dos cuadritos que irá siempre al final del primer rectángulo.

Parte 1: Segmentos horizontales y verticales de la subfigura verde

Se comenzará dibujando el primer rectángulo de 3 cuadritos de alto y longitud variable, para esto se llevará a cabo un proceso diferente al expueso en la sucesión anterior, en este caso se trazarán todas las líneas verticales que formarán a este rectángulo y luego todas las lineas horizontales que le hacen falta para completar el rectángulo cuadriculado. Puede observarse que la primera línea vertical para formar este rectángulo tiene como extremos los puntos $P_1(0,0)$ y $P_2(0,3)$, sin embargo un punto importante a considerar en esta situación es que este rectángulo aparece hasta la segunda posición, es decir en $n = 1$, solo se encuentra la columna roja de dos cuadritos. A continuación, en la Figura 4.17, se presentan las primeras cuatro figuras de a sucesión en un plano cartesiano, y a partir de estos gráficos se deducirá la expresión a usar dentro de la secuencia.

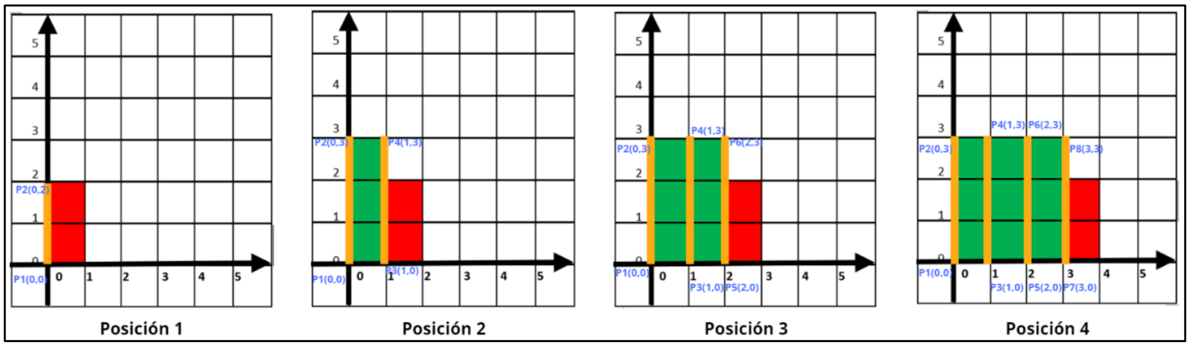


Figura 4.17: Primeros gráficos de la sucesión $a_n = 3n - 1$

Fuente: Creación propia

A partir de las figuras anteriores pueden hacerse varias anotaciones importantes, la primera de ellas es que en la primera posición no tenemos rectángulo verde por lo que empezamos a ver los puntos extremos de los segmentos verticales a partir de la posición 2. Luego, como resultado del análisis de dichos segmentos puede notarse que en la posición 2 los extremos inferiores de los segmentos son $(0,0)$ y $(1,0)$, en la posición 3 son $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,0)$ y en la posición 4 se encuentran $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$ y $(3,0)$. Lo previo nos da una relación entre la abscisa de estos puntos y el valor de n, es decir los puntos son de la forma $(i - 1,0)$, donde i varía entre 1 y n. Esta relación es la parte de los puntos inferiores de los segmentos, sin embargo, para el otro punto extremo del segmento solo cambiaremos la ordenada y quedan de la siguiente forma $(i - 1,3)$. Recordemos que en la primera posición no se va a dibujar ninguna recta pues en esta posición no tenemos ningún rectángulo verde.

Posteriormente, para que esto pueda representarse en GeoGebra, es necesario incluir un comando condicional, en este caso se usará el comando *Si* con los atributos <Condición> y <Entonces>. En la parte de <Condición> se establecerá la expresión $n > 1$, y, por otro lado, en el atributo de <Entonces> se insertará la secuencia de segmentos con puntos extremos en $(i-1,0)$ y $(i-1,3)$, donde i varía desde 1 hasta n.

Hasta este punto puede hacerse una anotación importante, pues en la posición número 1 no se ha graficado nada aún, sin embargo, si se analiza la secuencia se puede ver que sí se tendría que graficar un segmento vertical con extremos $(0,0)$ y $(0,2)$. Este segmento no se puede incluir en la secuencia ya definida, entonces se agregará un enunciado condicional que será válido para $n < 2$, y de esta manera abarcará el caso $n = 1$. Lo previo se justifica porque el comando condicional *Si* de GeoGebra no permite establecer igualdades. Todo lo anterior aplicado en GeoGebra puede verse en la siguiente imagen (Figura 4.18).

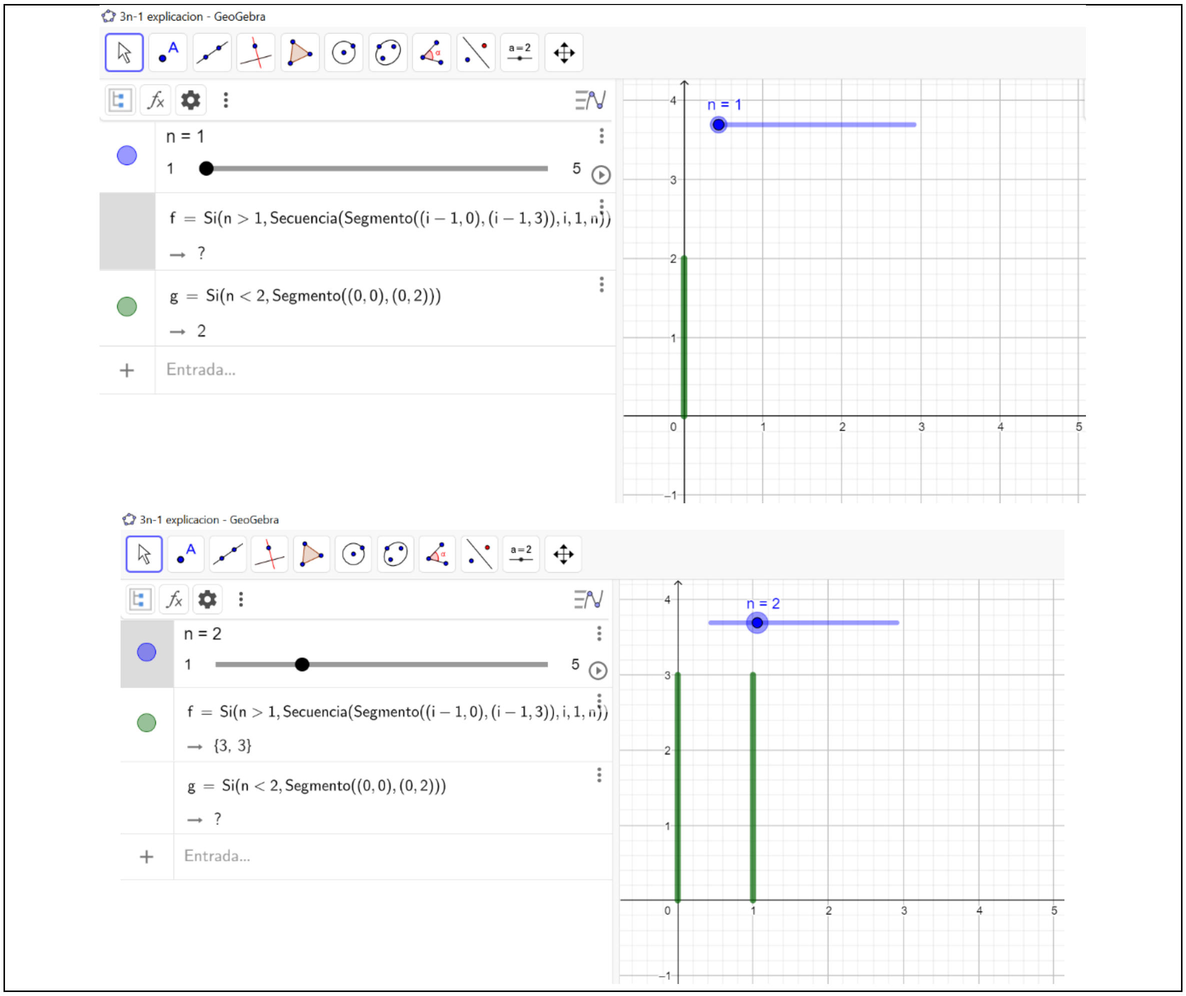


Figura 4.18: Segmentos verticales del rectángulo verde en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Se tienen los segmentos verticales correspondientes al rectángulo, ahora es necesario graficar los segmentos horizontales que completarán a dicha figura. Para esto se usa nuevamente una secuencia de segmentos que en este caso tendrán como extremos los puntos $(0, i)$ y $(n-1, i)$ donde i varía entre 0 y 3, y n es la posición de la figura dentro de la secuencia, esto debido a que estos segmentos horizontales tienen como punto extremo izquierdo los puntos en los que la abscisa es siempre 0 y la ordenada va desde del 0 hasta el 3. Por otro lado, el punto extremo derecho tiene la misma ordenada del punto anterior pero su abscisa es el valor de la abscisa del último segmento vertical, que ya se vio en el análisis anterior que tiene la forma de $n-1$, donde n es la posición de la figura en la secuencia.

Para poder mostrar esto en GeoGebra se volverá a utilizar el comando *Si* con los mismos atributos de <Condición> y <Entonces>; en la <Condición> se usará la misma que en la parte anterior, es decir $n > 1$, y en el <Entonces> se coloca la secuencia de segmentos con puntos extremos $(0, i)$ y $(n-1, i)$, y esto queda de la siguiente forma (Figura 4.19):

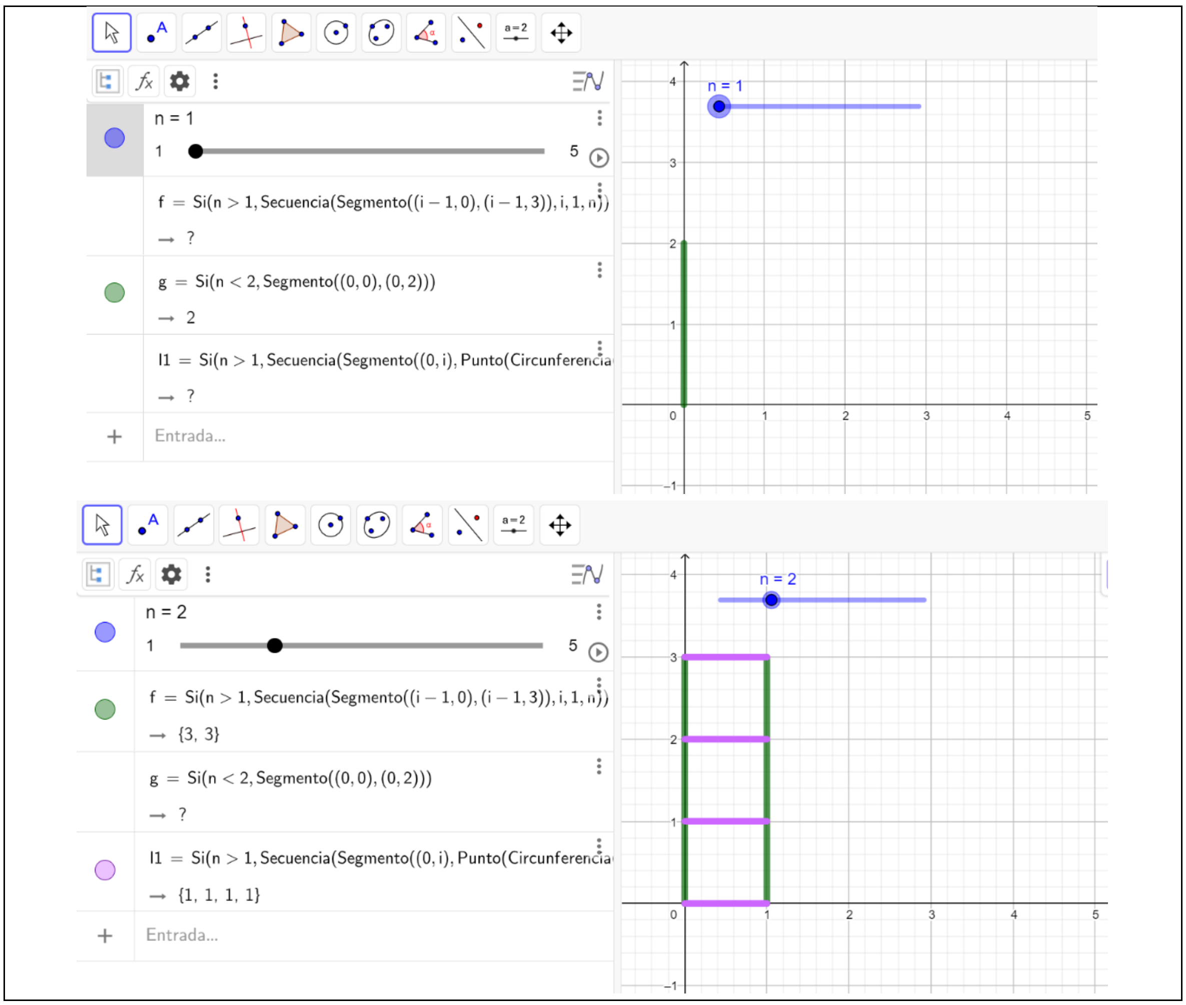


Figura 4.19. Segmentos horizontales del rectángulo verde en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Parte 2: Segmentos horizontales y verticales de la subfigura roja

Ya se tiene el primer rectángulo construido y para elaborar la última columna, que ya se ha dicho que debe tener dos cuadritos y puede hacerse la observación de que solo faltaría un segmento vertical al último para formar dicha columna (ver Figura 4.16 previamente expuesta), y este segmento tendrá coordenadas $(n, 0)$ y $(n, 2)$. Para graficarlo no será necesario usar una secuencia, solo el comando de *Segmento* con estas coordenadas, y en GeoGebra se vería de la siguiente manera (ver Figura 4.20).

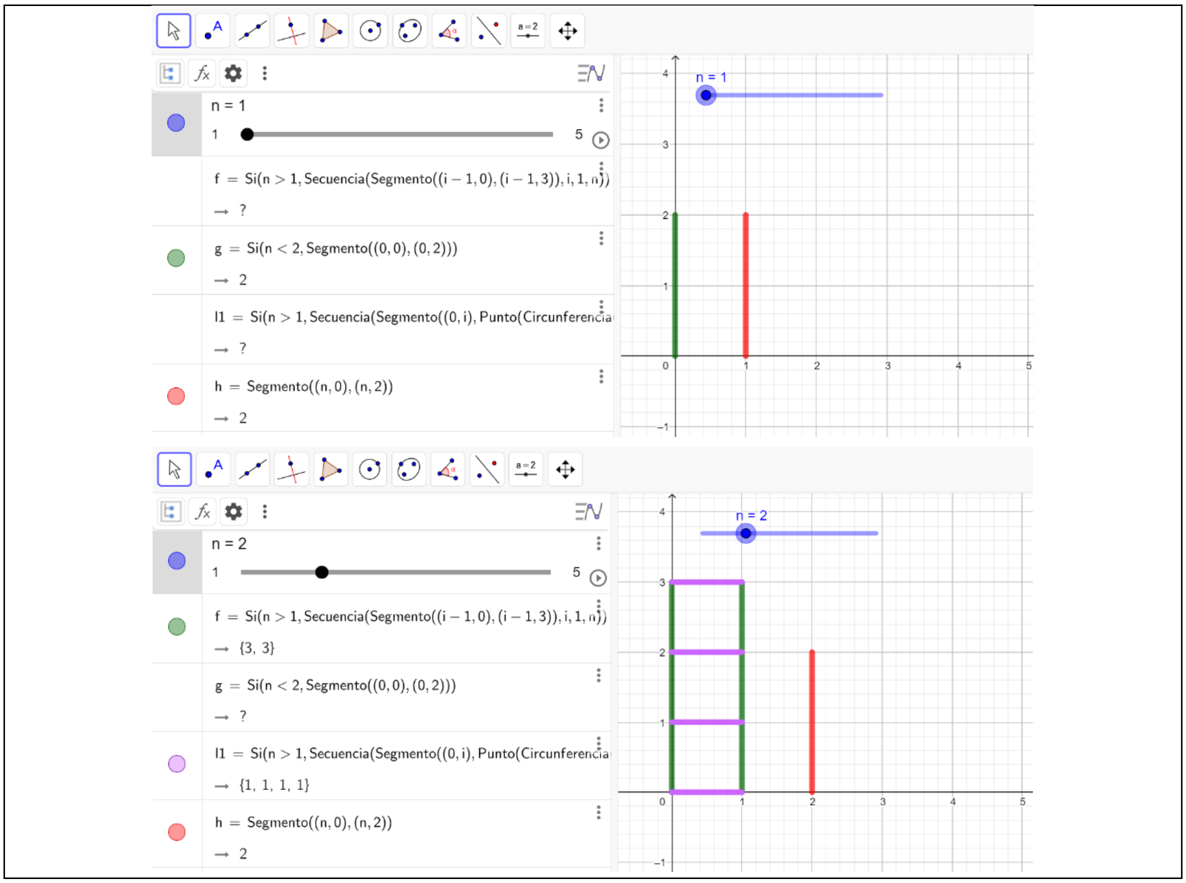


Figura 4.20: Segmento vertical de rectángulo rojo en GeoGebra
Fuente: Creación propia

La última parte por construir es la secuencia que dará como resultado las líneas horizontales que cerrarán esta última columna. Para llevar a cabo esta construcción es importante notar que los puntos extremos de estas líneas tendrán la forma $(n-1, i)$ y $(n-1, i)$, donde n es la posición de la figura en la secuencia y la variable i está entre 0 y 2. De esta manera, se tiene la secuencia de figuras deseada (ver Figura 4.21).

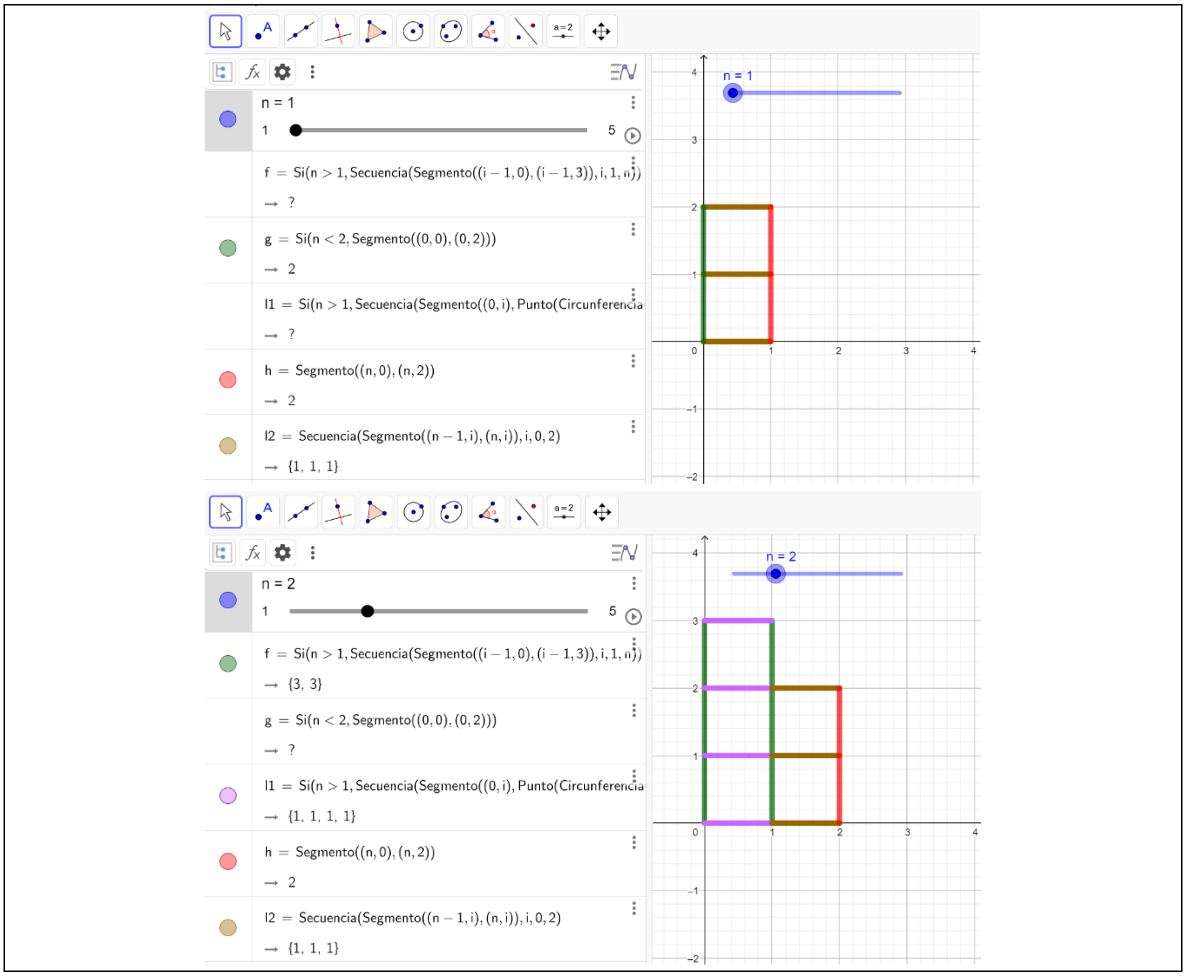


Figura 4.21: Segmentos horizontales del rectángulo rojo en GeoGebra

Fuente: Creación propia

4.4. Análisis de la tercera sucesión: término n-ésimo $a_n = 4n + 4$

Una primera inspección de la tercera secuencia se presenta a continuación en la Figura 4.22.

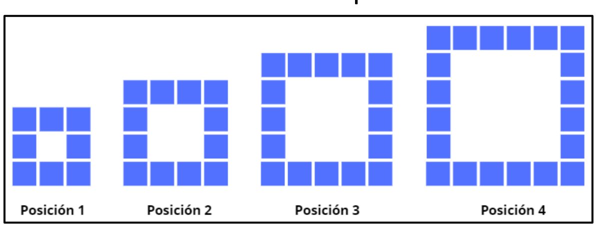


Figura 4.22: Sucesión $a_n = 4n + 4$

Fuente: Elaboración propia

Contando el número de cuadrados en cada figura puede verse rápidamente que la primera posición tiene 8 cuadrados morados, la segunda 12, la tercera 16 y la cuarta 20. En un diagrama, como los que se han utilizado con anterioridad, se ve de la siguiente manera (Figura 4.23):

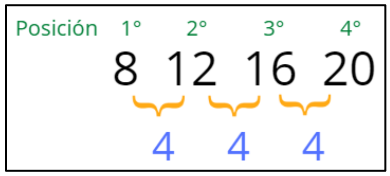


Figura 4.23: Sucesión numérica de $a_n = 4n + 4$
Fuente: Elaboración propia

Siguiendo la secuencia que se presenta en la Figura 4.23 es fácil ver que para obtener el 5° término solo hay que sumar 4 unidades a 20, que es el número de cuadrados que tiene la figura en la posición 4. Pero nuevamente este análisis aún no nos da la expresión que representa el patrón que sigue la secuencia ya que solo permite determinar el número de cuadrados de la posición siguiente. Por esto a continuación, se presenta un análisis más detallado de la misma para encontrar dicho patrón mediante la relación entre el número de cuadrados y el término al que corresponde cada figura dentro de la sucesión.

Si se hace una observación más detallada de la Figura 4.22 pueden hacerse las anotaciones.

- Cada figura es en cierta forma el contorno de un cuadrado, en la primera posición dicho cuadrado mide 3 cuadritos por lado, en la segunda mide 4, en la tercera 5 y en la cuarta 6.
- Los cuadrados "blancos" que quedan dentro de los cuadrados grandes tienen las siguientes medidas: en la primera posición mide 1 cuadrito de lado, en la segunda 2, en la tercera 3 y en la cuarta 4.

Con lo anterior se tiene ya una idea clara de cómo obtener el patrón que sigue esta sucesión pues el contorno del que se habló anteriormente es la resta del área del cuadrado que se mencionó en el primer punto y el área de los cuadrados blancos. Ahora la atención se centrará en buscar la relación entre la medida de los lados de los cuadrados y la posición que ocupan en la sucesión. Puede percibirse que los cuadrados grandes miden $n + 2$ unidades o cuadritos, donde n es la posición de la figura dentro de la sucesión. Por otro lado, los cuadrados "blancos" miden n unidades o cuadritos. Algebraicamente esto se representa de la siguiente forma:

$(n + 2)^2$: Área del cuadrado grande
n^2: Área de cada cuadrado blanco
$(n + 2)^2 - n^2$: Número de cuadritos que forman la figura requerida

A continuación, se presenta el análisis algebraico para conseguir el patrón de la sucesión:

$$(n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$$

La expresión final representativa del patrón es la que se acaba de obtener: $4n + 4$, en donde n es la posición de la figura.

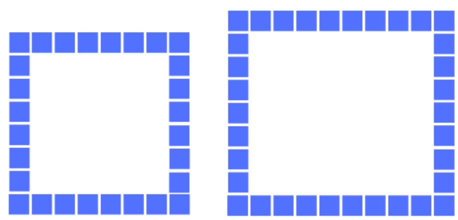
Con el patrón ya obtenido se puede dar respuesta a las preguntas correspondientes que fueron planteadas en la Tabla 1.

1. En la posición 6 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán el margen del cuadrado blanco?

   Sustituyendo la variable n dentro del patrón encontrado se obtiene:

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$4n + 4$	6	$4(6) + 4 = 24 + 4 = \mathbf{28}$
$4n + 4$	8	$4(8) + 4 = 32 + 4 = \mathbf{36}$

   Las gráficas correspondientes en estas posiciones son las siguientes:



Posición 6 Posición 8

2. En la posición 15 y 16, ¿cuántos cuadritos formarán el margen del cuadrado blanco?

   Haremos el mismo procedimiento de la pregunta anterior

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$4n + 4$	15	$4(15) + 4 = 60 + 4 = \mathbf{64}$
$4n + 4$	16	$4(16) + 4 = 64 + 4 = \mathbf{68}$

3. Si tenemos 204 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

   En esta pregunta se realiza el mismo proceso inverso expuesto en el ejemplo pasado.

Patrón	Despeje de n	Número de cuadritos en la posición n	Posición (n)
$4n + 4$	$n = \frac{Num\ de\ cuadritos\ en\ la\ posición\ n - 4}{4}$	204	$n = \frac{204-4}{4}$ =**50**

4. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

La respuesta a esta pregunta ya se ha dado al determinar el patrón de la sucesión porque esta expresión vale para cualquier número n.

4.4.1 Construcción de la sucesión en GeoGebra: término n-ésimo $a_n = 4n + 4$

A continuación se describe el análisis de la sucesión anterior para poder trasladarla a GeoGebra y lograr visualizar figuras en posiciones alejadas.

Para graficar las figuras que forman la sucesión solo se necesitará construir lo que hemos definido como un contorno de un cuadrado. Para comenzar con el diseño se presentan las primeras cuatro figuras de la sucesión en un plano cartesiano, lo cual ayudará a visualizar los puntos extremos de los segmentos que forman a esta figura. Todas las observaciones parten del hecho de tomar como primer vértice del primer cuadrado de la figura al origen del plano, es decir, el punto $(0,0)$. En la elaboración de las figuras de la secuencia se hará uso del comando *Segmento* con los atributos (<Punto(extremo)>,<Punto(extremo)>) y también del comando *Secuencia* como se ha usado anteriormente. En este caso dividiremos la construcción de las figuras en dos partes, en la primera se graficarán las lineas horizontales y verticales principales que a continuación se muestran (ver Figura 4.24).

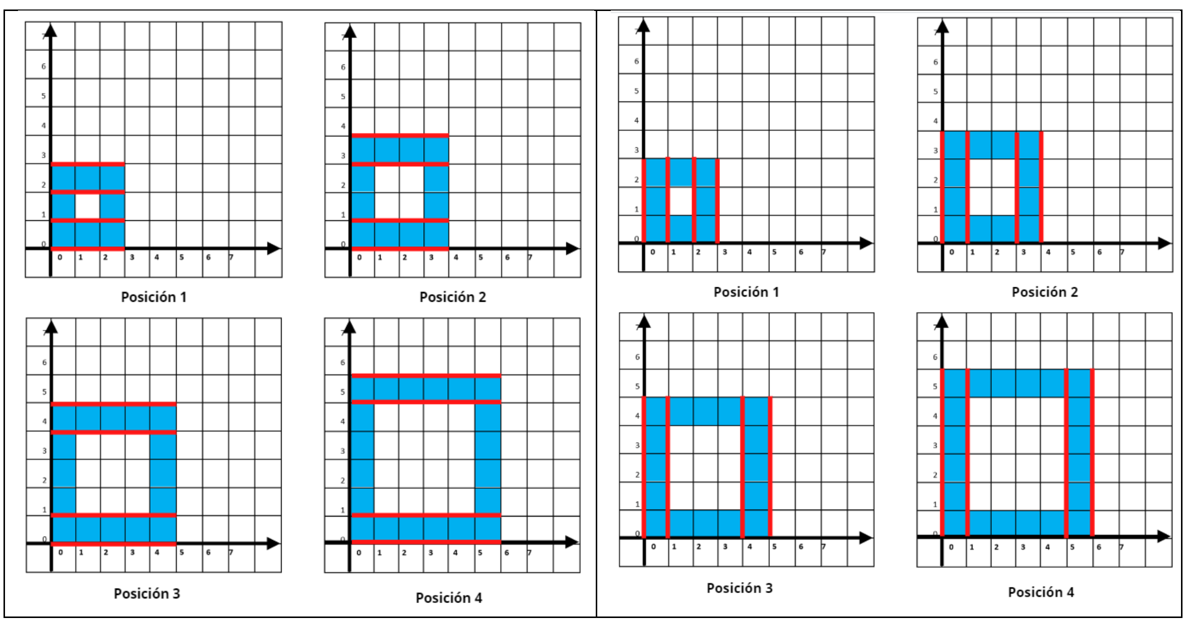


Figura 4.24: Lineas principales

Fuente: Creación Propia

Por otro lado, en la segunda parte, se grafican los pequeños segmentos verticales y horizontales complementarios (Figura 4.25)

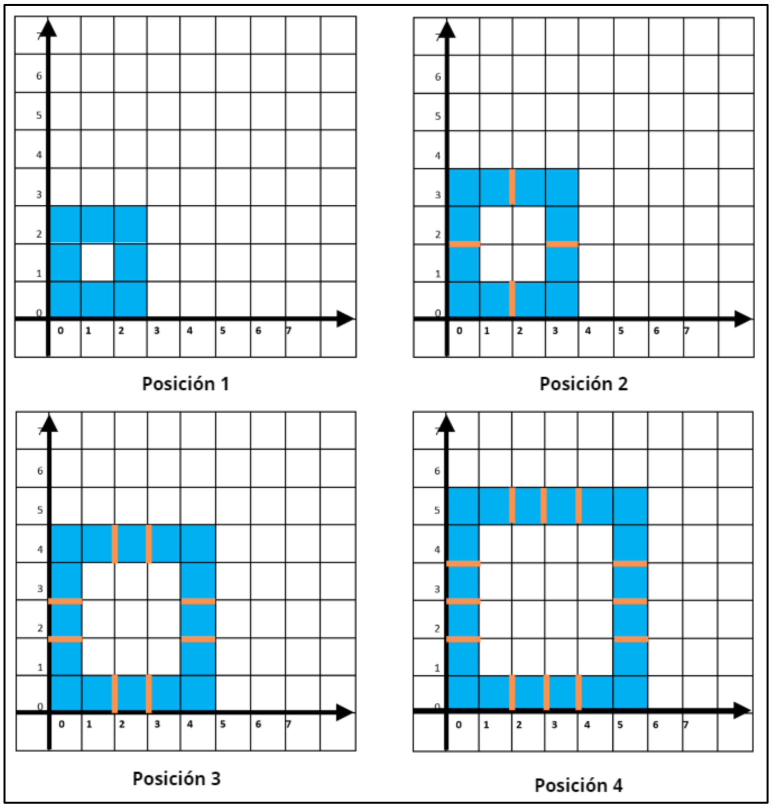


Figura 4.25: Segmentos complementarios
Fuente: Creación propia

Parte 1: Segmentos horizontales y verticales del contorno

Notemos que hay 4 líneas horizontales principales, las cuales están representadas en la Figura 4.26 por H1, H2, H3 y H4. Las siguientes son observaciones sobre cada una de estas y la relación de sus puntos extremos y n que es el lugar que ocupan dentro de la sucesión.

- H1 tiene como primer punto extremo al $(0,0)$ y el segundo lo podemos expresar de la forma $(n+2,0)$. Este $n+2$ ya había sido obtenido en la búsqueda del patrón de la sucesión.
- H2 tiene como primer punto extremo al $(0,1)$ y como segundo punto al expresado mediante $(n+2,1)$, esto debido a que solo se esta desplazando 1 una unidad hacia arriba al segmento H1.
- Los extremos de H3 son $(0, n+1)$ y $(n+2, n+1)$.
- Los extremos de H4 son $(0, n+2)$ y $(n+2, n+2)$

Para que Geogebra grafique estas primeras cuatro rectas se mencionó ya que solo se hará uso del comando *Segmento* y cada uno de estos segmentos tendrán los extremos antes mencionados (Figura 4.26):

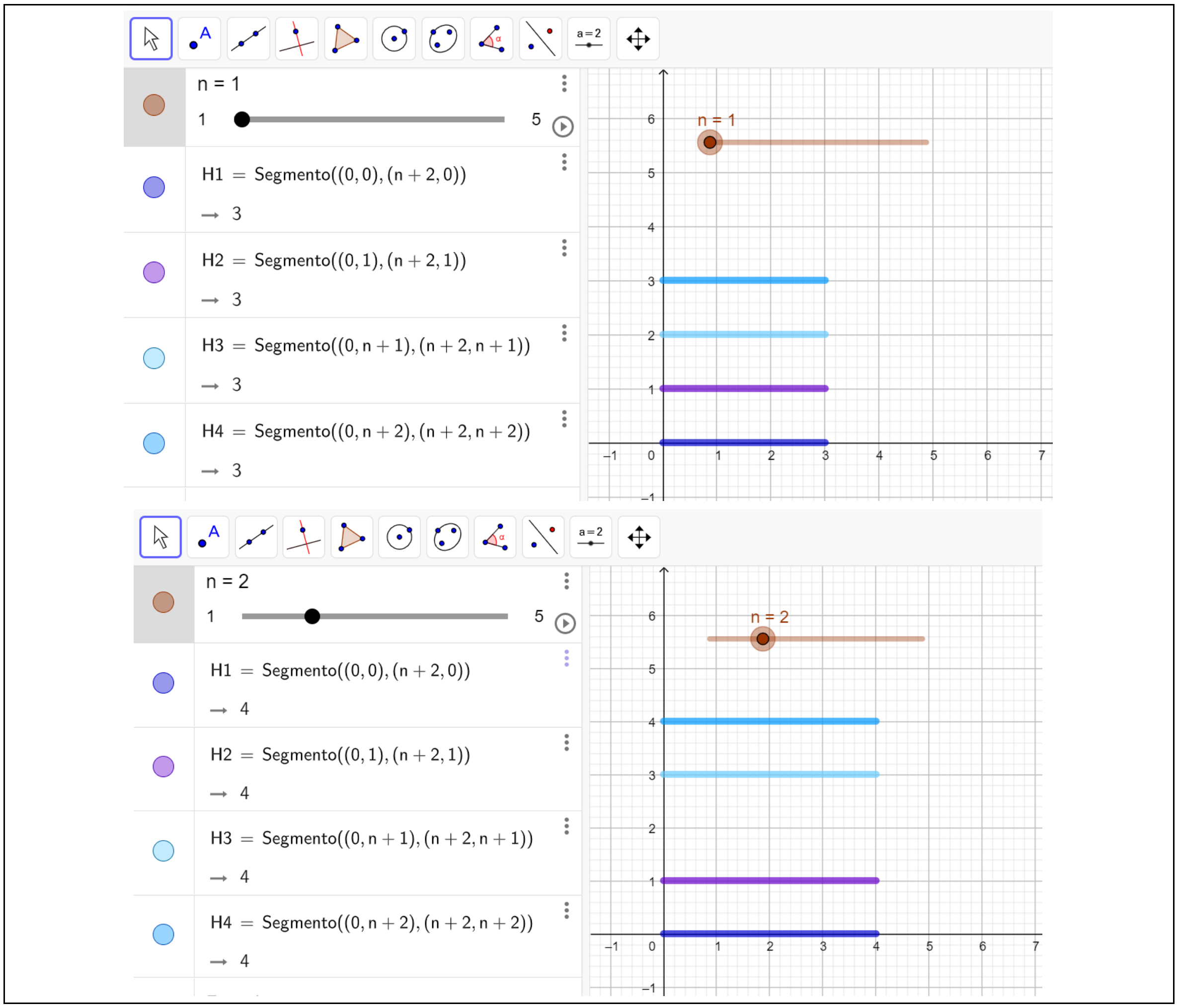


Figura 4.26: Lineas horizontales principales en GeoGebra

Fuente: Creación propia

En la Figura 4.27 puede verse también que hay otras cuatro líneas verticales principales, que se representarán por V1, V2, V3 y V4 y que al hacer un análisis como el anterior se obtiene lo siguiente.

- V1 tiene como primer punto extremo al $(0,0)$ y el segundo lo podemos expresar de la forma $(0, n+2)$.
- V2 tiene como primer punto extremo al $(1,0)$ y como segundo punto al expresado mediante $(1, n+2)$, esto debido a que solo se esta desplazando 1 una unidad hacia la derecha al segmento V1.
- Los extremos de V3 son $(n+1,0)$ y $(n+1, n+2)$.
- Los extremos de V4 son $(n+2,0)$ y $(n+2, n+2)$

En GeoGebra resulta lo siguiente:

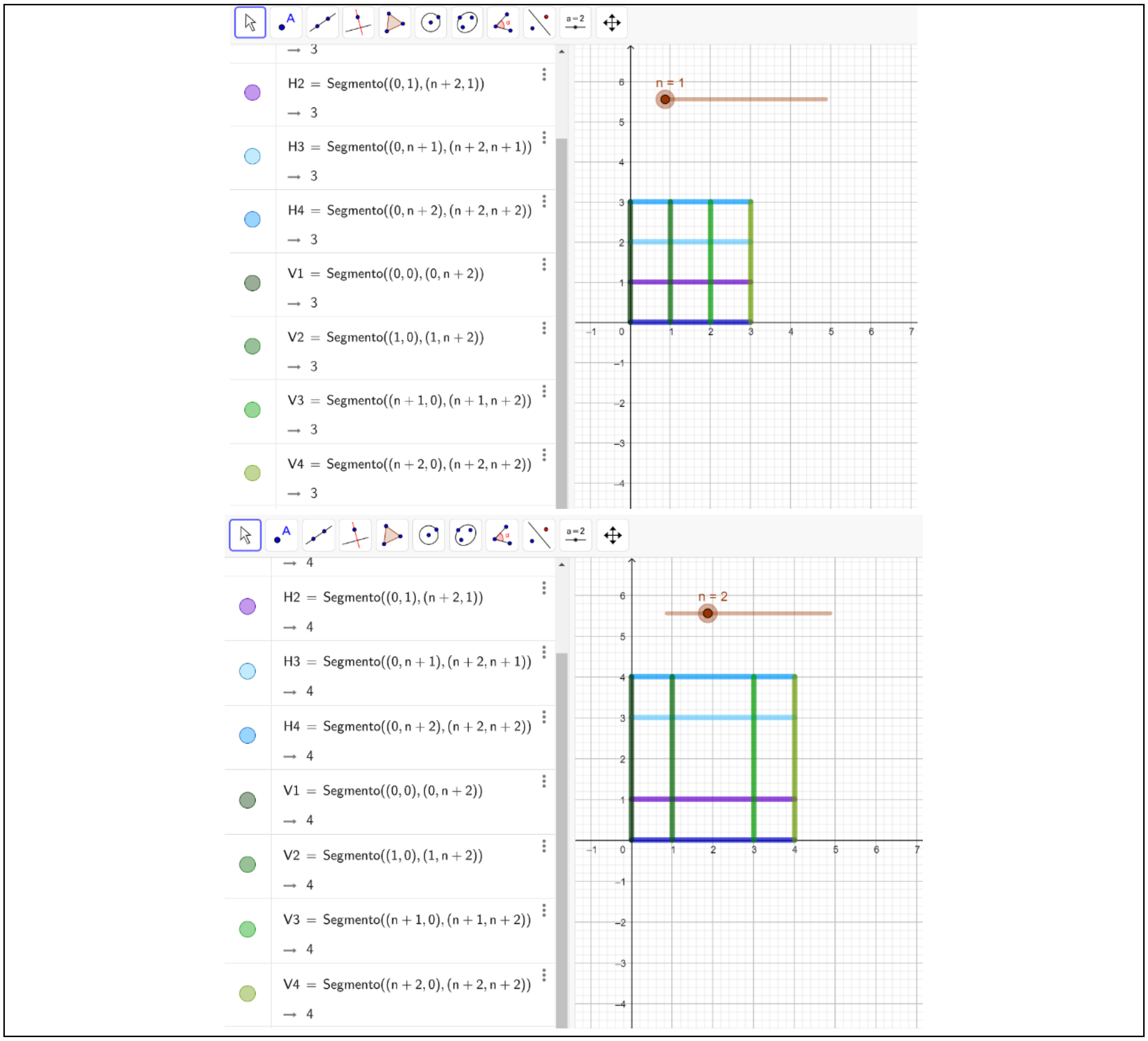


Figura 4.27: Lineas verticales principales en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Parte 2: Segmentos horizontales y verticales del interior

Hasta este punto la figura casi esta completa, solo faltan algunos segmentos los cuales están marcados en la Figura 4.25 previamente expuesta en color naranja.

Haciendo nuevamente un análisis podemos ver que los segmentos horizontales que están de lado izquierdo pueden ingresarse mediante una secuencia de segmentos que tienen extremos $(0, i)$ y $(1, i)$, donde i tiene que variar de 2 hasta n. Pero además algo notorio es que en la primera posición no se necesitan estos segmentos complementarios, por lo que añadiremos un condicional como se muestra a continuación (Figura 4.28).

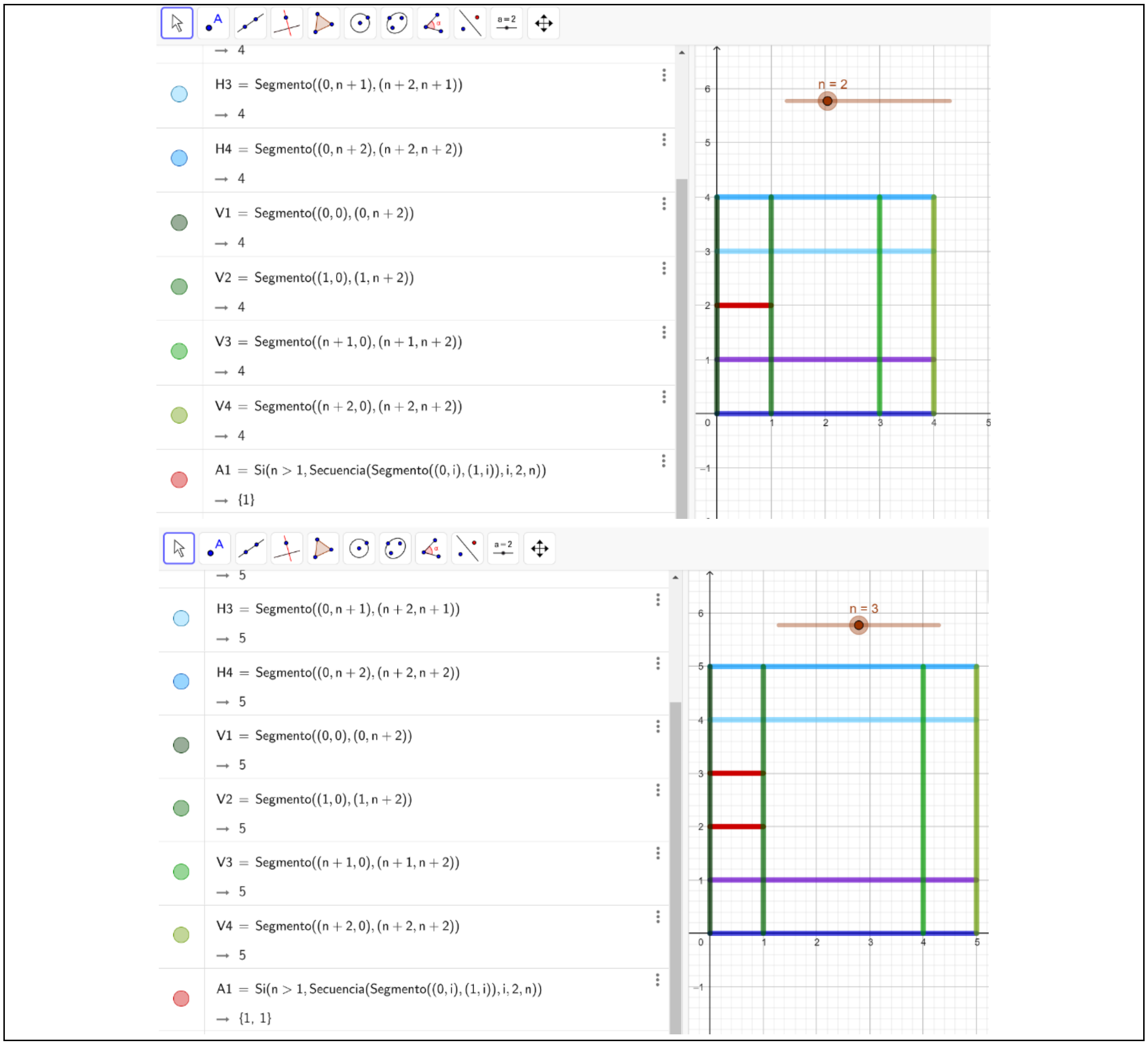


Figura 4.28: Segmentos complementarios por la izquierda en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Haremos lo mismo con los segmentos complementarios que estan de lado derecho, los cuales tendrán por extremos a los puntos $(n+1, i)$ y $(n+1, i)$ (ver Figura 4.29)

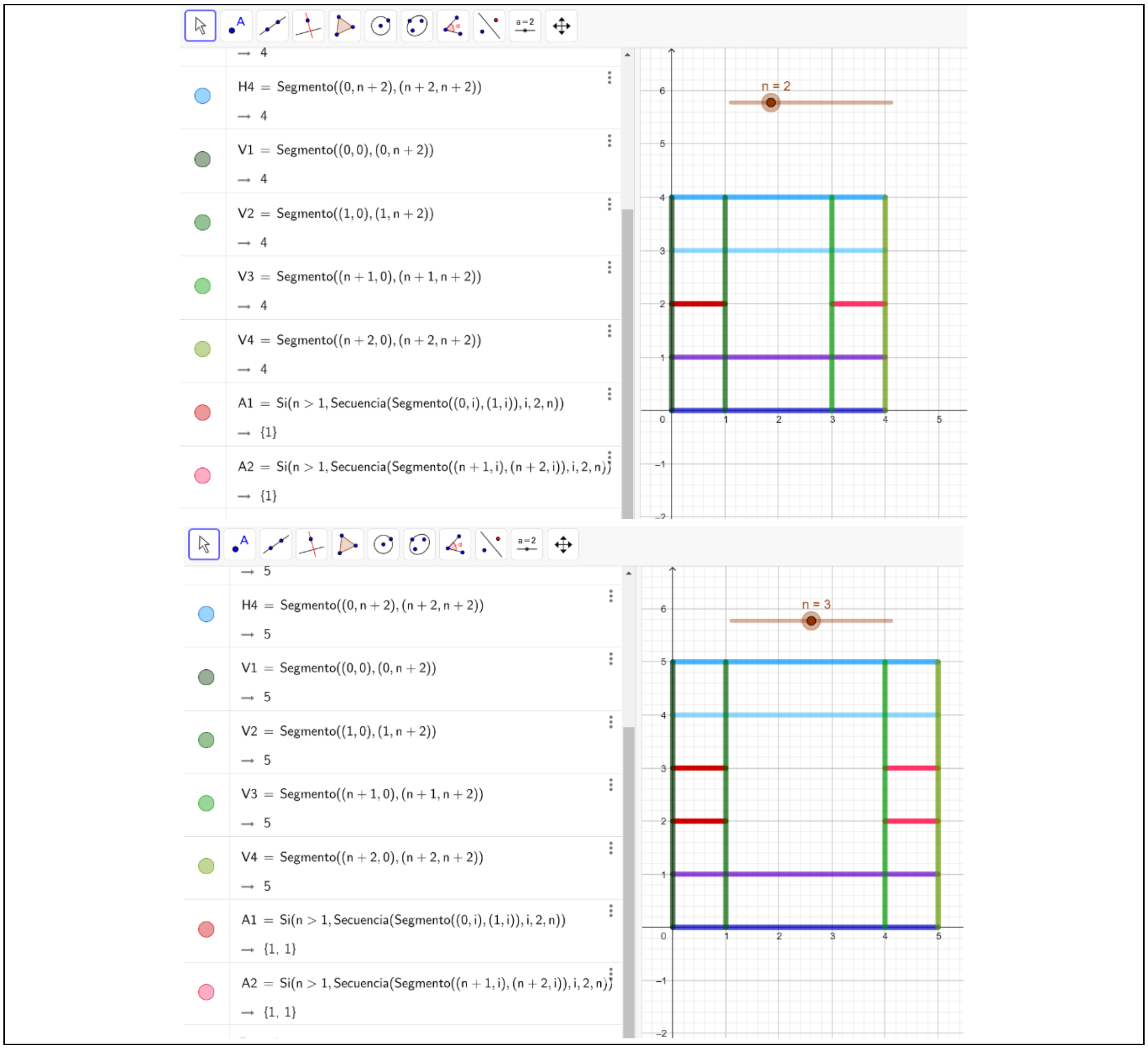


Figura 4.29: Segmentos complementarios por la derecha en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Para los segmentos verticales complementarios, siguiendo la misma lógica que se lleva hasta este punto se tiene que los puntos extremos de estos serán $(i, n+1)$ y $(i, n+2)$, donde i varía desde 2 hasta n. Y nuevamente se hace uso del comando condicional *Si* para señalar que estos segmentos serán graficados cuando $n > 1$, pues en $n = 1$ no son necesarios. En GeoGebra se ve todo de esta manera (Figura 4.30):

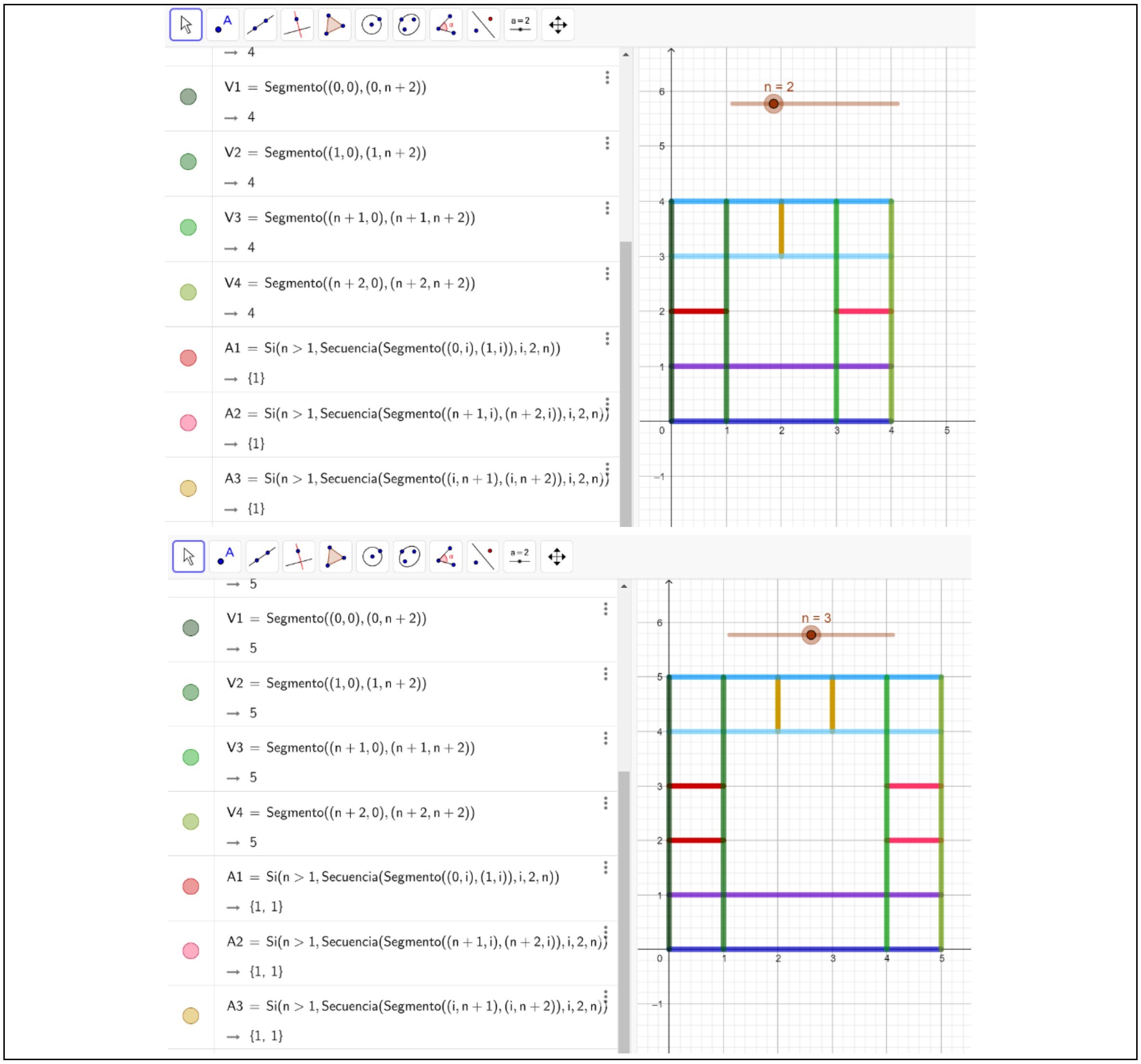


Figura 4.30: Segmentos complementarios superiores en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Para los últimos segmentos se tienen los siguientes extremos: $(i, 0)$ y $(i, 1)$, la variable i variando entre 2 y n. Por último se agregará otra vez el condicional. Esto se ve terminado de la siguiente forma (Figura 4.31):

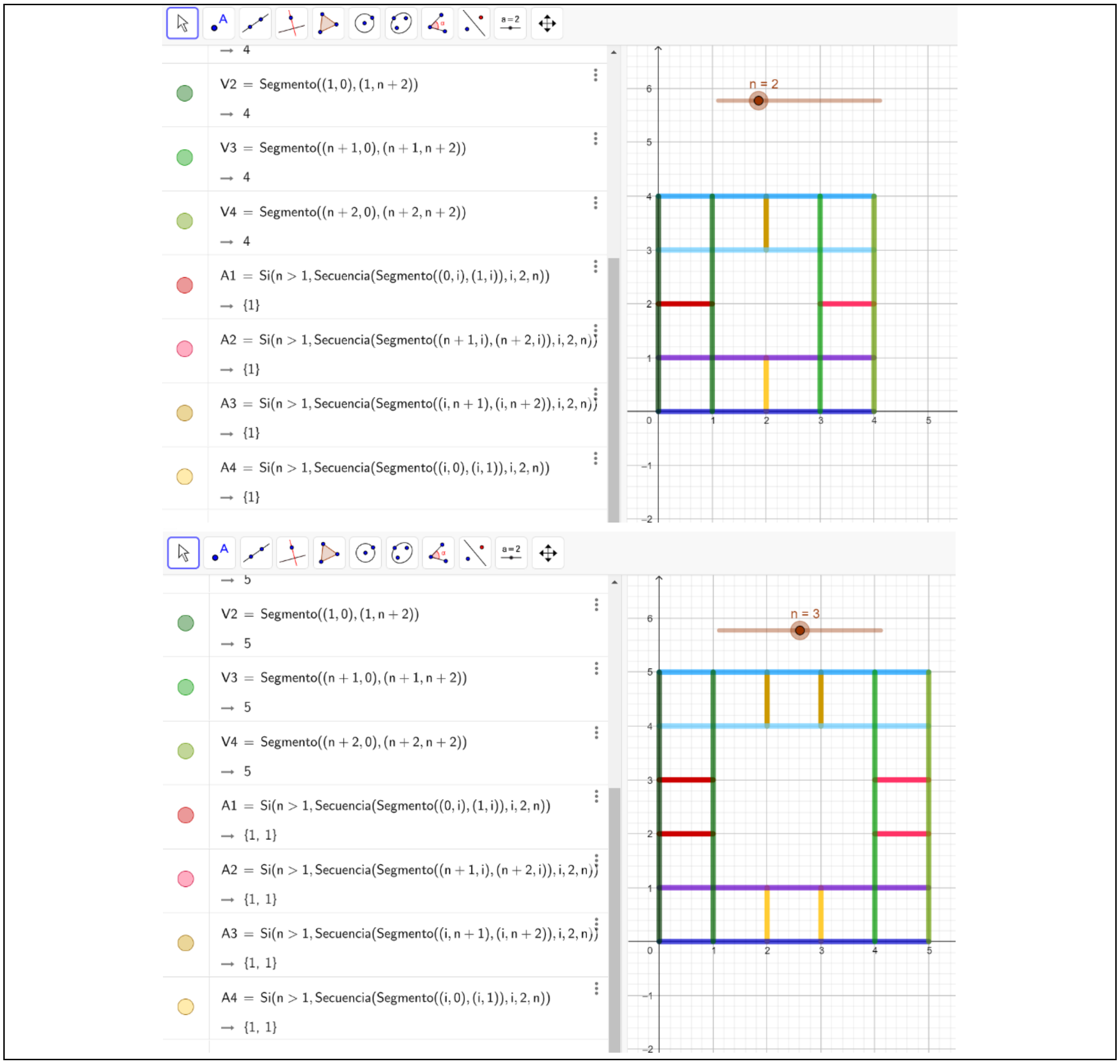


Figura 4.31: Segmentos complementarios inferiores en GeoGebra

Fuente: Creación propia

4.5. Análisis de la cuarta sucesión: término n-ésimo $a_n = 4n + 3$

Se comenzará inspeccionando la cuarta secuencia presentada a continuación en la Figura 4.32.

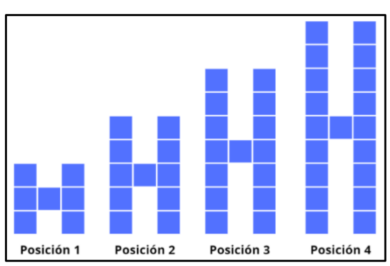


Figura 4.32: Sucesión $\boldsymbol{a_n = 4n + 3}$
Fuente: Creación propia

En la primera posición la figura tiene 7 cuadritos, en la segunda 11, en la tercera 15 y en la cuarta 19. Esto lo podemos representar de la siguiente forma, donde además vemos que entre cada término hay 4 unidades, es decir para obtener un término a partir del anterior solo le sumamos esas cuatro unidades (Figura 4.33).

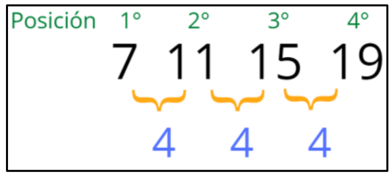


Figura 4.33: Sucesión numérica de $a_n = 4n + 3$
Fuente: Creación propia

A continuación, se presenta un análisis más detallado de la sucesión para encontrar el patrón que le corresponde mediante la relación entre el número de cuadrados y el término al que corresponde cada figura dentro de la sucesión (Figura 4.34).

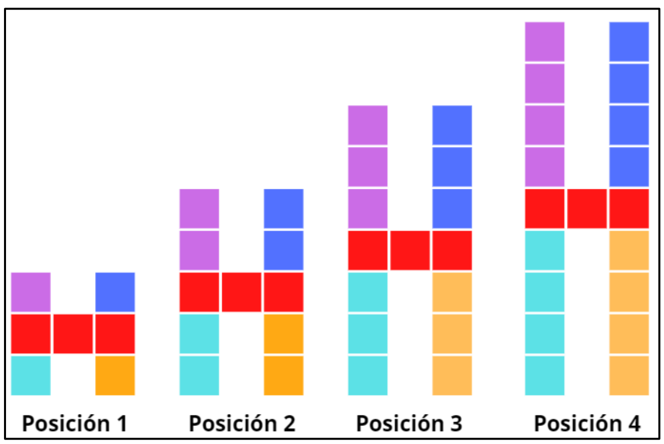


Figura 4.34: Sucesión gráfica de $a_n = 4n + 3$ por bloques
Fuente: Creación propia

Observando la Figura se pueden hacer nuevas observaciones, que ayudarán mucho más a establecer el patrón buscado.

- En el centro de la figura tenemos una línea de tres cuadritos, la cual está marcada con color rojo y se encuentra en todas las figuras, es decir permanece constante.
- En los cuadritos rojos de los extremos de la línea constante mencionada en el punto anterior se encuentran 4 grupos de 1 cuadrito en la primera posición,4 grupos de 2 cuadritos en la segunda posición, 4 grupos de 3 cuadritos en la tercera posición y 4 grupos de 4 cuadritos en la cuarta posición.

Estos dos puntos dan una idea clara de cómo obtener el patrón. En primer lugar, los cuatro grupos de cuadritos que rodean a los dos cuadritos rojos se conforman de n cuadritos pues en la primera posición estos grupos tienen 1 cuadrito, en la segunda 2, en la tercera 3 y así sucesivamente. Entonces en cada posición hay $4n$ cuadritos que forman los grupos mencionados, pero a esta cantidad se le suman los 3 cuadritos rojos que son constantes. La expresión final queda de la siguiente manera: $4n + 3$, donde n representa la posición de la figura en la sucesión.

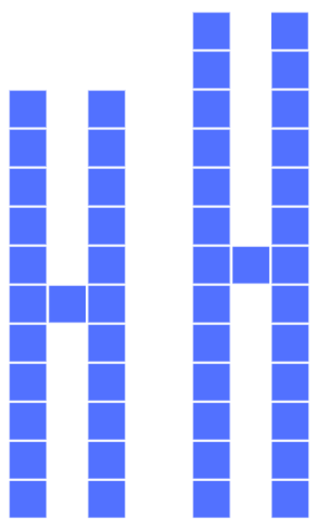
Con este patrón se puede dar respuesta a las preguntas correspondientes que fueron planteadas en la Tabla 1.

1. En la posición 5 y 6, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?

   Para responder esta pregunta se realizará una sustitución de la variable n dentro del patrón que ya encontramos, es decir:

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$4n + 3$	5	$4(5) + 3 = 20 + 3 = \mathbf{23}$
$4n + 3$	6	$4(6) + 3 = 24 + 3 = \mathbf{27}$

   Las figuras en las posiciones pedidas son las siguientes:



2. En la posición 16 y 17, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?

   Haremos el mismo procedimiento de la pregunta anterior

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$4n + 3$	16	$4(16) + 3 = 64 + 3 = \mathbf{67}$
$4n + 3$	17	$4(17) + 3 = 68 + 3 = \mathbf{71}$

Los gráficos correspondientes son demasiado grandes, sin embargo, con el patrón establecido y la comprensión de este sabemos que forma tendrán estos gráficos.

5. Si tenemos 143 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

   El proceso para la resolución de esta pregunta es el mismo que se ha venido usando.

Patrón	Despeje de n	Número de cuadritos en la posición n	Posición (n)
$4n+3$	$n = \frac{Num\ de\ cuadritos\ en\ la\ posición\ n - 3}{4}$	143	$n = \frac{143-3}{4}$ =**35**

3. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

   La respuesta a esta pregunta ya se ha dado al determinar el patrón de la sucesión porque esta expresión vale para cualquier número n.

4.5.1 Construcción de la sucesión en GeoGebra: término n-ésimo $a_n = 4n + 4$

El análisis de la sucesión anterior para poder trasladarla a GeoGebra se presenta a continuación, este servirá para lograr visualizar figuras en posiciones alejadas.

Puede notarse que para graficar esta figura podemos dividir su construcción en dos partes, la primera que contemplará las dos columnas que forman a la letra H y la segunda que constará del cuadrado que une a las dos columnas. A continuación se presentan las cuatro primeras figuras de la sucesión en un plano cartesiano, mismas que servirán de apoyo para la determinación de los puntos requeridos para graficar los segmentos necesarios. Para la elaboración de las figuras de la secuencia se hará uso del comando *Segmento* con los atributos (<Punto(extremo)>, <Punto(extremo)>) y también del comando *Secuencia* como se ha usado anteriormente. La siguiente imagen presenta la división que se usará para esta construcción (Figura 4.35).

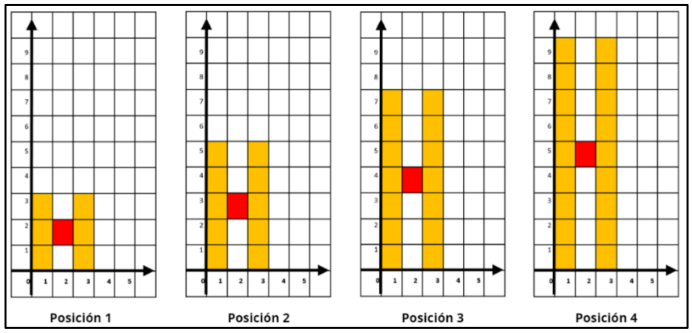


Figura 4.35: Segmentación de las figuras de la secuencia $\boldsymbol{a_n = 4n + 4}$
Fuente: Creación propia

Parte 1: Segmentos horizontales amarillos

Para construir las dos columnas se necesitan 4 líneas verticales, la primera tiene como puntos extremos a los puntos $(0,0)$ y $(0,2i + 1)$, la segunda tiene extremos $(1,0)$ y $(1,2i + 1)$, la tercera $(2,0)$ y $(2,2i + 1)$ y la cuarta $(3,0)$ y $(3,2i + 1)$, donde i varía de 1 hasta n. Estos segmentos pueden graficarse dentro de otra sucesión pues podemos notar que las absisas de todos los puntos siguen la sucesión 0,1,2,3, entonces se puede agregar una nueva variable, digamos j, que varía desde 0 hasta 3. De esto resulta una doble sucesión que quedaría de la siguiente manera en GeoGebra (Figura 4.36):

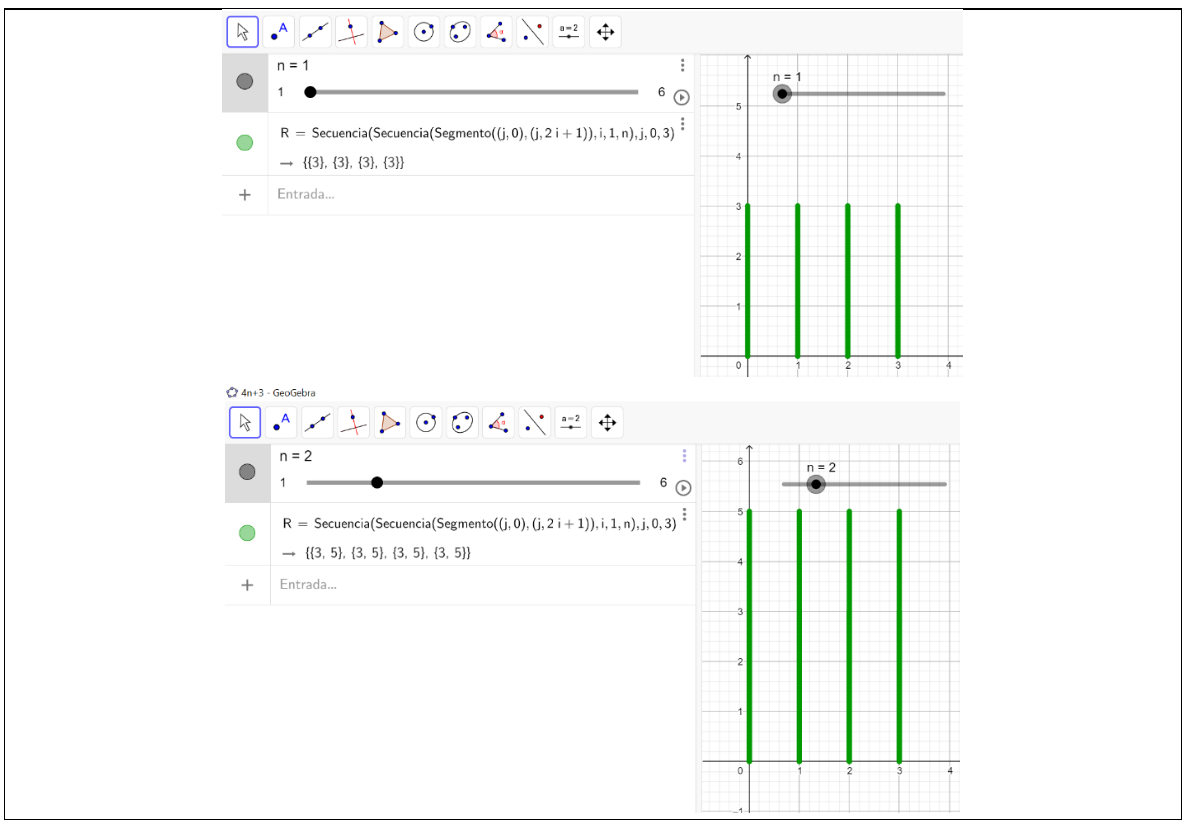


Figura 4.36: Lineas verticales de las columnas en GeoGebra
Fuente: Creación propia

La siguiente parte para graficar son los segmentos horizontales que dividen a las columnas en cuadritos. Para la primera columna (columna izquierda) los segmentos tendrán como puntos extremos $(0, i)$ y $(1, i)$, donde i varía desde 0 hasta $2n + 1$, este $2n + 1$ fue obtenido en el paso anterior. Y para la segunda columna solo cambiarán las abscisas, es decir los extremos son $(2, i)$ y $(3, i)$. En GeoGebra esto se ve de la siguiente manera (Figura 4.37):

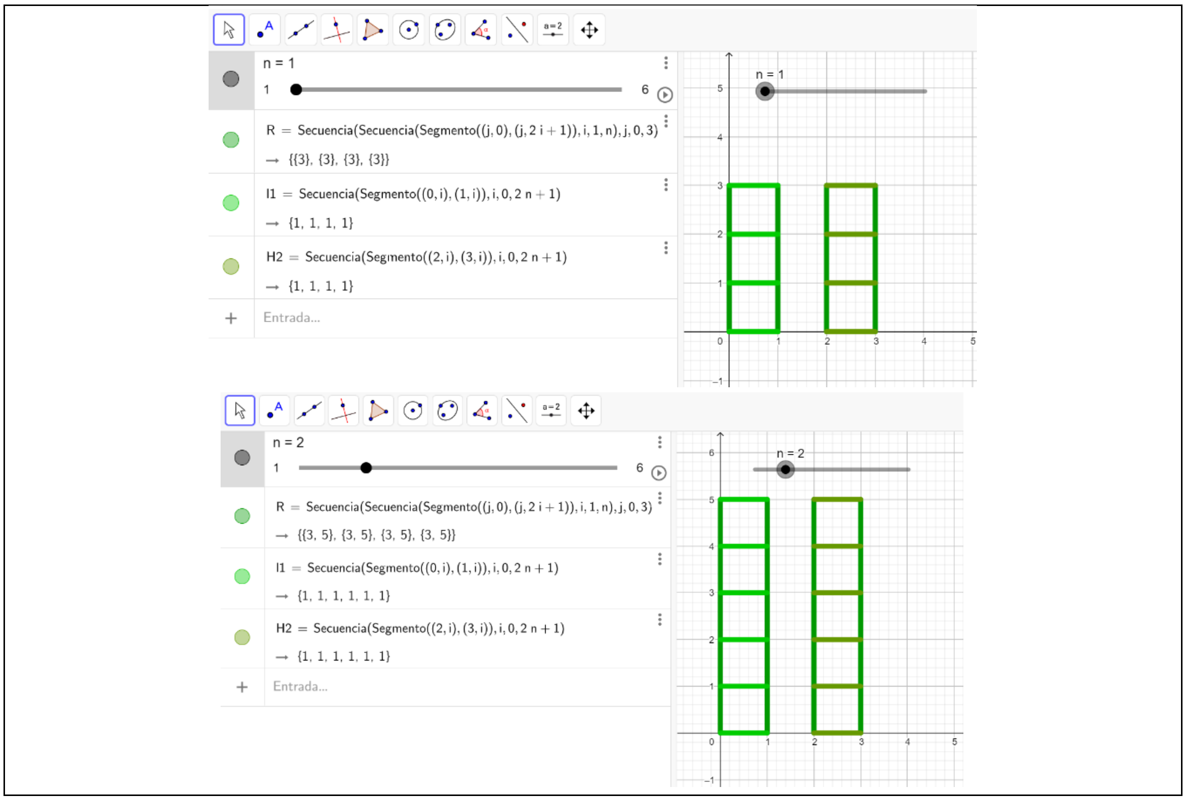


Figura 4.37: Líneas horizontales columna izquierda
Fuente: Creación propia

Parte 2: cuadrado rojo

Para esta segunda parte se necesitan dos segmentos horizontales que formen el cuadrado que une a las dos columnas, en la Figura 4.38 puede notarse que segmento inferior, marcado con color naranja, tiene por extremos los puntos $(1, n)$ y $(2, n)$, y el segmento superior, marcado en rojo, tiene como extremos a los puntos $(1, n + 1)$ y $(2, n + 1)$. En GeoGebra esto queda graficado de la siguiente manera, obteniendo así la sucesión requerida (ver Figura 4.38).

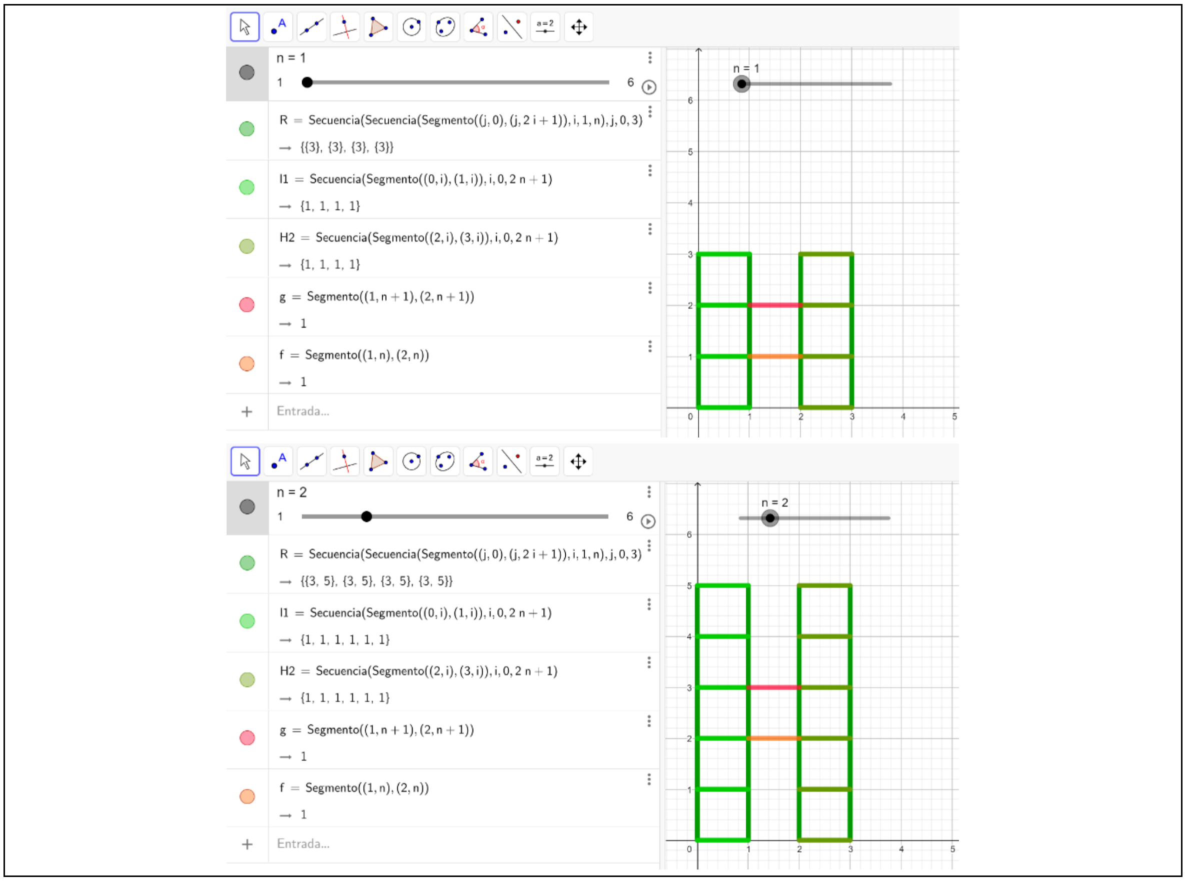


Figura 4.38: Cuadro enlazador de las columnas

Fuente: Creación propia

4.6. Análisis de la segunda sucesión: término n-ésimo $a_n = 5n + 1$

Haciendo una primera inspección de la secuencia se presenta a continuación los primeros cuatro términos en la Figura 4.39.

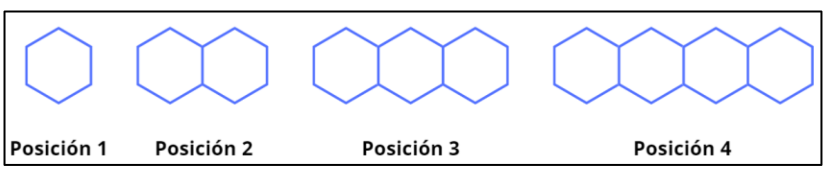


Figura 4.39: Sucesión $a_n = 5n + 1$

Fuente: Creación propia

Contando el número de palitos que forman cada figura, se tiene que la primera posición tiene 6 palitos, en la segunda 11 palitos, en la tercera 16 y en la cuarta 21, esto se muestra en el siguiente diagrama representado en la Figura 4.40:

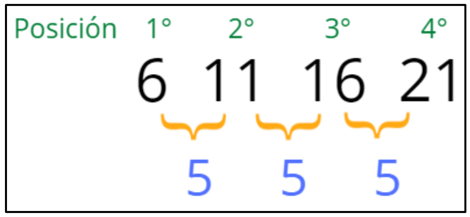


Figura 4.40: Sucesión numérica de $a_n = 5n + 1$

Fuente: Creación propia

Lo primero que puede notarse es que para obtener el 5° término de la sucesión se tiene que sumar 5 unidades al valor del 4° término. Sin embargo, aún no se puede deducir la expresión algebraica a partir de este análisis. A continuación, se presenta un análisis gráfico de esta sucesión con la finalidad de encontrar una relación entre el número de palitos que forman la figura y la posición que ocupa la misma dentro de la secuencia. A partir de la Figura 4.41 se hacen las siguientes observaciones.

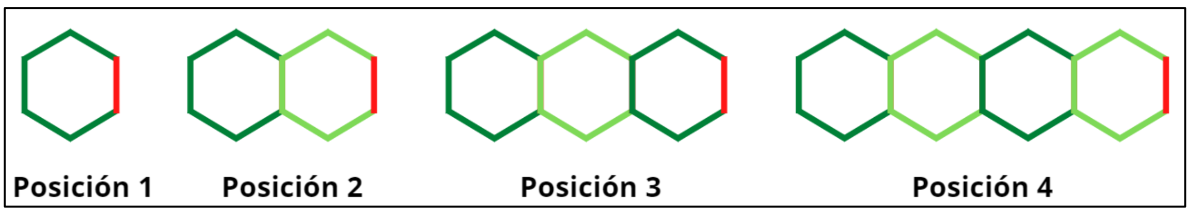


Figura 4.41: Sucesión gráfica de $a_n = 5n + 1$ por bloques

Fuente: Elaboración propia

- En la posición n hay n hexágonos adosados.
- En la posición 1 hay 1 hexágono formado por 5 palitos (en color verde) más un palito extra (en color rojo), en la posición 2 hay 2 hexágonos formados por 5 palitos (en color verde) más un palito extra (en color rojo) y así sucesivamente.

Con estos dos puntos ya puede notarse una relación entre el número de palitos en la figura y la posición que esta ocupa dentro de la secuencia. Esta relación indica que, en la posición n habrá $5n$ palitos, esto debido a que en la posición 1 hay 1 hexágono formado por 5 palitos, en la segunda 2 hexágonos formados por 5 palitos, en la tercera 3 hexágonos formados por 5 palitos y así sucesivamente, y a todo esto se le suma en palito extra. Entonces la expresión final se representa de la siguiente manera: $5n + 1$, donde n es la posición de la figura en la secuencia.

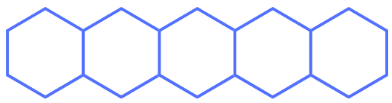
A continuación, se responden las preguntas propuestas en la Tabla 1 para esta secuencia y se exponen los procedimientos requeridos para contestarlas.

5. En la posición 5 y 7, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?

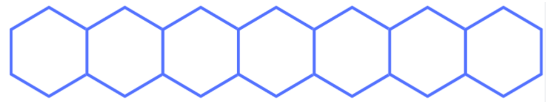
   Sustituyendo la variable n en el patrón encontrado, se tiene:

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$5n+1$	5	$5(5)+1=25+1=\mathbf{26}$
$5n+1$	7	$5(7)+1=35+1=\mathbf{36}$

Las gráficas correspondientes en estas posiciones son las siguientes:



Posición 5



Posición 7

6. En la posición 15 y 16, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?

   Se aplica el mismo procedimiento de la pregunta anterior

Patrón	Posición (n)	Número de cuadritos en la posición n
$5n+1$	15	$5(15)+1=75+1=\mathbf{76}$
$5n+1$	16	$5(16)+1=80+1=\mathbf{81}$

Las figuras en estas posiciones ya son demasiado grandes, sin embargo, con el patrón establecido ya se puede tener una idea de la forma de los gráficos.

7. Si tenemos 211 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

   En esta pregunta se realiza el mismo proceso inverso expuesto en el ejemplo pasado.

Patrón	Despeje de n	Número de cuadritos en la posición n	Posición (n)
$5n+1$	$n=\frac{Num\ de\ cuadritos\ en\ la\ posición\ n-1}{5}$	211	$n=\frac{211-1}{5}$ =**40**

8. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

   La respuesta a esta pregunta ya se ha dado al determinar el patrón de la sucesión porque esta expresión vale para cualquier número n.

4.6.1 Construcción de la sucesión en GeoGebra: término n-ésimo $a_n = 5n+1$

Para poder trasladar la sucesión anterior a GeoGebra se necesita un análisis extra para poder construir estos hexágonos. Por esto se presenta el siguiente gráfico en donde se tienen las 4 primeras figuras que representan las posiciones de la sucesión. En esta Figura 4.42 puede notarse que se puede dividir la construcción de la figura en 5 partes, donde cada

una de estas partes corresponde a un lado de los hexágonos y que en la Figura X están macados con distintos colores.
Como en las sucesiones anteriores se hará uso de los comandos *Segmento* y *Secuencia*, estos usandolos de la misma manera que se ha venido haciendo en los ejemplos anteriores.

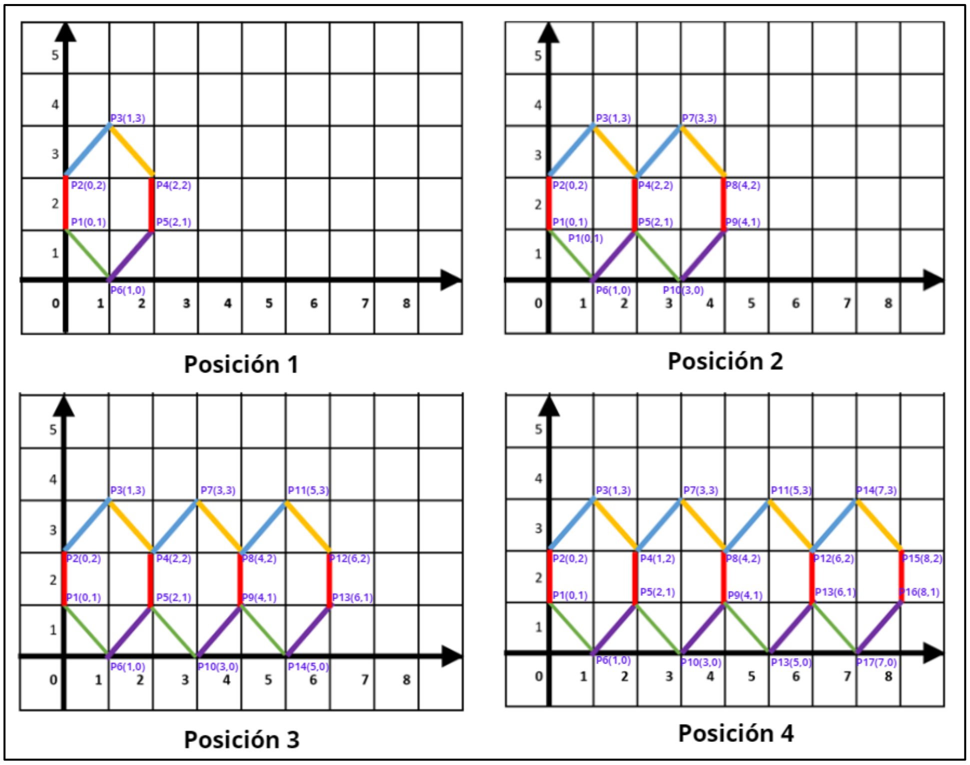


Figura 4.42: Segmentación de las figuras de la secuencia $\boldsymbol{a_n = 5n + 1}$
Fuente: Creación propia

Parte 1: segmentos rojos
Para la construcción de estos segmentos rojos haremos algunas observaciones:

- La primera es que la ordenada del punto extremo inferior de cada segmento es siempre 1, y la ordenada del punto extremo superior de cada segmento es siempre 2, por lo tanto los extremos de los segmentos son de la forma $(i, 1)$ y $(i, 2)$.
- Ya definida la forma de los puntos extremos del segmento, solo resta definir el rango en donde varía i. Para esto puede notarse que en la posición número 1 las abcsisas de los puntos son 0 y 2 en la segunda posición las abcsisas son 0, 2 y 4, en la tercera son 0,2,4 y 6, y en la cuarta son 0,2,4,6 y 8. Esto muestra que las abcisas comienzan en 0 y terminan en $2n$, donde n es la posición de la figura en la sucesión. Además en este punto hay una anotación importante y que no se había empleado en los ejemplos anteriores pues es evidente que las secuencias de números que representan las abcisas de los puntos van incrementando de dos en dos, por lo que

al ingresar esto a GeoGebra es necesario agregar un atributo de incremento en el comando de *Secuencia*. Esto se muestra en la Figura 4.43.

Con el análisis anterior se tiene ya la forma de los puntos extremos y el rango en el que varían los mismos. De esta manera se puede entonces proceder a graficar la secuencia de segmentos en Geogebra, la cual se ve de la siguiente manera:

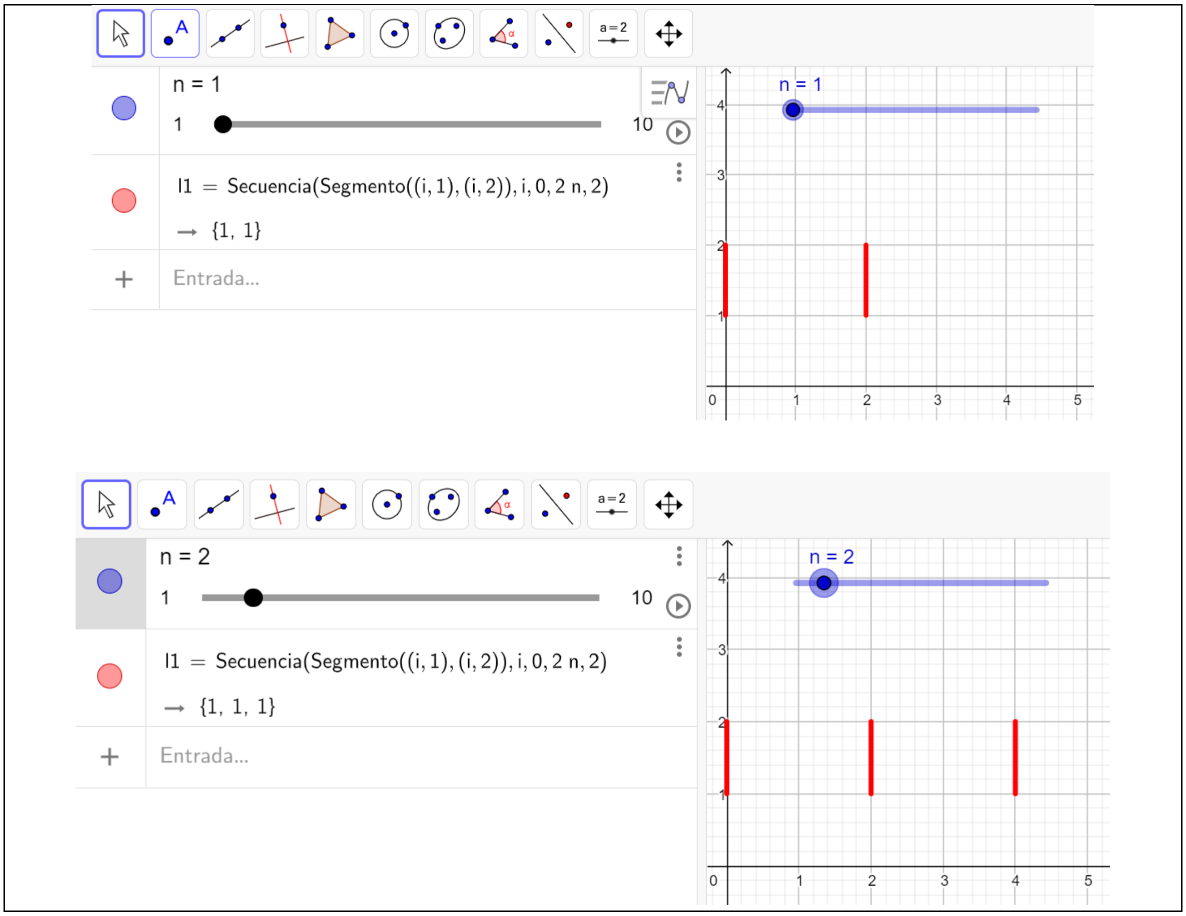


Figura 4.43: Segmentos rojos en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Parte 2: Segmentos azules

Los siguientes segmentos por graficar son los azules. Para encontrar los puntos extremos de estos se procede con los siguientes puntos de análisis:

- La ordenada de los puntos extremos izquierdos de los segmentos es siempre 2 y la ordenada de los puntos extremos derechos de los segmentos es siempre 3.
- Para describir las abscisas de estos puntos extremos se hace la siguiente observación:

Tabla 3.

Posición	Abscisa punto extremo izquierdo	Abscisa punto extremo derecho
1	0	1
2	2	3
3	4	5
4	6	7

Fuente: Creación propia.

Esta tabla muestra que las abscisas son de la forma $i, i+1$, pues la abscisa del punto extremo derecho es siempre una unidad más que la abscisa del punto extremo izquierdo. Finalmente, los extremos de los segmentos son de la forma $(i, 2)$ y , $(i + 1{,}3)$.

- Por último, resta solo definir el intervalo en donde i varía. Para esto se hará uso nuevamente de la Tabla 3, específicamente en la columna 2. De esta columna se obtiene la siguiente sucesión: 0,2,4,6. Es evidente que el primer valor que toma i es cero, pero se necesita encontrar el patrón que sigue esta sucesión dado que dicho patrón definirá el límite de esta de acuerdo con la posición en la que nos encontremos, es decir marcará las abscisas de los extremos del último segmento que se tiene que graficar. Una forma de encontrar dicho patrón es usando la siguiente sucesión figural y hacer un análisis como los anteriores (Figura 4.44):

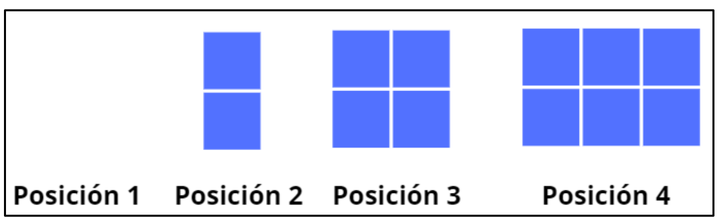


Figura 4.44: Representación figural de la sucesión 0, 2, 4, 6, …
Fuente: Creación propia

La primera observación es que se pueden dividir el patrón figural en grupos de dos cuadritos y las figuras se ven de la siguiente manera en la figura 4.45:

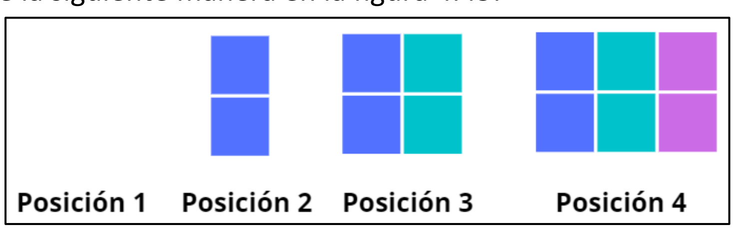


Figura 4.45: Representación figural por bloques de la sucesión 0, 2, 4, 6, …
Fuente: Creación propia

En la posición 1 hay 0 cuadritos, en la posición 2 hay un grupo de dos cuadritos, en la posición 3 hay dos grupos de dos cuadritos y en la posición 4 hay tres grupos de 2 cuadritos. De aquí puede verse que en la posición n hay $(n-1)$ grupos de dos cuadritos, es decir, hay $2(n-1)$ cuadritos, que es lo mismo que $2n-2$. De esta manera se ha encontrado el patrón requerido. Entonces i varía entre 0 y $2n-2$. Además, igual que en los segmentos rojos hay un incremento de dos en dos unidades, lo cual se establecerá en GeoGebra. Con estos datos ya se puede graficar la Secuencia de los segmentos verdes requeridos. En GeoGebra se ve de la siguiente forma en la figura 4.46:

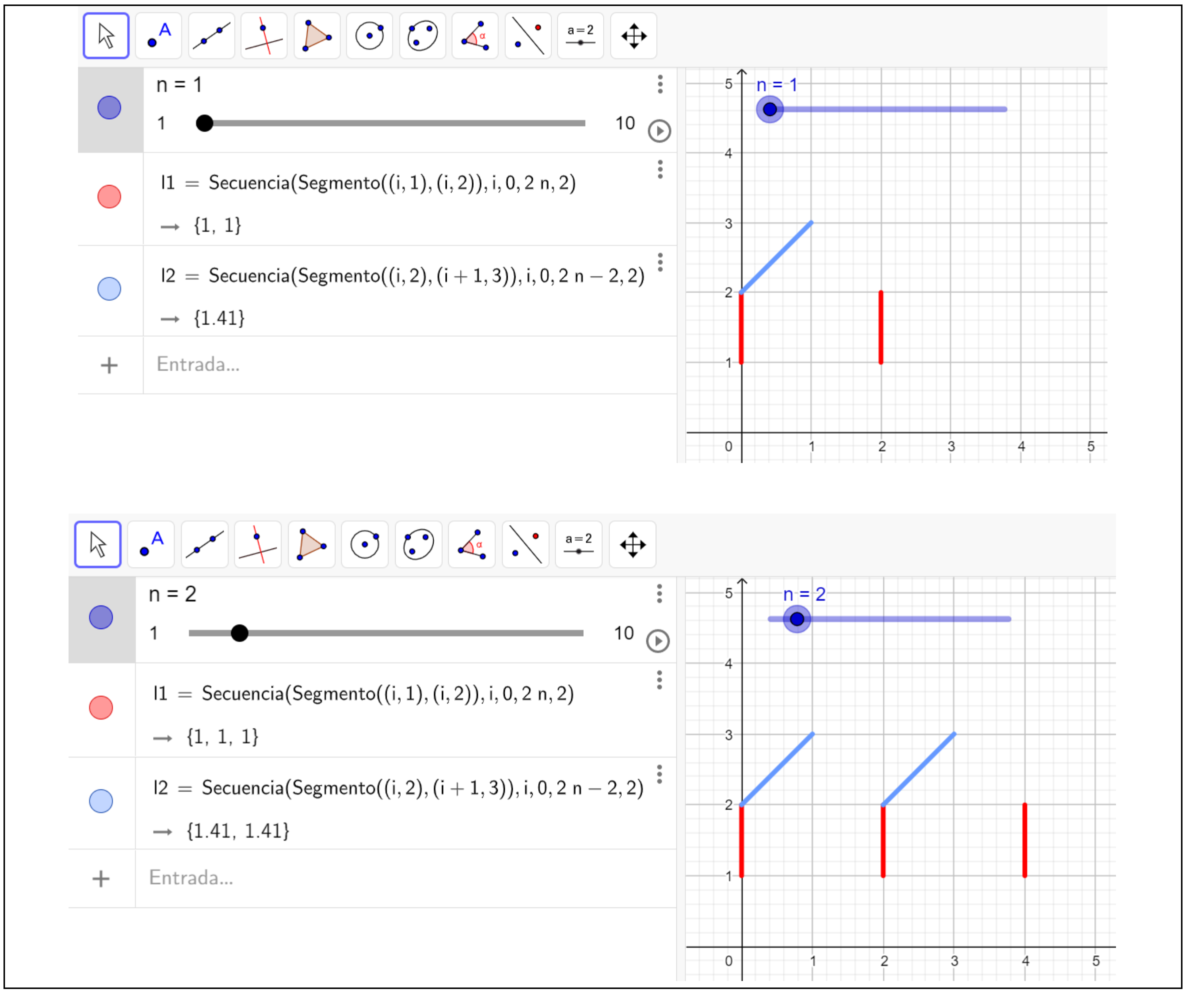


Figura 4.46: Segmentos azules en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Parte 3: Segmentos amarillos

Para graficar los segmentos amarillos se presenta el siguiente análisis:

- La ordenada de los puntos extremos izquierdos de los segmentos es siempre 3 y la ordenada de los puntos extremos derechos de los segmentos es siempre 2.

- Para describir las abscisas de estos puntos extremos se hace la siguiente observación:

  Tabla 4.

Posición	Abscisa punto extremo izquierdo	Abscisa punto extremo derecho
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8

  Fuente: Creación propia.

  En esta tabla nuevamente se aprecia que las abscisas son de la forma $i, i+1$, pues la abscisa del punto extremo derecho es siempre una unidad más que la abscisa del punto extremo izquierdo. Entonces los extremos de los segmentos son de la forma $(i,3)$ y , $(i+1{,}2)$.
- Por último, se debe definir el intervalo en donde i varía. Para esto se hará uso de la columna 2 de la Tabla 4. De esta columna se obtiene la siguiente sucesión: 1,3,5,7. El primer valor que toma i es uno, pero se necesita encontrar el patrón que definirá el límite de esta de acuerdo con la posición en la que nos encontremos, como en la sección anterior. Para esto se usará nuevamente una sucesión figural para hacer el análisis correspondiente (Figura 4.47).

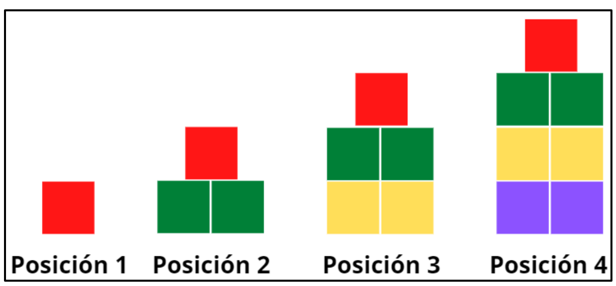


Figura 4.47: Representación figural de la sucesión 1, 3, 5, 7, …

Fuente: Creación propia

La Figura 4.47 representa las figuras correspondientes en las cuatro primeras posiciones de la sucesión. Además, se hizo una división de estas para el análisis más puntual. La primera observación es que hay un cuadrado (marcado en rojo) que es constante en todas las figuras, luego en la primera posición hay 0 cuadritos extras, en la segunda hay un grupo de dos cuadritos, en la tercera hay dos grupos de dos cuadritos y en la cuarta posición hay tres grupos de dos cuadritos. Esto último puede representarse mediante la expresión $2(n-1)$ donde n representa la posición de la figura. A esto le agregamos el cuadrado constante, y con esto el patrón quedaría definido de la siguiente forma: $2(n-1)+1$, que al aplicar álgebra toma la siguiente forma: $2n-1$. Entonces i varía entre 1 y $2n-1$. Además, igual que en los segmentos anteriores hay un incremento de dos en dos unidades, lo cual se establecerá en GeoGebra.

La secuencia en GeoGebra se ve como se muestra en la Figura 4.48:

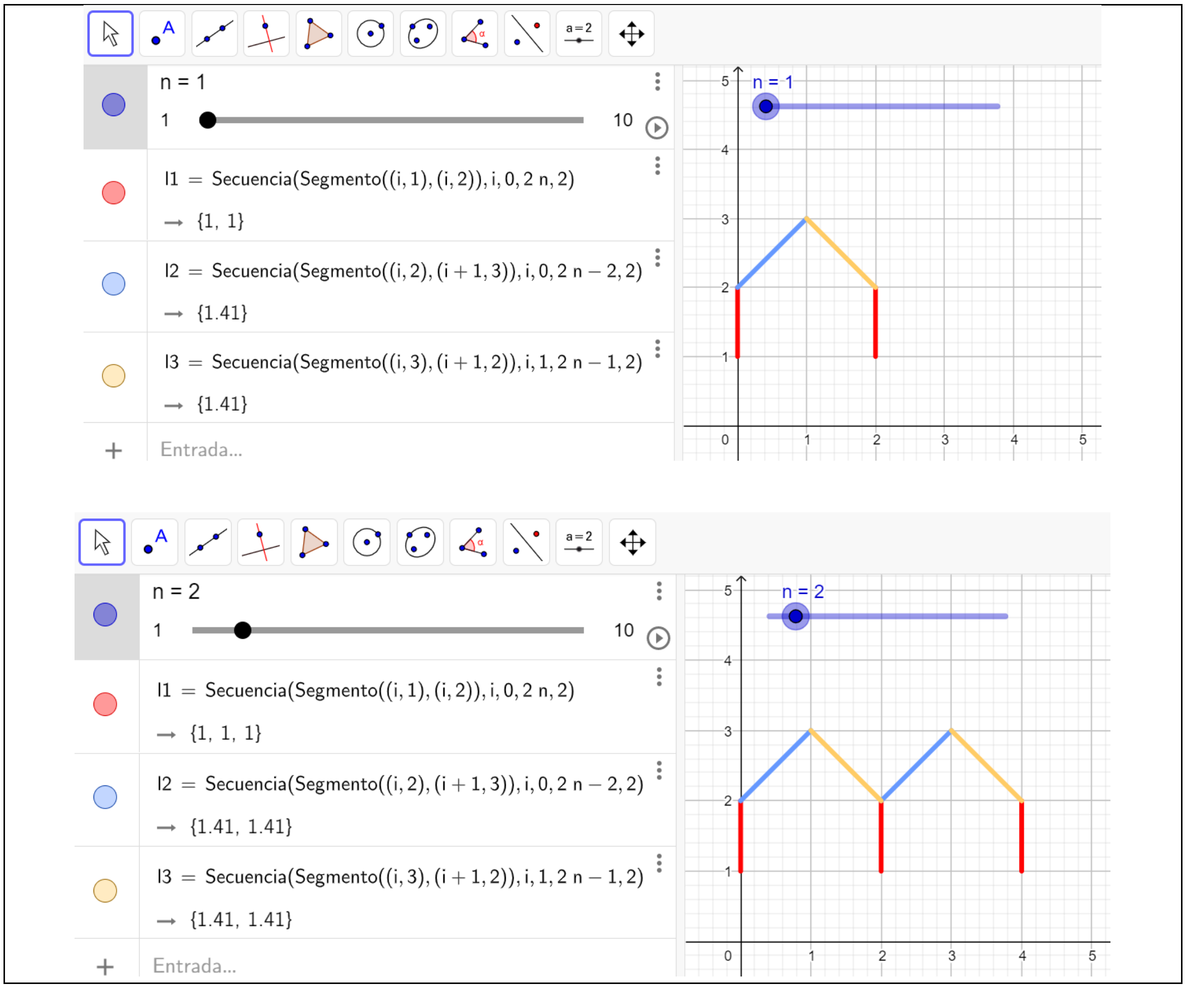


Figura 4.48: Segmentos amarillos en GeoGebra

Fuente: Creación propia

Parte 4: Segmentos verdes

Los siguientes segmentos por graficar son los verdes. Si se analizan con un poco de detalle estos segmentos es posible ver que la sucesión que forman seguirá el mismo comportamiento que la generada por los segmentos azules, solo cambiarán las ordenadas de los puntos extremos de los segmentos, estas ordenadas serán ahora de la forma $(i,1)$ y $(i+1,0)$, donde i varía desde 0 hasta $2n-2$, donde n es la posición de la figura en la sucesión e i va aumentando de dos en dos. Esto en GeoGebra se ve de la siguiente manera (Figura 4.49):

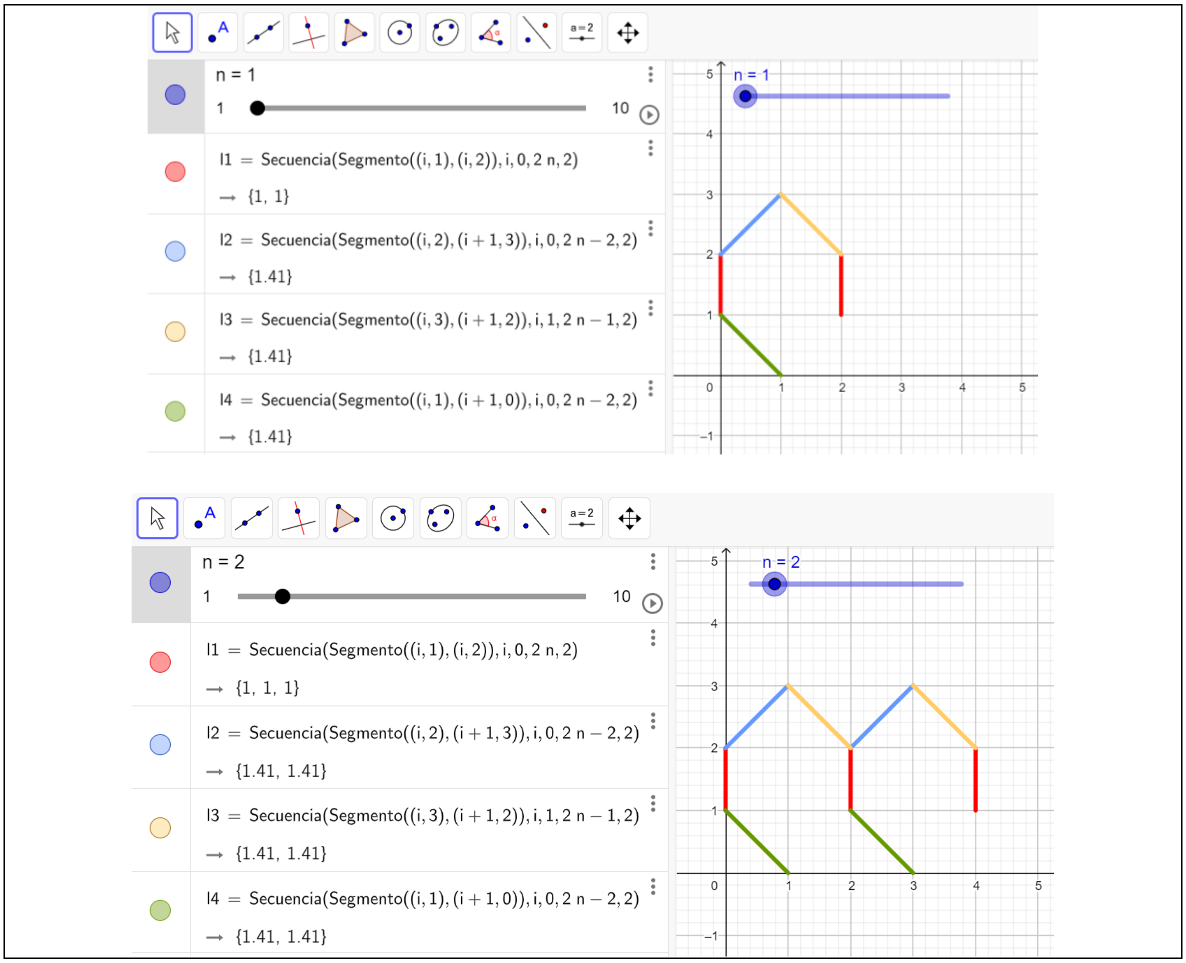


Figura 4.49: Segmentos verdes en GeoGebra
Fuente: Creación propia

Parte 5: Segmentos morados

Para graficar estos segmentos nuevamente es posible ver que estos siguen el mismo comportamiento que los segmentos amarillos, solo hay un cambio en las ordenadas de los puntos extremos, estos puntos quedan de la siguiente forma: $(i, 0)$ y $(i + 1,1)$, donde i varía desde 1 hasta $2n - 1$, donde n es la posición de la figura en la sucesión e i va aumentando de dos en dos.

Esto en GeoGebra se ve como en la figura 4.50:

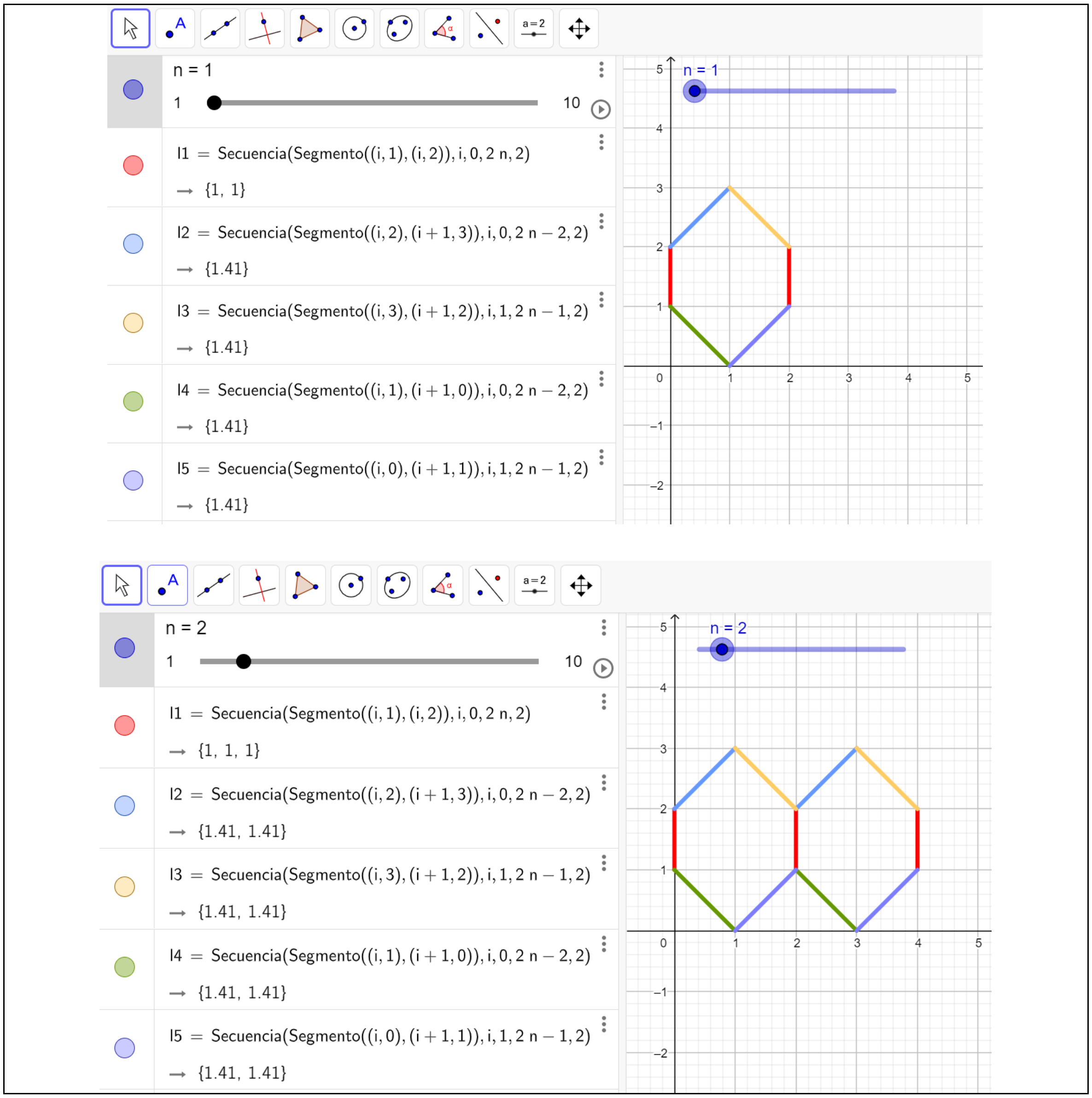


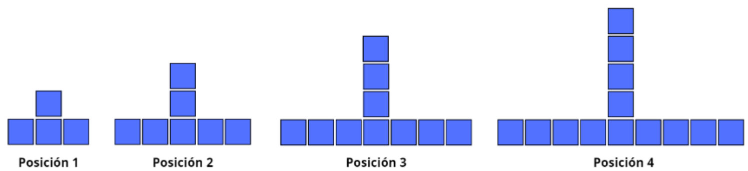
Figura 4.50: Segmentos morados en GeoGebra
Fuente: Creación propia

4.7. La secuencia didáctica

A continuación, se presenta la secuencia que puede ser implementada con estudiantes de bachillerato:

Tarea 1

Instrucciones: Analiza la siguiente secuencia de figuras, advertirás que en la primera posición hay 4 cuadritos, en la segunda posición hay 7 cuadritos, en la tercera posición hay 10 cuadritos y, en la cuarta posición hay 13 cuadritos.

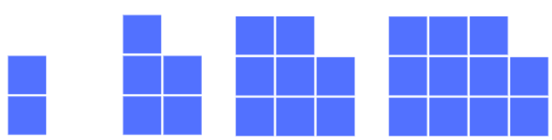


Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/vtwvzngw) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 6 y 7, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
2. En la posición 17 y 18, ¿cuántos cuadritos morados habrán formando la T invertida?
3. ¿Cuántos cuadritos morados habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 73 cuadritos morados, ¿en qué posición nos encontramos?

Tarea 2

Instrucciones: Analiza la siguiente secuencia de figuras, advertirás que en la primera posición hay 8 cuadritos, en la segunda posición hay 12 cuadritos, en la tercera posición hay 16 cuadritos y, en la cuarta posición hay 20 cuadritos.



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/xnx658uz) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 7 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?

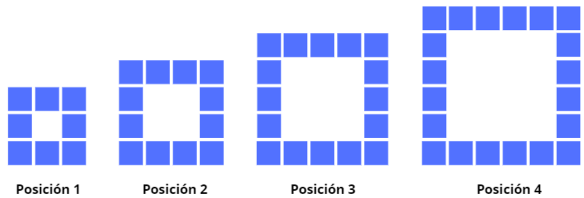
2. En la posición 13 y 15, ¿cuántos cuadritos formarán la figura?

4. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?

3. Si tenemos 89 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

Tarea 3

Instrucciones: Analiza la siguiente secuencia de figuras, advertirás que en la primera posición hay 8 cuadritos, en la segunda posición hay 12 cuadritos, en la tercera posición hay 16 cuadritos y, en la cuarta posición hay 20 cuadritos.

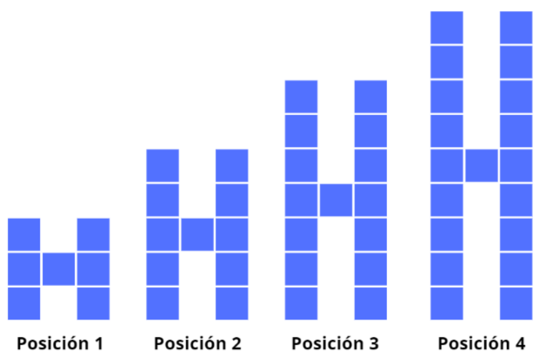


Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/krs5hbva) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 6 y 8, ¿cuántos cuadritos formarán el margen del cuadrado blanco?
2. En la posición 15 y 16, ¿cuántos palitos habrán el margen del cuadrado blanco?
3. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 204 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

Tarea 4

Instrucciones: Analiza la siguiente secuencia de figuras, advertirás que en la primera posición hay 7 cuadritos, en la segunda posición hay 11 cuadritos, en la tercera posición hay 15 cuadritos y, en la cuarta posición hay 19 cuadritos.

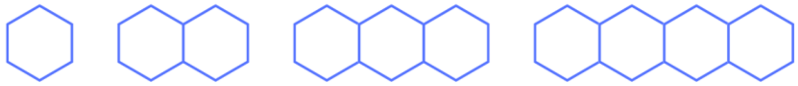


Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/epnbstnt) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 5 y 6, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?
2. En la posición 16 y 17, ¿cuántos cuadritos formarán la letra H?
3. ¿Cuántos cuadritos habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 143 cuadritos, ¿en qué posición nos encontramos?

Tarea 5

Instrucciones: Analiza la siguiente secuencia de figuras, advertirás que en la primera posición hay 6 segmentos, en la segunda posición hay 11 segmentos, en la tercera posición hay 16 segmentos y, en la cuarta posición hay 21 segmentos.



Posición 1 **Posición 2** **Posición 3** **Posición 4**

Utiliza la construcción en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/pw9tjpst) para contestar lo siguiente:

1. En la posición 5 y 6, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?
2. En la posición 15 y 16, ¿cuántos palitos estarán formando a los hexágonos adosados?
3. ¿Cuántos palitos habrá en la posición n-ésima?
4. Si tenemos 211 palitos, ¿en qué posición nos encontramos?

CAPÍTULO 5.
Conclusiones

La pregunta de investigación planteada fue: ¿Cuáles son las características que deben considerarse para el diseño de una secuencia didáctica para el desarrollo del razonamiento algebraico articulada en la generalización de patrones y el software GeoGebra? Las características son: promover la autonomía del alumno y la validación de respuestas, evitar el uso de fórmulas, métodos únicos de solución y andamiajes memorísticos. Además, con base en la revisión de la literatura, la secuencia didáctica, se apoya sobre generalización de patrones para fomentar aspectos del razonamiento algebraico: (a) Coordinación de la estructura espacial y numérica, (b) Análisis de los términos cercanos, lejanos y el término general, (c) Tránsito del lenguaje verbal al lenguaje alfanumérico y, la (d) Incorporación de expresiones equivalentes a través de la descomposición de la figura de los patrones por lo que permite proporcionar sentido al símbolo.

También es importante expresar en qué medida se logró alcanzar los objetivos planteados al inicio del desarrollo de la investigación. Con respecto al objetivo general, este fue alcanzado en su totalidad pues fue posible el diseño de la secuencia didáctica. Por otro lado, con respecto a los objetivos específicos se han cumplimentado dado el alcance del objetivo general. En este sentido, las tareas presentadas como parte de la secuencia didáctica fueron documentadas parte por parte, desde la elección de las mismas basadas en las investigaciones que fueron consultadas hasta la explicación detallada de cada parte del procedimiento para llevar a cabo las actividades propuestas en el software GeoGebra.

El diseño del patrón figural en GeoGebra cobra mucha importancia debido al requerimiento de modelar dicho patrón acorde a la sucesión elegida. El proceso de construcción en GeoGebra tuvo que ser descrito de manera precisa y detallada con la finalidad de aportar al trabajo docente. En este sentido, las especificaciones del procedimiento realizado en las construcciones en GeoGebra y el definir cada paso resulta un gran apoyo para la comprensión de la lógica del patrón, de manera que el docente será capaz de replicar dicho procedimiento. Lo previo le permitirá diseñar e ir elaborando sus propias tareas para trabajar con sus estudiantes, otros patrones figurales en GeoGebra. Además, estas especificaciones del trabajo con la herramienta GeoGebra, proporciona una introducción a la misma incluyendo la descripción de los comandos a usar, de esta manera se inicia al docente en este ámbito tecnológico y también se induce al mismo a seguir explorando la plataforma, misma que tiene una amplia cantidad de funcionalidades.

En cuanto a las tareas de la secuencia didáctica, representan una manera de mejorar y actualizar tareas adaptándolas en primer lugar al nivel hacia el que está dirigida a esta investigación, el bachillerato. Por otro lado, se plantearon de manera que, fuera posible ligar la generalización patrones con las herramientas que proporciona GeoGebra, esto se logró precisamente al modelar los patrones sobre los que gira este trabajo en la plataforma expuesta. De esta manera, las sucesiones puedan ser vistas de manera gráfica y en constante movimiento lo que además de atraer la atención del alumno permite visualizar cada figura en la posición que le corresponde y en cierta forma verificar si la regla de correspondencia que fue asignada a la sucesión es correcta.

La secuencia didáctica presentada, abre líneas para dar continuidad a esta investigación. La primera de estas líneas de continuidad y sin duda la más próxima es la aplicación de esta secuencia didáctica en grupos de estudiantes de bachillerato, esto sustentado en el hecho de que las tareas fueron diseñadas exactamente para este nivel educativo. Sin embargo, es importante resaltar que estas actividades pueden ser replicadas por docentes de otros niveles educativos. Lo previo se fundamenta en que la generalización de patrones se sugiere, según las investigaciones, para que pueda ser implementado desde los primeros niveles de primaria hasta el nivel bachillerato con las adaptaciones correspondientes a cada nivel educativo.

Otra de las posibles formas de dar continuidad a esta tesis es el ampliarla incluyendo patrones cuadráticos pues esta investigación se centró en trabajar con patrones lineales. El hecho de incluir patrones cuadráticos implica la búsqueda de estos de maneras un poco distintas y de alguna manera un poco más complejos. Esto propiciará que el estudiante pueda seguir desarrollando su razonamiento algebraico y explorando nuevos métodos para la obtención de estos nuevos patrones.

Referencias

Avecilla, F., Cárdenas, O., Vaca, B., e Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL-RTE, 28,* 121-132.

Avilés, E. (2013). *Evaluación de las destrezas con criterio de desempeño del bloque curricular álgebra y geometría y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de primero de bachillerato general unificado del instituto tecnológico superior Ramón Barba Naranjo*. [Tesis de Maestría]. Universidad Técnica de Ambato.

Bautista, J., Bustamante, M., y Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación matemática, 33,* 125-152.

Carmona, I. (2016). *El potencial de los estudiantes de bachillerato en el reconocimiento de patrones: un estudio de casos.* [Tesis de Maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1002

Castellanos, M., y Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. [Comunicación]. *10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). SEIEM

Castro, E., y Ruiz, J. (2018). *Patrones en números figurados. Aplicación para la enseñanza.* En P. Flores, J. L. Lupiáñez, I. Segovio (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 89-102). Universidad de Granada.

Chalé, S. (2013). *El desarrollo del pensamiento algebraico, la visualización en el caso de los patrones*. [Tesis de Maestría] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1008

Díaz, M. (2018). *GeoGebra como herramienta para fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos en los estudiantes del grado noveno de la institución educativa Nuestra Señora de las Angustias del municipio de Labateca*. [Tesis de Maestría] Universidad Autónoma de Bucaramanga. http://hdl.handle.net/20.500.12749/2526

Flores, W., Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e interculturalidad*, 19, 54-64.

García, F. J. (2019). Introducción al Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (15), 1-4.

García, M., López, A., y Díaz, A. (2018). Análisis del desempeño de estudiantes en tareas matemáticas. Estudio exploratorio en el Instituto Politécnico Nacional de México. Formación Universitaria, 11, 41-54. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000500041

Hernández, R., Fernández,C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.

Jiménez, J., y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4,1-17.

López, L. (2016). Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional. [Tesis de Maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

López, P., y Rodríguez, M. (2012). Análisis y tipificación de errores en álgebra cometidos por los estudiantes ingresantes a la universidad. [Comunicación]. *Coloquio Regional de Matemáticas y Simposio de Estadística*. Pasto, Colombia.

Muñoz, M., y Ríos, C. (2008). Nociones básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra [Comunicación]. *9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto, Colombia.

Ramírez, S. (2017). *Generalización de patrones: una forma de desarrollar el pensamiento algebraico*. [Resumen analítico en educación]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P., y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista educación científica y tecnológica*, edición especial, 688-694.

Ruíz, H., Ávila, P., y Villa, J. (2013). Uso de GeoGebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. En F. Córdoba, J. Cardeño (Eds.), *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (pp. 446-454). Fondo Editorial ITM.

Sánchez, N., y del Valle, M. (2016). Álgebra Escolar: Una revisión preliminar en relación a errores y dificultades. En Rosas, A. (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías y Enfoques*, (pp. 60-75). Lectorum.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2010). *Precálculo*. Thomson

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9, 193-215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Zapatera, L. A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 87–114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114