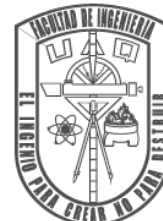




Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Física



**Efectos del volumen y las fluctuaciones térmicas en el diagrama de fases de la QCD mediante la aproximación súper estadística**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
INGENIERO FÍSICO

Presenta:

**Fernando Martínez Paniagua**

Director:

**Dr. Cristían Felipe Ramírez Gutiérrez**

Co-director:

**Dr. Jorge David Castaño Yepes**

SINODALES

Dr. Cristían Felipe Ramírez Gutiérrez

Presidente

Firma

Dra. María Lucero Gómez Herrera

Secretario

Firma

Dra. Beatriz Marcela Millán Malo

Vocal

Firma

Centro Universitario  
Querétaro, QRO  
México.  
Octubre 2023



Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales  
de Información



Efectos del volumen y las fluctuaciones térmicas en el  
diagrama de fases de la QCD mediante la  
aproximación súper estadística

**por**

Fernando Martínez Paniagua

se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons  
Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0  
Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

**Clave RI:** IGLIN-280885



© 2023 - Fernando Martínez Paniagua

Derechos reservados.



*A mi madre y padre, mi querida abuelita y abuelito.*



# Agradecimientos

El desarrollo de esta tesis fue gracias al constante apoyo de mi familia y aquellas personas que me han acompañado a lo largo de este proceso y por esa razón les quiero agradecer:

A mis padres, Elizabeth y Victor, por siempre estar a mi lado motivándome a seguir adelante, aconsejarme en todo momento para ser una buena persona y sobre todo darme su amor incondicional.

A mi abuelita Teresa, quien siempre me dio su cálido cariño y aunque ya no este en este mundo siempre la recordare como alguien que buscaba el bien en los demás.

A mi abuelo Jose Maria, por ser un buen instructor de vida, alguien muy sabio y a quien admiro mucho.

Al resto de mi familia, por confiar y creer en mi.

A mi asesor el Dr. Jorge David Castaño Yepes, por guiar la investigación de este trabajo y auxiliarme en las últimas etapas de mi formación profesional. Gracias por siempre estar abierto a resolver mis dudas, tener la paciencia de explicar cada fundamento y enseñarme más allá de lo que la propia carrera me podía proporcionar. Apesar de no estar vinculado por la universidad, agradezco haberme dado la oportunidad de ser su estudiante durante todo este tiempo de trabajo como parte de mis estancias.

A mi comité de sinodales el Dr. Cristian Felipe Ramírez Gutiérrez y gggg, por acceder a ser parte del proyecto, sus comentarios y sugerencias que enriquecieron esta tesis.

A cada docente que compartió sus conocimientos en mi transcurso en la carrera de ingeniería física.

A la facultad de ingeniería por brindar el uso de equipos, laboratorios y aulas durante mis estudios en la universidad.

A la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), por ser la casa de estudios que me brindo estudiar esta carrera durante nueve semestres.

A la propia Física, que a pesar de seguir en búsqueda de una teoría universal, es una hermosa ciencia que se encuentra en cada aspecto de nuestra existencia.





# Abstract

The work presented in this thesis aims to investigate the effects of volume and thermal fluctuations on the so-called Critical End Point (CEP) of the phase diagram of Quantum Chromodynamics (QCD) using the superstatistics formalism. In this approach, spatial-temporal fluctuations of an intensive parameter are assumed, and a modified Boltzmann factor is postulated by averaging these fluctuations. In the particular case of the present study, it is assumed that non-equilibrium dynamics produce spatial fluctuations in temperature, which are described by a Gamma distribution function ( $\chi^2$ ). This allows finding a partition function that explicitly depends on the volume and the distribution function in thermal equilibrium, which makes it possible to connect with the non-extensive statistics of Tsallis.

The degrees of freedom of QCD are introduced through the Linear Sigma Model coupled to quarks (LSMq), whose partition function in thermodynamic equilibrium is well-known and depends on the temperature and local chemical potentials. It was found that the pseudo-critical transition temperatures are sensitive to the system size, presenting shifts in the critical points of the diagram at high potentials and low temperatures. In turn, this shift approaches the equilibrium case as the volume increases, showing the same behavior in Gamma, Log-Normal, and F distributions. However, regardless of the value taken by the thermal fluctuation parameter, which indicates how far from equilibrium the system is, the values turned out to be quantitatively equal, suggesting that the restoration of chiral symmetry is robust against thermal fluctuations in this approximation.

The results of this work were published in the journal Physical Review D<sup>1</sup>, which can be found in the following citation:

**Volume effects on the QCD critical end point from thermal fluctuations within the super statistics framework, Physical Review D, vol. 106, no. 11, p. 116019, 2022. [1]**

---

<sup>1</sup><https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.116019>



# Resumen

El trabajo presentado en esta tesis tiene como objetivo investigar los efectos del volumen y las fluctuaciones térmicas en el denominado *Critical End Point* (CEP) del diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) mediante el formalismo de la súper estadística. En esta aproximación, se asumen fluctuaciones espacio-temporales de algún parámetro intensivo, y se postula un factor de Boltzmann modificado que se obtiene mediante el promedio de dichas fluctuaciones. En el caso particular del presente estudio, se asume que la dinámica de no equilibrio produce fluctuaciones espaciales en la temperatura, las cuales se describen por una función de distribución Gamma ( $\chi^2$ ). Esto permite encontrar una función de partición que depende explícitamente del volumen y de la función de distribución en equilibrio térmico, lo que permite hacer una conexión con la estadística no extensiva de Tsallis.

Los grados de libertad de la QCD se introducen mediante la aproximación del Modelo Sigma Lineal acoplado a quarks (LSMq), cuya función de partición en equilibrio termodinámico es bien conocida y depende de la temperatura y potenciales químicos locales. Se encontró que las temperaturas pseudo-críticas de transición son sensibles al tamaño del sistema, presentando corrimientos sobre los puntos críticos del diagrama a potenciales altos y temperaturas bajas. A su vez, dicho corrimiento se aproxima al caso de equilibrio conforme el volumen aumenta, mostrando el mismo comportamiento en las distribuciones Gamma, Log-Normal y F. Sin embargo, independientemente del valor que tome el parámetro de fluctuación térmica, que indica cuán lejos se encuentra del equilibrio, los valores resultaron ser cuantitativamente iguales, lo que sugiere que la restauración de la simetría quiral es robusta frente a las fluctuaciones térmicas en esta aproximación.

Los resultados de este trabajo fueron publicados en la revista *Physical Review D*<sup>2</sup>, que se puede consultar en la siguiente cita:

**Volume effects on the QCD critical end point from thermal fluctuations within the super statistics framework, *Physical Review D*, vol. 106, no. 11, p. 116019, 2022. [1]**

---

<sup>2</sup><https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.116019>



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Índice general</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estado de la Técnica</b>	<b>5</b>
2.1. Estadística de Gibbs-Boltzmann . . . . .	5
2.1.1. Colectividad Micro canónica . . . . .	5
2.1.2. Colectividad Canónica . . . . .	6
2.1.3. Colectividad Macro canónica . . . . .	6
2.2. Súper Estadística . . . . .	7
2.2.1. Distribución Uniforme . . . . .	7
2.2.2. Distribución de dos niveles . . . . .	8
2.2.3. Distribución Gamma . . . . .	8
2.2.4. Distribución Log-Normal . . . . .	9
2.2.5. Distribución F . . . . .	9
2.3. Teoría Cuántica de Campos . . . . .	11
2.3.1. Electrodinámica Cuántica . . . . .	12
2.3.2. Cromodinámica Cuántica . . . . .	12
2.3.3. Teoría Térmica de Campos . . . . .	13
2.4. Diagrama de Fases de la QCD . . . . .	15
2.5. Súper Estadística y la Densidad de Potencial Efectivo . . . . .	17
2.6. Súper Estadística en la Función de Partición . . . . .	18
2.7. Modelo Sigma Lineal Acoplado a Quarks (LSMq) . . . . .	18
2.8. Potencial Efectivo y Aproximación a Altas Temperaturas . . . . .	19

<b>3. Hipótesis y objetivos</b>	<b>21</b>
3.1. Hipótesis . . . . .	21
3.2. Objetivos . . . . .	21
3.2.1. Objetivo general . . . . .	21
3.2.2. Objetivos específicos . . . . .	21
<b>4. Metodología</b>	<b>23</b>
4.1. Implementación de la SE en la función de partición para la Densidad de Potencial Efectivo .	23
4.2. Modelación computacional para la locación del CEP en el diagrama de fases tras la expansión	24
4.2.1. Parámetros utilizados . . . . .	25
4.2.2. Funcionamiento del programa . . . . .	26
<b>5. Resultados y Discusión</b>	<b>27</b>
5.1. Diagrama de Fase tras la implementación súper estadística en función de $V$ y el parámetro $q$	28
5.2. Efectos del Volumen en el diagrama de fase de la QCD . . . . .	31
5.2.1. Implementación en la distribución Gamma, F y Log-Normal . . . . .	33
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>References</b>	<b>41</b>
<b>Apéndice A. Tablas</b>	<b>43</b>
<b>Apéndice B. Artículo</b>	<b>53</b>

# Índice de figuras

2.1.	Diagrama de Fase del QCD (Elaboración Propia). . . . .	15
2.2.	Transición de fase (a) discontinua y (b) continua (Elaboración Propia). . . . .	16
4.1.	Diagrama de flujo para generar las líneas de transición y cambios en los puntos críticos tras la aproximación súper estadística en el diagrama de fase: $T_0$ representa la temperatura inicial con la que se inicia el programa, $T$ es el resto de temperaturas a utilizar hasta finalizar el diagrama, $\mu$ es el potencial barionico ( $\mu_B$ ) cuyos valores van aumentando, $V_i$ toma valores de $V_i = 10, 20, 40, 60$ para el volumen y $q_j$ es el parámetro de fluctuación térmica que varia como $q_j = 0.8, 0.9, 1.1, 1.2$ . . . . .	26
5.1.	Temperatura pseudo crítica de transición $T_c/a$ en $\mu_B = 0$ como función del volumen adimensional $V = \mathcal{V}/a^3$ , donde $a$ es un parámetro de acoplamiento y $\mathcal{V}$ el volumen, para diferentes valores de $q$ , tomando $T_c^0 \approx 0.9$ como la temperatura de transición de referencia en el caso de equilibrio $q \rightarrow 1$ . . . . .	28
5.2.	Diagrama de fase normalizado sobre la temperatura crítica del sistema $T_c$ , manteniendo un volumen fijo de $V = 10$ para diferentes valores en el parámetro de fluctuación térmica $q = 1.2, 1.1, 0.9, 0.8$ , comparado con el caso sin la aproximación SE cuando $q \rightarrow 1$ . . . . .	29
5.3.	Zoom alrededor de los CEP's del sistema tras la aproximación SE. . . . .	30
5.4.	Diagrama Fase normalizado sobre la temperatura crítica del sistema $T_c$ , manteniendo un $q$ fijo de $q = 1.2$ para diferentes valores en el tamaño del sistema de $V = 10, 20, 40, 60$ , comparado con el caso sin SE. . . . .	31
5.5.	Zoom alrededor de los CEP's del sistema de la Figura 5.4. . . . .	31
5.6.	Función $\eta(q)$ dependiente del tipo de distribución [1]. . . . .	33
5.7.	Puntos críticos del potencial súper estadístico para las tres funciones de distribución de la Ec. (2.39): Dist. F (DFV), Dist. Gamma (DGV) y Dist. Log-Normal (DLV), comparados con el caso sin SE, cuyo símbolos representan diferentes dimensiones en el volumen: $\otimes$ para $V = 50$ , $\triangle$ para $V = 40$ , $\circ$ para $V = 20$ y $\square$ para $V = 10$ , con un $q$ fijo igual a $q = 1.2$ en cada resultado A.8. . . . .	33
5.8.	Zoom alrededor de los CEP's de las diferentes distribuciones de la Figura 5.7. . . . .	34





# Índice de tablas

5.1. Localización de los puntos críticos en el diagrama de fase a diferentes volúmenes con su desviación porcentual con respecto al caso sin SE. . . . .	32
A.1. Resultados numéricos de cada transición de fase para la generación del diagrama de fase en el caso sin súper estadística. El punto crítico (CEP) del sistema se encuentra entre $T = 0.726481075$ y $\mu_B = 1.05$ , cuyos valores normalizados son $T/T_c = 0.799819941$ y $\mu_B/T_c = 1.155998369$ con $T_c$ como la temperatura pseudo-crítica con valor de $T_c = 0.90830578$ . . . . .	44
A.2. Resultados numéricos de cada transición de fase para la generación del diagrama con efectos súper estadísticos de la Figura 5.4, usando como dimensiones $V = 10, 20, 40, 60$ y con un parámetro de fluctuación térmica fijo de $q = 1.2$ . Los valores completos se pueden encontrar en las tablas A.3, A.4, A.5 y A.6, respectivamente, mientras que los puntos críticos de cada sistema en la tabla A.7. . . . .	45
A.3. Valores completos de cada transición de fase en la temperatura $T$ y el potencial neto bariónico $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones $V = 10$ . . . . .	46
A.4. Valores completos de cada transición de fase en la temperatura $T$ y el potencial neto bariónico $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones $V = 20$ . . . . .	47
A.5. Valores completos de cada transición de fase en la temperatura $T$ y el potencial neto bariónico $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones $V = 40$ . . . . .	48
A.6. Valores completos de cada transición de fase en la temperatura $T$ y el potencial neto bariónico $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones $V = 60$ . . . . .	49
A.7. Valores numéricos en la ubicación de los puntos críticos del diagrama fase de la Figura 5.4 considerando diferentes volúmenes en el sistema. Se identifica $T_{CEP}/T_c$ como la temperatura del punto crítico y $\mu_{B,CEP}/T_c$ como el potencial neto barionico del punto crítico, ambos normalizados sobre la temperatura pseudo-crítica $T_c$ . . . . .	50
A.8. Valores numéricos en la ubicación de los puntos críticos del diagrama fase de la Figura 5.7 considerando diferentes volúmenes en el sistema para las distribuciones de la función $\eta(q)$ . . . . .	51



---

# Introducción

Actualmente se considera que el universo se rige por cuatro interacciones fundamentales conocidas como interacción electromagnética, nuclear débil, nuclear fuerte y gravitatoria. Estas interacciones son responsables de todos los procesos en el universo conocido y cada una está relacionada con un portador de interacción específico, como lo son el fotón, los bosones  $Z$ ,  $W^\pm$ , el Gluón y el hipotético gravitón, respectivamente. Con el tiempo se han desarrollado teorías y experimentos para comprender mejor cada una de estas interacciones, sin embargo, la interacción nuclear fuerte hoy en día sigue siendo un tema de interés debido a las incógnitas que se presenta en el comportamiento de la materia hadrónica<sup>1</sup> en condiciones extremas [2, 3, 4].

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es una teoría fundamental que describe los grados de libertad de los quarks y gluones en la interacción fuerte en la materia nuclear [5]. A pesar de ser muy exitosa y cuyas predicciones se han comprobado en aceleradores de partículas durante más de 50 años, desde sus inicios ha presentado dos características que complican su estudio desde una perspectiva teórica y experimental. Estos problemas se deben a la Libertad Asintótica que dificulta los cálculos a partir de un esquema perturbativo para escalas de energía arbitrarias [6, 7], y el Confinamiento de Color que prohíbe el aislamiento independiente de los quarks y gluones [8, 9].

Se han realizado diversos hallazgos experimentales que complementan estudios teóricos sobre las propiedades del vacío de la QCD, los cuales incluyen procesos con quarks y gluones, y el espectro de hadrones [10]. Un ejemplo de esto, son los experimentos de iones pesados que se han llevado a cabo en colisionadores como el (RHIC) del BNL y el (LHC) del CERN, donde se ha revelado la existencia de un estado de la materia llamado Plasma de Quarks y Gluones (QGP) en el cual no hay confinamiento entre estas partículas. Este tipo de experimentos muestran diferencias atribuidas a la cantidad de materia involucrada comparado con resultados de colisiones entre protones-protones y núcleo-núcleo [11, 12, 13, 14, 15]. Dado que un protón puede ser considerado una partícula puntual, una colisión protón-protón no crea un medio interactuante con el tamaño suficiente para afectar a los productos de la reacción. Por lo tanto, se espera que la caracterización de la QCD en medio se realice mediante el análisis de los datos obtenidos en experimentos núcleo-núcleo que involucren un gran número de nucleones capaces de interactuar total o parcialmente en una región de unos pocos Fermis de longitud [16].

La colisión de iones pesados proporciona un medio para estudiar la QCD en condiciones extremas, así como información de la evolución del universo temprano. Durante la colisión, se liberan altas temperaturas y densidades que producen partículas, lo que permite estudiar las dinámicas colectivas y alcanzar escalas

---

<sup>1</sup>La materia hadrónica o *Hadrónes*, se refiere a aquellas partículas compuestas de quarks.

de energía adecuadas, capaces de romper el confinamiento entre quarks y gluones. En dicho proceso la materia pasa por diferentes fases como el Glasma, el plasma de quarks y gluones termalizado y la etapa final de hadronización, cada una caracterizada por distintos parámetros y fuerzas en su interacción. La libertad asintótica de QCD y el confinamiento del color son importantes en la descripción teórica de estas etapas, sin embargo, algunas fases que involucran altas densidades, requieren herramientas computacionales más allá de la teoría de perturbaciones ordinaria [16, 17].

Antes de la colisión, dentro del marco de referencia del centro de masa, los núcleos se comprimen longitudinalmente, en un factor de Lorentz  $\gamma \sim 100$ , asimilando la forma de dos discos delgados. En dicha situación, los discos contienen gluones que aumentan su densidad en  $1/x^2$  de acuerdo a las relaciones de dispersión de Heisenberg, lo cual implica que los gluones tengan un momento transversal relativamente grande junto con una pequeña fracción  $x \ll 1$  del momento longitudinal. Como la QCD es asintóticamente libre en el régimen de alta energía, el acoplamiento entre los gluones en esta etapa es débil. A esto se le conoce como Condensado de Vidrio de Color (CGC, por sus siglas en inglés Color Glass Condensate) [17, 18].

Durante la colisión, se producen procesos en los que se transfiere una gran cantidad de momento ( $P > 10$  GeV), lo que genera partículas de alta energía y momentos transversales, como *jets* hadrónicos, quarks pesados, fotones directos, etc., que pueden ser fácilmente detectadas en la etapa final de la colisión. Después de este punto, alrededor de  $\tau \simeq 0.2$  fm/c, que corresponde a una escala de momento  $P \sim 1$  GeV, el contenido de gluones se divide en constituyentes partónicos<sup>3</sup>, formando un punto crucial para las observaciones finales, ya que la mayoría de las partículas detectadas provienen de la hadronización de estos partones. Antes de la producción de partones, se forma una etapa de alta densidad gluónica llamada Glasma, que tiene una densidad de energía tres veces mayor que en la materia nuclear. En esta etapa, el condensado de bosones formado (glasma) aún no está en equilibrio, por lo que no es posible definir su temperatura [17, 18, 19].

Cuando se producen colisiones de iones pesados, se genera una fuerte interacción entre ellos. Esto provoca que los partones interactúen entre sí y exhiban fenómenos colectivos, cosa contraria a lo que ocurre en una colisión entre protones, donde su débil interacción provoca que las partículas generadas se separen rápidamente al no tener un medio con el cual interactuar, evolucionando de manera independiente hasta alcanzar la etapa de hadronización. De esta forma, la materia partónica alcanza el equilibrio térmico en poco tiempo de acuerdo a datos experimentales, lo que hace que los métodos perturbativos sean aplicables. Después de la termalización, se entra en la fase del QGP donde los quarks y gluones se encuentran libres, sin embargo, en este punto el sistema sigue expandiéndose y enfriándose, por lo tanto, tras la colisión y la creación del QGP, la temperatura es espacialmente inhomogénea y se asume que el sistema se encuentra en un estado de equilibrio térmico local debido a su expansión continua [17, 18, 19, 20].

En la fase del QGP, el sistema se encuentra en un régimen intermedio entre el acoplamiento fuerte y débil, con una temperatura estimada de alrededor de  $T \sim 500 - 600$  MeV. Varios modelos efectivos y simulaciones de Lattice QCD, pueden ser utilizados para estudiar esta etapa. En este régimen, el QGP se describe como un gas suave de quarks y gluones termalizados con interacciones suaves [19, 20].

La etapa de hidronización, la cual es el paso de quarks y gluones a hadrones, se produce cuando la temperatura local alcanza la temperatura de confinamiento de alrededor de  $150 - 180$  MeV después de un tiempo  $\tau \sim 10$  fm/c. En este punto, hay un pequeño momento donde los hadrones producen una densidad relativamente alta, lo que permite definir una noción de temperatura. En el proceso, los hadrones continúan enfriándose y expandiéndose en lo que se conoce como gas de hadrones durante unos  $10 > \tau > 20$  fm/c.

<sup>2</sup>La variable  $x$  representa la cantidad de momento longitudinal que es transmitido y detectado, después de la colisión.

<sup>3</sup>El término *Partón* se utiliza para interpretar cascadas de radiación que se producen a partir de procesos e interacciones de QCD, como lo son colisiones de partículas a altas energías.

Cuando la densidad del gas de hadrones alcanza un punto donde sus componentes dejan de interactuar y su tasa de interacción es menor que la tasa de expansión, se dice que se encuentra en el régimen freeze-out. Los hadrones detectados en este escenario tienen una distribución de momento con una firma térmica de la última fase fluida justo antes del freeze-out, y los datos experimentales sugieren que los espectros de partículas se describen bien mediante distribuciones térmicas de Maxwell-Boltzmann con una temperatura freeze-out de alrededor de  $T_f \simeq 170$  MeV [16, 17, 18].

Debido a la variabilidad entre las interacciones de acoplamiento en las distintas etapas de la colisión de iones pesados, resulta conveniente utilizar modelos efectivos de QCD en cada régimen, sin embargo, también es importante tener en cuenta una descripción basada en los grados de libertad efectivos de cada etapa. Un buen ejemplo, es el Modelo Sigma Línea acoplado a quarks (LSMq), el cual es un modelo que está asociado a la fuerza de interacción fuerte debido a las partículas que lleva su nombre. Dicho modelo sirve para describir la interacción fuerte en regiones de bajas energías tomando en cuenta la ruptura espontánea de la simetría, la cual permite tener una comprensión sobre las propiedades fundamentales de los quarks, gluones y fenómenos de confinamiento en la formación de hadrones [17, 18, 21].

Una vez completada la etapa de hadronización, el sistema se expande y su densidad disminuye, lo que implica que se trabaja con partículas individuales en lugar de campos clásicos. Cuando se trabaja en condiciones de alta temperatura y densidad bariónica, ocurre una transición de fase de la QGP a la materia hadrónica. Durante esta transición, se hace presente la ruptura de la simetría quiral en el formalismo de la QCD, lo cual da lugar a la aparición de partículas ligeras como piones y un condensado de quarks no nulo. Por otro lado, dado que la escala fundamental de QCD es  $\Lambda_{QCD} \sim 200$  MeV, se espera que la liberación de quarks y gluones ocurra a temperaturas alrededor de  $T \sim \Lambda_{QCD} \sim \mathcal{O}(10^{12})$  K y/o densidades bariónicas  $\mu_B \sim \Lambda_{QCD}^3 \sim 1 \text{ fm}^{-3}$ . Estas condiciones se encuentran comúnmente en el interior de objetos estelares como estrellas de neutrones [22].

Haciendo uso de fundamentos teóricos, se pueden describir los aspectos que conllevan una transición de fase en el plano  $T - \mu_B$ . Dentro de este plano y mediante el Modelo Estadístico Bootstrap (SBM), la temperatura crítica  $T_c$  se relaciona con la temperatura límite de Hagedorn  $T_H$  haciendo que la transición sea de segundo orden. En este punto, la densidad de estados  $\rho(m)$  del gas de resonancias hadrónicas, se relaciona con  $e^{(m/T_H)}$  a una temperatura finita, donde  $m$  es la masa de la resonancia y  $T_H \simeq 0.19$  GeV es el parámetro de pendiente de Regge. En el caso del potencial químico bariónico crítico  $\mu_B^c$ , se utiliza un argumento similar, donde la densidad de estados y el factor de Boltzmann son  $e^{(m_B/T_H)}$  y  $e^{[-(m_B - \mu_B)/T]}$ , respectivamente. Con ello, la temperatura límite se obtiene como  $T = (1 - \mu_B/m_B)T_H$ , proporcionando una estimación de la densidad crítica en regiones bajas de temperatura. Por lo tanto, habría una superposición y percolación hadrónica en  $T_H$  que hace hincapié al deconfinamiento de quarks, ya que por encima de la temperatura límite el modelo hadrónico se rompe [23, 24, 25].

Se sabe que la transición de fase involucra una restauración de simetría quiral y es identificada como el cambio de un sistema con quarks constituyentes pesados a un estado con quarks actuales ligeros. En el caso del condensado quiral  $\langle \bar{\psi}|\psi \rangle$  que es el parámetro de orden, toma un valor de  $\langle \bar{\psi}|\psi \rangle_0 \simeq (0, 24 \text{ GeV})^3$  en el vacío, proporcionando una escala natural para estimar las densidades y las temperaturas críticas. De esta forma,  $\langle \bar{\psi}|\psi \rangle$  disminuye con la temperatura y la densidad bariónica, lo que sugiere que los hadrones se fusionan en condiciones extremas [26, 27].

El plano  $T - \mu_B$ , el cual se define como Diagrama de Fases de la QCD, es una representación de la materia fuertemente interactuante que aún no está completamente establecido, debido a que sus principales características son basadas únicamente en fundamentos teóricos. A pesar de ello, se pueden establecer casos límite en la región de alta temperatura y baja densidad bariónica, donde  $\mu_B \ll T$ , y para densidades asintóticamente altas, donde  $\mu_B \gg \Lambda_{QCD}$ . Este diagrama abarca regiones desde la materia hadrónica hasta

el QGP, y puede incluir configuraciones que conduzcan a otros aspectos particulares como escenarios de superconductividad de color. Por otro lado, la existencia de diferentes puntos críticos asociados con cada fase de la materia dentro de este plano, también sigue siendo una pregunta abierta debido a que las únicas representaciones de dichas zonas, se basan en suposiciones que proponen regiones poco accesibles para los métodos computacionales y experimentos de la actualidad [28].

El uso de Modelos Efectivos ha demostrado ser una buena herramienta para predecir esta clase de puntos dentro del diagrama en relación a la temperatura ( $T$ ) y los potenciales químicos bariónicos ( $\mu_B$ ). Una de las zonas más trabajadas por la comunidad en esta área, es el punto crítico CEP (Critical End Point, por sus siglas en inglés) de la QCD, el cual se predice a través de modelos quirales. Este punto indica el cambio de la transición de fase asociada con la restauración de la simetría quiral de segundo orden (para  $\mu_B < \mu_{\text{CEP}}$ ) a primer orden (para  $\mu_B > \mu_{\text{CEP}}$ ). Otro claro ejemplo es el punto crítico de continuidad quark-hadron (QHC), que corresponde a sistemas fríos donde los sabores degenerados no presentan una clara separación entre la materia nuclear superfluida y la materia de quarks superconductores [29, 30, 31, 32].

Por lo general, los resultados teóricos de este tipo de modelos así como de experimentos, se basan en la suposición de que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, sin embargo, la realidad nos muestra que cualquier proceso físico ocurre en un entorno térmico, especialmente cuando hay interacción entre partículas. Esto se debe a que la temperatura del sistema influye en la energía cinética de las partículas y, por lo tanto, en su comportamiento, de esta forma al estar sujetas a fluctuaciones térmicas es evidente que se encuentran fuera del equilibrio termodinámico. Un claro ejemplo se observa en la fase de QGP mencionada anteriormente, donde la alta densidad de gluones, la continua expansión y enfriamiento del sistema, demuestran un comportamiento fuera del equilibrio [33]. Por lo tanto, para tratar este tipo de escenarios, es necesario utilizar un formalismo que nos permita describir al menos de manera aproximada lo que ocurre fuera del equilibrio térmico.

La Súper Estadística (SE) es una herramienta atractiva para describir la dinámica de sistemas fuera del equilibrio. Para ello, la SE hace una extensión de la estadística de Boltzmann de equilibrio teniendo en cuenta las fluctuaciones de un parámetro extensivo. Este parámetro puede ser la temperatura inversa  $\tilde{\beta}$  o cualquier cantidad cuyas fluctuaciones espaciales y temporales sean significativamente mayores que el tiempo de relajación local típico. La inclusión de la SE puede mejorar significativamente la descripción de sistemas complejos, además de que varios estudios han demostrado la eficacia de la SE en el análisis de sistemas fuera del equilibrio [34, 35].

Con ayuda de estas herramientas y conociendo la importancia de estudiar la ubicación de los puntos críticos y líneas de transición dentro del diagrama, este trabajo de investigación pretende explorar los efectos del volumen y las fluctuaciones térmicas sobre dichas zonas. En particular, el análisis se centra en determinar y construir, el CEP y el diagrama de fase de la QCD respectivamente, a partir de modelos efectivos LSMq y bajo el panorama de la Súper Estadística. Por un lado, la inclusión del volumen surge como dependencia directa en la ubicación del CEP, a partir de la función de partición en la definición de Boltzmann dentro de una prescripción tipo Tsallis. Además, se hace uso de distintas funciones de distribución, de modo que las fluctuaciones de la temperatura inversa  $\beta$  sean codificables junto a un parámetro  $q$  de desviación térmica.

---

# Estado de la Técnica

## 2.1. Estadística de Gibbs-Boltzmann

La explicación de aquellos fenómenos macroscópicos en la naturaleza, a partir de una estructura de carácter microscópico, es uno de los principales motivos de estudio dentro de la mecánica estadística. Para ello, una de las formas de abordar este tipo de problemas es atribuido a la estadística de Gibbs-Boltzmann (GB) [36].

La teoría de GB nos permite estudiar sistemas macroscópicos a partir del conjunto colectivo de sus micro estados, en equilibrio termodinámico. Su desarrollo ha permitido estudiar sistemas tanto clásicos como cuánticos. Algunos ejemplos de su aplicación corresponden al estudio de gases con grados de libertad internos, el comportamiento paramagnético de sustancias, el calor específico de sólidos, condensados de Bose-Einstein, entre otros [37].

Para determinar dichas propiedades se parte de la siguiente idea: se tiene un gran número de copias del sistema que en conjunto forman toda la colectividad. Cada una de ellas se encuentra en algún micro estado posible y compatible con el estado macroscópico del sistema. Debido a ello sus propiedades son obtenidas a partir de un promedio sobre los posibles estados microscópicos, es decir, se calcula la probabilidad de que se dé cada micro estado en la colectividad. Dependiendo de las condiciones que definan al estado del sistema se le pueden atribuir distintas colectividades, entre ellas: la micro canónica, canónica y macro canónica [38, 39].

### 2.1.1. Colectividad Micro canónica

Se nos establece un sistema completamente aislado cuyo estado termodinámico está dado por las variables  $E$ ,  $V$  y  $N$  (energía interna, volumen y número de partículas, respectivamente) el cual no permite el intercambio de ninguna de estas cantidades en sus alrededores. Puesto que el conjunto de todos los micro estados juegan un mismo papel dentro del sistema, ya que son igualmente probables de ocurrir, la única cantidad importante será el total de micro estados  $\Omega$  dependientes de estas variables termodinámicas  $\Omega(E, V, N)$ . Así, como todos los micro estados tienen la misma probabilidad de ocurrir. Para un determinado micro estado  $r$  se tiene una probabilidad  $P_r$  dada por

$$P_r = \frac{1}{\Omega}. \quad (2.1)$$

En este caso, el estado más probable estará dado por  $\Omega$  donde es máximo en cada micro estado del sistema [38, 39].



### 2.1.2. Colectividad Canónica

El ensamble canónico a comparación del micro canónico ya no se trata de un sistema completamente aislado con paredes rígidas, sino que se encuentra en equilibrio conectado a un reservorio o baño térmico con el cual puede tener un intercambio de energía. Por lo tanto, su estado de equilibrio está ahora caracterizado por las variables  $(T, V, N)$ , en donde  $T$  es la temperatura del sistema.

Si los estados del reservorio (sistema  $B$ ) no se ven afectador por la presencia de un segundo sistema  $A$  tal que  $E_A \ll E_B$ ,  $V_A \ll V_B$  y  $N_A \ll N_B$ , nos interesaría saber cuál es la probabilidad de que el sistema  $A$  se encuentre en estado con energía  $E_A$  después del equilibrio térmico. De esta manera la función de partición esta dada por,

$$Z = \sum_{E_A} e^{-\beta E_A}, \quad \beta = 1/k_B T, \quad (2.2)$$

donde  $\beta$  es la temperatura inversa y  $k_B$  es la constante de Boltzmann [38, 39]. Con ello la probabilidad de que el sistema  $A$  se encuentre en un estado con energía  $E_A$  después de un equilibrio termodinámico cuando  $E_A \ll E_B$  viene dado por la función de distribución,

$$P(E_A) = \frac{e^{-\beta E_A}}{Z}. \quad (2.3)$$

En este caso el potencial termodinámico que está asociado a esta colectividad es la llamada energía libre de Helmholtz definida por  $F(V, N, T)$  y está definida por,

$$F = -k_B T \ln Z. \quad (2.4)$$

### 2.1.3. Colectividad Macro canónica

El caso del ensamble macro canónico se presenta un intercambio de energía y de materia con el reservorio. Las variables que lo involucran son  $(T, V, \mu)$ , en donde  $\mu$  es el potencial químico asociado al intercambio de partículas, las cuales caracterizan el estado de equilibrio del sistema.

Si ahora tenemos un sistema  $A$  en contacto con un reservorio  $B$  que no se ve afectado por la presencia del sistema  $A$ , ahora nos interesaría saber cuál es la probabilidad de que el sistema  $A$  tenga una energía  $E_A$  y un número de partículas  $N_A$  después de llegar a un equilibrio térmico. Por lo tanto, la gran función de partición tiene la forma,

$$\mathcal{Z} = \sum_{i, N} e^{-\beta(E_i - \mu N)}. \quad (2.5)$$

Para la colectividad macro canónica surge la aparición de un gran potencial  $\Phi$  definido por,

$$\Phi = U - TS - \mu N, \quad (2.6)$$

donde  $U$  es la energía interna,  $S$  la entropía y  $\Phi$  tiene como variables naturales a  $T, V, \mu$ , semejantes a la energía de Gibbs  $(T, P, \mu)$ . Además, a través de él podemos obtener todas las propiedades termodinámicas.

$$S = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V, \mu}, \quad p = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right), \quad N = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{T, V}, \quad (2.7)$$

siendo  $p$  la presión y  $V$  el volumen[38, 39].

## 2.2. Súper Estadística

La estadística de Gibbs-Boltzmann es una excelente aproximación para describir sistemas de muchas partículas a partir del comportamiento de estados microscópicos, de donde se obtienen observables estadísticos con una interpretación de carácter macroscópico. Todo esto dentro de un equilibrio termodinámico. Por lo tanto, cuando se intentan abordar sistemas fuera del equilibrio, la estadística de Boltzmann falla por completo, en consecuencia, surge la necesidad de buscar un método estadístico que sea capaz de enfrentar dichos problemas [34, 40].

El concepto de Súper Estadística (SE), propuesta por Beck y Cohen, es un *ansatz*<sup>1</sup> para tratar con procesos en los cuales hay fluctuaciones de sus parámetros termodinámicos. La idea consiste en suponer la existencia de un sistema que alberga una variable intensiva, por ejemplo la temperatura inversa, la presión, el potencial químico, etc., con fluctuaciones espacio-temporales, y esta a su vez se puede dividir en pequeños subsistemas donde cada uno involucra un equilibrio local [34, 41]. El *ansatz* asume la existencia de un factor de Boltzmann efectivo resultado de promediar los factores de Boltzmann locales por medio de la función de distribución de las fluctuaciones. Así, la SE es una superposición de dos estadísticas: una que involucra el factor de Boltzmann  $e^{-\beta E}$  y otra para los diferentes valores que puede tomar  $\beta$  en cada subsistema [41, 42]. En su forma matemática, el factor de Boltzmann efectivo  $B(E)$  viene dado por:

$$B(E) = \int_0^\infty d\beta f(\beta) e^{-\beta E}, \quad (2.8)$$

donde  $f(\beta)$  es la distribución de probabilidad de  $\beta$  [34]. Algunos ejemplos de funciones de distribución  $f(\beta)$  son :

### 2.2.1. Distribución Uniforme

Siendo la más simple del resto de distribuciones, nos indica la existencia de un conjunto de variables  $x$ , cada una con igual probabilidad de ocurrir. Si dicha distribución se encuentra dentro de un intervalo  $[a, a + b]$ , siendo  $a, b$  valores positivos y reales. Se expresa de la forma,

$$f(x) = \frac{1}{b}, \quad 0 < x < a + b, \quad (2.9)$$

donde,

$$f(x) = 0, \quad \forall \begin{cases} x < 0 \\ x > a + b \end{cases}. \quad (2.10)$$

Con ello el promedio de la distribución sería,

$$\langle x \rangle = a + \frac{b}{2}, \quad (2.11)$$

y a su vez la varianza,

$$\sigma^2 = \frac{b^2}{12}. \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup>Suposición con poder predictivo que no parte de primeros principios. Ésta puede ser demostrada desde una teoría más fundamental.

Partiendo de la generalización del factor de Boltzmann para su representación superestadístico,

$$B(E) = \frac{1}{bE} \left( e^{-\langle x \rangle - (1/2)bE} - e^{-\langle x \rangle + (1/2)bE} \right). \quad (2.13)$$

Cuya expansión por series de Taylor es posible siempre y cuando  $bE$  sea algo pequeño [34],

$$B(E) = e^{-\langle x \rangle E} \left( 1 + \frac{1}{24} b^2 E^2 + \frac{1}{1920} b^4 E^4 + \dots \right). \quad (2.14)$$

### 2.2.2. Distribución de dos niveles

Este tipo de distribución nos da la posibilidad de obtener dos resultados donde cada uno de estos tiene la misma probabilidad de suceder. Si estos valores están dados por  $a$  y  $a + b$ , siendo  $a, b$  positivos y reales, entonces la distribución que la conforma viene dada por,

$$f(x) = \frac{1}{2} \delta(a) + \frac{1}{2} \delta(a + b). \quad (2.15)$$

De igual manera que en la distribución anterior, el promedio esta expresado por,

$$\langle x \rangle = a + \frac{b}{2}, \quad (2.16)$$

y para la varianza,

$$\sigma^2 = \frac{b^2}{4}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto, el factor de Boltzmann generalizado para la superestadística,

$$B(E) = \frac{(e^{(1/2)bE} + e^{-(1/2)bE})}{2} e^{-\langle x \rangle E}, \quad (2.18)$$

que se puede expandir en términos de la serie de Taylor para un  $bE$  pequeño [34],

$$B(E) = e^{-\langle x \rangle E} \left( 1 + \frac{1}{8} b^2 E^2 + \frac{1}{384} b^4 E^4 + \dots \right). \quad (2.19)$$

### 2.2.3. Distribución Gamma

Es una distribución continua con parámetros  $c, b$  positivos y está dada de la forma,

$$f(x) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left( \frac{x}{b} \right)^{c-1} e^{-x/b}. \quad (2.20)$$

El promedio de dicha distribución viene dado por,

$$\langle x \rangle = bc, \quad (2.21)$$

y para el caso de la varianza,

$$\sigma^2 = b^2 c. \quad (2.22)$$

Entonces la generalización del factor de Boltzmann para la superestadística,

$$B(E) = (1 + bE)^{-c}, \quad (2.23)$$

de la misma forma en términos de la mecánica estadística no extensiva,

$$B(E) = (1 + (q - 1)xE)^{-1/(q-1)}, \quad (2.24)$$

donde se puede identificar que  $bc = x$  y  $c = 1/(q - 1)$ . Para poder hacer una expansión en series de Taylor, podemos reescribir la ecuación 2.24 de la forma,

$$B(E) = e^{-c \ln(1+bE)}, \quad (2.25)$$

por lo tanto la expansión quedaría [34],

$$B(E) = e^{-xE} \left( 1 + \frac{1}{2}(q-1)x^2E^2 - \frac{1}{3}(q-1)^2x^3E^3 + \dots \right). \quad (2.26)$$

#### 2.2.4. Distribución Log-Normal

La distribución log-normal se define por sus parámetros y variable  $x$  mayores a cero, cuyo logaritmo está normalmente distribuido de la forma,

$$f(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x/m)}{s} \right)^2 \right\}. \quad (2.27)$$

donde  $s$  y  $m$  son parámetros. Entonces el promedio de dicha distribución,

$$\langle x \rangle = m\sqrt{w}, \quad (2.28)$$

y su varianza,

$$\sigma^2 = m^2w(w-1), \quad (2.29)$$

donde en ambos  $\langle x \rangle$  y  $\sigma^2$ ,  $w = e^{x^2}$ . En el caso del factor de Boltzmann de la generalización para la superestadística, no se es posible calcular analíticamente de forma cerrada, debido al factor exponencial que se involucra en uno de los parámetros, sin embargo, considerando ligeras variaciones para expandir la varianza en serie de potencias [34],

$$B(E) = e^{-\langle x \rangle E} \left( 1 + \frac{1}{2}m^2w(w-1)E^2 - \frac{1}{6}m^3w^{3/2}(w^3 - 3w + 2)E^3 + \dots \right). \quad (2.30)$$

#### 2.2.5. Distribución F

Considerando que  $\beta \in [0, \infty]$  y parámetros  $(v, w)$  enteros mayor a cero, se tiene que la distribución F viene dada de la siguiente manera,

$$f(\beta) = \frac{\Gamma((v+w)/2)}{\Gamma(v/2)\Gamma(w/2)} \left( \frac{bv}{w} \right)^{v/2} \frac{\beta^{(v/2)-1}}{(1+(vb/w)\beta)^{(v+w)/2}}, \quad (2.31)$$

donde  $b$  es real. Para el promedio se tiene,

$$\langle \beta \rangle = \frac{w}{b(w-2)}, \quad (2.32)$$

y con ello la varianza,

$$\sigma^2 = \frac{2w^2(v+w+2)}{b^2v(w-2)^2(w-4)}. \quad (2.33)$$

De la misma manera que en la distribución log-normal, no es posible obtener un calculo analítico de la generalización del factor de Boltzmann para la SE, por lo que haciendo una expansión del término en base a una varianza pequeña [34],

$$B(E) = e^{-\langle \beta \rangle E} \left( 1 + \frac{w^2(v+w-2)}{b^2v(w-2)^2(w-4)} E^2 - \frac{4w^3(v+w-2)(2v+w-2)}{3b^3v^{3/2}(w-2)^3(w-4)(w-6)} E^3 + \dots \right). \quad (2.34)$$

Al observar la forma de cada  $B(E)$ , se puede notar un comportamiento universal en su expansión en serie de potencias: el primer término siempre corresponderá al factor de Boltzmann en equilibrio, el cual es corregido por un segundo término que va como el cuadrado de la varianza y la energía. Dicha universalidad puede ser generalizada para cualquier distribución  $f(\beta)$  con un promedio  $\beta_0 = \langle \beta \rangle$  y varianza  $\sigma^2 = \langle \beta^2 \rangle + \beta_0^2$  de la forma:

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left( 1 + \frac{1}{2} \sigma^2 E^2 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \langle (\beta - \beta_0)^r \rangle E^r \right) \quad (2.35)$$

donde los coeficientes en las potencias  $E^r$  son los  $r$  momentos de la distribución  $f(\beta)$  en torno a la media, la cual se puede expresar como

$$\langle (\beta - \beta_0)^r \rangle = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \langle \beta^j \rangle (-\beta_0)^{r-j}. \quad (2.36)$$

Sin embargo, debido a la universalidad que llevo a generalizar las diferentes distribuciones en una sola expresión, tal y como se muestra en la ecuación 2.35, se puede definir un nuevo parámetro universal  $q$  que abarque cualquier súper estadística de la misma forma y no solo la de Tsallis. De esta manera, el parámetro  $q$  viene dado por la siguiente relación

$$(q-1) \beta_0^2 = \sigma^2, \quad (2.37)$$

Así, el factor de Boltzmann modificado  $B(E)$  se expresa en términos de estos parámetros como:

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left( 1 + \frac{q-1}{2} \beta_0^2 E^2 + \eta(q) \beta_0^3 E^3 + \dots \right) \quad (2.38)$$

donde  $\eta(q)$  es una función que dependerá del tipo de distribución:

$$\eta(q) = \begin{cases} 0, & \text{para la distribución Uniforme y 2 Niveles.} \\ -\frac{1}{3} (q-1)^2, & \text{para la distribución Gamma.} \\ -\frac{1}{6} (q^3 - 3q + 2), & \text{para la distribución Log-Normal.} \\ -\frac{1}{3} \frac{(q-1)(5q-6)}{3-q}, & \text{para la distribución F con } v = 4. \end{cases} \quad (2.39)$$

con el índice  $q$  dado para cada distribución por:

$$q = \begin{cases} w, & \text{para la distribución Log-Normal.} \\ q = 1 + \frac{2(v+w-2)}{v(w-4)}, & \text{para la distribución F.} \end{cases} \quad (2.40)$$

Este parámetro  $q$ , anteriormente definido en la ec. 2.37 como  $\sqrt{q-1} = \sigma/\beta_0$ , representa un coeficiente de variación de la distribución  $f(\beta)$ , cuyo significado físico viene en relación entre la desviación estándar y la media. Si no hay presencia de fluctuaciones en  $\beta$ , el parámetro toma valor de  $q = 1$ . En el caso de  $\sigma E$  pequeño, las correcciones al factor de Boltzmann ordinario  $e^{-\beta_0 E}$  son universales y vienen dadas por el factor  $(1 + (q-1)\beta_0^2 E^2/2)$  [34].

### 2.3. Teoría Cuántica de Campos

La descripción de los fenómenos físicos microscópicos ha sido llevada a cabo por el formalismo de la Mecánica Cuántica. Esta, en su versión no relativista, viene descrita por la denominada Ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H} |\psi_n(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_n(t)\rangle, \quad (2.41)$$

en donde  $|\psi_n(t)\rangle$  es el vector de estado, el cual tiene toda la información física relevante y  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano que dicta la dinámica del sistema:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (2.42)$$

con  $\hat{p}$  el operador de momento y  $V(\mathbf{r})$  el potencial de interacción. Así, en su descripción probabilística, la función de onda  $\psi_n(\mathbf{r}, t)$  se obtiene al proyectar el vector de estado en la base de coordenadas, es decir,

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi_n(t) \rangle, \quad (2.43)$$

cuyo módulo al cuadrado se interpreta como la probabilidad de encontrar al sistema en la posición  $\mathbf{r}$  en el tiempo  $t$  [43].

Aunque la mayoría de fenómenos cuánticos son bien explicados por dicho formalismo, este no incluye a la relatividad especial, la cual es necesaria para tratar procesos de partículas elementales. La teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés Quantum Field Theory), también denominada formalismo de la segunda cuantización permite introducir la relatividad especial en el análisis de procesos cuánticos [43].

En términos generales, la QFT asume que el espacio y el tiempo tienen la misma naturaleza como parámetros (en la mecánica cuántica no relativista la posición es un operador y el tiempo un parámetro), y las funciones de onda son promovidas a operadores de campo. Con esto es posible mostrar que el campo  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  da la probabilidad de que una partícula sea creada o destruida en la coordenada espacio-temporal  $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ . Adicionalmente, el campo  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  ya no es dado por la ecuación de Schrödinger, sino por las denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (2.44)$$

en donde  $\mathcal{L}$  es la densidad Lagrangiana la cual es una función del campo y sus derivadas, es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \nabla\psi). \quad (2.45)$$

Por lo tanto, al conocer el Lagrangiano del sistema es posible obtener la dinámica de los campos cuánticos involucrados [43].

### 2.3.1. Electrodinámica Cuántica

La Electrodinámica Cuántica o QED (por sus siglas en inglés Quantum Electrodynamics) es una teoría cuántica de campos, que tiene le propósito describir las interacciones electromagnéticas. Así, las partículas que describe esta teoría son todas aquellas que poseen carga eléctrica (electrones, muones, quarks, protones, etc.), las cuales se acoplan mediante el campo electromagnético el cual viene representado por sus excitaciones fundamentales denominadas fotones. El Lagrangiano de la QED viene dado por:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.46)$$

en donde  $\psi$  representa los campos fermiónicos<sup>2</sup> cargados de masa  $m$ ,  $\gamma_\mu$  son las denominadas matrices de Dirac,  $D^\mu$  es la derivada covariante cuya forma es

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.47)$$

tal que  $e$  es la carga eléctrica y  $A_\mu$  es el campo de norma asociado a los fotones [44, 45, 46]. Adicionalmente, se define el tensor de Faraday  $F_{\mu\nu}$  como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.48)$$

### 2.3.2. Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica o QCD (por sus siglas en inglés Quantum chromodynamics) es una teoría cuántica de campos que tiene el propósito de describir la interacción entre quarks y gluones, en lo que se conoce como interacción fuerte. La QCD usa un formalismo similar a la electrodinámica cuántica, la teoría de las interacciones electromagnéticas. En el caso de esta última, describe las interacciones de partículas cargadas eléctricamente como puede ser el electrón, sin embargo, en el QCD el análogo correspondiente a esta característica es lo que se le nombra carga de color. Esta carga es una propiedad asignada a los quarks y gluones que proviene del análisis de la simetría interna de la teoría [44, 40, 47, 10, 48].

Esta simetría, admite una representación fundamental que describe el campo de quarks  $\psi_j^\alpha(x)$  con una cierta masa  $m^\alpha$  para cada uno de los quarks que existen  $\alpha = u, s, d, \dots$  mientras que  $j = 1, 2, 3, \dots, N_c$  es el índice de color correspondiente a la partícula. Por otro lado se define  $A_\mu^a$  como el campo de gluones de la teoría, donde  $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$  representa los grados de libertad del color (grupo de gauge) dando con ello 8 índices de color para los gluones [47]. Así, el Lagrangiano que describe a la QCD tiene la siguiente forma,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_\alpha \bar{\psi}_j^\alpha (iD_{jk} - m^\alpha \delta_{jk}) \psi_k^\alpha - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

donde  $D_{jk}$  es la derivada covariante y adquiere la forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a, \quad (2.50)$$

---

<sup>2</sup>Partículas con espín semi entero.

tal que  $g$  es la constante de acoplamiento y  $\lambda^a$  son las denominadas matrices de Gell-Man. Finalmente,  $G_a^{\mu\nu}$  es un tensor que indica la dinámica de los gluones definido como

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.51)$$

donde  $f^{abc}$  son las constantes de estructura de la teoría [49, 50].

La forma de  $\mathcal{L}_{QCD}$  tiene similitudes con el Lagrangiano  $\mathcal{L}_{QED}$ , salvo por la definición del tensor  $G_{\mu\nu}^a$ , que contiene al término  $f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ , el cual indica que los gluones pueden interactuar entre sí (los fotones no lo hacen). Esta propiedad es fundamental en el comportamiento de la interacción fuerte, en lo que denomina *Libertad Asintótica* [6, 7].

A diferencia de las interacciones electromagnéticas, cuya intensidad disminuye al aumentar la distancia entre partículas, la Libertad Asintótica de la QCD indica que la interacción fuerte aumenta cuando la distancia entre quarks (o gluones) se incrementa, y disminuye en caso contrario. Desde el punto de vista energético, la interacción fuerte aumenta de intensidad al disminuir la energía de las partículas y estas son asintóticamente libres cuando la energía aumenta. En términos analíticos, esto se traduce en una constante de acoplamiento  $\alpha_s$  que es función de la energía y el momento, la cual viene dada por,

$$\alpha_s(\mu_R^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(\mu_R^2/\Lambda^2)} \left[ 1 - \frac{6(153 - 19N_f) \ln(\ln(\mu_R^2/\Lambda^2))}{(33 - 2N_f)^2 \ln(\mu_R^2/\Lambda^2)} \right] + \dots, \quad (2.52)$$

donde  $\mu_R^2$  es la escala de renormalización,  $N_f$  el número de sabores y  $\Lambda_{QCD}$  es una escala propia de la teoría [40, 51].

El crecimiento de la constante de acoplamiento  $\alpha_s(\mu_R^2)$  en distancias relativamente grandes, es un indicativo que la separación de las fuentes de color es algo que no puede suceder, a no ser que se tenga una cantidad prácticamente infinita de energía. En consecuencia, esta propiedad involucra algo conocido como Confinamiento, el cual nos atribuye a la existencia de estados asintóticamente confinados en hadrones como lo pueden ser los protones, neutrones, etc., y no aislados, es decir, quarks y gluones libres [40, 51].

### 2.3.3. Teoría Térmica de Campos

Las teorías de campos discutidas en las secciones anteriores se dice que están a temperatura cero, ya que no se tienen en cuenta efectos térmicos a nivel del Lagrangiano o de las ecuaciones de movimiento de los campos cuánticos. Sin embargo, es claro que cualquier proceso físico real se produce en un entorno térmico, sobre todo cuando hay interacción entre muchas partículas. Por lo tanto, es necesario introducir un formalismo que de cuenta de las propiedades termodinámicas de estos objetos, lo cual se logra con la denominada *Teoría Térmica de Campos* (ThQFT por sus siglas en inglés) [52].

En QFT el objeto principal a calcular es la función de Green de dos puntos o propagador del campo  $\hat{q}(x_\mu)$ , el cual viene dado por

$$\langle \hat{T} [\hat{q}(x'_\mu) \hat{q}(x_\mu)] \rangle, \quad (2.53)$$

en donde  $\hat{T}[\cdot]$  indica el ordenamiento temporal de los campos y  $\langle \cdot \rangle$  su valor esperado. El paso a ThQFT se obtiene al tomar la Ec. (2.53) como un promedio térmico de la forma:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{O}], \quad (2.54)$$



en donde  $\hat{\rho}$  es el operador densidad, el cual en en ensamble canónico es:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{\text{Tr} [e^{-\beta\hat{H}}]}, \quad (2.55)$$

con  $\hat{H}$  el Hamiltoniano del sistema. Claramente el denominador de la ecuación anterior es la función de partición termodinámica, de la cual también es posible obtener el propagador mencionado. Para ello, dado que los campos y el Hamiltoniano están dados en función de las coordenadas espacio-temporales, es conveniente expresar la traza en la base de coordenadas  $|q\rangle$ , tal que [52]

$$Z(\beta) = \text{Tr} [e^{-\beta\hat{H}}] = \int dq \langle q | e^{-\beta\hat{H}} | q \rangle. \quad (2.56)$$

Ahora bien, en mecánica cuántica tradicional, el movimiento de una partícula en un potencial independiente del tiempo  $V(q)$  viene dado por la amplitud de probabilidad:

$$G(q', t'; q, t) = \langle q | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle. \quad (2.57)$$

al hacer una continuación analítica de  $G$  a tiempos imaginarios:

$$\begin{aligned} t' &\rightarrow -i\tau' \\ t &\rightarrow -i\tau, \end{aligned} \quad (2.58)$$

es posible demostrar que  $G$  se puede calcular mediante la siguiente integral de camino

$$G(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \int \mathcal{D}q(\tilde{\tau}) \exp \left[ - \int_{\tau}^{\tau'} d\tilde{\tau} \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tilde{\tau}) + V(q(\tilde{\tau})) \right) \right], \quad (2.59)$$

en donde  $\mathcal{D}q(\tilde{\tau})$  es una medida de integración sobre todos los caminos y/o configuraciones posibles del campo. Así, al comparar las Ecs. (2.56) y (2.57), es posible mostrar que

$$Z(\beta) = \int dq G(q, -i\beta; q, 0) \quad (2.60)$$

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[ - \int_0^{\beta} d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right) \right], \quad (2.61)$$

con lo cual se tiene una formulación de la función de partición como integral de camino. De esta forma, al añadir una fuente ficticia  $j(\tau)$  tal que

$$Z(\beta, j) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[ - \int_0^{\beta} d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) - j(\tau)q(\tau) \right) \right], \quad (2.62)$$

el propagador en tiempo imaginario puede ser calculado mediante derivación funcional:

$$\langle \hat{T} [\hat{q}(-i\tau_2) \hat{q}(-i\tau_1)] \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta, j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \Big|_{j=0}. \quad (2.63)$$

Al procedimiento descrito se le conoce como el *formalismo del tiempo imaginario*, el cual permite introducir efectos térmicos en los campos cuánticos, mediante el cálculo de integrales de trayectoria [52].

## 2.4. Diagrama de Fases de la QCD

Se entiende por diagrama de fases como aquella representación gráfica de los estados de la materia que se obtiene al modificar cualquiera de sus variables termodinámicas (temperatura, presión, etc). Esta construcción genera regiones que nos muestran la fase de la sustancia, en el cual el cruce de una zona a otra está dividida por una línea en el diagrama que significan una transición de fase. Dichas transiciones de fase son un cambio abrupto y discontinuo de las propiedades físicas del sistema. Los diagramas de fases son construidos en condiciones de equilibrio y cada línea representa la coexistencia de dos o más fases. La Fig. 2.1 el diagrama de fases conjeturado para la QCD, en la cual se representan las principales transiciones de fase predichas por los modelos teóricos y algunas mediciones experimentales. En dicho diagrama las variables termodinámicas relevantes son la temperatura  $T$  y el potencial químico bariónico  $\mu_B$ , el cual da cuenta del número de bariones menos el número de anti-bariones [53].

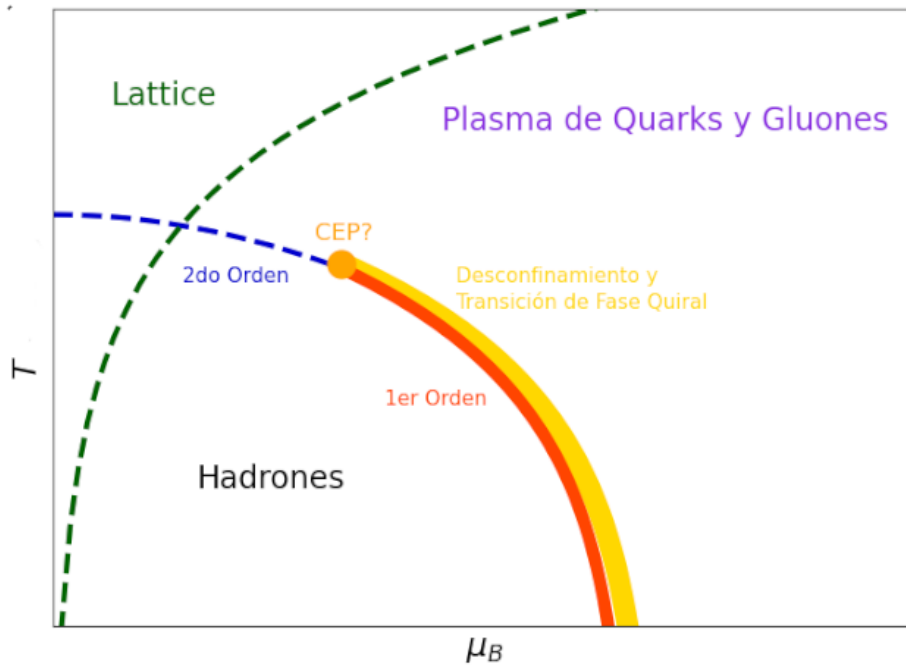


Figura 2.1: Diagrama de Fase del QCD (Elaboración Propia).

El diagrama de la Fig. 2.1 a bajas temperaturas y potenciales químicos, los quarks y gluones no existen libremente, por lo tanto forman estados ligados denominados hadrones (protón, neutrón, etc.). Tanto del punto de vista teórico (Lattice QCD [54, 55] como experimental (RHIC<sup>3</sup> [11, 56, 12, 57, 58] , LHC<sup>4</sup> [13] ) existe una transición de fase de segundo orden a alta temperatura y  $\mu_B = 0$ . En términos más rigurosos, es una pseudo transición o crossover analítico y por lo tanto se define una pseudo temperatura de transición  $T_c$  en dicho punto [59, 60, 61] . Algunos valores que se han reportado de  $T_c$  vienen dados por MILC con una estimación de  $T_c = 169(12)(4)\text{MeV}$  [62] , BNL/RBC-Bielefeld con un valor de  $T_c = 193(7)(4)\text{MeV}$  [63] , HotQCD calculando  $T_c = 154(9)\text{MeV}$  [64, 65] , etc.

La línea de transición, que presenta la Fig. 2.1, se clasifica en dos partes: de primer orden y de segundo orden. En este caso la línea roja presenta una transición de *1er orden* y la línea punteada azul una transición

<sup>3</sup>Relativistic Heavy Ion Collider, en los laboratorios Brookhaven National Laboratory en Upton, Nueva York

<sup>4</sup>Large Hadron Collider (completar información)

de *2do orden*. El orden de transición viene dado por un parámetro de orden  $v$  que tiende a cero: si en la temperatura de transición crítica  $T_c$  el parámetro de orden es discontinuo, la transición corresponde a primer orden, pero si  $v$  tiende continuamente a cero, la transición es de segundo orden, Fig. 2.2 [47].

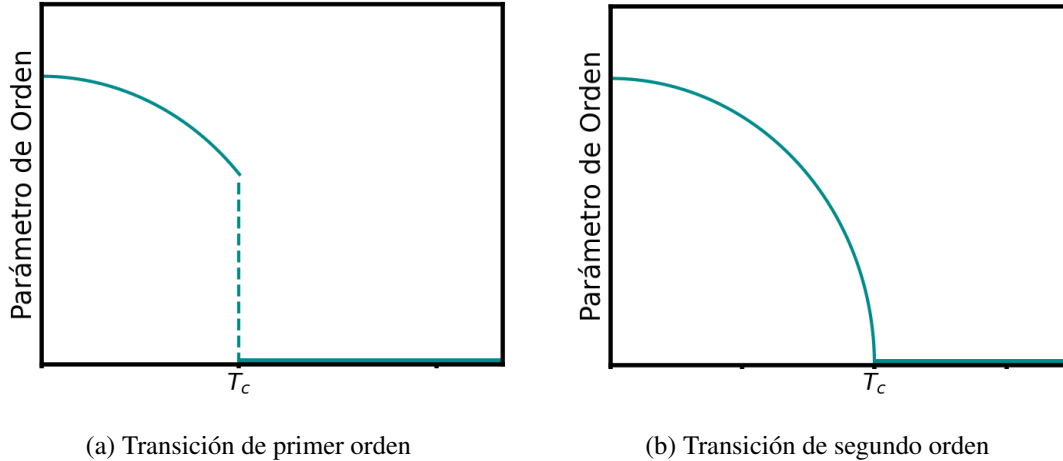


Figura 2.2: Transición de fase (a) discontinua y (b) continua (Elaboración Propia).

El cambio entre una transición de 1er orden a una de 2do orden se le conoce como punto crítico o *CEP* (por sus siglas en inglés *Critical End Point*) y representa un punto o zona de interés por encontrar en la actualidad. Para *Lattice QCD*, la región delineada de color verde, representa una zona de estudio a partir de métodos numéricos donde se pueden hacer predicciones con alto grado de precisión. En términos generales, lo que hacemos es trazar una maya en el espacio-tiempo y cada punto de dicha malla es resuelta numéricamente por QCD, sin embargo, el problema que tiene Lattice QCD surge de la forma en la que se resuelve numéricamente, ya que falla para potenciales químicos  $\mu_B$  diferentes de cero, dando con ello resultados numéricos oscilantes. Por lo tanto, Lattice QCD se limita a trabajar con potenciales químicos pequeños [47]

En el diagrama de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD), se distingue una línea amarilla que representa el fenómeno del *Desconfinamiento* y *Transición de Fase Quiral* [47, 66]. En el contexto de la QCD, el confinamiento y las simetrías desempeñan un papel fundamental. En particular, la *Simetría Quiral* surge al considerar quarks sin masa en el lagrangiano de la teoría. Si asumimos esta condición, encontramos que la simetría quiral es una propiedad del lagrangiano en ausencia de masa. Sin embargo, al introducir masas para los quarks, como ocurre en la naturaleza, esta simetría quiral se rompe. Debido a que los quarks up y down (que forman la materia hadrónica) son los más livianos, se dice que la simetría quiral se conserva aproximadamente. No obstante, surge un problema al calcular las masas de los quarks como funciones de la temperatura y la densidad bariónica, ya que se obtienen ciertos valores en los que la masa se anula. Esto implica que, en regiones del diagrama donde los quarks tienen masa cero, la simetría quiral es válida para ciertos valores de  $T$  y  $\mu_B$ .

En relación al gráfico, la línea amarilla indica que en la región del diagrama delimitada por la línea roja, ocurre una transición de fase quiral [47, 66]. En esta transición, la materia hadrónica, donde la simetría quiral está rota, se transforma en una región donde la simetría quiral está restaurada. Además, esta transición se produce simultáneamente con el desconfinamiento, es decir, cuando los quarks y gluones se vuelven libres, dando lugar a la formación de un plasma de quarks y gluones.

## 2.5. Súper Estadística y la Densidad de Potencial Efectivo

Como se discutió en la Sec. 2.2.3, la súper estadística es una herramienta que permite dar una descripción aproximada de los procesos de no equilibrio, tal que al postular el factor de Boltzmann efectivo dado por la Ec. (2.8), se puede trabajar según el formalismo de la mecánica estadística.

Sin embargo, nótese que al definir los parámetros de la distribución Gamma (dada en la Ec. (2.26)) como  $bc = \beta = 1/(k_B T)$  y  $c = 1/(q - 1)$ , el factor de Boltzmann modificado adquiere la forma

$$\hat{B}(\beta) = e_q^{-\beta \hat{H}}, \quad (2.64)$$

en donde

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (2.65)$$

y  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema.

La ecuación anterior tiene la misma forma matemática de la denominada *Estadística de Tsallis*, la cual es una extensión de la estadística de Boltzmann para escenarios no aditivos [67]. En dicha estadística, el operador densidad se define como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}_q} e_q^{-\beta \hat{H}}, \quad (2.66)$$

tal que  $\mathcal{Z}_q$  es la función de partición, dada por

$$\mathcal{Z}_q = \text{Tr}[\hat{\rho}]. \quad (2.67)$$

Para que la termodinámica que describe esta prescripción estadística sea compatible con una entropía monótonamente creciente y un calor específico positivo definido, Tsallis argumenta que la Estructura de Legendre (EL) se debe preservar [68, 69]. La EL es una relación entre cantidades extensivas e intensivas, tal que el potencial termodinámico asociado a la la energía libre de Helmholtz  $\Omega$  cumple la relación

$$d\Omega = -SdT - PdV + \mu d\mathcal{N}, \quad (2.68)$$

donde  $S$  es la entropía,  $P$  la presión,  $\mu$  el potencial químico y  $dT$ ,  $dV$ ,  $d\mathcal{N}$  son diferenciales de temperatura, volumen y número de partículas respectivamente. Así mismo, se propone una función de entropía  $S$  que depende de un parámetro  $q$  y toma la forma [70]

$$S = k_B \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_n \hat{\rho}_n^q \right) = \frac{1}{q-1} (1 - \text{Tr}[\hat{\rho}^q]), \quad \forall q \in \mathfrak{R} \quad (k_B = 1). \quad (2.69)$$

Por lo tanto, la Ec. (2.68) se satisface cuando

$$\Omega_q(\beta) \equiv U_q(\beta) - TS_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q \mathcal{Z}_q(\beta), \quad (2.70)$$

y

$$U_q(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln_q \mathcal{Z}_q(\beta) \quad (2.71)$$

en donde se define

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad \text{de modo que} \quad \lim_{q \rightarrow 1} \ln_q x = \ln x. \quad (2.72)$$

## 2.6. Súper Estadística en la Función de Partición

Para añadir los efectos de la super estadística en la función de partición  $\mathcal{Z}_q$ , se requiere una expresión para el factor de Boltzmann modificado. Para tal fin, se expande la Ec. (2.67) alrededor de  $q = 1$  por una serie de potencias hasta orden  $\mathcal{O}(q^2)$ . Sabiendo que el exponencial de la densidad de potencial efectiva Ec. (2.64) es equivalente a Ec. (2.65) tenemos

$$\mathcal{Z}_q(\beta) \equiv \text{Tr} \left[ e_q^{-\beta \hat{H}} \right] = \sum_n \left[ 1 - (1-q)\beta \hat{H}_n \right]^{1/(1-q)}, \quad (2.73)$$

de ello la expansión resulta como

$$\mathcal{Z}_q \approx \mathcal{Z}_0 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{Z}_0 + \frac{(q-1)^2}{24} \left[ 3\beta^4 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \mathcal{Z}_0 + 8\beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \mathcal{Z}_0 \right], \quad (2.74)$$

donde  $\mathcal{Z}_0$  es la función de partición de Boltzmann que incluye a  $\Omega_0$  la densidad de potencial efectivo, en equilibrio termodinámico y  $V$  el volumen del sistema

$$\mathcal{Z}_0 = e^{-V\beta\Omega_0}. \quad (2.75)$$

De la Ec. (2.74), se puede expresar nuestra función de partición  $\mathcal{Z}_q$  con una función  $\eta(q)$  que nos generaliza distintas distribuciones como en Ec. (2.39). Por lo tanto, de acuerdo a [1] encontramos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_q \approx e^{-\beta V \Omega_0} & \left\{ 1 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \left[ V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^2 - 2V \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} - \beta V \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right] \right. \\ & \left. - \eta(q) \beta^3 V \left[ -V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^3 - 3 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} + 3V \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right) \left( 2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right) - \beta \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial \beta^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Una vez teniendo la función de partición con la implementación SE, el potencial termodinámico se obtiene al remplazar Ec. (2.74) en Ec. (2.70) considerando el cambio en el logaritmo  $q$  propuesto en Ec. (2.72)

$$\Omega_q(\beta) = -\frac{1}{V\beta} \ln_q \mathcal{Z}_q(\beta) \equiv -\frac{1}{V\beta} \left[ \frac{\mathcal{Z}_q^{1-q} - 1}{1-q} \right], \quad (2.77)$$

de esta forma el potencial efectivo total

$$\Omega_q = \frac{1}{(q-1)V\beta} \left\{ \left[ \mathcal{Z}_0 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{Z}_0 + \frac{(q-1)^2}{24} \left( 3\beta^4 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \mathcal{Z}_0 + 8\beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \mathcal{Z}_0 \right) \right]^{1-q} - 1 \right\}, \quad (2.78)$$

donde en el límite  $q \rightarrow 1$  y  $V \rightarrow \infty$ , el potencial súper estadístico  $\Omega_q$  se convierte en el factor de Boltzmann ordinario  $\Omega_0$ .

## 2.7. Modelo Sigma Lineal Acoplado a Quarks (LSMq)

El estudio de las simetrías es de gran importancia en el marco de cualquier teoría cuántica de campos, por ejemplo la QCD. Dentro de este contexto, uno de los mecanismos más relevantes es conocido como ruptura espontánea de la simetría. En este fenómeno, el lagrangiano del sistema mantiene una simetría global, pero

las soluciones de vacío no exhiben la misma simetría. Por lo tanto, para explorar el diagrama de fase de la QCD durante la restauración de la simetría quiral, se utiliza el modelo LSMq [40, 47].

El modelo sigma lineal acoplado a quarks o LSMq por sus siglas en inglés, es un modelo efectivo que toma en cuenta la ruptura espontánea de la simetría producida en el Lagrangiano a temperaturas y densidades finitas. Dicho modelo se enfoca en estudiar el sector mesónico con un número de fermiones determinado por el número de colores  $N_c$  y de sabores  $N_f$ . Así, la densidad Lagrangiana a quarks está dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g\bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \psi \quad (2.79)$$

donde  $\psi$  es un doblete de isospín SU(2) que representa el campo de quarks,  $\sigma$  es un singleto de isospín y  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  un triplete de isospín en el cual el pión neutro  $\pi_0$  corresponde a la tercera componente  $\pi_3$  mientras que los piones cargados a  $\pi_\pm = (\pi_1 \mp i\pi_2) / \sqrt{2}$ . La componente  $a^2$  corresponde al parámetro de masa al cuadrado,  $\lambda$  y  $g$  son constantes de acoplamiento de valor positivo y  $\vec{\tau}$  son las matrices de Pauli. Para poder realizar un rompimiento espontáneo en la simetría, es necesario que  $\sigma$  experimente un valor de expectación distinto a cero en el vacío tal que

$$\sigma \rightarrow \sigma + v \quad (2.80)$$

de esta manera, la ecuación 2.7, la densidad Lagrangiana se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \sigma \partial_\mu \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} (3\lambda v^2 - a^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} \vec{\pi} \partial_\mu \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{a^2}{2} v^2 - \frac{1}{2} (\lambda v^2 - a^2) \vec{\pi}^2 - \frac{\lambda}{4} v^4 \\ & + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g v \bar{\psi} \psi + \mathcal{L}_I^b + \mathcal{L}_I^f \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde

$$\mathcal{L}_I^b = -\frac{\lambda}{4} \left[ (\sigma^2 + \pi_0^2)^2 + 4\pi^+ \pi^- (\sigma^2 + \pi_0^2 + \pi^+ \pi^-) \right] \quad (2.82)$$

$$\mathcal{L}_I^f = -g\bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \psi \quad (2.83)$$

los cuales describen las interacciones entre los campos bosónicos y fermiónicos después del rompimiento de la simetría [42, 47, 66, 71]. Para los campos de bosones  $\sigma$  y  $\pi$ , y el doblete de isospín de fermiones generan masas dinámicas que ahora dependen del valor de expectación  $v$  de la forma

$$m_\sigma^2 = 3\lambda v^2 - a^2 \quad (2.84)$$

$$m_\pi^2 = \lambda v^2 - a^2 \quad (2.85)$$

$$m_f^2 = gv \quad (2.86)$$

## 2.8. Potencial Efectivo y Aproximación a Altas Temperaturas

Tomar el potencial efectivo a un bucle en el modelo LSMq, ayuda a calcular los efectos de equilibrio térmico a temperatura finita junto con una restauración de la simetría quiral al usar el formalismo de tiempo imaginario de la teoría térmica de campos 2.3.3. Debido a la dependencia en  $T$  y  $\mu_B$ , el potencial químico de los quarks es introducido al asumir la conservación del número bariónico  $Q$ , de esta manera en equilibrio el sistema es descrito a partir de una gran función de partición canónica de la forma

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \left[ e^{-(\mathcal{H} - \mu_B Q)\beta} \right], \quad (2.87)$$

donde se define la traza de la densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  menos  $\mu_B Q$ , todo junto un factor  $\beta = 1/T$  que representa la temperatura inversa [47, 66].

En el caso donde el potencial químico tiende a cero  $\mu_B \rightarrow 0$ , se tiene un límite de alta temperatura con masas pequeñas en los quarks. Dicha aproximación está dada como

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{eff}} = & -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 + \sum_{i=\sigma,\pi} \left\{ \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{16\pi^2 T^2}{2a^2} \right) - 2\gamma_e + 1 \right] - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{T}{12\pi} [m_i^2 + \Pi(T, \mu)]^{3/2} \right\} \\ & - \frac{N_c}{16\pi^2} \sum_{f=u,d} \left\{ m_f^4 \left[ \ln \left( \frac{8\pi^2 T^2}{a^2} \right) + \psi_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{i\mu}{2\pi T} \right) + \psi_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{i\mu}{2\pi T} \right) + 1 \right] + 8m_f^2 T^2 \left[ \text{Li}_2 \left( -e^{\mu/T} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Li}_2 \left( -e^{-\mu/T} \right) \right] - 32T^4 \left[ \text{Li}_4 \left( -e^{\mu/T} \right) + \text{Li}_4 \left( -e^{-\mu/T} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

donde  $\gamma_e \simeq 0.5772$  es la constante de Euler-Mascheroni y  $N_c = 3$  representa el número de color. La función  $\psi_0(x)$  representa la función digamma,  $\text{Li}_n(x)$  es la función polilogarítmica de orden  $n$  y  $\Pi$  es la auto-energía en el límite donde las masas son pequeñas en comparación con  $T$  que viene dado por

$$\Pi(T, \mu) = \frac{\lambda T^2}{2} - \frac{N_f N_c g^2 T^2}{\pi^2} \left[ \text{Li}_2 \left( -e^{\mu/T} \right) + \text{Li}_2 \left( -e^{-\mu/T} \right) \right]. \quad (2.89)$$

donde  $N_f = 2$  es el número de sabor [66, 72].

La inclusión de la auto energía convierte a las masas físicas de los bosones como una corrección que incluye las constantes de acoplamiento  $\lambda$ ,  $g$  y  $a$  para la descripción de la transición de fase, de esta forma cuando  $\mu_B = 0$  se transforman en

$$m_\sigma^2 = 3\lambda v^2 - a^2 + \frac{\lambda T^2}{2} + \frac{N_f N_c g^2 T^2}{6}, \quad (2.90)$$

$$m_\pi^2 = \lambda v^2 - a^2 + \frac{\lambda T^2}{2} + \frac{N_f N_c g^2 T^2}{6}, \quad (2.91)$$

de esta manera la curva del potencial efectivo producida en la temperatura de transición  $T_c$  desaparece junto con las masas térmicas de los bosones cuando  $v = 0$  [72]. Con ello se obtiene una relación entre el parámetro  $a$  al resolverlo de 2.90 y 2.91

$$a = T_c \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \frac{N_f N_c g^2}{6}}, \quad (2.92)$$

de la misma forma de 2.84, 2.85 se puede comprobar que las masas del bosón de vacío satisfacen

$$a = \sqrt{\frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{2}}. \quad (2.93)$$

---

# Hipótesis y objetivos

## 3.1. Hipótesis

En la descripción del diagrama de fases de la QCD se asumen condiciones de equilibrio termodinámico, es decir, el sistema presenta valores constantes de temperatura y potencial bariónico en cada punto del plano  $T - \mu_B$ . Sin embargo, los datos experimentales se obtienen de experimentos de colisiones de iones pesados en donde la materia fuertemente interactuante no adquiere dicho equilibrio de forma instantánea, es decir, el sistema transita por diferentes configuraciones antes de alcanzar la termalización y un valor fijo del potencial químico. Por tanto se puede considerar una descripción en un escenario en donde las fluctuaciones térmicas se introducen a partir de un formalismo termodinámico no extensivo, a través de la súper estadística y su conexión con la estadística de Tsallis dado que las líneas críticas de transición y la locación del CEP son sensibles al tamaño del medio.

## 3.2. Objetivos

### 3.2.1. Objetivo general

Usar la aproximación súper estadística, para determinar el efecto del volumen y las fluctuaciones térmicas en el diagrama de fases de la QCD obtenido mediante el modelo sigma lineal acoplado a quarks.

### 3.2.2. Objetivos específicos

- Obtener las correcciones inducidas por la súper estadística en una expansión de segundo orden en el parámetro  $q$ , con el fin de calcular las modificaciones al potencial termodinámico de la teoría.
- Determinar el impacto del parámetro  $q$ , que modela las fluctuaciones térmicas, en el diagrama de fases de la QCD.
- Conocer cómo varía la locación del CEP y de las líneas críticas del diagrama como función del tamaño del sistema.
- Comparar los resultados anteriores usando diferentes distribuciones.





---

# Metodología

Con el objetivo de explorar la aproximación superestadística (SE) en el contexto de la teoría térmica de campos, como un modelo para describir las fluctuaciones térmicas, se parte del supuesto de que existen cambios significativos en el punto crítico de transición de fase de la Cromodinámica Cuántica (QCD). Estos cambios son causados por la inclusión de factores de Boltzmann modificados en la aproximación, los cuales forman parte del potencial efectivo total del sistema. Para llevar a cabo este estudio, se utiliza como marco teórico el modelo sigma lineal acoplado a quarks (LSMq).

Cuando se trabaja con un sistema de muchas partículas, se ha establecido que el comportamiento de cada microestado puede ser descrito como un conjunto observable de carácter macroscópico que tiende a llegar al equilibrio térmico, tal que la estadística de Gibbs-Boltzmann es una excelente herramienta para tratar este tipo de sistemas. Este formalismo puede aplicarse a la denominada Teoría Térmica de Campos, la cual es una extensión de la segunda cuantización a temperatura  $T = 0$  K, al considerar colectividades macrocanónicas dentro de un marco estadístico en equilibrio térmico. Sin embargo, al trabajar en un régimen más cercano a las condiciones experimentales, es claro que cualquier proceso físico es producido a partir de un entorno térmico, por ejemplo la interacción entre partículas, posee fluctuaciones en sus parámetros termodinámicos y ahí es donde entra en juego la súper estadística. La metodología esta organizada de la siguiente manera: primero se encuentra la implementación de la súper estadística en la función de partición para la densidad de potencial efectivo, posteriormente se establecen valores a los parámetros de la aproximación, para hacer una modelación computacional en la localización de los puntos críticos en el diagrama de fases y con ello ver su comportamiento tras la expansión.

## 4.1. Implementación de la SE en la función de partición para la Densidad de Potencial Efectivo

La implementación de la súper estadística es el punto de partida para observar los efectos producidos por las fluctuaciones térmicas. Como muestra la Sec. 2.2, la SE se basa en la idea de que algún parámetro intensivo llamado  $\tilde{\beta}$ , puede fluctuar en presencia de una determinada función de distribución de probabilidad  $f(\tilde{\beta})$ . Para ello, se pueden utilizar diferentes modelos en  $f(\tilde{\beta})$ , dependiendo de la situación física con la que se trabaje. En este caso, el modelo parte de la función de distribución  $\chi^2$ , también llamada Distribución Gamma (ver Sec. 2.2.3), de modo que las fluctuaciones de la temperatura inversa  $\beta$  se codifican en un parámetro  $q$  conocido como índice entrópico o parámetro de fluctuación térmica [34].

Es de notar que se elige la distribución gamma por ser aquella que permite obtener un resultado analítico al factor de Boltzmann modificado, el cual está directamente relacionado con la función de partición dentro de la estadística de Tsallis. Dicha relación permite hacer una analogía con un escenario termodinámico no extensivo.

Para conectar los resultados de Gibbs Boltzmann, se hace uso de un factor de Boltzmann modificado que viene dado por  $\hat{B}$ , representado en Ec. (2.64), cuya expresión puede ser reescrita como Ec. (2.65), en términos del parámetro  $q$ . Así mismo, al conocer la función de partición del sistema  $\mathcal{Z}_q$ , se puede tener una equivalencia como en Ec. (2.73), la cual hay que recordar que esta dada de la siguiente forma

$$\mathcal{Z}_q(\beta) = \sum_n \left[ 1 - (1-q)\beta\hat{H}_n \right]^{1/(1-q)} \quad \begin{cases} bc & = \beta \\ c & = 1/(q-1) \end{cases}$$

donde en el límite  $q = 1$  y  $N \rightarrow \infty$ , se recupera la entropía de Boltzmann [73].

Considerando esta expresión, el siguiente paso es hacer una expansión de Taylor sobre  $\mathcal{Z}_q$ , para obtener una nueva función de partición  $\mathcal{Z}_q$  que incluya los efectos de la súper estadística. En este caso, es suficiente trabajar hasta segundo orden  $\mathcal{O}(q^2)$ , por lo tanto, se obtiene 2.74 que se ve como

$$\mathcal{Z}_q = \mathcal{Z}_0 + \frac{q-1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{Z}_0 + \frac{(q-1)^2}{24} \left[ 3\beta^4 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \mathcal{Z}_0 + 8\beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \mathcal{Z}_0 \right],$$

la cual incluye una superposición de ambas estadísticas: una referida al equilibrio local y otra debida a las fluctuaciones térmicas.

Una vez obtenido  $\mathcal{Z}_q$ , queda expresar la densidad de potencial efectivo  $\Omega_q$  en términos de esta aproximación. De esta manera, al recordar la Ec. (2.70) rescrito como la Ec. (2.77), se sustituye en la Ec. (2.74) en la expresión para obtener finalmente la Ec. (2.78)

$$\Omega_q = \frac{1}{(q-1)V\beta} \left\{ \left[ \mathcal{Z}_0 + \frac{q-1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \mathcal{Z}_0 + \frac{(q-1)^2}{24} \left( 3\beta^4 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \mathcal{Z}_0 + 8\beta^3 \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \mathcal{Z}_0 \right) \right]^{1-q} - 1 \right\},$$

Esta ecuación incluye cada uno de los factores de Boltzmann modificados tras la implementación de la SE en la función de partición, además de reducirse al caso ordinario  $\Omega_0$  en el límite  $q = 1$  y  $V \rightarrow \infty$ , donde la última variable representa el volumen, por lo tanto, toma un papel indispensable al considerar las dimensiones del sistema.

## 4.2. Modelación computacional para la locación del CEP en el diagrama de fases tras la expansión

Para representar de forma numérica el resultado analítico obtenido en Ec. (2.78), sobre el potencial efectivo  $\Omega_q$ , fue necesario implementar métodos computacionales que proporcionaran una manera accesible de ver y comprender los cambios producidos en la teoría tras la expansión. De esta forma, para procesar dicha información, se optó por usar como medio de programación el programa de Mathematica 11<sup>1</sup>, con el cual se implemento un algoritmo que dio como resultado una serie de representaciones gráficas de los CEP y líneas de transición, sobre el diagrama de fases del sistema.

<sup>1</sup>Creado por Stephen Wolfram, es un programa orientado a la computación de problemas de área científica, ingeniería, matemática, etc., además de también ser un potente lenguaje de programación de propósito general. [74].

### 4.2.1. Parámetros utilizados

Es importante seleccionar cuidadosamente los parámetros que se van a modelar para obtener soluciones numéricas precisas del sistema. Dependiendo de los valores que se elijan, la curva resultante del potencial puede variar significativamente. Algunas constantes utilizadas en el modelo se tomaron de trabajos previos [75, 66], mientras que otros parámetros se derivan de la dependencia de las variables existentes o de condiciones iniciales establecidas al ejecutar el programa.

En la Ec.(2.88), se consideraron dos sabores de quarks en el límite quirral,  $N_f = 2 + 1$ , para poder comparar con simulaciones en las que la temperatura crítica  $T_c$  tiene valores de alrededor de  $k_B T \simeq 170$  MeV [75]. Para lograr una transición de fase de cruce en  $\mu_B = 0$ , se requiere que  $g^2 > \lambda$  en las constantes de acoplamiento  $\lambda$ ,  $g$  y  $a$ . Una solución coherente se obtiene con valores de  $\lambda = 0.86$  y  $g = 1.11$  [66]. Por último, el valor de  $a$  en la Ec.(2.92) es proporcional a  $\lambda$  y  $g$ , mientras que en la Ec. (2.93) depende de  $m_\sigma$ . En este caso, se asignará un valor de  $a = 1$ .

Las masas ( $m_\sigma^2$ ,  $m_{p_i}^2$ ,  $m_f^2$ ) dependen de las constantes de acoplamiento y de la variable  $v$ , como se puede ver en las Ecs. (2.84), (2.85) y (2.86). El valor de expectativa de vacío  $v$  se ha tomado entre  $v = 0$  y un valor finito que se ajuste a la curva de transición del potencial efectivo. Por otro lado, se han dado valores a la variable del potencial bariónico  $\mu_B$  según la fase de transición correspondiente, comenzando desde  $\mu_B = 0$  (altas temperaturas), donde también aparece la temperatura crítica del sistema  $T_c$ , hasta un valor finito en el límite  $T = 0$  (bajas temperaturas).

Por último, de la Ec. (2.78) se han considerado las variables  $\beta$ ,  $q$  y  $V$ . La primera representa la temperatura inversa del sistema y depende de  $T$ . En cuanto a  $q$ , al tratarse de un parámetro que indica qué tan lejos se encuentra el sistema del equilibrio termodinámico, se han utilizado valores cercanos a  $q = 1$  para observar los efectos en los CEP del diagrama respecto al caso sin súper estadística, tales como  $q = 0.8, 0.9, 1.1$  y  $1.2$ , con un  $V = 10$ . En cuanto a  $V$ , que representa el tamaño del sistema, se ha variado el valor a cantidades cada vez mayores para ver si cambia de manera significativa la ubicación de los CEP. Por lo tanto, una vez estimada la curva del potencial para diferentes valores de  $q$  usando un volumen fijo de  $V = 10$ . El proceso descrito se repite ahora con  $V = 20, 40, 60$ .

## 4.2.2. Funcionamiento del programa

La ejecución del programa para generar las curvas del potencial, y con ello obtener los puntos de transición de fase en el diagrama, se muestran en la Figura 4.1, donde se explica de manera secuencial cada uno de los pasos que se llevaron a cabo una vez establecidos los parámetros a utilizar en las variables.

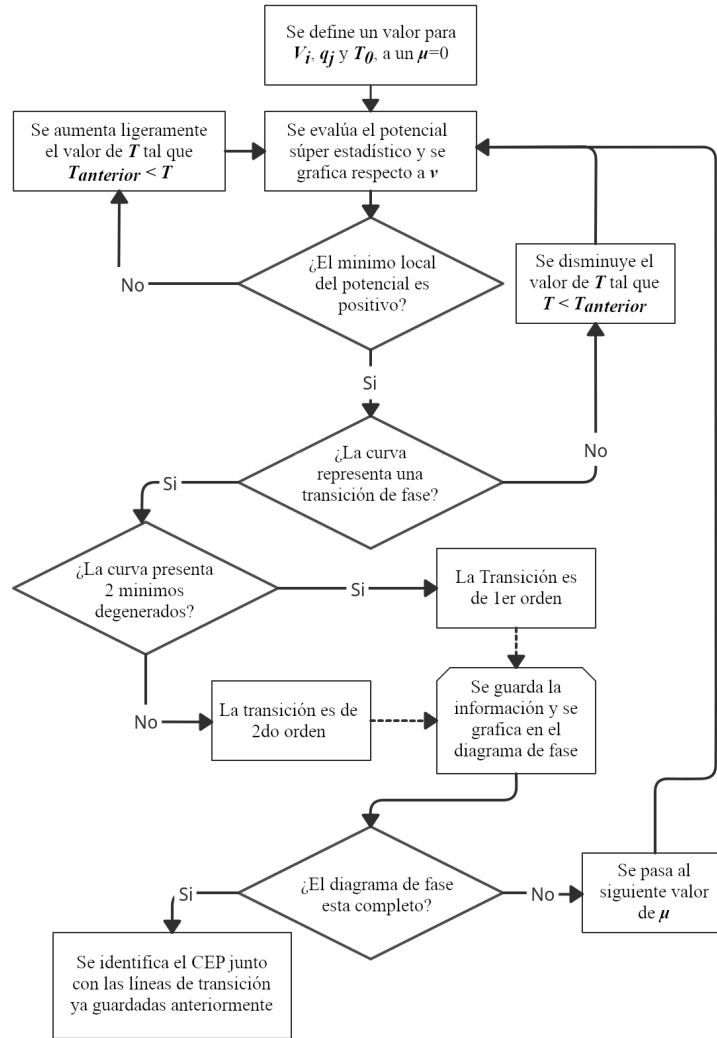


Figura 4.1: Diagrama de flujo para generar las líneas de transición y cambios en los puntos críticos tras la aproximación súper estadística en el diagrama de fase:  $T_0$  representa la temperatura inicial con la que se inicia el programa,  $T$  es el resto de temperaturas a utilizar hasta finalizar el diagrama,  $\mu$  es el potencial barionico ( $\mu_B$ ) cuyos valores van aumentando,  $V_i$  toma valores de  $V_i = 10, 20, 40, 60$  para el volumen y  $q_j$  es el parámetro de fluctuación térmica que varía como  $q_j = 0.8, 0.9, 1.1, 1.2$ .

## Resultados y Discusión

El procedimiento utilizado para construir el potencial efectivo súper estadístico de la Ec. (2.78) establece una conexión entre la SE y la termodinámica no aditiva de Tsallis. Esto resulta en una expresión que abarca efectos fuera del equilibrio termodinámico, como una generalización de factores de Boltzmann modificados que a su vez incluyen el caso de equilibrio. De esta forma, surge el interés de estudiar el diagrama de fase de la QCD desde la perspectiva de la SE, ya que esto permite explorar escenarios de no equilibrio en presencia de fluctuaciones térmicas, además de comprender el impacto del tamaño del sistema en la ubicación de los puntos críticos a lo largo de las líneas de transición.

Para ello, se debe tomar en cuenta que los parámetros  $V$  y  $q$ , son independientes uno del otro. Así, dada la Ec. (2.78), se pueden dar dos principales interpretaciones:

- La primera considera que el sistema se encuentra dividido en  $N$  subsistemas, cada uno con un tamaño y equilibrio termodinámico local donde la función de distribución  $f(\beta)$  da lugar a la distribución espacial de la temperatura respecto a cada subsistema [42, 76, 77]. De esta manera, se puede identificar que el parámetro  $q$  viene dado como:

$$q = 1 + 2/N \tag{5.1}$$

donde el estado de equilibrio se recupera en el límite  $q = 1$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

- Por otro lado, se puede considerar que realmente el sistema no es divisible en pequeños subsistemas, sino que en su lugar es un solo conjunto que cruza distintas etapas del equilibrio, de esta forma, se tiene un único volumen donde las fluctuaciones térmicas adquieren un carácter temporal.

Con el propósito de abordar los objetivos de este estudio, se ha optado por usar la segunda interpretación como enfoque principal para analizar los resultados de la densidad del potencial efectivo  $\Omega_q$ . Una vez establecido este enfoque, se fijan las variables globales, como se describe en la sección 4.2.1, y se varía el potencial en función de  $T, \mu_B, q$  y  $V$ , a partir del cual se obtienen los resultados presentados a continuación.

## 5.1. Diagrama de Fase tras la implementación súper estadística en función de $V$ y el parámetro $q$

El primer caso consiste en explorar la variación del parámetro  $q$  en relación a la temperatura pseudo-crítica  $T_c$  como función del volumen  $V$ . Esta temperatura corresponde a la transición del sistema cuando el potencial químico  $\mu_B$  es igual a cero, y su valor es comparable a  $T_c^0 \approx 0.9$  que corresponde a la temperatura de transición de referencia en el caso de equilibrio  $q \rightarrow 1$ .

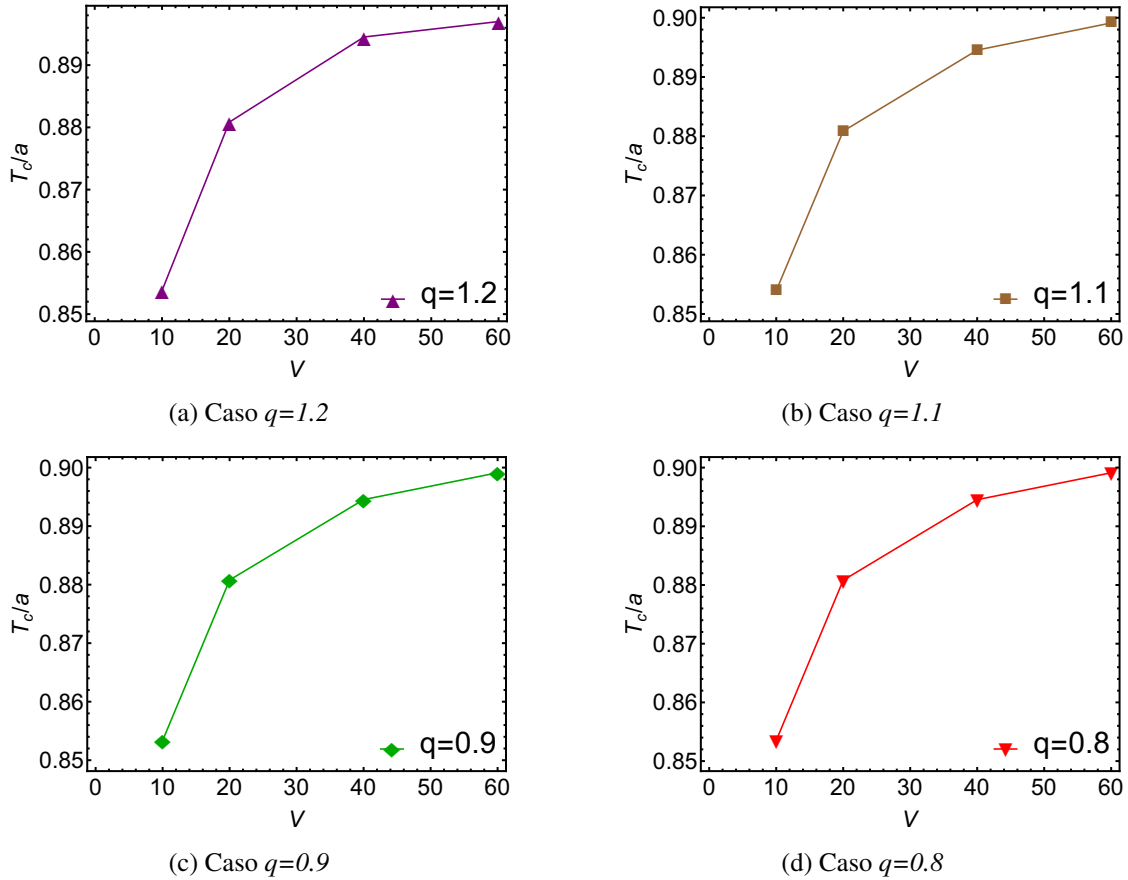


Figura 5.1: Temperatura pseudo crítica de transición  $T_c/a$  en  $\mu_B = 0$  como función del volumen adimensional  $V = \mathcal{V}/a^3$ , donde  $a$  es un parámetro de acoplamiento y  $\mathcal{V}$  el volumen, para diferentes valores de  $q$ , tomando  $T_c^0 \approx 0.9$  como la temperatura de transición de referencia en el caso de equilibrio  $q \rightarrow 1$ .

En la Figura 5.1 se muestra la variación de la temperatura pseudo-crítica  $T_c$  en función del volumen  $V$  para diferentes valores de  $q$ . Se observa que, para volúmenes pequeños, la temperatura pseudo-crítica  $T_c$  difiere considerablemente de la temperatura pseudo-crítica en equilibrio  $T_c^0$ . Sin embargo, a medida que el volumen toma valores cada vez mayores, la temperatura pseudo-crítica se acerca al límite en equilibrio, es decir, al límite termodinámico donde  $T_c^0 \approx 0.9$ . Este comportamiento es independiente del valor de  $q$ , ya que las intersecciones de las distintas gráficas presentan puntos iguales entre si, lo que implica que el cambio en la temperatura pseudo-crítica depende exclusivamente del volumen del sistema en esta aproximación.

Con el fin de analizar como es el comportamiento de los puntos críticos en relación con el parámetro  $q$ , respecto al caso limite de equilibrio, la Figura 5.2 muestra la construcción del diagrama de fases junto con la ubicación de los diferentes CEP's, utilizando un volumen fijo correspondiente a los previamente empleados en la Figura 5.1.

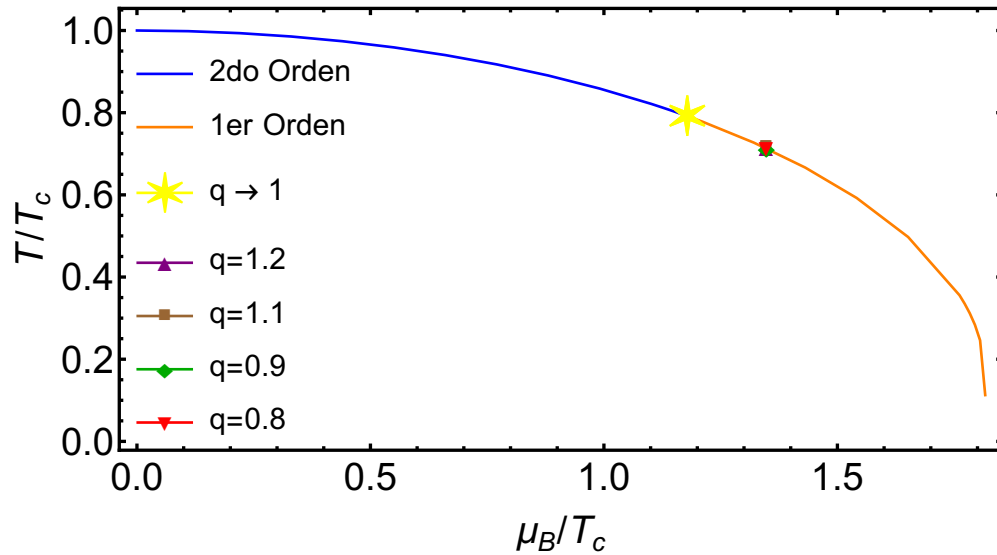


Figura 5.2: Diagrama de fase normalizado sobre la temperatura crítica del sistema  $T_c$ , manteniendo un volumen fijo de  $V = 10$  para diferentes valores en el parámetro de fluctuación térmica  $q = 1.2, 1.1, 0.9, 0.8$ , comparado con el caso sin la aproximación SE cuando  $q \rightarrow 1$ .

Analizando el diagrama, el efecto más evidente se observa en la nueva posición de los CEP's sobre la línea de transición, al ser desplazados significativamente a la derecha. Este desplazamiento viene dado por el volumen, lo cual muestra que tiene una influencia directa en la ubicación de los puntos críticos. Sin embargo, dadas las dimensiones del corrimiento en las que se encuentran sobre puestos los distintos CEP's, no se aprecia una diferencia clara entre ellos. Por lo tanto, para abordar este inconveniente, en la Figura 5.3 se realiza un acercamiento para ver a detalle lo que ocurre en dicha zona.

Observando el acercamiento en la Figura 5.3, se aprecia que la variación del parámetro  $q$ , el cual controla las fluctuaciones térmicas, no produce cambios relevantes sobre los puntos críticos. Los únicos cambios observables corresponden a pequeñas desviaciones entre los mismos CEP's, sin embargo, estas diferencias no presentan un orden lógico a medida que el parámetro de fluctuación térmica  $q$  se acerca o aleja del estado de equilibrio ( $q \rightarrow 1$ ). De esta forma, al presentar un comportamiento desordenado y con variaciones mínimas, las desviaciones que se observan en la Figura 5.3 corresponden a simples errores numéricos que surgen al ejecutar el programa, los cuales aumentan a medida que trabajamos con variables numéricas de menor tamaño.



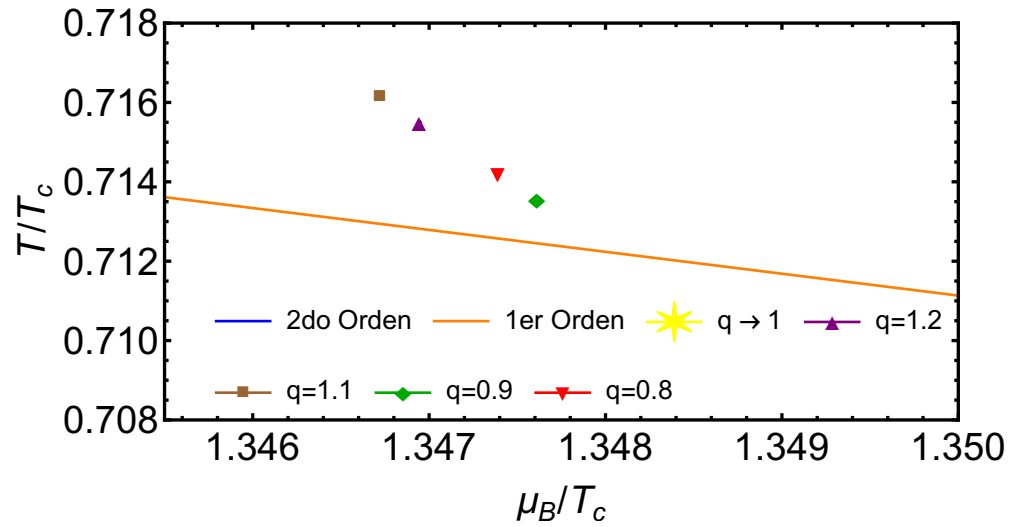


Figura 5.3: Zoom alrededor de los CEP's del sistema tras la aproximación SE.

El comportamiento mostrado con respecto al parámetro de fluctuación térmica  $q$ , se mantiene prácticamente igual para diferentes valores del volumen  $V$  y el resto de los parámetros. Esto implica que las variaciones en  $q$  conducen a un mismo punto crítico, salvo a las pequeñas desviaciones observadas en la Figura 5.3 debido a errores numéricos. En consecuencia, se puede concluir que la transición de fase en esta aproximación es robusta ante fluctuaciones térmicas.

## 5.2. Efectos del Volumen en el diagrama de fase de la QCD

Tomando en cuenta los resultados anteriores, la Figura 5.4 ahora muestra la variación del volumen tomando un  $q$  fijo igual a 1.2. La selección del valor de  $q$  surge debido a que las variaciones en el parámetro de fluctuación térmica, no afectan considerablemente la ubicación de los CEP's. De esta forma, al construir el diagrama de fases, se observa el siguiente comportamiento:

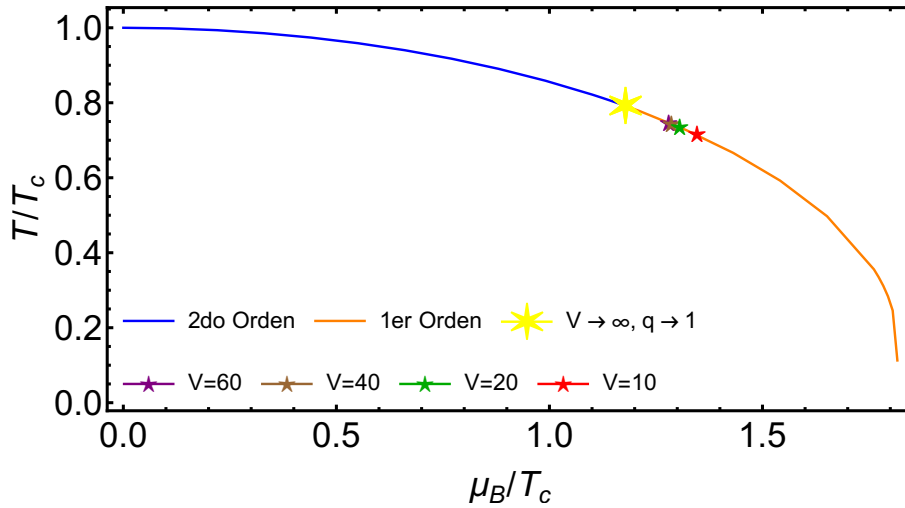


Figura 5.4: Diagrama Fase normalizado sobre la temperatura crítica del sistema  $T_c$ , manteniendo un  $q$  fijo de  $q = 1.2$  para diferentes valores en el tamaño del sistema de  $V = 10, 20, 40, 60$ , comparado con el caso sin SE.

La Figura 5.4 muestra nuevamente los distintos puntos críticos del sistema obtenidos tras la implementación de la súper estadística. En esta ocasión, los puntos críticos no se superponen como un solo conjunto, sino que se distribuyen de manera ordenada a medida que las dimensiones del sistema varían en tamaño. Al realizar un acercamiento en esta región, como se muestra en la Figura 5.5, se observa un patrón consistente. Cuando el tamaño del sistema es pequeño, por ejemplo, con valores de  $V = 10$  y  $V = 20$ , el corrimiento de los CEP's sobre la línea de transición, tiene una mayor desviación respecto al caso sin SE. Sin embargo, en el caso contrario cuando su tamaño aumenta, los puntos críticos se van acercando entre ellos.

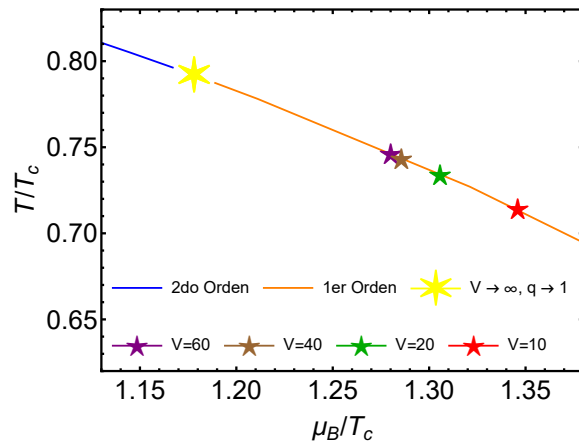


Figura 5.5: Zoom alrededor de los CEP's del sistema de la Figura 5.4.

Para obtener una mayor comprensión del comportamiento numérico de los puntos críticos del sistema, se presenta a continuación una tabla que muestra los valores de la temperatura pseudo crítica y el potencial neto bariónico normalizados, junto con el porcentaje correspondiente a su desviación:

Puntos Críticos (CEPs) del cuadro A.7 normalizados sobre la temperatura de transición ( $T_c$ )				
$V$	$T_{\text{CEP}}/T_c$	$\Delta(T_{\text{CEP}}/T_c)$	$\mu_{\text{B,CEP}}/T_c$	$\Delta(\mu_{\text{B,CEP}}/T_c)$
10	0.71549548	10.5429 %	1.34694186	16.5176 %
20	0.73397356	8.2326 %	1.30556876	12.9386 %
40	0.74331343	7.0649 %	1.28561538	11.2125 %
60	0.74805263	6.4723 %	1.28205204	10.9043 %
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	0.79981994	$\sim$	1.15599836	$\sim$

Tabla 5.1: Localización de los puntos críticos en el diagrama de fase a diferentes volúmenes con su desviación porcentual con respecto al caso sin SE.

Al analizar la tabla 5.1, se observa claramente el patrón que se muestra en la Figura 5.5. Para un volumen de  $V = 10$ , la temperatura pseudo crítica se sitúa alrededor de 0.71549548 MeV, con una desviación de aproximadamente el 10.5429 %. Al duplicar el tamaño del sistema a  $V = 20$ , la temperatura aumenta aproximadamente a 0.73397356 MeV, y la desviación disminuye a un 8.2326 %, lo que implica una diferencia de alrededor del  $\sim 2.3$  % en comparación con el caso anterior. Cuando el volumen se incrementa a  $V = 40$ , que es el doble que el caso anterior y el cuádruple del primero, la temperatura se eleva a alrededor de 0.74331343 MeV, mientras que la desviación disminuye aún más, llegando al 7.0649 %, lo que representa una diferencia de aproximadamente el  $\sim 1.16$  % respecto al segundo caso. A medida que el volumen sigue aumentando, se espera que esta diferencia continúe disminuyendo, al igual que el porcentaje de desviación, lo cual se confirma en el caso de  $V = 60$ . Este mismo comportamiento se puede observar en el potencial bariónico. En consecuencia, a medida que el volumen tiende a infinito ( $V \rightarrow \infty$ ) y el parámetro de fluctuación térmica se acerca al equilibrio termodinámico ( $q \rightarrow 1$ ), los puntos críticos del sistema tienden a tomar valores cercanos al caso sin súper estadística, donde  $T_{\text{CEP}}/T_c \approx 0.79981994$  y  $\mu_{\text{B,CEP}}/T_c \approx 1.15599836$  (véase tabla A.1).

### 5.2.1. Implementación en la distribución Gamma, F y Log-Normal

El comportamiento observado en la Figura 5.4 de los puntos críticos del sistema, surge a partir de la implementación de la distribución Gamma ( $\chi^2$ ) en el contexto de la estadística de Tsallis, como se mencionó en la sección 4.1 [78]. Por otro lado, en la Figura 5.6 se muestra la evolución de la función  $\eta(q)$  a medida que el sistema se aleja del equilibrio termodinámico representado por  $1 - q$ . En esta función, se generalizan tres tipos de distribuciones: Log-Normal, Gamma y F, según la Ec. (2.39). En ausencia de fluctuaciones térmicas, el parámetro  $q$  toma el valor  $q = 1$ , lo que hace que todas las curvas coincidan en el origen. Esto indica que se encuentran dentro de la estadística de Boltzmann. Al combinar estas distribuciones y representar los resultados en el diagrama de fase, el comportamiento mostrado en los CEP's del sistema, es el que se muestra en la Figura 5.7.

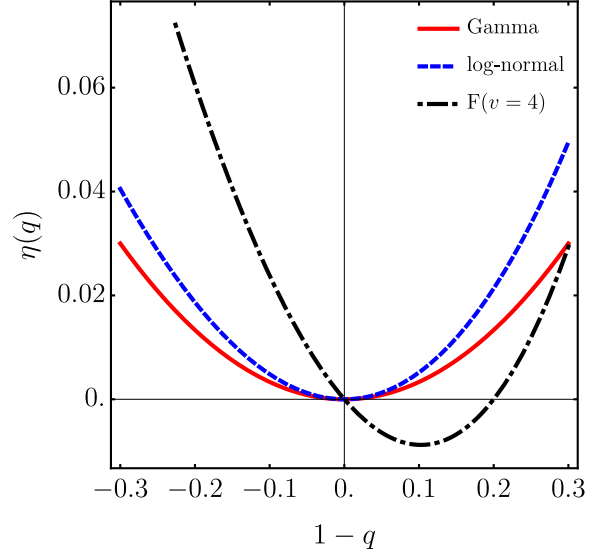


Figura 5.6: Función  $\eta(q)$  dependiente del tipo de distribución [1].

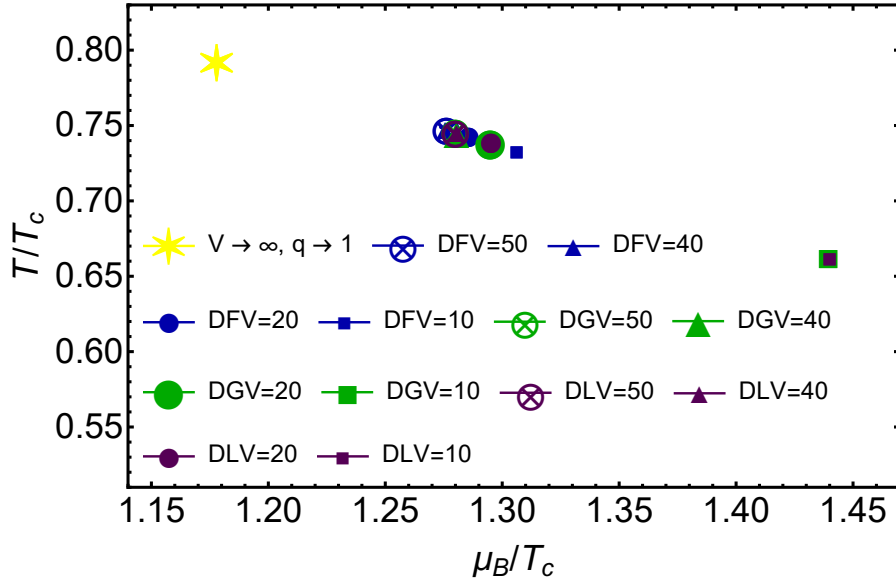


Figura 5.7: Puntos críticos del potencial súper estadístico para las tres funciones de distribución de la Ec. (2.39): Dist. F (DFV), Dist. Gamma (DGV) y Dist. Log-Normal (DLV), comparados con el caso sin SE, cuyo símbolos representan diferentes dimensiones en el volumen:  $\otimes$  para  $V = 50$ ,  $\triangle$  para  $V = 40$ ,  $\circ$  para  $V = 20$  y  $\square$  para  $V = 10$ , con un  $q$  fijo igual a  $q = 1.2$  en cada resultado A.8.

En la Figura 5.7 se puede ver como se distribuyen los puntos críticos de cada distribución, utilizando diferentes tamaños en el volumen  $V = 10, 20, 40, 50$ . Una vez más, los resultados parecen ser independientes del parámetro  $q$ , variando únicamente conforme las dimensiones del sistema aumentan. En consecuencia, los CEP's en cada caso mantiene el mismo patrón que se observó anteriormente en la Figura 5.4. Al comparar los resultados de cada distribución para un volumen dado, se observa una mínima variación entre ellas, con excepción de la distribución F, la cual presenta una notable diferencia respecto en comparación a los resultados de las distribuciones Gamma y Log-Normal. Este mismo comportamiento se observa al hacer un pequeño zoom en la región con mayor concentración de puntos, tal y como se muestra en la Figura 5.8.

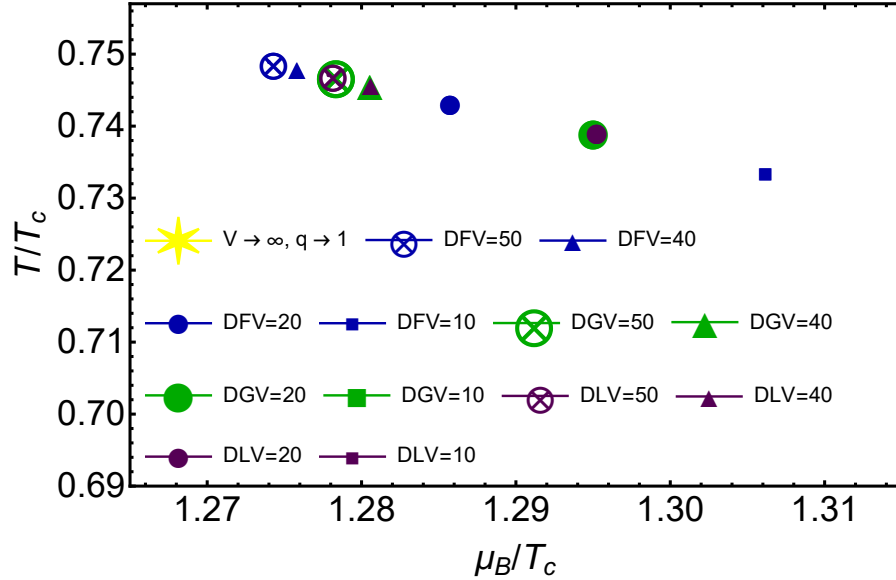


Figura 5.8: Zoom alrededor de los CEP's de las diferentes distribuciones de la Figura 5.7.

Las similitudes entre la distribución Gamma y Log-Normal junto con la desviación de la F respecto al resto, son de esperarse debido a lo antes visto en la Figura 5.6 sobre las diferentes curvas. Por lo tanto, dado que la expansión en serie del potencial súper estadístico se realiza en potencias de  $\beta \hat{H}$ , es intuitivo obtener un comportamiento similar en los resultados sobre las líneas críticas del sistema.

En resumen, al implementar la SE en el análisis de los CEP's en el diagrama de fases de la QCD mediante modelos efectivos (LSMq), se establece una conexión entre estados fuera de equilibrio y la termodinámica no extensiva, logrando que los parámetros libres se asemejen a la estadística de Tsallis. De esta forma, se obtiene un potencial termodinámico efectivo que depende de un parámetro de fluctuación térmica  $q$  y el volumen  $V$ . Así, los resultados obtenidos en esta aproximación revelan que la variación de  $q$  no tiene un impacto significativo en la ubicación de los CEP's en el diagrama. Sin embargo, la presencia del volumen marca una diferencia considerable respecto al caso de equilibrio, mostrando un corrimiento sobre la línea de transición. Por lo tanto, el comportamiento de los puntos críticos es claramente dependiente del tamaño del sistema, y se acerca al caso sin súper estadística cuando el volumen tiende a  $V \rightarrow \infty$ , es decir, en el límite termodinámico. Además, se observa que este patrón se repite al utilizar diferentes distribuciones en la aproximación, lo que sugiere que la transición de fase es robusta frente a fluctuaciones térmicas pero no frente al volumen.

## Conclusiones

En este trabajo de investigación, se estudio la ubicación del punto critico en el diagrama de fases de la cromodinámica cuántica (QCD), usando el modelo sigma lineal (LSMq) en una aproximación súper estadística (SE). Esta aproximación hace una extensión a sistemas fuera del equilibrio termodinámico, el cual se puede modelar al construir un potencial termodinámico efectivo, dependiente de parámetros libres en relación a la estadística de Tsallis. Así, al aplicar esta metodología, se encontraron hallazgos relacionados con la temperatura pseudocrítica  $T_c$  en presencia de un sistema de tamaño variable  $V$ .

Como primer resultado, en la Figura 5.1 la temperatura pseudocrítica mostró considerables modificaciones a medida que el volumen del sistema disminuía, sin embargo, su valor se iba asemejando al caso de equilibrio conforme el tamaño del sistema aumentaba. A su vez, se halló que el parámetro de fluctuación térmica  $q$  no tiene un impacto significativo en las  $T_c$  del sistema, por lo tanto, al construir el diagrama de fases para diferentes valores de  $q$  a un volumen fijo (Figura 5.2), los cambios apreciables en los CEP's eran únicamente atribuidos a la variación del volumen. Al explorar el diagrama con diferentes volúmenes a un  $q$  fijo, la Figura 5.4 mostró un patrón congruente en el corrimiento de los puntos críticos en donde tienden al caso sin SE conforme el volumen crece. Comparando los resultados cuantitativamente, tal y como se muestra en la tabla 5.1, la desviación entre los ellos fue disminuyendo según  $V$  aumentaba, de esta forma es de esperarse que al seguir con dimensiones cada vez mayores indefinidamente, se llega a un punto cuando  $V \rightarrow \infty$  el sistema se iguala al caso de equilibrio, esto quiere decir que se encuentra en el limite termodinámico.

El análisis de estos resultados, da una idea más clara de como la incorporación de un parámetro de fluctuaciones térmicas y usando la SE como una generalización de la estadística de Boltzmann, afectan a las temperaturas pseudo criticas del sistema comparado del caso de equilibrio, y que a su vez dicha variación esta directamente relacionada con el volumen, lo cual se ve reflejado en el corrimiento de la ubicación de los CEP's dentro del diagrama. Dado que la expansión se encuentra en serie de potencias  $\beta\hat{H}$  junto con una función  $\eta(q)$  que generaliza el tipo de distribución: Log-Normal, Gamma y F, al comparar dichos resultados con las diferentes distribuciones se encuentra que el comportamiento es prácticamente el mismo, es decir, permanece la dependencia explícita al tamaño del sistema, con los CEP's desplazados a potenciales bariónicos mas altos y temperaturas mas bajas (Figura 5.7). De esta forma, concluimos que independientemente del tipo distribución usada por Ecs. (2.76), la prescripción de la SE se mantiene conservando el patrón visto en la Figura 5.4 sobre los puntos críticos, en la cual la restauración de simetría quiral es robusta frente a fluctuaciones térmicas pero sensible ante el tamaño del sistema.



---

# Bibliografía

- [1] J. D. Castaño-Yepes, F. M. Paniagua, V. Muñoz-Vitelly, and C. F. Ramirez-Gutierrez, “Volume effects on the QCD critical end point from thermal fluctuations within the super statistics framework,” *Physical Review D*, vol. 106, no. 11, p. 116019, 2022.
- [2] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 2020.
- [3] G. Kane, *Modern elementary particle physics: explaining and extending the standard model*. Cambridge University Press, 2017.
- [4] M. Thomson, *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [5] G. Zweig, “Origins of the quark model,” 1980.
- [6] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories,” *Phys. Rev. Letters*, vol. 30, no. 26, p. 1343, 1973.
- [7] H. D. Politzer, “Reliable perturbative results for strong interactions?,” *Phys. Rev. Letters*, vol. 30, no. 26, p. 1346, 1973.
- [8] K. G. Wilson, “Confinement of quarks,” *Physical review D*, vol. 10, no. 8, p. 2445, 1974.
- [9] J. Greensite, *An introduction to the confinement problem*, vol. 821. Springer, 2011.
- [10] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum chromodynamics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] I. Arsene, I. Bearden, D. Beavis, C. Besliu, B. Budick, H. Bøggild, C. Chasman, C. Christensen, P. Christiansen, J. Cibor, *et al.*, “Quark–gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment,” *Nuclear Physics A*, vol. 757, no. 1-2, pp. 1–27, 2005.
- [12] J. Adams, M. Aggarwal, Z. Ahammed, J. Amonett, B. Anderson, D. Arkhipkin, G. Averichev, S. Badyal, Y. Bai, J. Balewski, *et al.*, “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark–gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” *Nuclear Physics A*, vol. 757, no. 1-2, pp. 102–183, 2005.
- [13] F. Becattini, “The quark gluon plasma and relativistic heavy ion collisions in the LHC era,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 527, p. 012012, IOP Publishing, 2014.
- [14] A. Collaboration, “Performance of the ALICE experiment at the CERN LHC,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 29, no. 24, p. 1430044, 2014.



- [15] W. Li, “Collective flow from AA, pA to pp collisions—Toward a unified paradigm,” *Nuclear Physics A*, vol. 967, pp. 59–66, 2017.
- [16] J. D. Castaño-Yepes, “Effects of Intense Magnetic Fields, High Temperature and Density on QCD-Related Phenomena,” *arXiv preprint arXiv:2103.12898*, 2021.
- [17] E. Iancu, “QCD in heavy ion collisions,” *arXiv preprint arXiv:1205.0579*, 2012.
- [18] E. C. Flores, “Are the collective phenomena a universal feature of the hadronic matter created in p–p, p–A and A–A colliding systems?,” *International Journal of Modern Physics E*, vol. 25, no. 07, p. 1642007, 2016.
- [19] M. AlFiky, O. ElSherif, and A. Hamed, “Quark gluon plasma formation in proton-proton collisions using PYTHIA,” *arXiv preprint arXiv:1902.05114*, 2019.
- [20] F.-M. Liu and K. Werner, “On QGP formation in pp collisions at 7 TeV,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 38, no. 12, p. 124183, 2011.
- [21] H. Suganuma, “Quantum Chromodynamics, Quark Confinement, and Chiral Symmetry Breaking: A Bridge Between Elementary Particle Physics and Nuclear Physics,” in *Handbook of Nuclear Physics*, pp. 1–48, Springer, 2022.
- [22] H. Heiselberg and M. Hjorth-Jensen, “Phases of dense matter in neutron stars,” *Physics Reports*, vol. 328, no. 5-6, pp. 237–327, 2000.
- [23] R. Hagedorn, “Statistical thermodynamics of strong interactions at high energies,” *Nuovo Cimento, Suppl.*, vol. 3, no. CERN-TH-520, pp. 147–186, 1965.
- [24] K. Fukushima, “Chiral symmetry and heavy-ion collisions,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 35, no. 10, p. 104020, 2008.
- [25] H. Satz, “Deconfinement and percolation,” *Nuclear Physics A*, vol. 642, no. 1-2, pp. c130–c142, 1998.
- [26] P. Gerber and H. Leutwyler, “Hadrons below the chiral phase transition,” *Nuclear Physics B*, vol. 321, no. 2, pp. 387–429, 1989.
- [27] T. D. Cohen, R. Furnstahl, and D. K. Griegel, “Quark and gluon condensates in nuclear matter,” *Physical Review C*, vol. 45, no. 4, p. 1881, 1992.
- [28] K. Fukushima and T. Hatsuda, “The phase diagram of dense QCD,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 74, no. 1, p. 014001, 2010.
- [29] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, “Chiral-symmetry breaking in QCD at finite temperature and density,” *Physics Letters B*, vol. 231, no. 4, pp. 463–470, 1989.
- [30] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, “Chiral phase transitions in QCD for finite temperature and density,” *Physical Review D*, vol. 41, no. 5, p. 1610, 1990.
- [31] D. Bailin and A. Love, “Superfluidity and superconductivity in relativistic fermion systems,” *Physics Reports*, vol. 107, no. 6, pp. 325–385, 1984.

- [32] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, “QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity,” *Physics Letters B*, vol. 422, no. 1-4, pp. 247–256, 1998.
- [33] B. Nachman and M. L. Mangano, “Observables for possible QGP signatures in central pp collisions,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, pp. 1–19, 2018.
- [34] C. Beck and E. Cohen, “Superstatistics,” *Physica A*, vol. 322, pp. 267–275, 2003.
- [35] C. Beck, “Superstatistics: theory and applications,” *Continuum mechanics and thermodynamics*, vol. 16, pp. 293–304, 2004.
- [36] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, vol. 5. Elsevier, 2013.
- [37] R. K. Pathria, *Statistical mechanics*. Elsevier, 2016.
- [38] J. O. Rull and J. M. S. Herrero, *Curso de física estadística*, vol. 28. Edicions Universitat Barcelona, 2006.
- [39] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] V. K. Pérez, *El Punto Crítico de la Cromodinámica Cuántica para Sistemas Parcialmente Termalizados*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma De México, 2020.
- [41] J. D. Castaño Yepes and C. F. Ramírez-Gutierrez, “Superstatistics and quantum entanglement in the isotropic spin-1/2  $XX$  dimer from a nonadditive thermodynamics perspective,” *Phys. Rev. E*, vol. 104, p. 024139, Aug 2021.
- [42] A. Ayala, M. Hentschinski, L. A. Hernández, M. Loewe, and R. Zamora, “Superstatistics and the effective QCD phase diagram,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 114002, Dec 2018.
- [43] J. J. Sakurai and E. D. Commins, “Modern quantum mechanics, revised edition,” 1995.
- [44] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [45] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum electrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [46] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms-Introduction to Quantum Electrodynamics*. 1997.
- [47] J. D. Castaño-Yepes, “Intense magnetic fields, high temperature and density effects on QCD-related phenomena,” *arXiv e-prints*, pp. arXiv–2103, 2021.
- [48] S. Munier, “Quantum chromodynamics at high energy and statistical physics,” *Physics reports*, vol. 473, no. 1-4, pp. 1–49, 2009.
- [49] J. P. Carlomagno, *Teorías efectivas para interacciones hadrónicas y diagrama de fases de la cromodinámica cuántica*. PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata, 2015.
- [50] N. Armesto and C. Pajares, “Cromodinámica Cuántica,” *Revista Espanola de Física*, vol. 25, no. 4, 2011.

- [51] J. Morales and G. Sinuco, “Lagrangiano para QCD a bajas energías,” *MOMENTO*, no. 24, pp. 25–42, 2002.
- [52] M. Le Bellac, *Thermal field theory*. Cambridge university press, 2000.
- [53] M. Stephanov, “QCD phase diagram: An Overview,” *arXiv preprint hep-lat/0701002*, 2006.
- [54] R. D. Pisarski and F. Wilczek, “Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics,” *Phys. Rev. D*, vol. 29, no. 2, p. 338, 1984.
- [55] M. Fukugita, M. Okawa, and A. Ukawa, “Finite-size scaling study of the deconfining phase transition in pure SU (3) lattice gauge theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 337, no. 1, pp. 181–232, 1990.
- [56] B. Back, M. Baker, M. Ballintijn, D. Barton, B. Becker, R. Betts, A. Bickley, R. Bindel, A. Budzanski, W. Busza, *et al.*, “The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC,” *Nuclear Physics A*, vol. 757, no. 1-2, pp. 28–101, 2005.
- [57] K. Adcox, S. Adler, S. Afanasiev, C. Aidala, N. Ajitanand, Y. Akiba, A. Al-Jamel, J. Alexander, R. Amirkas, K. Aoki, *et al.*, “Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus–nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX collaboration,” *Nuclear Physics A*, vol. 757, no. 1-2, pp. 184–283, 2005.
- [58] P. Jacobs and X.-N. Wang, “Matter in extremis: ultrarelativistic nuclear collisions at RHIC,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 54, no. 2, pp. 443–534, 2005.
- [59] Y. Aoki, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabó, “The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics,” *Nature*, vol. 443, no. 7112, pp. 675–678, 2006.
- [60] V. Yukalov and E. Yukalova, “Multichannel approach to clustering matter,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 243, no. 3-4, pp. 382–414, 1997.
- [61] V. Yukalov and E. Yukalova, “Thermodynamics of strong interactions,” *arXiv preprint hep-ph/9709338*, 1997.
- [62] C. Bernard, T. Burch, C. DeTar, J. Osborn, S. Gottlieb, E. Gregory, D. Toussaint, U. Heller, and R. Sugar, “QCD thermodynamics with three flavors of improved staggered quarks,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, no. 3, p. 034504, 2005.
- [63] M. Cheng, N. Christ, S. Datta, J. Van der Heide, C. Jung, F. Karsch, O. Kaczmarek, E. Laermann, R. Mawhinney, C. Miao, *et al.*, “Transition temperature in QCD,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, no. 5, p. 054507, 2006.
- [64] A. Bazavov *et al.*, “Chiral transition temperature and aspects of deconfinement in 2+ 1 flavor QCD with the HISQ/tree action,” *arXiv preprint arXiv:1201.5345*, 2012.
- [65] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M. Cheng, C. DeTar, H.-T. Ding, S. Gottlieb, R. Gupta, P. Hegde, U. M. Heller, F. Karsch, *et al.*, “Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, no. 5, p. 054503, 2012.

- [66] A. Ayala, J. D. Castano-Yepes, J. Cobos-Martínez, S. Hernández-Ortiz, A. Julia Mizher, and A. Raya, “Chiral symmetry transition in the linear sigma model with quarks: Counting effective QCD degrees of freedom from low to high temperature,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 31, no. 36, p. 1650199, 2016.
- [67] C. Tsallis, R. Mendes, and A. R. Plastino, “The role of constraints within generalized nonextensive statistics,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 261, no. 3-4, pp. 534–554, 1998.
- [68] A. Scarfone, H. Matsuzoe, and T. Wada, “Consistency of the structure of Legendre transform in thermodynamics with the Kolmogorov–Nagumo average,” *Physics Letters A*, vol. 380, no. 38, pp. 3022–3028, 2016.
- [69] A. Plastino and A. Plastino, “On the universality of thermodynamics’ Legendre transform structure,” *Physics Letters A*, vol. 226, no. 5, pp. 257–263, 1997.
- [70] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics,” *Journal of statistical physics*, vol. 52, no. 1, pp. 479–487, 1988.
- [71] S. F. Hernández Ortiz *et al.*, “Física fundamental y del grafeno,” 2017.
- [72] A. Ayala, A. Bashir, J. Cobos-Martinez, S. Hernandez-Ortiz, and A. Raya, “The effective QCD phase diagram and the critical end point,” *Nuclear Physics B*, vol. 897, pp. 77–86, 2015.
- [73] J. D. Castano-Yepes and D. Amor-Quiroz, “Super-statistical description of thermo-magnetic properties of a system of 2D GaAs quantum dots with gaussian confinement and Rashba spin-orbit interaction,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 548, p. 123871, 2020.
- [74] S. Wolfram, *The mathematica book*, vol. 1. Wolfram Research, Inc., 2003.
- [75] Y. Maezawa, S. Aoki, S. Ejiri, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya, and N. Ukita, “Thermodynamics of two-flavour lattice QCD with an improved Wilson quark action at non-zero temperature and density,” *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 34, no. 8, p. S651, 2007.
- [76] C. Beck, “Recent developments in superstatistics,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 39, pp. 357–363, 2009.
- [77] A. Ayala, S. Hernández-Ortiz, L. A. Hernandez, V. Knapp-Pérez, and R. Zamora, “Fluctuating temperature and baryon chemical potential in heavy-ion collisions and the position of the critical end point in the effective QCD phase diagram,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 7, p. 074023, 2020.
- [78] J. D. Castaño-Yepes, “Entropy exchange and thermal fluctuations in the Jaynes–Cummings model,” *The European Physical Journal Plus*, vol. 137, no. 1, pp. 1–14, 2022.



## Tablas

A continuación se muestran los cuadros presentados en la sección 5 con todos los valores obtenidos durante la exploración de nuestro modelo y la generación de los diagramas de fase de la QCD, así como el corrimiento de los puntos críticos sobre las líneas de transición tras los efectos del volumen y la implementación de la súper estadística:

Caso sin Súper estadística en el límite $q \rightarrow 1$ y $V \rightarrow \infty$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.90830578
0.1	0.90684428
0.2	0.90244405
0.3	0.89505701
0.4	0.88460004
0.5	0.87094993
0.6	0.85393543
0.7	0.83332498
0.8	0.80880779
0.9	0.77996404
1.0	0.74621619
1.1	0.70674596
1.2	0.66037785
1.3	0.60524786
1.4	0.53806464
1.5	0.45183557
1.6	0.32309439
1.61	0.30437871
1.62	0.28306452
1.63	0.25758195
1.64	0.22341865
1.65	0.10239999

Tabla A.1: Resultados numéricos de cada transición de fase para la generación del diagrama de fase en el caso sin súper estadística. El punto crítico (CEP) del sistema se encuentra entre  $T = 0.726481075$  y  $\mu_B = 1.05$ , cuyos valores normalizados son  $T/T_c = 0.799819941$  y  $\mu_B/T_c = 1.155998369$  con  $T_c$  como la temperatura pseudo-crítica con valor de  $T_c = 0.90830578$ .

Tabla A.2: Resultados numéricos de cada transición de fase para la generación del diagrama con efectos súper estadísticos de la Figura 5.4, usando como dimensiones  $V = 10, 20, 40, 60$  y con un parámetro de fluctuación térmica fijo de  $q = 1.2$ . Los valores completos se pueden encontrar en las tablas A.3, A.4, A.5 y A.6, respectivamente, mientras que los puntos críticos de cada sistema en la tabla A.7.

$V = 10$		$V = 20$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )	$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.85378592	0.0	0.88084215
0.1	0.85223403	0.1	0.87933395
0.2	0.84756018	0.2	0.87479231
0.3	0.83970874	0.3	0.86716506
0.4	0.82858309	0.4	0.85636183
0.5	0.81403954	0.5	0.84224811
0.6	0.79587679	0.6	0.82463669
0.7	0.77382032	0.7	0.80327239
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.5	0.33624700	1.5	0.38589300

$V = 40$		$V = 60$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )	$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.89451325	0.0	0.89699947
0.1	0.89302699	0.1	0.89576543
0.2	0.88855503	0.2	0.89184287
0.3	0.88104806	0.3	0.88428735
0.4	0.87041970	0.4	0.87339653
0.5	0.85653389	0.5	0.86016424
0.6	0.83921890	0.6	0.84286238
0.7	0.81823012	0.7	0.82246728
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.5	0.41780470	1.5	0.42901339



Efecto de la Súper estadística para $V = 10$ y $q = 1.2$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.85378592
0.1	0.85223403
0.2	0.84756018
0.3	0.83970874
0.4	0.82858309
0.5	0.81403954
0.6	0.79587679
0.7	0.77382032
0.8	0.74749664
0.9	0.71639243
1.0	0.67978342
1.1	0.63660239
1.2	0.58515755
1.3	0.52255700
1.4	0.44245800
1.5	0.33624700

Tabla A.3: Valores completos de cada transición de fase en la temperatura  $T$  y el potencial neto bariónico  $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones  $V = 10$ .

Efecto de la Súper estadística para $V = 20$ y $q = 1.2$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.88084215
0.1	0.87933395
0.2	0.87479231
0.3	0.86716506
0.4	0.85636183
0.5	0.84224811
0.6	0.82463669
0.7	0.80327239
0.8	0.77781005
0.9	0.74777782
1.0	0.71251677
1.1	0.67106885
1.2	0.62196086
1.3	0.56276630
1.4	0.48863100
1.5	0.38589300

Tabla A.4: Valores completos de cada transición de fase en la temperatura  $T$  y el potencial neto bariónico  $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones  $V = 20$ .

Efecto de la Súper estadística para $V = 40$ y $q = 1.2$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.89451325
0.1	0.89302699
0.2	0.88855503
0.3	0.88104806
0.4	0.87041970
0.5	0.85653389
0.6	0.83921890
0.7	0.81823012
0.8	0.79323499
0.9	0.76379164
1.0	0.72927156
1.1	0.68879164
1.2	0.64101580
1.3	0.58379120
1.4	0.51298705
1.5	0.41780470

Tabla A.5: Valores completos de cada transición de fase en la temperatura  $T$  y el potencial neto bariónico  $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones  $V = 40$ .

Efecto de la Súper estadística para $V = 60$ y $q = 1.2$	
$\mu_B$	Temperatura de transición ( $T$ )
0.0	0.89699947
0.1	0.89576543
0.2	0.89184287
0.3	0.88428735
0.4	0.87339653
0.5	0.86016424
0.6	0.84286238
0.7	0.82246728
0.8	0.79777681
0.9	0.76857670
1.0	0.73448750
1.1	0.69459527
1.2	0.64741037
1.3	0.59085997
1.4	0.52127917
1.5	0.42901339

Tabla A.6: Valores completos de cada transición de fase en la temperatura  $T$  y el potencial neto bariónico  $\mu_B$ , para la generación del punto crítico en el diagrama fase con efectos súper estadísticos usando como dimensiones  $V = 60$ .

Puntos Críticos (CEP) de la tabla A.2  
para las diferentes dimensiones del sistema

$V$	$T_c$	$T_{\text{CEP}}$	$T_{\text{CEP}}/T_c$	$\mu_{\text{B,CEP}}$	$\mu_{\text{B,CEP}}/T_c$
10	0.85378592	0.61087997	0.71549548	1.15	1.3469
20	0.88084215	0.64651485	0.73397356	1.15	1.3055
40	0.89451325	0.66490372	0.74331343	1.15	1.2856
60	0.89699947	0.67100282	0.74805263	1.15	1.2821
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	0.90830578	0.72648107	0.79981994	1.05	1.1559

Tabla A.7: Valores numéricos en la ubicación de los puntos críticos del diagrama fase de la Figura 5.4 considerando diferentes volúmenes en el sistema. Se identifica  $T_{\text{CEP}}/T_c$  como la temperatura del punto crítico y  $\mu_{\text{B,CEP}}/T_c$  como el potencial neto barionico del punto crítico, ambos normalizados sobre la temperatura pseudo-crítica  $T_c$ .

Puntos Críticos (CEP) de la Figura 5.7				
para las distribuciones: Log-Normal, Gamma y F				
$V$	Distribución	$T_c$	$T_{CEP}/T_c$	$\mu_{B,CEP}/T_c$
10	Dist. Log-Normal	0.86798889	0.66227222	1.4401
	Dist. Gamma	0.89994969	0.66335070	1.4392
	Dist. F	0.88043876	0.73344654	1.3061
20	Dist. Log-Normal	0.88787599	0.73899804	1.2952
	Dist. Gamma	0.88801079	0.73923035	1.2950
	Dist. F	0.89442641	0.74312179	1.2857
40	Dist. Log-Normal	0.89801809	0.74572328	1.2805
	Dist. Gamma	0.89805103	0.74578879	1.2805
	Dist. F	0.90137462	0.74790477	1.2758
50	Dist. Log-Normal	0.89996499	0.74715889	1.2778
	Dist. Gamma	0.89994969	0.74723238	1.2778
	Dist. F	0.90268920	0.74890424	1.2739

Tabla A.8: Valores numéricos en la ubicación de los puntos críticos del diagrama fase de la Figura 5.7 considerando diferentes volúmenes en el sistema para las distribuciones de la función  $\eta(q)$ .



## Artículo

En esta sección se muestra el artículo donde se publicaron los resultados de la investigación. Dicho trabajo fue publicado en la revista Physical Review D, el cual se puede consultar en la siguiente cita:

**Volume effects on the QCD critical end point from thermal fluctuations within the super statistics framework, Physical Review D, vol. 106, no. 11, p. 116019, 2022. [1]**



## Volume effects on the QCD critical end point from thermal fluctuations within the super statistics framework


Jorge David Castaño-Yepes<sup>1,\*</sup>, Fernando Martínez Paniagua<sup>2</sup>,  
Victor Muñoz-Vitelly<sup>3</sup>, and Cristian Felipe Ramirez-Gutierrez<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile*

<sup>2</sup>*Ingeniería Física, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, C.P. 76010 Querétaro, Querétaro, Mexico*

<sup>3</sup>*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, México Distrito Federal 04510, Mexico*

<sup>4</sup>*Universidad Politécnica de Querétaro, El Marqués, 76240 Querétaro, Mexico*

 (Received 15 August 2022; revised 3 November 2022; accepted 22 November 2022; published 28 December 2022)

We investigate the impact of the finite volume and the thermal fluctuations on the critical end point of the QCD phase diagram. To do so, we implement the super statistics framework with gamma,  $F$ , and log-normal distributions and their relation with the Tsallis nonextensive thermodynamics. We compute an effective thermodynamic potential as a function of the inverse temperature fluctuations and explicit dependence on the system volume. To find an analytic expression for the effective potential, we expand the modified Boltzmann factor by using the equilibrium thermodynamic potential computed in the linear sigma model coupled to quarks. We find that the pseudocritical temperature of transition at vanishing baryon chemical potential is modified by the size of the system being about 7% lower for small volumes. Additionally, the critical end point moves to higher densities and lower temperatures (about 12% in both cases). Interestingly, the results are quantitatively the same when the parameter that models the out-of-equilibrium situation is modified, indicating that the chiral symmetry restoration is robust against the thermal fluctuations in this approximation.

DOI: [10.1103/PhysRevD.106.116019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.116019)

### I. INTRODUCTION

In the understanding of the strongly interacting matter under extreme conditions, the study of the QCD-phase diagram has become of great interest in the last few years. In particular, determining the location of the critical end point (CEP) in the baryon chemical potential ( $\mu_B$ ) and temperature ( $T$ ) plane is a challenging goal from theoretical and experimental perspectives. It is well established that in some regions of density and temperature, the so-called chiral symmetry is restored from the hadronic matter to the quark-gluon plasma phase (QGP): LQCD with 2 + 1 light flavors shows a transition in the  $T$  axis as a crossover with a pseudocritical temperature  $T_c \simeq 150$ – $156$  MeV [1–3] (see Ref. [4] for an overview of recent progress in the phase diagram). Recent determination of the transition temperature with increased precision at finite baryon density can

be found in Refs. [5,6], with  $T_c = 156.5 \pm 1.5$  MeV at  $\mu_B = 0$ . Moreover, many theoretical and phenomenological models predict a first-order transition line in the low  $T$  and large  $\mu_B$  region [7–12]. Hence, the pass from a second order phase transition regime to one of first order defines the CEP location.

Although the phenomenological description of the experimental data assumes conditions close to ideal thermalization, it is natural to assume that, in a heavy-ion collision, there are stages where the thermal equilibrium cannot be demanded *a priori* [13–15]. Indeed, the QGP phase is preceded by the glasma, which corresponds to a high gluon occupation system where its constituents are out of thermal equilibrium [16–18]. Previous works have demonstrated that the signals of the glasma can be relevant to the final observables such as elliptic flow and photon invariant momentum distribution [19–22]. Then, it is interesting to inquire if the nonequilibrium stages related to the QGP formation may modify the findings about the chiral symmetry restoration.

As an attempt to describe situations outside of thermal equilibrium, super statistics (SS) is one of the most attractive frameworks for describing the nonequilibrium dynamics of complex systems. Beck and Cohen introduced

\*jcastano@uc.cl

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI. Funded by SCOAP<sup>3</sup>.

SS as an extension of the equilibrium Boltzmann statistics by considering fluctuations in some extensive parameter  $\tilde{\beta}$  [23–25]. Such a parameter can be identified as the inverse temperature, vorticity, friction constant, volatility in finance, or a quantity whose space-time fluctuations are much larger than the typical relaxation time of the local dynamics. Previous works have shown that a SS description of the temperature and baryon chemical potential impact the CEP location [26,27]. On the other hand, particular choices of SS are related to nonextensive thermodynamic scenarios [28,29], so that SS may serve as a link between the thermal fluctuations [30,31] and the studies with nonextensive statistical mechanics [32–34] or explicit volume dependence [35–40] for the QCD phase diagram.

This work presents the interplay between the thermal fluctuations and the finite-volume effects in the CEP location in the linear sigma model (L $\sigma$ M) framework. First, the out-of-equilibrium situation is modeled with the  $\chi^2$  distribution function so that the fluctuations of the inverse temperature  $\beta$  are encoded in the parameter  $q$ . The CEP's volume dependence arises from the definition of the Boltzmann partition function, which enters explicitly into the SS-thermodynamic potentials within a Tsallis-like prescription. The paper is organized as follows: In Sec. II, we present a summary of the SS and its relation with the nonextensive Tsallis thermodynamics. Next, in Sec. III, the SS-effective potential density is found in its general form as a function of its equilibrium counterpart. Then, in Sec. V, we present the effective density potential (in equilibrium) from the L $\sigma$ M coupled to quarks. The results and discussion are presented in Sec. VI. Finally we summarize and give an outlook of the analysis in Sec. VII.

## II. SUPER STATISTICS

The SS is based on the idea that some intensive parameter  $\tilde{\beta}$  may fluctuate by following a certain probability distribution function  $f(\tilde{\beta})$ . By assuming that the system passes through equilibrium states  $e^{-\tilde{\beta}\hat{H}}$ , it is possible to construct a modified Boltzmann factor from the superposition of two statistics: one referring to the local equilibrium, and other due to the fluctuations. Explicitly, this modified Boltzmann factor reads

$$\hat{B} \equiv \int_0^\infty d\tilde{\beta} f(\tilde{\beta}) e^{-\tilde{\beta}\hat{H}}, \quad (1)$$

where  $\hat{H}$  is the Hamiltonian of the system. At this level, SS is an ansatz, and therefore, it cannot be taken as a first principles model for thermodynamic fluctuations.

Several models for  $f(\tilde{\beta})$  are used, depending of the physical situation to be modeled. For example, the most used are these:

- (i) Uniform distribution: It is the simplest distribution, given by

$$f(\tilde{\beta}) = \frac{1}{b}, \quad (2)$$

with  $b$  as a constant.

- (ii) Multilevel distribution: This distribution may appear when the system passes through several stages of Boltzmann-like equilibrium, each with equal probability. Its mathematical form is

$$f(\tilde{\beta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\tilde{\beta} - \beta_k). \quad (3)$$

- (iii) Gamma distribution: The Gamma or  $\chi^2$  distribution is given by

$$f(\tilde{\beta}) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\tilde{\beta}}{b}\right)^{c-1} e^{-\tilde{\beta}/b}, \quad (4)$$

where  $b$  and  $c$  are free parameters.

- (iv) Log-normal distribution: This distribution function is given by

$$f(\tilde{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\beta}u}} \exp\left[-\frac{\log^2(\tilde{\beta}/v)}{2u^2}\right], \quad (5)$$

where  $u$  and  $v$  are free parameters.

- (v)  $F$  distribution: For positive integers  $v$ , and  $w$  and  $b > 0$ , the  $F$  distribution is defined as

$$f(\tilde{\beta}) = \frac{\Gamma[(v+w)/2]}{\Gamma(v/2)\Gamma(w/2)} \left(\frac{bv}{w}\right)^{v/2} \times \frac{\tilde{\beta}^{v-1}}{\left(1 + \frac{bv}{w}\tilde{\beta}\right)^{(v+w)/2}}. \quad (6)$$

The latter gives the Tsallis distribution in the  $\tilde{\beta}$  space when  $v \rightarrow 2$ .

In this work, in order to obtain analytical results for  $\hat{B}$ , we use the gamma-distribution function. An interesting case is provided when its parameters are chosen as

$$bc = \beta = 1/(k_B T), \quad \text{and} \quad c = -1/(1-q), \quad (7)$$

so that  $\hat{B}$  can be written in terms of a  $q$  exponential, namely

$$\hat{B}(\beta) = e_q^{-\beta\hat{H}}, \quad (8)$$

where the  $q$  exponential is defined as

$$e_q^x \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}. \quad (9)$$

From Eq. (8) it is possible to define a density operator as follows:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e_q^{-\beta\hat{H}}, \quad (10)$$

where  $\mathcal{Z}$  is the partition function given by

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \hat{\rho}, \quad (11)$$

and from which the thermodynamic properties can be defined. In particular, in order to describe the QCD chiral symmetry restoration, we are interested in the  $L\sigma M$  effective potential density, which is described in the next section.

### III. SUPER STATISTICAL EFFECTIVE POTENTIAL DENSITY

As is pointed out in previous works, one can explore the similarities of Eq. (8) within the nonadditive Tsallis thermodynamics [28,29]. The idea consists in preserving the Legendre structure of thermodynamics, which is lost in the Boltzmann-like formulation when the  $q$  exponential is involved [41]. In the Tsallis prescription, the effective potential density is given by

$$\Omega_T = -\frac{1}{V\beta} \ln_q \mathcal{Z}, \quad (12)$$

where the subscript ‘‘T’’ is for Tsallis, and  $\ln_q x$  is the  $q$  logarithm, defined as

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}. \quad (13)$$

Preservation of Legendre structure is a desirable feature of a thermodynamic theory, because it is related to a increasing entropy and positive definite specific heat [42–44].

### IV. SUPER STATISTICAL PARTITION FUNCTION

In this section, we explore two approximations of the modified Boltzmann factors in order to obtain analytical results. The first one, done only for the gamma-distribution function, is provided by series expansion in powers of  $(q-1)$  up to order  $\mathcal{O}(q-1)^2$ , which allows us to compute the corrections due to the finite size and the thermal

fluctuation in the CEP’s location. The second one is given in terms of an expansion in powers of  $\beta\hat{H}$  from where the expressions for several distribution functions are different, providing more information on the underlying complex dynamics for the fluctuations in each case.

At this point, it is necessary to comment on the validity of the expansion, which assumes small  $\beta\hat{H}$ . In fact, in the near to second-order phase transition, the fields are small given that the fermions approach the chiral limit where  $gv < T$ . This behavior is captured by the effective equilibrium potential of Sec. V from which the SS correction are computed. On the other hand, near a first-order phase transition, there is a discontinuity in the order parameter  $v$  and the fields are not necessarily small, and an effective potential at low temperatures needs to be computed. Nevertheless, as is shown in Ref. [11], the results obtained from approximations of high and low temperatures are closely related by a change in the coupling constants of fermions and bosons. Then, as a first approximation, the product  $\beta\hat{H}$  might be considered small. Corrections due to the low-temperature regime are in process, and we will report them elsewhere.

#### A. Expansion in powers of $q-1$

In order to find an expression for the SS-partition function, we expand Eq. (11) around  $q=1$ , so that, up to order  $\mathcal{O}(q^2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \approx \mathcal{Z}_0 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_0}{\partial \beta^2} \\ + \frac{(q-1)^2}{24} \left( 8\beta^3 \frac{\partial^3 \mathcal{Z}_0}{\partial \beta^3} + 3\beta^4 \frac{\partial^4 \mathcal{Z}_0}{\partial \beta^4} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

where  $\mathcal{Z}_0$  is the Boltzmann partition function given by

$$\mathcal{Z}_0 = \exp(-V\beta\Omega_0), \quad (15)$$

where  $\Omega_0$  is the equilibrium effective potential density and  $V$  is the volume of the system. Note that the derivatives of  $\mathcal{Z}_0$  introduce a nontrivial volume dependence, namely,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \approx e^{-\beta V \Omega_0} \left\{ 1 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \left[ V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^2 - 2V \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} - \beta V \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right] \right. \\ + \frac{(q-1)^2}{3} \beta^3 V \left[ -V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^3 - 3 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} + 3V \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right) \left( 2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right) - \beta \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial \beta^3} \right] \\ + \frac{(q-1)^2}{8} \beta^4 \left[ V^4 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^4 - 6V^3 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^2 \left( 2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right) + 3V^2 \left( 2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right)^2 \right. \\ \left. - 4V \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial \beta^3} + 4V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right) \left( 3 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} + \beta \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial \beta^3} \right) - \beta V \frac{\partial^4 \Omega_0}{\partial \beta^4} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

The latter partition function has two interesting features: It includes thermal fluctuations within the  $q$  parameter and links the nonextensive scenario with an explicit volume dependence.

### B. Differences with other distribution functions from an expansion in powers of $\beta\hat{H}$

As was commented in Eq. (36), the correction up to order  $\mathcal{O}(\sigma\hat{H})^2$  is the same for most of the distribution functions when a series expansion is done in powers of  $\sigma^2$  or  $q - 1$ . However, there is another way to expand the modified Boltzmann factor, which corresponds to powers of  $\beta\hat{H}$  introducing noticeable differences between the expressions. In general, such a expansion can be written as [23]

$$\hat{B}(\hat{H}) = e^{-\beta\hat{H}} \left[ 1 + \frac{q-1}{2}\beta^2\hat{H}^2 + \eta(q)\beta^3\hat{H}^3 + \dots \right], \quad (17)$$

where

$$\eta(q) = \begin{cases} 0, & \text{for uniform and 2-level dist.} \\ -\frac{1}{3}(q-1)^2, & \text{for gamma dist.} \\ -\frac{1}{6}(q^3 - 3q + 2), & \text{for log-normal dist.} \\ -\frac{1}{3}\frac{(q-1)(5q-6)}{3-q}, & \text{for } F \text{ dist. with } v = 4 \end{cases}, \quad (18)$$

and the  $q$  index is given for each distribution by

$$q = \begin{cases} w, & \text{for log-normal dist.} \\ q = 1 + \frac{2(v+w-2)}{v(w-4)}, & \text{for } F \text{ distribution} \end{cases}. \quad (19)$$

Figure 1 shows the differences of  $\eta(q)$  for each distribution function.

Note that with this power series we ignore in Eq. (14) the term

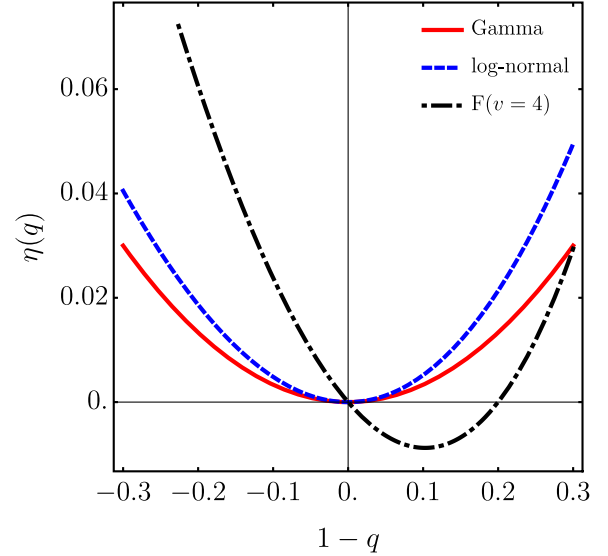


FIG. 1. Function  $\eta(q)$  for three distribution functions.

$$\frac{(q-1)^2}{24} \left( 3\beta^4 \frac{\partial^4 \mathcal{Z}_0}{\partial \beta^4} \right), \quad (20)$$

which is proportional to  $\beta^4 \hat{H}^4$ . However, although that term seems essential in the analytical expression of the potential, the numerical calculations show that in the present work, it is negligible when compared with

$$\frac{(q-1)^2}{24} \left( 8\beta^3 \frac{\partial^3 \mathcal{Z}_0}{\partial \beta^3} \right). \quad (21)$$

Then, the results for the gamma distributions are the same that the related in Sec. IV A.

From the above, the general form of the partition function will be

$$\mathcal{Z} \approx e^{-\beta V \Omega_0} \left\{ 1 + \frac{q-1}{2}\beta^2 \left[ V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^2 - 2V \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} - \beta V \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right] - \eta(q)\beta^3 V \left[ -V^2 \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right)^3 - 3 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} + 3V \left( \Omega_0 + \beta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \right) \left( 2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \beta^2} \right) - \beta \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial \beta^3} \right] \right\}. \quad (22)$$

## V. EQUILIBRIUM EFFECTIVE POTENTIAL OF LINEAR SIGMA MODEL COUPLED TO QUARKS

In Sec. IV, the SS effective potential density is written in terms of the equilibrium potential  $\Omega_0$ . To obtain it, and in order to compute some features of the QCD phase diagram, we use the  $\mathcal{L}\sigma\text{M}q$  whose Lagrangian density is given by [11]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{a^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi, \quad (23)$$

where the mass parameter  $a^2$ , and the couplings  $\lambda$  and  $g$  are positive constants,  $\psi$  is an SU(2) isospin doublet, and  $\boldsymbol{\pi}$  and  $\sigma$  are an isospin triplet and singlet, respectively.

We take the neutral pion  $\pi^0$  as the third component of the triplet and the charged pions as

$$\pi_{\pm} = \frac{1}{2}(\pi_1 \mp i\pi_2). \quad (24)$$

It is well established that this model admits spontaneous symmetry breaking, which can be realized over the  $\sigma$  field when it develops a vacuum expectation value  $v$ . This mechanism is obtained from the shift

$$\sigma \rightarrow \sigma + v, \quad (25)$$

so that

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{a^2}{2}v^2 - \frac{\lambda}{4}v^4 \\ & - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\sigma)^2 - \frac{1}{2}(3\lambda v^2 - a^2)\sigma^2 \\ & - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2}(\lambda v^2 - a^2)\boldsymbol{\pi}^2 \\ & + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - g\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\psi + \mathcal{L}_I^b + \mathcal{L}_I^f, \end{aligned} \quad (26)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 + \sum_{i=\sigma,\boldsymbol{\pi}} \left\{ \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{16\pi^2 T^2}{2a^2}\right) - 2\gamma_e + 1 \right] - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{T}{12\pi} [m_i^2 + \Pi(T, \mu)]^{3/2} \right\} \\ & - \frac{N_c}{16\pi^2} \sum_{f=u,d} \left\{ m_f^4 \left[ \ln\left(\frac{8\pi^2 T^2}{a^2}\right) + \psi_0\left(\frac{1}{2} + \frac{i\mu}{2\pi T}\right) + \psi_0\left(\frac{1}{2} - \frac{i\mu}{2\pi T}\right) + 1 \right] + 8m_f^2 T^2 [\text{Li}_2(-e^{\mu/T}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Li}_2(-e^{-\mu/T})] - 32T^4 [\text{Li}_4(-e^{\mu/T}) + \text{Li}_4(-e^{-\mu/T})] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

and

$$\begin{aligned} \Pi(T, \mu) = & \frac{\lambda T^2}{2} - \frac{N_f N_c g^2 T^2}{\pi^2} \\ & \times [\text{Li}_2(-e^{\mu/T}) + \text{Li}_2(-e^{-\mu/T})], \end{aligned} \quad (30)$$

where  $\gamma_e$  is the Euler-Mascheroni constant,  $\psi_0(x)$  is the digamma function, and  $\text{Li}_n(x)$  is the poly-logarithm function of order  $n$ . Moreover, we take  $N_c = 3$  and  $N_f = 2$ , as the number of colors and flavors, respectively. The coupling constants are fixed with conditions at  $\mu = 0$ , where the physical boson masses (corrected by the self-energy) are

$$m_{\sigma}^2 = 3\lambda v^2 - a^2 + \frac{\lambda T^2}{2} + \frac{N_f N_c g^2 T^2}{6} \quad (31a)$$

and

$$\mathcal{L}_I^b = -\frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \quad (27a)$$

and

$$\mathcal{L}_I^f = -g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})\psi. \quad (27b)$$

The latter equations implies that after symmetry breaking, the involved fields acquire mass given by

$$m_{\sigma}^2 = 3\lambda v^2 - a^2, \quad (28a)$$

$$m_{\pi}^2 = \lambda v^2 - a^2, \quad (28b)$$

$$m_f = gv. \quad (28c)$$

To compute the equilibrium effects of the finite temperature and density in the chiral symmetry restoration, we use the effective potential and the self-energy up to the ring diagrams, so that in a high-temperature limit where the quark masses are small, they are [11,45]

$$m_{\pi}^2 = \lambda v^2 - a^2 + \frac{\lambda T^2}{2} + \frac{N_f N_c g^2 T^2}{6}, \quad (31b)$$

so that in the transition temperature  $T_c$ , the masses vanishes. Then, by solving for  $a$  from Eqs. (31):

$$a = T_c \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \frac{N_f N_c g^2}{6}}. \quad (32)$$

Now, from Eqs. (28) is easy to check that

$$a = \sqrt{\frac{m_{\sigma}^2 - 3m_{\pi}^2}{2}}. \quad (33)$$

The present work takes into account only two quark flavors in the chiral limit, which allows us to compare with lattice simulations for  $N_f = 2 + 1$ , where the critical temperature at  $\mu = 0$  is  $T \simeq 170$  MeV [46]. Then, the

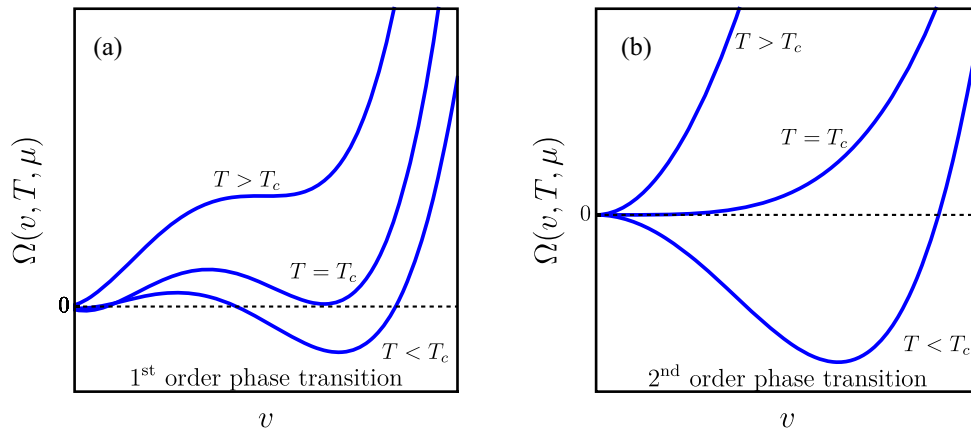


FIG. 2. Shapes of the effective potential as function of the order parameter  $v$  and for temperatures lower, equal, and higher than the transition temperature  $T_c$ .

constants  $\lambda$  and  $g$  can be identified, and, throughout the paper, we take them as  $\lambda = 0.86$  and  $g = 1.1$ .

Our goal is to describe the chiral symmetry restoration where the quark mass vanishes so that the sigma's field vacuum expectation value  $v$  is promoted as the order parameter for the transition. In that spirit, the phase transition and its order are identified from the effective potential shape in such a way that the order parameter has a discontinuity at the critical temperature  $T_c$  for a first-order phase transition. In contrast, in a second-order phase transition, it evolves continuously. Figure 2 illustrates the potential shape for both situations.

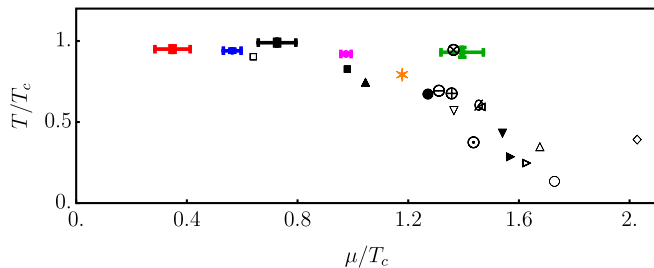


FIG. 3. CEP's location from different approaches. The points with error bars are LQCD extensions from Refs. [12] (red), [48] (blue), [49] (black), [50] (magenta), and [51] (green). The black filled symbols correspond to the low-temperature approach of Eq. (26) [11,47] when the coupling constants  $(\lambda, g)$  are (2.2,1.7) for black filled square, (2.4,1.65) for black up-pointing triangle, (2.1,1.725) for black filled circle, (2.5,1.7) for black down-pointing triangle, and (2.7,1.6) for black right-pointing triangle. The empty symbols are model predictions: circled minus from Ref. [52], circled slash from Ref. [53], circled plus from Ref. [54], square from Ref. [26], circled cross from Ref. [55], down-pointing triangle from Ref. [56], circle with black dot from Ref. [57], left-pointing triangle from Ref. [58], right-pointing triangle from Ref. [59], up-pointing triangle from Ref. [60], circle from Ref. [61], and diamond from Ref. [62]. The orange six-point star corresponds to the CEP located with Eq. (29). (Figure adapted from Ref. [47].)

It is worth saying that the potential of Eq. (29) is obtained by assuming that temperature is the dominant energy scale, i.e.,  $T > \mu > m_f$  or  $T > gv$ , so that the fermions are close to the chiral limit. Therefore, in a strict sense, the potential is not valid in regions where  $\mu \gtrsim T$  and where the first-order transition lines begin. Nevertheless, Fig. 3 shows the CEP's location computed from Eq. (26) in a low-temperature approximation [11,47] (filled black symbols), Lattice QCD (LQCD) calculations (points with error bars), other phenomenological models (white-empty symbols), and the computations from Eq. (29) without super statistics (six-point orange star). As can be noticed, working with Eq. (29) provides good results according to the current state-of-the-art of the CEP location. Therefore, if the temperatures are not low enough (we are not interested on the first-order transition lines but in the CEP's coordinates), our results can be regarded as a valid approximation.

## VI. RESULTS AND DISCUSSION

In the previous sections, we developed a formalism to describe the QCD chiral symmetry restoration within the  $L\sigma M$  coupled to quarks when the system has fluctuations in its temperature. Moreover, given the connection between SS and the Tsallis nonadditive thermodynamics, our formalism links the out-of-equilibrium situation with an explicit volume dependence. This section explores the impact of thermal fluctuations and the system's size in the CEP location and the transition lines.

### A. Expansion in powers of $q - 1$

Before presenting our results, let us comment that the parameters  $q$  and  $V$  are independent. This is an important feature because the SS formalism can be interpreted as if the system is divided into  $N$  subsystems, each with local equilibrium, and the distribution function  $f(\beta)$  accounts for the spatial temperature distribution among them [25–27]. The latter implies that the  $q$  parameter can be identified as

$$q = 1 + 2/N. \quad (34)$$

Nevertheless, there is another interpretation of the SS: the system is not divided into subsystems, but it as a whole passes through several equilibrium stages. Then, the total volume remains unaltered, and the fluctuations acquire a temporal nature. We adopt this point of view.

On the other hand, given that the SS is an ansatz, the  $q$  parameter can be interpreted in several ways beyond the relation of Eq. (34). In fact, this parameter can be related to the variance of the inverse temperature fluctuations [23]:

$$(q-1)\beta^2 = \sigma^2 \quad \text{or} \quad q = \frac{\langle \tilde{\beta}^2 \rangle}{\langle \tilde{\beta} \rangle^2}, \quad (35)$$

so that it is possible to find a general expression for the modified Boltzmann factor given by

$$\hat{B} = e^{-\beta \hat{H}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{H}^2 + \mathcal{O}(\sigma^3 \hat{H}^3) \right], \quad (36)$$

where the variances (and therefore the  $q$  parameter) have different forms. For example, for the uniform, log-normal, and the  $F$  distribution, the variances are, respectively,

$$\sigma^2 = b^2/12, \quad (37a)$$

$$\sigma^2 = v^2 e^{s^2} (e^{s^2} - 1), \quad (37b)$$

and

$$\sigma^2 = \frac{2w^2(v+w-2)}{b^2 v(w-2)^2(w-4)}. \quad (37c)$$

Note that Eq. (35) defines only positive values of  $q-1$ , and therefore,  $q \geq 1$ . Nevertheless, we aim to connect with a nonextensive scenario; i.e., the Tsallis statistics in which *a priori* there are no restrictions over  $q$ . Hence, in order to present general results (valid for both points of view), we explore the range  $0.8 \leq q \leq 1.2$  (values outside of this interval imply more terms in the  $q-1$  series expansion).

Figure 4 shows the pseudocritical temperature  $T_c$  (at  $\mu_B = 0$ ) as a function of the thermal fluctuation's parameter  $q$ , and the dimensionless volume  $\mathcal{V} \equiv a^3 V$ . In order to visualize the effects of the variables, we scaled  $T_c$  with the pseudocritical temperature at thermal equilibrium  $T_c^0$ . As can be noticed, the fluctuations in temperature reproduce almost the same results for  $q = 1.1$  and  $q = 1.2$  (the same behavior is found with  $q = 0.8$  and  $q = 0.9$ ). Still, for small system size, the transition temperature decreases around 20% from the value found in the equilibrium situation. Note that a similar scaling with the volume is found in Ref. [35] for a finite box model by using lattice Yang-Mills theory and Dyson-Schwinger equations for  $2+1$  quark flavors.

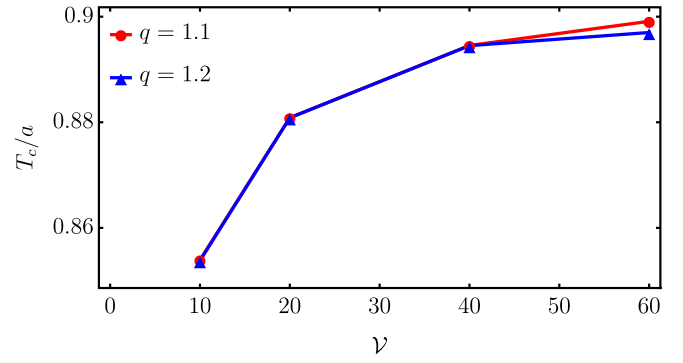


FIG. 4. Pseudocritical temperature  $T_c$  at  $\mu = 0$  as a function of the dimensionless volume  $\mathcal{V} = a^3 V$  for  $q = 1.1$  and  $q = 1.2$ . The reference temperature  $T_c^0 \approx 0.9$  is the transition temperature at  $\mu = 0$  in the equilibrium case  $q \rightarrow 1$ . The curves are obtained with the Tsallis prescription. A similar behavior is found with  $q = 0.8$  and  $q = 0.9$ .

Figure 5 presents the effective QCD phase diagram in the plane  $\mu - T$  (recall  $\mu_B = 3\mu$ ) computed from Eq. (12) for several values of  $\mathcal{V}$  with  $q = 1.2$ . The dashed curves represent the crossover or second-order phase transition lines, whereas the continuous are the first-order critical lines.

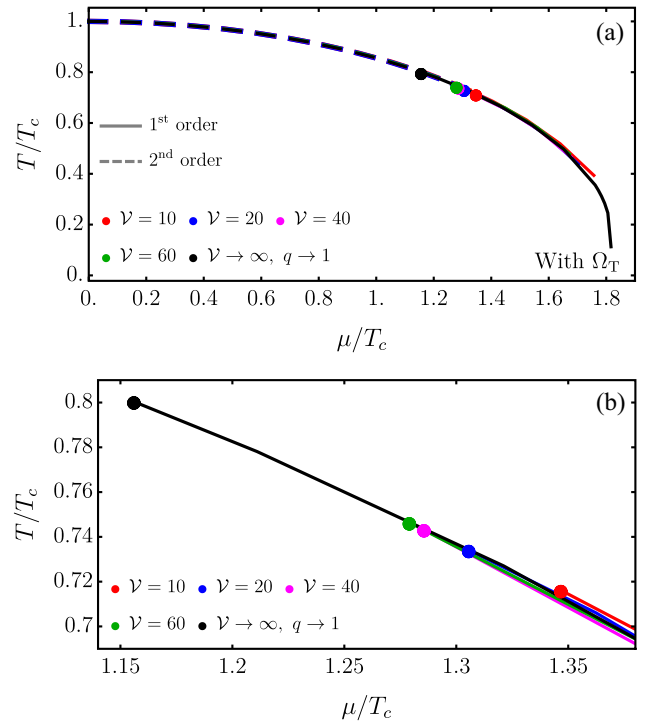


FIG. 5. Effective QCD phase diagram obtained from the potential  $\Omega_T$  for  $q = 1.2$  and several values of  $\mathcal{V}$ . The points are the CEP's location for each volume. The values of  $T$  and  $\mu$  in the critical line are normalized to their own  $T_c$  which is volume dependent. Panel (a) is the full phase diagram, and panel (b) is an enlargement in order to appreciate the volume effects in the CEP (only the first-order critical lines are shown).

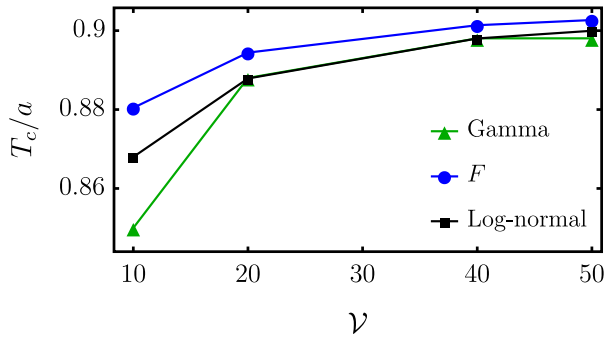


FIG. 6. Pseudocritical temperature  $T_c$  at  $\mu = 0$ , as a function of the dimensionless volume  $\mathcal{V} = a^3 V$  for  $q = 1.2$  and different distribution functions.

regions. The dots are the CEP location when the critical values of  $T$  and  $\mu$  are scaled with the respective  $T_c$  for each  $\mathcal{V}$ . The finite volume effect is translated to move the CEP toward smaller temperatures and larger chemical potentials, which correspond to a change about 10%–17% for  $\mu$ , and 10%–12% for  $T$ . Again, the findings are in agreement with the findings of with Ref. [35]. Moreover, the results are quantitatively the same when variations in  $q$  are implemented, which indicates that the transition lines and the CEP location are robust against thermal fluctuations but have a considerable dependence on the size of the system.

### B. Expansion in powers of $\beta\hat{H}$

Finally, in order to compare the differences between super statistics prescriptions, Figs. 6 and 7 show the changes of  $T_c$  with  $\mathcal{V}$ , and the CEP's locations obtained from Eq. (22), both for the gamma,  $F$ , and log-normal distribution functions. Once again, the results seem

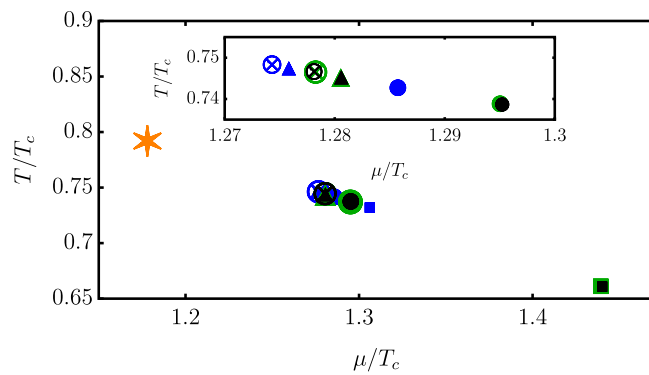


FIG. 7. CEP's locations obtained from Eq. (22) for different distribution functions: Gamma (green),  $F$  (blue), and log-normal (black). The symbols represent the dimensionless volume: circled cross for  $\mathcal{V} = 50$ , up-pointing triangle for  $\mathcal{V} = 40$ , filled circle for  $\mathcal{V} = 20$ , and filled square for  $\mathcal{V} = 10$ . The yellow star is the pure Boltzmann result. The inset shows an enlargement in order to appreciate the CEP deviations of each distribution function. The results are independent of  $q$ , and here we present  $q = 1.2$ .

independent of the value of  $q$ , which indicates that, in our series expansions, the temperature fluctuations are irrelevant, and the chiral symmetry restoration is robust in the present approximation. However, the  $T_c$  and CEP are sensitive to the system's volume, but the deviations from one distribution function to another are minor. In fact, only the  $F$  distribution has noticeable differences when compared with the gamma and the log-normal results, which is similar to the observed in Fig. 1. This behavior is not surprising: the series expansion of Eq. (22) is made in powers of  $\beta\hat{H}$ , which is a tiny quantity near the transition. Then, in the critical lines, one may expect similar results.

## VII. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this work, we have used the L $\sigma$ M coupled with quarks to locate the CEP in the effective QCD phase diagram by considering the finite-size effects produced by thermal fluctuations. The SS provides the connection between the out-of-equilibrium condition and the nonextensive thermodynamics with the  $\chi^2$ -distribution function so that its free parameters resemble the Tsallis statistics. Therefore, we end with an effective thermodynamic potential as a function of the thermal-fluctuations parameter  $q$  and explicit volume dependence. To appreciate the finite size effects, we adopted the SS interpretation in which the distribution function models the system as a whole, passing for several stages close to the thermal equilibrium. Moreover, given the universality of the modified Boltzmann factor, we expanded the range of values of  $q$  by demanding its nature as a parameter into an ansatz. With this, several distribution functions can be considered.

We find that the pseudocritical temperature  $T_c$  at  $\mu = 0$  is considerably changed when the system's volume decreases (around a 7% for the smaller volume considered). Nevertheless, the temperature fluctuations do not represent significant changes in the value of  $T_c$ . The same situation is found in the CEP location: it moves towards high values of  $\mu$  and lower temperatures, so that the former may change in a range of the 10%–17%, and the latter in the range of 10%–12%, when the plane  $\mu - T$  is scaled by the respective pseudocritical temperatures for each volume. Furthermore, the critical lines for each set of parameters lie close to the curve of the equilibrium case. Interestingly, the named results are quantitatively the same when  $q$  varies in the interval  $0.8 \leq q \leq 1.2$ , which indicates that, in this approximation, the chiral symmetry restoration is robust against the thermal fluctuations. Still, the order of the transition may be affected by the size of the system.

Finally, by considering a series expansion in powers of  $\beta\hat{H}$ , we compared different distribution functions and their corresponding modified Boltzmann factors. In particular, we analyzed the gamma,  $F$ , and log-normal distributions. The findings relate that for those super statistics



prescriptions, the effects of the temperature fluctuations and volume remains, i.e., up to the presented approximation, the critical values of  $\mu$  and  $T$  for the chiral symmetry restoration are the same when  $q$  varies. Moreover, the CEP's location moves to higher  $\mu$  and lower  $T$  when the volume is decreased.

## ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Professor A. Ayala for his useful comments and suggestions about this work. J. D. C.-Y. and C. F. R.-G. thank P. Paps for her presence during the realization of this project.

- 
- [1] Yasumichi Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo, The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit, *Phys. Lett. B* **643**, 46 (2006).
- [2] Tanmoy Bhattacharya *et al.* (HotQCD Collaboration), QCD Phase Transition with Chiral Quarks and Physical Quark Masses, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 082001 (2014).
- [3] A. Bazavov *et al.* (HotQCD Collaboration), Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition, *Phys. Rev. D* **85**, 054503 (2012).
- [4] Jana N. Guenther, An overview of the QCD phase diagram at finite  $T$  and  $\mu$ , *38th International Symposium on Lattice Field Theory* (Proceedings of Science, Gather, 2022), 1.
- [5] HotQCD Collaboration, Chiral crossover in QCD at zero and non-zero chemical potentials, *Phys. Lett. B* **795**, 15 (2019).
- [6] HotQCD Collaboration, The QCD crossover at zero and non-zero baryon densities from Lattice QCD, *Nucl. Phys. A* **982**, 847 (2019).
- [7] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, Chiral phase transitions in QCD for finite temperature and density, *Phys. Rev. D* **41**, 1610 (1990).
- [8] A. Barducci, R. Casalbuoni, G. Pettini, and R. Gatto, Chiral phases of QCD at finite density and temperature, *Phys. Rev. D* **49**, 426 (1994).
- [9] N. G. Antoniou, F. K. Diakonou, X. N. Maintas, and C. E. Tsagkarakis, Locating the QCD critical endpoint through finite-size scaling, *Phys. Rev. D* **97**, 034015 (2018).
- [10] Chiho Nonaka and Masayuki Asakawa, Hydrodynamical evolution near the QCD critical end point, *Phys. Rev. C* **71**, 044904 (2005).
- [11] Alejandro Ayala, Jorge David Castano-Yepes, J. J. Cobos-Martínez, Saúl Hernández-Ortiz, Ana Julia Mizher, and Alfredo Raya, Chiral symmetry transition in the linear sigma model with quarks: Counting effective QCD degrees of freedom from low to high temperature, *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650199 (2016).
- [12] R. V. Gavai and Sourendu Gupta, On the critical end point of QCD, *Phys. Rev. D* **71**, 114014 (2005).
- [13] Wojciech Florkowski and Radoslaw Ryblewski, Highly anisotropic and strongly dissipative hydrodynamics for early stages of relativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev. C* **83**, 034907 (2011).
- [14] S. V. Akkelin and Yu. M. Sinyukov, Matching of non-thermal initial conditions and hydrodynamic stage in ultra-relativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev. C* **81**, 064901 (2010).
- [15] J. P. Blaizot and A. H. Mueller, The early stage of ultra-relativistic heavy ion collisions, *Nucl. Phys. B* **289**, 847 (1987).
- [16] T. Lappi and L. McLerran, Some features of the glasma, *Nucl. Phys. A* **772**, 200 (2006).
- [17] Naoto Tanji and Raju Venugopalan, Effective kinetic description of the expanding overoccupied glasma, *Phys. Rev. D* **95**, 094009 (2017).
- [18] Raju Venugopalan, From glasma to quark-gluon plasma in heavy-ion collisions, *J. Phys. G* **35**, 104003 (2008).
- [19] M. Ruggieri, F. Scardina, S. Plumari, and V. Greco, Elliptic flow from non-equilibrium initial condition with a saturation scale, *Phys. Lett. B* **727**, 177 (2013).
- [20] M. Ruggieri, F. Scardina, S. Plumari, and V. Greco, Thermalization, isotropization, and elliptic flow from non-equilibrium initial conditions with a saturation scale, *Phys. Rev. C* **89**, 054914 (2014).
- [21] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño Yepes, C. A. Dominguez, L. A. Hernández, Saúl Hernández-Ortiz, and María Elena Tejada-Yeomans, Prompt photon yield and elliptic flow from gluon fusion induced by magnetic fields in relativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev. D* **96**, 014023 (2017).
- [22] Alejandro Ayala, Jorge David Castaño-Yepes, Isabel Dominguez Jimenez, Jordi Salinas San Martín, and María Elena Tejada-Yeomans, Centrality dependence of photon yield and elliptic flow from gluon fusion and splitting induced by magnetic fields in relativistic heavy-ion collisions, *Eur. Phys. J. A* **56**, 1 (2020).
- [23] Christian Beck and Ezechiel G. D. Cohen, Superstatistics, *Physica (Amsterdam)* **322A**, 267 (2003).
- [24] Christian Beck, Superstatistics: Theory and applications, *Continuum Mech. Thermodyn.* **16**, 293 (2004).
- [25] Christian Beck, Recent developments in superstatistics, *Braz. J. Phys.* **39**, 357 (2009).
- [26] Alejandro Ayala, Martin Hentschinski, L. A. Hernández, M. Loewe, and R. Zamora, Superstatistics and the effective QCD phase diagram, *Phys. Rev. D* **98**, 114002 (2018).
- [27] Alejandro Ayala, Saúl Hernández-Ortiz, L. A. Hernández, Víctor Knapp-Pérez, and R. Zamora, Fluctuating temperature and baryon chemical potential in heavy-ion collisions and the position of the critical end point in the effective QCD phase diagram, *Phys. Rev. D* **101**, 074023 (2020).
- [28] Jorge David Castaño Yepes and Cristian Felipe Ramirez-Gutierrez, Superstatistics and quantum entanglement in the isotropic spin-1/2XX dimer from a nonadditive thermodynamics perspective, *Phys. Rev. E* **104**, 024139 (2021).

- [29] Jorge David Castaño-Yepes, Entropy exchange and thermal fluctuations in the Jaynes–Cummings model, *Eur. Phys. J. Plus* **137**, 155 (2022).
- [30] M. Hippert, E. S. Fraga, and E. M. Santos, Critical versus spurious fluctuations in the search for the QCD critical point, *Phys. Rev. D* **93**, 014029 (2016).
- [31] M. Hippert and E. S. Fraga, Multiplicity fluctuations near the QCD critical point, *Phys. Rev. D* **96**, 034011 (2017).
- [32] Ya-Peng Zhao, Thermodynamic properties and transport coefficients of QCD matter within the nonextensive Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model, *Phys. Rev. D* **101**, 096006 (2020).
- [33] Jacek Roźynek and Grzegorz Wilk, Nonextensive Nambu–Jona-Lasinio Model of QCD matter, *Eur. Phys. J. A* **52**, 1 (2016).
- [34] Masamichi Ishihara, Chiral phase transitions in the linear sigma model in the Tsallis nonextensive statistics, *Int. J. Mod. Phys. E* **25**, 1650066 (2016).
- [35] Julian Bernhardt, Christian S. Fischer, Philipp Isserstedt, and Bernd-Jochen Schaefer, Critical endpoint of QCD in a finite volume, *Phys. Rev. D* **104**, 074035 (2021).
- [36] Bertram Klein, Modeling finite-volume effects and chiral symmetry breaking in two-flavor QCD thermodynamics, *Phys. Rep.* **707**, 1 (2017).
- [37] Jens Braun, Bertram Klein, and Bernd-Jochen Schaefer, On the phase structure of QCD in a finite volume, *Phys. Lett. B* **713**, 216 (2012).
- [38] Eduardo S. Fraga, Letícia F. Palhares, and Paul Sorensen, Finite-size scaling as a tool in the search for the QCD critical point in heavy ion data, *Phys. Rev. C* **84**, 011903 (2011).
- [39] L. F. Palhares, E. S. Fraga, and T. Kodama, Chiral transition in a finite system and possible use of finite-size scaling in relativistic heavy ion collisions, *J. Phys. G* **38**, 085101 (2011).
- [40] L. F. Palhares, E. S. Fraga, and T. Kodama, Finite-size effects and signatures of the QCD critical endpoint, *J. Phys. G* **37**, 094031 (2010).
- [41] Constantino Tsallis, Renio S. Mendes, and Anel R. Plastino, The role of constraints within generalized nonextensive statistics, *Physica (Amsterdam)* **261A**, 534 (1998).
- [42] A. M. Scarfone, H. Matsuzoe, and T. Wada, Consistency of the structure of Legendre transform in thermodynamics with the Kolmogorov–Nagumo average, *Phys. Lett. A* **380**, 3022 (2016).
- [43] A. Plastino and A. R. Plastino, On the universality of thermodynamics’ Legendre transform structure, *Phys. Lett. A* **226**, 257 (1997).
- [44] Jorge David Castaño-Yepes and D. A. Amor-Quiroz, Super-statistical description of thermo-magnetic properties of a system of 2D GaAs quantum dots with gaussian confinement and Rashba spin–orbit interaction, *Physica (Amsterdam)* **548A**, 123871 (2020).
- [45] Alejandro Ayala, Adnan Bashir, J. J. Cobos-Martínez, Saúl Hernández-Ortiz, and Alfredo Raya, The effective QCD phase diagram and the critical end point, *Nucl. Phys.* **B897**, 77 (2015).
- [46] Y. Maezawa, S. Aoki, S. Ejiri, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya, and N. Ukita, Thermodynamics of two-flavour lattice QCD with an improved Wilson quark action at non-zero temperature and density, *J. Phys. G* **34**, S651 (2007).
- [47] Jorge David Castaño-Yepes, Effects of intense magnetic fields, high temperature and density on QCD-related phenomena, [arXiv:2103.12898](https://arxiv.org/abs/2103.12898).
- [48] R. V. Gavai and Sourendu Gupta, QCD at finite chemical potential with six time slices, *Phys. Rev. D* **78**, 114503 (2008).
- [49] Zoltan Fodor and Sandor D. Katz, Critical point of QCD at finite  $T$  and  $\mu$ , lattice results for physical quark masses, *J. High Energy Phys.* **4** (2004) 050.
- [50] Philippe de Forcrand and Slavo Kratochvila, Finite density QCD with a canonical approach, *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.* **153**, 62 (2006).
- [51] Zoltan Fodor and Sandor D. Katz, Lattice determination of the critical point of QCD at finite  $T$  and  $\mu$ , *J. High Energy Phys.* **3** (2002) 014.
- [52] Fei Gao and Jan M. Pawłowski, Chiral phase structure and critical end point in QCD, *Phys. Lett. B* **820**, 136584 (2021).
- [53] Fei Gao and Jan M. Pawłowski, QCD phase structure from functional methods, *Phys. Rev. D* **102**, 034027 (2020).
- [54] Wei-jie Fu, Jan M. Pawłowski, and Fabian Rennecke, QCD phase structure at finite temperature and density, *Phys. Rev. D* **101**, 054032 (2020).
- [55] M. Loewe, F. Marquez, and C. Villavicencio, Nonlocal Nambu–Jona-Lasinio model with a fractional Lorentzian regulator in the real time formalism, *Phys. Rev. D* **88**, 056004 (2013).
- [56] Wei-jie Fu, Zhao Zhang, and Yu-xin Liu, 2 + 1 flavor Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential, *Phys. Rev. D* **77**, 014006 (2008).
- [57] P. Costa, H. Hansen, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, How parameters and regularization affect the Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model phase diagram and thermodynamic quantities, *Phys. Rev. D* **81**, 016007 (2010).
- [58] B.-J. Schaefer and M. Wagner, Three-flavor chiral phase structure in hot and dense QCD matter, *Phys. Rev. D* **79**, 014018 (2009).
- [59] H. Abuki, R. Anglani, R. Gatto, G. Nardulli, and M. Ruggieri, Chiral crossover, deconfinement, and quarkyonic matter within a Nambu–Jona-Lasinio model with the Polyakov loop, *Phys. Rev. D* **78**, 034034 (2008).
- [60] P. Costa, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, Thermodynamics and critical behavior in the Nambu–Jona-Lasinio model of QCD, *Phys. Rev. D* **77**, 096001 (2008).
- [61] Alejandro Ayala, L. A. Hernández, M. Loewe, Juan Cristobal Rojas, and R. Zamora, On the critical end point in a two-flavor linear sigma model coupled to quarks, *Eur. Phys. J. A* **56**, 71 (2020).
- [62] P. Kovács and Zs. Szép, Influence of the isospin and hypercharge chemical potentials on the location of the critical end point in the  $\mu_B - T$  phase diagram of the  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  chiral quark model, *Phys. Rev. D* **77**, 065016 (2008).

