Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

La topología en la formación de profesores

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestra en Docencia de las Matemáticas

Presenta:
Mat. Carmen Sosa Garza

Dirigida por:
M. en C. Roberto Torres Hernández

SINODALES

M. en C. Roberto Torres Hernández
Presidente
Firma

Dr. Alejandro Díaz Barriga
Secretario
Firma

M. en C. Enrique Crespo Baltar
Vocal
Firma

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez
Suplente
Firma

M. en C. Roberto Augusto Gómez Loenzo
Suplente
Firma

M. en C. Gerardo René Serrano Gutiérrez
Director de la Facultad de Ingeniería

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Mayo de 2004
México

BIBLIOTECA CENTRAL UAQ
"ROBERTO RUIZ OBREGON"

No Adq. H68930
No. Título
Clas. TS
514.3
S715t
EJ. 1

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar unas notas de topología, a nivel introductorio, dirigido principalmente a profesores de matemáticas de nivel medio y medio-superior, que generalmente no son matemáticos de profesión. Con esto se pretende tender un puente entre los conocimientos matemáticos que ellos poseen y una parte de la matemática actual, como lo es la topología. En el capítulo 2 se estudian diferentes métricas, con el objeto de reconocer en estas las propiedades de un espacio métrico. Con la idea de distancia se define la noción de abierto. En el capítulo 3 se generaliza esta idea de abierto, prescindiendo del concepto de métrica. Con esto se introduce la noción de topología y espacio topológico. La importancia de hablar de conjuntos abiertos es el de poder saber cuando una función es continua. En el capítulo 4 se hace el puente entre la definición típica de continuidad (de los cursos de cálculo) y la definición topológica. También se habla de de lo que es un homeomorfismo, haciendo énfasis en el aspecto geométrico. En el capítulo 5 se da un ejemplo de clasificación de superficies, tratando de enfatizar las propiedades cualitativas, topológicas. En el último capítulo se trata de la topología digital queriendo dar un ejemplo de aplicación, al análisis de imágenes, de una rama de la matemática aparentemente pura, la topología.

(**Palabras clave:** topología, métrica, espacios métricos, función distancia, abiertos, espacios topológicos, homeomorfismos, topología digital.)

Summary

The goal of this work is to present some notes of topology, at an introductory level, it is aimed at Math professors in middle and middle-high levels who are not usually mathematicians. With this purpose in mind it is intended to lay a bridge between the mathematics knowledge they own and a part of the current mathematics, as it is topology.

In chapter 2 different metrics are studied, the goal is to recognize in these the properties of metric space. With the idea of distance, the concept of open set is defined. In chapter 3 this idea of open set is generalized, regardless of the metric concept. Thus introducing the concept of topology and topological space. The importance of discussing open sets is to be able to know when a function is continuous. In chapter 4, a bridge is laid between the typical definition of continuity (in the calculus courses) and the topological definition. An homeomorphism is also spoken about, emphasizing the geometric aspect. In chapter 5 an example of classification of surfaces is given, trying to emphasize the topological, qualitative properties. In the last chapter digital topology is dealt with, in an attempt to give an example of application, to image analysis, of a branch of mathematics apparently pure, the topology.

(**Keywords:** topology, metrics, metric spaces, distance function, open set, topological spaces, homeomorphism, digital topology.)

Índice general

Índice de figuras

Prefacio

Estas notas tienen como objetivo el proporcionar un material introductorio de topología, dirigido a personas no con formación matemática rigurosa o con fuertes bases de matemáticas pero interesados en las matemáticas y que desean conocer una geometría moderna, una geometría del siglo XXI, la "topología". Principalmente esta dirigido a profesores que imparten la materia de matemáticas de nivel medio y medio superior. La razón es que ellos se encuentran en contacto con los estudiantes, estudiantes del siglo XXI que son parte de hoy y también buscarán una matemática de hoy, sin querer desacreditar la gran importancia de la geometría anterior siendo ésta base para el desarrollo de la actual. El maestro que conozca la matemática actual, no solamente dará mayor valor a los conocimientos anteriores sino sabrá la importancia de estos para la evolución de la matemática y comprenderá que como toda ciencia está en continuo desarrollo, ampliando así la visión sobre ella. Generalmente los libros de topología, escritos por matemáticos, presentan los conceptos de manera formal y abstracta. Iniciando con la definición de "topología" e inmediatamente después proposiciones, lemas y teoremas. El objetivo de estas notas es presentar un puente entre los conceptos matemáticos que tienen los maestros (cálculo, geometría analítica) y aquellos que estudia la topología. Se trata de presentar conceptos y teoremas importantes de la topología, en forma descriptiva e intuitiva, retomando los conceptos que el maestro ya tiene sobre cálculo y así poderlos generalizar. No hay prerequisitos especializados aparte de una disposición para trabajar a cierto nivel de abstracción.

Las notas se dividen en seis capítulos. En el primer capítulo se expone el marco teórico para el presente trabajo. El segundo capítulo pretende retomar los conocimientos del profesor sobre la función "distancia", dar otros ejemplos de diferentes distancias y poderlas comparar. En el tercer capítulo, se generaliza el concepto de "abierto" para llegar, de alguna manera más natural y formal, a la definición de espacio topológico. El maestro podrá confirmar que los conceptos del cálculo subsisten en un espacio topológico. En el cuarto capítulo se define lo que es una función continua entre espacios topológicos, expresada en términos de "conjuntos abiertos". También de las "transformaciones topológicas": aquellas que nos permiten relacionar espacios topológicos, y así saber cuando éstos pertenecen a la misma clase. En el quinto capítulo dará como resultado de los capítulos anteriores ciertas propiedades topológicas importantes obteniendo la clasificación de ciertas superficies, cerradas y acotadas. Por último en el sexto capítulo se da una aplicación de la topología, análisis de las imágenes digitales, la topología digital parte de una rama de la matemática actual aparentemente pura. Al final de los cuatro primeros capítulos se dan ejercicios con la finalidad de que los maestros descubran por ellos mismos la belleza y fascinación de esta rama moderna de las matemáticas.

Estas notas no tratan de substituir el estudio formal de la topología, el objetivo no es dar una lista de proposiciones y teoremas sino el de abrir una ventana hacia la matemática contemporánea.

Agradecimientos

A Roberto Torres Hernández por su gran paciencia y continuo apoyo.
A Roberto Augusto Gómez Loenzo por su precisa y constante disposición y ayuda.
A mis hijas, Paola, Alejandra y Mónica por su entusiastas comentarios.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Introducción

El tercer milenio es una realidad; el desarrollo científico, tecnológico, político y cultural de las sociedades modernas es evidente y en casi cualquier ámbito del quehacer humano se viven cambios que buscan mejorar la calidad, la eficiencia y el bienestar. Pero, ¿se observa lo mismo en el ámbito educativo?, ¿cómo ha cambiado, si es que lo ha hecho, la enseñanza y el aprendizaje a lo largo de los siglos? ¿Se observan cambios en la educación matemática? ¿Cuáles son las expectativas que tienen los maestros de matemáticas?

Las características de este siglo son el carácter cambiante y el dinamismo, por lo que habrá muchos conceptos o métodos que quedarán obsoletos en 3 o a lo más 5 años, por lo que los estudiantes tendrán que afrontar nuevos problemas y aprender nuevos métodos de solución. Los alumnos estarán en contacto con conceptos, métodos o instrumentos de trabajo en continuo cambio, la educación no podrá quedarse rezagada; es necesario el cambio, la actualización. ¿Cómo desarrollar estas habilidades a nuestros estudiantes? ¿Qué alternativas se tienen en cuanto a metodologías de enseñanza? ¿Qué alternativas en cuanto a los contenidos curriculares? ¿Quiénes serán los facilitadores para motivar y desarrollar esas habilidades y actitudes? ¿Quiénes serán ejemplo de nuestros estudiantes? ¿Bajo qué modelo educativo?

El profesor, como uno de los principales actores en el proceso de enseñanza-aprendizaje deberá también adaptarse a estos cambios y estar preparado para enfrentarlos. El presente trabajo intenta apoyar al maestro en activo en esta actualización, introduciéndolo a una de las ramas mas modernas de la geometría: la topología.

1.2. Antecedentes y justificación

1.2.1. Carácter educativo

México tiene un sistema educativo en el que se ha preocupado más por la cantidad que por la calidad, mucho más por lo informativo que por lo formativo. Tradicionalmente se ha destacado la transmisión de saberes producidos a lo largo de la historia y la mayoría de ellos en otras partes del mundo. Más grave es el hecho de que los métodos de transmisión son deficientes, con algunas excepciones. Según Ornelas, (1995) el análisis de los contenidos tiene que ver con el conocimiento y la calidad de la educación. El sistema escolar enfrenta una problemática entre la creciente complejidad y aumento de los conocimientos y los métodos de enseñanza utilizados para transmitir aquéllos a las nuevas generaciones. Tiene dos polos: los materiales de enseñanza, la formación de los maestros (sus valores, actitudes e ideología) así como el complejo nudo de relaciones que se establecen entre los estudiantes, los maestros, sindicatos y burocracia de la educación y los métodos de enseñanza, que descansan en el uso de la memoria, ejercicios repetitivos y mecánicos y en una ausencia casi total de experimentación. Muchas de las críticas que se le hacen a la profesión emanan del acento en las cuestiones pedagógicas, en detrimento del conocimiento de los contenidos que se deben, supuestamente enseñar. La defensa magisterial es que para estar al día en los contenidos es necesario tener cursos constantes de *actualización* que lance a los profesores a la superación constante y como consecuencia, la calidad de su trabajo redundará en beneficio de los jóvenes y de México.

Las matemáticas escolares requieren de cierto dinamismo y este involucra a los profesores y al contenido de la materia. La acusación de que el plan tradicional, según Kline, (1994), está anticuado se contradice con la confesión de los modernistas de que ellos ofrecen ante todo una nueva interpretación. Pero a pesar de este hecho, la época actual requiere una nueva matemática. Se desarrollan métodos didácticos, instrumentos de apoyo, programas de evaluación, ¿por qué no los contenidos? ¿por qué no una matemática contemporánea? ¿y qué hacer con la matemática "vieja"?

Un problema importante es que la gran mayoría de los profesores de matemáticas de las preparatorias no son matemáticos de profesión, y por tanto su conocimiento sobre la matemática contemporánea es limitado. Por ejemplo, en la praparatoria de la UAQ laboran en total 45 profesores, ninguno es matemático de carrrera, el 24 % ha estudiado la Maestría en Docencia de las Matemáticas que imparte la propia Universidad, por lo que tienen conocimientos matemáticos más formales, el 33 % son ingenieros, el 22 % son contadores o administradores y el 21 % estudiaron otras carrreras, por lo que en su mayoría, las matemáticas que aprendieron son las de preparatoria y las de su carrera profesional. También se puede considerar el COBAQ y escuelas privadas como la Escuela John F. Kennedy de Querétaro donde se tiene el 75 % de ingenieros y el 25 % administrador de empresas y el Instituto La Paz con 50 % ingenieros y 50 % normalistas.

El maestro es el eje sobre el cual gira el sistema de educación y el recurso intelectual más importante. La escuela mejor equipada, el curriculum más avanzado, los textos más completos y mejor escritos, buenos sistemas de control y administración escolar, son necesarios pero insuficientes y no garantes si el factor humano no responde a las demandas de una buena educación. El meollo de la calidad de los maestros, de sus conocimientos, habilidades, rasgos ideológicos y personales, se encuentra en los procesos de formación, sensibilización y *actualización*.

La idea de enfocar la propuesta a los profesores se basa en el hecho de que éstos están en contacto con los alumnos, por lo que cada profesor tiene ante sí por lo menos a 60, lo que quiere decir que al lograr un cambio en el profesor, la probabilidad de que éste llegue a los alumnos es mayor y la nueva visión se multiplicaría. Además la capacitación favorece al profesor en otros ámbitos, por ejemplo, al ubicarlos en un ambiente de aprendizaje pueden llegar a entender mejor a sus estudiantes cuando se les presenta un material nuevo para ellos y reflexionar sobre cómo hacer de este proceso un aprendizaje eficiente y efectivo.

En su artículo "La enseñanza de la matemática de Platón a la matemática moderna" Santaló, (1977), explica con claridad las coyunturas de las escuelas sometidas al acelerado cambio de nuestros tiempos; dice:

> "La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir. Por esto, como el mundo actual es rápidamente cambiante, también la escuela debe estar en continuo estado de alerta para adaptar su enseñanza, tanto en contenidos como en la metodología, a la evolución de estos cambios, que afectan tanto a las condiciones materiales de vida como al espiritú con que los individuos se van adaptando a ellas. En caso contrario si la escuela se descuida y sigue estática o con movimiento lento en comparación con la velocidad exterior, se origina un desfase entre la escuela y la realidad ambiental, lo cual trae como consecuencia que los alumnos se sientan poco atraídos por las actividades del aula buscando por otros medios los conocimientos que consideran necesarios. Se puede tener que los alumnos se irán apartando de las enseñanzas de su maestro para creer más en el mundo simplificado de la ciencia-ficción, historietas, revistas, cine o internet entre otras cosas, careciendo de la base firme de un conocimiento organizado, estrellándose como Icaro, al derretírsele las alas por el Sol."

Continuando con Santaló, lo primero que deben tener los educadores es un buen conocimiento del mundo exterior y de su posible evolución en los próximos años, para luego ver cómo sus enseñanzas pueden ayudar a una mejor manera de actuar en él, lo que será provechoso no solo para los alumnos, los futuros protagonistas, sino para el conjunto de la sociedad de la cual éstos serán actores principales.

1.2.2. Carácter matemático

La Matemática como todas las disciplinas ha evolucionado. La curva de producción matemática es bastante parecida a la curva exponencial del crecimiento biológico; empieza a levantarse en el pasado remoto (Babilonia 4241 ± 200 años a.C.) y asciende cada vez más rápidamente conforme se acerca a nuestros días. Esta curva, no es totalmente creciente, la matemática tuvo algunas depresiones, como el arte, por ejemplo en la Edad Media. Pero a pesar de las depresiones, ha tenido una tendencia general ascendente. Las grandes ideas matemáticas sobreviven, llevándose a cabo adiciones permanentes que son inmunes a cualquier cambio de moda o de costumbres. La mayoría de los matemáticos relacionados con las matemáticas creadas desde el siglo XIX, están de acuerdo que la curva se eleva más rápidamente a partir de esta fecha. Muchos que no tienen un conocimiento de las matemáticas modernas más allá del cálculo, creen con error que las matemáticas experimentaron su edad de oro en el pasado. Los matemáticos no lo creen así; juzgan en general como la edad de oro la era reciente, empezando en el siglo XIX. La última fecha 1801, señala el comienzo de una nueva era inventiva sin precedente, la obra de Gauss. Otra fecha importante es 1821, donde Cauchy inició su primer método satisfactorio del cálculo diferencial e integral. Y sigue una creciente oleada de conocimientos en los últimos 200 años.

Un ejemplo típico de la gran productividad acelerada del siglo XIX, consecuencia de los métodos ideados en el período medio, es el desarrollo de la geometría. Se creó tanta o más geometría que la de los matemáticos griegos durante los dos o tres siglos de su más grande actividad. Hay motivos para afirmar de que el siglo XIX y XX por sí solo, contribuyó a las matemáticas cerca de cinco veces más que toda la historia precedente. Esto se aplica no solamente a la cantidad sino, lo que es de mucha mayor importancia, también a la calidad. Recordemos que los adelantos del período presente han incluído como casos especiales de teorías y métodos generales, a todas las matemáticas válidas anteriores a 1800. Obviamente que nadie que se dedique a las matemáticas cree que se han agotado, se espera que dentro de un siglo los métodos actuales más potentes den lugar a otros aún más poderosos.

Es necesario entonces darle dinámica a la enseñanza de las matemáticas. Tomando a la geometría como un caso especial, recordemos que el texto de Euclides ha sido el método de la geometría euclidiana (escolar) por 2000 años, como se mencionó anteriormente. Este solo ha sido reemplazada por un sistema matemático más riguroso. Si se revisa ciertas materias como las de ciencias naturales o la materia de español, no se usa material de 2000 o 1000 años antes. Lo cual por otro lado nos habla de la importancia y fortaleza de dicho material, que obviamente no se desea reemplazar. La educación como todas las ramas han ido evolucionando e involucrando elementos o material didáctico contemporáneo. Aunque se tienen programas de computación para la geometría como el “Cabri” o el “Geometer's Sketchpad,” entre otros, estos presentan los conceptos utilizados por Euclides, pero con la facilidad de la computadora, al fin y al cabo conceptos y nociones de hace 2000 años. Si bien las figuras geométricas se clasifican primero con una relación de congruencia, posteriormente con la relación de semajanza, ¿por qué no saber con qué relación se clasifican ahora? ¿por qué y bajo que bases se dice que un triángulo y una circunferencia se encuentran en la misma clase de equivalencia, es decir, son "topológicamente iguales"? La matemática no es estática, ¿por qué no enseñar material más moderno? Con esto se logra obtener una idea de cómo ha evolucionado la matemática, y como un caso especial la geometría.

En los nuevos planes se presentan contenidos nuevos: entre los temas de más atención en su momento fue el tema de conjuntos, cambio de base, matrices, lógica simbólica pero la geometría no parece tener este privilegio, la geometría se mantiene igual. Los nuevos contenidos del plan de matemáticas modernas se supone que corresponden a las necesidades de introducir a los jóvenes estudiantes en la sociedad moderna. El estudiante quiere saber cómo encajan las matemáticas en su mundo. Y, por fortuna, su mundo está lleno de imaginación y de abstracción. Así los estudiantes se interesan por las matemáticas por que les proporcionan un rápido acceso a una aventura intelectual atractiva y satisfactoria.

En las últimas décadas, la matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales, sobre todo debido a los medios electrónicos de cómputo. Las actividades de observar, explorar, formar discernimientos, intuiciones, hacer predicciones, probar hipótesis son cada vez más importantes. Actividades tradicionales como demostrar, generalizar y abstraer no se dejan de lado, pero esta apertura es una oportunidad para el profesor de presentar la matemática como una ciencia viva y en pleno desarrollo y no como una serie de "recetas" y conocimientos acabados, a manera de "noticiero." Aunque hay que resaltar que la matemática no es una ciencia experimental: para el matemático investigador siempre hay que demostrar; para el alumno se podría quedar en lo experimental o intuitivo, dependiendo de sus interés y carrera que estudia.

Existe una presión por una reestructuración, desde líderes de corporaciones, políticos, padres y hasta educadores. Esta presión se debe a que reconocen que el sistema vigente no está funcionando. La reestructuración resulta de una combinación de 1) lo que descubre la investigación sobre la manera en que cambian personas y organizaciones, y 2) la creciente brecha entre lo que parecen ahora las escuelas y lo que deben parecer en el futuro para satisfacer las necesidades de la sociedad. Un sistema escolar proyectado para atraer mentes de alumnos del siglo XXI tendrá un aspecto muy diferente de los sistemas escolares presentes, creados durante la era industrial. La explosión de la información y la mecanización de las tareas rutinarias obligarán a las escuelas a enseñar maneras de aprender y de razonar en vez de reglas y hechos. La responsabilidad del maestro se apoyará en su discernimiento profesional como persona instruida y con recursos mucho más refinados.

Los contenidos matemáticos, según Wenzelburger, (1992b), han cambiado en las últimas décadas y también la manera de hacer matemáticas. Si el investigador matemático adoptó nuevos métodos de trabajo de exploración y descubrimiento, con mayor razón el profesor de matemáticas del nivel medio-superior y los educadores en matemáticas que se ocupan del mejoramiento de tales maestros intenten seriamente terminar el virtual divorcio entre la matemática contemporánea y la investigación en este campo y los contenidos de los cursos que se ofrecen a los alumnos. Debemos buscar alternativas a la vieja costumbre de enseñar una matemática anticuada, estática y mecanizada, meramente "reproduccionista".

Es importante destacar que los cursos de actualización para profesores de matemáticas, según Wenzelburger, (1992a), deben incluir tópicos de matemáticas contemporáneas, como matemáticas discretas, subconjuntos borrosos y teoría de caos, para mencionar algunos.

Si se logra incluir tópicos matemáticos contemporáneos que se presten para la adopción de un estilo de aprendizaje visual y experimental, se podría iniciar cambios dramáticos y fundamentales en el desempeño de los alumnos.

Una materia solo debería mantenerse en la medida en que enriquezca la experiencia del alumno, iluminando sus actividades y preocupaciones actuales, y si es posible de una aplicación no muy lejana. La geometría merece su lugar como aplicación del álgebra y como modelo del mundo experimental. Por lo que se podrá ver que las propiedades topológicas figuran entre las más aprensibles por nuestra inteligencia, abierta al mundo experimental a través de nuestros sentidos.

La topología no es solo una "geometría de caucho" y que ha dado frecuentemente la impresión de que se trata esencialmente de una "recreación" en la cual se intenta retorcer neumáticos de bicicleta, jugar con rosquillas y todo tipo de nudos, construir bandas de Möbius y botellas de Klein. Estos espacios topológicos se citarán como ejemplos ilustrativos pero es de mayor importancia tender a lo esencial, tratar la materia con toda seriedad y retomar los conocimientos que tienen los profesores así como generalizarlos. Obviamente lo óptimo será que el profesor descubra lo atrayente de estas configuraciones elementales. Pero básicamente el interés intrínseco de las nociones topológicas y su explotación, el desarrollo de sus conexiones con los demás dominios matemáticos y su presentación es la línea de contactos posteriores que el profesor podrá tener.

Se intenta con este curso ser un puente entre los profesores de matemáticas de nivel medio y medio superior con una parte de la matemática actual. Si observamos que la mayoría de los libros de topología están dirigidos a matemáticos o bien para gente con una gran base de matemáticas (estudiantes de esta disciplina), no suelen ser libros accesibles para la mayoría de los profesores. Además regularmente se encuentran en inglés, lo cual obstaculiza el acceso a la gran mayoría de maestros. Es por ello que estas notas pueden ser de utilidad, al tratar de ayudar a superar estos obstáculos.

1.3. Objetivo

De los muchos elementos que participan en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el profesor es uno primordial. Cualquier reforma educativa o proyecto de renovación pedagógico, ya sea en los programas escolares, libros de texto o cualquier otro aspecto no puede ser eficaz y contribuir a mejorar la enseñanza si ni no se realiza simultáneamente un esfuerzo considerable en el terreno de formación de maestros.

Al presentar a los maestros esta nueva propuesta, el diseño de un curso sobre *topología*, se pretende dar a la visión de las matemáticas escolares un dinamismo que elimine la imagen estática o inalcanzable que actualmente tienen en la comunidad educativa. Este material pretende lograr que los maestros conozcan una rama de las matemáticas del siglo XX, una matemática dinámica accesible, y no solo para matemáticos de profesión. Por ende al conocer algo del desarrollo de la matemática, estar en contacto con los cambios y lo nuevo, el profesor podrá darse cuenta de las necesidades del estudiante cuando afronte este mundo dinámico. Un maestro con mejor formación, formación *contemporánea*, motivará, generalmente, el estudio de las matemáticas entre sus estudiantes, obteniendo éstos una visión más completa y actual de lo que son las matemáticas.

La vitalidad de la matemática contemporánea que experimentan los matemáticos profesionales, está en contraste con lo que viven la mayoría de los alumnos en el salón de clase debido a que los matemáticos tratan de resolver problemas novedosos mientras que los alumnos se enfrentan a "problemas" que sus maestros pueden resolver y han sido resueltos por muchísimo tiempo, año trás año. De ahí que la matemática aparece como un cuerpo de hechos y técnicas, muerta e inerte, que heredamos de nuestros antepasados, que no admite exploración. Es necesario hacer un esfuerzo para cambiar esta imagen de la matemática.

Se estará logrando entonces, con el desarrollo de esta tesis, generar espacios de crecimiento en profesores y alumnos al desarrollar una visión más real del quehacer del matemático contemporáneo, involucrándolos en procesos más dinámicos de aprendizaje-enseñanza.

Buscando el logro de los objetivos planteados, surgen entonces las siguientes preguntas ¿Cómo inyectar a los contenidos de la Geometría actuales, dinamismo e interés? ¿Es la topología el medio adecuado para conseguirlo? ¿Cuál puede se una forma de presentar la topología de una manera accesible? ¿Qué actividades se deben presentar para estimular su intuición topológica sin tecnicismos y definiciones innecesarias a partir de los conceptos básicos de la geometría que se conoce y trabaja en el bachillerato? ¿Cómo impulsar la habilidad de creatividad con nuevos objetos geométricos al querelos transformar uno al otro por medio de deformaciones, ("homeomorfismos")? ¿Cómo relacionar los nuevos conceptos con los que tiene? ¿Cómo desarrollar la habilidad de reflexionar en los procesos? ¿Cómo obtener diferentes resultados a partir de los mismos elementos iniciales, con el mismo conjunto? ¿Cómo se clasifican las figuras "topológicamente"? ¿Cómo se adquirirá este nuevo lenguaje?

1.4. Revisión de literatura

1.4.1. El profesor y las matemáticas

En realidad todo el peso de la educación tradicional descansa sobre los maestros, su papel es de lo más importante haciendo una función creadora. La preparación de los maestros es algo que se tiene que modificarse sustancialmente, es preciso que el maestro tenga una formación muy completa y de gran calidad. El maestro de matemáticas del nivel medio superior debe impartir conocimientos de matemáticas (amplios e ideas claras) y desarrollar la capacidad de aprendizaje de los alumnos, así como desarrollar en ellos actitudes positivas hacia las matemáticas. Deberá entender el espiritú de la ciencia moderna, la dinámica del orden social así como tener un buen conocimiento del desarrollo psicológico de sus alumnos.

Concretando, los maestros de matemáticas deberán:

- Ser capaces de estimular a los alumnos a entender y usar las matemáticas, y a apreciar el significado de los conceptos matemáticos.

- Además de saber bien y a fondo las matemáticas que van a enseñar y dominar las matemáticas que se imparten en las diversas instituciones de nivel medio superior, deben tener un conocimiento más amplio y más profundo de las matemáticas para exponer el contenido que están enseñando desde una perspectiva apropiada. El maestro debe saber matemáticas más avanzadas de las que enseña y poder relacionarlas con los conceptos que está enseñando.

- Tener la capacidad de mantenerse actualizado, tanto en el aspecto matemático como en los aspectos pedagógicos. Se vive en un constante cambio, y el maestro deberá ser capaz de responder positivamente a estos cambios: mayor énfasis en las aplicaciones de las matemáticas, evolución de los contenidos matemáticos en la universidad, mayor disponibilidad de computadoras entre otros aspectos.

La profesión de maestro tiene que convertirse en algo más digno y no en una carrera de segunda, para ello será necesario reformar sustancialmente las actuales escuelas de magisterio. Habrá que recompensar mejor a los maestros, pero se les exigirá mucho más. Su formación no solo será de mayor calidad sino de diferente naturaleza: un desafío intelectual y llevar a cabo un trabajo mucho más creativo. Los cursos de actualización deberán diseñarse para retar la inteligencia, contenidos que sean relevantes a las nuevas condiciones de México y el mundo así como utilizar las tecnologías más avanzadas de comunicación e información.

La mayoría de los profesores que se encuentran dando matemáticas a nivel medio-superior actualmente no son matemáticos de profesión (como se mencionó en la primera parte), generalmente son ingenieros, químicos, contadores o administradores en su mayoría, por lo que desconocen algunas ramas de la matemática contemporánea. Por otro lado su formación de baja calidad; la elección de la profesión docente, la cual se hace con frecuencia por necesidad y su escaso reconocimiento económico son factores que señalan la urgencia para cursos de actualización de calidad y de mayor contenido. La profesión docente no es apetecible y por tanto no competitiva, pero puede ser bastante cómoda. La fuerte feminización de la profesión docente es un claro ejemplo: la enseñanza es hoy una buena solución laboral para muchas mujeres. Todo ello significa que la tarea de participar en la formación del niño o adolescente es confiada en nuestra sociedad a personas poco motivadas por su profesión y por tanto, poco propensas al compromiso y al cambio.

El profesor, por otro lado, es el único trabajador que pasa sin solución de continuidad de la formación a la profesión. A diferencia del médico, abogado, secretaria que pasa de la escuela al lugar de trabajo, donde tendrá que verificar si la formación académica adquirida es útil y qué parte en cambio no sirve y hay que sustituirla, aprender algo nuevo. En contraste el maestro no tiene necesidad de verificar porque, al seguir en la escuela, viene naturalmente legitimizado todo su bagaje cultural y metodológico adquirido en la escuela. Esta legitimidad provoca una espóntanea acción a repetir, reproducir acríticamente lo que ha estudiado con "credencial" para parlotear curso tras curso.

Los cursos de actualización que generalmente se ofrecen, a los cuales asisten en muchos casos por su valor curricular más que por cambiar, tratan en general de nuevos métodos didácticos, nuevas tecnologías en algún tema, pero todos giran alrededor de los temas de los programas y no de nuevos temas que incrementarán la visión del profesor en matemáticas. Si bien es cierto que no lo aplicará directamente en su clase, la actitud del profesor será la del cambio ante las matemáticas y por ende será algo que trasmitirá a los jóvenes, aunque no en forma explícita. Las repeticiones crean arraigos dogmáticos, seguridades defensivas (esta bien porque siempre se ha hecho así), y más aún preocupantes vicios anticientíficos.

Los profesores son ejemplo para sus alumnos, colaboradores de la formación de futuros ciudadanos, de los futuros forjadores de la realidad social, conocer la realidad y lo nuevo será una obligación de los maestros cuya profesión deberá ser actualizada y competitiva. Una manera es el acceso de las personas provenientes de otras profesiones, en forma temporal o bien estar en contacto con el mundo de producción (investigaciones matemáticas), contacto a nivel formación y contacto a nivel de actualización. Logrando así una coherencia cada vez mayor entre la formación de los docentes y el modelo educativo en las aulas.

El futuro maestro debe tener experiencias en buscar y estudiar conceptos nuevos para él, y desarrollar habilidad para comunicar conceptos matemáticos relevantes y actuales.

1.4.2. El constructivismo y la educación matemática

Ante el fracaso de la educación, como el cambio dentro de ésta, ante las quejas de la gente por lo pobre o inadecuado de la preparación de los estudiantes se han hecho varias proposiciones acerca de mejorar nuestra educación en el aula. Muchas de estas propuestas, como respuesta, han sido alrededor de la manera en que los estudiantes construyen un significado. Las reformas educativas deberían empezar por ¿cómo los estudiantes aprenden y cómo los maestros enseñan?

El constructivismo no es una teoría sobre la enseñanza, es una teoría sobre aprendizaje y conocimiento. Para esta teoría el aprendizaje es un proceso autoregulado con la finalidad de resolver conflictos cognitivos internos que aparecen comúnmente por una experiencia concreta, discurso o reflexión. Aunque no es una teoría de enseñanza, el constructivismo ha motivado como base a un gran número de reformas educativas. La resolución de problemas, el concepto de desarrollo, el estudiante como su propio generador de soluciones y algoritmos son de mayor importancia que los procedimientos memorísticos utilizados para dar la respuesta correcta.

El constructivismo motiva a la reflexión y al cambio. La enseñanza ya no es la transmisión de conocimiento del profesor al alumno, los profesores actúan aquí como *guías* proporcionando a los alumnos la oportunidad para probar la efectividad de su conocimiento actual. Al tomar el profesor un curso de topología, que generalmente será material nuevo, podrá experimentar la situación que vive el alumno al presentarle temas novedosos. El profesor trabajará en un ambiente de descubrimiento de relaciones matemáticas donde, mediante actividades de aprendizajes *construirá* conceptos nuevos.

En el constructivismo, no estudia la realidad sino la construcción de la realidad. Es decir, lógicamente construirá la realidad matemática dentro del espacio de su experiencia. Una didáctica basada en teorías constructivistas exige también una actividad mayor por parte del educador. Esta ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecible, y exige del educador una constante creatividad, pero ¿no es así la matemática contemporánea?

Si la matemática fuera un cuerpo codificado de conocimientos —y por tanto un "objeto de enseñanza"— entonces la matemática estaría compuesta de verdades atemporales y la historia daría cuenta de ello. No hay duda de que las ciencias naturales han evolucionado y que, con tal evolución, ha ocurrido un cambio de normatividades, es decir en la manera en la que se conciben y validan los resultados. Ejemplos de esto son la revolución copernicana, la revolución darwinana del siglo XIX y la revolución relativista y cuántica del siglo XX. ¿No ha habido un cambio equivalente en la matemática?

Hermann Hankel, matemático notable del siglo XIX, dijo en una ocasión que en la mayoría de las ciencias, una generación deshace lo que hizo la generación precedente, y que sólo en matemáticas cada generación construye una nueva historia sobre la vieja estructura. Por ejemplo la axiomatización de la geometría euclidiana, transformó la actividad matemática empírica, tal como se realizaba en Egipto y Mesopotamia, en una actividad teórica. Los resultados geométricos encontrados a partir de múltiples observaciones por egipcios y babilonios, fueron concebidos por los griegos como conceptos abstractos, cuyo tratamiento requería de un marco metodológico y conceptual diferente.

De acuerdo a la interpretación constructivista, todo esto permite cambiar las concepciones de la colectividad sobre la disciplina. La matemática se reconoce como una actividad esencialmente abstracta, en donde la abstracción reflexiva es el eje de la actividad y la interiorización de las nociones es su punto de partida.

1.4.3. De la geometría a la topología

El mundo que nos rodea está constituido por objetos geométricos y el estudio tradicional de la geometría esta relacionada con ciertas propiedades de estas figuras del plano o del espacio euclidiano. Por ejemplo, si consideremos un triángulo, éste tiene propiedades con respecto a los valores de sus ángulos, la medida de sus lados, divide el plano en dos regiones el perímetro, el área, su posición con respecto a una recta, su tamaño, su relación con respecto a otro triángulo, su relación con respecto a otras figuras, etc. La geometría euclidiana, desde un punto de vista moderno, es el estudio de las propiedades que permanecen invariantes ante un desplazamiento rígido en el espacio o plano, conservando las distancias y los ángulos de las figuras. Así, toda proposición relativa a las distancias y a los ángulos, es un concepto euclidiano. La geometría euclidiana se basa en axiomas, que son relaciones entre rectas paralelas o ángulos. Se introduce una equivalencia geométrica que comúnmente llamamos *congruencia*.

Intuitivamente dos figuras son congruentes si al desplazar una hacia la otra, superponiéndola, coinciden perfectamente. Las propiedades que comparten figuras congruentes son las propiedades geométricas. Es por medio de una *transformación rígida (isometría)*, en caso que exista, que se pude decir si dos figuras son congruentes. Hay tres transformaciones rígidas fundamentales que son: *traslación, rotación y reflexión*. Cualquier otra transformación rígida puede ser expresado como composición de las anteriores

Se llaman transformaciones rígidas o isometrías ya que tienen la característica de que preservan distancias. Por lo que se puede decir que la medida es un invariante bajo dichas transformaciones. Claramente se puede observar que la medida de los ángulos así como el área también se preserva. En contraste, la orientación no es una propiedad que se preserve bajo una transformación rígida.

Por lo ello, el conjunto de figuras en un espacio euclidiano se pueden dividir en subconjuntos

BIBLIOTECA CENTRAL UAQ
"ROBERTO RUIZ OBREGON"

donde los elementos de cada uno de los subconjuntos son congruentes entre sí, es decir, existe una transformación rígida que manda cualquier elemento del subconjunto a cualquier otro elemento del mismo subconjunto. Considerando esta relación, la congruencia, se puede probar que es una relación de equivalencia, obteniendo una partición de la colección de las figuras en el espacio euclidiano. Los teoremas de igualdad son las piedras angulares de la mayor parte de las demostraciones clásicas de la geometría euclidiana. Numerosos teoremas de la geometría euclidiana pueden demostrarse sin utilizar el uso de la distancia, sino con el de la relación que hay entre las distancias.

Se conoce otra relación entre las figuras, que es la *semejanza*, la cual se refiere a la proporcionalidad. También es una relación de equivalencia y figuras congruentes se encuentran en la misma clase. Por ejemplo, todos los cuadrados son equivalentes, todas las circunferencias son equivalentes así como todos los segmentos. Los rectángulos no todos son semejantes, sólo aquellos cuya razón de sus lados es la misma. Los valores de los ángulos se preservan, las rectas se mantienen, figuras semejantes tienen la misma forma.

Se introduce dos nuevas transformaciones, además de las anteriores, las *contracciones* y las *dilataciones*. Bajo el efecto las anteriores se puede observar que el área es una propiedad que no es invariante a diferencia del *paralelismo*, la cual es una propiedad que sí se preserva.

En la *geometría proyectiva,* las transformaciones son las proyecciones en perspectiva de la figura desde un punto fuera del plano. Dados dos planos, no necesariamente paralelos, figuras de un plano pueden ser transformadas en otra por medio de proyección paralela o bien por una proyección desde un punto exterior. Ahora la propiedad de paralelismo se pierde, por lo que un cuadrado resulta equivalente a cualquier cuadrilátero, una circunferencia será equivalente a una elipse, la colinealidad de los puntos se preserva , rectas se mantienen como rectas así como la concurrencia de rectas. Una invariante importante en la geometría proyectiva es la *razón cruzada.* Dados 4 puntos P, Q, R y S colineales al transformarlos en P^*, Q^*, R^* y S^* se tiene la igualdad entre las razones cruzadas:

$$\frac{PR/RQ}{PS/SQ} = \frac{P^*R^*/R^*Q^*}{P^*S^*/S^*Q^*}.$$

Al analizar las geometrías mencionadas, una invariante importante bajo las transformaciones es el la colinealidad, y que las rectas se preservan. Ningún círculo pertenece a la misma clase que un polígono. Al pasar de la geometría proyectiva a la topología, ésta invariante se perderá. Las transformaciones que se considerarán serán aquellas que manden puntos "cercanos" en puntos "cercanos", es decir, no se permite romper ni pegar pero si torcer, estirar, encoger. A las invariantes bajo estas transformaciones, se les denominan propiedades topológicas.

Dichas transformaciones son conocidas como *deformaciones elásticas*, por ejemplo un cuadrado, un círculo, una elipse, un hexágono, un triángulo son topológicamente equivalentes. Se pueden deformar una en la otra pensando que están hechas de algún material elástico.

La rama de las matemáticas que estudia las propiedades geométricas que son invariantes bajo estas transformaciones se llama *topología*. Las clases de equivalencia que se obtienen incluyen todas las figuras que se encuentran en equivalencia topológica bajo las transformaciones rígidas y bajo las proyecciones. Alguna propiedad que se mantiene bajo estas nuevas transformaciones es la propiedad de que toda curva cerrada simple, como el cuadrado, triángulo, etc. divide al plano en dos regiones ajenas: interior y exterior (por lo que ésta es una propiedad topológica).

La palabra *topología* se deriva del griego $\tau o \pi o \varsigma$ que significa "lugar" y $\lambda o \gamma \iota \alpha$ que significa "estudio". Por algún tiempo la topología era conocida como *analysis situs*, del latín relacionado con "situación o sitio o posición", es decir concerniente a lo relativo a la posición de los puntos.

Según (Kats, 1998) el principio de la topología se encuentra en los trabajos de Karl Weierstrass en 1860 analizando el concepto de límite de una función. Con este objetivo, reconstruyó nuevamente el sistema de los números reales y reveló algunas propiedades que ahora se llaman "topológicas." Posteriormente Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos (1980), donde la topología se refugió para construir su "casa." Posteriormente con Poincaré, Hausdorff, Brower, Alexandroff, Lefschetz entre otros logra un desarrollo sólido e independiente del análisis. Por supuesto, sí es un tipo de geometría, pero no es una forma más avanzada de la geometría como la proyectiva o la diferencial, sino una forma esencial, que está en todas las geometrías. Reiterando, las ideas de la topología se encuentran en casi todas las ramas de las matemáticas, quizá especialment en el Cálculo y el Análisis. Fue Lefschetz el primero en usar y divulgar el nombre de *topología* al publicar un libro con dicho título en 1930.

Desde entonces, la topología sea ha desarrollado de una manera acelerada. Algunos resultados para resaltar la importancia de la topología son los siguientes: en el cálculo de variedades con Morse, se ha revigorizado a la geometría diferencial con el trabajo de H. Whitney en Princeton; las normas diferenciales con el trabajo de G. Rham en Lausanne, y los trabajos de grupos de Lie por H. Hopf en Zürich. Refuerza al álgebra moderna, desarrolla una nueva rama llamada álgebra homológica, con trabajos de S. Eilenberg en la Universidad de Columbia y S. MacLane en la Universidad de Chicago. Aplicaciones de la topología se presentan en otras ciencias como la química, la psicología (nudos) y en informática. La topología se ha convertido en una materia básica de las matemáticas, necesaria en varias áreas y como una fuerza de cohesión en las diferentes ramas de la matemática.

1.5. Metodología

1.5.1. Identificación del problema

El sistema educativo mexicano no ha evolucionado como lo ha requerido el país, desde que fue concebido en 1857 citebib:edu:ornelas. En lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas, se observa que los contenidos se han mantenido prácticamente sin ser modificados en esencia, desde la creación de los primeros planes curriculares oficiales. Más específicamente, la enseñanza de la geometría es un claro ejemplo de la ausencia de cambio, solamente "geometría euclidiana" y en el bachillerato la "geometría análitica" que es la Euclidiana algebrizada, sin restar la importancia que tuvo, tiene y tendrá, materia que ha perdurado más de 2000 años. Su enseñanza en los niveles básico, medio y medio superior se practica en nuestros días, sobre los preceptos originales de Euclides plasmados en su famoso texto "Los Elementos", igual que se ha practicado año tras año, observándose que los maestros resuelven una y otra vez, los mismos problemas, los que ya tienen dominados, que se le presentan al alumno muchas veces como hechos y técnicas, muertos e inertes, heredados de nuestros antepasados y perfectamente acabados que no permiten exploración. Y no es que no se reconozca la existencia de profesores que transmitan al alumno la esencia del pensamiento lógico-deductivo, que los introduzcan al proceso de pensar y de crear, ni tampoco se desea implicar que sea incorrecto el basar la enseñanza de la geometría en los postulados de Euclides, lo que se desea es hacer evidente la necesidad de inyectar vitalidad a la enseñanza de la geometría, para acercar más a los alumnos a la realidad del matemático contemporáneo, el que experimenta, busca y desarrolla nuevas líneas de trabajo, el que se enfrenta a la solución de problemas que requieren de un pensamiento creativo, ágil y novedoso; para evitar dar a las matemáticas una imagen estática, contraria al mundo moderno caracterizada por cambios constantes.

Las matemáticas escolares requieren de un dinamismo y este involucra a los profesores y al contenido. La acusación de que el plan tradicional (como ya se ha señalado), según Kline, (1994), está anticuado se contradice con la confesión de los modernistas de que ellos ofrecen ante todo una nueva interpretación. Cualquiera que sea el caso, la época actual requiere una nueva matemática. Se desarrollan métodos didácticos, instrumentos de apoyo, programas de evaluación, ¿por qué no nuevos contenidos? ¿por qué no una matemática contemporánea? En la declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI (1998) en el artículo 9 se habla de la necesidad de *renovación de los contenidos*, métodos, prácticas y medios de transmisión del saber. Para renovar los contenidos será necesario tener una idea no solo de la disciplina sino de los cambios de ésta, hasta la actualidad. Será necesario que los profesores estén en contacto con la matemática contemporánea para que sean ellos los que posteriormente modifiquen o renueven los contenidos. ¿Cómo modificar sin conocer hacia donde va la disciplina? ¿Cuáles son ahora las tendencias de ésta?

Un caso particular es, la topología, rama de finales del siglo XIX que se desarrolla en el siglo XX un ejemplo del dinamismo que ha tenido la geometría; la matemática. No es éste el único ejemplo, también lo son la geometría fractal, los sistemas dinámicos y las matemáticas discretas entre otros temas, insistiendo que no es el único elemento que interviene o que se necesita modificar para la formación que se espera de los alumnos. Diseñar material, sobre topología, para los profesores es una manera para que éstos se acerquen a las matemáticas contemporáneas incrementando su formación matemática y su visión de éstas, lo que seguramente reflejarán en su práctica docente. Cuando Lebesgue desarrolló su análisis de la relación entre la lógica y la aritmética escribió que la matemática fue creada por el hombre por necesidad para resolver problemas y dedujo que el profesor de matemáticas debe ser un profesor de "acción." La matemática es la ciencia que tiene más conexiones culturales y responde a las exigencias de distintas sociedades lo cual ha conducido al desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

Hay presión por una reestructuración, desde líderes de coorporaciones, políticos, padres y de los educadores ya que reconocen que el sistema vigente no está funcionando. La reestructuración resulta de una combinación de 1) lo que descubre la investigación sobre la manera en que cambian personas y organizaciones, y 2) la creciente brecha entre lo que son ahora las escuelas y lo que deben ser en el futuro para satisfacer las necesidades de la sociedad. Un sistema escolar para el siglo XXI proyectado para forjar talentos tendrá un aspecto muy diferente de los sistemas escolares convencionales, creados durante la era industrial. La explosión de la información y la mecanización de las tareas rutinarias obligarán a las escuelas a enseñar maneras de aprender y de razonar en vez de reglas y hechos. La responsabilidad del maestro se apoyará en su discernimiento profesional como persona instruida y con recursos mucho más refinados.

1.5.2. Investigación bibliográfica

Al consultar varios libros y otros materiales, éstos pueden dividirse en dos categorías:

- Aquellos libros escritos por matemáticos y para matemáticos, lo cual la mayoría de las veces es inaccesible para los maestros de matemáticas de nivel medio-superior, esto es debido a su formación matemática. Son libros que generalemente empiezan con definiciones rigurosas, continuando con demostraciones de proposiciones y teoremas, que en muchas ocasiones utilizan resultados de cálculo avanzado o análisis matemático que por las deficiencias, por sus estudios, de los maestros habrán algunos que no conozcan. Son libros generalmente en inglés, lo cual obtaculiza también su acceso así como su elevado costo.

- Por otro lado se encuentran aquellos folletos o materiales cuyo único objetivo es la de divulgación de las matemáticas. Dicho material trata los temas aislados y muchas de las veces de forma muy intuitiva, ya que su finalidad es dar un idea gruesa de lo que son algunos conceptos y ciertos espacios topológicos, y las demostraciones se dejan para los cursos especializados de topología. Dicho material generalmente esta dirigido a un público más amplio y menos especializado.

Por lo anterior se puede observar que los materiales que se encontraron son diametralmente opuestos, por lo que es necesario un a base fuerte de matemáticas o bien matemáticas a nivel medio o medio superior. No se encontró ningún material que trate formalmente la topología tomando como base matemática. por ejemplo, los cursos de cálculo.

1.5.3. Plan de trabajo

La idea de hacer un curso de *topología* para maestros de matemáticas de nivel medio superior se inició pensando en material para la asignatura de seminario de geometría (en el último año) y como continuación de las materias de geometría I y geometría II que se imparten en la maestría en Docencia de las Matemáticas de la Facultad de Ingeniería de la UAQ. Se revisaron primeramente los temas que se tratan en dichas materias, checando los objetivos generales y específicos con la finalidad de poder hacer la conexión con la topología.

Posteriormente se llevó a cabo una revisión de los diferentes temas que trata la topología. Se revisaron los temas de matemáticas que la mayoría de los profesores conocen, de acuerdo con su formación. Finalmente se conjuntaron estas dos últimas revisiones para escoger los temas de topología y el método a fin de llevar a cabo el "puente" entre las bases de matemáticas de un profesor de matemáticas de enseñanza medio superior y las correspondientes de la topología.

1.5.4. Contenido matemático

Brevemente se describe el contenido matemático del curso de topología, el que se divide en cinco partes principales:

- Primero se aborda la noción de "distancia" a partir de su definición, es decir, desde las propiedades que son deseables para que una función sea una *distancia*, lo que representa y la información que se puede obtener de ella. Se darán diferentes ejemplos, incluyendo obviamente la distancia euclidiana, la cual es utilizada en cálculo de una o varias variables. Se comparan las diferentes funciones distancias, observando los distintos resultados y configuraciones. Se trabaja primero en $\mathbb{R}^2$ y luego se generaliza a $\mathbb{R}^n$.

- Dada una función distancia, se define de manera natural el concepto de "conjunto abierto". Se analizarán los diferentes conjuntos abiertos dependiendo de la función distancia con la que se esté trabajando. Comparando conjuntos abiertos con diferentes funciónes distancias, se analizará las características de cada una, se obtendrán las propiedades que comparten, con el objetivo de llegar de una manera natural a generalizar el concepto de "abierto", obteniendo la definición formal. Al tener la definición de "abierto" sin la presencia de una métrica, se define lo que es un *espacio topológico*. Se verificarán algunos casos particulares y cuáles definiciones son equivalentes, así el maestro podrá confirmar que los conceptos del cálculo subyacen sobre en un espacio topológico general, siendo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ casos particualres.

- Posteriormente se generalizará la definición de función continua (expresada en términos de "conjuntos abiertos"), a partir de la definición de *continuidad* que se tiene en cálculo diferencial e integral, entre espacios topológicos, de manera natural, corroborando nuevamente en casos particulares. Vía la función continua se hablará de las "transformaciones topológicas" aquellas que manden puntos cercanos en puntos cercanos y biyecciones bicontinuas, a las que llamaremos homeomorfismos, los cuales preservan las propiedades cualitativas (topológicas) y no las cuantitativas. Por ejemplo, al considerar el círculo C de radio $r > 0$ y con centro en el origen en el plano euclidiano y los puntos del cuadrado S cuyos vértices son $(1, 0)$; $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$, se puede observar la correspondencia entre los puntos de C y S, que a cada punto P de C se asocia el de S que se encuentra en el radio OP,donde O es el origen. Esta correspondencia es biyectiva y bicontinua, es decir es continua y su inversa también. Topológicamente se puede transformar un círculo en un cuadrado, es decir son dos figuras topológicamente equivalentes, intuitivamente se puede transformar el círculo, encogiéndolo (sin romper) y doblándolo (sin pegar puntos), hasta obtener el cuadrado. Desde este punto de vista se puede apreciar transformaciones topológicas en el plano como si éste estuviera hecho de un material elástico el cual se puede alargar o encoger a voluntad sin romper o pegar.Así se llega a que todo polígono regular se puede transformar topológicamente a una circunferencia o a un cuadrado, (del mismo modo el ecuador terrestre es *topológicamente equivalente* a la línea de la costa de Australia).

Por lo anterior es fácil observar que el tamaño ni la forma son una propiedades topológicas. Es decir, la topología es una geometría donde el tamaño y la forma no significan nada. Lo más sorprendente es que esta geometría tiene una gran importancia en algunas teorías avanzadas de matemáticas y en muchas aplicaciones.

- Se dará un caso particular de la clasificación de ciertos espacios topológicos: las superficies, cerradas y acotadas. Se darán varios ejemplos de superficies cerradas y acotadas, la más común es la esfera, el toro, el bitoro, etc. Se considerarán varios ejemplos, una silla, una camisa, entre otras y se buscará en qué clase de equivalencia se encuentra, si son topológicamente equivalentes a la esfera, al toro, bitoro, etc. donde será necesario imaginarse que se encuentran hechas de un material moldeable para poder transformarla en alguna superficie ya conocida. Se verán también aquellas superficies que carecen de la propiedad de orientabilidad. Se finalizará con la demostración de que toda superficie cerrada y acotada, si es orientable, es topologícamente equivalente a una esfera con cero, una, dos, $\ldots$, n asas y en caso de no-orinetable será topológicamente equivalente a una esfera con una, dos, $\ldots$, n bandas de Möbius. Se utilizará el teorema de la curva cerrada simple de Jordan y el Número de Euler para poder demostrar la clasificación de estas superficies.

- Por último se da una aplicación de este material. Si bien es cierto que parece muy abstracto, se hablará de la topología digital, que es la aplicación en el mejoramiento de imágenes digitales y como es que se usa. El procesamiento de imagen digital es una disciplina que se ha desarrollado rapidamente con muchas aplicaciones; en los negocios (lectura de documentos), la industria (la automatización), medicina (radiografías), geología (fotos a grandes distancias) entre otros. En muchos de los casos se involucra el análisis de las imágenes como por ejemplo, dada una imagen describirla en términos de los objetos que contiene, del número de regiones que la componen con sus propiedades y relaciones. Por ejemplo, una radiografía del pulmón contendrá el corazón, pulmones, ribs, etc. Una toma de sangre contendrá también sus elementos importantes. El proceso de descomponer la imagen en regiones o en objetos se llama segmentación. Es considerado como fundador a Azriel Rosenfeld (1979), trabaja con $\mathbb{Z}^n$ junto con las relaciones "de adyacencia," lo cual induce una estructura de gráficas que permite definir propiedades topológicas como la conexidad, frontera, curva simple, etc.

  La imagen se coloca en la computadora por medio de muestreo. Al querer desarrollar una teoría para el estudio de imágenes digitales es natural estudiar el teorema de la curva de Jordan, toda curva simple cerrada en el plano real lo separa en dos conjuntos ajenos y conexos, ya que al tener la imagen por medio de pixeles, lo que se busca es obtener una imagen lo más fiel que se pueda lograr, por lo que científicos en sistemas se ven implicados en problemas como reconocimiento de algún patrón, análisis de una imagen y áreas relacionadas.

Para hacer esto es necesario dividir la imagen en subconjuntos para poder delinearla. Estas particiones se harán basándose en ciertas propiedades que compartan entre sí, relacionando los pixeles y así poder formar los diferentes subconjuntos. Estas son propiedades cualitativas por su naturaleza, los cuales son útiles instrumentos y resultan ser conceptos fundamentales de la *topología.*

Finalmente, señalamos que estas notas no pretenden substituir el estudio formal de la topología, el objetivo no es dar una lista de proposiciones y teoremas sino el de abrir una ventana hacia la matemática contemporánea.

Capítulo 2

Distancias

> "Claro, claro," dijo el Unicornio, ¿Qué podemos medir? Somos expertos en la teoría de la medición, no en la práctica."
>
> J. L. Synge

La acción de medir viene asociada a la idea de un número, lo que desde la antigüedad ha sido objeto de un estudio profundo tanto que los números como de sus propiedades y relaciones. En este sentido sobresale el teorema de Pitágoras: recordemos que en geometría analítica para encontrar la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se emplea dicho teorema, como se ilustra en la figura 2.1.

Si bien es cierto que generalmente se habla de la distancia entre dos puntos y se considera la magnitud del segmento que los une, ¿podemos afirmar que hay una (es ésta la) única distancia, la distancia euclidiana? En ciertas ocasiones no resulta ser la distancia euclidiana la más adecuada. Por ejemplo, pensemos en una ciudad ideal perfectamente cuadriculada, como la de la figura 2.2. Si se quiere determinar la distancia dentro de esta ciudad, al buscar la distancia entre dos establecimientos A y B, ésta no será la magnitud del segmento que los une, salvo que se encuentren en la misma calle, por lo que será necesario definir otra 'distancia.' En este caso se habla de la distancia como el número de cuadras que hay que recorrer, hablando de rutas directas (con esto se quiere decir que para ir de un punto otro no se debe pasar dos veces por la misma calle).

Al preguntarse por la distancia entre dos puntos A y B sobre la superficie terrestre, no nos referimos a la medida del segmento que une A con B, la distancia euclidiana, ya que dicha distancia no sería la que recorreríamos para ir del punto A al punto B sobre la superficie de la Tierra. La distancia de A a B sobre la superficie del planeta tiene que ser un arco de circunferencia (figura 2.3).

La distancia entre planetas, la Tierra y Júpiter será, en términos de direcciones, la forma más adecuada para poder definir esta distancia (figura 2.4).

¿Qué significa que dos puntos sean "cercanos" entre sí? ¿Cómo podemos saber si dos puntos

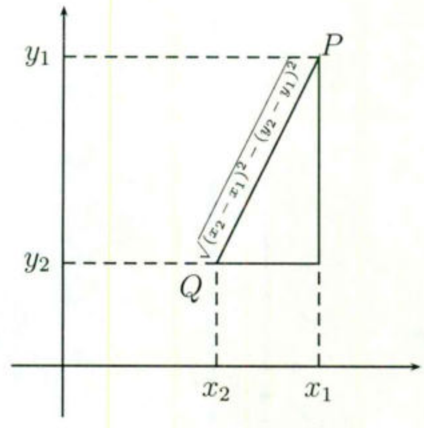


Figura 2.1: Distancia euclidiana entre dos puntos.

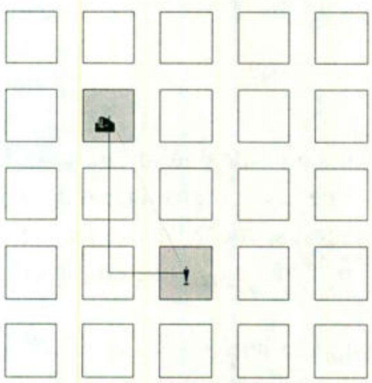


Figura 2.2: Distancia urbana entre dos puntos.

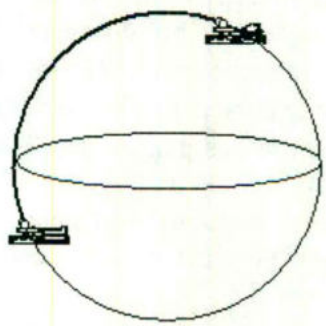


Figura 2.3: Distancia geodésica entre dos puntos.

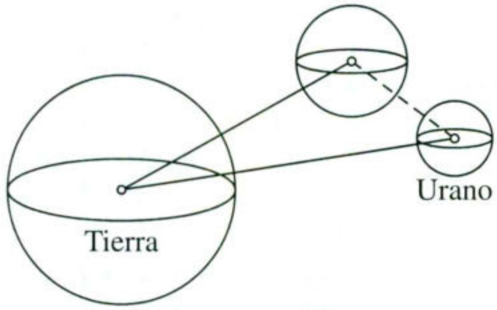


Figura 2.4: Distancia euclidiana entre dos puntos.

están "cerca" uno de otro? Es por este motivo que se debe de definir "cercanía" en el lenguaje matemático. La cercanía se relaciona con la distancia, pero ¿qué es la distancia y qué debe de cumplir matemáticamente? ¿Hay una sóla manera de medir la distancia?

La noción de *distancia* ha jugado un papel muy importante dentro de las matemáticas:

- En la geometría euclidiana se usa para poder comparar figuras: figuras congruentes (cuyos lados son congruentes, i.e., *miden* igual), o figuras semejantes (la razón entre las *magnitudes* de los lados correspondientes es constante).

- Para saber si tres puntos son colineales (si la suma de las *distancias* de un par de ellos es igual a la *distancia* del tercer par)

- Para encontrar el área de una figura (el área de un cuadrado: la *longitud* del lado al cuadrado).

- El teorema de Pitágoras (la suma de los cuadrados de las *magnitudes* de los catetos es igual a la *magnitud* de la hipotenusa al cuadrado).

- En cálculo al querer definir *'límites'*, que un punto se *aproxime* a un punto a, y preguntarse ¿qué sucede con las imágenes de una función?

- También para poder definir 'continuidad' en un punto, es necesario hablar de *'cercanía'* pero esto implica hablar de *distancia*.

- El saber si una sucesión converge o no; por ejemplo, para probar que una sucesión $\{x_n\}$ converge a cierto valor L es necesario probar, que para cualquier valor $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se tome, que diste de L, existirá una $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo elemento de la sucesión x_n con $n > \mathbb{N}$, la *distancia* de x_n y L es menor que el valor ε dado. Es decir, al acercarse a L tanto como se quiera, sólo habrá un número finito de elementos de $\{x_n\}$ que no estén tan cercanos a L.

Si bien es cierto que generalmente cuando se habla de la *distancia* entre dos puntos, se considera la *magnitud* del segmento que los une, ¿es ésta la única manera de medir la *distancia*?

Resumiendo, en ciertas ocasiones la distancia euclidiana no resulta la más adecuada. Por ejemplo, si se quiere determinar la distancia dentro de una ciudad, al buscar la distancia entre dos establecimientos, se habla de la *distancia* como el número de cuadras que hay que recorrer y hablando de rutas directas. Al preguntarse por la distancia entre dos puntos P y Q sobre la superficie terrestre, la distancia de P a Q sobre la superficie del planeta tiene que ser un arco de circunferencia. Al hablar de la *distancia* entre planetas, digamos, la Tierra y Jupiter se buscará la forma más adecuada para poder definir esta distancia, en término de direcciones. Independientemente de los casos, la *distancia* se refiere una relación de cercanía-lejanía entre dos 'objetos' (puntos, establecimientos, planetas, etc.) que se puede expresar por medio de un número no negativo.

2.1. Distancia euclidiana en $\mathbb{R}$ (la usual o estándar)

Sean x y y dos números reales; se define la distancia entre x y y como $d(x,y) = |x-y|$, donde

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{si } x-y \geq 0, \\ -(x-y), & \text{si } x-y < 0, \end{cases}$$

es el llamado valor absoluto de x menos y. Esta relación nos indica qué tan cerca o alejado se encuentra un número de otro.

Si esta diferencia es sumamente pequeña decimos que los puntos en la recta real se encuentran "uno cerca del otro."

Observaciones:

- $d(x,y) \geq 0$, ya que por definición del valor absoluto:

  $$|x-y| = \begin{cases} x-y, & \text{si } x-y \geq 0, \\ -(x-y), & \text{si } x-y < 0, \end{cases}$$

  por lo que, independientemente del caso, $|x-y| \geq 0$. ¿Cuándo es cero? Si $d(x,y) = 0$ se tiene $|x-y| = 0$ es decir $x-y=0$ por lo que $x=y$. Es claro, por la definición de valor absoluto que si $x=y$ entonces $d(x,y)=0$. Así, se puede afirmar que $|x-y| = 0 \iff x=y$.

- $d(x,y) = d(y,x)$.

  - si $x-y \geq 0$ (es decir $y-x \leq 0$),

    $$d(x,y) = x-y,$$
    $$d(y,x) = -(y-x) = -y+x;$$

    luego, $d(x,y) = d(y,x)$.

- si $x - y < 0$ $(y - x > 0)$,

$$d(x, y) = -(x - y) = y - x,$$
$$d(y, x) = y - x;$$

luego, $d(x, y) = d(y, x)$.

Por lo tanto, d es una función simétrica, es decir, la distancia que hay entre x y y es la misma que la que hay entre y y x (en otras palabras, no interesa cuál es x y cuál es y).

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si z es cualquier punto, se tendrían dos casos:

- $z \in \overline{xy}$, es decir $z - x \geq 0$ y $y - z \geq 0$ en caso de que $x \leq y$.

$$d(x, y) = |y - x| = y - x,$$
$$d(x, z) + d(z, y) = |z - x| + |y - z| = (z - x) + (y - z) = y - x,$$

luego, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Análogamente si se tiene que $y \leq x$, ya que se tendría $z - y \geq 0$ y $x - z \geq 0$, de modo que

$$d(x, y) = -(y - x) = x - y,$$
$$d(x, z) + d(z, y) = -(z - x) + (z - y) = x - y.$$

Es decir la función distancia es aditiva, la distancia de x a z más distancia de z a y es igual a la distancia de x a y siempre y cuando tengan un único punto en común los segmentos (figura 2.5).

Figura 2.5: Suma de segmentos con $x \leq z \leq y$.

- $z \notin \overline{xy}$. Sin pérdida de generalidad supongamos $x \leq y$. Se tienen dos subcasos:

  - $z \leq x$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= y - x, \\ d(x, z) + d(z, y) &= -(z - x) + (y - z) \\ &= x - z + ((y - x) + (x - z)) \\ &= (y - x) + 2(x - z), \end{aligned}$$

por lo que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (figura 2.6).

Figura 2.6: Suma de segmentos con $z \leq x$.

- $y \leq z$:

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= y - x, \\
d(x, z) + d(z, y) &= (z - x) + [-(y - z)] \\
&= (z - x) + (z - y) \\
&= [(z - y) + (y - x)] + (z - y) \quad \text{(por la propiedad anterior)} \\
&= (y - x) + 2(z - y),
\end{aligned}$$

por lo que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (figura 2.7).

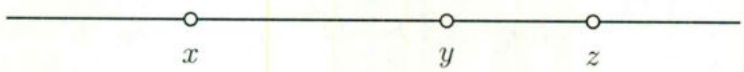


Figura 2.7: Suma de segmentos con $y \leq z$.

2.2. Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 Dados dos puntos en $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, la distancia euclidiana de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ denotada por $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ es

$$d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Esta distancia involucra el teorema de Pitágoras y en el caso de $n = 1$ coincide con el valor absoluto.

Observaciones:

- La distancia asigna a cada pareja de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un número no negativo, i.e., un número de $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

  Si $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$ se tendría

  $$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0.$$

  Luego

  $$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0$$

por lo que
$$(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 = \cdots = (x_n - y_n)^2 = 0,$$
ya que todos los sumandos son no negativos, obteniendo
$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad \cdots \qquad x_n = y_n.$$
Es decir, la única manera de que la distancia entre dos puntos sea cero, es cuando los puntos coinciden (o son los mismos, si se prefiere).

Claramente si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$, se tiene $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$ ya que $x_i = y_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ por lo que
$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = 0.$$
Por otra parte, si $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) > 0$, es decir,
$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} > 0$$
entonces existiría al menos un sumando distinto de cero, digamos, el i_0-ésimo con $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $(x_{i_0} - y_{i_0})^2 \neq 0$, por lo que se obtiene que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, pudiendo concluir que $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}}$.

Resumiendo, $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \geq 0$ y $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$ si y sólo si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

- La distancia d_e es una función simétrica, es decir $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d_e(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$.

  Esto es claro ya que $(x_i - y_i) = -(y_i - x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo que sus cuadrados son iguales,
  $$(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2,$$
  de modo que
  $$\begin{aligned} d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = d_e(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$
  es decir, es la misma distancia de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ que de $\overline{\mathbf{y}}$ a $\overline{\mathbf{x}}$.

- La distancia entre $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$ es la longitud del segmento rectilíneo que une a $\overline{\mathbf{x}}$ con $\overline{\mathbf{y}}$, es decir, si se toma cualquier otro trayectoria para ir de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ esta sería igual o mayor; matemáticamente se diría $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_e(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$ para cualquier punto $\overline{\mathbf{z}}$ en $\mathbb{R}^n$.

  Para mostrar la veracidad de esta aserción, se quiere probar que para cualesquiera tres vectores $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ y $\overline{\mathbf{z}}$ en $\mathbb{R}^n$,
  $$d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\| \leq \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{z}}\| + \|\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{y}}\| = d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_e(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

Los dos miembros de esta desigualdad son positivos o iguales a cero. Por lo que será suficiente probar que los cuadrados satisfacen la desigualdad deseada; en otras palabras,

$$\begin{aligned}
\|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{y}}\|^2 &= \|(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})\|^2\\
&= [(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})]\cdot[(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})]\\
&\quad \text{(donde } [(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})]\cdot[(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})] \text{ es el producto punto)}\\
&= (\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})\cdot(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})+2(\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}})\cdot(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})+(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})\cdot(\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}})\\
&\le \|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}}\|^2+2\,\|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}}\|\,\|\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}}\|+\|\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}}\|^2 \quad \text{(por la desigualdad de Schwarz)}\\
&= (\|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}}\|+\|\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}}\|)^2,
\end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
d_e(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) &= \|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{y}}\|\\
&= \|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}}+\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}}\|\\
&\le \|\overline{\mathbf{x}}-\overline{\mathbf{z}}\|+\|\overline{\mathbf{z}}-\overline{\mathbf{y}}\|\\
&= d_e(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}})+d_e(\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}}).
\end{aligned}$$

Por lo que $d_e(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) \le d_e(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}})+d_e(\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{y}})$, llamada la *desigualdad del triángulo,* la cual nos dice que la distancia más corta entre dos puntos es por la vía del segmento que los une. La igualdad se dará al tomar otro punto del segmento y en cualquier otro caso se obtendrá la desigualdad.

2.3. Distancia rectangular en $\mathbb{R}^n$ (o "urbana" cuando $n = 2$)

Definición 2.2 Dados dos puntos $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, la distancia rectangular de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ denotada por $d_r(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$ está dada por

$$d_r(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|\,.$$

Observaciones:

- Dado que esta función distancia esta definida con valores absolutos, se tiene que a cada pareja de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ le asigna un valor no negativa.

  ¿Qué deben de cumplir los puntos para que la distancia sea cero? Si $d_r(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = 0$, esto implicaría que

  $$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| = 0,$$

  y como cada sumando es no negativo, se concluye que

  $$|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \cdots = |x_n - y_n| = 0.$$

  Lo cual quiere decir que $x_i = y_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, luego $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$. Es claro que si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$, se tiene $d_r(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = 0$.

- Dado que el valor absoluto es simétrico, es decir $|a - b| = |b - a|$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene $d_r(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d_r(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$.

- Nuevamente se puede probar que la distancia definida entre $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$ es la menor, es decir, si se tomara otro camino, ésta sería igual o mayor. Matemáticamente, $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$.

Sean $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ y $\overline{\mathbf{z}}$ tres puntos en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| \\
&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| + \cdots + |x_n - z_n + z_n - y_n| \\
&\leq (|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|) + (|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|) + \cdots + (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) \\
&= (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + \cdots + |x_n - z_n|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| + \cdots + |z_n - y_n|) \\
&= d_r(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_r(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).
\end{aligned}$$

Ahora, considérese el caso $n = 2$ (figura 2.8):

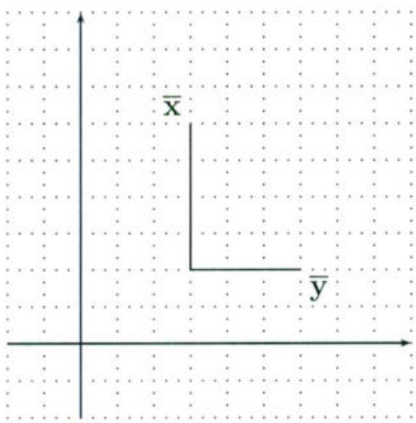


Figura 2.8: Distancia rectangular para $n = 2$.

- En caso que $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$ se encuentren en la misma recta horizontal o vertical, la distancia rectangular es la misma que la distancia euclidiana, y solamente en este caso se tendría la igualdad.

- Para ir de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ se tiene la distancia menor, aunque no se consigue de manera única, pues existen varios caminos. Contrario a la distancia euclidiana, en donde el único camino es por el segmento rectilíneo que une a $\overline{\mathbf{x}}$ con $\overline{\mathbf{y}}$. En este caso cualquier punto del rectángulo determinado por las rectas horizontales y verticales que pasan por $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$ se obtiene la misma distancia (figura 2.9).

  Es claro que si $\overline{\mathbf{z}}$ está fuera del rectángulo punteado de la figura 2.9, entonces $d_r(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_r(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) > d_r(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, como se ilustra en la figura 2.10.

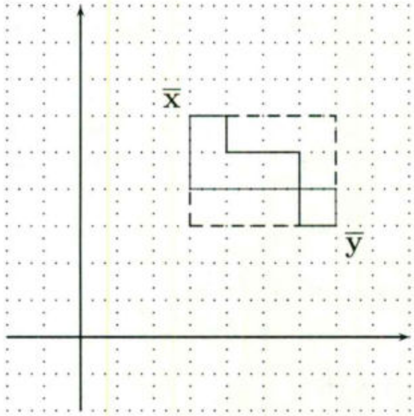


Figura 2.9: La distancia rectangular para $n = 2$ está bien definida.

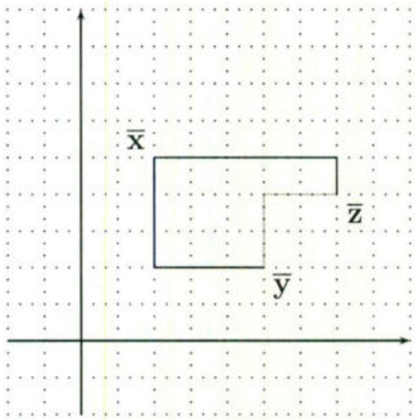


Figura 2.10: La distancia rectangular para $n = 2$ está bien definida.

- Esta distancia es también conocida como la *distancia del taxista,* ya que esta es la que usualmente se usa en una ciudad. Si se desea saber la distancia que hay entre un lugar (casa, escuela) y otro se contarían las cuadras que hay que recorrer. El plano cartesiano semeja a una ciudad ideal, pero esta distancia rectangular se adecúa más a la realidad que la distancia euclidiana.

2.4. Distancia máxima en $\mathbb{R}^n$ (maximal o "del máximo")

Definición 2.3 Dados $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos puntos en $\mathbb{R}^n$. Se define la distancia máxima como

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Observaciones:

- Esta función, por estar definida por medio del valor absoluto no puede ser negativa, va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a los $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ¿Cuándo es cero? Si $\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$ equivale a

  $$\text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} = 0,$$

  como todos son términos no negativos y el máximo de ellos es cero, se debe tener que

  $$0 = |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \cdots = |x_n - y_n|,$$

  es decir, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$, obteniendo $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

  Si $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}}$, entonces se tiene $x_1 \neq y_1$ o $x_2 \neq y_2$ o $\cdots$ o $x_n \neq y_n$, es decir, $|x_i - y_i| > 0$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo que $\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) > 0$.

  Si $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$, claramente

  $$\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \text{máx}\{0\} = 0.$$

- Como el valor absoluto tiene la propiedad de simetría, es decir $|a - b| = |b - a|$, para cualesquiera valores $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

  $$\begin{aligned}\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} \\ &= \text{máx}\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \ldots, |y_n - x_n|\} = \overline{d}(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}).\end{aligned}$$

  Es decir es lo mismo la distancia de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$, que la distancia de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$.

- Otra propiedad que tiene esta función distancia es que si se toma cualquier otro punto $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$,

  $$\begin{aligned}\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} \\ &\leq \text{máx}\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, \ldots, |x_n - z_n| + |z_n - y_n|\} \\ &\leq \text{máx}\{|x_1 - z_1|, \ldots, |x_n - z_n|\} + \text{máx}\{|z_1 - y_1|, \ldots, |z_n - y_n|\} \\ &= \overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + \overline{d}(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}});\end{aligned}$$

  luego, $\overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq \overline{d}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + \overline{d}(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ (figura 2.11), que se podría decir: Nuevamente si $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$ se encuentran en la misma recta horizontal o vertical, la distancia del máximo coincide con la distancia euclidiana. La pregunta natural es si este es el único caso, y la respuesta es afirmativa. Es claro que para que esta distancia coincida con la distancia rectangular es necesario que uno de los valores absolutos debe ser cero, por lo que cuando esto sucede, ocurre que los puntos se encuentran en la misma recta horizontal o vertical (ejercicio para el lector).

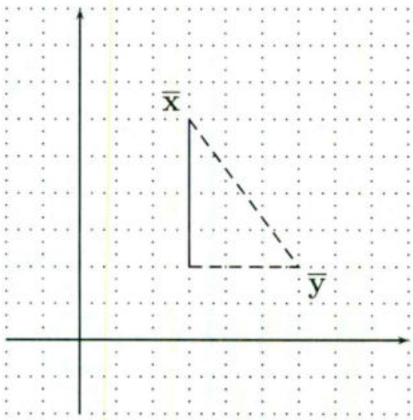


Figura 2.11: Distancia rectangular para $n = 2$.

2.5. Distancia mínima en $\mathbb{R}^n$ (minimal o "del mínimo")

Definición 2.4 Dados $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos puntos en $\mathbb{R}^n$ y d una función distancia cualquiera, se define la distancia mínima como $d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\}$.

Observaciones:

- Nótese que el valor máximo que se tiene para la distancia entre dos puntos es 1.
- Esta función, por estar definida como el mínimo entre dos cantidades no negativas, va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a los $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ¿Cuándo es cero? Si $d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$, equivale a preguntarse cuándo

  $$\text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} = 0;$$

  dado que $1 \neq 0$, necesariamente $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$, pero, dado que d es una distancia, se tiene que $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

  Si $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}}$, entonces se tiene $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) > 0$, por lo que

  $$d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} > 0.$$

  Si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$, claramente

  $$\text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} = 0,$$

  ya que $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$.
- Como $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$, se tiene que

  $$d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} = \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} = d_m(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}).$$

  Es decir, es la misma la distancia de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$ que la distancia de $\overline{\mathbf{x}}$ a $\overline{\mathbf{y}}$.

- Otra propiedad que tiene esta función distancia es que si se toma cualquier otro punto $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &= \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} \quad (\text{dado que } d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})) \\ &\leq \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\}. \end{aligned}$$

  - si $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq 1$, luego $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) \leq 1$ y $d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq 1$ por lo que

$$\begin{aligned} d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) &\leq \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} \\ &= d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_m(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) \\ &= \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}), 1\} + \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\} \\ &= d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_m(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

  - si $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) > 1$,

$$d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq 1 < \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}), 1\} + \text{mín}\{d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}), 1\}$$

    ya que si $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}})$, $d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$ son menores que uno, su suma es mayor que uno, en cualquier otro caso es claro la desigualdad por lo que

$$d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d_m(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

Considérese el caso $n = 2$ y la *distancia* d como la distancia euclidiana, d_e.

Considérese el caso particular $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$, el origen de $\mathbb{R}^2$, si $\overline{\mathbf{y}}$ es un punto que se encuentra en el interior o sobre la circunferencia de radio 1, $d_m(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$. En caso que $\overline{\mathbf{y}}$ se encuentre fuera de la circunferencia de radio 1, la $d_m(\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{y}}) = 1$. Es decir la $d_m(\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{y}})$ es igual para toda $\overline{\mathbf{y}}$ que se encuentre fuera de la circunferencia de radio 1 o sobre la circunferencia, e.g., $d(\overline{\mathbf{0}}, (\mathbf{0}, \mathbf{1})) = d(\overline{\mathbf{0}}, (\mathbf{80}, \mathbf{78}))$.

Podríamos considerar esta función distancia para un negocio de mensajería, donde el costo del envío, además del peso del paquete, se cobre dependiendo de la distancia en cierta zona por ejemplo en la zona metropolitana y fuera de ella un costo fijo.

2.6. Distancia discreta en $\mathbb{R}^n$ (o discrecional)

Definición 2.5 Dados dos puntos en $\mathbb{R}^n$, la distancia discreta, denotada por d^*, es

$$d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}, \\ 1 & \text{si } \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}} \end{cases}$$

(es bastante burda esta distancia).

Observaciones:

- Claramente esta relación es no negativa ya que $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \geq 0$ para cualquier pareja de puntos $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$. Si $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$, se tiene que $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$. Si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$, luego $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$.

- Es claro por la definición que $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d^*(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$.

- Se puede comprobar que como en los casos anteriores, que esta es la menor distancia entre $\overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{y}}$. Si se toma otro punto $\overline{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d^*(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$$

  ya que:

  - si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$,

$$d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \leq d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d + (\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$$

    para cualquier $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$.

  - si $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}}$ entonces $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 1$. En efecto, dado $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$ se tienen dos casos:

    - $\overline{\mathbf{z}} \neq \overline{\mathbf{x}}$ y $\overline{\mathbf{z}} \neq \overline{\mathbf{y}}$. Entonces $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) = 1$ y $d^*(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) = 1$, por lo que se obtendría la desigualdad estricta,

$$1 = d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) < 1 + 1 = d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d^*(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

    - $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{x}}$ o $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{y}}$. Se tiene la igualdad ya que, tomando sin pérdida de generalidad $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{y}}$,

$$1 = d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 1 + 0 = d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d^*(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

    Luego, $d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d^*(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d^*(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$.

Esta distancia discreta, solo nos informa cuando un punto es distinto de otro. Cualesquiera dos puntos están igual de 'distantes,' si consideramos el caso de $\mathbb{R}^2$, el punto $(1, 1)$ dista lo mismo que el $(80, 80)$ del origen.

2.7. Distancias y espacios métricos

Comparando las diferentes funciones distancias, observamos que los puntos que distan 1 del origen en $\mathbb{R}^2$ son en:

la distancia del máximo todos los puntos que se encuentran en el cuadrado cuyos vértices son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

la distancia euclidiana los puntos de la circunferencia clásica de radio 1.

la distancia urbana los puntos del rombo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$.

la distancia discreta los puntos cuya distancia es 1 al origen, son todos los puntos menos el mismo origen.

Aunque todas las figuras son circunferencias, es decir cumplen con la definición de circunferencia, todos los conjuntos son diferentes. Lo que las hace diferente es la *distancia* subyacente en cada caso.

Las distancias distintas implican formas diferentes (figura 2.12). Se ha visto con los ejemplos que hay que considerar aquella que se adapte a la problemática, pero independientemente de los diferentes casos se puede observar que se tienen propiedades comunes. Una distancia relaciona cualesquiera dos puntos en el conjunto X, ofreciendo información sobre "lo cerca" que se encuentra un punto del otro. Por ejemplo en el caso de que $X = \mathbb{Z}$, al tomar dos puntos cualesquiera no sólo se busca saber si son iguales o no, sino que tan 'alejados' o que tan 'cerca' están, para esto al tomar dos puntos z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$ y al considerar el valor absoluto de su diferencia, $|z_2 - z_1|$, se hablará de la distancia *natural.* Análogamente esta función distancia, valor absoluto, es la usual cuando $X = \mathbb{Q}$ o $X = \mathbb{R}$, aunque no es la única. Por lo que se puede dar ahora la definición de *espacio métrico*.

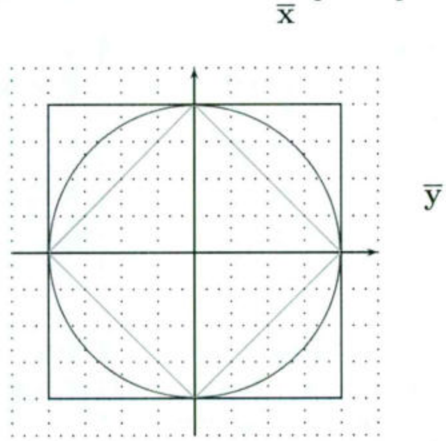


Figura 2.12: Una circunferencia según las métricas del máximo, euclidiana y rectangular.

Definición 2.6 Una *métrica* (o *función distancia*) definida en un conjunto X, es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \geq 0$ para cualesquiera $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in X$; $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$ si y sólo si $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

2. $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = d(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$ para cualesquiera $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in X$, es decir, es simétrica.

3. $d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) \leq d(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + d(\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}})$ para cualesquiera $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ y $\overline{\mathbf{z}}$ en X, la desigualdad del triángulo.

Definición 2.7 A la pareja $\langle X, d\rangle$, donde X es cualquier conjunto y d es una métrica definida sobre X, se le llama *espacio métrico*.

Se han considerado hasta el momento conjuntos formados por parejas o n-adas ordenadas, donde la función distancia surge de forma natural. La pregunta es ahora ¿dado un conjunto cualesquiera se puede definir una función distancia?

La definición es independiente de la naturaleza de los elementos que se van a considerar, pueden ser puntos de espacios ordinarios, $\mathbb{R}^n$, curvas, superficies, etc. Es la noción de distancia generalizada lo que da origen a la teoría de espacios abstractos los cuales fueron introducidos por primera vez por Fréchet, en 1904, y se ha extendido hasta nuestros días.

Ejemplo 2.1 Considérese

$$\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } I = [0,1]\}.$$

Aquí los 'puntos' son las funciones acotadas de I a $\mathbb{R}$ (recordemos que las funciones continuas con dominio cerrado son acotadas). ¿Cómo se podría definir en este conjunto una función distancia

$$\overline{\rho}\colon \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}?$$

Hay que considerar que deben de satisfacer las tres cualidades ya mencionadas. Es decir debe ser no negativa, ser cero si se trata de los mismos puntos, simétrica y satisfacer la desigualdad del triángulo.

Una manera de definirla es:

$$\overline{\rho}(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in I\},$$

donde d es la distancia euclidiana.

Notemos que $\overline{\rho}$ esta bien definida ya que f y g son funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado por lo que son acotadas y alcanzan su valor máximo y mínimo, por lo que $f-g$ también lo hará en algún punto $x' \in I$, es decir, existe un punto $x' \in I$ tal que $d(f(x'),g(x')) \geq d(f(x),g(x))$ para toda $x \in I$.

Tenemos que:

- $\overline{\rho}(f,g) \geq 0$ ya que $d(f(x),g(x)) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si

  $$\overline{\rho}(f,g) = 0 = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

  es decir, $d(f(x),g(x)) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, obteniendo $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que $f = g$.

- $\overline{\rho}(f,g) = \overline{\rho}(g,f)$ ya que $d(f(x),g(x)) = d(g(x),f(x))$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que

  $$\sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\{d(g(x),f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

- $\overline{\rho}(f,g) \leq \overline{\rho}(f,h) + \overline{\rho}(h,g)$ para toda $h \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, debido a que la distancia euclidiana satisface la desigualdad del triángulo

$$d(f(x),g(x)) \leq d(f(x),h(x)) + d(h(x),g(x))$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, así que

$$\begin{aligned}\sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} &\leq \sup\{d(f(x),h(x)) + d(h(x),g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}\\ &\leq \sup\{d(f(x),h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} + \sup\{d(h(x),g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}\\ &= \overline{\rho}(f,h) + \overline{\rho}(h,g).\end{aligned}$$

¿Cómo sería, dada una función f, el conjunto de funciones cuya distancia es 1 a la función f? Es el conjunto de aquellas funciones cuya gráfica se encuentre dentro de la banda definida por e intersecte (al menos en un punto) a las gráficas de las funciones f^{++} y f^{--} definidas por $f^{++}(x) = f(x) + 1$ y $f^{--}(x) = f(x) - 1$ en al menos un punto (figura 2.13).

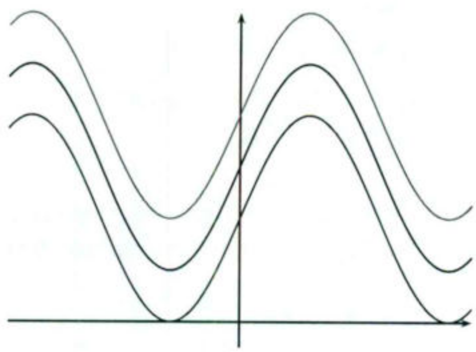


Figura 2.13: Funciones que yacen en la banda definida por $f^{++}(x) = f(x) + 1$ y $f^{--}(x) = f(x) - 1$.

Ejemplo 2.2 Considérese el siguiente conjunto

$$\mathcal{H}(I) = \{A = [a_1, a_2] \mid a_1 \leq a_2 \text{ y } a_1, a_2 \in [0,1]\}.$$

Ahora los puntos serán intervalos cerrados que se encuentran contenidos en el intervalo $[0,1]$ obsérvese que $\{p\}$ tal que $p \in [0,1]$ también es un punto de este conjunto.

Sea $h\colon \mathcal{H}(I) \times \mathcal{H}(I) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(A,B) = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

donde $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$.

- $h(A,B) \geq 0$ ya que se trata del máximo entre dos valores absolutos.

  Además, si $A = B$ (es decir, $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$), tenemos

  $$h(A,B) = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = \text{máx}\{0,0\} = 0.$$

  Asimismo, si

  $$h(A,B) = 0 = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

  entonces $|a_1 - b_1| = |a_2 - b_2| = 0$, por lo que $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$, es decir, $A = B$.

- $h(A,B) = h(B,A)$ ya que

  $$\text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} = \text{máx}\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|\}$$

  pues se trata de valores absolutos.

- $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$ para toda $A, B, C \in \mathcal{H}(I)$ pues

  $$\begin{aligned} h(A,B) &= \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \\ &\leq \text{máx}\{|a_1 - c_1| + |c_1 - b_1|, |a_2 - c_2| + |c_2 - b_2|\} \\ &\leq \text{máx}\{|a_1 - c_1|, |a_2 - c_2|\} + \text{máx}\{|c_1 - b_1|, |c_2 - b_2|\} \\ &= h(A,C) + h(C,B). \end{aligned}$$

Así pues, se puede de hablar de un espacio métrico. A este conjunto se le puede dar la siguiente representación: a cada intervalo $A = [a_1, a_2]$ se le asociará un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ por medio de la correspondencia

$$[a_1, a_2] \mapsto \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, a_2 - a_1\right),$$

es decir, la primera coordenada es el punto medio de dicho intervalo y la segunda coordenada es su propia longitud.

Notemos que:

- A los intervalos que constan de un sólo punto, digamos, $[a_1, a_1] = \{a_1\}$ se le asocia el mismo, $(a_1, 0)$.
- Al intervalo $[0,1]$ se le asociará el punto $(\frac{1}{2}, 1)$.
- Al tomar un punto en I, digamos, b, sea $e = \text{mín}\{b, 1-b\}$, por lo que cualquier intervalo cuyo punto b sea su punto medio, su punto asociado estará en el segmento que une $(b,0)$ y $(b, 2e)$.

Por lo que $\mathcal{H}(I)$ y el triángulo formado por $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ tienen los mismos elementos. ¿La distancia definida en $\mathcal{H}(I)$ coincide con la distancia euclidiana entre los puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Si no, con cuál distancia coincide?

Ahora ya resulta que la posibilidad de definir una función distancia sobre un conjunto parece bastante restrictiva. La geometría contemporánea no se restringe por las propiedades métricas, es la continuidad quien juega un papel en los aspectos más abstractos de las figuras: las *propiedades topológicas*. La noción de cercanía entre dos puntos es esencial en la continuidad y así los geómetras contemporáneos consideran espacios de dimensiones infinitas y llegan en algunos casos, hasta distinguirlos.

2.8. Ejercicios

1. Sea $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es decir $X = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. Dar una función distancia.

2. Sean d_1 y d_2 dos métricas sobre $\mathbb{R}$ y sea $\tilde{d}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{d}(x,y) = d_1(x,y)+d_2(x,y)$. Demostrar que $\tilde{d}$ es una métrica.

3. Sea $d\colon F(\mathbb{R},\mathbb{R})\times F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = 0$ si $f = g$ y $d(f,g) = 1/n$ si $f \neq g$, donde $n = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid f(k) \neq g(k)\}$. Demostrar que es una métrica.

4. Dar un ejemplo de distancia en el conjunto de los números naturales distinta al valor absoluto.

5. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Si $x = y$ entonces $d(x,y) = 0$; en otro caso, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x - y$ es divisible por 10^{m-1}, pero que no es divisible por 10^m. Luego se define $d(x,y) = m^{-1}$. Por ejemplo:

   $d(123, 4623) = \frac{1}{3}$.

   $d(10,0) = \frac{1}{2}$.

   $d(3,7) = 1$.

   $d(3,-7) = \frac{1}{2}$.

   Demostrar que define una métrica en $\mathbb{Z}$ y demostrar que

   $$\lim_{n\to\infty} 10^n = 0.$$

6. Representar $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) < 1\}$, con las diferentes distancias. Compararlas.

7. Dadas dos matrices A y B, demostrar que

   $$d(A,B) = \sup_{\overline{\mathrm{x}}\neq\overline{0}} \frac{\|(A-B)x\|}{\|x\|}$$

   es una distancia.

8. En $\mathbb{R}^2$ y considérese la familia de funciones distancias

$$d_n = \sqrt[n]{|x_1 - x_2|^n + |y_1 - y_2|^n}$$

dar diferentes valores de n, y trazar la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Demostrar que para un punto fijo (x, y), la función $\|(x, y)\| = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ es decreciente en n.

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|(x, y)\|_n = \|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$. ¿Qué se puede concluir?

Capítulo 3

Abiertos

"Lo importante para la ciencia es modificar
y cambiar ideas conforme avanza."

Herbert Spencer (1820-1903)

Al leer las hipótesis de algunos teoremas, proposiciones o definiciones en matemáticas (digamos, en cálculo), aparecen frecuentemente las palabras "valor absoluto", "intervalo abierto", "intervalo cerrado", "conjunto abierto", "interior", los cuales tienen una fuerte relación con la función distancia; ¿cuál es esta relación?

Tomemos, por ejemplo, la definición de límite en el cálculo de una variable: recordemos lo que significa que una función f se acerque al valor L cuando x *tiende a* a. Intuitivamente la función f tiende hacia el límite L cuando x *se encuentra cerca de* a pero es diferente de la misma, es decir, $f(x)$ *se aproxima a* L tanto como se quiera haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a. Al hablar de que "$f(x)$ se aproxima a L" se habla de "distancia", a saber, $|f(x) - L|$. Asimismo, cuando se menciona que "x se encuentra cerca de a" tanto como se quiera también se habla de distancia, y lo mismo al hablar que "x tiende a a," la distancia de x a a es arbitrariamente pequeña aunque mayor que cero; matemáticamente se define:

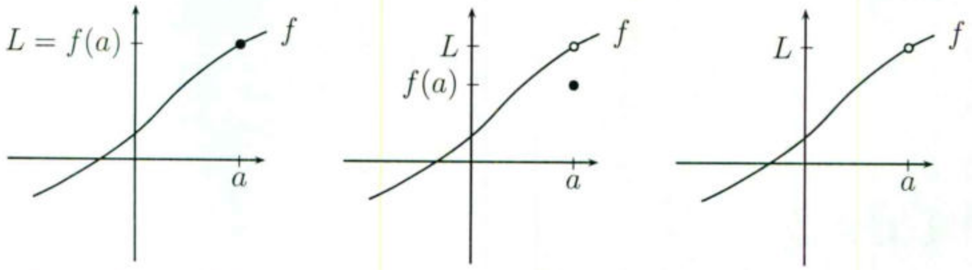
Definición 3.1 La función f tiende hacia el límite L en a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si para toda $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

El límite de una función puede coincidir con el valor de la función en a (figura 3.1(a)), puede no coincidir con $f(a)$ (figura 3.1(b)) o puede existir aún si la función no está definida en a (figura 3.1(c)).

Es importante notar que para esta definición la distancia juega un papel crucial pues básicamente se establece que



(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (c) $f(a)$ no existe.

Figura 3.1: Límite de una función f.

"$0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$."

En la figura 3.2 vemos que al no satisfacerse este requerimiento el límite no existe.

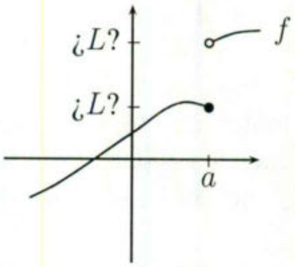


Figura 3.2: El límite de la función f no existe en a.

Con ayuda de la definición de límite se puede a su vez definir cuándo es que una función f es continua en un punto a (figura 3.1(a)):

Definición 3.2 f es continua en a siempre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Igualmente, si observamos la definición de continuidad para funciones de varias variables, es claro que la función distancia esta involucrada de manera importante. Por ejemplo para dos variables:

Definición 3.3 Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que F es continua en $P_0 = (\xi, \eta)$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$ para todo punto $P = (x, y)$ en el dominio de F que satisfaga $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta$ (la distancia de (x, y) a (ξ, η) es menor que δ), es decir, para toda P que se encuentre en $B_d(P_0, \delta)$.

Otro concepto importante y clásico en el que interviene de manera directa la noción de "aproximación" y "cercanía" es la noción de derivada de una función en un punto.

Definición 3.4 Una función f es derivable en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. *Si* el límite existe, lo denotamos por $f'(a)$.

Es posible interpretar geométricamente la definición 3.4, como se muestra en la figura 3.3. Recordemos que al definir la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $P = (a, f(a))$, se consideran rectas secantes que pasan por el punto P y por un segundo punto $Q = (a+h, f(a+h))$ sobre la curva que se encuentre "cercano" a P, y se traza la línea recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que une a los dos puntos. Si se mueve el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, y se van obteniendo las pendientes

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

de estas rectas secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ se puede obtener la pendiente de la recta al hacer $h \to 0$, i.e., calculándose el límite cuando $h \to 0$. Nuevamente se ve involucrada la función distancia: al mover Q hacia P, es decir, al hacer la distancia entre P y Q tan pequeña como se quiera, "aproximándose" la secante a una posición límite *la cual es independiente del lado del cual Q tiende a P*. Esta posición límite de la secante es la *tangente*. La aseveración de que exista tal posición límite de la secante es equivalente a la suposición de que la curva posee una tangente definida en el punto P.

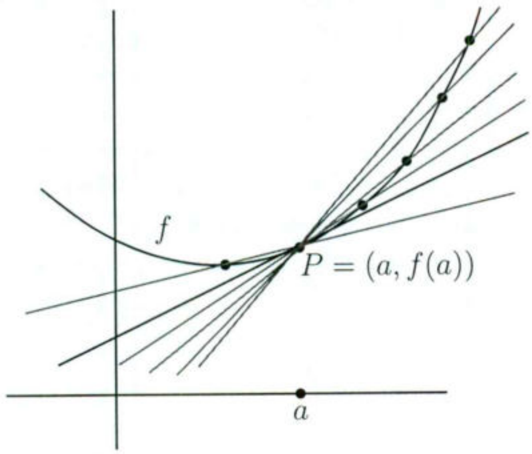


Figura 3.3: La tangente en el punto P puede aproximarse por una sucesión de secantes $\overleftrightarrow{PQ}$ con "Q cercano a P."

Al definir la derivada de una función f en algún punto a, debemos observar que se está hablando de un límite, así que está implícita la afirmación:

"$0 < |h| < \delta$ implica

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon,"$$

donde el signo de h puede ser tanto positivo como negativo, es decir, podemos tener tanto $a+h < a$ como $a + h > a$. Esto significa que una condición necesaria *para poder definir la derivada* es indispensable hablar de que la función f este definida en un *intervalo abierto* que contenga a a. Por condición necesaria queremos decir que si no se tiene definida la función en un abierto que contenga a a, la derivada de la función en a no existirá, pero no hay nada que garantice que al estar definida f en un abierto exista su derivada f'.

El concepto de distancia también juega un papel importante en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ para $n > 2$. Para ilustrar este hecho recordemos el siguiente:

Teorema 3.1 *Si una función $f(x,y)$ tiene derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en un abierto $R \subset \mathbb{R}^2$, y estas derivadas satisfacen para cualquier punto en (x,y) de R las desigualdades*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < M, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < M,$$

donde M es independiente de x y y, entonces $f(x,y)$ es continua en R.

Se observa la idea de distancia al acotar los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para cualquier punto (x,y) en R y en la definición misma de derivada parcial.

Si bien es cierto cuando la función es de una variable, la existencia de la derivada en un punto implica la continuidad de la función en dicho punto. En el caso que la función f, sea una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales no implica la continuidad de la función. Geométricamente hablando, la existencia de las derivadas parciales se restringe al comportamiento de la función en dirección del eje x y del eje y y no en otras direcciones.

Análogos al teorema 3.1, se pueden encontrar muchos teoremas donde se hace referencia a conjuntos "abiertos". Para conocer el comportamiento de una función en un determinado punto x_0, es suficiente con conocer el comportamiento en puntos *cercanos* a x_0; al hablar de cercanía, se habla de "distancia" y es por medio de ésta que se define un "conjunto abierto" en un espacio métrico. ¿Será posible definir abiertos en un contexto más general?

3.1. Discos abiertos

En los teoremas mencionados anteriormente se habla de distancias, en particular de la distancia euclidiana: haciendo referencia de todos aquellos puntos cuya distancia a a o a (ξ,η) fueran menor que δ, lo cual implicaba por otro lado que la *distancia euclidiana* entre $f(a)$ y $f(x)$ o $f(\xi,\eta)$ y $f(x,y)$ podía hacerse tan pequeña como se quisiera, menor que el tan nombrado número ε. Nótese que en ambos casos se considera la desigualdad estricta.

En ambos casos se habla de la distancia euclidiana; ¿qué sucede si se considera otra función distancia? Al considerar el valor absoluto, $|x-a| < \delta$ no es más que todos aquellos valores de x tales que $d_e(x,a) < \delta$, y análogamente para $d_e((\xi,\eta),(x,y)) < \delta$; estas afirmaciones se pueden generalizar para cualquier función distancia d por medio de:

Definición 3.5 El conjunto

$$B_d(x,r) = \{y \mid d(x,y) < r,\ r > 0\},$$

al que se le llamará *disco abierto* de centro x y radio $r > 0$.

A este conjunto $B_d(x,r)$ de todos los puntos que distan del punto x menos que r con la métrica d se le denomina *disco abierto,* debido a que al tomar la desigualdad estricta $d(x,y) < r$ se tiene de esta manera que para cada punto y en él, se podrá encontrar un disco centrado en dicho punto que este contenido totalmente en el disco $B_d(x,r)$. Este conjunto es necesario en muchas ocasiones en las definiciones de las propiedades de las funciones. Estos discos dependen de la función distancia por lo que para cada función distancia este disco representará un conjunto distinto.

Figura 3.4: El conjunto $B_d(x,r)$ puede tener diversas formas dependiendo de la métrica d, y dos puntos x y y pueden estar cercanos, aunque no sea en el sentido euclidiano.

Es importante recordar que el objetivo de introducir el concepto de disco abierto es el de poder generalizar la idea de "puntos cercanos" por medio de los conjuntos "abiertos"; por ende podremos generalizar también la definición de "continuidad." Recordemos que "continuidad" significa, grosso modo, que para todos los puntos y cercanos a un punto x dado el valor de la función en dichos puntos y difiera tan poco como se quiera del valor de la función en el punto x dado, de lo cual se hablará en el capítulo siguiente. Si se tiene una función distancia, se puede saber que tan cercano esta un punto de otro, sin olvidar que la "cercanía" dependerá de la función distancia.

Pero, no todos los espacios tendrán definida una función distancia; entonces ¿cómo saber ahí si puntos x y y cercanos van a dar a puntos $f(x)$ y $f(y)$ cercanos bajo cierta transformación f? ¿cómo poder definir continuidad?

Es por esta razón que primero habrá que estudiar la definición de "conjunto abierto" en un espacio métrico; se observarán las propiedades que estos conjuntos abiertos tienen en común y así podremos generalizar este concepto para cualquier espacio.

Definición 3.6 Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico. Un conjunto A es *abierto* si para cada punto x del conjunto A, existe un número positivo ε tal que $B_d(x,\varepsilon) \subset A$.

Con estos abiertos se tendrá la manera de "acercarse a un punto tanto como se quiera" y así poder garantizar cuando dos puntos se encuentran "cercanos" o no. Dado que los "abiertos" están definidos por medio de discos, en general, y estos dependen de la función distancia, se darán algunos ejemplos de discos $B_d(x_0,\varepsilon)$ con las diferentes distancias.

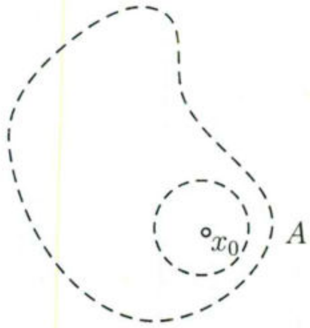


Figura 3.5: Para todo punto x de un conjunto abierto A podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset A$.

Ejemplo 3.1 Sea $\langle \mathbb{Z}, d \rangle$ el espacio métrico de los números enteros con la distancia del valor absoluto y sean $x_0 = 18$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos que

$$B_d(18, \varepsilon) = \begin{cases} \{18\}, & \varepsilon \leq 1, \\ \{[\![17 - \varepsilon]\!], \dots, 17, 18, 19, \dots, [\![18 + \varepsilon]\!]\}, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

donde $[\![\cdot]\!]$ representa la parte entera.

Es por esto que se afirma que cualquier subconjunto de los enteros es un conjunto abierto (¿por qué?).

Ejemplo 3.2 Sea $\langle \mathbb{R}, d_e \rangle$ el espacio métrico de los reales con la distancia euclidiana. Tenemos entonces

$$B_d(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\},$$

donde d es la distancia euclidiana; este disco abierto se ilustra en la figura 3.6. Nótese que los

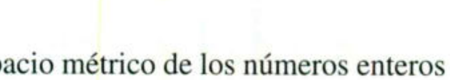


Figura 3.6: Intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$.

enteros, inmersos en $\mathbb{R}$, no son un conjunto abierto (¿por qué? ¿cuál es la diferencia con el ejemplo 3.1?).

Ejemplo 3.3 . Sea $\langle \mathbb{R}^2, d_e \rangle$, donde $d_e(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Sean $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $\overline{\mathbf{x}}_0 = (0, 0)$. Los puntos en el interior de la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y centro $(0, 0)$ son

$$B_{d_e}(0, \tfrac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_e(x, 0) < \tfrac{1}{2}\};$$

este disco abierto se ilustra en la figura 3.7.

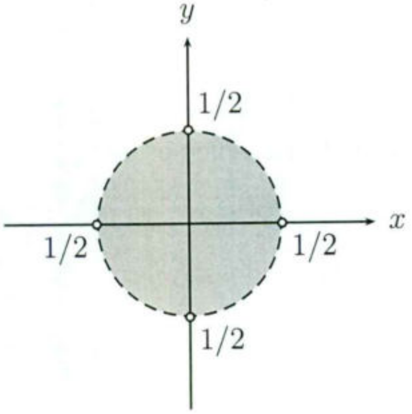


Figura 3.7: Disco abierto $B_{d_e}(0, \frac{1}{2})$.

Ejemplo 3.4 Si ahora se considera, $\langle \mathbb{R}^2, d_r \rangle$, donde $d_r(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ entonces

$$B_{d_r}(0, \tfrac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_m(x, 0) < \tfrac{1}{2}\};$$

este disco abierto se ilustra en la figura 3.8. Este disco está formado por los puntos en el interior

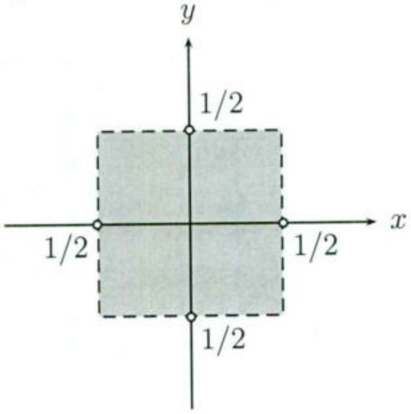


Figura 3.8: Disco abierto $B_{d_r}(0, \frac{1}{2})$.

del cuadrado cuyos vértices son $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Los discos abiertos en los ejemplos 3.3 y 3.4 son conjuntos diferentes, ¿cómo serán los discos en la métrica rectangular? ¿los conjuntos abiertos también serán diferentes? ¿Si un conjunto es abierto en $(\mathbb{R}^2, d_r)$ también será abierto en $(\mathbb{R}^2, d_e)$, y viceversa?

Ejemplo 3.5 Consideremos nuevamente $\langle \mathcal{H}(I), h \rangle$ del ejemplo 2.2, en el cual

$$\mathcal{H}(I) = \{A = [a_1, a_2] \mid a_1 \leq a_2 \text{ y } a_1, a_2 \in [0, 1]\}$$

tiene la métrica

$$h(A,B) = \text{máx}\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

donde $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$ en $\mathcal{H}(I)$. Tenemos que

$$B_h([0,0], \tfrac{1}{2}) = \{A \in \mathcal{H}(I) \mid h([0,0], A) < \tfrac{1}{2}\},$$

donde $h([0,0], A) = \text{máx}\{|0 - a_1|, |0 - a_2|\} = \text{máx}\{a_1, a_2\} < \frac{1}{2}$, de modo que

$$B_h([0,0], \tfrac{1}{2}) = \{[a_1, a_2] \mid a_1 \leq a_2 \text{ y } a_1, a_2 \in [0, \tfrac{1}{2})\}.$$

En el triángulo determinado por los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, este disco $B_h([0,0], \frac{1}{2})$ es repre-

Figura 3.9: Intervalo $[0, \frac{1}{2})$.

sentado por la región señalada en la figura 3.10.

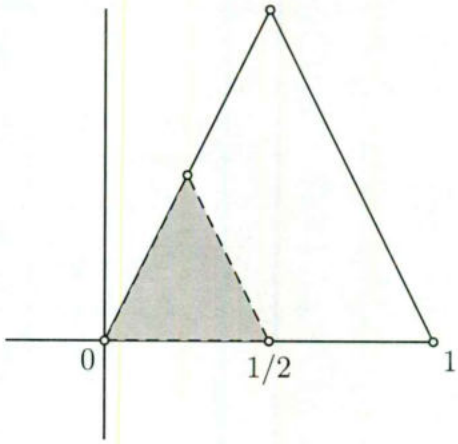


Figura 3.10: Bola $B_h([0,0], \frac{1}{2})$ en el triángulo determinado por los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

Consideremos otro ejemplo con $A = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $\varepsilon = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} B_h(A, \tfrac{1}{4}) &= \{B \in \mathcal{H}(I) \mid h(A,B) < \tfrac{1}{4}\} \\ &= \{[b_1, b_2] \mid \left|\tfrac{1}{2} - b_1\right| < \tfrac{1}{4}, \left|\tfrac{3}{4} - b_2\right| < \tfrac{1}{4}, b_1 \leq b_2\} \\ &= \{[b_1, b_2] \mid \tfrac{1}{4} < b_1 < \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2} - b_2 < 1, b_1 \leq b_2\}. \end{aligned}$$

Utilizando la relación de este conjunto con el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, los puntos que se encuentran en dicho disco son los puntos que se encuentran en la parte sombreada y punteada del triángulo de la figura 3.11.

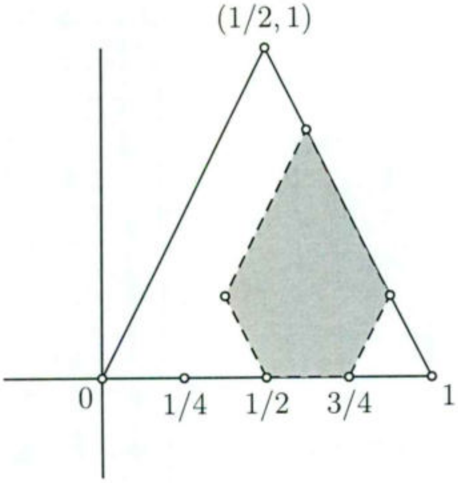


Figura 3.11: Bola $B_h([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \frac{1}{4})$ en el triángulo determinado por los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

Observaciones:

- Si $\langle X, d\rangle$ es un espacio métrico, ha de notarse que si se toma cualquier punto en $B_d(x_0, \varepsilon)$, digamos y_0, siempre se podrá encontrar un subconjunto de X, de la misma forma, $B_d(y_0, \varepsilon')$ con $\varepsilon' = \varepsilon - d(x_0, y_0) > 0$, ya que $d(x_0, y_0) < \varepsilon$. Además, $B_d(y_0, \varepsilon') \subset B_d(x_0, \varepsilon)$, ya que dado cualquier punto $z \in B_d(y_0, \varepsilon')$, se tiene por la desigualdad del triángulo

  $$d(x_0, z) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, z) < d(x_0, y_0) + \varepsilon' = d(x_0, y_0) + (\varepsilon - d(x_0, y_0)) = \varepsilon.$$

  En consecuencia, se podría decir que $B_d(x_0, \varepsilon)$, es la unión de $B_d(y_i, \varepsilon_i)$, donde las $y_i \in B_d(x_0, \varepsilon)$ para toda i y $\varepsilon_i = \varepsilon - d(x_0, y_i)$. En otras palabras, como era de esperarse, los discos $B_d(x_0, \varepsilon)$ son conjuntos abiertos por sí mismos. Por ello es que se considera la desigualdad estricta, ya que si no se tomara así y se tomara la desigualdad "menor o igual", $\leq$, no siempre sería válido lo dicho anteriormente, como se muestra en la figura 3.13. En este caso se tendría que $\varepsilon - d(x_0, x) = 0$, por lo que sería imposible encontrar la $\varepsilon' > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon')$ este contenida en la $B_d(x_0, \varepsilon)$.

- Si dos de estos discos se intersectan, digamos $B_d(x_0, \varepsilon_0)$ y $B_d(x_1, \varepsilon_1)$, y $y \in B_d(x_0, \varepsilon_0) \cap B_d(x_1, \varepsilon_1)$ al considerar

  $$\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_0 - d(x_0, y), \varepsilon_1 - d(x_1, y)\}$$

  se puede comprobar que $B_d(y, \varepsilon) \subset B_d(x_0, \varepsilon_0) \cap B_d(x_1, \varepsilon_1)$. Es decir, que se tiene la propiedad de que para cada punto de la intersección se puede encontrar un disco que este contenido en la intersección. Dado que se considera el mínimo (finito) de dos números positivos, este será mayor que cero, por lo que también se puede considerar una intersección finita de discos, cuya intersección sea distinta del vacío.

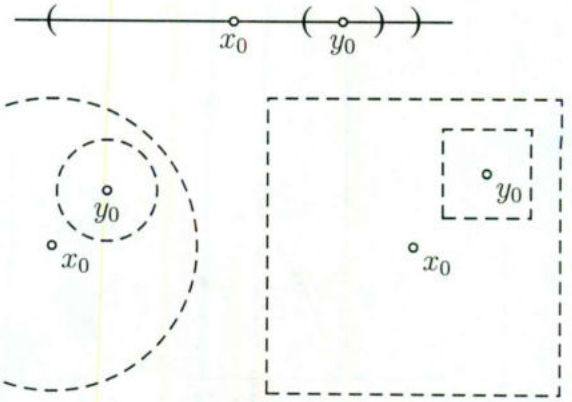


Figura 3.12: Tres casos en los que se ilustra $B_d(y_0, \varepsilon') \subset B_d(x_0, \varepsilon)$.

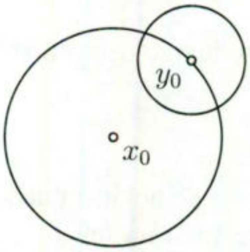


Figura 3.13: Al permitirse la desigualdad no estricta el punto y_0 no existe una bola centrada en y_0 contenida en la bola centrada en x_0.

¿Cómo sería la intersección de dos abiertos en el caso de $(\mathcal{H}(I), h)$?

Ejemplo 3.6 Sea $\langle X, d^* \rangle$ donde X es cualquier conjunto y d^* es la distancia discreta. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$B_d(x, \varepsilon) = \begin{cases} x, & \varepsilon \leq 1 \\ X, & \varepsilon > 1. \end{cases}$$

En otras palabras, los discos abiertos son los conjuntos de un sólo elemento, cada uno de los elementos de X, o todo X.

3.2. Abiertos

3.2.1. Definición

Ahora con ayuda de la función distancia y los discos abiertos se define lo que es un conjunto abierto.

En el caso de espacios métricos $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclidiana, se tiene la definición:

Figura 3.14: Intersección de dos abiertos en $\mathbb{R}$.

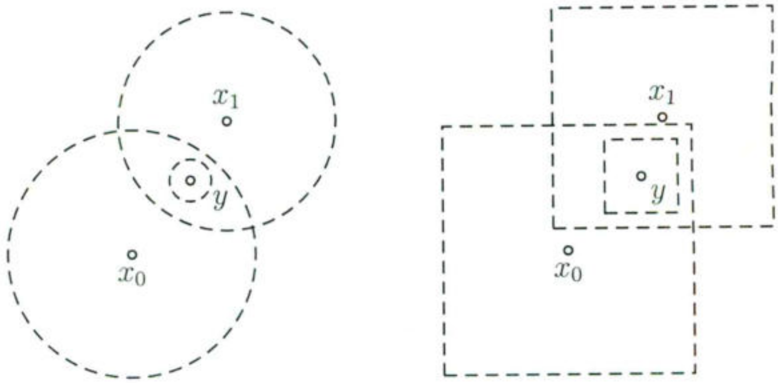


Figura 3.15: Intersección de dos abiertos en $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.7 Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto en $(\mathbb{R}^n, d_e)$ si para toda $x \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_e}(x, \delta) \subset U$.

3.2.2. Ejemplos

Ejemplo 3.7 Los intervalos $(a, b) \subset \mathbb{R}$, son abiertos con la distancia euclidiana. Recordemos que los intervalos abiertos son, por definición, de la forma

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$$

dado cualquier punto $x_0 \in (a, b)$, se puede encontrar una $\varepsilon > 0$, tal que

$$\varepsilon \leq \text{mín}\{|a - x_0|\,, |b - x_0|\},$$

es decir, tal que

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = B_d(x_0, r),$$

donde d es la distancia euclidiana, está contenido en el intervalo. Tenemos que ε es mayor que cero ya que x_0 es distinto de a y de b. Se puede hablar de puntos a la derecha o a la izquierda de dicho punto, para todo punto en el intervalo. Lo cual nos indica que se puede uno acercar a un punto tanto por la izquierda como por la derecha, así que se puede ver como se comporta la función a la izquierda y a la derecha de este punto.

Ejemplo 3.8 El conjunto $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$, según la distancia euclidiana. En efecto, $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es un conjunto abierto ya que dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $\varepsilon > 0$, el disco $B_d(1/n, \varepsilon) = (1/n - \varepsilon, 1/n - \varepsilon)$ contiene un números irracionales y también racionales que no son de la forma $1/n$, por lo que $B_d(1/n, \varepsilon) \not\subseteq K$.

¿Es $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abierto en $\mathbb{R}$, según la distancia discreta o del máximo?

Ejemplo 3.9 Sea $A = \mathbb{R} \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. ¿Es A abierto en $\mathbb{R}$, según la distancia euclidiana? Si $a \in A$ entonces $d(a, p_i) > 0$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $\varepsilon_i = d(a, p_i)/2$ y definamos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$. Podemos ver que $B_d(a, \varepsilon) \subset A$ ya que $d(a, p_i) = \varepsilon_i > \varepsilon$ para toda p_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, A es abierto.

¿El conjunto de los racionales es abierto en $\mathbb{R}$, según la distancia euclidiana?.

Ejemplo 3.10 Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclidiana. Demostraremos que el semiplano

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4\}$$

que se ilustra en la figura 3.16 es abierto en $\mathbb{R}^2$, según la distancia euclidiana. Si $P_0 = (x_0, y_0) \in H$ entonces $x_0 > 4$. Sea m la gráfica de la recta $x = 4$. La distancia del punto a la recta es $d(P_0, m) = x_0 - 4 > 0$, de modo que haciendo

$$\delta = \frac{d(P_0, m)}{2} > 0$$

podemos afirmar que $B_d(P_0, \delta) \subset H$.

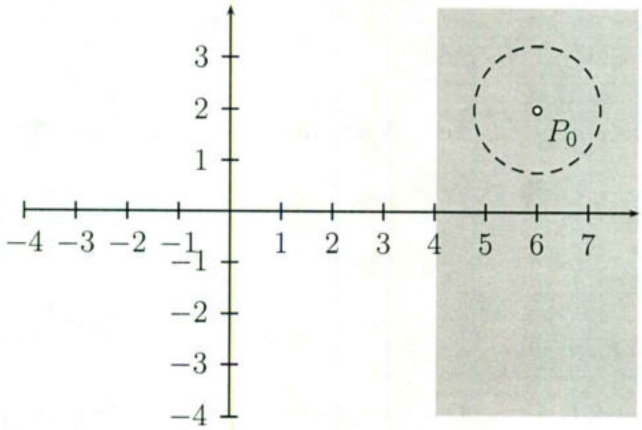


Figura 3.16: El semiplano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4\}$ es abierto con la distancia euclidiana.

En el siguiente ejemplo se considera otra función distancia.

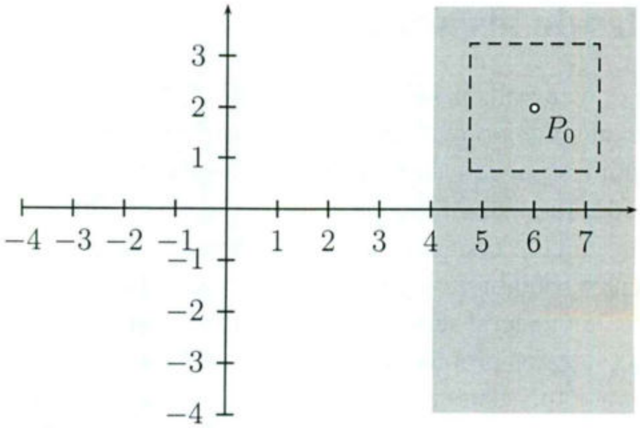


Figura 3.17: El semiplano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4\}$ es abierto con la distancia del máximo.

Ejemplo 3.11 La demostración de que el semiplano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 4\}$ también es abierto en $\mathbb{R}^2$ según la distancia del máximo (como se muestra en la figura 3.17) es análoga a la dada en el ejemplo 3.10.

¿Será cierto que todo abierto de $\mathbb{R}^2$ con respecto a la distancia euclidiana es abierto con respecto a la distancia del máximo? ¿Y con respecto a otras distancias?

Ejemplo 3.12 La gráfica de la recta $y = 2$, que se muestra en la figura 3.18, no es un abierto en $\mathbb{R}^2$ según la distancia euclidiana. Esto se debe a que dado cualquier punto P_0 en la gráfica de

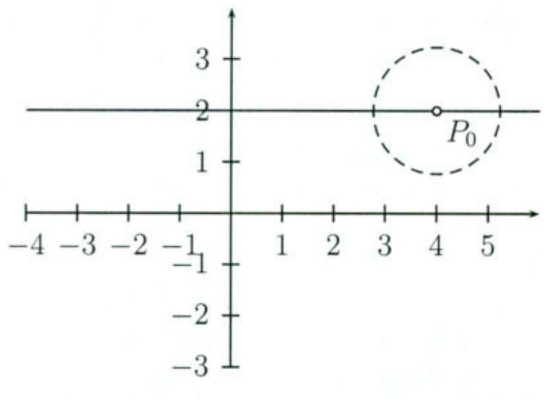


Figura 3.18: La gráfica de $y = 2$ no es abierta con la distancia euclidiana.

coordenadas $(x_0, 2)$ y para cualquier $\delta > 0$, el disco $B_e(P_0, \delta)$ contiene al punto $(x_0, 2 + \delta/2)$ que no pertenece a la gráfica de la recta $y = 2$. En consecuencia, la gráfica no es abierta.

3.3. Propiedades de los abiertos

Se tiene la intención de generalizar la idea de "abiertos", debido a que de esta forma se podrá hablar de continuidad en un contexto más amplio; en caso de tener una función distancia se puede hablar de cercanía: dos puntos pueden estar "cercanos" en alguna distancia mientras que con otra distancia pudiera no suceder lo mismo (¿puede el lector dar un ejemplo de esta afirmación?). Pero independientemente de la función distancia, los discos abiertos tienen las dos propiedades que se mencionaron anteriormente: son abiertos y sus intersecciones finitas también son abiertas, por lo que al hablar de "abiertos" en general será necesario hablar de subconjuntos que satisfagan ciertas propiedades; ¿serán sólo estas dos propiedades las que se buscan?

Si se pudieran mostrar explícitamente todos los conjuntos abiertos es obvio que para cada punto en estos abiertos existe un abierto (el mismo abierto) que contiene al punto y esta contenido en el abierto. Pero en caso de no ser posible mostrar uno por uno a los conjuntos abiertos de un espacio, como en la mayoría de los casos, se podría usar la métrica euclidiana o cualquier otra función distancia para definir los abiertos por medio de los discos abiertos. ¿Pero que hacer si no se tiene disponible una función distancia? Entonces será necesario dar las condiciones para que un subconjunto se considere "abierto," y que para cada subconjunto "abierto" que se tenga y para cada punto x en el mismo (al que llamamos *punto interior*), exista otro subconjunto "abierto" que contenga al punto. Asimismo, necesitamos:

- Que al intersectar dos de esos subconjuntos "abiertos" (o un número finito de ellos), si esta intersección no es vacía, sea a su vez abierta, es decir, que para cada punto en la intersección exista un subconjunto "abierto" que contenga al punto y que éste esté contenido en la intersección.

- Que al unir arbitrariamente subconjuntos "abiertos" (un número finito o no), que para cada punto exista un subconjunto "abierto" (existe ya que este punto esta en un abierto) que contenga al punto y que éste esté contenido en la unión.

Por otro lado, es necesario que estas propiedades abarquen un amplio espectro de estructuras distintas, es decir, que se apliquen a conjuntos finitos, infinitos (tanto numerables como no numerables). Asimismo, debe ser posible construir nuevos conjuntos, como el producto, el cociente, etc. y sobretodo definir una *función continua.*

Esta idea de que cada punto del espacio está relacionado con (está contenido en) una colección de "subconjuntos" y que dichos "subconjuntos" permitan dar una buena definición de función continua, es muy importante. Se busca una definición de "subconjunto abierto" que nos permita definir continuidad y que no dependa de la *función distancia*, pero que en caso que se tenga la función distancia, esta sea un caso particular satisfaciendo las mismas propiedades.

En particular tenemos:

Proposición 3.1 *El conjunto $\mathbb{R}^n$ con la distancia euclidiana satisface:*

1. *$\mathbb{R}^n$, el total, es abierto; el vacío también es abierto, por vacuidad.*

2. *La unión arbitraria, finita o infinita, de abiertos es un conjunto abierto.*

3. *La intersección finita conjuntos abiertos es abierto.*

Probaremos estas aserciones en el caso $n = 2$, es decir, para $\mathbb{R}^2$:

1. Al tomar un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ en $\mathbb{R}^2$, evidentemente $B_{d_e}(P_0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ o para cualquier $\delta > 0$, así que $\mathbb{R}^2$ es abierto.

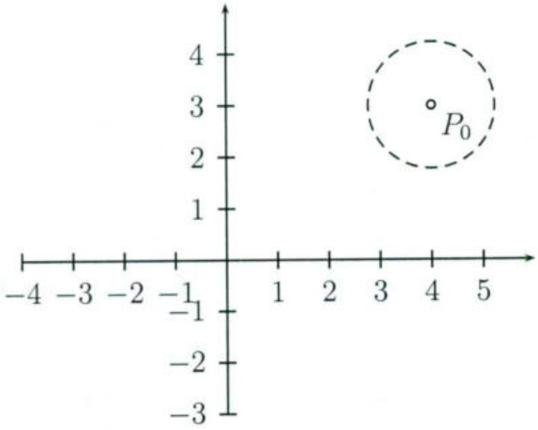


Figura 3.19: Para todo $P_0 \in \mathbb{R}^2$, $B_{d_e}(P_0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ o para cualquier $\delta > 0$.

2. Al tomar varios "abiertos", sin importar el número que se tome ya sea finito o infinito (sea numerable o no), la unión de estos también será "abierto." Sean $\{U_i\}_{i \in I}$ donde I es un intervalo cualquiera con U_i abierto para cada $i \in I$.

   Al querer demostrar que $\bigcup U_i$ es abierto, se toma cualquier punto en la unión, sea $P_0 = (x_0, y_0)$. Entonces, existe un $i \in I$, digamos i^*, tal que $P_0 \in U_{i^*}$. Como U_{i^*} es abierto existe $\delta > 0$, tal que $B(P_0, \delta) \subset U_{i^*}$, por lo que

$$P_0 \in B(P_0, \delta) \subset U_{i^*} \subset \bigcup U_i,$$

   lo cual prueba que es un abierto. Así, cualquier unión arbitraria de abiertos es un abierto.

3. Al considerar una intersección finita de una colección de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ y tomar un punto $P_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, como $P_0 \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se puede encontrar una $\delta_i > 0$ tal que $B(P_0, \delta_i) \subset U_i$. Al tomar $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ se pueden afirmar dos cosas:

   a) $\delta > 0$; he aquí la importancia que sea solo un número finito de abiertos, en caso de ser un número infinito esto no se podría asegurar.

   b) $B(P_0, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.

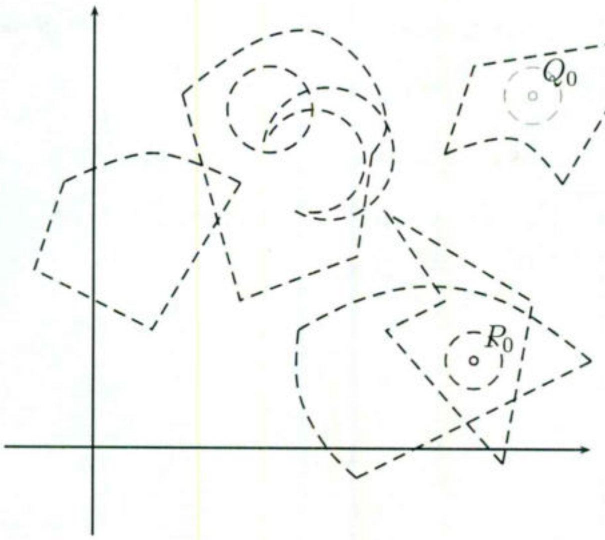


Figura 3.20: Los puntos P_0 y Q_0 pertenecen a la unión de los conjuntos, y en particular a alguno de ellos.

Concluimos que la intersección finita de abiertos es abierta.

La demostración para el caso general, $\mathbb{R}^n$, es totalmente análoga.

Ejemplo 3.13 Consideremos a $\mathbb{R}$ con la distancia discreta. Observemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto, ya que el conjunto de un sólo punto es abierto, $\{p\} \subset \mathbb{R}$ dado que $B_d(p, \frac{1}{2}) \subset \{p\}$.

1. Es claro que el total y el vacío son abiertos.
2. Como $\bigcup_{i\in I} B_i = A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ es abierto, la unión de abiertos es abierto.
3. Como $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ es abierto, la intersección finita de abiertos es abierto.

Observación 3.1 Si se considera cualquier otro espacio métrico $\langle X, d\rangle$, las tres propiedades se pueden demostrar de manera análoga.

Es claro que los "abiertos" definidos en un espacio métrico dependen de la función distancia, por lo que un mismo subconjunto puede ser abierto con una función distancia y con otra no.

1. Independientemente de la función distancia, el total y el vacío siempre serán abiertos (uno por integridad y el otro por vacuidad).
2. Si se consideran "subconjuntos abiertos" es claro que la unión arbitraria, finita o infinita, también cumple con ser un "subconjunto abierto".
3. Si se tienen dos de esos "subconjuntos abiertos", su intersección será un "subconjunto abierto". Al demostrarlo para dos equivale que es cierto para un número finito de estos.

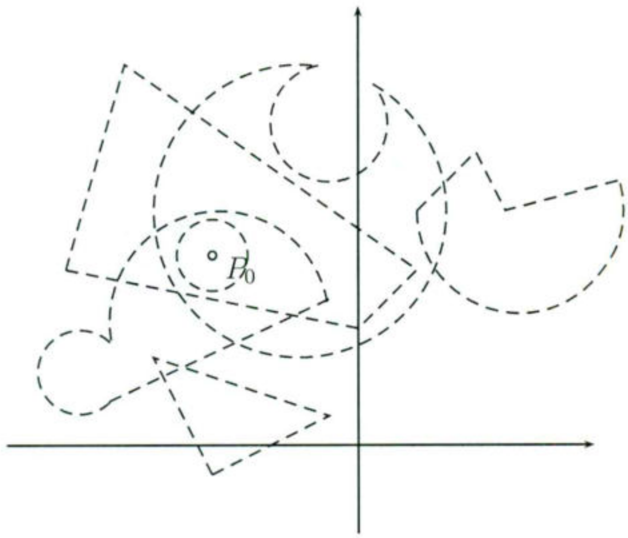


Figura 3.21: El punto P_0 pertenece a la intersección de tres abiertos.

3.4. Espacios topológicos

Al generalizar el concepto de "abierto" sin tener la necesidad de una distancia, no hay que olvidar esta se satisfaga los casos particulares, como $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana o con cualquier métrica.

3.4.1. Definición

Definición 3.8 Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, decimos que una *topología* en X es una colección $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(X)$, cuyos elementos se llamarán "abiertos", que satisface las siguientes condiciones:

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(ii) La unión arbitraria (finita o infinita) de elementos de $\mathcal{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$.

(iii) Si la intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.

Al conjunto $\mathcal{T}$ se le llama *topología de* X y a cada elemento de $\mathcal{T}$ se le llama "abierto."

Definición 3.9 A una pareja $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ se le llama espacio topológico.

Observación 3.2 Un conjunto $X \neq \emptyset$ puede tener más de una topología.

3.4.2. Ejemplos

Ejemplo 3.14 Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. $\mathcal{T}$ es topología ya que:

- Dados cualquier par de elementos U y V que pertenezcan a $\mathcal{T}$, tenemos $U \cap V \in \mathcal{T}$ pues
$$U \cap V = \begin{cases} X & \text{si } U = X \text{ y } V = X, \\ \emptyset & \text{si } U = \emptyset \text{ o } V = \emptyset. \end{cases}$$
- La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$ ya que
$$\bigcup_{i \in I} U_i = \begin{cases} X & \text{si existe } i_0 \in I \text{ tal que } U_{i_0} = X, \\ \emptyset & \text{si para toda } i \in I,\ U_i = \emptyset. \end{cases}$$

La topología $\mathcal{T}$ se llama *topología indiscreta.*

Ejemplo 3.15 Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{T} = \{U \mid U \subset X\}$. Tenemos que:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- Dados cualesquiera par de elementos U y V que pertenezcan a $\mathcal{T}$, tenemos $U \cap V \in \mathcal{T}$ ya que $U \cap V \subset X$.
- La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$ pues $\bigcup_{i \in I} U_i \subset X$, ya que $U_i \subset X$ para toda $i \in I$.

La topología $\mathcal{T}$ se llama la *topología discreta.*

Observación 3.3 Las dos topologías anteriores son la topología más gruesa y la más fina que existen dado un conjunto X.

Ejemplo 3.16 $\mathbb{R}$ con la distancia euclidiana d es un espacio topológico $(\mathbb{R}, d)$ cuyos abiertos están definidos por medio de la métrica d. Es decir, un subconjunto $U \subset \mathbb{R}$ es abierto si para cada punto $P \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(P, \delta) \subset U$.

$(\mathbb{R}, d)$ es un espacio topológico ya que satisface las tres propiedades (i), (ii) y (iii) de la definición de espacio topológico, como ya fue demostrado anteriormente.

Ejemplo 3.17 En general, dado un conjunto X y una función distancia d sobre X, ésta genera la siguiente topología de manera natural:
$$\mathcal{T}_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \exists \delta > 0 \ni B_d(a, \delta) \subset A\}.$$
Este espacio topológico $\mathcal{T}_d$ se denota por (X, d).

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$ ya que para todo $x \in X$, $B_d(x, 1/2) \subset X$.

- Dados $A, B \in \mathcal{T}_d$ y $x \in A \cap B$. Entonces existen ε_1 y ε_2 positivos tales que $B_d(x, \varepsilon_1) \subset A$ y $B_d(x, \varepsilon_2) \subset B$, de modo que $B_d(x, \varepsilon) \subset A \cap B$ para $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

- Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección tal que $A_i \in \mathcal{T}_d$ para toda $i \in I$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subset A_{i_0}$, por lo que $x \in B_d(x, \varepsilon) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Por lo tanto, $\mathcal{T}_d$ es una topología.

Esto no quiere decir que $\mathcal{T}_d$ sea la única topología en el conjunto X. Todo espacio métrico es un espacio topológico donde la topología natural es la generada por la distancia; nótese, sin embargo, que una función distancia (métrica) en un conjunto no es necesariamente la única posible y las topologías inducidas por una métrica tampoco son las únicas posibles.

Ejemplo 3.18 La colección

$$\mathcal{T} = \{A \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ es un conjunto finito o es todo } \mathbb{R}\},$$

es una topología en $\mathbb{R}$. Esto se debe a que:

- $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ ya que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ tiene cardinalidad finita. Además, $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definición de $\mathcal{T}$.

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{T}$; debemos demostrar que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$. Por las leyes de De Morgan,

  $$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (\mathbb{R} \setminus A_\alpha),$$

  así que, como para cada $\alpha \in I$ el conjunto $\mathbb{R} \setminus A_\alpha$ es finito la intersección $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ debe ser a su vez un conjunto finito. Así pues, $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

- Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ un conjunto finito de subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{T}$; debemos demostrar que $\bigcap_{\alpha=1}^n A_\alpha \in \mathcal{T}$. Por las leyes de De Morgan,

  $$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = \bigcup_{\alpha=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus A_\alpha),$$

  así que, como cada $\mathbb{R} \setminus A_\alpha$ es un conjunto finito y la unión finita de conjuntos finitos es finita, vemos que $\bigcap_{\alpha=1}^n A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Por lo anterior, $\mathcal{T}$ es topología. A dicha topología se le llama *la topología cofinita.* Esta topología es diferente a la topología del ejemplo 3.16.

Ejemplo 3.19 Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los número enteros y definamos

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\text{par}}, \mathbb{Z}_{\text{impar}}\}.$$

$(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ es un espacio topológico ya que:

- $\mathbb{Z}, \emptyset \in \mathcal{T}$ por la definición de $\mathcal{T}$.
- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (I es un conjunto de índices dado) una colección de subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que pertenecen a $\mathcal{T}$; mostraremos que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$.
    - Si existe $\alpha_1 \in I$ tal que $A_{\alpha_1} = \mathbb{Z}$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.
    - Si existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tal que $A_{\alpha_1} = \mathbb{Z}_{\text{par}}$ y $A_{\alpha_2} = \mathbb{Z}_{\text{impar}}$, resulta $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.
    - Si para toda $\alpha \in I$ se tiene $A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{par}}$ ó $A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{impar}}$ ó $A_\alpha = \emptyset$, entonces

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\text{par}} & \text{si } \forall\alpha \in I,\, A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{par}}, \\ \mathbb{Z}_{\text{impar}} & \text{si } \forall\alpha \in I,\, A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{impar}}, \\ \emptyset & \text{si } \forall\alpha \in I,\, A_\alpha = \emptyset. \end{cases}$$

  En cualquier caso, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ una colección finita de subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{T}$; mostraremos que $\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \in \mathcal{T}$.
    - Si existe $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A_{\alpha_1} = \emptyset$, entonces $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset \in \mathcal{T}$.
    - Si existen α_1, $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $A_{\alpha_1} = \mathbb{Z}_{\text{par}}$ y $A_{\alpha_2} = \mathbb{Z}_{\text{impar}}$, entonces $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset \in \mathcal{T}$.
    - Si para toda $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene $A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{par}}$ ($\mathbb{Z}_{\text{impar}}$) o $A_\alpha = \mathbb{Z}$ entonces

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\text{par}} & \text{si } \forall\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\},\, A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{par}}, \\ \mathbb{Z}_{\text{impar}} & \text{si } \forall\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\},\, A_\alpha = \mathbb{Z}_{\text{impar}}, \\ \emptyset & \text{si } \forall\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\},\, A_\alpha = \emptyset. \end{cases}$$

      En cualquier caso, $\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Por lo anterior, $\mathcal{T}$ es topología.

Ejemplo 3.20 Sea X un conjunto ordenado y definamos

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists a, b \in X \ni x \in (a, b) \subset U\}.$$

Tenemos que:

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección con $U_i \in \mathcal{T}$ para toda $i \in I$; mostraremos que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$. En efecto, si $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, por lo que existen a_{i_0}, $b_{i_0} \in X$ tal que $x \in (a_{i_0}, b_{i_0}) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, de modo que $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

- Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ una colección con $U_i \in \mathcal{T}$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$; mostraremos que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$. En efecto, si $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, existen a_i, $b_i \in X$ tal que $x \in (a_i, b_i) \subset U_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$. Haciendo $a = \text{máx}\{a_i\}_{i=1}^n$ y $b = \text{mín}\{b_i\}_{i=1}^n$, tenemos que $x \in (a,b) \subset U_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, por lo que $x \in (a,b) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$. Luego $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Por lo anterior, $\mathcal{T}$ es topología. Un caso particular son los $\mathbb{R}$ coincidiendo con la topología euclidiana.

Ejemplo 3.21 Consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, d_e)$, donde d_e es la métrica usual de $\mathbb{R}$. Se define una topología producto $\mathcal{T}_P$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{T}_P = \{W \subset \mathbb{R}^2 \mid \forall (x,y) \in W, \exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \ni (x,y) \in (a,b) \times (c,d) \subset W\}.$$

Podemos ver que efectivamente es una topología pues:

- X y $\emptyset$ son claramente abiertos.

- Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una colección con $W_i \in \mathcal{T}_P$ para toda $i \in I$; mostraremos que $\bigcup_{i\in I} W_i \in \mathcal{T}_P$. Si $(x,y) \in \bigcup_{i\in I} W_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in W_{i_0}$ por lo que existen $a_{i_0}, b_{i_0}, c_{i_0}$ y $d_{i_0} \in \mathbb{R}$ tales que
$$(x,y) \in (a_{i_0}, b_{i_0}) \times (c_{i_0}, d_{i_0}) \subset W_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} W_i,$$
así que $\bigcup_{i\in I} W_i \in \mathcal{T}_P$.

- Sea $\{W_i\}_{i=1}^n$ una colección con $W_i \in \mathcal{T}_P$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$; mostraremos que $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{T}_P$. Si $(x,y) \in \bigcap_{i=1}^n W_i$, existen a_i, b_i, c_i, $d_i \in \mathbb{R}$ tales que $(x,y) \in (a_i, b_i) \times (c_i, d_i) \subset W_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$. Haciendo $a = \text{máx}\{a_i\}_{i=1}^n$, $b = \text{mín}\{b_i\}_{i=1}^n$, $c = \text{máx}\{c_i\}_{i=1}^n$ y $d = \text{mín}\{b_i\}_{i=1}^n$ vemos que $(x,y) \in (a,b) \times (c,d) \subset W_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, por lo que
$$(x,y) \in (a,b) \times (c,d) \subset \bigcap_{i=1}^n W_i.$$
Luego, $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{T}_P$.

Notemos que:

- La topología en $\mathbb{R}^2$ que se obtiene de esta forma es aquella para la cual un conjunto es abierto si para todo punto que yazca en él se puede determinar un rectángulo (cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados) que contenga al punto y este contenido en el conjunto. Esta topología es la misma que se definió en $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclidiana (empleando bolas $B_{d_e}(p,\delta)$ en vez de rectángulos) pues para cada bola existe un rectángulo contenido en ella y viceversa.
- Al hacer el producto de un número *finito* de espacios topológicos, como en el caso de $\mathbb{R}^n$, la topología producto se puede definir de manera análoga:

$$\mathcal{T}_P = \left\{ W \subset \mathbb{R}^n \mid \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W, \right.$$
$$\left. \exists a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, n\} \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \subset W \right\}.$$

- También se puede generalizar para el producto de espacios topológicos cualesquiera, siempre y cuando el producto sea *finito*. El caso infinito no se define así, siendo la razón temas que no son el objetivo de estas notas (véase (Munkres, 1975)).

Definición 3.10 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Decimos que $D \subseteq X$ es cerrado si su complemento $X \setminus D$, es abierto.

Observación 3.4 Obsérvese que los subconjuntos no necesariamente son abiertos o cerrados. Por ejemplo en $(\mathbb{R}, d_e)$ el intervalo $(a, b]$ no es ni abierto ni cerrado. La justificación de esta afirmación se deja para el lector.

Ejemplo 3.22 $(\mathbb{R}^n, d_e)$ es un espacio topológico. Se deja como ejercicio para el lector demostrarlo para $n = 2$ y $n = 3$.

Ejemplo 3.23 En el espacio topológico formado por $\mathbb{R}$ con la distancia discreta todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto y cerrado.

Anteriormente se vio que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto por lo que para todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, su complemento $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, por lo que A es abierto, por lo que concluimos que A es cerrado. Entonces todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado.

Ejemplo 3.24 Definamos en $\mathbb{R}$ la topología

$$\mathcal{T}_l = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists a, b \in \mathbb{R} \ni x \in [a, b) \subset U\}.$$

Podemos ver que $\mathcal{T}_l$ es efectivamente una topología ya que:

- $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ ya que para toda $x \in \mathbb{R}$, $x \in [x-1, x+1) \subset \mathbb{R}$. Además, $\emptyset \in \mathcal{T}_l$ por vacuidad.

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que pertenecen a $\mathcal{T}_l$; mostraremos que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}_l$. Si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in A_{\alpha_0}$, por lo que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, b) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, de modo que $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{T}_l$.

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ una colección finita de elementos de $\mathcal{T}_l$ y sea $x \in \bigcap_{\alpha=1}^n A_\alpha$. Entonces para toda $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, existen $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [a_\alpha, b_\alpha) \subset A_\alpha$. Sean $a = \max\{a_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ y $b = \min\{b_\alpha\}_{\alpha=1}^n$. Entonces para toda $y \in [a, b)$ tenemos $y \geq a \geq a_\alpha$ para toda α y $y < b \leq b_\alpha$ para toda α, de modo que

$$y \in [a, b) \subset \bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha,$$

por lo que $\bigcap_{\alpha=1}^n A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Por lo tanto $\mathcal{T}_l$ es una topología, a la que se le llama la *topología del límite inferior.*

¿Es (a, b) abierto en esta topología?

Observaciones:

- Nótese que las tres topologías que se han dado en $\mathbb{R}$ son distintas, por ejemplo el abierto $[1, 2)$ en la topología de límite inferior no es un abierto en la topología inducida por la métrica euclidiana, ya que para que fuera un abierto en esta topología, querría decir que para todo punto x en el abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta)$ estuviera contenido en el abierto, y en este caso no existe $\delta > 0$, tal que $(1 - \delta, 1 + \delta) \subset [1, 2)$.

- También es claro que los abiertos (a, b) de la topología inducida por la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$, no es abierto en la topología cofinita, ya que $\mathbb{R} \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ no es finito. En cambio (a, b) es abierto en la topología del límite inferior; de hecho, todo abierto de la topología inducida por la métrica euclidiana es abierto en la topología del límite inferior: Si U es un abierto en la topología inducida por la métrica euclidiana y $x \in U$, por ser U abierto en la topología inducida por la métrica euclidiana existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (a, b) \subset U$, de modo que si consideramos el intervalo $[x, b)$, tenemos $x \in [x, b) \subset (a, b) \subset U$, de modo que U es abierto en la topología del límite inferior.

Ejemplo 3.25 Sea d_m la distancia del máximo en $\mathbb{R}^n$. Dicha distancia genera una topología

$$\mathcal{T}_m = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists \delta > 0 \ni B_{d_m}(x, \delta) \subset U\}.$$

Ejemplo 3.26 Sea d_e la distancia rectangular en $\mathbb{R}^n$. Dicha distancia genera una topología

$$\mathcal{T}_t = \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \forall x \in U, \exists \delta > 0 \ni B_{d_t}(x, \delta) \subset U\}.$$

Observación 3.5 Las tres topologías anteriores tienen los mismos abiertos. Por ejemplo, considérese el caso $n = 2$. Al querer probar que las tres distancias generan las mismas topologías es necesario que cualquier disco de centro P y radio $\delta > 0$ es un abierto en cada uno de las otras dos topologías. ¿Por qué solamente es necesario esto?

3.5. Ejercicios

1. Sea $X = \{a, b, c\}$. Encontrar al menos tres topologías diferentes.

2. Dar una descripción explícita de los abiertos de las topologías de los ejemplos 3.25 y 3.26 para $n = 2, 3$.

3. a. ¿El conjunto de los naturales es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$? ¿Y el de los enteros en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$? ¿Y si no es así, son cerrados? b. ¿El conjunto de los racionales es abierto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$? ¿Y el de los irracionales en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$? ¿Y si no es así, son cerrados?

4. ¿Los planos son abiertos en $\mathbb{R}^3$ con la topología usual?

5. ¿Es $\{(x, y) \mid y > x^2\}$ abierto con la topología usual?

6. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un conjunto cerrado que al quitarle un solo punto se vuelva abierto.

7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ definido por $B = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ ¿B es abierto con la topología usual?

8. Probar que todos los subconjuntos de la forma $[a, b) \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ son cerrados y abiertos a la vez con la topología $\mathcal{T}_l$, la *topología del límite inferior.*

9. Describe la topología producto en el caso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del límite inferior en ambos casos. ¿Si $C = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$ es C abierto? ¿Si $D = \{(x, y) \mid x > 1 \text{ y } y \leq 3\}$ es D abierto?

10. Se define un conjunto conexo si este no se puede escribir como la unión de dos subconjuntos abiertos no vacíos. Dado $\mathbb{R}$ y $[a, b) \subset \mathbb{R}$, decir si es conexo en las siguientes topologías: (a) la topología euclidiana; (b) la topología cofinita y la topología del límite inferior.

11. Demostrar que la intersección (finita o infinita) de cerrados es cerrado. Dar un contraejemplo donde la intersección infinita de abiertos no es abierta.

12. Si A es un conjunto finito demostrar que cualquier subconjunto es abierto y cerrado.

Capítulo 4

Funciones continuas

"Si pude ver un poco más lejos fue por estar de pie sobre los hombros de unos gigantes."

Isaac Newton, físico inglés, matemático (1642-1727)

La *continuidad* es una propiedad muy importante en el cálculo. Intuitivamente, la continuidad significa que un pequeño cambio en la variable independiente x implica sólo un pequeño cambio en la variable dependiente $y = f(x)$, de modo que excluye "saltos" en el valor de y. Así, siempre y cuando f sea "continua," la gráfica de f consiste de un solo "pedazo" de curva; se tiene que un valor no registrado $f(a)$ es aproximadamente el mismo que el de $f(x)$ para una x vecina de a, y que $f(a)$ puede ser aproximado precisamente sólo con valores de x suficientemente *cerca* de a, ¿Qué significa *cerca, pequeño cambio*? Recordemos la definición de continuidad del curso estándar de cálculo:

Definición 4.1 (General) La función f es continua en a, si para cualquier valor por *pequeño* que sea $\varepsilon > 0$, existe una vecindad de a de radio δ (es decir, un conjunto de puntos cercanos a a), para la cual las imágenes de todos los puntos en esa vecindad y $f(a)$ tienen una diferencia menor que el valor dado ε.

En símbolos y con la distancia euclidiana en los reales:

Definición 4.2 (Euclidiana) La función f es continua en a si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

En la definición 4.2 interviene la función distancia; ¿cómo generalizar esta propiedad a espacios topológicos? y ¿cuál es la utilidad de generalizar el concepto de continuidad? Recordemos que la topología es "la geometría del siglo XX" y las geometrías entre otras cosas clasifican objetos, ¿cómo clasifica la topología a sus figuras? H. Poincaré dijo que la topología, "es el estudio de las propiedades geométricas cualitativas." ¿Y cuáles son las transformaciones que preservan dichas propiedades?

Los geómetras distinguen comúnmente dos geometrías: la primera, a la que llamamos *métrica*, y la segunda, la *proyectiva*. La geometría métrica se basa en la mensurabilidad: dos figuras serán equivalentes si son iguales en el sentido estricto de la palabra (congruencia), tienen el mismo número de vértices, las medidas iguales, los ángulos iguales, etc.; o bien vía la relación de semejanza, es decir, aquellas con mismo número de vértices, mismo número de segmentos, misma *razón* entre segmentos homólogos, misma medida de ángulos, etc. La geometría métrica tiene que ver con la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo, y con la clasificación de cuadriláteros (e.g., si un cuadrilátero es rombo o no), etc.

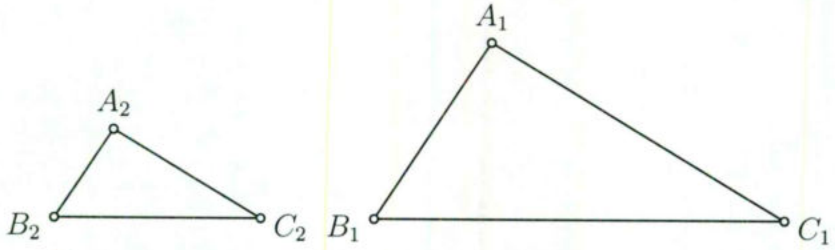


Figura 4.1: Figuras equivalentes según la geometría métrica.

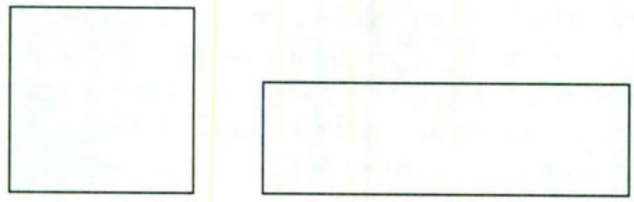


Figura 4.2: Figuras no equivalentes según la geometría métrica.

En esta geometría las transformaciones permitidas para relacionar figuras son la traslación, rotación y reflexión (isometrías relacionadas con la congruencia) o estiramientos o contracciones (relacionados con la semejanza); las *isometrías* son aquellas transformaciones que preservan las longitudes y *los estiramientos o contracciones* son aquellas que conservan las proporciones entre las formas, es decir, el tamaño de las figuras varía por homotecia, por ejemplo, como si se usara un microscopio o unos binoculares para modificar su tamaño. En ambos casos la función distancia resulta tener una papel muy importante en estas transformaciones, tomando en cuenta la definición de figuras congruentes y figuras semejantes. En las isometrías las líneas perimetrales de las figuras están hechas por un material rígido no deformable, es decir, al transformarse en el plano o espacio, conservan siempre su forma, además de mantener las medidas, un segmento se mantendrá como segmento, un triángulo seguirá siendo un triángulo, un círculo será un círculo, etc. En el caso de los estiramientos o contracciones las figuras cambian de tamaño pero las líneas rectas se mantienen como líneas rectas, es decir, solo se alargan o se achican, los triángulos también mantendrán su forma aunque las medidas cambiarán y se tendrá la razón de semejanza.

La geometría proyectiva se basa en la idea de línea recta. Dos figuras se consideran equivalentes, si es posible por medio de un producto de perspectivas (proyectividad-transformación) pasar de una de ellas a la otra, es decir, una es "perspectiva" de la otra (figura 4.3). Dada una configuración

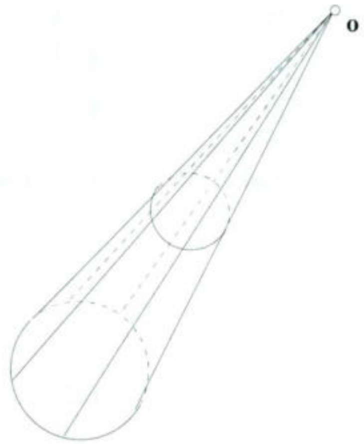


Figura 4.3: Figuras en perspectiva; equivalentes según la geometría proyectiva.

en un plano (plano de la imagen), un punto O (centro de proyección) fuera del plano y un segundo plano (plano de proyección) colocado arbitrariamente en el espacio, si se trazan rayos rectos desde O por cada punto de la figura en el plano de la imagen, cada rayo intersecará al plano de proyección en un punto, llamado la imagen proyectada del punto de imagen. El conjunto de puntos sobre el plano de proyección constituye la imagen proyectada de la configuración original. Es obvio que la imagen de una línea recta será una línea recta ya que el haz de rayos desde el centro de proyección que pasa por cada punto de la línea original está contenida en un plano. La intersección de este plano con el plano de proyección será una línea recta. Figuras originales que consistan únicamente de puntos y líneas rectas se proyectarán en una imagen de puntos y líneas correspondientes. En consecuencia, las líneas rectas son invariantes bajo *proyección*. Sin embargo, las magnitudes de los ángulos y las distancias entre los puntos no son invariantes. La geometría proyectiva es una geometría más cualitativa que la métrica: la medida, cantidad (aspecto cuantitativo), juega un papel menos importante. Sin embargo, la geometría proyectiva no es estrictamente cualitativa, ya que una recta siempre se mantendrá como recta, lo cual no es una propiedad puramente cualitativa; no se puede garantizar que una línea es recta sin hacer medidas o bien sin haber usado una regla, el cual es un instrumento de medición.

Pero hay una tercera geometría donde las propiedades cuantitativas han desaparecido absolutamente y que es totalmente cualitativa; es el *analysis situs* o también llamada *topología.* En esta disciplina, dos figuras son equivalentes si es posible pasar de una a otra por medio de una *deformación continua*; a la transformación permitida se llamará *homeomorfismo*, la cual es una **regla de**

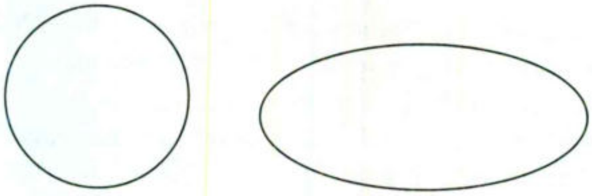


Figura 4.4: Figuras equivalentes para la geometría proyectiva.

continuidad. Intuitivamente, el que la transformación sea continua significa que la imagen de un punto cercano a x, digamos y, es un punto $f(y)$ "cercano" a $f(x)$. La cercanía hasta ahora depende de una función distancia pero, ¿cómo hablar de continuidad si no se tiene una función distancia?

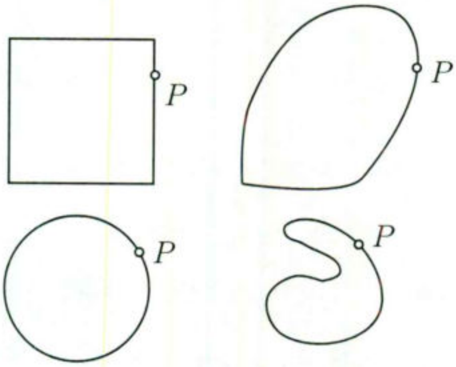


Figura 4.5: Figuras equivalentes según la topología.

círculo es cualitativamente equivalente a un cuadrado, a la elipse, a una herradura o a cualquier curva cerrada siempre que esta no se atraviese a sí misma o se estrangule; ¿por qué? es claro que no es equivalente a un segmento de línea, ¿por qué?; asimismo, la esfera es equivalente a cualquier superficie convexa cerrada, pero no lo será al *toro*, superficie que se obtiene al unir los lados opuestos de un rectángulo, como se muestra en la figura 4.6.

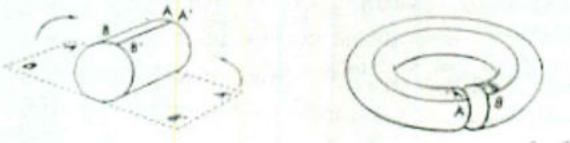


Figura 4.6: Ensamble de un toro.

Al imaginar cualquier modelo y tratar de copiarlo, siendo dibujantes inexpertos, las proporciones estarán todas modificadas, las líneas hechas por una mano (temblorosa) seguramente se han convertido en curvas. En el dibujo hecho por un inexperto y torpe dibujante, cambia las proporciones, más o menos en forma burda, las líneas rectas contienen ahora zigzags, los círculos tendrán varias ondas; pero, en cualquier caso, si el dibujo tiene dos agujeros seguramente solo habrá estos dos agujeros, más grandes o más chicos, pero no habrá más ni menos. Es decir las propiedades cualitativas no se alterarán, no molestará al geómetra, no alterará el razonamiento. Desde el punto de vista de la geometría métrica, así como de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; pero si lo son, desde el punto de vista de *analysis situs* (*topología*).

En *la topología* es donde la intuición geométrica entra en acción. Cuando, en un teorema de la geometría métrica se reclama a esta intuición, es porque es imposible estudiar las propiedades métricas de la figura con la abstracción de las propiedades cualitativas, aquellas que son realmente el objeto de estudio de la *topología.* Es usual escuchar que la geometría es el arte de razonar con figuras mal trazadas (Poincaré), esto no es una afirmación ingeniosa; es una verdad como conclusión de una reflexión.

Pero ese inexperto dibujante no representará una curva cerrada por una curva abierta, tres líneas concurrentes en tres líneas no concurrentes, una superficie con un agujero con otra sin este. Los defectos del dibujo no impedirá la intuición en la geometría métrica o proyectiva; pero será imposible, cuando estos defectos tienen que ver con *topología.*

Esta observación simple demuestra el verdadero rol de la intuición geométrica; es más que intuición lo que necesita la geometría para dibujar figuras, o para representarlas mentalmente. Pero si las propiedades métricas o proyectivas se piensan un poco o si bien se esta interesado en las propiedades cualitativas, es cuando realmente la intuición interviene. No se trata de decir con esto que la geometría métrica se basa solamente en la lógica, que la verdadera intuición no esta involucrada; pero estas intuiciones son de otro tipo, análogo a las intuiciones que se encuentran en aritmética y en álgebra.

Aunque en esta geometría existen figuras que no tienen las mismas propiedades cuantitativas, intuitivamente tienen ciertas propiedades cualitativas idénticas. Por ejemplo, una circunferencia, un polígono y una región anular, las dos primeras tienen propiedades comunes que no posee la región anular. Se puede hablar que el interior de la circunferencia y del cuadrado son equivalentes, más no al interior de la porción anular.

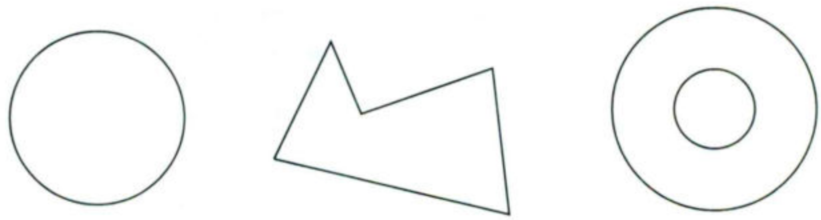


Figura 4.7: Un círculo, una región poligonal y una región anular.

Parece ser que las dos primeras figuras tienen las mismas propiedades cualitativas, son equivalentes mientras intuitivamente éstas difieren de la tercera figura, el anillo; ¿en cuál propiedad cualitativa difieren? La relación de equivalentes esta ligada con el hecho de poder transformar la circunferencia a la segunda figura por medio de una *deformación continua.* Lo cual no es posible con la región anular ya que al intentarlo sería necesario romper y/o pegar para obtener la circunferencia. Por lo que ahora esta nueva geometría consiste de curvas que están hechas con un material elástico y deformable y las transformaciones que darán equivalencias entre las figuras, serán los denominados homeomorfismos, donde la continuidad juega un papel básico.

4.1. Continuidad

El objetivo en este capítulo será el de generalizar el concepto de continuidad y definir las propiedades de las transformaciones que indican cuando dos figuras son topológicamente equivalentes. Si bien es cierto que cuando se tienen espacios como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, o $\mathbb{R}^n$ en general y funciones entre ellos se sabe cuando una función es continua en un punto o en todo el espacio, pero ¿cómo establecer cuando una función es continua si se trata de espacios topológicos en general, sin tener una función distancia en algunos casos? Al igual que al generalizar el concepto de abiertos, se busca que la generalización de "continuidad" al aplicarlos en casos particulares, como los espacios métricos y con la topología inducida por esta métrica satisfagan la definición de función continua que se venía trabajando, que resulten continuas, según la definición abstracta aquellas que ya lo eran, con la definición anterior.

4.1.1. Definición

De los cursos de cálculo diferencial e integral tenemos que se presenta la definición de límite y después la siguiente definición de función continua en un punto. Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si es posible que los valores de $f(x)$ se encuentren arbitrariamente cercanos a L, tanto como se quiera, para valores suficientemente "cercanos" a x_0. Decir que el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a x_0 significa que la diferencia entre $f(x)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña con tal que x esté lo suficiente cerca de x_0, pero diferente de éste. Es decir los valores de $f(x)$ se "acercan" cada vez más a L si x se "acerca" cada vez más a x_0, por cada lado de x_0, pero $x_0 \neq x$. Nuevamente la función distancia toma un papel importante: *acercarse* involucra distancia (arbitrariamente pequeña), la diferencia, estar "suficiente cerca de x_0" pero diferente de éste, etc. Con la definición de límite se da la definición de *función continua en un punto*:

Definición 4.3 (Versión 1) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es continua en x_0 si:

(i) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

(ii) $f(x_0)$ está definida.

(iii) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En otras palabras, como se ilustra en la figura 4.8:

(i) Significa que el límite existe.

inversa? Es claro que esta propiedad tiene que ver con el agujero del toro o bien el hecho que la esfera no lo tiene.

Nuevamente, en forma reiterativa, recalcamos que en *topología* se buscan propiedades cualitativas. La topología es la geometría de caucho: se puede deformar sin desgarramientos ni adherencias, por lo que hay ciertas propiedades que se alteran, pero hay otras que permanecen invariantes, a través de la deformación; a estas se les llama *propiedades topológicas.* Conforme se vayan deformando los objetos, éstos cambian en muchos sentidos y perderán ciertas propiedades, pero algunos aspectos de su naturaleza se mantendrá igual y éstas son las que a la topología le interesan, esas propiedades cualitativas. Estas propiedades serán las que señalen si dos figuras pertenecen o no a la misma clase.

En realidad, saber si dos figuras son homeomorfas muchas veces resulta más difícil que el poder decir por qué no son homeomorfas dos figuras pues para decir por qué no son homeomorfas bastaría con encontrar una característica o una propiedad "topológica" que tenga una y la otra no.

En este capítulo se tratará de hacer una clasificación de ciertos objetos topológicos específicos, a saber, *las superficies de una sola pieza (conexas) y cerradas (sin bordes)*:

Superficies Las superficies son objetos en el espacio que "localmente" son de dos dimensiones, es decir, son homeomorfos a un disco plano abierto. Por ejemplo, consideremos una esfera hueca; localmente, un pedazo de la esfera es como un pedazo de papel doblado (o curveado). Si se quiere medir un jardín, lo consideramos plano a pesar de que forma parte del globo terráqueo (una esfera) y medimos como se hace en el plano cartesiano.

También se puede formar otra superficie si se toma una hoja papel (dos dimensiones) y se comienza a enrollar, como cuando uno quiere hacer un cilindro, o bien se dobla, sin pegar ni cortar; es claro que solamente se puede hacer esto en el espacio, pero considerándolo localmente, como si uno estuviese inmerso en la hoja de papel, es de dos dimensiones. Lo mismo sucede con una pelota de playa, una llanta para nadar (toro), un bitoro. De hecho, se consideraran varios objetos tomándolos huecos, es decir *superficies* como hechas de doble fondo, con aire entre las paredes.

Una sola pieza Las figuras de una sola pieza son aquellas que no podrán separarlas en dos conjuntos sin romperlas.

Sin bordes Nos referimos a las superficies que se pueden recorrer sin salirnos del objeto, sin "caernos" como la esfera y no como el cilindro o un disco, donde se puede hablar de dos caras.

Al ver a nuestro alrededor las diversas superficies, es claro que no todas son homeomorfas, por lo que una pregunta que surge es: ¿cuáles superficies son homeomorfas entre sí? o ¿habrá una clasificación de estas figuras? Habrá que pensar que nuestras superficies son de material elástico, tipo plastina y tratar de ir modificándolas (moldeando, alargando, achicando, etc.) respetando simplemente dos reglas: no romper y no pegar. De esta forma podremos saber cuáles pertenecen a la misma clase: ¿qué superficie se puede ir transformándo hasta obtener otra aparentemente distinta?

las configuraciones finitas serán finitas.

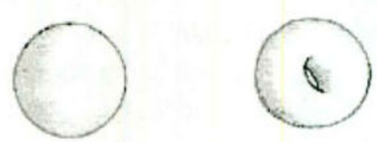
En ambas geometrías, un invariante importante bajo las transformaciones es la preservación de las líneas rectas como líneas rectas, por lo que en ninguna el círculo pertenece a la misma clase que un polígono. Para la topología este invariante es deshechado: un segmento de recta es homeomorfo a un arco de circunferencia, a la letra 'S', etc. La topología dota a la geometría de una nueva "deformación" (en contraste con los movimientos rígidos de la geometría euclidiana y de las proyectividades de la geometría proyectiva).

En topología, al tomar un objeto y deformarlo se solo deberán tener presente las siguientes condiciones:

- Nada de rupturas: Sin desgarrar, obtenemos que puntos cercanos vayan a puntos cercanos.
- Nada de adherencias: Sin sobreponer se obtiene que a cada punto de la figura corresponde un punto y sólo uno, por lo que se puede definir la deformación inversa.

Como ya fue visto en el capítulo anterior, estas condiciones equivalen a pedir continuidad en una función f (nada de rupturas) y la existencia y continuidad a la inversa de f, f^{-1} (el que no haya adherencias) llamada *homeomorfismo.*

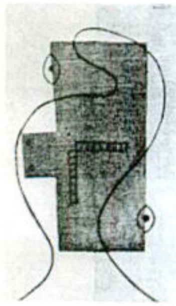
Por ejemplo, una esfera es homeomorfa a un elipsoide. Esto se puede verificar proyectando radialmente cada punto de la esfera a su correspondiente punto en el elipsoide como se vio anteriormente. ¿Es la esfera homeomorfa al toro? La respuesta, intuitivamente, es no: si se quisiera deformar la esfera para llegar al toro lo que se necesitaría sería romper la esfera, e inversamente si se busca una deformación del toro a la esfera se tendría que pegar. ¿Qué los distingue cualitativa-



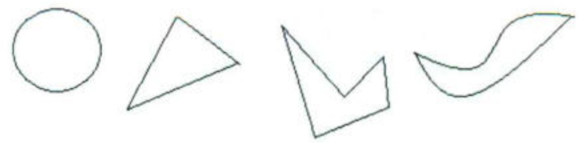
(a) Una esfera. (b) Un toro.

Figura 5.4: La esfera y el toro difieren cualitativamente.

mente?: el agujero. Sí, efectivamente éste es una parte esencial del toro; pero ¿qué propiedad tiene la esfera que no tiene el toro por causa del agujero? Si se tuviera una cuerda y se pudiera hacer unir los extremos de la cuerda y pasando sobre la superficie esfera, podríamos jalarla poco a poco hasta llegar al punto de la unión de los extremos. ¿Sería posible hacer lo mismo en el toro? ¿habría posiciones de la cuerda donde ésta se atoraría? ¿cómo cual? Esta es una propiedad cualitativa que distingue a la esfera del toro. Es cierto que al verlos se pueden distinguir por el agujero (viendo desde fuera) que tiene el toro y la esfera no, pero ¿cómo los distinguirlos si nos encontráramos inmersos en las superficies, si no lográramos ver el agujero del toro? ¿Cómo supo Cristobal Colón que la tierra era una esfera y no un toro? ¿Qué propiedades tendría el toro y no la esfera o a la



(a) Picasso: Cabeza (1945)



(b) Figuras equivalentes.

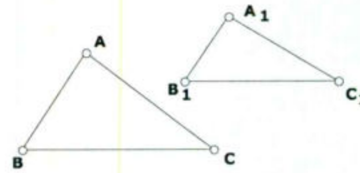
Figura 5.3: A finales del siglo XIX las propiedades cualitativas son notables en la pintura y en la geometría.

que es válido alargar, achicar, deformar (como si la figura fuera hecha de caucho) sin pegar ni romper. Por ejemplo, el intervalo $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, al tener una esfera de plastilina, ésta se podría deformar hasta llegar a obtenerse un cubo o una eliposide. Al deformar la figura cambiarán ciertas propiedades obviamente, por ejemplo, el número de lados, el área, pero habrá otras que no se alteran; estas propiedades que permanecen invariantes bajo este tipo de transformación, *homeomorfismo*, son las *propiedades topológicas*. Estas propiedades también se consideran en la geometría euclidiana y en la proyectiva, pero, además de éstas, se consideran otras propiedades más. Estas propiedades topológicas son propiedades cualitativas, propiedades que son esenciales. Las propiedades de las figuras se enrarecen cada vez más, a medida que se pasa de la geometría elemental a la proyectiva, y de ésta a la topología. Si bien es cierto que las propiedades topológicas son menos numerosas que las de la geometría elemental o las de la geometría proyectiva, no es menos cierto que las topológicas son las propiedades más esenciales de las figuras.

En la geometría euclidiana es claro que un cuadrado y un triángulo no se encuentran en la misma clase de equivalencia, es decir, no son ni congruentes ni semejantes, ya que para que dos figuras se encuentren en la misma clase de equivalencia es necesario que sean congruentes o semejantes: es necesario que exista una relación biyectiva entre los lados de una figura y los lados de la otra figura cumpliendo la igualdad entre los lados o la proporcionalidad de los lados. En caso que se tenga dos figuras con el mismo número de lados, para saber si éstas son congruentes o semejantes, lo que se hace es compararlos, midiendo, dado que es en lo que se basa la geometría euclidiana: se basa en propiedades métricas. Se dice que dos figuras geométricas están en la misma clase de equivalencia si existe una transformación, la traslación, la simetría o una rotación o una combinación de estas o la contracción o estiramiento que manda una en la otra.

En caso de la geometría proyectiva, dos figuras son equivalentes si existe una proyectividad que transforma una en la otra, una circunferencia será equivalente a una elipse, un cuadrado es equivalente a un cuadrilátero. Claramente el paralelismo ya no se preserva, pero una línea recta siempre se mantendrá como línea recta. La colinealidad de puntos así como concurrencia se mantienen y

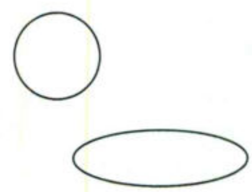
(a) Pintura griega.



(b) Triángulos semejantes.

Figura 5.1: La pintura griega presenta similitudes con la geometría basada en la congruencia y la semejanza.

(a) Leonardo Da Vinci: La Mona Lisa (1502).



(b) Figuras equivalentes.

Figura 5.2: Durante la edad media la proyectividad juega un papel importante tanto en la pintura como en las matemáticas.

equivalente a una flecha.

5.1. Preliminares

La topología surge en el siglo XX, al ver como ha evolucionado la geometría, y por ser parte de la matemática de este siglo tiene algunas de las características especiales, así como sucede la pintura: rápida extensión del campo, una gran proliferación de las especialidades y de matemáticos así como de pintores. La matemática ya no es rígida, ya no se sigue una sola línea, si bien es cierto que el rigor matemático es mucho más estricto, éste no va en contra de la variedad en los axiomas que se toman para iniciar una teoría. Uno de los objetivos de la topología es buscar las características cualitativas, topológicas, de los objetos sin importar las características métricas, como en las figuras 5.3(a) y 5.3(b).

En el capítulo anterior se vio que es por medio de homeomorfismos, deformaciones continuas, la manera en que se puede establecer cuándo es que dos objetos son topológicamente equivalentes. Es una clasificación diferente a la que se hace en la geometría euclidiana, o en la proyectiva, ya se inicia la geometría proyectiva cuya clasificación de figuras es por medio de proyectividades como se dijo en el capítulo anterior. El estilo clásico y sencillo de las pinturas de Cavallini es el eslabón esencial entre la tradición de la antigüedad romana y el arte de Giotto. El pintor ha creado un espacio en tres dimensiones donde el paisaje y figuras se someten a las leyes de la perspectiva. Los elementos de este nuevo realismo cimentaron casi toda la pintura florentina del siglo XV. Toda la evolución de la pintura italiana desde el siglo XIII hasta comienzos del XVI es una lucha tremenda para realizar visualmente nuevos efectos. Los grandes pintores —Giotto, Masaccio, Piero de la Francesca— fueron revolucionarios que descubrieron perspectivas para la representación. Sus contemporáneos desarrollaron y sintetizaron las muchas ramificaciones de esas ideas, y pasaron, a su vez, a sus sucesores una más honda intelección de los nuevos valores. Tan dolorosos esfuerzos, que muchas veces se quedaron en tanteos, dieron al fin sus dulces frutos en las tres grandes figuras del Renacimiento: Leonardo da Vinci, Miguel Angel y Rafael. Las caras y los cuerpos son extremadamente simples, pero se mueven, respiran y expresan emociones y sentimientos humanos.

El movimiento que se desarrolló en la pintura durante 1880–1890, como reacción contra los métodos analíticos de los impresionistas y, en sentido más amplio, contra los ideales de una sociedad racionalista y materialista fue el de los simbolistas, que creían que el arte ha de ser un medio para explorar los estados interiores del alma y no sólo un registro de las observaciones de la mente consciente. El expresionismo, esto es, el recurso a la distorsión y las exageraciones para dar mayor expresividad emocional a la obra, comenzó hacia fines del siglo XIX. La matemática se emancipó gradualmente de la antigua tendencia de ver en la mecánica y en la astronomía la meta final de las ciencias exactas. La creatividad del científico lo identifica; interesado en la ciencia por sí misma, surge la división entre la matemática "pura" y la "aplicada," un mayor grado de abstracción y nuevos temas especializados. Aparecen las abstracciones de abstracciones y "nuevas excursiones" dentro de la matemática: fractales, caos, lógica borrosa, entre otras.

En las siguientes imágenes se puede observar la forma en que la pintura fue evolucionando y de igual manera lo hacía la geometría euclidiana, proyectiva y la topología en forma paralela.

En la primera se observa que los mejores ejemplos de la pintura griega antigua se pueden encontrar en la cerámica. Los colores son de un tono y en cuanto a la perspectiva el torso y los ojos se representan de frente y la cabeza y los pies de perfil. Paralelamente la geometría clasificaba sus figuras por medio de congruencia y semejanza, de manera rígida.

En esta segunda etapa, en la pintura, partiendo de las enseñanzas de Giotto, los pintores italianos iniciaron un camino de renovación preocupados por una representación verosímil de la realidad: trabajaron en la conquista de la luz y el espacio, así como el dominio de la figura humana. La geometría se ocupa de la perspectiva.

En esta última etapa la pintura rompe totalmente con las tradiciones del pasado (la pintura figurativa), marcada por el signo de innovación, la ruptura y la vanguardia: el pintor trata de hacer cosas ni soñadas anteriormente. Los pintores empiezan a experimentar y a implementar nuevos movimientos. Las matemáticas también lo hacen de manera análoga con una fecundidad asombrosa. En particular, a la topología le interesan solamente las propiedades cualitativas. Un círculo es

Capítulo 5

Clasificación de superficies

"La misión de la ciencia no consiste en crear, sino en el descubrimiento de verdades."

Gottlob Frege, matemático alemán, lógico (1848-1930)

A lo largo de la historia las disciplinas han cambiado y modificado: éstas tienen en común las características de las diferentes etapas de la historia en sus productos que obviamente han sido proyectados de diferentes maneras. La matemática, así como la pintura, como un caso particular de las diferentes disciplinas, ha sufrido estos cambios y modificaciones que se han manifestado en diferentes maneras. Por ejemplo, consideremos lo que ocurría en la época de los griegos: la matemática, en su mayoría geometría, daba inicio a la matemática deductiva; en la pintura, se encuentran como primeras manifestaciones, las toscas incisiones de figuras geométricas como en la cerámica más antigua. Las pinturas se referían al hombre y a la tierra: un zigzag puede ser la simple representación de montañas o del mar. Las primeras actividades del hombre fueron totalmente prácticas, el hombre ante diversos problemas buscará solucionarlos y la matemática será un método. La primera rama que se desarrolló formalmente en la matemática fue la geometría. La geometría se encuentra íntimamente relacionada con la medición para fines prácticos, y se sabe que los griegos ya estaban familiarizados con las reglas generales para calcular el área de un rectángulo y de triángulos rectángulos e isósceles. La clasificación de figuras se basaba en la congruencia.

Durante la Edad Media, la línea principal de avance matemático pasó a través de las ciudades mercantiles en crecimiento bajo la influencia directa del comercio, la navegación, la astronomía y la topografía. Líderes en el amor por la matemática práctica fueron los maestros calculistas. Se desarrolló la trigonometría (para fines astronómicos) y el álgebra. Fueron los italianos los que intentaron desarrollar una nueva y más amplia teoría matemática que los antiguos y los árabes habían omitido. Dicha teoría condujo a la solución general de la ecuación cúbica. Fue característico de la nueva época el deseo no solamente de absorber información clásica sino también crear nuevas cosas, penetrar más allá de las fronteras establecidas por los clásicos. En cuanto a la geometría,

a) ¿En qué puntos es f continua?

b) ¿En que puntos es g continua?

2. Demostrar que función constante es continua, independientemente de los conjuntos, no vaciós, y la topología correspondiente.

3. Dados dos espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T}^*\rangle$, ¿es $\mathcal{T}$ la topología discreta si y solo si toda función $f\colon \langle X, \mathcal{T}\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}^*\rangle$ es continua? ¿Qué tipo de topología debe ser $\mathcal{T}^*$ para que satisfaga que toda función $f\colon \langle X, \mathcal{T}\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}^*\rangle$ sea continua?

4. Demostrar que el cuadrado y una circunferencia son homeomorfas.

5. Si un disco se corta a la mitad, por un diámetro, demostrar que la mitad del disco incluyendo el diámetro, es homeomorfo al disco.

6. Dados $f\colon \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_U\rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_U\rangle$, se define $G_f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ por $G_f(x) = (x, f(x))$. Probar que G_f es continua y que su imagen es homeomorfa a $\mathbb{R}$. Dar 3 ejemplos. ¿Una parábola es homeomorfa a la recta? Dar un homeomorfismo.

7. ¿Son homeomorfas $\mathbb{R}$ con la topología cofinita y $\mathbb{R}$ con la topología usual? En caso de una respuesta afirmativa dar el homeomorfismo, y en caso contrario dar una propiedad topológica que los distinga.

8. ¿Son homeomorfos un toro sin un círculo vertical y un toro sin un circulo horizontal?

9. Dar las clases de equivalencia con respecto a la función homeomorfismo de las letras del abecedario.

10. Dar dos diferentes homeomorfismos de la esfera a la esfera y del cuadrado al rectángulo.

11. Dar tres figuras homeomorfas a un anillo, a la gráfica de una hipérbola y a una letra 'Y'.

Figura 4.27: Un disco y paraboloide son homeomorfos.

Teorema 4.1 *La relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia.*

Demostración La relación de homeomorfismo es:

Reflexiva Dada una figura X, sea $I\colon X \to X$, la función identidad, donde X tiene la misma topología en el dominio y contradominio. Es claro que I es un homeomorfismo.

Simétrica Sean X y Y dos figuras homeomorfas, es decir, tales que existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$. Considérese $h^{-1}\colon Y \to X$: h^{-1} es función ya que h es suprayectiva y h es inyectiva; h^{-1} es inyectiva ya que h es función; h^{-1} es continua ya que h es un homeomorfismo y $(h^{-1})^{-1} = h$ es continua. Luego, h^{-1} es un homeomorfismo, por lo que Y es homeomorfo a X.

Transitiva Sean X, Y, Z tales que X es homeomorfo a Y y Y es homeomorfo a Z. Entonces existen homeomorfismos $h_1\colon X \to Y$ y $h_2\colon Y \to Z$. Se deja como ejercicio para el lector mostrar que $h_2 \circ h_1\colon X \to Z$ es un homeomorfismo.

Es decir, cualquier figura y todas sus deformaciones, son homeomorfas (iguales, topológicamente). ∎

4.3. Ejercicios

1. Sean $f, g\colon \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_c\rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_c\rangle$, donde $\mathcal{T}_c$ es la topología cofinita, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

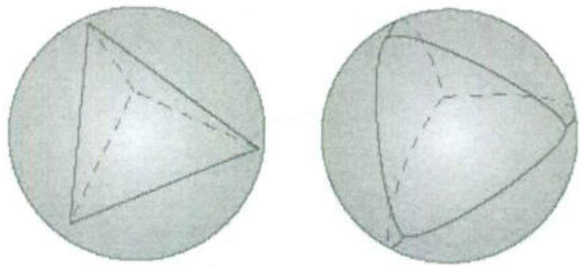


Figura 4.25: Una esfera y un tetraedro son homeomorfos.

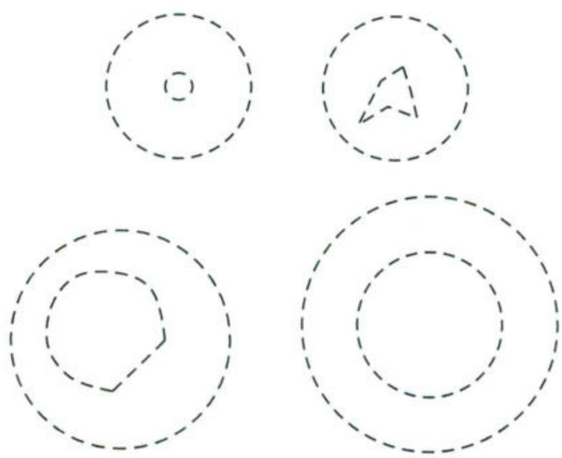


Figura 4.26: "Anillos" homeomorfos.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \neq (0, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ dada por

$$(x, y) \to \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

- Los puntos que se encuentran sobre la circunferencia, permanecen fijos bajo la transformación o son invariantes.
- Con respecto a los puntos que se encuentran cerca del origen, sus imágenes se encuentran alejadas de la circunferencia unitaria, y los puntos cerca de la frontera del disco, tienen imágenes que estarán cerca de la misma.

Ejemplo 4.16 Un disco y paraboloide son homeomorfos, como se muestra en la figura 4.27. Considérese el disco de centro el origen y radio 4. El paraboloide es aquel cuyos puntos (x, y, z) satisfacen que $z = x^2 + y^2$. Pareciera que al disco se le ha deformado hasta tener la forma del paraboloide. Es decir que topológicamente son iguales.

Ejemplo 4.11 Un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y un arco de circunferencia son homeomorfos, como se muestra en la figura 4.23. En este caso no solo se alargó o achicó sino que también se torció, sin

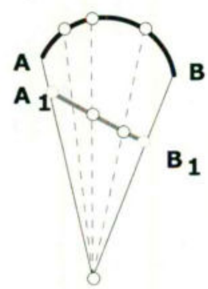


Figura 4.23: Un intervalo abierto y un arco de circunferencia son homeomorfos.

romper.

Ejemplo 4.12 Un cuadrado y una circunferencia son homeomorfos, como se muestra en la figura 4.24.

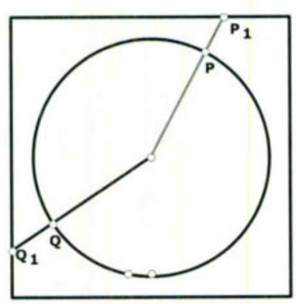


Figura 4.24: Un cuadrado y una circunferencia son homeomorfos.

Ejemplo 4.13 La esfera y el tetraedro son homeomorfos, como se muestra en la figura 4.25.

Ejemplo 4.14 ¿El disco abierto de radio uno sin el origen y el anillo abierto formado por la circunferencia de radio uno y la circunferencia de radio dos son homeomorfos? El lector puede responder por su propia cuenta con ayuda de la figura 4.26.

¿Qué puntos frontera se necesitan agregar a un disco o agregar al anillo para que sean homeomorfos?

Ejemplo 4.15 Un disco sin un punto y el exterior del disco unido con la frontera son homeomorfos por medio de la inversión: Sea D el disco de radio 1 sin el origen, y considérese la función $f\colon D \rightarrow$

$$
\begin{aligned}
2(a^2+b^2)-\sqrt{1+4(a^2+b^2)} &< 2(a^2+b^2)-1,\\
\frac{1+2(a^2+b^2)-\sqrt{1+4(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)} &< 1,\\
\frac{2(a^2+b^2)(1+2(a^2+b^2)-\sqrt{1+4(a^2+b^2)})}{4(a^2+b^2)^2} &< 1,\\
(a^2+b^2)\frac{(2+4(a^2+b^2)-2\sqrt{1+4(a^2+b^2)})}{4(a^2+b^2)^2} &< 1,\\
(a^2+b^2)\frac{(1+-2\sqrt{1+4(a^2+b^2)}+1+4(a^2+b^2))}{4(a^2+b^2)^2} &< 1,\\
k^2(a^2+b^2) &< 1.
\end{aligned}
$$

Luego, f es suprayectiva.

- f es continua ya que es la composición de funciones continuas, análogamente para f^{-1}.

Ejemplo 4.9 La esfera sin un punto y un plano son homeomorfos, siendo la proyección estereográfica el homeomorfismo correspondiente, como se muestra en la figura 4.22. Como si a una hoja

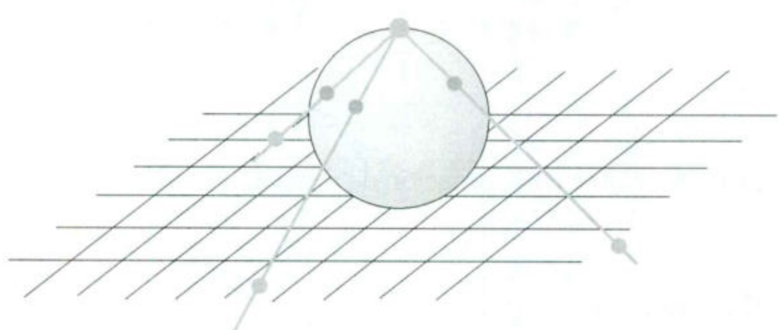


Figura 4.22: La esfera sin un punto y $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos.

de papel la doblaremos para envolver una pelota, es claro por que será necesario quitar un punto. ¿Es posible encontrar un homeomorfismo al colocar el plano cortando a la esfera?

Al deformar las figuras como si fueran de caucho, no se permite formar adherencias ya que a cada punto de la figura le debe corresponde uno y sólo un punto de la figura resultante y tampoco se puede desgarrar ya que puntos vecinos de la figura inicial le corresponden puntos vecinos de la figura final. Esta correspondencia determina una deformación de la figura inicial con la figura final y podría definirse una regeneración de la figura final a la original.

Ejemplo 4.10 Cualesquiera dos intervalos abiertos, son homeomorfos.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1 + (x_2^2 + y_2^2) \pm \sqrt{(1 + (x_2^2 + y_2^2))^2}}{2(x_2^2 + y_2^2)} \\
&= \frac{-1 + (x_2^2 + y_2^2) \pm [1 + (x_2^2 + y_2^2)]}{2(x_2^2 + y_2^2)} \\
&= \begin{cases} 1, \\ \dfrac{-1}{(x_2^2 + y_2^2)}; \end{cases}
\end{aligned}
$$

como $k > 0$, luego $k = 1$, lo cual implica que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

- f es suprayectiva: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
  - Si $(a, b) = (0, 0)$, entonces al tomar $(x, y) = (0, 0)$ es obvio que $f(x, y) = f(0, 0) = (0, 0) = (a, b)$.
  - Si $(a, b) \neq (0, 0)$ en caso que exista (x, y) tal que $f(x, y) = (a, b)$, debemos tener $(x, y) = (ka, kb)$ para alguna $k > 0$, es decir,

    $$f(x, y) = f(ka, kb) = \left(\frac{ka}{1 - (k^2a^2 + k^2b^2)}, \frac{kb}{1 - (k^2a^2 + k^2b^2)} \right) = (a, b);$$

    como $(a, b) \neq (0, 0)$, supongamos, sin perdida de generalidad, que $a \neq 0$. Entonces

    $$\frac{ka}{1 - (k^2a^2 + k^2b^2)} = a,$$

    lo cual nos lleva a obtener la ecuación de segundo grado

    $$k^2(a^2 + b^2) + k - 1 = 0$$

    cuyas soluciones son

    $$k = \begin{cases} \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4(a^2 + b^2)}}{2(a^2 + b^2)}, \\ \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4(a^2 + b^2)}}{2(a^2 + b^2)}; \end{cases}$$

    como $k > 0$, necesariamente

    $$k = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(a^2 + b^2)}}{2(a^2 + b^2)}.$$

    Solo falta probar que $(x, y) = (ka, kb)$ pertenece a $B_d(\overline{0}, 1)$, es decir, que $k^2a^2 + k^2b^2 < 1$. Tenemos $\sqrt{1 + 4(a^2 + b^2)} > 1$ ya que $(a, b) \neq (0, 0)$, de modo que

    $$-\sqrt{1 + 4(a^2 + b^2)} < -1,$$

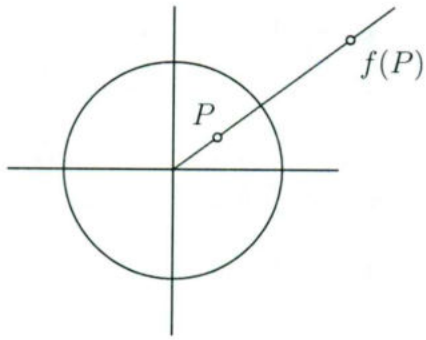


Figura 4.21: $f(P)$ es múltiplo de P.

- f es inyectiva: Si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, es decir,

$$\left(\frac{x_1}{1-(x_1^2+y_1^2)}, \frac{y_1}{1-(x_1^2+y_1^2)}\right) = \left(\frac{x_2}{1-(x_2^2+y_2^2)}, \frac{y_2}{(1-(x_2^2+y_2^2)}\right),$$

como las imágenes son iguales, los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y el origen son colineales y, de hecho, el origen no está entre estos dos puntos. En el caso $f(x_1, y_1) = (0, 0)$ es claro que $(x_1, y_1) = (0, 0)$ por lo que $(x_2, y_2) = (0, 0)$, lo cual implica que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. En caso contrario, existe $k > 0$ tal que $(x_1, y_1) = (kx_2, ky_2)$ por lo que se tiene

$$\left(\frac{kx_2}{1-(k^2x_2^2+k^2y_2^2)}, \frac{ky_2}{1-(k^2x_2^2+k^2y_2^2)}\right) = \left(\frac{x_2}{1-(x_2^2+y_2^2)}, \frac{y_2}{(1-(x_2^2+y_2^2)}\right) \neq (0, 0);$$

tenemos que x_2 ó y_2 es necesariamente distinto de cero, así que supóngase, sin perdida de generalidad, que $x_2 \neq 0$. Entonces

$$\frac{kx_2}{1-(k^2x_2^2+k^2y_2^2)} = \frac{x_2}{1-(x_2^2+y_2^2)}$$

lo cual implica que

$$\frac{k}{1-(k^2x_2^2+k^2y_2^2)} = \frac{1}{1-(x_2^2+y_2^2)},$$

resultando la ecuación de segundo grado $k^2(x_2^2+y_2^2) + k[1-(x_2^2+y_2^2)] - 1 = 0$, cuya solución es

$$\begin{aligned} k &= \frac{-(1-(x_2^2+y_2^2)) \pm \sqrt{(1-(x_2^2+y_2^2))^2 - 4(x_2^2+y_2^2)(-1)}}{2(x_2^2+y_2^2)} \\ &= \frac{-1+(x_2^2+y_2^2) \pm \sqrt{1-2(x_2^2+y_2^2)+(x_2^2+y_2^2)^2+4(x_2^2+y_2^2)}}{2(x_2^2+y_2^2)} \end{aligned}$$

(la elipse de semiejes a y b). Definamos, además, $f\colon C \to E$ por

$$(x, y) \mapsto (ax, by).$$

- f es inyectiva ya que si $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, es decir, $(ax_1, by_1) = (ax_2, by_2)$, entonces, dado que tanto $a \neq 0$ como $b \neq 0$, se obtiene $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

- f es suprayectiva ya que si $(x_0, y_0) \in E$, entonces $(x_0/a, y_0/b)$ se encuentra en C pues

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

por pertenecer a la elipse y, por otro lado,

$$f\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right) = \left(a \times \frac{x_0}{a}, b \times \frac{y_0}{b}\right) = (x_0, y_0).$$

- f es continua ya que al intersectar un abierto en E se obtiene el vacío o un arco de la elipse. La imagen inversa de ambos conjuntos, el vacío y un arco de la circunferencia, son abiertos.

- f tiene inversa $f^{-1}\colon E \to C$ dada por

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

y es continua. En efecto, f^{-1} es continua, ya que al intersectar un abierto en C se obtiene el vacío o un arco de la elipse. La imagen inversa de ambos conjuntos, el vacío y un arco de la elipse, son abiertos.

En consecuencia, se puede transformar una circunferencia continuamente a una elipse e inversamente. Cualitativamente son equivalentes.

¿A qué subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ es equivalente una parábola? ¿y la hipérbola?

Ejemplo 4.8 Los discos abiertos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos. Esto significa que todo disco abierto es equivalente a $\mathbb{R}^2$, dado que $B_d(\overline{0}, 1)$, y todos los discos son equivalentes; la demostración de esta aserción se deja como ejercicio para el lector. Demostraremos que $B_d(\overline{0}, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Sea $f\colon B_d(\overline{0}, 1) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{1 - (x^2 + y^2)}, \frac{y}{1 - (x^2 + y^2)}\right).$$

Recordando que $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ implica $1 - (x^2 + y^2) > 0$, vemos que f manda un punto (x, y) a un múltiplo del mismo (figura 4.21), por lo que dicho punto estará en la misma semirecta determinada por el origen y el punto (x, y).

Figura 4.19: Efecto de la función $f\colon (a,b) \to (c,d)$ sobre el intervalo (a,b).

el cual es un abierto en (c,d). El intervalo no es vacío pues, como $x_1 < y_1$, tenemos $x_1 - a < y_1 - a$, y dado que $(d-c)/(b-a) > 0$, vemos que

$$\frac{d-c}{b-a}(x_1 - a) + c < \frac{d-c}{b-a}(y_1 - a) + c.$$

Ejemplo 4.7 Consideremos la circunferencia y la elipse vía una proyección, como se muestra en la figura 4.20. A cada punto de la circunferencia, le corresponde un punto de la elipse. Considérese

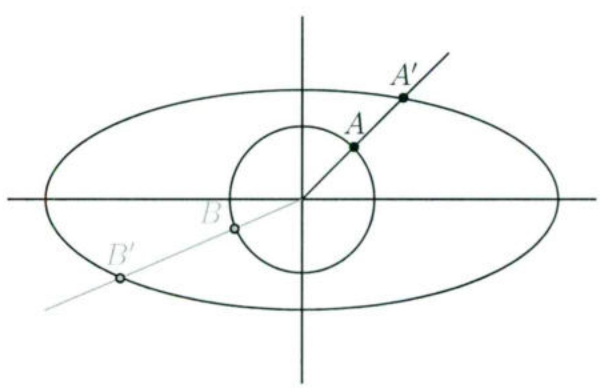


Figura 4.20: Una circunferencia y una elipse vía una proyección.

ambas curvas con centro en el origen. En concreto, sean

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(la circunferencia de radio 1) y

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

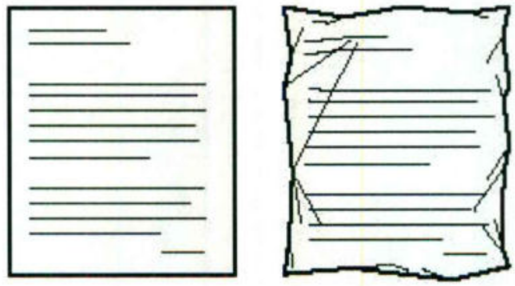


Figura 4.18: Una hoja de papel arrugada retiene sus mismas propiedades cualitativas.

Estas dos figuras pertenecerán a la misma clase de equivalencia, dos figuras homeomorfas tendrán los mismos características topológicas y bajo un homeomorfismo estas propiedades se preservarán.

Definición 4.9 Se dice que dos conjuntos X y Y son *homeomorfos* si existe una función continua y biyectiva $f\colon X \to Y$ tal que la función inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ también sea continua.

4.2.2. Ejemplos

Ejemplo 4.6 Sean (a, b) y (c, d) dos intervalos de $\mathbb{R}$ con la topología usual y sea $f\colon (a, b) \to (c, d)$ definida por

$$t \mapsto \frac{d-c}{b-a}(t-a)+c.$$

Nótese que f esta bien definida ya que para toda $a < x < b$, tenemos $0 < x - a < b - a$, por lo que

$$\frac{1}{b-a}(x-a) < 1,$$

de modo que, al multiplicar por $d - c$,

$$\frac{d-c}{b-a}(x-a) < d-c;$$

sumando c a ambos lados concluimos

$$\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c < d,$$

que era lo que se quería probar. Así pues, f "estira" o "contrae" el segmento (a, b) hasta (c, d), como se muestra en la figura 4.19.

Nótese que lo que hace esta transformación es estirar o encoger dependiendo de la magnitud del segmento (a, b) con respecto al segmento (c, d). Dado un abierto (x_1, y_1) en (a, b) su imagen bajo h es

$$\left(\frac{d-c}{b-a}(x_1-a)+c, \frac{d-c}{b-a}(y_1-a)+c\right),$$

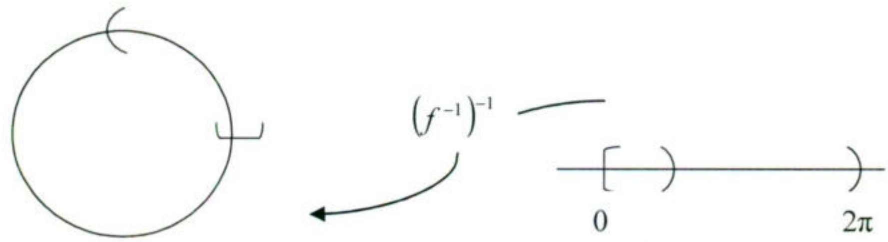


Figura 4.17: Función inversa de $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

interior del segmento $[0, 2\pi)$ se divide al segmento en dos subconjuntos ajenos, mientras que si se quita cualquier punto de la circunferencia, este no la parte en dos subconjuntos ajenos. ¿Se podría encontrar otra propiedad cualitativa que no compartan?

Con el ejemplo anterior, es claro que no se puede pegar, en caso contrario la función ya no sería inyectiva por lo que no se podría definir la función inversa, y tampoco se puede cortar, pues puntos cercanos no irían a puntos cercanos, por lo que la función ya no sería continua. Vemos entonces que es necesario, para mantener las mismas propiedades cualitativas, las siguientes cuatro propiedades:

1. Que puntos distintos tengan imágenes distintas: no se puede pegar.

2. Que cada punto del codominio sea imagen de un punto del dominio: para poder definir una función inversa.

3. Que la función sea continua: que puntos cercanos vayan a dar a puntos cercanos, i.e., que no se pueda romper.

4. Que la función inversa también sea continua: que imágenes cercanas provengan de valores cercanos.

4.2. Homeomorfismos

4.2.1. Definición

Si se tomara una hoja de papel, se doblara y después se desdoblara, es claro que cualitativamente se tienen las mismas propiedades.

Dadas dos figuras A y B, si es posible encontrar una transformación biunívoca, es decir, tal que a cada punto de A le corresponde uno y sólo uno de la figura resultante B y para cada punto b de la figura resultante B existe un punto a de la figura A cuya imagen bajo dicha transformación es b, y esta transformación es continua y la transformación inversa también es continua; entonces se dirá que las dos figuras son *homeomorfas* y dicha transformación se le conoce como *homeomorfismo*.

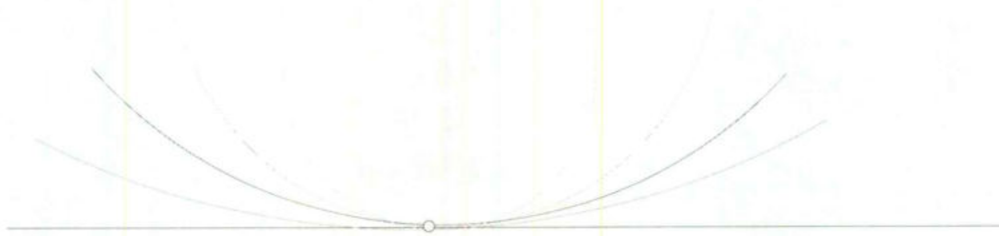


Figura 4.16: Segmentos "no cerrados" y la recta real.

sería una función de $(-1,1)$ a $[-1,1]$ con las propiedades anteriores por lo cual se estaría hablando que dichos conjuntos son "lo mismo" cualitativamente; ¿será esto posible? Por ejemplo, si se toma cualquier punto x en $(-1,1)$ dicho punto lo divide en dos conjuntos $(-1,x)$ y $[x,1)$ diferentes del vacío y conteniendo un número no finito de puntos. En cambio, el conjunto de $[-1,1]$ no tiene dicha propiedad para todos sus puntos, ya que si se toma el 1, por ejemplo, se divide el conjunto en dos conjuntos distintos del vacío $[-1,1)$ y $\{1\}$, pero uno de ellos con un sólo elemento, lo cual es imposible en $(-1,1)$. Cualitativamente son diferentes, es decir, topológicamente.

Si se considera el ejemplo 4.1, es claro que $f(0)=f(2\pi)$, por lo que es necesario definir la función en el intervalo $[0,2\pi)$ para poder definir la función inversa (es necesario que la función sea inyectiva). Surge la pregunta: ¿la función cumple con las cuatro propiedades necesarias para que el intervalo $[0,2\pi)$ y el círculo unitario tengan las mismas propiedades cualitativas, a saber, inyectividad, suprayectividad, continuidad e inversa continua? Es inmediato ver que la función es inyectiva, suprayectiva es decir que todo punto de C es imagen de algún punto del intervalo $[0,2\pi)$, y continua. Así pues, lo único que falta probar es la continuidad de la función inversa f^{-1}, ¿es $[0,2\pi)$ cualitativamente equivalente con C? Tenemos que $f^{-1}\colon C\to[0,2\pi)$ está dada por

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}\tan^{-1}\dfrac{x}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{si } y=0 \text{ y } x=1,\\ \pi & \text{si } y=0 \text{ y } x=-1.\end{cases}$$

Para determinar su continuidad, considérese el abierto $[0,\frac{\pi}{2})$; tenemos $(f^{-1})^{-1}[0,\frac{\pi}{2})=\widehat{(1,0)(0,1)}$, es decir, el arco de la circunferencia que une al punto $(1,0)$ inclusive, con el punto $(0,1)$, sin incluirlo, en sentido contrario a las manecillas del reloj, el cual no es un abierto de C. Esto lo que señala es que ambos conjuntos no son "topológicamente iguales": para poder deformar (o transformar) el segmento $[0,2\pi)$ en la circunferencia sería necesario pegar dos puntos al igual que para poder transformar la circunferencia en el segmento sería necesario romper, lo cual ambas cosas no son deseables ya que por un lado, al pegar dos puntos no se podría definir la función inversa y al romper ya no tendríamos que puntos cercanos fueran a dar a puntos cercanos. Lo anterior significa que no son topológicamente equivalentes, por ejemplo al quitar un punto del

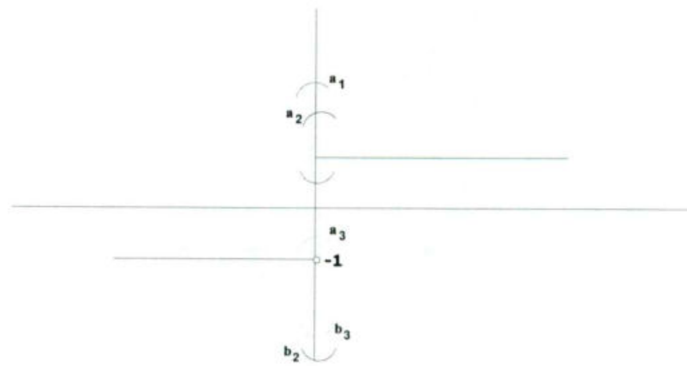


Figura 4.14: Función signo.

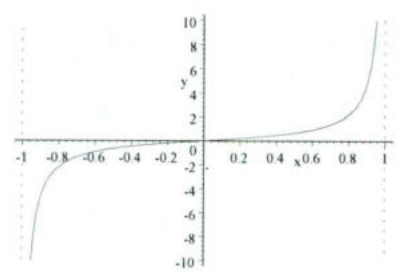


Figura 4.15: Gráfica de $f(t) = \dfrac{t}{1-t^2}$.

sucede con la imagen inversa de un abierto (a, b)? Tenemos

$$f^{-1}(a,b) = \left(\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a}, \frac{-1+\sqrt{1+4b^2}}{2b} \right).$$

Es más se observa que si se tiene un abierto de la forma (a, b) entonces

$$f(a,b) = \left(\frac{a}{1-a^2}, \frac{b}{1-b^2} \right),$$

así que f^{-1} es continua también.

Parece que al intervalo $(-1, 1)$ se le puede alargar tanto como se quiera pero sin *cortar*, es decir, $(-1, 1)$ y el conjunto de los números reales son dos conjuntos cualitativamente hablando iguales con la topología usual. También se puede retorcer tanto como se quiera pero *sin pegar.* Por ejemplo, la recta real y la gráfica de la función $f(x) = x^2$ (figura 4.16). ¿Sería posible hacer lo mismo con el intervalo $[-1, 1]$? En caso de que se encontrara dicha función lo que se podría obtener

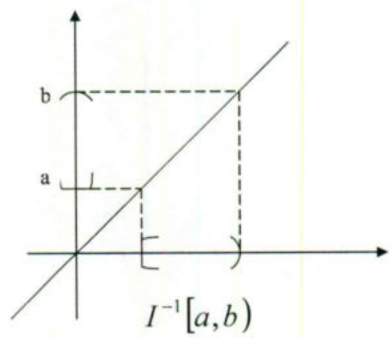


Figura 4.13: $(I^{-1})^{-1}([a,b)) = [a,b)$.

Por ejemplo, en $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_I \rangle$ al tomar un abierto cualquiera, digamos el $(0,1)$ este se puede separar o ponerlo como la unión de dos abiertos ajenos, $(0,1) = (0,\frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4},1)$, y lo cual no es posible en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_U)$. Separar un conjunto, será una propiedad cualitativa siempre y cuando esto sea por la vía de abiertos.

Ejemplo 4.4 Sea $f\colon \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_I \rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_U \rangle$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

esta función se llama *función signo*. Se afirma que dicha función es continua. En efecto, sea (a,b) un abierto en $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_U \rangle$,

$$f^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 1 \notin (a,b) \text{ y } -1 \notin (a,b), \\ [0,\infty) & \text{si } 1 \in (a,b) \text{ y } -1 \notin (a,b), \\ (-\infty,0) & \text{si } 1 \notin (a,b) \text{ y } -1 \in (a,b), \\ \mathbb{R} & \text{si } 1 \in (a,b) \text{ y } -1 \in (a,b). \end{cases}$$

En los cuatro casos posibles la imagen inversa del abierto (a,b) es un abierto en $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_I \rangle$. Se concluye que f es continua a pesar de que su gráfica "está rota." (figura 4.14).

Ejemplo 4.5 Sea $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$$

Al graficar (figura 4.15) se observa que puntos diferentes tienen imágenes diferentes y que para cada real se puede encontrar un punto en el intervalo $(-1,1)$ cuya imagen es dicho real. ¿Que

1. Todo abierto es unión de discos abiertos. En efecto, para todo punto y de abierto V existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B_{d_e}(y, \varepsilon_y) \subset V$, así que podemos escribir

$$V = \bigcup_{y \in V} B_{d_e}(y, \varepsilon_y).$$

2. En consecuencia, $f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{y\in V} B_{d_e}(y, \varepsilon_y)\right) = \bigcup_{y \in V} f^{-1}(B_{d_e}(y, \varepsilon_y))$.

Por esta razón es suficiente con considerar la imagen inversa de un disco $V = B_{d_e}(y, \varepsilon) = (c, d)$:

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } (c,d) \cap (a,b) = \emptyset, \\ \left(\dfrac{c-a}{b-a}, \dfrac{d-a}{b-a}\right) & \text{si } (c,d) \subset (a,b), \\ \left(0, \dfrac{d-a}{b-a}\right) & \text{si } c < a < d < b, \\ \left(\dfrac{c-a}{b-a}, 1\right) & \text{si } a < c < b < d, \\ (0,1) & \text{si } c \leq a < b \leq d. \end{cases}$$

En cualquier caso, se tiene $f^{-1}(V)$ es un abierto, por lo que f es continua.

Ejemplo 4.3 Sea $I\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_I) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_U)$, donde I es la función identidad y $\mathcal{T}_U$ y $\mathcal{T}_I$ son la topología usual y la topología del límite inferior, respectivamente. Claramente, I es una función biyectiva. ¿Es I continua? Nuevamente se estudiará el caso de un intervalo de la forma (a, b), por la misma razón del ejemplo anterior. Si $(a, b) \in \mathcal{T}_U$ entonces $I^{-1}(a, b) = (a, b)$ el cual es un abierto en $\mathcal{T}_I$ como se demostró anteriormente, concluyendo que I es continua.

Como I es biyectiva se puede definir I^{-1}. ¿Se puede asegurar que I^{-1} será continua? Como se sabe, $I^{-1}\colon \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_U \rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_I \rangle$ está dada por $I^{-1}(x) = x$. Por ende, tenemos que, como $[c, d) \in \mathcal{T}_I$ pero $(I^{-1})^{-1}([c, d)) = [c, d) \notin \mathcal{T}_U$ (figura 4.13), la inversa I^{-1} no es continua. Habrá que notar que a pesar de poder trazar la gráfica de I^{-1} sin levantar la mano, la función ya no resulta continua. La configuración que se ha dado a los reales, es diferente a la de los reales con la métrica euclidiana. Al no ser continua la función inversa de la identidad (la cual es la misma función) nos indica que habrá al menos una propiedad cualitativa diferente entre ellos. ¿Cuál propiedad? Las diferentes topologías en un mismo conjunto dan diferentes conformaciones, y son en éstas en las que se basarán las propiedades cualitativas.

Aunque la función *identidad* I es continua y biyectiva no se asegura que la función inversa sea continua. Topológicamente se puede tener un conjunto que no tenga una transformación continua a sí mismo al emplear dos topologías distintas: todo dependerá de la estructura que tenga interiormente, los subconjuntos abiertos (propiedades cualitativas), es decir, de la topología que se le dé para determinar su estructura interior, desde la concepción topológica.

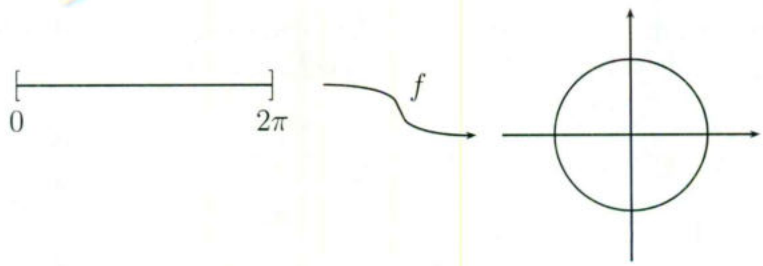


Figura 4.11: $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

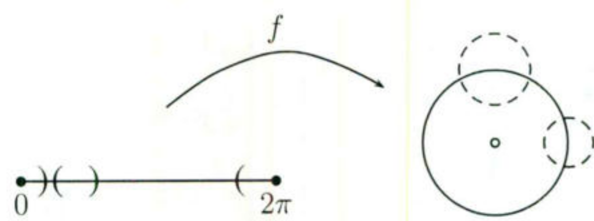


Figura 4.12: Imágenes inversas para f del ejemplo 4.1.

(a) Es de la forma $(a, b) \subset [0, 2\pi]$.

(b) Es de la forma $[0, c) \cup (d, 2\pi]$, los cuales son conjuntos abiertos en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 4.2 Sea $g\colon (0,1) \to (2,5)$ dada por

$$t \mapsto 3t + 2.$$

Lo que realmente se esta haciendo es "estirar" el intervalo $(0,1)$ hasta lograr el "triple de su longitud" y trasladarlo dos unidades obteniendo el intervalo $(2,5)$, es decir a cada punto del intervalo $(0,1)$ le corresponde uno y solo un punto del intervalo $(2,5)$ de forma continua.

Podemos generalizar la función g para cualquier intervalo abierto (a,b) definiendo a la función $f\colon (0,1) \to (a,b)$ por

$$t \mapsto (b-a)t + a,$$

donde consideramos a $(0,1)$ y (a,b) como subconjuntos del espacio topológico $(\mathbb{R}, d_e)$, cuya topología esta inducida por la métrica euclidiana y los cuales heredan dicha topología.

Para demostrar que f es continua debemos mostrar que para todo abierto V de $\mathbb{R}$ con la topología usual, su imagen inversa es a su vez un abierto. Observemos, sin embargo, que es suficiente con demostrar que la imagen inversa de un intervalo (c,d) arbitrario es abierta por dos razones:

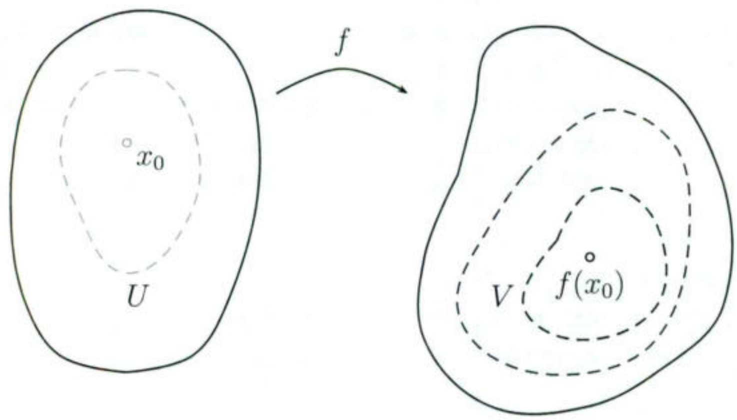


Figura 4.10: La función $f\colon \langle X, \mathcal{T}_X\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es continua.

Proposición 4.2 *Sea $f\colon \langle X, \mathcal{T}_X\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$. La función f es continua según la versión 4 de la definición si y sólo si es continua según la versión 5 de la misma.*

Demostración *Necesidad.* (Versión 4 implica versión 5). Sea $V \in \mathcal{T}_Y$; debemos demostrar que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Si $f^{-1}(V) = \emptyset$, es obvio que $f^{-1}(V) \subset \mathcal{T}_X$. Así pues, supongamos que existe alguna $x^* \in f^{-1}(V)$. Como $f(x^*) \in V$, existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $x^* \in U$ y $f(U) \subset V$. Luego, $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto.

Suficiencia. (Versión 5 implica versión 4). Sea $x_0 \in X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$ tal que $f(x_0) \in V$. Como f es continua según la versión 5, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, de modo que existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $x_0 \in U \subset f^{-1}(V)$ por lo que $f(U) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$. ∎

4.1.2. Ejemplos

Definición 4.8 Si $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio topológico y $Y \subset X$, entonces $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es un *subespacio topológico* de $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ cuando $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Ejemplo 4.1 Sea $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$t \mapsto (\cos t, \sin t),$$

donde se está considerando $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ (como subespacio topológico) con la topología usual y $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la métrica euclidiana. Obsérvese que f es continua y que manda al segmento $[0, 2\pi]$ en la circunferencia con centro en el origen y radio uno (figura 4.11). Además, los abiertos en la circunferencia son arcos de circunferencia, para los cuales, al obtener la correspondiente imagen inversa, resultan dos casos (figura 4.12):

que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Equivalentemente, $f\colon X \to Y$ es continua en x_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{d_X}(x_0, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x_0, \varepsilon))$.

Al tener una métrica, esta induce a la definición de abiertos por medio de los discos; es más, un conjunto es abierto si éste es unión de discos, por lo que dado una métrica ésta induce una topología muy particular. La definición anterior se puede dar en términos de abiertos sin la necesidad de una métrica.

Definición 4.6 (Versión 4) Sea $f\colon \langle X, \mathcal{T}_1\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}_2\rangle$ y sea $x_0 \in X$ ($\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías inducidas por d_1 y d_2, respectivamente). Decimos que $f\colon X \to Y$ es continua en x_0, si para todo abierto V de Y que contenga a $f(x_0)$ existe un abierto U de X que contenga a x_0, tal que $f(U) \subset V$.

Es un cambio de perspectiva: en vez de que puntos cercanos vayan a dar a puntos cercanos, lo que importa es que puntos cercanos provengan de puntos cercanos. Veamos que las versiones 3 y 4 de la definición de continuidad son equivalentes entre sí.

Proposición 4.1 *Sea $f\colon \langle X, d_1\rangle \to \langle Y, d_2\rangle$ y sea $x_0 \in X$. La función f es continua según la versión 3 de la definición si y sólo si es continua según la versión 4 de la misma.*

Demostración *Necesidad.* (Versión 3 implica versión 4). Supóngase que f es continua en x_0 según la versión 3 de la definición y sea $V \subset Y$ abierto (en la topología inducida por la métrica d_2) tal que $f(x_0) \in V$. Como V es abierto y $f(x_0) \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_2}(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Entonces, por la versión 3 de la definición de continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{d_1}(x_0, \delta)) \subset B_{d_2}(f(x_0), \varepsilon)$. Haciendo $U = B_{d_1}(x_0, \delta)$ tenemos que U es un abierto y $f(U) \subset V$.

Suficiencia. (Versión 4 implica versión 3). Supóngase que f es continua en x_0 según la versión 4 de la definición y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como $B_{d_2}(f(x_0)), \varepsilon)$ es abierto en Y, tenemos que existe un abierto U de X que contiene a x_0 tal que $f(U) \subset B_{d_2}(f(x_0)), \varepsilon)$. Por la definición de conjunto abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_1}(x_0, \delta) \subset U$. Concluimos que

$$f(B_{d_1}(x_0, \delta)) \subset U \subset B_{d_2}(f(x_0), \varepsilon). \blacksquare$$

Nótese que al hablar de abiertos ya no fue necesario una métrica, por lo que la definición anterior se puede generalizar a espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_X\rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ de la siguiente manera:

> Una función $f\colon \langle X, \mathcal{T}_X\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es continua en $x_0 \in X$ si para todo $V \in \mathcal{T}_Y$ con $f(x_0) \in V$, tenemos $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ (ya que $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$). En otras palabras, la preimagen de abiertos, es un abierto.

Por último, una función es continua en todo X si es continua en cada uno de sus puntos; obtenemos la siguiente versión:

Definición 4.7 (Versión 5) $f\colon \langle X, \mathcal{T}_X\rangle \to \langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ es continua si para todo $V \in \mathcal{T}_Y$, tenemos $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

como el disco de radio ε centrado imagen del punto x_0,

$$B_d(f(x_0), \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\} = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Así pues, la definición se puede reescribir como

> Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en x_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Esta definición se generaliza trivialmente para funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ ya que al hablar de $|x - x_0| < \delta$ se esta hablando de la distancia euclidiana, por lo que si x, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ basta con emplear también la distancia euclidiana.

Nótese que aquí se está usando la distancia euclidiana, aunque hablar de "cercanía" sólo implica distancia, no necesariamente la euclidiana, por lo que se puede generalizar esta noción de continuidad para cualquier distancia obteniendo la siguiente definición:

Definición 4.5 (Versión 3) Sea $f\colon \langle X, d_1\rangle \to \langle Y, d_2\rangle$ (d_1 y d_2 métricas) y sea $x_0 \in X$. Decimos que f es continua en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, x_0) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

En este caso ya se esta generalizando la métrica, es decir, no sólo es la distancia euclidiana sino de cualquier función distancia y, además, d_1 y d_2 pueden ser diferentes, de modo que la cercanía de los puntos es relativa a la métrica que se esté usando.

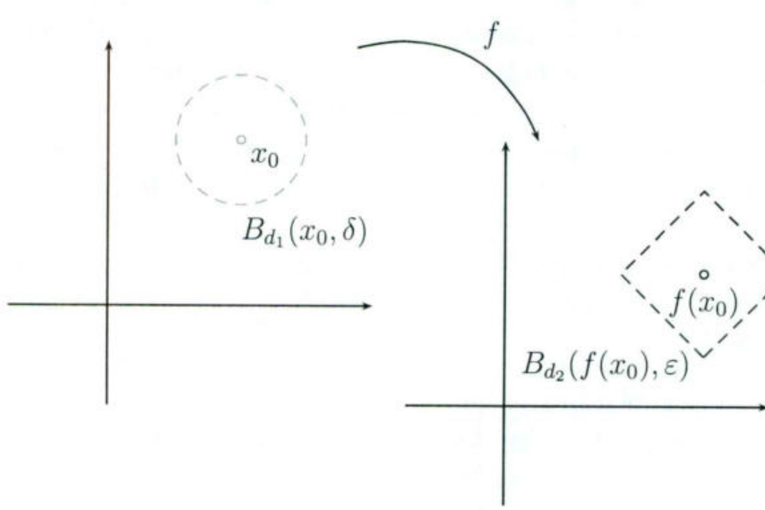


Figura 4.9: La función $f\colon \langle X, d_1\rangle \to \langle Y, d_2\rangle$ es continua aún cuando d_1 y d_2 son métricas distintas.

Por esta razón, dados dos espacios métricos $\langle X, d_X\rangle$ y $\langle Y, d_Y\rangle$ y una función $f\colon X \to Y$, se define que f es continua en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x, x_0) < \delta$ implica

(ii) x_0 esta en el dominio de f.

(iii) Que coinciden el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ y el valor de la función en x_0.

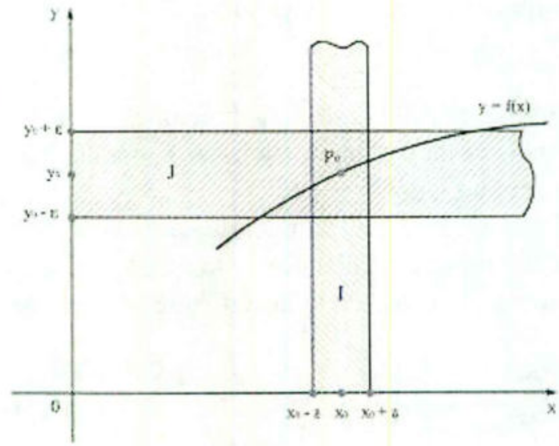


Figura 4.8: Función continua en x_0.

Ahora, esta misma versión puede replantearse en términos concretos de distancia: un cambio pequeño en x se tendrá como consecuencia también un cambio pequeño en $f(x)$ y éste se podrá mantener tan pequeño como se quiera siempre que las x se encuentren muy "cercanas" a x_0. Gráficamente una función es continua en cada punto de un intervalo como aquella función cuya gráfica no se rompe, es decir se puede dibujar ésta sin separar el lápiz del papel. Recordemos que la palabra "continuo" se usa para describir un proceso sin cambios bruscos.

Definición 4.4 (Versión ε-δ o versión 2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Esto significa que para los puntos muy cercanos a x_0, tanto por la derecha como por la izquierda, $|x - x_0| < \delta$, sus imágenes estén muy cercanas a $f(x_0)$, la cual esta definida, tanto por la derecha como por la izquierda de x_0. Es decir puntos muy cercanos a x_0, son transformados a puntos muy cercanos a $f(x_0)$: no hay cambios abruptos.

Como se habla de distancia y se habla de puntos que distan de x_0 menos que δ, y en el caso anterior se habla del valor absoluto (la distancia euclidiana en los $\mathbb{R}$), se puede considerar tanto el disco de centro x_0 y radio δ,

$$B_{d_e}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

(a) El bitoro es una figura conexa (una sola pieza).

(b) Figura no conexa.

Figura 5.5: Las figuras pueden estar formadas de una o más piezas.

(a) Figura sin bordes.

(b) Figura con bordes

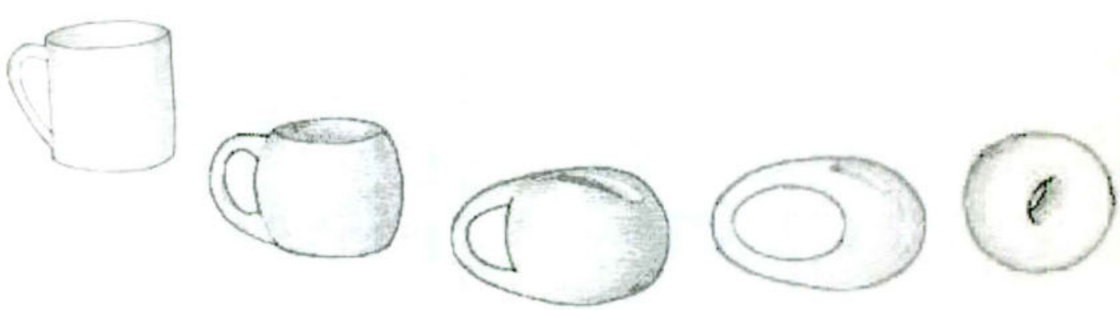
Figura 5.6: Figuras sin bordes y con bordes.

5.2. Clasificación

Consideremos varios objetos (superficies) de nuestro alrededor, y supongamos que no están fabricadas son materiales rígidos sino elásticos que nos permiten deformarlas sin romper ni pegar.

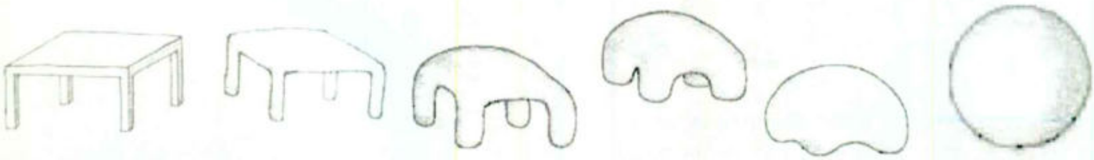
5.2.1. Una taza

Observemos la siguiente sucesión de deformaciones:



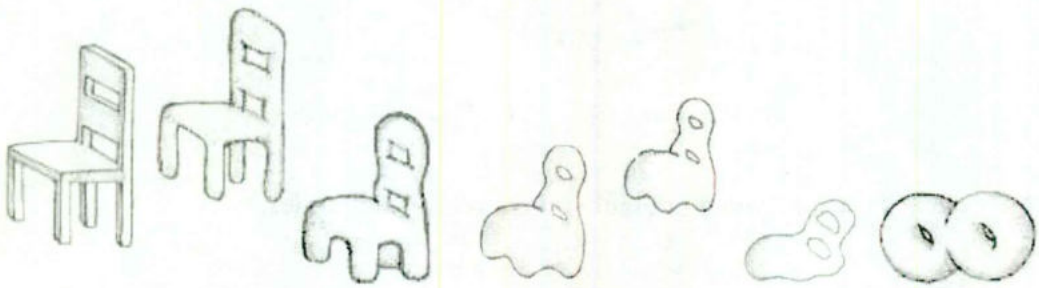
Concluimos que la taza es homeomorfa a un toro.

5.2.2. Una mesa

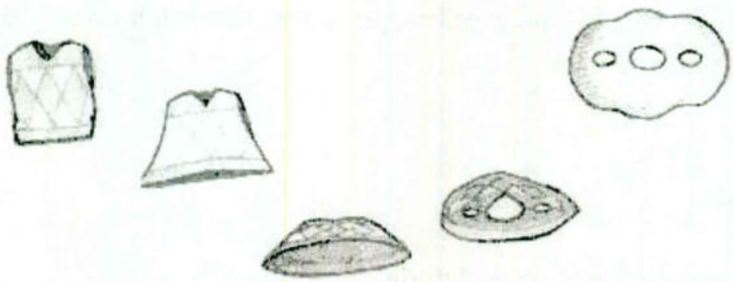


Concluimos que una mesa es homeomorfa a una esfera.

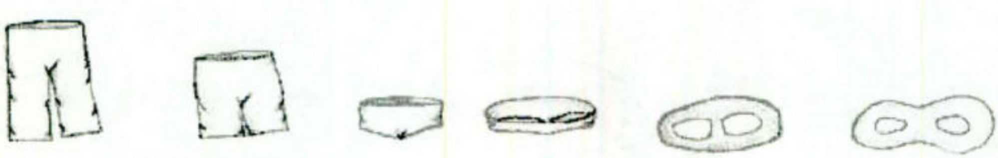
5.2.3. Una silla con dos hoyos en el respaldo



5.2.4. Un chaleco



5.2.5. Un pantalón



En virtud de estos ejemplos, se puede *conjeturar* que toda superficie conexa y cerrada es homeomorfa a una esfera, a un toro, a un bitoro, a un tritoro, etc. Antes de poder demostrar dicha conjetura o dar un contraejemplo, es necesario verificar por qué una esfera y un toro (figura 5.4) no se encuentran en la misma clase. ¿Qué propiedad topológica tiene una figura que no tiene la otra? Análogamente se puede probar que el bitoro, tritoro, etc. no son topológicamente equivalentes.

5.3. Conceptos básicos

5.3.1. Conceptos intuitivos

Si se pensara por un momento estar inmersos en la circunferencia o en el toro y se tratara de buscar alguna propiedad topológica que los distinga, ¿cuál podría ser dicha propiedad?; obviamente es algo relacionado con el agujero. Dados dos puntos, tanto en la esfera como en el toro, se puede ir de uno al otro sin salir de la superficie, ¿cómo afecta entonces el agujero en el toro? Si se traza una curva cerrada simple, es decir, topológicamente homeomorfa a una circunferencia, y se coloca en diferentes posiciones en la esfera, entonces, independientemente de dónde se ponga la curva cerrada simple, se puede observar que dicha curva divide en dos partes ajenas a la circunferencia. Es decir, si se corta alrededor de la curva, obtendríamos dos piezas, ajenas. Al colocar una curva

Figura 5.7: Una curva cerrada simple divide en dos partes ajenas a la circunferencia.

cerrada simple en el toro, ¿sucederá lo mismo? ¿habrá diferencias dependiendo del lugar en donde se coloque la curva cerrada simple?

Figura 5.8: Efectos de una curva cerrada simple en un toro.

Al trazar la curva cerrada simple como en el primer toro de la figura 5.8, dicha curva separa al toro en dos conjuntos ajenos (los puntos que están en el interior, lo cual sucede con la circunferencia siempre, y los puntos que se encuentran en el exterior). Mientras que al trazar la curva alrededor del toro como en el segundo caso (el cual es el caso natural) se observa que no sucede lo mismo, es decir, los puntos del toro no están divididos en dos conjuntos ajenos. O bien si se corta alrededor de la curva simple en el primer caso, se dividiría el toro en dos pedazos mientras

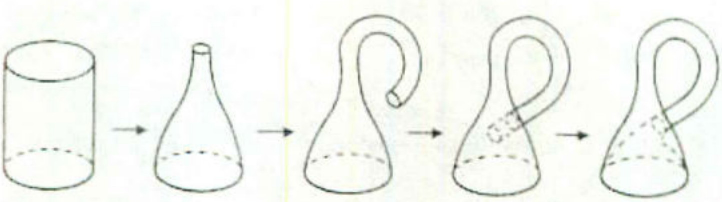
Figura 5.9: Para unir un par de puntos en el toro puede ser necesario o no cruzar por la curva simple.

en el segundo caso se tendría un solo pedazo (figura 5.9). Dicho de otra manera, en el primer caso para poder unir un punto del "interior" de la curva cerrada simple con un punto en el "exterior" es necesario cruzar la curva simple mientras que en el segundo caso cualquier par de puntos en el toro ser pueden unir sin la necesidad de cruzar por la curva simple.

Así pues, se puede afirmar que dada *cualquier* curva cerrada simple en la esfera divide a ésta en dos conjuntos ajenos, mientras que esto no sucede con el toro. Es decir, existen curvas simple cerradas que no dividen al toro en dos conjuntos ajenos, ¿dónde se deben de colocar dichas curvas cerradas simples para que no dividan al toro en dos? ¿qué se puede concluir? Esto confirma que no son dos figuras topológicamente equivalentes. Análogamente, se podría afirmar que el toro y el bitoro no son homeomorfos, y que éste último tampoco es homeomorfo con el tritoro, etc.

Obsérvese que al cortar el toro por un curva cerrada simple alrededor como en el dibujo, se obtendría un cilindro. Para volver al toro es necesario pegar los bordes del cilindro en forma correcta: si se cambia de sentido lo que se obtendría es la botella de Klein, como se muestra en la figura 5.10. ¿Y la botella de Klein a qué figura es homeomorfa? ¿A la esfera, al toro, al bitoro, etc.? O bien,

(a) Toro.



(b) Botella de Klein.

Figura 5.10: Al unir los extremos del cilindro se puede obtener un toro o una botella de Klein.

¿qué distingue a la botella de Klein de las supeficies anteriores?

Para entender mejor la botella de Klein habrá que recordar la banda de Möbius: ésta se puede construir con una tira de papel, dando con un medio giro y pegando ambos extremos, de donde resulta una de las figuras topológicas más curiosas; se trata de un objeto que tiene una sola cara un solo borde, ambos continuos como se puede observar en la figura 5.11. Escher tenía gran afición por la banda de Möbius pues aparece en varias de sus obras.

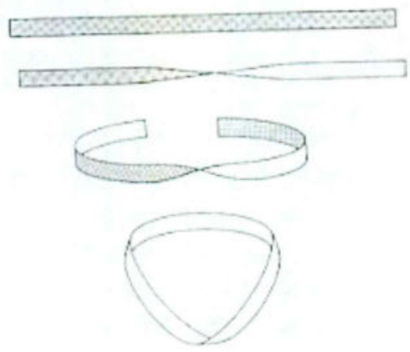


Figura 5.11: Pasos de la construcción de una banda de Möbius.

¿Cuál es la particularidad de la Banda de Möbius? ¿Qué la distingue de un cilindro (figura 5.12)? Si bien es cierto que debe ser algo que está relacionado con la torcedura pues esto se puede observar al estar afuera de la banda; pero en caso de estar inmerso en la banda, ¿cómo se podría distinguir una banda de Möbius de un cilindro? Se pueden notar algunas características pro-

(a) Banda de Möbius. (b) Cilindro.

Figura 5.12: Al pegar los extremos de una banda se puede formar una banda de Möbius o un cilindro.

pias de la banda de Möbius. Por ejemplo, si se traza una curva a través de la banda y regresamos al mismo lugar se observa que dicha curva se encuentra en ambos lados de la banda, es decir, se puede recorrer toda la superficie, sin necesidad de "salirse de ella," es decir, es unilateral, tiene un sólo lado. Si se intenta pintar "al derecho y al revés" o "por dentro y por fuera" con colores distintos se fracasaría; es una superficie unilateral, al pintarla "de un lado" quedará completamente pintada. Esta propiedad cualitativa la hace distinta al cilindro circular ya que si uno se encuentra en la parte exterior del cilindro sería necesario "cruzar un borde" para poder ir a la parte interior. Esta cualidad de la banda de Möbius de tener un sólo lado la hace diferente del cilindro ya que al trazar una curva y marcarla con una flecha hacia arriba a lo largo de la curva y al considerar en un mismo punto la flecha en ese lado y en la parte posterior se encontraría con que las flechas están totalmente en sentido contrario; una superficie con esta característica es llamada *no-orientable.* Es decir, las superficies se pueden caracterizar por otro concepto topológico como *orientables* y *no-orientables.* Se puede demostrar que las superficies son *orientables* si y solo si son bilaterales y son *no-orientables* si y solo si son unilaterales, pero ese no es nuestro objetivo y está fuera del alcance de estas notas.

En la banda de Möbius, por ejemplo, es posible ir de un punto a otro (cualquier otro) sin necesidad de cruzar el borde. Es más, la banda de Möbius tiene una única curva frontera como efecto de la media torcedura ya que los lados opuestos se han juntado formando así una curva borde que es topológicamente equivalente a una circunferencia.

Regresando a la botella de Klein, vemos que dicha botella no es construible en tres dimensiones (figura 5.13): se tiene un cilindro abierto, un extremo se alarga, se dobla y "pasa" por la superficie sin romper ni intersectar, y finalmente se pega al otro extremo. Análogamente, como sucede con la banda de Möbius, aunque es una superficie de dos dimensiones, fisicamente no se puede construir en dos dimensiones debido a la media torcedura. La botella de Klein, no tiene curva frontera, las dos curvas fronteras del cilindro original han sido unidas de tal manera que el "lado exterior" se ha unido con el "lado interior" resultando que el "interior" o "exterior" no se distingan. Se obtiene así, que la superficie de la botella de Klein sea cerrada y de un solo lado. Esta botella sería construible en un espacio físico de cuatro dimensiones, lo que permitiría la media torcedura que pone en contacto los bordes interior y exterior de una botella convencional. El concepto que esta

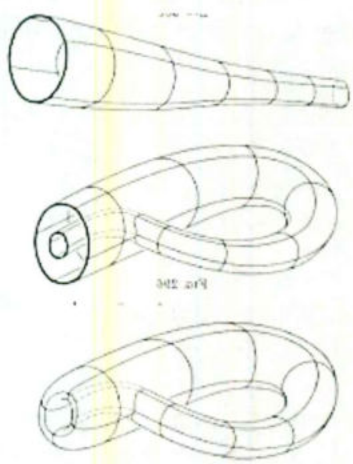


Figura 5.13: Construcción de la botella de Klein.

sumamente ligado a las superficies de un solo lado, unilaterales, es el concepto de "orientabilidad;" la orientabilidad es otra propiedad topológica de los objetos. Intuitivamente se dice que una superficie es "orientable" si dado cualquier punto P en la superficie y C una curva continua cerrada conteniendo a P en su interior, dándole una orientación esta se preserva a lo largo de cualquier trayectoria cerrada desde P. En cualquier otro caso se dice que la superficie es *no orientable.* Por ejemplo, podemos ver en la figura 5.14 que la Banda de Möbius es no orientable.

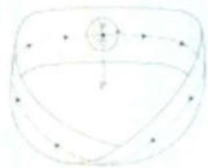


Figura 5.14: La banda de Möbius no es orientable.

¿Cómo construir otras figuras no orientables? La banda de Möbius tiene una sola curva frontera ya que otro efecto de la media torcedura es la de que los lados opuestos se han juntado formando así una curva que es topológicamente equivalente a una circunferencia. En consecuencia, se puede construir otra figura no orientable pegando al por borde una banda de Möbius con una esfera con un agujero (figura 5.15). Si se quisiera visualizar dicha construcción en el espacio tridimensional

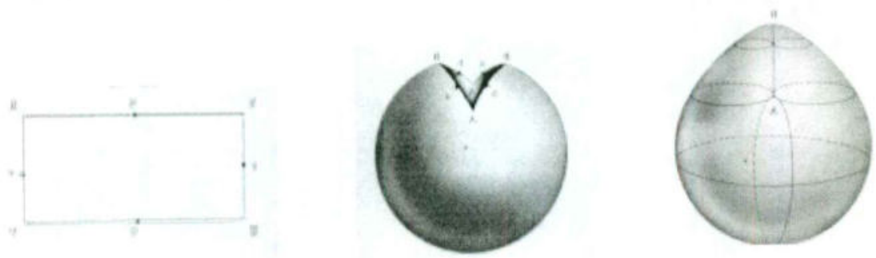


Figura 5.15: Al adherir una banda de Möbius a una esfera sin un punto por el borde se obtiene una superficie no orientable.

ya no resulta tan simple como describir el procedimiento, ya que la superficie resultante tendría que autointersectarse. Razón por la cual no encontramos superficies no orientables en el espacio tridimensional, de igual manera que la banda de Möbius no se encuentra en el espacio bidimensional.

De la misma manera se pueden pegar varias bandas de Möbius a una esfera repitiendo el proceso anterior. En el caso de pegar una sola banda de Möbius se le llama *plano proyectivo,* y en el caso de pegar dos se obtiene la botella de Klein; así sucesivamente es posible construir otras superficies no-orientables.

Antes de regresar a confirmar la conjetura o dar un contraejemplo, se observa que el toro es topológicamente equivalente a una esfera con un asa, el bitoro a una esfera con dos asas, etc., por lo que se podría decir que el toro, el bitoro, etc. son esferas a las que se les ha hecho dos "agujeros" o un número par de ellos (ajenos) y se les ha pegado los extremos de un cilindro con los bordes de los agujeros formando así un "asa."

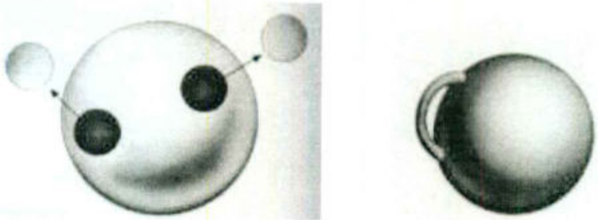


Figura 5.16: Si se recortan dos agujeros en la esfera y se pegan los extremos de un cilindro se obtiene un figura topológicamente equivalente a un toro.

Tanto en los extremos del cilindro como en los bordes de los agujeros de la esfera se deben indicar la manera correcta en que se debe de pegar el cilindro. Es importante hacer notar que si se marcaran flechas, el sentido de las flechas en el cilindro es el mismo sentido y que las flechas en los bordes de los agujeros de la esfera señalan sentidos opuestos. Una esfera con un asa pegada como se indica en la figura 5.16 es homeomorfa a un toro. De la misma manera como se pega un asa a la esfera, se pueden pegar *varias* asas a la esfera iterando el proceso. Todas las superficies construidas de esta forma son superficies con dos lados y equivalentes a un n-toro.

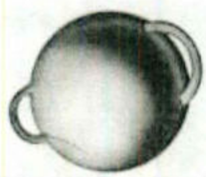


Figura 5.17: Una esfera con dos asas es equivalente a un bitoro.

¿Es cierto que toda superficie cerrada y conexa es topológicamente homeomorfa a la esfera, una esfera con un asa, a una esfera con dos asas, a una esfera con tres asas, etc.? La respuesta es no, ya que se pueden obtener aquellas superficies no-orientables, una esfera con un agujero a la que se le ha pegado una banda de Möbius como el plano proyectivo, la botella de Klein, una esfera pegada tres bandas de Möbius, etc.

Es decir toda superficie conexa y cerrada es homeomorfa a una esfera, a una esfera con una asa, una esfera con dos asas, o a una esfera con una banda Möbius, a una esfera con dos bandas de Möbius, etc.

Veamos grosso modo el por qué. Antes de dar una justificación habrá que considerar algunas definiciones y proposiciones.

5.3.2. Clasificación

Definición 5.1 Una curva cerrada simple separa a una superficie M si M queda dividida en dos.

Definición 5.2 Una superficie M es esférica si toda curva cerrada simple separa a M.

Ejemplo 5.1 La esfera es esférica.

Ejemplo 5.2 El toro no es esférico.

Definición 5.3 El *número de Euler* de un poliedro (una superficie cerrada formada por varias caras poligonales) con v vértices, a aristas y c caras es $\chi(M) = v - a + c$.

Consideremos un poliedro de la geometría elemental; la célebre fórmula de Euler es $v-a+c = 2$, donde v es el número de vértices, a es el número de aristas y c es el número de caras. Por *poliedro* se entiende por un conjunto finito de polígonos (*caras*) relacionados mutuamente tal que se verifican las siguientes cuatro condiciones:

1. Dos polígonos cualesquiera del conjunto no tienen ningún punto interior en común.
2. Para cada lado de un polígono existen dos polígonos y solamente dos.
3. Dos polígonos cualesquiera del conjunto pueden unirse por una serie de polígonos de modo que cada uno de ellos tenga un lado común con el siguiente
4. Los polígonos colocados alrededor de un vértice cualquiera pueden ser dispuestos en orden cíclico de manera que dos polígonos consecutivos tengan un lado común que pase por éste vértice.

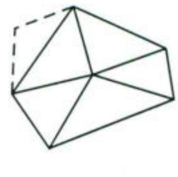
Un poliedro es *simple* si se puede deformar de manera continua en la superficie de una esfera.

Teorema 5.1 *Todo poliedro simple satisface la fórmula de Euler.*

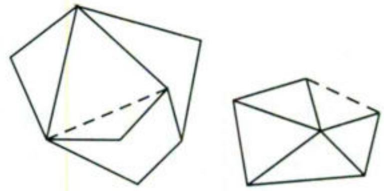
Demostración Se construye la imagen plana del poliedro simple. Se quita una cara del poliedro deformándose las otras caras hasta que puedan pertenecer al mismo plano. Aunque los polígonos en el plano seguramente no serán congruentes al polígono original, la red plana tiene tantos vértices v, así como aristas a, como el poliedro original, y tiene una cara menos $c - 1$. Si la red plana del poliedro tiene polígonos con más de tres lados, se traza una diagonal. Por lo que se estaría agregando una cara y una arista por lo que $\chi(M) = v - a + c$ no cambia. Se continua así hasta llegar a una triangulación.

Si se agrega un triángulo más:

a) Si tiene una arista en común con una arista de la red, se estaría aumentando un vértice, una cara y dos aristas por lo que $\chi(M) = v - a + c$ se mantiene igual.



b) Si se aumenta al unir una arista entre dos vértices, se estaría aumentando una arista y una cara por lo que $\chi(M) = v - a + c$ se mantiene igual.



Dicha red se puede obtener de un simple triángulo repitiendo las dos operaciones antes mencionadas, por lo que el valor de $\chi(M) = v - a + c$ en la red plana es la misma que en un triángulo simple, a saber, $\chi(M) = v - a + c = 3 - 3 + 1 = 1$. Pero como esta red tiene el mismo número de vértices, y el mismo número de aristas, pero una cara menos que el poliedro simple, se tiene que $\chi(M) = v - a + c = 1 + 1 = 2$ para cualquier poliedro simple. ∎

Este número se puede generalizar: dada una superficie cualquiera, como la esfera se puede obtener una división de la superficie por "polígonos curvilíneos" como cuando en el capítulo 4 se vio que la esfera era homeomorfa al tetraedro (ejemplo 4.13). Dichos polígonos curvilíneos deberán respetar las condiciones mencionadas al definir un poliedro, así que el número de Euler de una esfera es 2. Dicho número es independiente de la naturaleza de la división poligonal, por lo que se dice que la esfera tiene *característica* 2. Generalmente los polígonos más usados son los triángulos y se puede demostrar que toda superficie conexa cerrada es triangulable, dicha demostración requiere de más herramientas y se encuentra fuera del alcance de estas notas; veáse (Moise, 1977).

Ahora por ejemplo el toro se puede subdividir en 9 vértices, 18 aristas y 9 rectángulos, como se muestra en la figura 5.18, por lo que el toro tiene $\chi(M) = v - a + c = 0$. ¿Qué sucede con el

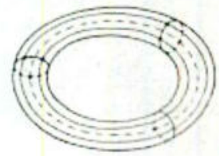


Figura 5.18: El toro se puede subdividir en 9 vértices, 18 aristas y 9 rectángulos.

bitoro? ¿Hay superficies con característica negativas?

Esta es una característica que es una invariante topológica ya que dos objetos son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo, una transformación continua de un objeto al otro, por lo que la división poligonal se mantendría. La afirmación conversa no es cierta en general, es decir, si dos superficies tienen la misma característica, ello no implica que sean homeomorfas.

Lema 5.1 *Si M es una superficie cerrada y conexa entonces $\chi(M) \leq 2$.*

Demostración Solamente se dará una idea de la demostración dada en (Micha, 1983b). Dada una triangulación Λ de la superficie M, se puede trazar una *gráfica* Γ (figura 5.19) donde cada vértice de Γ se encuentra dentro de uno de los triángulos de Λ y cada arista de Γ intersecta solamente una arista de la triangulación Λ; también se pedirá que dicha gráfica Γ sea conexa y que no sea cerrada, es decir, que todo vértice esté unido al resto de la gráfica por una única arista (que no tenga lazos). Siempre es posible encontrar una gráfica maximal Γ que satisfaga estas condiciones: ésta contiene tantos vértices como triángulos hay en Λ. Nótese que los vértices de la triangulación original Λ no están contenidos en la nueva gráfica Γ, pero *todos los vértices de* Λ se pueden unir por las aristas de Γ que no intersectan a las aristas de Γ, ya que no se permite que Γ sea cerrada. Los vértices de Λ se pueden unir con una gráfica a la que denotaremos por Γ^*.

Se tienen entonces las siguientes biyecciones:

$$\begin{aligned} \text{vértices de } \Lambda &\rightleftarrows \text{vértices de } \Gamma^*, \\ \text{triángulos de } \Lambda &\rightleftarrows \text{vértices de } \Gamma, \\ \text{aristas de } \Lambda &\rightleftarrows \text{aristas de } \Gamma \text{ y } \Gamma^*. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\chi(M) = \chi(\Lambda) = \text{vértices de } \Lambda + \text{triángulos de } \Lambda - \text{aristas de } \Lambda = \chi(\Gamma) + \chi(\Gamma^*),$$

donde definimos $\chi(G) =$ vértices de $G -$ aristas de G para toda gráfica G. Tenemos $\chi(\Gamma) = 1$ ya que cada vértice de Γ está relacionado con una arista y no es cerrado. $\chi(\Gamma^*) \leq 1$ ya que es posible que sea cerrada o bien que contenga varios lazos, concluyendo que $\chi(M) \leq 2$. ∎

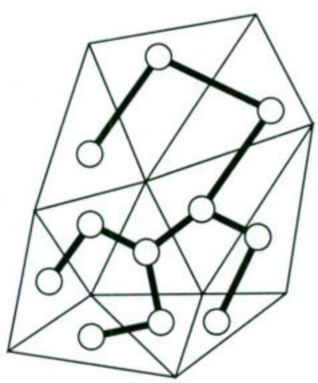


Figura 5.19: Parte de una triangulación Λ (la triangulación completa yace sobre la superficie) y su correspondiente gráfica conexa y no cerrada (sin lazos) Γ.

Lema 5.2 *Sea M una superficie cerrada y conexa. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) *M es esférica.*

b) $\chi(M) = 2$ *(donde* χ *es el número de Euler).*

c) M *es homeomorfa a una esfera.*

Demostración Al igual que en el lema anterior, solamente se dará un bosquejo de la demostración.

Para ver que a) implica b), procedamos por contradicción. Supongamos que M es esférica y definamos Γ y Γ^* como en el lema anterior; claramente el lema 5.1 se aplica a la esfera. En caso que $\chi(M) < 2$, se tendría

$$\chi(\Gamma^*) = \chi(M) - \chi(\Gamma) = \chi(M) - 1 < 1,$$

de modo que Γ^* contiene un lazo C que separa a M (véase la definición 5.1), por lo que C contiene un triángulo que contiene un vértice de Γ que no se puede unir con los otros vértices de Γ, una contradicción con la definición de Γ.

Ahora bien, b) implica c), pues si $\chi(M) = 2$, como $\chi(\Gamma) = 1$, se tendría $\chi(\Gamma^*) = 1$ por lo que ambas son gráficas que no contienen lazos ni son cerradas; éstas se pueden ir ensanchando obteniendo figuras homeomorfas a un disco cada una, sin intersecciones por lo que se pueden pegar obteniendo una superficie homeomorfa a una esfera.

La demostración de que c) implica a) queda fuera del alcance de estas notas, ya que si M es homeomorfa a una esfera se puede considerar como una demostración especial del Teorema de Jordan, el cual tampoco es objetivo estas notas. ∎

Observación 5.1 Se puede hablar de la relación que hay entre el número de lazos que se necesitan para dividir la superficie en dos partes, donde los lazos *deben estar en cadena* teniendo un solo punto en común con el lazo precedente en cada caso. Por ejemplo, en la figura 5.20 se ve como se necesitan dos lazos en cadena para dividir el toro en dos pedazos, 4 para dividir al bitoro, etc.

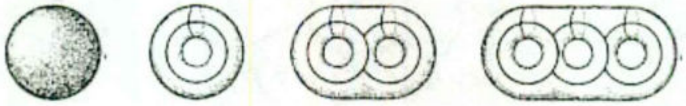


Figura 5.20: El número de "lazos en cadena" necesarios para separar una superficie en dos es una propiedad topológica.

Teorema 5.2 *Si* M *es una superficie cerrada y conexa, entonces* M *es homeomorfa a una esfera con* n*-asas* $(n \geq 0)$ *o a una esfera con* n *bandas de Möbius* $(n > 1)$*.*

Demostración Sea M una superficie, entonces $\chi(M) \leq 2$.

i) Si $\chi(M) = 2$ entonces M es homeomorfa a una esfera E.

ii) Si $\chi(M) < 2$ entonces M *no* es homeomorfa a una esfera E, por lo que existe una curva C que no divide en dos a M.

Al cortar alrededor de C, cuidando el sentido, se tienen dos posibilidades (estirando la orilla C):

a) Es un cilindro.

b) Es una banda de Möbius.

En el caso a) se obtienen dos círculos como borde (con flechas apuntado en sentidos contrarios) y se rellenan cada uno con un disco. En el caso b) queda un solo círculo y se rellena con un solo disco. A esta nueva superficie se le llama M_1 y

$$\chi(M_1) = \begin{cases} \chi(M) + 2 & \text{si } C \text{ preserva la orientación,} \\ \chi(M) + 1 & \text{si } C \text{ invierte la orientación;} \end{cases}$$

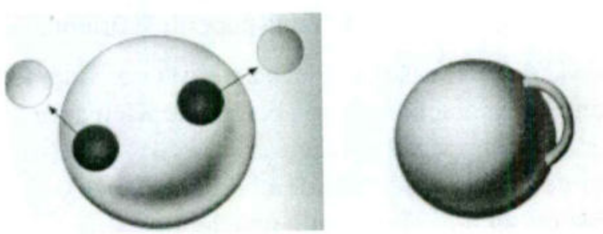
lo anterior sucede ya que para todo disco D tenemos $\chi(D) = 1$. Por lo tanto, $\chi(M) < \chi(M_1)$; nótese que $\chi(M)$ es *estrictamente menor* que $\chi(M_1)$. Si $\chi(M_1) = 2$, entonces M_1 es homeomorfa a la esfera E. Si $\chi(M_1) < 2$ se puede hacer nuevamente una cirugía sobre M_1 (repitiendo el mismo razonamiento) como la anterior, resultando otra superficie M_2 con $\chi(M_1) < \chi(M_2)$. Dado que se tienen desigualdades estrictas, se puede obtener una sucesión de superficies, $M, M_1, M_2, \ldots, M_r$ tal que

$$\chi(M) < \chi(M_1) < \chi(M_2) < \cdots < \chi(M_r) = 2,$$

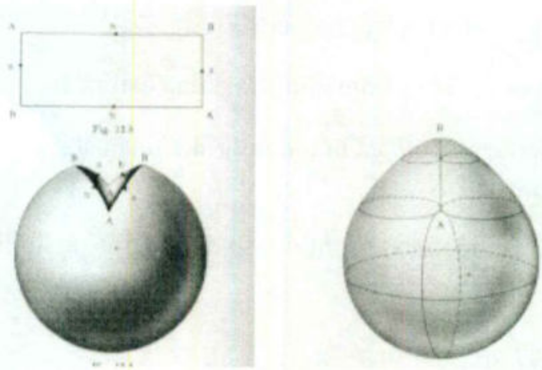
donde M_r es homeomorfa a una esfera y contiene un número finito de discos los cuales se pudieron encontrar de tal manera que fueran ajenos.

Dado que M_r es de un material elástico se puede hacer ahora el proceso contrario, es decir, quitar discos. Se tienen tres casos:

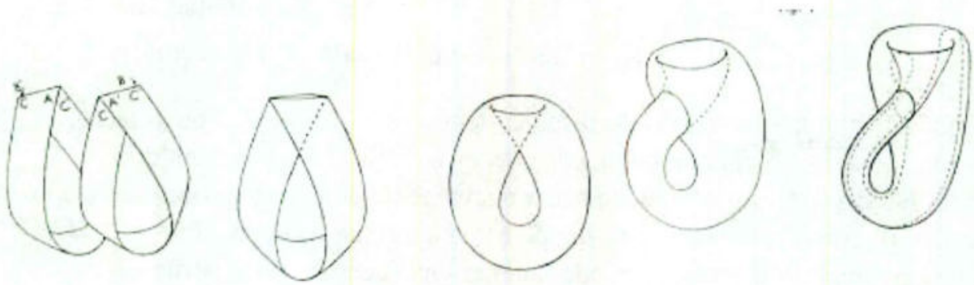
(i) Dos discos con flechas con sentidos contrarios, se ensanchan y se pegan quedando un asa.



(ii) Un solo disco, pegando los puntos diametralmente opuestos es decir colocar una banda de Möbius.



(iii) Dos discos con flechas apuntando en el mismo sentido, se ensancha uno para afuera y otro para adentro y los pegamos es decir obteniendo una botella de Klein o dos bandas de Möbius enlazadas.



Se obtiene una superficie M^* homeomorfa a M. Concluyendo, si M^*:

a) M es orientable, no contiene bandas de Möbius, sino que M^* contiene $n-$asas, tantas como cirugías.

$$n = 1 - \frac{\chi(M)}{2}.$$

b) M no es orientable, Por lo que contiene al menos una banda de Möbius.

Si se tuviera sólo del tipo (i) se tendría una superficie orientable, por lo que no sería posible.

Solamente se puede tener el caso (ii) y el caso (iii) necesariamente logrando invertir el sentido y pegando con el otro obteniendo una botella de Klein, por lo que en este caso se tendrían solo g bandas de Möbius pegadas luego $g = \#(\text{ii}) + 2\#(\text{iii}) = 2 - \chi(M)$. En caso que hubiera un disco del caso (i) además de uno del caso (ii), al deslizar esta por la banda de Möbius cambiaría de sentido obteniendo una del tipo (iii).

Por lo que podemos concluir, que toda superficie cerrada y conexa es homeomorfa a una esfera con n asas ($n \geq 0$) o una esfera con n bandas de Möbius ($n > 1$). ∎

5.4. Ejercicios

1. Da cuatro ejemplos de objetos que sean homeomorfos a una esfera; 4 que sean homeomorfos a un toro; 4 a un bitoro y 4 a un tritoro.

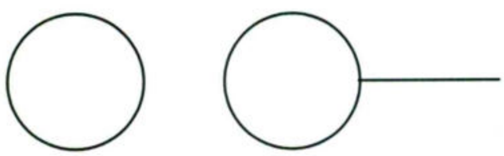
2. ¿Una camisa es homeomorfa a un overol?

3. Probar que identificando puntos diametralmente opuestos de una de las circunferencias contorno del cilindro, se obtiene una banda de Möbius. (Cortar a lo largo del camino cerrado central de una banda de Möbius y ver lo que se obtiene.)

4. Da tres figuras homeomorfas a un anillo, a la gráfica de una hipérbola y a una Y.

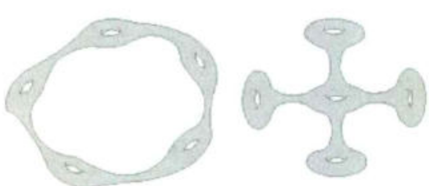
5. ¿Las gráficas de una función continua de los reales a los reales es homeomorfa a una recta?

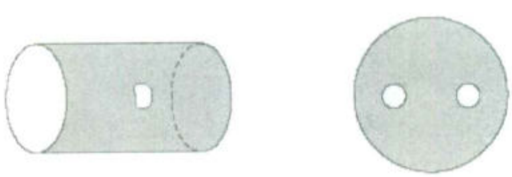
6. ¿Son homeomorfas?

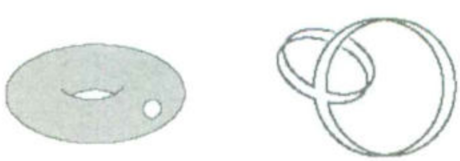
   a) 

   b) 

7. ¿Cuáles de las siguientes configuraciones son homeomorfas?

   a) 

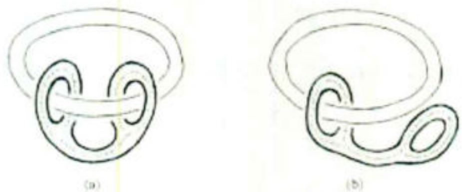
   b) 

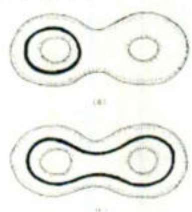
   c) 

8. Dada la siguiente configuración, si quita un banda delgada como se ve en la figura ¿resulta homeomorfa a un disco? ¿Qué combinaciones de los cortes A, B y C es necesario para que la figura resultante sea homeomorfa a un disco? En caso que tuviera tres agujeros, ¿cuántos cortes se necesitan?

9. Si dos figuras son homeomorfas cada una a un disco ¿qué se debe de cumplir para qué la unión de éstas sea homeomorfa a un disco?

10. Encontrar una transformación para obtener la figura (b) partiendo de la figura (a):





Capítulo 6

Topología digital

> "Las cosas que vemos no son lo que parecen. . . Permanece totalmente desconocido para nosotros lo que los objetos pueden ser por sí mismos, independientemente de lo que perciben nuestros sentidos. No sabemos nada sobre ellos, excepto nuestra forma de percibirlos."
>
> Emmanuel Kant.

Generalmente, la materia de topología se imparte como optativa ya sea tanto en la carrrera de matemáticas o bien en matemáticas aplicadas, y el enfoque en su enseñanza es siempre desde un punto de vista puro y abstracto: definiciones, proposiciones y teoremas. Es poco común que se adapte parte de este material a las aplicaciones. ¿Topología en matemáticas aplicadas? Recientemente se han utilizado algunos conceptos de la topología, en psicología, en química (el ADN) y computación.

Es precisamente en este último contexto donde incide la llamada *topología digital*, fundada por Azriel Rosenfeld en 1979, como herramienta que intenta ayudar a mejorar las imágenes, que por ejemplo hayan sido enviadas desde sitios lejanos y en cuya recepción hayan ocurrido errores que pertuben su nitidez y calidad.

El procesamiento de imagen digital es una disciplina que se ha desarrollado rápidamente con muchas aplicaciones: en los negocios (lectura de documentos), la industria (la automatización), medicina (radiografías), geología (fotos a grandes distancias) entre otros. El campo del tratamiento digital de imágenes está en continua evolución. Durante los últimos cinco años ha aumentado significativamente el interés en la morfología de las imágenes, las redes neuronales, el procesamiento de imágenes en color, la compresión y el reconocimiento de imágenes y los sistemas inteligentes de análisis de imágenes. El interés por los métodos de tratamiento digital de imágenes deriva de dos áreas de aplicación principalmente: la mejora de la información pictórica para la interpretación humana y el procesamiento de los datos de de la escena para la percepción autónoma por una máquina.

6.1. Inicios del mejoramiento de imágenes

Una de las aplicaciones iniciales de la primera categoría de técnicas de tratamiento de imágenes consistió en mejorar las fotografías digitalizadas de periódico enviadas por un cable submarino entre Londres y Nueva York.

Figura 6.1: Foto transferida por cable submarino entre Londres y Nueva York.

La introducción del sistema Bartlane de transmisión de imágenes por cable a principios de la década de 1920 redujo el tiempo necesario para enviar una fotografía a través del Atlántico de más de una semana a menos de tres horas. Un equipo especializado de impresión codificaba las imágenes para la transmisión por cable y luego las reconstruía en el extremo de recepción. Algunos de los problemas iniciales para mejorar la calidad visual de estas imágenes digitales estaban relacionadas con la selección de procedimientos de impresión y la distribución de niveles de brillo. Dicho método fue abandonado hacia finales de 1921 en favor de una técnica basada en la reproducción fotográfica hecha a partir de cintas perforadas de la terminal telegráfica de recepción. Los primitivos sistemas Bartlane eran capaces de codificar imágenes en cinco niveles de brillo distintos. Esta posibilidad se incrementó a 15 niveles en 1929.

Las mejoras en los métodos de procesamiento para las imágenes digitales transmitidas continuaron durante los siguientes treinta y cinco años. Sin embargo, fue el advenimiento combinado de las computadoras digitales de gran potencia y del programa espacial lo que puso de manifiesto el potencial de los conceptos del tratamiento digital de imágenes. La tarea de usar técnicas computacionales para mejorar las imágenes recibidas de una sonda espacial se inició en el Laboratorio de Propulsión Espacial (en Pasadena, California) en 1964 cuando las imágenes de la Luna transmitidas por el Ranger 7 fueron procesadas por un ordenador para corregir diversos tipos de distorsión de la imagen inherentes a la cámara de televisión de a bordo.

Desde 1964 hasta la actualidad, el tratamiento digital de imágenes ha progresado vigorosamente. Además de aplicaciones al programa espacial, las técnicas de procesamiento digital de imágenes se emplean actualmente para resolver problemas muy diversos. Aunque a menudo parecen inconexos, estos problemas requieren normalmente métodos capaces de realzar la información de las imágenes para la interpretación y el análisis humano. En medicina, por ejemplo, los procedimientos informatizados realzan el contraste o codifican los niveles de intensidad en colores para facilitar la interpretación de las imágenes de rayos X y de otras imágenes biomédicas. Los geógrafos emplean las mismas o similares técnicas para estudiar los patrones de polución a partir de imágenes aéreas o de satélites. Los procedimientos de mejora de las imágenes y de restauración se emplean para procesar imágenes degradadas de objetos irrecuperables o bien resultados experimentales demasiado costosos para ser duplicados. En arqueología, los métodos de procesamiento de imágenes han servido para restaurar con éxito imágenes borrosas que eran los únicos registros existentes de piezas extrañas perdidas o dañadas después de haber sido fotografiadas. Asimismo, en física, en astronomía, biología, medicina nuclear, investigaciones judiciales, defensa y aplicaciones industriales se aplica la teoría del tratamiento de imágenes con éxito.

Las mejoras de la imagen de rayos X de la figura 6.2 se llevaron a cabo mediante el realce de contraste y bordes.

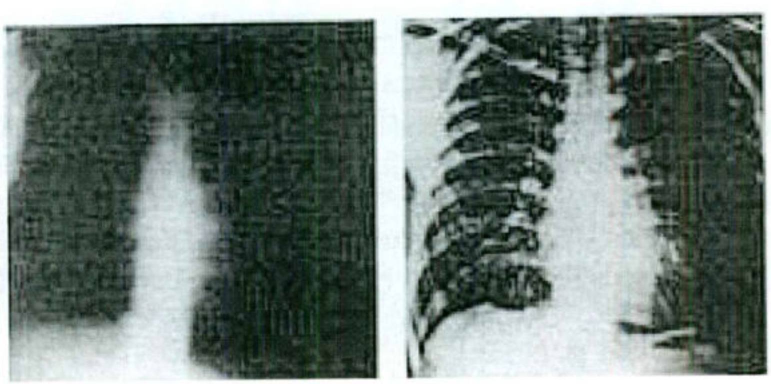


Figura 6.2: Mejoras en una imagen de rayos X.

En la imagen de la figura 6.3 se tiene la superficie del planeta Marte corrompida por interferencias durante la transmisión desde la sonda espacial a la Tierra. La interferencia (las líneas verticales estructuradas) pudieron suprimirse casi completamente mediante el procesamiento por computadora.

El segundo gran campo de aplicación de las técnicas de tratamiento digital de imágenes mencionadas consiste en la resolución de problemas relacionados con la percepción automatizada. En este caso, el interés se centra en los procedimientos para extraer la información de la imagen de forma conveniente para el procesamiento por computadora. Los problemas típicos de la percepción automatizada que utilizan técnicas de procesamiento de imágenes son el reconocimiento automático de caracteres, la visión industrial mecanizada para el ensamblado e inspección de productos, los

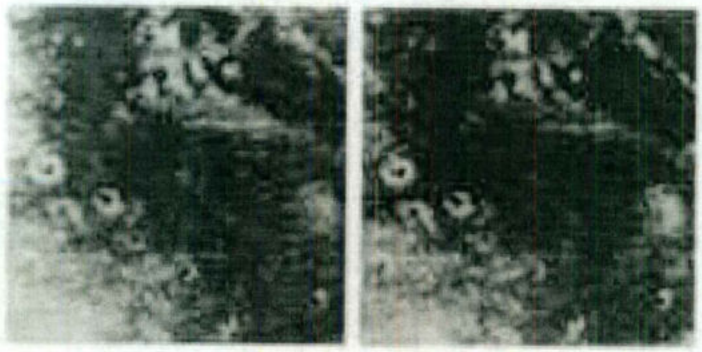


Figura 6.3: Supresión de líneas verticales en imágenes de Marte enviadas a la Tierra.

reconocimientos militares, el tratamiento automático en huellas digitales, las muestras de sangre, las imágenes de rayos X y el procesamiento automático de las imágenes aéreas y de satélites para la predicción del tiempo y la evaluación de cultivos.

6.2. Conceptos preliminares

El término imagen monocroma o simplemente imagen se refiere a una función bidimensional de intensidad de luz $f(x, y)$, donde x y y representan las coordenadas espaciales y el valor de f en un punto cualquiera (x, y) es proporcional al brillo (o *nivel de gris*) de la imagen en ese punto. Una imagen digital es una imagen $f(x, y)$ que se ha discretizado tanto en las coordenadas espaciales como en el brillo. Una imagen digital puede considerarse como una matriz cuyos índices de fila y columna identifican un punto de la imagen y el valor del correspondiente elemento de la matriz indica el nivel de gris en ese punto. Los elementos de una distribución digital de este tipo se denominan *elementos de la imagen*, o más comunmente *pixels* (del inglés, *picture elements*).

Aunque el tamaño de una imagen digital varía dependiendo de su aplicación, se tienen grandes ventajas al seleccionar matrices rectangulares con tamaños y número de niveles de gris que sean potencias enteras de 2. Por ejemplo, un tamaño típico, comparable en calidad a una imagen monocroma de televisión, es una matriz de 512×512 puntos con 128 niveles de grises.

Las etapas fundamentales del procesamiento de imágenes son:

Adquisición de la imagen Es la primera etapa del proceso, para ello se necesita un sensor de imágenes y la posibilidad de digitalizar la señal producida por el sensor. El sensor puede ser una cámara de televisión, que produce una imagen del dominio del problema cada $1/30$ de segundo. El sensor de imágenes puede ser también una cámara de barrido de líneas que produzca una línea de la imagen cada vez.

Preprocesamiento Su función principal es la de mejorar la imagen de forma que se aumenten las posibilidades de éxito en los procesos posteriores. Trata típicamente las técnicas de mejorara el contraste, eliminar el ruido y aislar regiones cuya textura indica la probabilidad de información alfanumérica.

Segmentación Consiste en partir una imagen de entrada en sus partes constituyentes u objetos. En general, la segmentación autónoma es una de las labores más difíciles del tratamiento digital de imágenes. Por una parte, un procedimiento de segmentación demasiado tosco no provee una solución satisfactoria de un problema de procesamiento de imágenes. Por otra parte, un algoritmo de segmentación débil o errático casi siempre garantiza que tarde o temprano habrá un fallo. El papel fundamental de la segmentación es el de extraer caracteres individuales y palabras del fondo.

A la salida de la segmentación, se tienen los datos de pixel en bruto, que constituyen bien el contorno de una región o bien todos los puntos de una región determinada. En cada caso es necesario convertir los datos a una forma adecuada para el procesamiento por computadora. Habrá que tomar la primera decisión, si los datos se han de representar como un contorno o como una región completa: como contorno cuando el interés radica en las características de la forma exterior, como esquinas e inflexiones o como región cuando el interés se centra en propiedades internas, como la textura o la estructuración. Sin embargo, en algunas aplicaciones ambas representaciones coexisten.

Descripción También llamada *selección de rasgos*, consiste en extraer rasgos con alguna información cuantitativa de interés o que sean fundamentales para diferenciar una clase de objetos de otra. En cuanto al reconocimiento de caracteres, descriptores tales como lagos (agujeros) y bahías proporcionan rasgos poderosos que ayudan a diferenciar una parte del alfabeto de otra.

Reconocimiento es el proceso que asigna una etiqueta a un objeto basándose en la información proporcionada por sus descriptores. La *interpretación* implica asignar significado a un conjunto de objetos reconocidos.

La etapa que centraremos nuestro interés es en la segmentación, proceso de descomponer la imagen en regiones o en objetos. La segmentación deberá detenerse cuando los objetos de interés de una aplicación hayan sido aislados. Esta etapa del proceso determina el eventual éxito o fracaso del análisis. Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similaridad.

Discontinuidad El método consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos de nivel de gris. Las principales áreas de interés de esta categoría son la detección de puntos aislados y la detección de líneas y bordes de una imagen.

Similaridad se basa en la umbralización, crecimiento de región, y división y fusión de regiones.

Existen varios algoritmos para efectuar la segmentación, pero la finalidad es buscar regiones, contornos, los cuales son descriptores topológicos (componentes conexas, encontrar bordes o fronteras) útiles para descripciones globales de regiones del plano imagen. Son propiedades a las que no afecta ninguna deformación, en tanto no haya división o uniones. Por ejemplo, un descriptor topológico por el número de huecos de la región, la cual no es afectada por estiramiento o rotación. En general, el número de huecos cambiará si se parte o dobla la región.

Resumiendo, es necesario dividir en subconjuntos para poder delinear y estas particiones se harán basándose en ciertas propiedades que compartan entre sí; relacionando los pixeles para así poder formar los diferentes subconjuntos. Esto nos lleva a recordar el Teorema de Jordan: ¿cómo será una curva cerrada en un plano digital, que cumpla el Teorema de Jordan?

Por estas propiedades cualitativas, *topológicas*, se define una topología que se llamará "digital" para introducir los conceptos de adherencia, conexidad, arco y curva. Básicamente, lo que se quiere es segmentar dicha imagen en regiones conexas, ya que éstas corresponden a objetos diferentes. Para poder lograr esto basta buscar los límites o bordes de las diferentes regiones obteniendo así un caparazón compacto de las diferentes regiones. Utilizar esta topología será para resolver algunos problemas relacionados con el análisis de una imagen y/o el reconocimiento de un patrón son:

- Adelgazar, el objetivo es reducir datos sin alterar fuertemente las propiedades topológicas como la conexidad y la homotopía.
- Comparar las formas de los objetos, en la cual se puede usar las invariantes de la homotopía.
- Comparar los objetos, qué tanto se aproxima una imagen a la otra, utilizando una métrica.

Para lograr el objetivo de la segmentación se puede encontrar los límites entre regiones basándose en discontinuidades de la intensidad, o bien por medio de umbrales basándose en las propiedades de distribución de los pixeles, tales como la intensidad o el color. Pero hay otra manera para encontrar las regiones directamente, entre estas se encuentra la llamada *formulación básica.*

Dicha técnica, *formulación básica*, consiste en dividir a la región completa de la imagen, R, en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ con la ayuda de un predicado lógico $P(R_i)$ sobre los puntos del conjunto R_i de tal forma que:

a) $\bigcup_{i=1}^{n} R_i = R$.

b) R_i es una región conexa, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

c) $R_i \cap R_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

d) $P(R_i)$ es verdadero para $i = 1, 2, \ldots, n$.

e) $P(R_i \cup R_j)$ es falso para $i \neq j$.

La condición a) indica que la segmentación debe ser completa; es decir cada pixel debe pertenecer a una región. La segunda condición requiere que los puntos de una región deben ser *conexos*. La conexidad entre pixeles es un concepto importante para establecer los límites de los objetos y las componentes de áreas en una imagen.

La condición c) habla de que las regiones deben ser disjuntas. La condición d) trata de las propiedades que deben satisfacer los pixeles de una región segmentada, por ejemplo tienen la misma intensidad. Por último la condición e) indica que las regiones R_i y R_j son diferentes en el sentido del predicado P.

Al tener la imagen por medio de pixeles, lo que se busca es obtener una imagen lo más fiel que se pueda lograr, por lo que científicos de la computación se ven implicados en problemas como reconocimiento de algún patrón, análisis de una imagen y áreas relacionadas. Por lo anterior, se desea desarrollar una teoría para el estudio de imágenes digitales y determinar estas propiedades topológicas tales como conexidad, trayectoria, el teorema de la curva de Jordan (toda curva simple cerrada en el plano real lo separa en dos conjuntos ajenos y conexos), etc.

6.3. Topología digital

Como ya se mencionó, la pantalla de una computadora puede interpretarse como una matriz d 512×512, lo que permite pensar que la región de una imagen a analizar, es un subconjunto de

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Matemáticamente, al considerar la imagen digital, se puede considerar como una cuadrícula de puntos y como un espacio euclidiano. Cabe preguntar: ¿qué topología se puede considerar para poder hablar de conexidad, trayectoria, curva cerrada, etc.? Al considerar la topología inducida por la métrica euclidiana en un conjunto finito de puntos se obtendría la topología discreta (la cual no funciona para este objetivo, ya que las propiedades topológicas en una topología discreta son puntuales), por lo que que es necesario alguna base no-euclidiana, considerar otra topología para poder hablar de propiedades topológicas como conexidad, frontera, curva simple (en un conjunto de puntos finito).

Concretando un poco, en este estudio es necesaria la propiedad de la curva de Jordan que dice que toda curva cerrada simple (que no se intersecta a sí misma) divide al plano en dos componentes conexas, recordando que lo que se busca es segmentar la imagen en regiones con propiedades comunes, es decir, se buscan componentes conexas, por lo que se necesita es poder dar una topología donde se dé la definición de curva cerrada (para un número finito de puntos) y tenga la propiedad de la curva de Jordan para poder hablar de conexidad para un *plano digital* ($\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$): ¿qué características deben de cumplir los puntos en cada uno de los subconjuntos? ¿qué deben de cumplir? Recordemos que nos encontramos en un plano digital, donde en cada punto se encuentran ocho puntos alrededor de él, siempre que no sea un punto frontera de la imagen. ¿Si éste punto se encuentra en la curva cerrada, cómo saber para cada punto de estos ocho puntos que lo rodean en que subconjunto se encuentran? ¿Cómo se relacionan los puntos en cada subconjunto?

Se sabe que el espacio de trabajo es una imagen digital, por lo que constará de un número finito de puntos, es decir, es de la forma

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq M, 1 \leq y \leq N\}.$$

Ya que Π es un arreglo (cuadrícula) de puntos, para poder hablar de una trayectoria o arco será necesario modificar las definiciones en los espacios topológicos.

Definición 6.1 Una *trayectoria* es la imagen de una función continua, $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \langle X, \mathcal{T} \rangle$.

Definición 6.2 Un *arco* es la imagen de un homeomorfismo, $h\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \langle X, \mathcal{T} \rangle$.

Para el objetivo que se busca será necesario modificar el dominio, ya que hablamos de un conjunto finito de puntos en el contradominio por lo se buscará un conjunto finito como dominio (todo homeomorfismo tiene inversa): un subconjunto del conjunto de los enteros, y además será necesario darle una topología determinada a este dominio para poder definir una trayectoria, un arco, una curva cerrada "digital" en Π, para que junto con la topología que se le dé al dominio sea posible justificar aquellos problemas relacionados con el análisis de una imagen. Encontrar la topología adecuada para este subconjunto finito del conjunto de los enteros será la llave para poder hablar de la topología correcta del plano digital. Además, también se encuentran puntos diferentes que son los puntos en la "orilla" de Π, los cuales habrá que manejar de diferente manera.

De todo lo anterior surgen algunas preguntas: ¿cómo es que curvas sencillas separan al plano digital en componentes conexas? o inversamente, dada una partición de subconjuntos conexos ¿se pueden obtener curvas fronteras para dichos subconjuntos? ¿cómo se puede representar en una pantalla de la computadora?

Al aplicar algunos métodos de la clasificación de los pixeles, tal como la tonalidad de grises, al buscar una trayectoria se podrá describir la misma siguiendo los puntos de la siguiente manera: dado un punto que no pertenezca a la orilla de la imagen, si los 8 puntos que se encuentran a su alrededor no comparten ninguna propiedad con éste, el punto y cada uno de los 8-vecinos se encuentran en diferentes componentes conexas diferentes. Si el punto y tres o más puntos comparten la propiedad P querrá decir que no todos son puntos frontera o se encuentran en el borde de la componente conexa. Por lo anterior, al trazar una trayectoria se requiere que dado un punto en esta, se una con algún punto de los ocho que se encuentran a su alrededor, por lo que empezaremos hablando de lo que se entiende por dos "pixeles" o puntos adjuntos (noción conexa), para así poder construir una topología con los mismos invariantes y las mismas propiedades que se observan en la "geometría euclidiana." La curva que deseamos describir será aquella que dado un punto en ella este unido con al menos uno de los ocho puntos que lo rodean.

Por otro lado, se busca que la trayectoria sea conexa, la imagen continua de espacio conexo es conexo: el dominio continuo $I = [a, b]$ es conexo, por lo que en el caso digital se busca un conjunto K como dominio, con la topología adecuada, para que sea conexo. Al hablar de "arco" se buscará que no solo f sea continua sino que también sea un homeomorfismo, así que el dominio digital K deberá de ser de cardinalidad finita (sería imposible tener una inversa con una imagen finita y un dominio infinito), es decir un conjunto homeomorfo al conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$. Vemos entonces que es posible darle un orden al dominio. Como se busca que dicho conjunto sea conexo, la topología para este conjunto no será, la topología discreta, la cual es heredada por $\{1, 2, \ldots, n\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, ya que con dicha topología, el subespacio es totalmente disconexo.

Dicho conjunto K deberá tener la propiedad que el subespacio que conste de dos puntos consecutivos (dado que es homeomorfo a un subconjunto finito de los enteros positivos) sea conexo.

Para formalizar todas estas ideas y definir con precisión la topología a trabajar se dará estas primeras definiciones. Un pixel P de coordenadas (x, y) (que no pertenezca a la orilla de la imagen) tiene:

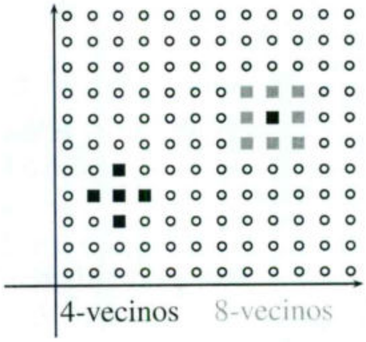


Figura 6.4: 4- y 8-vecinos de un punto.

- 4 vecinos horizontales:
  1. $(x + 1, y)$,
  2. $(x - 1, y)$,
  3. $(x, y + 1)$ y
  4. $(x, y - 1)$,

  a los cuales se les llama 4-vecinos.

- 4 vecinos diagonales:
  5. $(x + 1, y + 1)$,
  6. $(x - 1, y + 1)$,
  7. $(x + 1, y - 1)$ y
  8. $(x - 1, y - 1)$,

  que junto con los primeros 4 se denominan 8-vecinos.

Para determinar si dos pixeles están conectados (pertenecen a la misma componente conexa), deben determinarse si son adyacentes en algún sentido (4-vecinos o 8-vecinos) y si sus niveles de grises cumplen un criterio especificado de similitud, por ejemplo ser iguales o estar en el mismo intervalo.

Un *camino* desde un pixel $P = (x, y)$ a otro pixel $Q = (s, t)$ es una sucesión de diversos pixeles de coordenadas $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $(x_0, y_0) = (x, y)$ y $(x_n, y_n) = (s, t)$ y (x_i, y_i) es un 4-vecino o un 8-vecino (adyacente) a (x_{i-1}, y_{i-1}). Un subconjunto S se dirá conexo si dados $P, Q \in S$ existe un camino desde P hasta Q que consista totalmente de pixeles de S. Para cualquier pixel P dentro de S, el conjunto de pixeles de S conectados a P se denomina *componente conexa* de S. Por lo que cualquier par de pixeles de una misma componente conexa están conectados entre sí, y componentes distintas son disjuntas.

Para definir la topología adecuada en

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq M, 1 \leq y \leq N\}$$

se debe considerar primero la topología adecuada en K, el cual es homeomorfo a $\{1, 2, \ldots, n\}$. Considérese el caso particular $K = \{1, 2, \ldots, n\}$; de otro modo habría que considerar el homeomorfismo de K a $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposición 6.1 *Sea $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in K$ es impar$\} \cup \{\{x - 1, x, x + 1\} \mid x \in K$ es par$\}$. El conjunto definido como $\mathcal{T} = \{U \subset K \mid \forall y \in U, \exists B \in \mathcal{B} \ni y \in B \subset U\}$ es una topología en K. Nótese que no es posible separar dos puntos consecutivos por medio de abiertos, es decir, el conjunto de dos puntos consecutivos es un conjunto conexo.*

Demostración Tenemos que

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ por vacuidad. Además, $K \in \mathcal{T}$ ya que, para toda $z \in K$,

$$\begin{array}{ll} z \in \{z\} & \text{si } z \text{ es par,} \\ z \in \{z - 1, z, z + 1\} & \text{si } z \text{ es impar.} \end{array}$$

- Sean $U, V \in \mathcal{T}$ y $z \in U \cap V$. Por la definición de $\mathcal{T}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $z \in B_1 \subset U$ y $z \in B_2 \subset V$. Se tienen algunos casos:
  - Si $B_1 = \{z\}$ y $B_2 = \{z\}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.
  - Si $B_1 = \{z\}$ y $B_2 = \{z, z + 1, z + 2\}$ (o bien $\{z - 2, z - 1, z\}$) se tendría

  $$z \in \{z\} = B_1 \cap B_2 \subset U \cap V \in \mathcal{T}.$$

  Análogamente si $B_2 = \{z\}$ y $B_1 = \{z, z + 1, z + 2\}$ (o bien $\{z - 2, z - 1, z\}$).
  - Si $B_1 = B_2 = \{z, z + 1, z + 2\}$ (o bien $\{z - 2, z - 1, z\}$), entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.

  Si $B_1 = \{z, z + 1, z + 2\}$ y $B_2 = \{z - 2, z - 1, z\}$ (o viceversa) entonces z es impar por lo que $\{z\} \in \mathcal{B}$ y $z \in \{z\} = B_1 \cap B_2 \subset U \cap V$, por lo que $U \cap V \in \mathcal{T}$.

- Sean $\{U_i\}_{i\in I}$, donde $U_i \in \mathcal{T}$ para toda $i \in I$. Si $z \in \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que $z \in U_{i_0}$, así que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $z \in B \subset U_{i_0}$, por lo que $z \in B \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Por lo tanto $\mathcal{T}$ es una topología. ∎

Dado que K solo tiene un número finito de puntos, al darle una topología existe solo un número finito de abiertos, por lo que cualquier intersección de abiertos es abierta. A este tipo de topología, en la que cualquier intersección, finita o infinita, de abiertos sea abierta, se le llama *topología de Alexandroff*. Además, K es conexo ya que no es posible separarlo en dos abiertos ajenos no vacíos, pues, como ya se observó, dos puntos consecutivos no pueden pertenecer a dos abiertos distintos. Asimismo, K tiene la propiedad de orden. Dadas estas propiedades de K, se justifica la siguiente definición:

Definición 6.3 Un *espacio topológico ordenado conexo* (*ETOC*) es un espacio topológico conexo con la siguiente propiedad: Dados tres puntos diferentes x_1, x_2 y x_3 en X, existe i tal que x_j y x_k se encuentran en diferentes componentes de $K \setminus \{x_i\}$, donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Proposición 6.2 *En todo ETOC se puede definir un orden total.*

Demostración Sea X un ETOC y sea $x \in X$ un punto no extremo. Entonces $X \setminus \{x\}$ consta de dos componentes:

$$U(x) = \{y \mid y \geq x\},$$
$$L(x) = \{y \mid y \leq x\}.$$

Este orden es único salvo si lo invertimos. Dado cualquier par de puntos x y y:

- Si y y z se encuentran en diferentes diferentes componentes con respecto a x, es decir, $y \in U(x)$ y $z \in L(x)$ entonces definimos $y > z$.

- Si y y z se encuentran en la misma componente, digamos en $U(x)$, se consideran las componentes con respecto a alguno de los dos; consideremos las componentes con respecto a y: $U(y)$ será aquella componente que no contenga a x y $L(y)$ será aquella componente que contenga a x. Si $z \in U(y)$ entonces definimos $z \geq y$, y si en cambio $z \in L(y)$ se define $y \geq z$.

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que la relación '$<$' está bien definida y que es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir es un orden parcial. Mostraremos que cualesquiera dos puntos $y, z \in X$ se pueden comparar:

- Si y y z se encuentran en diferentes componentes de $X \setminus \{x\}$ entonces, sin pérdida de generalidad, $y \in U(x)$ y $z \in L(x)$, así que $z \leq y$.

- Si y y z se encuentran en la misma componente de $X \setminus \{x\}$ entonces:

- Si $y,\ z \in U(x)$, por ser X ETOC, x, y se encuentran en diferentes componentes de $X \setminus \{z\}$, $x \in L(z)$ y $y \in U(z)$ por lo que $z \leq y$.
- Si $y,\ z \in L(x)$, por ser X ETOC, x, y se encuentran en diferentes componentes de $X \setminus \{z\}$, $x \in U(z)$ y $y \in L(z)$ por lo que $z \leq y$.

Luego, el orden es total. ∎

Por lo que se puede concluir:

Proposición 6.3 *Si X es un ETOC con al menos tres puntos, cada punto es cerrado o abierto. Un punto x es cerrado (abierto) si y solo si $U(x)$ y $L(x)$ son abiertos (cerrados).*

Demostración Si X es un ETOC con al menos tres puntos, entonces existe un punto que no es extremo; sea x dicho punto. Sean A, B las componentes de $X \setminus \{x\}$, $\overline{A} = A$ y $\overline{B} = B$ o $\overline{A} = A \cup \{x\}$ y $\overline{B} = B \cup \{x\}$, ambos cerrados o ambos abiertos ya que X es conexo. Si A y B son cerrados, $\{x\}$ es abierto. Si A y B son abiertos, $\{x\}$ es cerrado. ∎

Proposición 6.4 *Dados dos puntos consecutivos, adyacentes por el orden, entonces uno es abierto y el otro es cerrado.*

Demostración Sean x, y dos puntos consecutivos, es decir, y sucesor de x: $y = x^+$. Supóngase que $\{x\}$ es cerrado, por lo que $U(x)$ y $L(x)$ son abiertos. $\overline{U(x)} = U(x) \cup \{x\} = U(y)$. Luego $U(y)$ y $L(y)$ son cerrados, concluyendo $\{y\}$ es abierto. Análogamente se demuestra en caso que $\{x\}$ sea abierto. Nótese que en caso de tener un punto frontera, es necesario hacer una pequeña modificación. ∎

Observación 6.1 Dado $K \subset \mathbb{Z}$ finito, se tiene los siguientes abiertos, los más pequeños en cada punto son los elementos de $\mathcal{B}$. Asimismo, por los resultados anteriores se puede concluir que todo

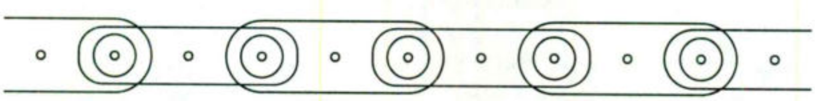


Figura 6.5: Abiertos de $K \subset \mathbb{Z}$.

espacio ETOC finito (topología de Alexandroff) con al menos tres puntos, es homeomorfo a un subconjunto de los enteros con la topología ilustrada en la figura 6.5.

Por medio de los ETOCs será posible definir una trayectoria digital y un arco digital:

Definición 6.4 Una *trayectoria digital* es la imagen de una función continua con dominio un ETOC finito.

Definición 6.5 Un *arco digital* es la imagen de un homeomorfismo cuyo dominio es un ETOC finito.

Observación 6.2 De ahora en adelante consideraremos que la topología de

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq M, 1 \leq y \leq N\},$$

es la topología producto (que se define a continuación) que se obtiene al considerar a los conjuntos $\{1, 2, \ldots, M\}$ y $\{1, 2, \ldots, N\}$ como ETOCs.

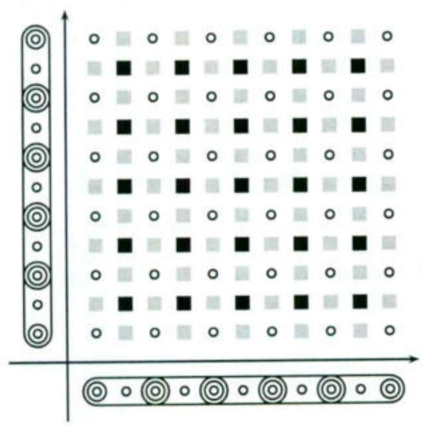


Figura 6.6: Topología producto de Π.

Definición 6.6 Sean $\langle X, \mathcal{T}_X\rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T}_Y\rangle$ dos espacios topológicos. El espacio topológico $\langle X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}\rangle$ cuya topología está dada por

$$\mathcal{T}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

es el *espacio topológico producto* y su topología es la *topología producto.*

Definición 6.7 Dado $\mathbb{Z}^2$ con la topología producto, donde cada $\mathbb{Z}$ es un ETOC, se tienen dos tipos de puntos:

- Un *punto puro*, $P = (n, m)$, donde $\{n\}$ y $\{m\}$ son ambos cerrados o ambos abiertos.
- Un *punto mixto*, $Q = (n, m)$, donde $\{n\}$ es cerrado y $\{m\}$ es abierto, o viceversa.

Definición 6.8 El *conjunto adjunto de* P es el subconjunto de los 8-vecinos dado por

$$A(P) = \{Q \text{ es 8-vecino de } P \mid \{P, Q\} \text{ es conexo según la topología producto}\}.$$

Definición 6.9 La *cardinalidad* de un conjunto S es el número de elementos de S y se denota por $|S|$.

Proposición 6.5 *Si P es un punto puro, $|A(P)| = 8$. Si Q es un punto mixto, $|A(Q)| = 4$.*

Demostración Sea $P = (n, m)$ un punto que no sea frontera, donde $\{n\}$ y $\{m\}$ son abiertos. Cada uno de los ocho puntos que lo rodean está compuesto por un cerrado y un abierto, o bien por dos cerrados.

- Los abiertos que contienen a $P = (n, m)$ son:

$$\begin{gathered}\{n-2, n-1, n\} \times \{m\},\\ \{n\} \times \{m-2, m-1, m\},\\ \{n\} \times \{m\},\\ \{n\} \times \{m, m+1, m+2\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m-2, m-1, m\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m-2, m-1, m\}.\end{gathered}$$

- Los abiertos que contienen a $Q = (n+1, m)$ son:

$$\begin{gathered}\{n, n+1, n+2\} \times \{m-2, m-1, m\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m-2, m-1, m\}.\end{gathered}$$

Por lo tanto, cada abierto que contenga a Q contiene a P, por lo que $\{(n, m), (n+1, m)\}$ es conexo.

Análogamente para los siete puntos restantes; nótese que los ocho puntos que rodean a P, ninguno es puro abierto-abierto, dado que cada uno contiene al menos un cerrado, por lo que para cualquier abierto es necesario considerar un abierto con tres puntos consecutivos. Ésto hace imposible separar al conjunto de P con cualquiera de los ocho puntos $(n, m \pm 1)$, $(n \pm 1, m \pm 1)$ y $(n \pm 1, m)$. Es obvio que para cualquier otro punto R distinto de los ocho anteriores el conjunto $\{P, R\}$ es disconexo.

En el caso que $Q = (n, m)$ sea un punto mixto. Supóngase que $\{n\}$ es abierto y $\{m\}$ sea cerrado sin pérdida de generalidad. Alrededor de Q se tienen 8 puntos, 4 puros y 4 mixtos. Consideremos un punto puro abierto-abierto $Q^* = (n, m+1)$ (o $Q^* = (n, m-1)$). Los abiertos que contienen a Q son:

$$\begin{gathered}\{n-2, n-1, n\} \times \{m-1, m, m+1\},\\ \{n\} \times \{m-1, m, m+1\},\\ \{n, n+1, n+2\} \times \{m-1, m, m+1\}.\end{gathered}$$

Los abiertos que contienen a Q^* son:

$$\{n-2, n-1, n\} \times \{m-1, m, m+1\},$$

$$\begin{gathered}
\{n-2, n-1, n\} \times \{m+1\}, \\
\{n-2, n-1, n\} \times \{m+1, m+2, m+3\}, \\
\{n\} \times \{m-1, m, m+1\}, \\
\{n\} \times \{m+1\}, \\
\{n\} \times \{m+1, m+2, m+3\}, \\
\{n, n+1, n+2\} \times \{m-1, m, m+1\}, \\
\{n, n+1, n+2\} \times \{m+1\}, \\
\{n, n+1, n+2\} \times \{m+1, m+2, m+3\}.
\end{gathered}$$

Nótese que todo abierto que contiene a Q, contiene a Q^* por lo que $\{Q, Q^*\}$ es conexo.

Si $Q^{**} = (n+1, m)$ (o $Q^{**} = (n-1, m)$), es decir, Q^{**} es un punto puro cerrado-cerrado, entonces el abierto que contiene a Q^{**} es $\{n, n+1, n+2\} \times \{m-1, m, m+1\}$, y por supuesto contiene a Q. Luego $\{Q, Q^{**}\}$ es conexo.

Sea R un punto mixto, alrededor de Q. Tenemos $R = (n+1, m-1)$, donde $\{n+1\}$ es cerrado y $\{m-1\}$ es abierto. Los conjuntos $\{n, n+1, n+2\} \times \{m-1\}$ y $\{n\} \times \{m-1, m, m+1\}$ son dos abiertos que al intersectarlos con $\{Q, R\}$ lo separan. En consecuencia, R no se encuentra en $A(Q)$.

Análogamente se prueba para los otros tres puntos mixtos alrededor de P.

- Para construir una trayectoria digital es necesario que la sucesión sea de puntos adyacentes. Por lo que una gráfica conexa será encontrar los conjuntos conexos.

- Para un arco, no podrá contener un punto mixto ya que el punto puro anterior será conexo con el punto puro posterior al punto mixto.

Definición 6.10 Sean P y Q dos puntos de Π. Una 4-trayectoria (8-trayectoria) de P a Q es la sucesión de puntos $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = Q$ tal que P_i es 4-vecino (8-vecino) de P_{i-1}.

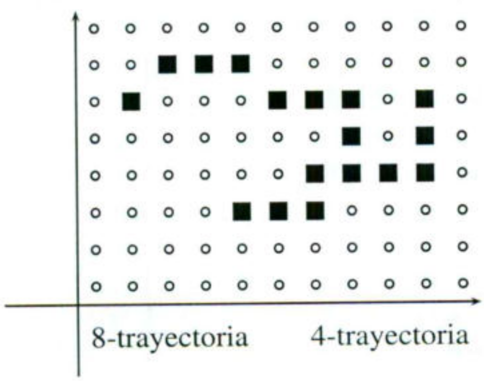


Figura 6.7: Una 4-trayectoria y una 8-trayectoria.

Definición 6.11 Sea S un subconjunto de Π y supóngase que S no contiene ningún punto frontera. Decimos que S es 4-*conexo por trayectoria* (8-*conexo por trayectoria*) si todo par de puntos en S son 4-conexos (8-conexos).

Proposición 6.6 *4-conexo por trayectorias (8-conexo por trayectorias) es una relación de equivalencia.*

Demostración Se hará la demostración para 4-conexo; la demostración para 8-conexo es análoga.

Reflexividad Es inmediato.

Simetría Sean P y Q dos puntos 4-conexos, existen $P_1, \ldots, P_{n-1}$ de S tal que P_i es 4-vecino de P_{i-1} con $i \in \{1, \ldots, n\}$ donde $P_0 = P$ y $P_n = Q$. se define la siguiente sucesión de puntos $Q_j = P_{n-j}$ con $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dado j, $Q_j = P_{n-j}$ y $Q_{j-1} = P_{n-j+1}$son 4-conexos, por lo que P y Q son 4-conexos.

Transitividad Sean P, Q y R tales que P, Q son 4-conexos y Q, R son 4-conexos.

Existen $P = P_0, P_1, \ldots, P_n = Q$ y $Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_m = R$ tal que P_i es 4-vecino de P_{i-1}, y P_i pertenece a S, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y Q_i es 4-vecino de Q_{j-1}, y Q_j pertenece a S, $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Por lo que P, R son 4-conexos.

Por lo tanto 4-*conexos por trayectorias* es una relación de equivalencia. ∎

Corolario 6.1 *La relación 4-conexo por trayectorias (8-conexo por trayectorias) induce una partición.*

Definición 6.12 A cada clase de equivalencia se le define componente conexa por trayectoria.

Proposición 6.7 *Un espacio topológico finito es conexo si y solo si es conexo por arcos-digitales si y solo si es conexo por trayectorias-digitales.*

Demostración Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico finito.

- *X es conexo entonces es conexo por arcos-digitales.*

  Supongamos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y sean $x, y \in X$.

  Sean $N(x_i) = \bigcap U_{x_i}$ donde $x_i \in U_{x_i}$ y U_{x_i} es abierto. $N(x_i)$ es abierto, generalmente no se puede garantizar que sea abierto, pero como X es finito el número de U_{x_i} también lo es. Hay espacios de cardinalidad no finita, llamados $locamente\ finitos$, que tienen esta propiedad.

  $N(x_i)$ no pueden constar de un solo elemento, x_i, ya que X es conexo, luego, sin pérdida de generalidad, supóngase que $x_2 \in N(x_1)$, si $N(x_2) \subset N(x_1)$ es necesario que exista otro elemento que este contenido en $N(x_1)$, ya que en caso contrario $N(x_1)$ y $\bigcup_{i=3}^{n} N(x_i)$ serían dos abiertos ajenos distintos del vacío y cuya unión da X. Esto garantiza que cada $N(x_i)$ intersecta a otra $N(x_j)$.

Dados dos puntos $x, y \in X$, se hace una cadena de elementos de X como sigue: Sea $x_{x_1} \in N(x_1)$; se tienen dos casos:

1. $N(x_{x_1}) \subset N(x_1)$
2. $N(x_1) \subset N(x_{x_1})$.

x_{x_2} tal que $N(x_{x_1}) \subset N(x_{x_2})$ en el caso 1 o $N(x_1) \subset N(x_{x_2})$ x_{x_2} en el caso 2, distinto a los anteriores

$\vdots$

Existe $n_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_{x_{n_0}} = y$.

Luego sea $h\colon \{1, \ldots, n_0 + 1\} \to X$ definida por $h(t) = x_{x_{t-1}}$ con $x_{x_0} = x_1$.

- *Si X es un espacio topológico conexo por arcos-digitales entonces es conexo por trayectorias-digitales.*

  Es claro ya que, todo arco es una trayectoria.

- *Si X es un conjunto finito, es un espacio topológico conexo por trayectorias-digitales entonces es conexo.*

  Sea $x_0 \in X$, dado $y \in X$ existe una trayectoria-digital que los une luego x_0 y y se encuentran en la misma componente conexa de X, imagen continua un conexo. Como x_0 es un punto que se encuentre en la intersección de cada componente, la unión de estas componentes es conexo concluyendo que X es conexo. ∎

Definición 6.13 Sea $S \subset \mathbb{Z}^2$ que no contiene puntos frontera.

- La única componente conexa por trayectoria de S^c que contiene a la frontera se llama *respaldo* de S.
- Cualquier otra componente conexa por trayectoria de S^c se llama *agujero* de S.

Definición 6.14 Si S no contiene agujeros, S se llama *simplemente conexa.*

Recordemos que el objetivo es aplicarlo a las imágenes digitales, donde muchas veces lo que se desea es adelgazar es decir reducing elongated, objetos que tienen un solo agujero a una curva cerrada o bien objetos simplemente conexos reducirlos a arcos. Nótese que se consideran muchos aspectos de la topología en el sentido de conexidad ya que es vía estas propiedades con las cuales se podrá segmentar la imagen digital.

Observación 6.3 Nótese que se ha definido conexidad vía trayectorias y no vía abiertos.

Observación 6.4 Para fines prácticos al considerar a S como k-conexo será necesario no utilizar la misma conexidad para S^c.

Ejemplo 6.1 Consideremos la figura 6.8. Es este ejemplo si se considera a S^c como 4-conexo se

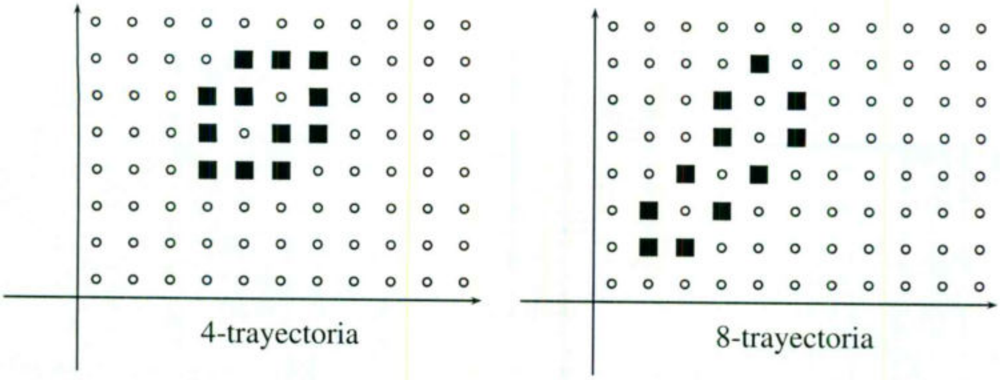


Figura 6.8: El complemento de una 4-trayectoria (8-trayectoria) es un conjunto 8-conexo (4-conexo).

tendrían dos agujeros. Pero si se considera a S^c con el mismo tipo de conexidad que el 8-arco, se afirmaría que no tiene agujero.

Proposición 6.8 *$S \subseteq \Pi$ es un 4-arco (8-arco) si es conexa y todos los puntos salvo dos (extremos) tienen exactamente dos 4-vecinos (8-vecinos) y los extremos exactamente un 4-vecino (8-vecino).*

Demostración Es inmediato ya que se trata de un homeomorfismo. ∎

Observación 6.5 Un 4- u 8-arco contiene al menos dos puntos, para evitar casos degenerados.

Observación 6.6 Un arco no puede ser un 4-arco y 8-arco al mismo tiempo salvo si este es un segmento horizontal o vertical.

Es decir S es un arco-digital con puntos finales x e y si y solo si $|A(x)| = |A(y)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para toda $w \in S \setminus \{x, y\}$. Donde $|A(w)|$ significa los puntos adyacentes (orden) de w, esto se debe ya que, en ETOC.

Proposición 6.9 *Un arco es simplemente conexo.*

Demostración Lo demostraremos por inducción sobre el número de puntos en el arco.

Base Para $n = 2$ tenemos dos puntos P y Q en el arco; dado que están en un arco, P y Q son 4-vecinos u 8-vecinos. P y Q son los extremos. Es claro que S no tiene agujeros.

Inducción Supóngase cierto para k, es decir, supongamos que $P_1, \ldots, P_{k+1}$ forman un 4-arco; supongamos sin pérdida de generalidad que P_{k+1} es un punto extremo y P_k es el único 4-vecino de P_{k+1}. Al considerar el 4-arco $P_1, \ldots, P_k$ éste no contiene ningún agujero es decir cualquier par de puntos de S^c se puede conectar vía una 8-trayectoria, dado que P_{k+1} solo tiene un 4-vecino que es P_k luego los siete restantes 8-vecinos no pertenecen a S. Dado cualquier par de puntos de S^c por ejemplo Q_1y Q_2, existe un punto R de los siete de los 8-vecinos de P_{k+1} y un 8-arco que una a Q_1 con R y otro 8-arco que una R con Q_2 por lo que Q_1 y Q_2 pueden ser conectados por un 8-arco en S^c. Luego es válido para $k+1$.

Por lo tanto, un arco es simplemente conexo. ∎

La demostración para el caso de un 8-arco, es análogo, lo único que cambiaría es que en lugar de hablar siete 8-vecinos restantes se tendrán tres 4-vecinos solamente. Esto no afecta ya que fue necesario fue tomar solamente uno de ellos.

Observación 6.7 La proposición no sería cierta si se tuviera el siguiente caso del 4-arco.

Definición 6.15 $S \subseteq \Pi$ es una *4-curva* (*8-curva*) de Jordan, si es conexa y cada punto de S tiene exactamente dos 4-vecinos (8-vecinos).

Observación 6.8 Se considera que una 4-curva tiene al menos 8 puntos y una 8-curva tiene al menos 4 puntos.

Observación 6.9 Obsérvese que en cada caso que $A(x)$, donde x no es punto frontera, $X \setminus A(x)$ tiene exactamente dos componentes.

Proposición 6.10 *Una curva tiene a lo más un agujero.*

Demostración Sea S una curva, al quitar un punto de S se obtiene un arco el cual no tiene agujero por lo que al agregar un punto a lo más se tendría un agujero. ∎

Teorema 6.1 *Si C es un arco en X, entonces $X \setminus C$ y $\mathrm{borde}(X) \setminus C$ tienen el mismo número de componentes. La correspondencia será la inclusión.*

Demostración Sea $\mathcal{B}$ el $\mathrm{borde}(X)$ y sean $\mathcal{C}(B \setminus C)$ el conjunto de componentes conexas de $B \setminus C$ y $\mathcal{C}(X \setminus C)$ el conjunto de componentes conexas de $X \setminus C$, y sea $\Psi\colon \mathcal{C}(B \setminus C) \to \mathcal{C}(X \setminus C)$ tal que

$$\Psi(W) = V,$$

donde V es la componente conexa que contiene a W. Debemos demostrar que Ψ es biyectiva.

Suprayectividad Mostraremos por inducción sobre $|C|$ que cada componente de $X \setminus C$ intersecta a $\mathcal{B} \setminus C$.

Supóngase existe un contraejemplo y sea C, el arco más corto para el cual existe una componente D^* que no intersecta a $\mathcal{B}$.

Sean $p \in D^*$ y f un punto extremo de C.

Sea $C^* = C \setminus \{f\}, |C^*| < |C|$,

luego la componente correspondiente a p en $X \setminus C^*$ intersecta a $\mathcal{B}$, existe un arco C^+ que conectan a p con $\mathcal{B}$.

Se afirma que $f \in C^+$

$A(f)$ consta de 4 puntos, por lo que se construir "un puente" de tal manera que sea ha construido un arco de p a B sin utilizar el punto f, lo cual es una contradicción.

nótese que $|A(f) \cap C| = 1$ y $A(f)$ es una curva de Jordan, por lo que $A(f) \setminus C$ es un arco.

Inyectividad Mostraremos que a cada par de componentes de $\mathcal{B} \setminus C$ le corresponde un par de componentes de $X \setminus C$ diferentes. Por lo que basta probar que cualesquiera arco que una dos puntos, en diferentes componentes debe intersectar a C. Supóngase lo contrario; C debe de intersectar a $\mathcal{B}$ en al menos dos puntos. Sean X_1 y X_2 dos componentes diferentes de $\mathcal{B} \setminus C$, sea D un arco que intersecta a ambas componentes pero no intersecta C, dado que existe un tercer punto en cada uno de las componentes, a_1 y a_2 que no son las intersecciones de D ni de C en las componentes respectivas éstos se podrían unir vía D sin intersectar a C por lo que implicaría que se encuentran en la misma componente, llegando a una contradicción.

Supóngase que la cardinalidad de alguna de ellas, por ejemplo X_2 tiene más de tres puntos. Sea a^* el punto inicial de X_2 tal que no es punto ni de C ni de D. Considérese a $X_2 \setminus \{a^*\}$ en lugar de X_2, es decir eliminando todo un renglón. Lo cual se llega a una contradicción.

Por lo tanto $X \setminus C$ y $\mathcal{B} \setminus C$ tienen el mismo número de componentes. ∎

Teorema 6.2 *Si J es una curva digital de Jordan que no intersecta al borde entonces $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene exactamente dos componentes.*

Demostración (i) Primero demostraremos que $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene a lo más dos componentes.

Sea $j \in J$, $J \setminus \{j\}$ es un arco que no intersecta el borde, por lo que $\mathbb{Z}^2 \setminus (J - \{j\})$ es conexo. Para cada punto de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ puede unirse con j por medio de un arco en $\mathbb{Z}^2 \setminus J$. Cada arco intersecta a $A(j) \setminus J$, por lo que cada punto de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ puede unirse a $A(j) \setminus \{j\}$ vía un arco con puntos únicamente de $\mathbb{Z}^2 \setminus J$. Dado que $A(j) \setminus J$ tiene dos componentes, luego $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene a lo más dos componentes.

(ii) Ahora demostraremos que $\mathbb{Z}^2 \setminus J$ tiene al menos dos componentes.

Sea m la primera recta que toca a J, se eliminan todos los renglones que no cortan a J obteniendo un nuevo espacio X^* formado por $[Z \setminus \{1, 2, \ldots, m-1\}] \times m$. Sea $p_0 \in J \cap m$, $p_0 = (x_0, m)$, esta conectado a dos puntos, ambos con segunda coordenada mayor o igual a m, uno de ellos deberá ser uno de los siguientes puntos $\{(x_0 - 1, m), (x_0 + 1, m), (x_0 + 1, m + 1), (x_0 - 1, m + 1)\}$ al que denotaremos por q_0.

- Si q_0 es de la forma $\{(x_0 - 1, m), (x_0 + 1, m)\}$ consideremos el arco formado por $J \setminus \overline{p_0 q_0}$.
- Si q_0 es de la forma $\{(x_0 + 1, m + 1), (x_0 - 1, m + 1)\}$ se construirá el siguiente arco, $[J \setminus \overline{p_0 q_0}] \cup \overline{q_0 q_1}$ donde $q_1 = (x_0 \pm 1, m)$ dependiendo de q_0.

En ambos casos se forma un arco, J^*, que divide a la frontera en dos componentes, por lo que $X^* \setminus J$ tiene dos componentes por el teorema anterior, por lo que existe un elemento j_0 que no puede unirse con algún elemento de $Z \setminus \{1, 2, \ldots, m-1\}] \times \{1\}$ (frontera). Dicho punto es un punto "interior" de J y es muy claro que dicho punto se encuentra en diferente componente que un punto frontera, por lo que al menos hay dos componentes. ∎

6.4. Aplicación

Algunos problemas que aquejan a científicos en computación se refieren al reconocimiento de patrones, análisis de imágenes, ejemplos de éstos donde el uso de ciertas propiedades topológicas interfieren son:

1. Achicar, una acción importante en el análisis de imágenes es la de reducir datos (data) sin modificar las propiedades topológicas cruciales como la conexidad.
2. Uso de la métrica Hausdorff como medida para comparar dos imágenes.
3. O bien el uso de las invariantes homotópicas para comparar las formas de los objetos.

Consideraremos solamente el inciso a, por lo que uno de los objetivos es el de adelgazar la imagen, si simplemente se esta interesado en las propiedades conexas tanto de S como de S^c, por lo que será posible remover algunos puntos sin cambiar éstas propiedades.

Definición 6.16 Un punto P de S es simple si $S \setminus \{P\}$ tiene el mismo número de componentes (*en* el mismo sentido que S) que S, y $\overline{S} \cup \{P\}$ tiene el mismo número de componentes (en el sentido de $\overline{S}$) que $\overline{S}$.

Es claro que un punto *aislado* de S (no tiene vecinos de S) y un punto *interior* de S (todos los 8-vecinos en S) no puede ser simple. Un punto extremo de S, aquel que tiene exactamente un solo vecino de S, siempre será simple.

Si S es simplemente conexa y P no es un punto aislado, ni interior, ni simple, entonces $S \setminus \{P\}$ no es conectada ya que en caso contrario se tendría que S y $S \setminus \{P\}$ tienen el mismo número de componentes y dado que S no es interior existe un elemento de su 8-vecindad que no se encuentra en S por lo que $\overline{S} \cup \{P\}$ tienen el mismo número de componentes contradiciendo el hecho que P no es simple.

Por lo anterior si S es simple conexa y tiene más de dos puntos entonces debe de tener al menos dos puntos simples. Por inducción de la cardinalidad de S, si S tiene 3 puntos y es simplemente conexa al menos cada punto se encuentra unida a otro, si existe un punto que debe estar unido a los otros dos en caso contrario S no podría ser simplemente conexa, los otros dos puntos son puntos simples y es posible que sean puntos extremos. En caso que S tuviera únicamente dos implicaría que éstos son extremos. Se afirma que dichos puntos solo tienen un punto de sus vecinos en S, ya que cualquier otro punto implica que $S \setminus \{P\}$ no es simplemente conexo o $\overline{S} \cup \{P\}$ no tiene el mismo número de componentes que $\overline{S}$. es decir que es punto interior, contiene a toda su 8-vecindad, al unir uno de estos puntos simples en caso que no fueran extremos estaría unido a dos, uno con sus 8 puntos por lo que habría más de dos puntos simples. En caso que hubiera un punto interior, es decir su 8-vecindad se encuentran en S, si estos a la vez son interiores sus 8-vecindades se encuentran en S dado que es finito se llegará a que uno de estos puntos de las 8-vecindades ya no es interior por lo que existirá un punto simple que no sea extremo.

Por lo anterior se puede seguir un procesa de adelgazamiento para conjuntos simples conexos S. Se podría eliminar los puntos simples de S que no fueran puntos extremos, cada eliminación no modifica la conexidad simple de S. El proceso de eliminación se se acaba cuando S ya no contiene puntos interiores por lo que S sea *adelgazado*.

Bibliografía

Agudelo, C., "Mejorando el currículo nacional de matemática en Colombia: Matemáticas para todos", *Educación matemática*. Vol. 3(2):6. Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

Alexandroff, P., *Elementary Concepts of Topology*, Dover Publications, Inc., 1993.

Armstrong, M.A., *Topología básica*, Ed. Reverté, S.A., 1987.

Asimov, I. y Shulman, J., *Ciencia y naturaleza*, Laser Press Mexicana, S.A., 1989.

Barr, S., *Experiments in Topology*, Dover Publications, Inc., 1964.

Berge, C., *Topological Spaces*, Dover Publications, Inc., 1997.

Buskes, G. y van Rooij, A., *Topological Spaces From Distance to Neighborhood*, Editorial Springer-Verlag Inc., 1997.

Chinn, W.G. y Steenrod, N.E., *First Concepts of Topology*, Random House Inc., 1966.

Coxeter, H.S.M., *Fundamentos de geometría*, Limusa-Willey, S.A.,1971.

Delachet, A., *Contemporary Geometry*, Dover Publications, Inc., 1962.

Eves, H. *Estudio de las geometrías*, UTEHA, 1985.

Flegg, G., *From Geometry to Topology*, The English Universities Press Ltd., 1974.

Flores, A., "Formación de maestros de matemáticas para nivel medio superior", *Educación matemática* Vol. 3(2):6 Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.

Frechet, M. y Fan, K., *Introducción a la topología combinatoria*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina, 1959.

Hilbert, D. y Cohn-Vossen, S. *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, 1952.

Katz, V.J. *A History of Mathematics*, Addison-Wesley, 1998.

Kline, M., *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Siglo Veintiuno Editores, S.A. de C.V., 1994.

Kilpatrick, J. "Qué podría ser el contructivismo en matemáticas". En: Ontiveros S. (comp.) Antología. Aspectos epistemológicos de la educación matemática. Universidad Autónoma de Querétaro. (Traducido de "What constructivism might be in mathematic eduacation". En: Bergeron, J; Herscovics, N. y Kieran, C. (ed.). Procedings of the 11th Interbnational Conference in PME. Canada, 1987.

Micha, E., *Introducción a la topología*, Departamento de Matemáticas Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1983.

Micha, E., *Clasificación de superficies.* Editorial del Politécnico Nacional, 1983.

Moise, E. E., *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Graduate Texts in Mathematics 47.* Editorial Springer-Verlag, 1977.

Moreno, L., Waldergg G., "Constructivismo y Educación Matemática." *Educación Matemática* Vol .2(2):7, Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.

Munkres, J. R., *Topology a First Course*, Prentice Hall, 1975.

Ornelas, c. *El sistema educativo mexicano*, Fondo de Cultura Económica, 1995.

Prasolov, V.V., *Intuitive Topology.* American Mathematical Society, 1995.

Rico, L., "La comunidad de educadores matemáticos y la situación actual en España", *Educación matemática*, Vol. 3(2):24 Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

Salicrup, G., *Introducción a la topología*, Publicación de la Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

Santaló, J.L., "La enseñanza de la matemática de Platón a la matemática moderna", *Revista del Instituto de Investigación Educativa*, año 3, no. 12. Septiembre, 1997.

Spivak, M., *Calculus: Cálculo Infinitesimal.* 2da edición. Editorial Reverté, 1996.

Verganud, J. "Qué podría ser el contructivismo en matemáticas". En: Ontiveros S. (comp.) *Antología. Aspectos epistemólogicos de la educación matemática.* Universidad Autónoma de Querétaro. (Traducido de "What Contructivism might be in mathematics education". En: Bergeron, J.; Herscovics, N. y Kieran, C. (ed.). Proceedings of the 11th International Conference in PME. Canadá, 1987.

Waldegg, G., "Los Educadores de la Matemática: Una Comunidad de Enlace", *Perspectivas en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

Wall, C.T.C., "A Geometric Introduction to Topology". Editorial Dover Publications, Inc., 1993.

Wenzelburger, E., "Gedanken zur Mathematikdidaktik (Reflexiones sobre la didáctica de la matemática)". *Educación Matemática*, Vol. 3(1):24. Grupo Editorial Iberoamérica, 1991.

Wenzelburger, E., "¿Cómo enseñar hoy la matemática para mañana?, *Eduacación Matemática* Vol. 2(2):48, Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.

Wenzelburger, E., "La matemática contemporánea y su papel en la enseñanza del nivel medio superior". *Educación Matemática*, Vol. 4(2):55. Grupo Editorial Iberoamérica, 1992.

Índice alfabético