Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Informática

Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica

Tesis

Que como parte de los requisitos
para obtener el Grado de

Doctora en Tecnología Educativa

Presenta

Guadalupe Morales Ramírez

Dirigido por:

Dr. Víctor Larios Osorio

Co-Directora:

Dra. Norma Violeta Rubio Goycochea

Querétaro, Qro. a 09 de Marzo de 2022

Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica

por

Guadalupe Morales Ramírez

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Informática
Doctorado en Tecnología Educativa

Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Doctora en Tecnología Educativa

Presenta
Guadalupe Morales Ramírez

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Co-dirigido por:
Dra. Norma Violeta Rubio Goycochea

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	________________ Firma
Dra. Norma Violeta Rubio Goycochea Secretario	________________ Firma
Dr. Ramiro Ávila Godoy Vocal	________________ Firma
Dr. Hugo Moreno Reyes Suplente	________________ Firma
Dra. Sandra Luz Canchola Magdaleno Suplente	________________ Firma

Centro universitario, Querétaro, Qro.
Marzo del 2022
México

Dedicatoria

A mis padres, mi familia, mi esposo y todas las personas que me han acompañado a culminar este proceso.

Agradecimientos

Este proyecto de investigación es el resultado de un extenso y fascinante proceso de formación, que sin duda ha sido gratificante para desenvolverme en el ámbito de la investigación.

A Dios, por darme las fuerzas necesarias para enfrentar las dificultades durante todo este proceso.

A mi familia, por acompañarme en cada paso y por brindarme su confianza y cariño para alcanzar cada una de mis metas.

A mi compañero de vida, Cesar, por estar a mi lado, acompañarme y sostenerme cuando más lo necesitaba, sin duda, este trabajo también lleva tu autoría. Gracias por tu generosidad, amor y cariño, por alentarme a cumplir cada uno de mis sueños.

A mi director de tesis, Dr. Víctor Larios, por su confianza, apoyo y aportaciones que permitieron el crecimiento de mi desarrollo personal y profesional.

A todos los miembros de mi comité tutoral, Dra. Norma Rubio, Dra. Sandra Canchola, Dr. Ramiro Ávila y Dr. Hugo Moreno, por apoyarme y acompañarme en cada uno de los semestres, significó tanto sus aportaciones para el desarrollo de esta investigación.

A mi amiga, Lupita Lugo, por todo su apoyo incondicional y por motivarme a la generación de ideas para fortalecerme como investigadora.

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación dirigida al estudio de los procesos matemáticos cognitivos en la práctica argumentativa realizada por alumnos, dentro de un ambiente de geometría dinámica GeoGebra. El estudio se centró en el análisis de los procesos matemáticos cognitivos cuando los alumnos justifican situaciones que involucran la construcción geométrica de teselados regulares y semirregulares, para ello se aplicaron herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), principalmente la noción de prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos matemáticos y descriptores de la idoneidad didáctica. Estas herramientas teóricas metodológicas fundamentaron el estudio, así como el análisis e interpretación de las respuestas que manifestaron en la práctica matemática de los alumnos.

El enfoque metodológico fue de corte cualitativo y descriptivo, esto mediante un estudio de casos con alumnos (entre 15 a 17 años) de la escuela de bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro. Para lo cual se tuvo en cuenta, en un primer momento, un estudio exploratorio como una forma de indagar y describir el tipo de argumentos que manifestaron los alumnos a través de la propuesta de una secuencia de actividades que involucró el uso del software GeoGebra. Esto llevó al planteamiento de un rediseño de las actividades tomando en cuenta la Ingeniería Didáctica y la aplicación de algunos criterios de idoneidad para la valoración pertinente de dichas actividades.

El análisis realizado bajo las herramientas del EOS, arrojó resultados relacionados con la riqueza de las prácticas matemáticas a través de los procesos matemáticos puestos en juego por un grupo de alumnos al utilizar el GeoGebra, principalmente el proceso de visualización fue clave para que los alumnos realizaran el planteamiento de sus argumentos, los cuales fueron manifestados a través de un lenguaje informal y en términos del uso de las herramientas del software dinámico GeoGebra. Sin embargo, deja en evidencia las dificultades sobre el desarrollo del proceso de argumentación mediante propiedades y conceptos para justificar construcciones geométricas en un ambiente dinámico.

Palabras clave: Procesos cognitivos matemáticos, Geometría dinámica, Validación matemática, Argumentación, Bachillerato.

Abstract

This work presents the results of an investigation directed to the study of cognitive mathematical processes in argumentative practice carried out by students, within a GeoGebra dynamic geometry environment. The study focused on the analysis of cognitive mathematical processes when students justify situations that involve the geometric construction of regular and semi-regular tessellations, for this theoretical tools of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) were applied, mainly the notion of mathematical practices, configuration of mathematical objects and processes and descriptors of didactic suitability. These theoretical methodological tools based the study, as well as the analysis and interpretation of the answers that they expressed in the mathematical practice of the students.

The methodological approach was qualitative and descriptive, this through a case study study with students (between 15 to 17 years old) from the high school of the Autonomous University of Querétaro. For which, an exploratory study was taken into account, at first, as a way of investigating and describing the type of arguments that students expressed through the proposal of a sequence of activities that involved the use of the GeoGebra software. This led to the proposal of a redesign of the activities where Didactic Engineering was considered and the application of some suitability criteria for the pertinent evaluation of the activities.

The analysis carried out using the OSA tools, yielded results related to the richness of mathematical practices through the mathematical processes put into play by a group of students when using GeoGebra, mainly the visualization process was key for the students to carry out the statement of their arguments, which were expressed through an informal language and in terms of the use of the dynamic software GeoGebra tools. However, it highlights the difficulties regarding the development of the argumentation process through properties and concepts to justify geometric constructions in a dynamic environment.

Keywords: Mathematical cognitive processes, Dynamic geometry, Mathematical validation, Argumentation, High school.

Capítulo 1. Área problemática, antecedentes y problema de investigación

1.1 Introducción

En este primer capítulo se aborda la justificación, la relevancia y el planteamiento del problema de investigación, así como aspectos de las tecnologías digitales en el ámbito educativo, particularmente de la geometría dinámica como un medio para fomentar la validación y argumentación en el campo de la Educación Matemática. Por lo cual, se describe el uso del software dinámico y plataformas digitales como un medio hacia la mejora de la educación, en particular, el software *GeoGebra* y la plataforma *GeoGebra Classroom*. En este estudio se asume que este tipo de herramientas digitales son un medio para promover significados y potenciar habilidades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, el uso de estas tecnologías son el medio por el cual se pretende fomentar la argumentación matemática con el fin de identificar los procesos matemáticos cognitivos en el desarrollo de situaciones geométricas propuestas en este estudio. En las secciones 1.7 y 1.7.1 se describe la problemática, la pregunta y los objetivos de investigación de este estudio.

1.2 La importancia de la validación y la argumentación en el estudio de la Geometría

Los alumnos de cualquier nivel educativo se enfrentan y experimentan diversos procesos en el desarrollo de sus conocimientos en distintas áreas de su formación. En el campo de las matemáticas, es complejo evidenciar los procesos cognitivos que el alumno pone en juego en su actividad matemática. Sin embargo, es posible analizar y valorar el aprendizaje significativo de los alumnos a través del desarrollo de tareas que involucren sus conocimiento y habilidades matemáticas, sobre todo aquellas actividades que vayan más allá de la frontera de su conocimiento.

Conocer y comprender cómo aprenden los alumnos permite vislumbrar el razonamiento que ponen en juego para la mejora de su aprendizaje de las matemáticas (Duval, 1999), para ello se requiere la implementación de tareas que fomenten la argumentación matemática, como una forma de indagar sobre el conocimiento de los alumnos. En este estudio se pone atención en la argumentación matemática como un proceso fundamental del aprendizaje de las matemáticas y que resulta una vía por la cual se pretende estudiar su relación con otros procesos matemáticos propuestos por la teoría del Enfoque Onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007). De acuerdo con la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) los alumnos deben ser competentes para argumentar situaciones que involucren la justificación de su solución, así como el uso de herramientas digitales, aquí se toma en cuenta el uso de un software de geometría dinámica, como un medio para favorecer el desarrollo de prácticas argumentativas, las cuales desempeñan un papel normativo y regulativo de las matemáticas (Molina, 2019, Gusmao, 2015). La importancia de usar herramientas digitales para fomentar y desarrollar el proceso de argumentación (Radford, 2006; Bussi y Mariotti, 2008; Karadag y McDougall, 2011; Mejía y Molina, 2013), con miras a provocar en los alumnos un razonamiento lógico deductivo que vislumbre el desarrollo de la demostración matemática (Boero, Garuti y Lemut, 2007; Douek, 2007; Duval, 1999; Knipping, 2008; Larios, 2017; Toulmin, 2007).

La argumentación matemática como parte de la actividad matemática de los alumnos sigue siendo fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto se ha visto reflejado en diversas investigaciones y eventos, como, por ejemplo el 19th *ICMI Study Proof and Proving in Mathematics Education*, en el que diversos autores se han ocupado de aportar elementos desde el enfoque cognitivo, epistemológico, semiótico en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y demostración matemática escolar (Hanna y Villiers, 2012).

Por otro lado, el modelo educativo mexicano declara en los diferentes niveles académicos es necesario que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico, analítico y reflexivo, con capacidad de analizar y argumentar. Según el plan de estudios de Educación Básica en matemáticas se recomienda abordar situaciones problemas contextualizados que involucren los diversos lenguajes de representación matemática. Además, contempla que los alumnos deben "adquirir conocimientos lógicamente estructurados, la actividad matemática tiene la finalidad de propiciar procesos para desarrollar otras capacidades cognitivas, como clasificar, analizar, inferir, generalizar y abstraer, así como fortalecer el pensamiento lógico, el razonamiento inductivo, el deductivo y el analógico" (SEP, 2017, p. 299). Mientras que, en la Educación Media Superior (EMS) el alumno debe desarrollar competencias genéricas y disciplinares, con base al plan de estudios en el marco de las competencias disciplinares de matemáticas, busca que el alumno "argumente la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación" (SEP, 2017, p. 48). Sin embargo, estos discursos distan de la realidad sobre las habilidades referentes a la argumentación que los alumnos del nivel medio debieran desarrollar, pues tampoco hay evidencia de cómo se está enfrentando el desarrollo de esta competencia en dichos alumnos.

Por otro lado, la evaluación a nivel internacional del *Programme for International Student Assessment (PISA)*, el cual mide el rendimiento académico de cada país a través de los conocimientos de los alumnos del nivel medio-básico, con la finalidad de proporcionar datos comparables que posibiliten la mejora de las políticas educativas y sus resultados entorno al sistema educativo. Dicho programa es coordinado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) a nivel mundial, para evaluar las habilidades y conocimientos específicos de los estudiantes de 15 años (nivel medio), en Matemáticas, Lectura y Ciencias mediante exámenes estandarizados. El propósito de esta evaluación es determinar en qué medida los estudiantes de esta edad, que están por concluir o han concluido la educación básica, han adquirido los conocimientos y habilidades necesarios para participar activamente en la sociedad actual.

La competencia matemática que evalúa PISA tiene que ver con la "capacidad en que el individuo formula, emplea e interpreta las matemáticas en distintos contextos. Eso incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos" (2017, p. 64). En el contexto mexicano los resultados de la prueba PISA en matemáticas han sido poco favorables, siendo el área de matemáticas un aspecto relevante a evaluar de la Educación Media Superior. El último resultado de PISA (2018), solo el 44% de alumnos mexicanos (15 años) alcanzaron el nivel mínimo (2 o superior) en matemáticas, es decir, únicamente pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación, por ejemplo, comparar la distancia total de dos rutas alternativas o convertir los precios en una moneda diferente. Esto nos lleva a reflexionar sobre la práctica del profesor y del alumno, pues por una parte es necesario que el alumno sea responsable de su propio conocimiento mediante la explicación, justificación, argumentación y validación de la resolución de problemas y por otra parte el profesor debiera promover de manera eficiente las habilidades ligadas a un razonamiento matemático deductivo.

Ante esta realidad, PISA y los planes y programas de estudio mexicano reconocen la necesidad de incorporar herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas. Además, el uso de las tecnologías digitales sigue ganando presencia como un medio para favorecer y fomentar la exploración de ideas y conceptos involucrados en la resolución de problemas. Principalmente, se sugiere el uso de la geometría dinámica como el software *GeoGebra*. Por lo que en este estudio nos centramos en estudiar a tres grupos de alumnos, cuyo propósito fue identificar y resaltar el tipo de argumentos que manifiestan y los procesos matemáticos recurrentes cuando los alumnos utilizan el software de geometría dinámica GeoGebra.

1.3 Aspectos cognitivos subyacentes en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes

1.4 Las tecnologías digitales en el contexto de la educación

En las últimas décadas se han observado cambios tecnológicos acelerados en diferentes ámbitos. En el contexto educativo las tecnologías digitales han causado una transformación en los planes y programas de estudio de los diferentes niveles educativos y más aún en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde el campo de la tecnología educativa, los diferentes recursos tecnológicos como las computadoras, el internet y actualmente los teléfonos inteligentes han dado un giro sobre la interacción entre los usuarios y sobre cómo podrían incorporarse en las prácticas educativas, tanto del alumno como del profesor. De acuerdo con la OCDE (2020), las tecnologías proporcionan oportunidades para el desarrollo de competencias en América Latina, con el fin de participar activamente en la sociedad y en un futuro cada vez más interconectado. Sin embargo, actualmente la digitalidad sigue siendo un reto en el ámbito educativo, pues la brecha digital sigue siendo un obstáculo para lograr aprendizajes significativos en los alumnos. Sin embargo, la labor del profesor sigue siendo parte fundamental para que los alumnos desarrollen habilidades y conocimientos sobre el uso de recursos digitales, teniendo en cuenta que las tecnologías no se limitan al uso de sí mismas, sino que también conlleva a una trayectoria de organización de ideas y creencias de lo que representan en el ambiente escolar (Moreno, 2017).

En el contexto educativo la era digital ha traído nuevos desafíos, principalmente, el cómo los alumnos pueden desarrollar competencias digitales cuando utilizan herramientas digitales en el aula, en pro de la mejora de su aprendizaje. Según la Unión Europea, la competencia digital involucra el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el entretenimiento y la comunicación. Se respalda en las capacidades básicas de las TIC: el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y para comunicar y participar en redes de colaboración a través de Internet (INTEF, 2017, p. 12). El modelo educativo del contexto mexicano considera que el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) pueden ser aprovechadas como un medio que cierre brechas, a través de una amplia gama de recursos de calidad orientados al aprendizaje (SEP, 2017, p. 32). En este sentido, el uso del término de tecnologías digitales se acuña a medios de transformación del conocimiento, comportamiento y reflexión en torno al uso que se hace de ellos (Palmas, 2018). Sin embargo, hay que notar que cada herramienta digital genera un campo de acción, que a su vez impone ciertas condiciones o restricciones que el alumno debe identificar, comprender y aprender a gestionar. Asimismo, las condiciones o restricciones posibilitan que resurjan nuevas formas de acción (Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2003).

De acuerdo con la revisión de la literatura a lo anterior, las tecnologías digitales en el ámbito educativo son fundamentales en el desarrollo de los aprendizajes de los alumnos, lo que conlleva un arduo trabajo por parte del profesor pues es quien fomenta e involucra el uso de ciertas herramientas digitales para el campo disciplinar a enseñar. Sin embargo, la importancia no solo radica en incorporar y usar las tecnologías digitales en el aula, sino el objetivo que se quiere alcanzar tras implementarlos teniendo en cuenta los conocimientos disciplinares involucrados.

1.5 La integración de la tecnología digital en la Educación Matemática

En la educación matemática la tecnología digital es esencial en el aprendizaje y la enseñanza; esta influye en la matemática que se enseña y potencia el aprendizaje de los alumnos, según el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000). Por tanto, el uso de las tecnologías digitales pueden ser un puente por el cual se podría ampliar o transformar los significados matemáticos, así como representar y acceder a los objetos matemáticos.

De acuerdo con el marco de competencias genéricas y disciplinares de matemáticas de la EMS de México, el alumno debe manejar las tecnologías de las TIC para obtener, procesar e interpretar información, así como expresar sus ideas. La tecnología tradicional (lápiz, papel, juego geométrico, calculadora, etc.) se ha visto complementada por el uso y la aplicación de la tecnología digital, aunque estás no suplen el papel que juega el profesor en el aula de clases, pues se requiere una amplia responsabilidad para crear estrategias en pro del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes. En otro tanto, el desarrollo de competencias del profesor de matemáticas debe ser en torno a la demanda de la sociedad del conocimiento, esto implica la integración de manera eficiente en el uso de recursos o tecnologías digitales a sus prácticas didácticas, mismas que den soporte al desarrollo de conocimientos de sus estudiantes. Por tanto, el docente es quien juega el rol de mediador para generar una relación entre el conocimiento matemático y las herramientas digitales Mariotti (2001).

En la actualidad las tecnologías digitales siguen ganando presencia para acceder a los conocimientos y por ende hacia una alfabetización digital, donde los alumnos transitan por procesos cognitivos que implica una evolución en su aprendizaje. En el contexto de la Educación Matemática diversos autores (Balachef y Kaput, 1996; Drijvers 2013; Rojano 2014; Artigue 2011; Mejía y Molina 2013; Mariotti 2009) respaldan y apoyan la importancia y el impacto que tiene el trabajar con tecnologías digitales dentro del aula.

El uso de la tecnología digital se relaciona con la actividad cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para Rabardel (2001) la herramienta digital en modo estático es un artefacto, el cual se convierte en un instrumento cuando existe la conjugación entre el artefacto y las habilidades cognitivas necesarias implementadas por el individuo para potenciar la herramienta o artefacto. En este sentido, los procesos matemáticos (representación, materialización, significación, etc.) propuestos por el enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), vienen a jugar un papel clave para la movilización de conocimientos entre el artefacto y el pensamiento matemático. Además, Mariotti (2009) considera clave el papel de artefactos y los signos derivados del uso que se le puede dar para la construcción del conocimiento; además, considera que en la secuencia de la actividad instrumentada emergen los signos y a su vez evolucionan dentro de la interacción social.

1.5.1 El software de geometría dinámica como medio para la generación de argumentos

En los planes y programas de estudio del contexto educativo mexicano han ganado presencia la integración de los softwares matemáticos como apoyo a la mejora del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que introducir estos recursos en el aula origina una fase de problematización para los alumnos durante la resolución de problemas. Es sabido que las tecnologías digitales son agentes de cambio que posibilitan la transformación de conocimientos (Cuoco y Goldenberg, 1996), lo cual conlleva a cierta madurez cognitiva en el desarrollo de la actividad matemática que realiza un individuo (Radford y André, 2009). Así, el acceso a diferentes representaciones de un objeto matemático a través del uso de la tecnología digital puede provocar que los significados matemáticos de un individuo sean cada vez más amplios. Por tanto, parece importante y necesario hacer uso de las herramientas digitales que potencien el conocimiento de los alumnos de matemáticas. El incluir tecnología digital en la educación matemática, va más allá de la resolución de procedimientos mecanizados, el uso de estos genera un ambiente reflexivo en el desarrollo de conceptos. De acuerdo con Rojano (2006) el “uso adecuado de la tecnología en el aula puede disminuir notablemente la práctica de aplicar los algoritmos de manera rutinaria permitiendo, a cambio, que los alumnos se concentren en la resolución de problemas y, sobre todo, se vayan familiarizando con los conceptos matemáticos involucrados” (p. 23).

En la educación matemática existen diversas herramientas digitales que facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El Software de Geometría Dinámica (SGD) ha tenido un impacto y es comúnmente implementado en las clases de matemáticas, particularmente es un medio útil para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pues sus herramientas específicas juegan el rol de mediador semiótico para favorecer y propiciar un aprendizaje significativo (Radford, 2006; Bussi y Mariotti, 2008; Karadag y McDougall, 2011; Mejía y Molina, 2013).

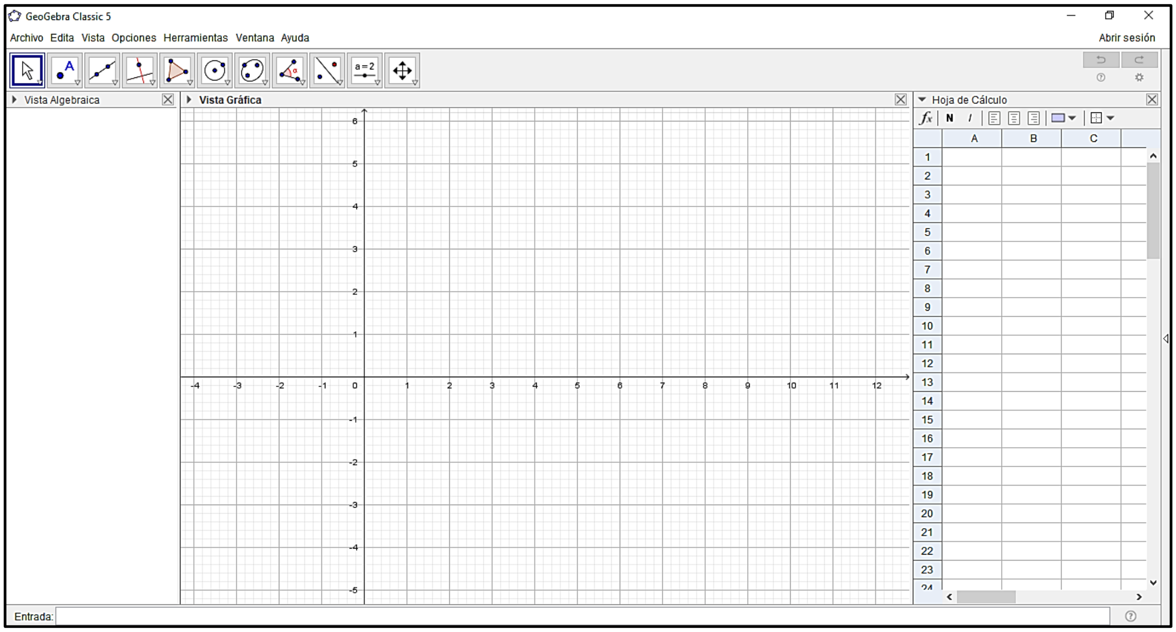
El SGD permite a los alumnos explorar, realizar conjeturas involucrándolo en un proceso de formulación, prueba y reformulación de ideas matemáticas, por tanto, evaluar estos procesos matemáticos a partir de una situación problema permite tener referencia del impacto y la influencia sobre las prácticas argumentativas al utilizar este tipo de tecnología digital en el aula de clases. Además, es útil para el diseño de actividades a través de un ambiente dinámico y visual. Una de las funciones particulares del SGD, en este caso el *GeoGebra*, es la herramienta de *arrastre* (como comúnmente se le llama), la cual es un medio semiótico que permite visualizar invarianza en relación con las propiedades o características de una construcción geométrica. Según Larios, Pino-Fan y González (2017, p. 43) "puede ser utilizado como medio para que el alumno siga un proceso no necesariamente lineal (avances y retrocesos), que le lleve a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre dibujo (representación) y figura (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico)".

Por otro lado, es importante reflexionar sobre el diseño de tareas o actividades de enseñanza que involucren el SGD, por una parte, es relevante tener presente cual será el aprendizaje movilizado; es decir, qué objetos matemáticos previos, intervinientes y emergentes se desarrollan en la práctica matemática y, por otro lado, los diferentes significados que puede provocar movilizar la tecnología digital por si sola. Algunos de los softwares dinámicos más conocidos son: *Cabri Géometre, Geometer Sketchpad, Descartes* y *GeoGebra*. Rojano (2014) señala que los softwares de geometría dinámica tales como *Cabri Géometre y Geometer Sketchpad* son herramientas didácticas muy poderosas, pues a través de la construcción de figuras en la pantalla y del arrastre de los elementos en la figura, el usuario tiene un acceso exploratorio y experimental al mundo de la geometría. Además, los alumnos pueden propiciar un ambiente de aprendizaje basado en las computadoras al ser arquitectos y constructores activos de su propio aprendizaje (Papert, 1982), esto ofrece al alumnado el compromiso de observar una ventana a los significados en construcción, es decir, cuando ellos usan y construyen a través de las herramientas, sus pensamientos son simultáneamente exteriorizados y progresivamente moldeados por la interacción con las herramientas (Hoyles, 2003), en particular el software de geometría dinámica.

En este estudio se pone atención en el software GD denominado *GeoGebra* como recurso mediador para el desarrollo de la argumentación matemática, es decir, a partir de la exploración, visualización y construcciones geométricas los alumnos puedan plantear conjeturas y argumentar o explicar sus conocimientos analíticos o empíricos. El software *GeoGebra* es una herramienta didáctica matemática que comenzó a implementarse poco antes del año 2001, este software matemático está constituido principalmente un *procesador geométrico* y un *procesador algebraico*, esta combinación proyecta una vista de representaciones gráficas, simbólicas y algebraicas generando un software interactivo que concentra la geometría con herramientas del algebra y cálculo, originando un ambiente de geometría dinámica, además dicho software puede ser empleado para el estudio de la física, así como de otras disciplinas.

El software matemático *GeoGebra* se caracteriza por ser interactivo y de acceso libre para la educación, ofrece diferentes representaciones de ventanas o vistas para los objetos matemáticos (por ejemplo, algebraica y grafica) que se vinculan dinámicamente (Figura 1.1); es decir, si se modifica un objeto en cualquier *vista*, su representación en las otras interfaces es modificada de manera automática (cuando esto es posible). Además, permite alternar el uso de representaciones sobre la aritmética, las algebraicas, el cálculo gráfico y estadístico, así como las construcciones geométricas de algún objeto matemático que el alumno ha interiorizado o se desea promover mediante la manipulación y exploración de sus componentes. Este software permite al estudiante ser capaz de mostrar sus conocimientos y habilidades matemáticas y computacionales a través de la búsqueda de conjeturas y argumentos que den validez a sus procesos matemáticos.

Figura 1.1 Interfaz de las diferentes vistas del software *GeoGebra*



Fuente: Extraído del software *GeoGebra*.

1.6 Plataformas digitales como medios tecnológicos en la educación

En la sociedad actual, el uso de las tecnologías digitales ha desarrollado una homogenización cultural, la digitalización a nivel global ha permitido evolucionar en sociedad desde los diferentes contextos; economía, educación, comunicación, etc. En el contexto educativo la transformación digital ha permitido desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje, siendo el uso de plataformas uno de los recursos por el cual el proceso de instrucción ha sido modificado, es decir, los modelos de enseñanza *tradicionales* han guiado el aprendizaje hacia un formato dual, en el que conviven la presencialidad con modalidades online, denominada mixta (semipresencial) o *blended learning* (De Pablos, Colás, López, y García-Lázaro, 2019).

El aprendizaje en la modalidad virtual u online es comúnmente aplicado en el nivel universitario, en gran medida son usadas para complementar el proceso de educación tradicional. En este contexto las plataformas más usadas son: Blacboard y Moodle, las cuales poseen herramientas para la gestión del conocimiento, esto a través de la distribución de materiales, la aplicación de recursos de comunicación y colaboración como, los foros o mensajería, etc., así como herramientas de seguimiento, evaluación y complementarias que den soporte al aprendizaje de los alumnos (Silvio, 2005).

La enseñanza en la modalidad virtual se centra en el uso de plataformas digitales, por lo que estas juegan un rol importante para promover significados en las diferentes áreas disciplinares. En el estudio de Ramírez y Barajas (2017) resaltan el impacto positivo que tiene el frecuente uso de las plataformas digitales en las prácticas pedagógicas en el nivel universitario. En este sentido, las plataformas digitales representan una oportunidad para las instituciones y los docentes, de tal manera que les permite contar un con una variedad de materiales digitales como apoyo a la enseñanza, mientras que, para los alumnos ofrece una manera de ampliar sus recursos para su aprendizaje autónomo. Dado que este estudio se desarrolla en el campo de las matemáticas, las plataformas y cualquier medio tecnológico juegan un rol fundamental para generar ambientes de aprendizaje de los diferentes niveles educativos, así el diseño instruccional, la organización del contenido, el tipo de tareas, etcétera requiere de eficacia para lograr conocimiento significativo en los alumnos.

En el contexto de las matemáticas, el uso de las tecnologías digitales ha abierto panoramas sobre la forma de enseñar y aprender, ya que las plataformas y medios de comunicación como las redes sociales y aplicaciones de comunicación (*Meet, Zoom, Teams, Skype*) han facilitado la interacción entre usuarios. En el estudio de Mendoza, Burbano y Valdivieso (2019) abordan el rol del docente de matemáticas en la educación virtual como parte del proceso de enseñanza, recurriendo a utilizar plataformas como Moodle, internet y chat, enfatizando que es una manera de cómo hacer llegar la información a los alumnos donde el rol del docente es mediar el aprendizaje. Sin embargo, es necesario comprender la complejidad que implica enseñar y aprender matemáticas a través de tecnologías digitales, ya que estas no pueden verse solo como un medio por el cual se transmita información al alumnado, sino que estas sean de interacción en el desarrollo de la resolución de problemas.

Por otra parte, se considera que para el aprendizaje de las matemáticas es necesario recurrir a plataformas específicas que apoyen la generación de conocimientos propios de la matemática. En el estudio de Vaillant, Rodríguez y Bentancor (2020) se investiga sobre el uso de plataformas, programas de programación y aplicaciones o softwares específicos de matemáticas como *Derive, GeoGebra*, *Cabri* y *Mathgraph*, entre otros, esto con el fin de conocer las herramientas digitales recurrentes en sus clases de matemáticas. Para nuestro estudio resaltamos el uso del software de geometría dinámica como medio interactivo para los alumnos, se considera el más recurrente para precisar conceptos y propiedades matemáticas, en particular en el área de la Geometría. En este sentido, este estudio se apoya tanto del uso del software *GeoGebra* como de la plataforma interactiva *GeoGebra Classroom*, y se utiliza la plataforma Zoom como un medio de interacción sincrónica, en el siguiente apartado se amplía estos aspectos.

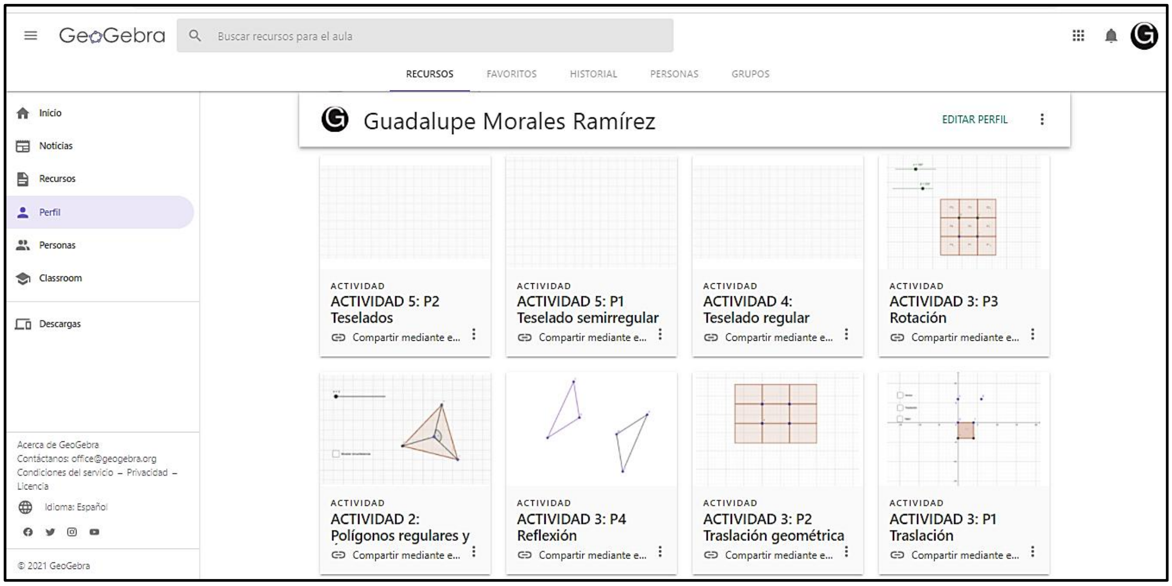
1.6.1 La plataforma de *GeoGebra Classroom*

En el contexto de la tecnología educativa, el uso de las plataformas digitales o virtuales han sido fundamentales para el desarrollo de la educación a distancia, donde se garantiza la construcción significativa del conocimiento de los alumnos en torno a estas herramientas (Cabero y Llorente, 2005). En el contexto de la educación matemática existen distintas plataformas digitales, las más conocidas son *Khan Academy* y *GeoGebra Classroom*. El creador de esta última plataforma (Markus Hohenwarter) realizó esfuerzos para dotar el software *GeoGebra* de herramientas que posibilite generar un aula, en el sentido de que los docentes puedan interactuar con los alumnos de manera sincrónica y asincrónica. En dicha plataforma virtual los docentes pueden:

- Diseñar y asignar tareas interactivas y atractivas para los alumnos
- Observar qué tareas han comenzado o realizado los alumnos y el progreso actualizado en vivo de los alumnos sobre una tarea específica
- Hacer preguntas a los alumnos y ver directamente sus respuestas
- Facilitar discusiones enriquecedoras e interactivas entre todos los alumnos, grupos de alumnos y de forma individual.

En este estudio la plataforma de *GeoGebra Classroom* fue un medio para la interacción durante la implementación de las actividades propuestas, las cuales fueron alojadas en dicha plataforma para ser desarrolladas por los alumnos. La Figura 1.2 muestra la interfaz de la plataforma GeoGebra Classroom, donde se alojaron las cinco actividades propuestas en este estudio.

Figura 1.2 Interfaz de la plataforma *GeoGebra Classroom*



Fuente: Imagen extraído de la plataforma *GeoGebra Classroom*

1.7 Descripción del problema de investigación

El aprendizaje de las matemáticas está asociado a las experiencias de la vida cotidiana, desde el punto de vista de la psicología los conocimientos y aprendizajes están vinculados a procesos cognitivos presentes en una persona (Rafael, 2007). Estos procesos cognitivos están ligados a procesos mentales que se relacionan con pensar, entender, explicar, recordar, percibir, memorizar, concebir y razonar toda aquella información proveniente de diferentes contextos. La información que cada ser humano procesa y aprehende puede ser transformada o modificada mentalmente cuando interviene la interacción social y con el uso de objetos y herramientas digitales.

Piaget y Vygotsky estudiaron el desarrollo de los procesos cognitivos, desde su propia postura ambos psicólogos aportaron ideas al desarrollo del proceso de aprendizaje educativo. Las ideas de Piaget se centraron en explicar cómo el niño de diferentes edades interpreta el mundo, su estudio se enfocó en el razonamiento de ellos ante problemas de lógica y los errores que cometen. Se centró en nociones sobre el lenguaje y pensamiento del niño a partir de las imitaciones. Uno de sus libros importantes, llamado *La formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño.* Según Piaget (1961), a través del juego y la imitación se puede presentar un proceso que va de la acomodación sensoriomotora a la asimilación y la acomodación mental que caracterizan los comienzos de la representación. En este sentido, las representaciones aportan significados desde el producto de la imaginación a partir de un juego simbólico. Desde esta perspectiva, la evolución y el seguimiento que dio Piaget al desarrollo de procesos cognitivos a temprana edad, le permitió explicar y describir diferentes formas y estructuras de pensamiento, destacando como fundamental la construcción del conocimiento. Esto lleva a pensar que los objetos y la representación de esos objetos juegan un papel fundamental para la construcción de conocimiento, donde las relaciones sociales que se comparten y se establecen entre individuos soporta y apoyan el proceso del desarrollo cognitivo en función a los diferentes tipos de interacción.

Por otro lado, Vygotsky (1979) propuso la teoría del desarrollo en el niño considerando la importancia de las relaciones sociales y culturales del individuo. Su teoría psicológica se basa principalmente en el desarrollo del pensamiento a través de la interacción que se tiene entre individuos, para la edad infantil los adultos representan la responsabilidad de compartir y promover un pensamiento colectivo, es decir, a través de actividades y herramientas que aprehende e incorpora al conocimiento del niño, con el fin de que pueda interiorizar y reflexionar sobre su aprendizaje. En esta teoría el conocimiento se sitúa en el contexto social y cultural, donde los procesos mentales del individuo, como recordar, pensar, percibir, plantear o resolver un problema tiene un origen social. Sin duda los procesos que comparten Piaget (1978) y Vygotsky (1979) están presentes en diferentes momentos de la vida diaria, según la Real Academia Española, la definición de proceso hace referencia a diferentes ideas, entre las cuales se resalta las siguientes: *acción de ir hacia adelante, transcurso del tiempo, conjunto de fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial*. Este concepto es ampliamente utilizado en diferentes contextos, en la educación matemática se habla de procesos matemáticos que están ligados a procesos cognitivos presentes en la resolución de problemas matemáticos, estos procesos matemáticos serán evidenciados dependiendo del tipo de problema y el ambiente generado durante la resolución (Perdomo, Camacho y Santos-Trigo, 2012).

En este sentido es relevante analizar los procesos matemáticos relacionados a la práctica argumentativa de los problemas matemáticos. En esta investigación no se intenta dar una definición de procesos matemáticos, sino más bien, compartir la idea de Rubio (2012) y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), refiriéndose a estos procesos como una secuencia de prácticas matemáticas donde se ve involucrada la práctica operativa y discursiva del estudiante cuando resuelve situaciones de matemáticas en ambientes de geometría dinámica. En concreto, "un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada, es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada). Estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas" (Rubio, 2012, p. 107).

Por otro lado, en el contexto escolar es necesario que el alumno desarrolle procesos matemáticos, como el de argumentación, particularización, generalización, etc. En este estudio nos centramos en promover el proceso de argumentación matemática a través de secuencia de actividades que involucran el uso de un Software de Geometría Dinámica (SGD). En el proceso de argumentación matemática se involucran procesos cognitivos (percepción, razonamiento, memoria, etc.) de donde emergen argumentos, justificaciones y explicaciones que son representados mediante un lenguaje, el cual puede ser verbal (formal e informal), simbólico, grafico, algebraico icónico, entre otros. En este sentido, en el desarrollo de la argumentación matemática cuando emergen distintos objetos matemáticos también emergen diferentes procesos matemáticos, los cuales se espera que se evidencien en este estudio. De acuerdo con Larios (2015) la argumentación está vinculada con la validación de procedimientos y resultados, con la explicación y la justificación, todo con una orientación definida hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal. Godino y Recio (2001) utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, es decir, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción. Para Samper, Cepeda-Buitrago y Vargas-Guerrero (2015) se refieren a la actividad demostrativa que hace referencia a la conjugación de procesos que llevan como propósito descubrir un hecho geométrico y justificarlo. Los procesos a los que hacen referencia son el de conjeturación, que conlleva a realizar acciones como la visualización, la exploración y la verificación. Mientras que un segundo proceso se enfoca en la justificación, el cual se relaciona con la búsqueda y articulación de elementos teóricos.

El presente estudio se centra en analizar y caracterizar del proceso de argumentación matemática que manifiestan los alumnos del nivel medio superior mediante el uso de la geometría dinámica, en el desarrollo de su práctica argumentativa se espera que involucren procesos matemáticos sobre ambientes dinámicos (uso de *GeoGebra*) relacionados con técnicas de exploración, manipulación de comandos del software, planteamiento de conjeturas y visualización de objetos matemáticos que intervengan y emerjan de la práctica argumentativa del alumno, en el contexto de construcción de teselados a través de isometrías en el plano. En este trabajo se plantea el supuesto en términos del uso del SGD durante el proceso de argumentación y su relación con otros procesos matemáticos, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). A continuación, se muestra el supuesto de la siguiente manera:

El uso del SGD (GeoGebra) favorece la movilización de procesos matemáticos cognitivos de los alumnos de bachillerato, desde la perspectiva del EOS.

1.7.1 Objetivos y preguntas de investigación

La pregunta de investigación que orienta el desarrollo de esta investigación y que alude a la problemática de este estudio es la siguiente:

¿Cuáles son las características de los procesos matemáticos cognitivos de los alumnos de bachillerato cuando desarrollan prácticas argumentativas mediante el uso de un Software de Geometría Dinámica (SGD)?

Asociada a la pregunta de investigación, el *objetivo general* de este estudio es

Caracterizar los procesos matemáticos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, mediante el análisis de las prácticas argumentativas realizadas por alumnos de bachillerato cuando utilizan el SGD GeoGebra.

La pregunta de investigación y el objetivo general asociado de manera implícita involucran aspectos a saber: los procesos matemáticos como articuladores en la práctica argumentativa y el papel de SGD GeoGebra como medio que favorece y promueve el proceso de argumentación matemática. Así, la pregunta de investigación se desglosa en las siguientes preguntas asociadas a los objetivos específicos, las cuales son:

1. ¿Qué tipo de actividades son pertinentes para promover el proceso de argumentación matemática, cuando interviene el SGD (GeoGebra) como un medio didáctico de construcciones geométricas?

2. ¿Qué tipo de argumentos manifiestan los alumnos de matemáticas cuando desarrollan actividades mediante el uso del Software de Geometría Dinámica GeoGebra?

3. ¿Qué procesos matemáticos del EOS emergen del sistema de prácticas argumentativas del alumno cuando utiliza el SGD GeoGebra?

4. ¿Cuál es el papel que juega el software GeoGebra en el desarrollo de los procesos matemáticos de los alumnos al realizar construcciones geométricas?

A partir de las preguntas planteadas anteriormente se formulan los siguientes objetivos específicos:

1. Desarrollar una propuesta de actividades que promuevan el proceso de argumentación matemática mediante el uso del SGD, así como la valoración de este mediante la idoneidad didáctica del EOS.

2. Determinar la tipología de argumentos manifiestan los alumnos de matemáticas cuando desarrollan actividades mediante el uso del Software de Geometría Dinámica *GeoGebra* mediante la configuración de objetos y procesos matemáticos.

3. Determinar los procesos matemáticos del EOS que intervienen y emergen del sistema de prácticas argumentativas del alumno cuando utiliza el SGD *GeoGebra*, a través de la categorización de objetos y procesos matemáticos.

4. Identificar y valorar la pertinencia del software *GeoGebra* durante el proceso de argumentación matemática mediante herramienta de idoneidad didáctica del EOS.

5. Identificar y describir las conjeturas manifestados por los alumnos en el desarrollo de su práctica argumentativa cuando realizan construcciones geométricas mediante el uso del SGD *GeoGebra*.

Capítulo 2. Marco Teórico

Este capítulo presenta seis apartados principales, los primeros cuatro hacen referencia a nociones del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font, (2007). Esta teoría ayuda a articular aspectos institucionales y personales del conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el primer apartado (2.1) se describen, en términos generales, los niveles de análisis que compone el modelo teórico metodológico del EOS. En el segundo apartado (2.2) se centra en las *prácticas matemáticas y significados* que emergen del desarrollo de las prácticas en un proceso de instrucción matemática. En el tercer apartado (2.3) se hace referencia a las *configuraciones ontosemióticas*: epistémicas (CE) y cognitivas (CC) de los objetos matemáticos primarios. En este estudio se utilizan dichas configuraciones para el análisis de argumentos que manifestaron los alumnos en sus respuestas a las actividades propuestas, esto con el fin de tener un panorama detallado de la trama de objetos matemáticos primarios y procesos matemáticos que los alumnos desarrollan en sus prácticas argumentativas. En el cuarto apartado (2.4) se muestra la herramienta de análisis de la *idoneidad didáctica*, la cual se utilizó por un lado para valorar el diseño de actividades y por otro sirvió como pauta para el rediseño de las actividades propuestas en este estudio.

Los dos últimos apartados (2.5 y 2.6) se abordan las nociones de práctica argumentativa, proceso de argumentación y argumento en el contexto de la matemática educativa, los cuales son asociados a prácticas matemáticas realizadas por los alumnos de esta investigación, así como la descripción de los esquemas de argumentación propuesto por Flores (2007), los cuales fueron utilizados para clasificar de manera general los tipos de argumentos manifestados por los alumnos, mismos que se consideran como: fáctico, simbólico, empírico, analítico.

2.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

La necesidad de desarrollar teorías instruccionales que permitan articular diversas nociones teóricas sobre el análisis del conocimiento, su enseñanza y aprendizaje, es de mayor importancia para la reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el ámbito de la Educación Matemática. Una teoría que ha ganado presencia y que da sustento a esta investigación corresponde a las herramientas teóricas metodológicas del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* (EOS), propuesto por Godino, Batanero y Font, (2007). Este enfoque muestra herramientas teóricas y metodológicas que ayudan a articular aspectos institucionales y personales del conocimiento matemático para una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El enfoque metodológico del EOS propone un modelo teórico compuesto por cinco niveles de análisis, los cuales refieren a dos cuestiones principales, que son: ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? ¿qué se podría mejorar? con el fin de describir, explicar y valorar procesos de instrucción matemática. Dichos niveles se conciben como herramientas metodológicas para analizar las prácticas docentes o de los alumnos referente algún episodio de clase, tareas o libros de texto de alguna área de la matemática. De acuerdo con Font, Planas y Godino (2010) los cinco niveles corresponden a los siguientes:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción

Según los autores de este modelo teórico la aplicación conjunta de los niveles requiere de ciertas condiciones respecto al análisis didáctico, ya que la profundización en el análisis de algunos de los niveles está condicionada por aspectos que se vivencian según el proceso de instrucción. En este estudio se toma en cuenta el nivel 1) y 2) para analizar las prácticas argumentativas con el fin de identificar los procesos matemáticos cognitivos puestos en juego por alumnos de bachillerato, esto a partir del conglomerado de objetos y procesos matemáticos en el desarrollo de dichas prácticas. Asimismo, la necesidad de aplicar los criterios de la idoneidad didáctica, correspondiente al nivel 5), con el objetivo de valorar el diseño de la secuencia de actividades con miras a mejorar dicha propuesta, lo que conlleva a proponer un rediseño que incluye situaciones o tareas más específicas que complementen y guíen la emergencia de los objetos y procesos matemáticos involucrados, así como la apropiación por parte de los alumnos de algunas herramientas necesarias del software *GeoGebra* que les permita detallar sus respuestas o argumentos.

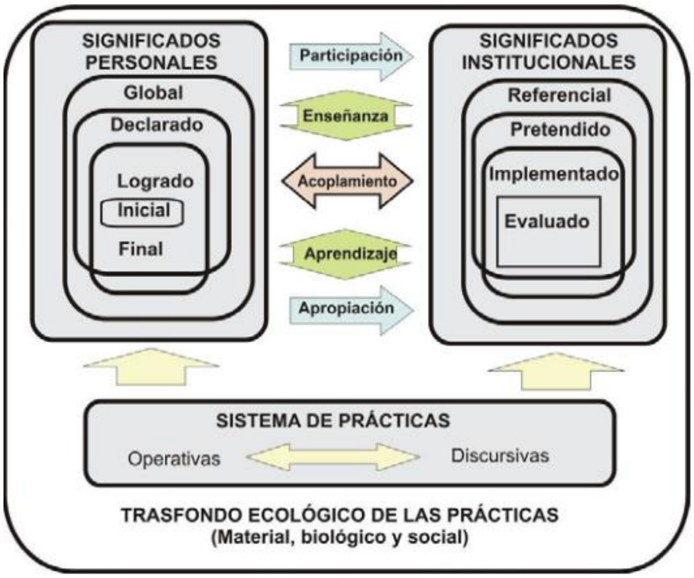
2.2 Prácticas y significados matemáticos del Enfoque Ontosemiótico

Desde la perspectiva del EOS, se entiende por *prácticas matemáticas*, a aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hace de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Así, el *sistema de prácticas matemáticas* es todo lo que se puede hacer y decir referente al objeto matemático cuando se resuelve alguna situación problema. Estas *prácticas matemáticas* pueden ser *personales*, referentes al significado del individuo, o *institucionales*, relativas al significado fomentado o compartido en el seno de una institución. Además, los OM intervienen y emergen en el desarrollo de la práctica matemática del individuo tanto en las diferentes acciones y discursos a través de los cuales se expresa y comunica (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras, 2016). Asimismo, el EOS propone herramientas que ayudan a interpretar y analizar conocimientos, significados, objetos y procesos puestos en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el EOS se entiende por objeto matemático primario todo lo que se puede decir y hacer con él; por ejemplo, al hablar de la traslación geométrica, la referencia es hacia su definición, a su representación gráfica, a la relación con vectores de traslación, a las propiedades que preservan las figuras o polígonos en el plano al aplicar dicha transformación geométrica, etc. Además, se consideran como OM primarios no solo los conceptos y los procedimientos sino también (1) situación-problema: aplicación, tarea, ejemplo, construcción geométrica, problema intra-matemático o extra-matemático, etc.; (2) elementos lingüísticos: verbal, simbólico, numérico, gráfico, expresión algebraica, diagrama, notación etc.; (3) conceptos- definición: expresiones por medio de definiciones o descriptores (traslación, rotación, simetría, ecuación, etc.); (4) procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.; (5) propiedades: teoremas, corolarios, lemas, proposiciones, etc.; (6) argumentos: enunciados usados para justificaciones y demostraciones que involucren proposiciones o propiedades. Estos OM intervinientes y emergentes se relacionan entre sí, ya que el lenguaje expresa y comunica argumentos en los que se involucran las representaciones, los conceptos, las propiedades o proposiciones y procedimientos para resolver un tipo de problema o situación problema. Aunado a lo anterior, las prácticas matemáticas en el EOS fungen como herramienta de análisis de un proceso de estudio (D'Amore, Font y Godino, 2007).

En el desarrollo de la práctica matemática intervienen y emergen objetos matemáticos que se presentan a través de la resolución de problemas, Dado que desde el punto de vista del EOS, estas prácticas matemáticas son personales e institucionales, las cuales pueden ser mediadas por recursos materiales que fomenten en mayor medida el *significado* del individuo sobre los objetos matemáticos. En el EOS se considera distintos tipos de significados (Figura 2.1), los cuales denominan personales e institucionales (Godino, Batanero y Font, 2008; Font 2005), la noción de *significado personal* alude a los objetos matemáticos que el individuo, en este caso los alumnos, interiorizan o no dentro del sistema de prácticas matemáticas. Dicho significado puede ser *global* (todo lo que el individuo puede hacer, decir y pensar sobre un objeto matemático), *declarado* (lo que el individuo muestra ante una evaluación, independientemente si son correctos o no), y *logrado* (lo que el individuo ha logrado aprender y estos corresponden con los significados institucionales). Mientras que el *significado institucional* corresponde al sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emergen los objetos institucionales en un momento dado (Godino y Batanero, 1994). Aquí el significado institucional puede ser *referencial* (es el establecido en los panes y programas de estudio, así como el que promueve la institución educativa), *pretendido* (es el significado del objeto matemático que asume el profesor y que promueve a través de la planificación de proceso de estudio), *implementado* (el significado que el profesor promueve en el aula de clases sobre el objeto de estudio) y *evaluado* (el aprendizaje del alumno esperado por la institución y el profesor) (Godino, Batanero y Font, 2009).

Figura 2.1 Tipos de significados personales e institucionales



Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 6).

Distéfano, Pochulu, y Font (2015) comparten que:

> plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado, vinculando una expresión con un contenido a través de una función semiótica. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. (p. 205)

En este sentido, en la práctica escolar los estudiantes se encuentran inmersos con el uso de recursos tecnológicos y para ellos resulta motivante realizar tareas con el uso de tecnología digital que les permita explorar, conjeturar e involucrarlos en una actividad demostrativa de las matemáticas promoviendo una construcción de significados personales. Por tanto, la validación matemática entra en juego los significados personales en relación con los objetos matemáticos, en esta investigación el alumno mostrara sus significados a partir de la integración de la geometría y el uso del software dinámico.

2.3 Configuraciones ontosemióticas de los objetos y procesos matemáticos

Desde esta perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos el *proceso matemático* nos permite explorar el funcionamiento dinámico de la configuración ontosemiótica activada en la práctica matemática. El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos, seis de ellos (comunicación, argumentación, algoritmización, enunciación, definición y problematización) podríamos relacionarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que estructuran la configuración ontosemiótica. Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales (institucionalización-personalización, idealización-materialización, descomposición-reificación, significación-representación, particularización-generalización), como una forma de *estar participando* en el desarrollo de la práctica matemática. En este estudio se intenta identificar y describir algunos de estos procesos matemáticos puestos en juego por los alumnos de bachillerato cuando desarrollan prácticas argumentativas usando el *GeoGebra*.

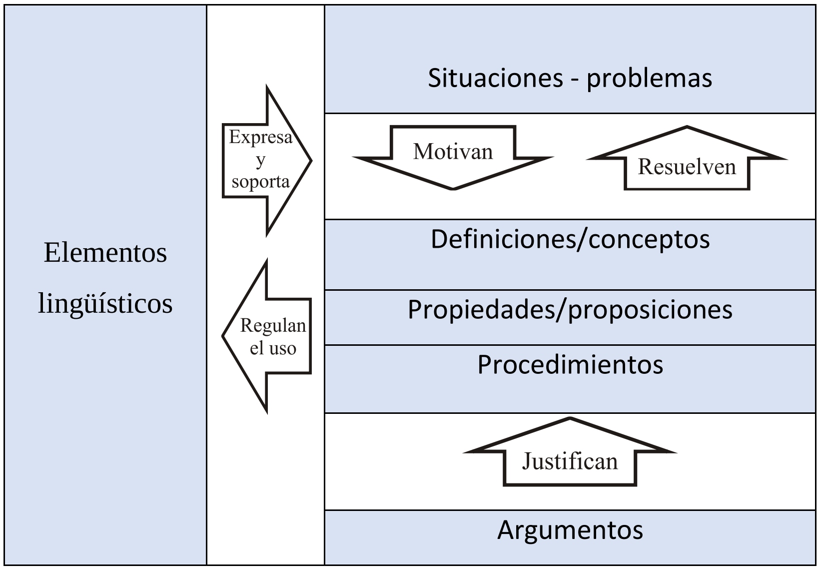
Este trabajo se centra en los procesos matemáticos presentes en la práctica argumentativa desde una perspectiva pragmática del EOS, principalmente desde el proceso de argumentación de donde se pretende que intervengan y emerjan diferentes objetos matemáticos. El enfoque ontosemiótico propone la configuración de objetos y procesos (Figura 2.2) para evaluar el desarrollo de objetos y procesos matemáticos, tales procesos pueden ser: ejemplificar, visualizar, argumentación, generalizar, particularizar, etc. De acuerdo con Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) estos objetos pueden ser analizados desde cinco pares de puntos de vista duales, según su función contextual y funcional en las prácticas matemáticas, así como de los procesos matemáticos relacionados.

Figura 2.2 Configuración de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

Fuente: Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016, p. 97).

La integración de los objetos matemáticos primarios forma lo que se conoce en el EOS por configuraciones ontosemióticas (Font y Godino, 2006) (Figura 2.3), las cuales pueden ser epistémicas o cognitivas. Estas últimas se asocian al sistema de prácticas del individuo mientras que las epistémicas corresponden al sistema de prácticas promovidos por la institución. Ambas configuraciones permiten integrar los objetos primarios en un sistema de prácticas (operativa y discursiva) y en este trabajo se utilizan ambas, una para hacer el análisis epistemológico de los objetos matemáticos, conocida como configuración epistémica; mientras que la configuración cognitiva, para analizar la práctica argumentativa de los alumnos referente a los objetos matemáticos abordados en esta investigación, principalmente el de las trasformaciones isométricas. En la Figura 2.3 se muestra una configuración ontosemiótica, la cual integra los seis objetos matemáticos primarios y su relación entre ellos.

Figura 2.3 Objetos matemáticos primarios y relaciones en una configuración ontosemiótica



Fuente: Font y Godino (2006, p. 69).

En este trabajo, se presenta la configuración epistémica de una de las actividades diseñadas en relación con la construcción de teselados regulares que involucran las transformaciones isométricas en el plano (traslación, rotación y simetría axial o reflexión) y el uso de un SGD. Mientras que la configuración cognitiva, es relativa a los argumentos de los alumnos; es decir, sus significados personales sobre la práctica argumentativa que realizan al enfrentarse a una tarea o situación problema.

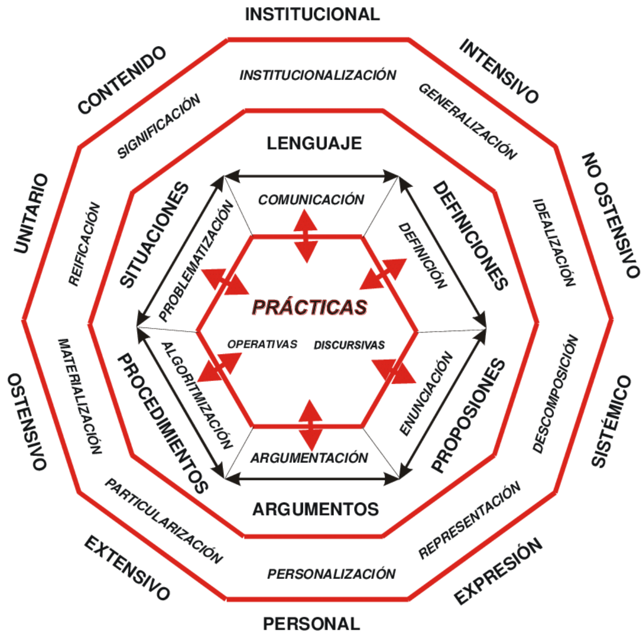
Los procesos matemáticos en el que hace énfasis este estudio son los propuestos por el EOS, específicamente, en el de argumentación – argumentos en términos de las prácticas argumentativas, algoritmización – procedimientos, generalización y particularización evidenciados en el procedimiento de construcción geométrica ligado al objeto matemático del representado en el SGD *GeoGebra*. Cabe resaltar que lenguaje – comunicación es considerado como un proceso transversal dentro del desarrollo de la práctica argumentativa.

2.3.1 Las dualidades de los procesos matemáticos en el Enfoque Ontosemiótico

Desde la perspectiva del EOS, la noción de proceso matemático refiere a la "idea de una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas" (Rubio, 2012, p.107). El *proceso matemático* nos permite explorar el funcionamiento dinámico de la configuración ontosemiótica activada en la práctica matemática, esto en un tiempo determinado. Cuando analizamos la actividad matemática podemos identificar y priorizar un objeto matemático primario (lenguaje, procedimiento, definición, argumento o proposición), el cual a su vez prioriza el proceso matemático relacionado, por ejemplo, a partir de definición de polígono regular es posible evocar su representación gráfica, el cual es comunicado a través de un lenguaje gráfico. Así, existe un proceso de representación asociado a un objeto primario que es el lenguaje.

El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos, seis de ellos (comunicación, argumentación, algoritmización, enunciación, definición y problematización) podríamos relacionarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que emergen y estructuran la configuración ontosemiótica (hexágono de la Figura 2.4). Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales, las cuales son institucional - personal, ostensivo – no ostensivo, unitario – sistémico, expresión – contenido, extensivo – intensivo (decágono de la Figura 2.4), como una forma de *estar participando* en el desarrollo de la práctica matemática. Tanto las dualidades como los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso – producto.

Figura 2.4 Procesos matemáticos y duales del EOS



Fuente: Tomado de Font, Planas y Godino (2010, p. 10).

De acuerdo con Font y Rubio (2017) los procesos matemáticos tienen algún aire de familia entre ellos, es decir, los procesos son agrupados en familia si estos tienen algo en común cuando se comparan dos a dos, pero quizá no haya aspectos en común entre todos ellos. De esta manera los 16 procesos mostrados en la Figura 2.4 pueden ser analizados a través de la perspectiva proceso – producto, donde las facetas duales vienen a ser las diferentes miradas que permiten decir de qué manera está participando el proceso matemático cognitivo en la práctica matemática, así como identificar y segregar el objeto matemático interviniente o emergente relacionado. En el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) se consideran las siguientes dualidades aplicables a los objetos matemáticos:

Personal – Institucional

Esta dualidad en el EOS refiere a la dialéctica entre la cognición individual y social o cultural. Aquí la existencia de los objetos matemáticos es desde la perspectiva personal (mental) o institucional (intersubjetiva y normativa), por lo que desde la *cognición personal* es el resultado del pensamiento a través de las acciones del sujeto individual ante una clase de situaciones problema. Mientras que la *cognición institucional* es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

Extensivo – intensivo

Esta dualidad refiere a la dialéctica entre lo particular y lo general de un objeto matemático, el cual se denomina extensivo si participa en una práctica matemática de manera ejemplar particular, mientras que se dice intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad.

Ostensivo – no ostensivo

La naturaleza de los objetos matemáticos es de carácter no ostensivo (no perceptibles por sí mismos). Sin embargo, la dualidad ostensiva – no ostensiva sostiene que cualquier objeto ideal o abstracto lleva asociado uno o varios objetos ostensivos, los cuales pueden ser mostrados o representado a través de símbolos, gráficos, notaciones, etc. Los objetos ostensivos también son parte del pensamiento y la imaginación de un sujeto, así como también están implícitos en el discurso matemático.

Sistémico – unitario

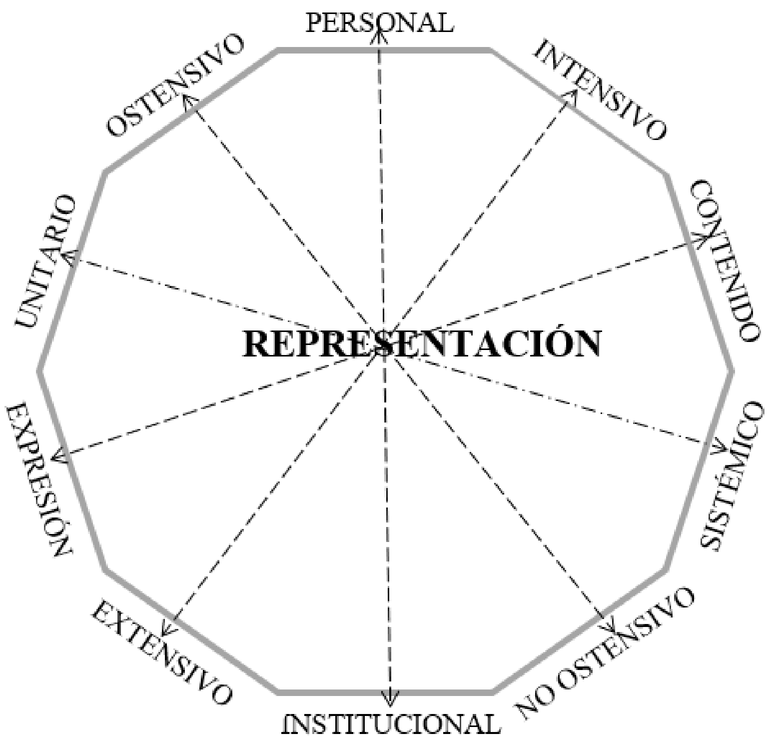
En esta dualidad el objeto matemático participa como entidad unitaria (conocido previamente), mientras que en otras circunstancias intervienen como sistemas de prácticas que se deben descomponer para su estudio. Esta forma de estar de los objetos matemáticos permite comprender e interpretarlos como parte otros objetos.

Expresión – contenido

Esta dualidad tiene como eje central las funciones semióticas, entendida como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecido por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Así la forma de estar de los objetos matemáticos se da en términos de sus representaciones pasando a ser objetos representados.

En este sentido las diferentes dualidades (miradas) permiten articular de manera sistémica diversas perspectivas sobre algún proceso matemático, puesto en juego en las prácticas matemáticas. En la Figura 2.5 podemos visualizar el proceso de representación desde las miradas de las facetas duales.

Figura 2.5 El proceso de representación desde la mirada de las facetas duales



Fuente: Adaptado de Font, Planas y Godino (2010, p.10).

2.4 La idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico

La noción de la idoneidad didáctica se introduce en el marco teórico del EOS por Godino, Contreras y Font (2006), la cual definen como un indicador de la calidad de un proceso de instrucción (o de alguna secuencia didáctica). En concreto, esta herramienta permite valorar la pertinencia o adecuación de un proceso de estudio como herramienta que relaciona la didáctica descriptiva y la didáctica normativa. Dichos autores plantean seis criterios (*idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad semiótica, idoneidad mediacional, idoneidad emocional*) que permiten evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

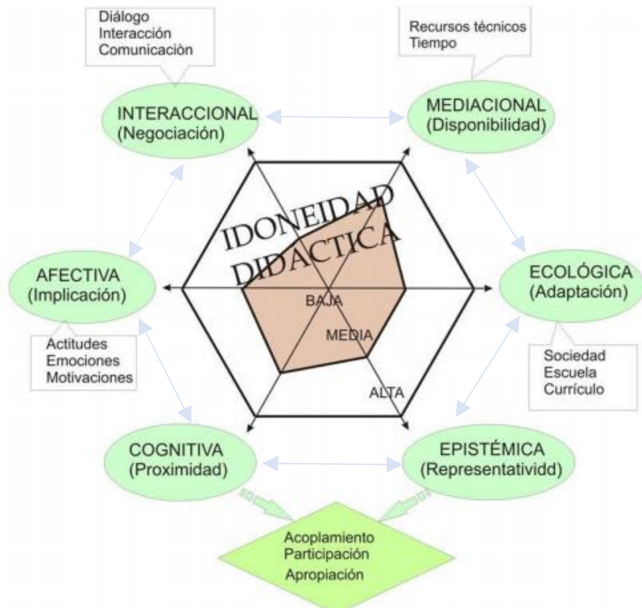
Tomado como base los criterios anteriores, Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi (2006) los retoman para analizarlos y precisarlos con el fin de determinar en qué medida un proceso de estudio es *idóneo* según las circunstancias y recursos disponibles. A continuación, se describe los seis criterios de la ID propuesto por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006): 1) *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos) en relación con el significado de referencia. 2) *Idoneidad cognitiva,* valora los significados pretendidos e implementados se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la cercanía de los significados logrados a los significados pretendidos e implementados. 3) *Idoneidad interaccional,* valora durante el proceso de instrucción si la interacción (alumno- alumno o profesor- alumno) resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4) *Idoneidad mediacional*, para valorar la disponibilidad, adecuación y pertinencia de los recursos materiales y temporales en el proceso de instrucción. 5) *Idoneidad emocional/afectiva*, se relaciona con el grado de implicación (interés, motivación, actitudes y emociones) de los alumnos en el proceso de estudio. 6) *Idoneidad ecológica,* valora la pertinencia del proceso de estudio al proyecto educativo, directrices curriculares, condiciones del entorno social.

Dado que la ID es una herramienta teórica metodológica que tiene que ver con guiar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, para que el proceso de estudio implementado sea considerado idóneo es necesario tener un equilibrio sobre la identificación de las seis idoneidades (Font, Planas y Godino, 2010). Cabe resaltar que la idoneidad epistémica y cognitiva están estrechamente relacionados, dado que ambos están descritos en términos de los significados institucionales y personales. Asimismo, los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos del proceso de instrucción, un primer análisis *a priori* permite prever y orientar un aprendizaje significativo, así como las dificultades y conflictos que puede llegar a tener el alumno en el proceso de estudio. Mientras que el segundo análisis *a posteriori* de los criterios permite valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado (Breda y Lima, 2016; Hummes, Font, y Breda, 2019). En este estudio se realiza únicamente el análisis a priori de la secuencia de actividades, tomando en cuenta un primer pilotaje del diseño de las actividades. Según el EOS

> La *idoneidad didáctica* se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o *incidentes didácticos* puntuales (Godino, 2013, p. 118).

La idoneidad didáctica representa una relación entre sus componentes (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, emocional y ecológica), para lograr una mayor idoneidad didáctica se requiere que todas sus componentes sean equilibradas, para ello estas componentes deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas. La Figura 2.6 muestra a través de un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno corresponde a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006).

Figura 2.6 Componentes de la idoneidad didáctica



Fuente: Tomado de Godino (2011, p. 6).

En este estudio, el papel que juega la idoneidad didáctica es para el análisis a priori y a posteriori del rediseño de actividades, mismo que se relaciona con el significado institucional de referencia, el cual se desarrolla dentro de un sistema de prácticas (operativas y discursivas) que conforman el significado (personal o institucional) de un objeto matemático. Consideramos que a través de la identificación de los seis objetos primarios (emergentes y/o intervinientes) se puede identificar un amplio significado del objeto matemático. A estos objetos primarios intervinientes o emergentes se le conoce como las componentes del significado del objeto matemático.

2.4.1 Componentes y descriptores de la idoneidad didáctica

El EOS considera la operatividad de las componentes de la idoneidad didáctica a través de descriptores observables y específicos, correspondientes a cada componente de la idoneidad (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, emocional/afectiva y ecológica). A continuación, se explicitan los descriptores de las distintas idoneidades parciales propuestos por Lima y Breda (2016), los cuales sirven de pauta o guía para valorar el diseño de actividades propuestas, tomando en cuenta las acciones planificadas o efectivamente implementadas. En este estudio, los descriptores de la idoneidad didáctica servirán para valorar el grado de idoneidad del diseño instruccional de una secuencia de actividades en torno al uso de un software de geometría dinámica.

En la Tabla 2.1 se integran los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica, la cual permitirán valorar la representatividad de los diversos objetos matemáticos relacionados con las isometrías en el plano (definiciones, procedimientos, justificaciones, argumentos, proposiciones), así como el tipo de lenguaje (gráfico, verbal, numérico, algebraico). Estos indicadores darán pauta a las situaciones planteadas para proporcionar diversas formas de abordarlas e identificando los objetos intervinientes y emergentes, con el fin de conjeturar y argumentar las soluciones.

Tabla 2.1.

Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica

Componentes	Descriptores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 80).

La idoneidad cognitiva se centra en los significados personales presentes en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos e implementados (Figueroa, Anchorena y Distéfano, 2014). En la tabla 2.2 se describen los indicadores asociados a esta faceta.

Tabla 2.2.

Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva

Componentes	*Descriptores*
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias individuales.	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) Promueve procesos metacognitivos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 81).

Los indicadores de la idoneidad afectiva se enfocan en evidenciar la motivación, actitudes e intereses, referente a las tareas incorporadas en un proceso de estudio, algunos de estos pretenden evidenciarse en el desarrollo de las situaciones propuestas, con el fin de promover el proceso de argumentación matemática del alumno.

Tabla 2.3.

Componentes y descriptores de la idoneidad emocional / afectiva

Componentes	*Descriptores*
Intereses y necesidades	Selección de tareas de interés para los alumnos. Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.

Actitudes	Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 82).

La idoneidad interaccional se identifica por relacionar la interacción entre el docente y alumno, así como la de relación entre alumnos creando la negociación de significados, estos indicadores valoran la autonomía existente en el desarrollo de los procesos cognitivos de los alumnos, mismos que son identificados por el docente. En la Tabla 2.4 se muestran los descriptores que corresponden a la fase interaccional.

Tabla 2.4.

Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional

Componentes	Descriptores
Interacción docente – discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 81).

Por otra parte, los componentes e indicadores de la idoneidad mediacional (Tabla 2.5) se refieren al uso de materiales manipulativos e informáticos, donde se valora la pertinencia y las condiciones para ser adaptados en un momento dado del proceso de estudio. Los indicadores de las idoneidades epistémica y mediacional serán adaptados para cada una de las actividades relacionadas con las transformaciones isométricas en el plano (traslación, rotación y reflexión).

Tabla 2.5.

Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional

Componentes	Descriptores
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 82).

Los indicadores de la idoneidad ecológica (Tabla 2.6) valoran las conexiones intra e interdisciplinares, la adaptación del currículo teniendo en cuenta la formación sociocultural de los alumnos.

Tabla 2.6.

Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica

Componentes	*Descriptores*
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio – laboral	Los contenidos son útiles para la inserción sociolaboral.
Innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: Descriptores de la idoneidad didáctica tomados de Breda y Lima (2016, p. 83).

2.5 Práctica argumentativa, proceso de argumentación y argumento

En los estudios superiores, Godino y Recio (2001) asocian la práctica argumentativa con la *demostración*, en este sentido asumen este término de modo genérico, como:

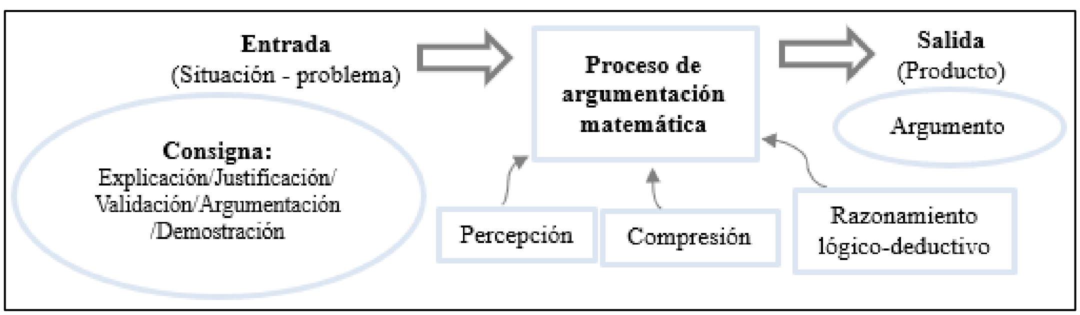
> el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (Godino y Recio, 2001, p. 406).

Sin embargo, en el nivel básico y medio superior, no necesariamente se exige al alumno llegar a una demostración formal. En este estudio y en términos del EOS, se asume que la *práctica argumentativa* se realiza cuando el alumno desarrolla una práctica matemática (operativa o discursiva) referente a una situación – problema, la cual requiere de una justificación, validación, descripción, explicación, argumentación o demostración en el proceso de solución del problema, en el que puede o no manifestar un razonamiento lógico – deductivo. A su vez, la interacción social en el aula es un aspecto relevante para desarrollar procesos que favorecen la argumentación matemática, pues la necesidad de comunicar y validar ideas apoya el razonamiento cercano a la deducción (Boero, 1999; Balacheff, 1999).

Como indica Tall (2007), la argumentación matemática es un proceso de la actividad humana que ha evolucionado en el individuo desde temprana edad, esta evolución implica una vida de desarrollo cognitivo. En este sentido, el proceso de argumentación matemática se desarrolla a medida que los diferentes individuos maduran sobre el objeto matemático, a través de la percepción, la acción, la comprensión (el mundo del simbolismo) y la construcción (el mundo del formalismo). En términos del EOS, se considera que en la práctica matemática intervienen y emergen los objetos matemáticos primarios, los cuales forman parte de la configuración ontosemiótica. En este estudio, se hace énfasis en el objeto matemático primario: *argumento*, dentro de la práctica argumentativa dado que es considerado como un producto en el proceso de argumentación matemática (Larios, Pino-Fan y González, 2017).

En el trabajo de Rubio (2012), se caracterizan procesos matemáticos donde se toma en cuenta una entrada (tarea matemática) y una salida (argumento). En este trabajo se esquematiza un proceso de argumentación de un individuo (Figura 2.7) que aborda una tarea matemática o situación problema (entrada), cuya consigna es la inclusión de una explicación, justificación, validación, argumentación o demostración y cuyo producto o respuesta (salida) es lo que se llama en el EOS un *argumento* de la configuración ontosemiótica (CC/CE).

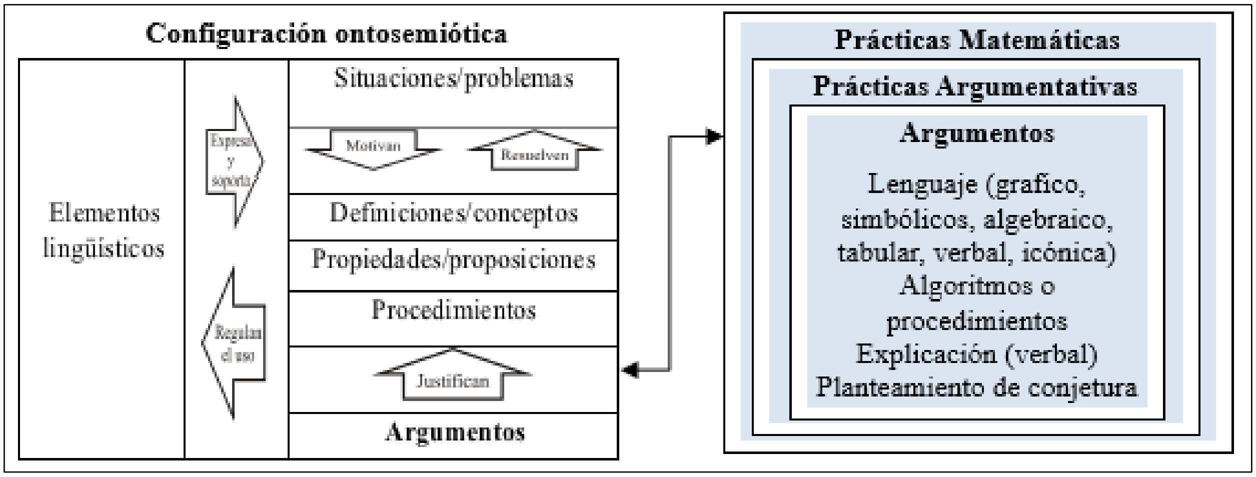
Figura 2.7 Perspectiva del proceso de argumentación matemática en este estudio



Fuente: Elaboración propia.

En la configuración cognitiva, el argumento se relaciona con el significado personal y puede ser expresado mediante un lenguaje gráfico, icónico, algebraico o simbólico, explicaciones analíticas, descripciones verbales (formal o informal) o conjeturas. En la configuración epistémica, el argumento se asocia al significado institucional, cuando se llega a demostraciones matemáticas formales (Figura 2.8).

Figura 2.8 Argumentos y prácticas argumentativas



Fuente: Elaboración propia.

2.6 Esquemas de argumentación matemática

Dada la existente variedad de interpretaciones de los términos práctica argumentativa, proceso de argumentación y argumento que se puede encontrar en el área de la Educación Matemática, es necesario que en proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se fomente el razonamiento lógico formal, pues a medida que los alumnos estructuren ideas deductivas podrán aproximarse a la demostración matemática formal. Harel y Sowder (1998) proponen una caracterización de esquemas de prueba (proof schemes) con alumnos universitarios, en relación con un experimento de enseñanza individual. Dichos autores, mencionan que estos esquemas se asocian a una etapa cognitiva o capacidad intelectual en el desarrollo matemático del individuo.

Además, Harel y Sowder (1998) y Harel (2007) asocian el acto de pensar, la forma de pensar y la forma de entender con aspectos como conjeturar, inferir, probar, explicar, generalizar, etc. A su vez, ellos se enfocan en dos procesos de demostración; el primer proceso tiene que ver con la determinación y el segundo con la persuasión. Para eliminar dudas propias sobre la verdad de una afirmación, el individuo emplea un proceso de determinación, mientras que, para eliminar las dudas de los demás individuos sobre la verdad de una afirmación, este desarrolla un proceso de persuasión. En este sentido, dichos autores plantean tres esquemas de demostración, los cuales son convicción externa, empírica y analítica, los cuales sirven de base para los esquemas de argumentación que proponen otros autores. Así, Flores (2007) y Flores, Gómez y Flores (2010), retoman esta propuesta para adaptarla a estudios de prácticas argumentativas con profesores de bachillerato en México, cuando ellos justifican soluciones geométricas bajo el contexto de la geometría dinámica. Estos autores proponen esquemas de argumentación tomando como antecedente que "la práctica argumentativa como el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, p. 71). A continuación, se adecúan cuatro de los cinco esquemas de argumentación propuestos por estos autores, para el grupo de alumnos en este estudio:

Autoritario: El argumento manifestado por el alumno depende de una autoridad quien lo realiza (libro de texto, profesor o compañero).

Simbólicos: En este tipo de esquemas el alumno puede utilizar un lenguaje matemático y símbolos poco claros o consistentes.

F*ácticos:* Los argumentos del alumno son de recuento, de lo que se hizo a manera de explicación o justificación de algún resultado.

Empíricos: El argumento del alumno es apoyado por hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo o el hecho físico constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.

Analíticos: El alumno sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida.

Considerando lo anterior, se retoman estos esquemas para categorizar de manera general los argumentos expuestos por los alumnos al resolver situaciones-problema cuando utilizan un software de geometría dinámica, en el contexto de construcción de teselados. En la metodología se explicitará un primer planteamiento del tipo de situaciones – problemas abordados en este estudio, con el fin de que pudieran ser mejoradas después de un análisis a priori y a posteriori.

Capítulo 3. Metodología de Investigación

3.1 Tipo de investigación

De acuerdo con los objetivos de esta investigación presentados en el capítulo 1, el estudio se enmarca en un paradigma *naturalista* (Moschkovich y Brenner, 2000) y una metodología de carácter *cualitativa e interpretativa*, la cual indaga en la comprensión profunda de fenómenos educativos y sociales permitiendo la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos (Bisquerra, 2004). Las características de esta investigación son en torno al *estudio de casos* y de *campo*. Dado que se pretendió comprender los hechos y aspectos de los alumnos del nivel medio, a través de la inmersión de sus procesos matemáticos cognitivos cuando ellos argumentan tareas geométricas mediante el uso de uso de software de geometría dinámica, *GeoGebra*. Dado que se analizaron tres grupos distintos de alumnos, resaltamos que, en el último grupo de estudiantes, los cuales fueron cinco alumnos, se realizaron entrevistas individuales recurriendo a la observación participante. De esta manera se pudo analizar el comportamiento, gestos y lenguaje propio de los participantes al interactuar con ellos. Por lo que en esta última fase del análisis se considera la etnografía según Álvarez-Gayou (2003), la cual define como:

> una forma de mirar y hace una clara distinción entre simplemente ver y mirar; cuyo propósito es describir lo que las personas de un sitio, estrato o contexto determinado hacen habitualmente y explicar los significados que le atribuyen a ese comportamiento realizado en circunstancias comunes o especiales, presentando sus resultados de manera que se resalten las regularidades que implica un proceso cultural (p. 76).

Además, la investigación de campo ayudó a recabar la información de los alumnos desde el contexto natural de ellos; es decir, el trabajo realizado por los alumnos fue en la institución y tiempo calendarizado en su curso de Geometría Analítica. En este sentido, se considera utilizar la etnografía como parte de la interpretación y descripción del estudio, con el fin de especificar características de los procesos matemáticos y cómo se desarrollaron en la práctica argumentativa de los alumnos de este estudio, resaltando que se hizo énfasis en el proceso de argumentación a través de las situaciones problemas y el uso del software *GeoGebra*.

Esta investigación utiliza la técnica de *estudio de caso*, cuyo alcance fue de carácter interpretativo y descriptivo de manera intrínseca al proceso de argumentación y procesos matemáticos mencionados anteriormente, mismos que emergen de los argumentos manifestados por los alumnos durante el desarrollo de actividades propuestas. El principal interés fue analizar y caracterizar los procesos matemáticos que intervienen cuando los alumnos realizan argumentación matemática en un ambiente de geometría dinámica. La investigación se enfocó en la indagación detallada de las prácticas de los alumnos donde intervienen significados previos y emergentes, así como los recursos de apoyo (diseño de applets) para abordar las situaciones presentadas.

3.2 Contexto de la investigación

Esta investigación pone de manifiesto el análisis y la caracterización de los procesos matemáticos evidenciados en la práctica matemática, la cual es fomentada a partir del proceso de argumentación realizado por los alumnos del nivel medio superior, al resolver situaciones problemas de una secuencia de actividades en el campo de la geometría utilizando un software de geometría dinámica, particularmente *GeoGebra*. En esta investigación se elaboraron actividades centradas en la justificación y la argumentación de las construcciones de teselados regulares y semirregulares en el plano, aplicando herramientas de las transformaciones isométricas propias del software *GeoGebra*. Dichas actividades fueron desarrolladas por alumnos que cursaban la asignatura de Geometría Analítica correspondiente al cuarto semestre de una institución del nivel medio superior (bachillerato) en la ciudad de Querétaro, México. Cabe resaltar que, el diseño de actividades contempló los conocimientos previos respecto al contenido disciplinar y el uso de herramientas específicas del software *GeoGebra*, con el fin de que los alumnos realizaran correctamente la construcción de los teselados.

Para la recopilación de información se utilizaron las hojas de trabajo (secuencia de actividades) y entrevistas semi estructuradas, mismas que permitieron indagar sobre los procesos matemáticos de los alumnos en un ambiente de geometría dinámica. Cabe resaltar que, el SGD *GeoGebra* juega el papel de mediador en el desarrollo de las prácticas argumentativas, donde las herramientas principales a utilizar son referentes a las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial).

3.3 Participantes del estudio e instrumentos de indagación

Esta investigación abordó la descripción de los argumentos manifestados por los alumnos cuando resuelven situaciones problema en el contexto de los teselados mediante el uso de un SGD, cuyo interés fue el proceso de argumentación a través de la práctica operativa y discursiva de los alumnos. Los participantes fueron alumnos que cursaban la materia de geometría analítica correspondiente al cuarto semestre de la escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro (alumnos entre 15 y 18 años). En dicha asignatura y de acuerdo con el currículo escolar los alumnos estudian el tema de las transformaciones isométricas en el plano, por lo que los alumnos de este estudio contaban con algunas nociones respecto a dicho tema. Cabe resaltar que, los alumnos no contaban con amplio dominio sobre el uso del software GeoGebra, en particular las herramientas relacionadas con las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial o reflexión). No obstante, dicho software no era completamente ajeno para los alumnos, pues, aunque ellos lo conocían su uso se limitaba sólo a realizar gráficas de funciones.

Este estudió contempló tres puestas en escena de las actividades propuestas, en la primera fue con 32 alumnos y en la segunda con 20 alumnos, teniendo 16 y 10 parejas respectivamente, las cuales se conformaron a elección de ellos; se dió por entendido que en cada sesión se tenía que trabajar con la misma pareja hasta completar el desarrollo de las actividades. El trabajo en parejas fue necesario debido al limitado número de computadoras disponibles en el laboratorio de matemáticas de la institución. La tercera puesta en escena se llevó a cabo con cinco alumnos que cursaban la misma asignatura y de la misma institución que los otros dos grupos; además trabajaron de manera individual las actividades con el fin de profundizar en los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio. Cabe resaltar que estas dos primeras puestas en escena de las actividades se llevaron a cabo de manera presencial; sin embargo, la última puesta en escena se realizó en el contexto de la virtualidad debido a la pandemia (covid-19), lo que resultó pertinente y adecuado para profundizar en los procesos matemáticos manifestados en su práctica argumentativa de estos alumnos. En la Tabla 3.1 se muestra las puestas en escena que se consideraron en este estudio y el número de alumnos que participaron en el desarrollo de las actividades diseñadas.

Tabla 3.1.

Participantes en el estudio correspondiente a cada una de las puestas en escena

Puesta en escena de las actividades	Número de alumnos	Actividades desarrolladas en Parejas	Actividades desarrolladas individualmente
Primera	32	16	-
Segunda	20	10	-
Tercera	5	-	5

Fuente: Elaboración propia.

Los instrumentos que ayudaron a la recolección de datos durante las puestas en escena de las actividades propuestas fueron:

- Las hojas de trabajo (actividades) y sus respectivos protocolos de construcción que realizaron los alumnos durante las actividades.
- Los archivos dinámicos del *GeoGebra*; es decir, los protocolos de construcción de teselados regulares y semirregulares realizados por los alumnos. Los archivos cuentan con la posibilidad de observar en retrospectiva qué herramientas específicas del GeoGebra se aplicaron en la construcción.
- Las grabaciones de audio y video de comentarios y preguntas que hizo el investigador a los alumnos con el fin de clarificar sus respuestas, tanto en las hojas de trabajo como en las construcciones realizadas en el software.

- Las notas de campo sobre las observaciones realizadas por el investigador, las cuales se tomaron en cuenta al analizar los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio.

3.4 El papel del investigador

El papel que jugó la investigadora fue el de observador del tipo participante, ya que fue fundamental para indagar sobre la trayectoria de procesos matemáticos dentro del contexto real de los alumnos. En concreto, la intervención de la investigadora fue en torno a dos acciones principales. Por un lado, se clarificaron dudas de los alumnos sólo en relación con los conocimientos previos y la comprensión de la redacción de las situaciones propuestas en las actividades. Por otro lado, se atendieron dudas relacionadas con el uso del software *GeoGebra*, y sólo cuando fue necesario se indicaba o se recordaba a los alumnos sobre la aplicación de la herramienta de arrastre, con el fin de hacer evidente la correcta o incorrecta construcción dentro del ambiente del software de geometría dinámica.

3.5 La ingeniería didáctica en el proceso de la investigación

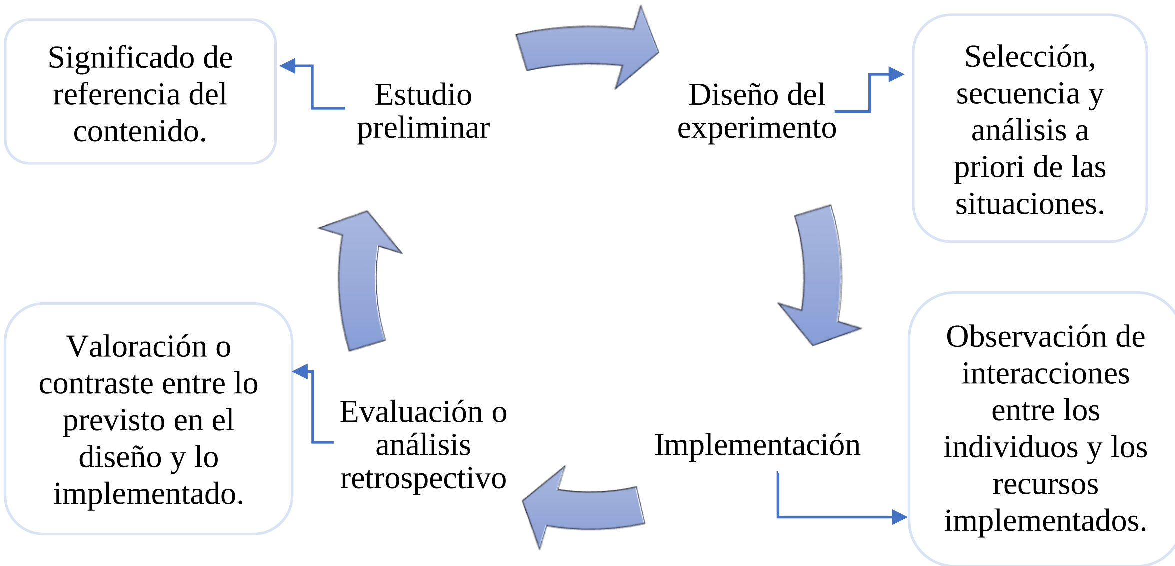
La Ingeniería Didáctica (ID) se introdujo a principios de los años 80 en el marco de la Didáctica Matemática francesa, su origen parte de las intervenciones experimentales en las clases de matemáticas, cuyas características se centran en el diseño, la regulación y la observación controlada de las situaciones, así como en la validación interna de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. En este sentido, la ingeniería didáctica apoyada de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TAD) propuesto por Brousseau, trata de una metodología de investigación que incluye por un lado las condiciones institucionales que implican en el estudio de los contenidos matemáticos, y por otro lado la complejidad desarrollada de las clases (Artigue, 1995).

Dado que la ID surge en apoyo a las intervenciones experimentales de las clases; es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, cuya aplicación moviliza una diversidad de técnicas de estudio (Artigue, Douady, & Moreno, 1995). Desde la perspectiva teórica metodológica del EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y

Wilhelmi, 2014) las Ingeniería Didáctica (ID) es entendida como una clase especifica de la investigación basada en el diseño. Este enfoque se centra en la búsqueda de conocimientos sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático, es decir, identificar pautas que orienten el diseño instruccional. Las fases que se distinguen son: *estudio preliminar, diseño de experimento, implementación y evaluación o análisis retrospectivo*. A continuación, se describe las fases de la ID en terminos del EOS:

- El *estudio preliminar* constituye un significado de referencia del contenido con relación en las acciones operativas y discursivas que sirven para identificar el significado pretendido durante el proceso de instrucción. En esta fase se realiza la solución experta de cada actividad, aunque solo se muestra la de algunas situaciones.
- El *diseño de experimento* corresponde a la selección, secuenciación y análisis a priori de las situaciones problemas a desarrollar en el proceso de instrucción.
- La *implementación* corresponde a la observación de interacciones entre los individuos y los recursos implementados. En esta fase se analizan y clasifican los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio mediante los esquemas de argumentación y la configuración cognitiva en relación con los argumentos de los alumnos.
- La *evaluación o análisis retrospectivo* consiste en una valoración o contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado durante la implementación. En este estudio, esta fase corresponde con la comparación entre la configuración epistémica y la cognitiva. Así como la reflexión sobre la pertinencia del deseño que incorpora el uso de un SGD.

Figura 3.1. La ingeniería didáctica en este estudio



Fuente: Elaboración propia.

3.6 Descripción de las fases de la investigación

En este apartado se explica en términos generales las principales fases metodológicas que permitieron el desarrollo de la investigación, con el fin de alcanzar los objetivos planteados en el apartado 1.7.1.

3.6.1 Fase 1. Planteamiento del problema y consolidación del marco teórico

En un primer momento se realizó la revisión y clasificación de la literatura específica en el contexto de la Educación Matemática, particularmente, a las investigaciones que predominan en la argumentación matemática y el proceso de argumentación, así como de estudios relacionados con estas nociones cuando se utiliza la geometría dinámica, particularmente el caso del *GeoGebra*. Además, se analizaron estudios que hacen referencia a procesos matemáticos, principalmente los propuestos por el EOS.

Lo anterior permitió tener referencia sobre las nociones teóricas a considerar y a precisar la problemática a investigar; es decir, formular las preguntas y objetivos de la investigación, teniendo en cuenta no solo el proceso de argumentación sino algunos otros procesos matemáticos intervinientes y emergentes en el desarrollo de la práctica argumentativa de los alumnos de este estudio, cuando utilizan un software de geometría dinámica. En esta fase de la investigación se consideraron nociones del enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), tanto para la valoración de la propuesta de actividades como para el análisis de la información recabada a partir de la secuencia de actividades propuestos en este estudio.

3.6.2 Fase 2. Estudio exploratorio

Esta fase de la investigación se desarrolló en torno a un estudio exploratorio con el fin de indagar sobre el grado de familiaridad del software *GeoGebra*, así como el tipo de prácticas relativas a la argumentación matemática y el uso de la geometría dinámica en el contexto escolar. Por lo que se inició con un primer diseño del instrumento, el cual fue una secuencia de actividades en el contexto geométrico, con su respectiva solución experta y el análisis epistémico (configuraciones epistémicas del EOS). El diseño de actividades se centró en fomentar la argumentación matemática en el contexto geométrico mediante el uso de la geometría dinámica, *GeoGebra*, para lo cual se tomó en cuenta el diseño de applets construidos en dicho software. Lo anterior, llevó a la implementación y la recopilación de datos de un primer piloto con un grupo alumnos del nivel medio superior.

Respecto al análisis, se realizó una tipificación de los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio utilizando los esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007). Cabe resaltar que dichos esquemas ayudaron a identificar el tipo de argumento de manera general, así que para profundizar en la red de objetos matemáticos (situaciones, elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimiento y argumentaciones) intervinientes y emergentes, fue necesario utilizar las configuraciones ontosemióticas para un análisis más fino de los argumentos de los alumnos es este primer pilotaje. Además, en esta fase el esquema de argumentación se asoció al objeto de argumento de la configuración cognitiva del EOS. Esta fase exploratoria permitió valorar la pertinencia de los instrumentos y tipificar en términos generales los argumentos manifestados por los alumnos en el desarrollo de sus prácticas argumentativas mediante el uso del SGD *GeoGebra*.

3.6.3 Fase 3. Aplicación de la ingeniería didáctica

En esta fase el ciclo de la ingeniería didáctica cobra relevancia en torno a la intervención experimental de la secuencia de actividades.

Estudio preliminar

El estudio preliminar se centra en la elaboración de la solución experta de cada actividad, desde el punto de vista matemático y considerando las posibles respuestas que los alumnos podrían manifestar al momento de realizar las actividades. Cabe resaltar que este análisis preliminar ayudó a tener en cuenta los significados de referencia de cada una de las actividades, esto permitió prever cuáles podrían ser las posibles respuestas o argumentos que los alumnos podrían manifestar durante la implementación de la secuencia de actividades, cuando utilizan la geometría dinámica. La solución experta se realizó en cada una de las etapas de implementación como parte de los significados referenciales, por lo que en el capítulo 4 se muestra dicha solución experta.

Diseño del experimento

Esta fase describe el propósito y análisis a priori de cada actividad propuesta a través la configuración epistémica de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes. El análisis a priori de un primer diseño de actividades se realizó en términos de una valoración (solución experta) de las actividades y su correspondiente configuración epistémica de acuerdo con el enfoque ontosemiótico (EOS).

Implementación

La primera puesta en escena del diseño de actividades consistió en un estudio exploratorio, con el fin de valorar la pertinencia de este para identificar si los argumentos manifestados por los alumnos se correspondían con la solución experta y el análisis epistémico de cada actividad propuesta. Además, identificar de qué manera las herramientas del software fueron aplicados durante el desarrollo de cada situación. Esta implementación vislumbró aspectos que ayudaron a dar pie a una mejora del diseño, es decir, contemplar un rediseño de las situaciones, sobre todo para encaminarlo hacia la identificación de los procesos matemáticos en el desarrollo de la práctica argumentativa. La investigadora jugó el papel de guía para con el fin de concretar los objetivos del diseño.

La segunda puesta en escena de las actividades consistió en la aplicación del rediseño de actividades con otro grupo de alumnos de la escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, el curso de geometría analítica impartida por la institución. Esto fue acompañado por las técnicas de observación participante con el fin de que la investigadora guiara la interacción considerando previamente la prueba piloto. Por otra parte, ya que solo se contó con un número limitado de computadoras en el laboratorio de matemáticas, los alumnos tuvieron que trabajar en parejas, considerando la interacción como parte fundamental en un proceso de instrucción. Durante la implementación, se recurrió a la entrevista semi estructurada solo a los cinco integrantes de la última aplicación de las actividades, con el fin de profundizar en los procesos matemáticos y conocer la parte discursiva del alumno referente al proceso de argumentación matemática, así como para aclarar conceptos utilizados durante dicho proceso y la información relacionada con los procesos matemáticos que emergentes en el desarrollo de su práctica argumentativa.

Evaluación o análisis retrospectivo

En un primer momento se realizó un análisis de los datos recabados de la primera puesta en escena de las actividades, teniendo en cuenta los esquemas de argumentación y las configuraciones epistémicas, mismas que ayudaron a detallar la práctica matemática involucrada. Lo anterior permitió replantear el diseño de actividades y fue evidente la necesidad de un rediseño del instrumento (secuencia de actividades). Este rediseño hizo énfasis en aquellos aspectos donde lo alumnos no mostró argumento o que el argumento carecía de inconsistencia. Para ello, se tomó en cuenta la herramienta de la idoneidad didáctica del EOS, así como el análisis vinculado a las configuraciones ontosemióticas de objetos y procesos matemáticos.

Con base en la información recabada durante una segunda implementación, se realizó un análisis utilizando las herramientas teóricas del EOS, particularmente, la identificación de procesos matemáticos y configuraciones ontosemióticas que permiten describir a detalle la caracterización de los procesos matemáticos evidenciando los argumentos que manifestaron los alumnos de este estudio.

3.6.4 Fase 4. Resultados, discusión y conclusiones

De manera general, esta fase corresponde a exponer los resultados de todas las implementaciones realizadas, aunque se resalta y se detalla sobre los resultados de la implementación final o definitiva, la cual se enfoca en especificar los procesos matemáticos involucrados durante el desarrollo de las prácticas argumentativas de cinco alumnos. Además, para el cierre de este trabajo se intenta sintetizar la investigación en el último capítulo, así como dando respuesta a los objetivos planteados en el primer capítulo. Finalmente, se pone en consideración algunas posibles prospectivas que podría llevar a la ampliación o reproducción de este estudio, pero en otros contextos de la matemática educativa.

Capítulo 4. Diseño, análisis a priori e implementación de las actividades

Este capítulo se centra en la descripción del diseño de actividades, su respectivo análisis a priori y la implementación de estas. Es importante mencionar que el ciclo de la ingeniería didáctica es aplicado a detalle en este apartado, dado que se presenta el diseño, el análisis a priori a través de las configuraciones epistémicas y la descripción de las tres implementaciones realizadas en este estudio.

4.1 Diseño y descripción de las actividades propuestas

En un primer momento, se realizó un primer diseño de actividades que involucraron el uso de un software de geometría dinámica, vinculadas a seguir un eje transversal referente a promover el proceso de argumentación. De inicio, el diseño de actividades declara los objetos matemáticos de polígonos regulares y ángulos, comprendiendo los conocimientos previos, luego se introducen situaciones relacionadas con el uso de applets desarrollados en el *GeoGebra*, donde el objeto matemático emergente principal fue el de las transformaciones isométricas en el contexto de los teselados regulares y semirregulares. En términos generales, el tipo de situaciones planteadas son preguntas tipo abiertas encaminadas a promover la profundización de las propiedades de los polígonos regulares e isometrías en el plano, en el contexto de los teselados y en un ambiente de geometría dinámica. Este diseño se aplicó con alumnos de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro con el fin de valorar y analizar la pertinencia de las situaciones propuestas.

Para la organización de las actividades se procedió a realizar un estudio preliminar del contenido matemático presente y sobre significado referencial de los alumnos al tratar de argumentar las situaciones propuestas. Se diseñaron cinco actividades que fueron divididas en cinco fases, referente a polígonos regulares e isometrías en el plano (traslación, rotación y reflexión). La primera actividad fue primordial para guiar la argumentación sobre la construcción de teselados, aunque en estas no fue necesario el uso del SGD *GeoGebra*. Mientras que, la segunda actividad se dividió en cuatro apartados, nombrados 2, 2a, 2b y 2c, las cuales se centraron en la conceptualización de las transformaciones isométricas. La tercera y la cuarta actividad se enfocaron específicamente en la construcción de teselados regulares y semirregulares, donde se esperaba que los alumnos aplicaran las herramientas correspondientes a las transformaciones isométricas. La última actividad intenta presentar un cierre de la secuencia de actividades, pues, aunque no se les pide a los alumnos realizar construcciones, sí se les pide identificar teselados a través de figuras, así como realizar manipulación y exploración referente a las transformaciones isométricas. A continuación, se describe el objetivo de este primer diseño y las situaciones abordas en estas actividades propuestas:

La primera actividad indagó sobre los conocimientos previos que poseen los alumnos en relación con los polígonos regulares y sus características (diagonales, ángulos interiores, etc.). En esta primera actividad se introducen el concepto de polígono y la identificación de un polígono y sus elementos, integrando el uso del software *GeoGebra*, en donde se muestran diferentes representaciones y, en cierto sentido, se espera que los alumnos utilicen también diferentes lenguajes para expresar sus ideas o respuestas.

La *segunda actividad* integró la exploración y manipulación de archivos dinámicos (applets) proporcionados en el *GeoGebra* para conceptualizar las transformaciones isométricas. Esta segunda fase corresponde a una mayor interacción con el *GeoGebra*, ya que en este apartado los alumnos intentan su primera construcción de teselados regulares, y con mayor frecuencia se muestran conceptos, el tipo de argumentos, propiedades y procedimientos sobre la validación de las isometrías y su construcción, para posteriormente pasar a la construcción de teselados.

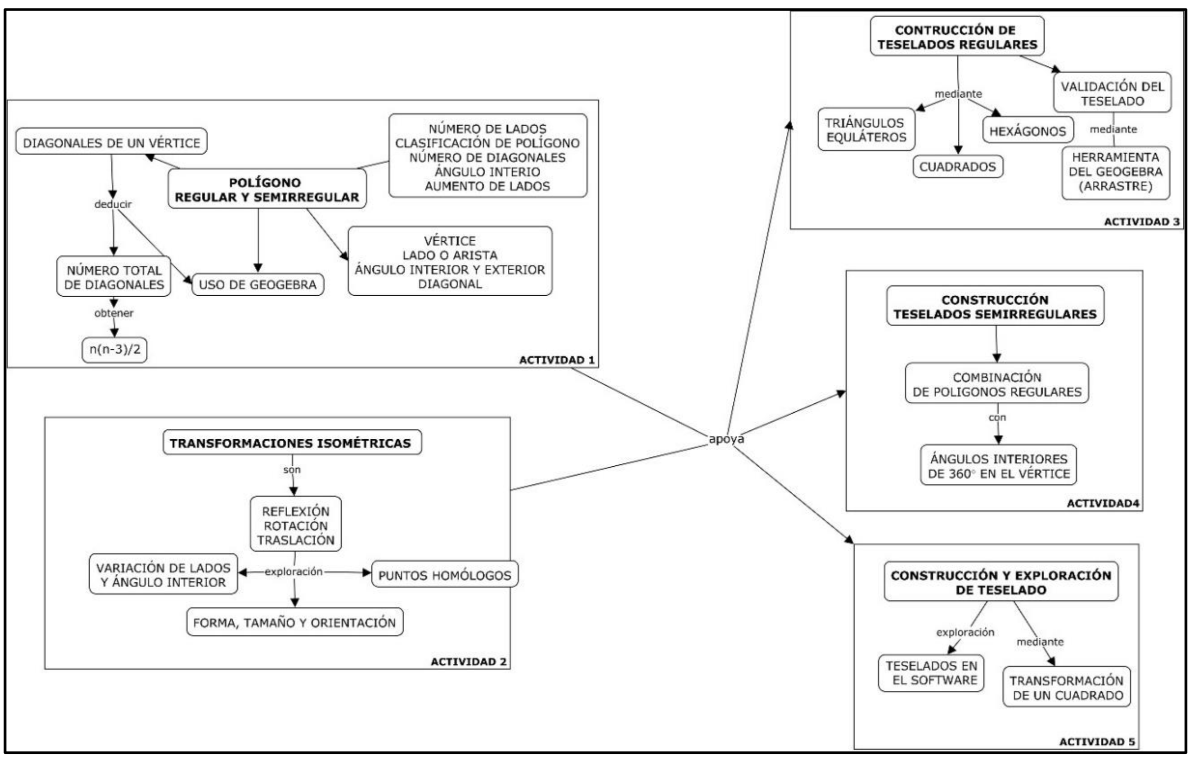
L*a tercera actividad* promovió la construcción de teselados regulares aplicando las herramientas de transformaciones isométricas del software *GeoGebra*. Este diseño contempló el planteamiento del concepto de teselado o recubrimiento regular, con el fin de asegurar que los alumnos tuvieran noción de este. Las primeras cuatro situaciones problema, se les pide a los alumnos que; 1) proponga polígonos con los cuales podría construir un teselado regular, 2) justifique qué polígonos regulares sirven para construir un teselado regular, 3) determine qué transformaciones isométricas utilizaría para generar el teselado regular aplicando herramientas del *GeoGebra*, 4) identifique cuál es el valor de la suma de las medidas de ángulos en cada vértice de un teselado regular. En el resto de las preguntas se pide a los alumnos construir y justificar los teselados al usar cuadrados, triángulos y hexágonos regulares. Es importante mencionar que en esta fase las actividades retoman lo de las actividades previas, por lo que los alumnos tienen que vincular los conceptos con la construcción de teselados regulares.

La *cuarta actividad* promovió la construcción de teselados semirregulares aplicando las herramientas de transformaciones isométricas del software *GeoGebra*. En un primer momento se la plantea la definición de teselado semirregular, se pide a los alumnos; 1) propongan combinaciones de polígonos regulares que sirvan para teselar el plano y formen un teselado semirregular, 2) verifiquen en el *GeoGebra* si efectivamente se puede construir un teselado semirregular, 3) validen mediante la herramienta de *arrastre* si este constituye un teselado semirregular, 4) construyan teselados semirregulares utilizando combinación de triángulos, cuadrados y hexágonos, 5) identifique cuál es el valor de la suma de las medidas de ángulos en cada vértice de un teselado regular, así como validar la construcción mediante la prueba de arrastre.

La quinta actividad promovió la manipulación y exploración de herramientas del *GeoGebra* para identificar cuando una construcción cumplía con la definición de teselado, así como las herramientas de transformación aplicadas en los applets presentados. En las primeras dos situaciones corresponde a la identificación de patrones en un teselado sobre figuras, primeramente, en teselados semirregulares y posteriormente en teselados irregulares. En las siguientes cuatro situaciones se proporciona dos applets de teselados construidos a partir de la deformación de un cuadrado, en el que se pide a los alumnos que describan y argumenten en términos de las transformaciones isométricas aplicadas en el cuadrado y construcción del teselado. Finalmente, en la última situación se le pide deformar un cuadrado para dibujar un teselado a lápiz y papel.

En el diseño se asumió que los alumnos no contaban conocimientos del software *Geogebra*. Aun así, se cuestionó con respecto a esto, con la intención de tener referencia sobre cómo podría influir esta herramienta tecnológica en su proceso de argumentación. Aunado a esto, en el desarrollo de cada actividad se incorporaron sugerencias sobre el uso de las herramientas del *Geogebra*, en relación con el uso y construcción geométrica de los teselados con el fin de guiarlos al uso de las transformaciones isométricas. A continuación, se muestra la intervención de objetos y su relación entre las actividades y el papel que jugó el software *Geogebra* (Figura 4.1). Las transformaciones isométricas fueron los objetos intervinientes en el proceso de argumentación, pues se relacionó con la construcción de teselados regulares y semirregulares, donde el software fue el medio por el cual los alumnos apoyaron su desarrollo de prácticas argumentativas. No obstante, para algunas situaciones el uso del software no se consideró, pues fue necesario incluirlas para guiar y secuenciar el desarrollo de actividades, así como tampoco hubo necesidad que en cada situación se argumentara.

Figura 4.1. Objetos matemáticos intervinientes y emergentes del primer diseño de actividades

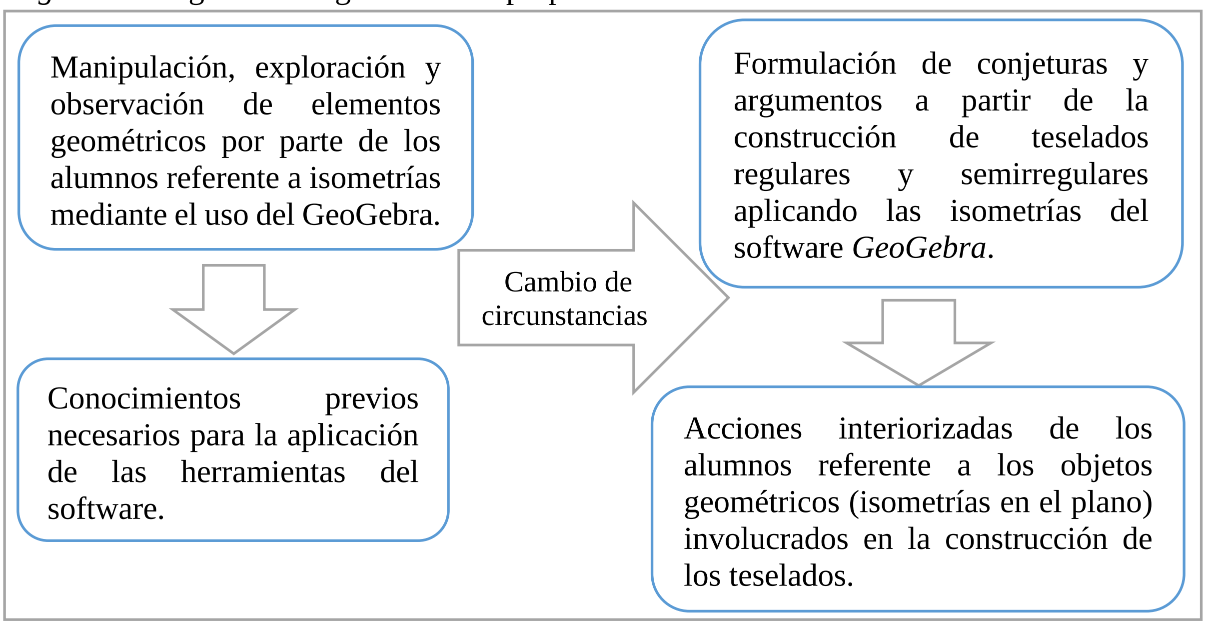


Fuente: Elaboración propia.

4.1.1 Organización didáctica de las actividades

Los recubrimientos o teselados en el plano se consideran un medio didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías, este tema puede ser abordado mediante el uso de material manipulable o de la geometría dinámica, por ejemplo, el software *GeoGebra*. Aquí se aborda el estudio de las isometrías en el plano mediante la construcción de teselados utilizando el software *GeoGebra*. Para el cual, se desarrolló una secuencia de actividades que fomentan la argumentación matemática y cuyo objetivo central fue construir teselados, regulares y semirregulares, así como argumentar el proceso de construcción. La Figura 4.2 muestra de manera general la organización del diseño de actividades, inicialmente la secuencia de actividades (cinco actividades) involucró a las parejas de alumnos a explorar, manipular y observar elementos geométricos como parte de los conocimientos previos. Posteriormente, se los alumnos se involucraron directamente a realizar las construcciones de los teselados regulares y semirregulares mediante la aplicación de las isometrías del software *GeoGebra*.

Figura 4.2 Organización general de la propuesta de actividades



Fuente: Elaboración propia.

4.2 Análisis a priori de los objetos matemáticos en las actividades propuestas

En este apartado se presenta el análisis epistémico correspondiente a las cinco actividades, para ello se consideraron las configuraciones epistémicas del enfoque ontosemiótico, dada la integración de los objetos matemáticos primarios (situaciones problema, definiciones, lenguaje, propiedades, procedimientos y argumentos). Teniendo en cuenta el diseño, se realizó un análisis a priori de cada una de las actividades, identificando dichos objetos matemáticos. El análisis vinculó el proceso de argumentación con los argumentos evidenciados en cada situación propuesta, así como aquellos manifestados durante la construcción de los teselados. Esto permitió categorizar los argumentos tomando en cuenta los esquemas de argumentación (fáctico, simbólico, empírico, analítico). La relación entre la herramienta de análisis del EOS y los esquemas argumentativos, permitieron describir las características de las actividades y prever la práctica argumentativa que ponen en juego los estudiantes al resolver las actividades. A continuación, se describen las configuraciones epistémicas de cada una de las actividades diseñadas relativo a un análisis a priori de este estudio.

4.2.1 Configuraciones epistémicas de las transformaciones isométricas de las actividades

Dado que el estudio se enmarca en la teoría del Enfoque Ontosemiótico, la herramienta de las configuraciones epistémicas sirvió para realizar el análisis a priori del contenido matemático, donde se identifica la red de objetos intervinientes y emergentes en el desarrollo de las actividades propuestas, para lo cual se tiene en cuenta la solución experta de cada actividad. Es importante mencionar que este análisis corresponde a la fase exploratoria del estudio, donde se realizó la tipificación de argumentos a través del uso de esquemas de argumentación propuestos por (Flores, 2007), por lo que en estas configuraciones los argumentos de los alumnos se asociaron a dichos esquemas. A continuación, se describe la configuración epistémica de cada una de las actividades propuestas.

Actividad 1

La configuración epistémica de la actividad 1 (Figura 4.3) involucró conocimientos previos de los estudiantes, los cuales fueron puestos en función del concepto de polígono y polígono regular. Esta actividad contempló una clasificación de acuerdo con el número de lados del polígono representado. También se incorporó el tipo de polígono a través de la representación figural, justificando si este cumplía con el tipo de polígono regular, irregular o ninguno de los casos. Además, se plantearon situaciones que establecieron la relación entre el polígono y el número de diagonales, para lo cual se espera que los alumnos plantearan la formula algebraica que representa el número de diagonales desde un solo vértice y posteriormente, la formula algebraica que representa el total de diagonales que puede tener un polígono regular cualquiera. Estas situaciones que abordaron los conocimientos previos se elaboraron con la intención de guiar al estudiante hacia la manipulación y exploración del software *GeoGebra*.

Figura 4.3 Configuración epistémica de la actividad 1

<u>*Situaciones:*</u> Definición de polígono y polígono regular, y los elementos que lo componen. Clasificar e identificación de polígonos regulares según el número de lados. Trazos de diagonales de un polígono regular con apoyo del *GeoGebra*. Trazo de diagonales de un polígono regular desde un sólo vértice. Relacionar número de lados y diagonales desde un sólo vértice. Determinar la expresión $n-3$ a partir del número de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice. Generalizar la expresión $\frac{n(n-3)}{2}$ de un polígono de n lados. Identificar triángulos al trazar todas las diagonales desde un vértice en un hexágono. Determinar la expresión $n-2$ que representa el número de triángulos de cualquier polígono regular.

Motivan

Resuelven

<u>*Lenguaje:*</u>

Algebraico: expresiones algebraicas para representar el número de diagonales de un polígono.

Verbal: lenguaje común

Gráfico Dinámico: Construcción de polígonos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Definiciones/conceptos:

<u>Previas:</u>

Polígono

Polígono regular e irregular

Vértices, diagonales, lados, ángulo

<u>Emergentes:</u>

Tipo de polígono (regular, irregular o no es polígono)

Expresión $n-3$, que representa el número de diagonales desde un sólo vértice

Expresión $\frac{n(n-3)}{2}$ para calcular el número de diagonales de un polígono de n lados

Propiedades/proposiciones:
Polígono es regular si y solo si la medida de sus lados y ángulos son iguales entre sí
La fórmula para encontrar el número de diagonales en un polígono $\frac{n(n-3)}{2}$, en donde "n" es igual al número de lados del polígono

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Trazo de diagonales
Trazo de diagonales desde un solo vértice
Identificar el polígono según sus lados
Emergentes (matemáticos):
Justificar por qué el polígono es regular, irregular o no es polígono
Previos (software):
Construcción de objetos geométricos/gráficos en la interfaz gráfica del software.
Emergentes (software):
Construcción en *GeoGebra* de polígonos regulares
Construcción de diagonales en un polígono regular
Uso de comandos del software para la construcción de polígonos y sus trazos

Justifican

Argumentos:
De tipo conceptual en relación con el polígono regular.
De tipo deductivo al identificar la formula algebraica que representa el número de diagonales en un polígono regular.

Fuente: Elaboración propia.

Actividad 2

Esta actividad consta de cuatro apartados (*2*, *2a*,*2b*,*2c*), el conjunto de estas trató de guiar al estudiante a explorar y ser capaces de representar ostensivamente la aplicación de las transformaciones isométricas. En la actividad 2 se proporcionó la representación geométrica de diversos polígonos regulares en el software *GeoGebra*, esto a través de la manipulación de un deslizador, para que el estudiante pudiera explorar el valor aproximado de la medida del ángulo interior de los diferentes polígonos regulares, cuando se varía el ángulo y el número de lados. El resto de las actividades (2a, 2b y 2c) se enfocaron en la conceptualización de las trasformaciones isométricas (rotación, reflexión y traslación) a partir de la exploración sobre la forma, tamaño y orientación de la figura transformada; es decir, que los alumnos fueran capaces de definir en términos matemáticos las transformaciones isométricas. Además, se solicitó a los alumnos que aplicaran las herramientas correspondientes a la construcción de la traslación, rotación y reflexión o simetría axial, tomando en cuenta las sugerencias y exploraciones del archivó proporcionado. La configuración epistémica correspondiente a la segunda actividad (Figura 4.4), relaciona la red de objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes del EOS, así como las herramientas usadas en el desarrollo de su práctica argumentativa de los alumnos. Además, en esta configuración epistémica los argumentos son asociados a los esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007).

Figura 4.4 Configuración epistémica de actividad 2

Lenguaje:

Algebraico: Traslación geométrica $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AB}$.

Verbal: lenguaje común

Gráfico-software: construcción de la traslación usando las herramientas de polígono, vector y traslación.

Gráfico/geométrico

Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones: Exploración y explicación de polígonos regulares en el *GeoGebra*. Justificación sobre el ángulo de 180° cuando se aumenta el número de lados. Exploración y justificación sobre la traslación de un triángulo en *GeoGebra*. Conceptualización y construcción de la traslación geométrica a partir de la exploración y el uso del software. Exploración (forma, tamaño y orientación) de la rotación de polígonos regulares en *GeoGebra*. Justificación sobre el cambio de ángulo de rotación entre el centro de rotación y dos puntos homólogos. Conceptualización y construcción de la rotación geométrica. Exploración de la reflexión de un triángulo en *GeoGebra*. Justificación de la distancia entre puntos homólogos. Conceptualización y construcción de la reflexión geométrica.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:

Previas:

Polígono regular, ángulo interior, ángulo llano, plano cartesiano, traslación, rotación, reflexión, vector, hexágono y orientación

Emergentes:

Cuando se aumenta el número de lados de un polígono regular, su forma se aproxima a una circunferencia.

El ángulo interior de un polígono regular nunca es un ángulo llano.

Isometrías en el plano.

Propiedades/proposiciones:

Todo polígono convexo, la suma de la medida de los ángulos interiores equivale al producto de 180º por el número de lados disminuido en dos.

La suma de la medida de ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º.

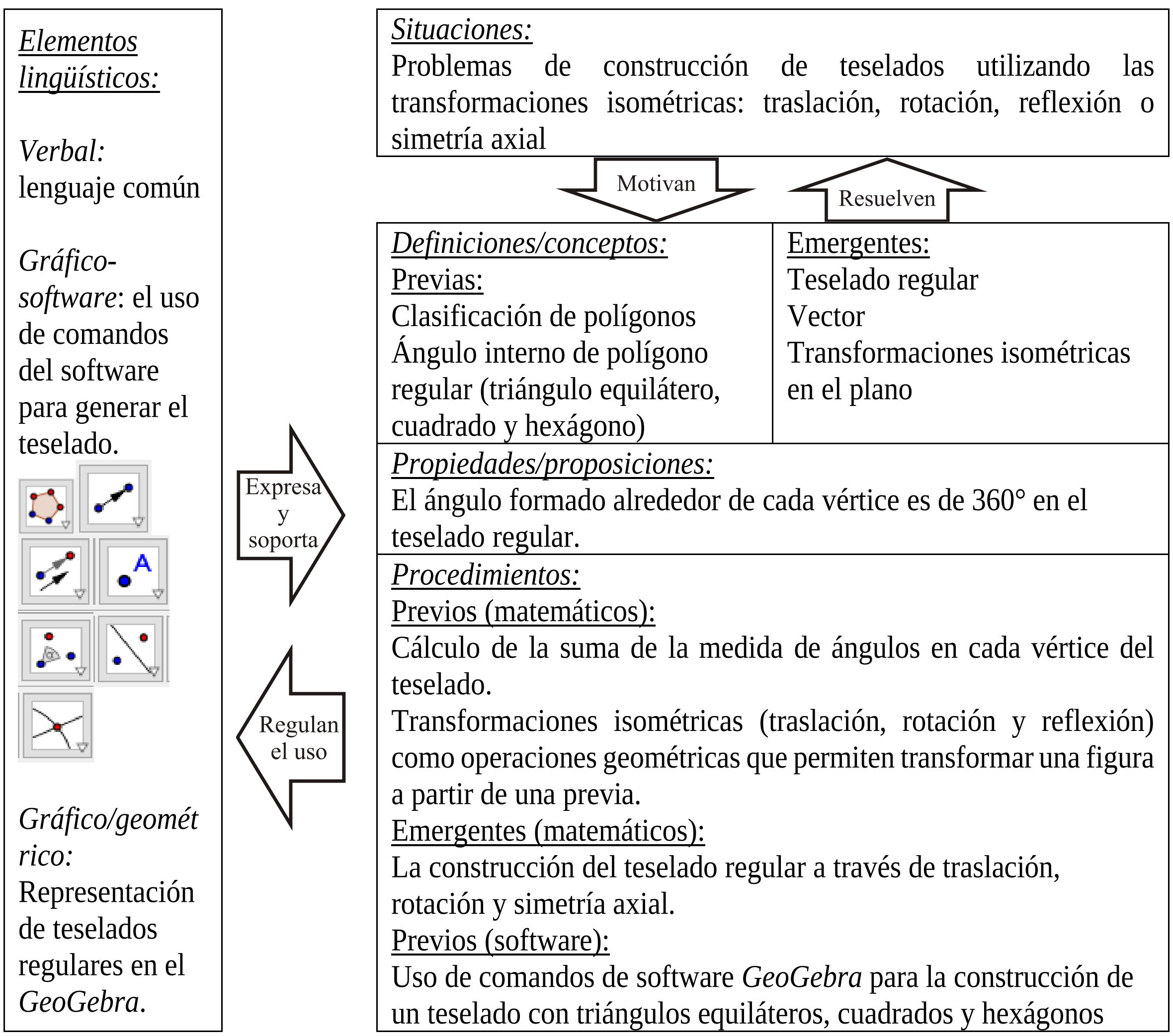
Representación de un hexágono mediante la traslación.	La transformación isométrica es la aplicación que le hace corresponder a un punto del plano otro punto del mismo plano. La traslación $T(\overrightarrow{AB})$ es la transformación que a cada punto E del plano se le asocia un punto E' del mismo plano tal que $\overrightarrow{EE'}$ sea igual a $\overrightarrow{AB}$ en donde $\overrightarrow{AB}$ es el vector de traslación.
	<u>Procedimientos:</u> <u>Previos (matemáticos):</u> Cálculo de la medida de la suma de ángulos en un polígono regular. <u>Emergentes (matemáticos):</u> Justificación sobre el ángulo interior y la forma del polígono cuando se aumenta sus lados mediante la exploración de comandos del software. <u>Previos (software):</u> Manipulación de comandos del software en función a la exploración de un polígono regular cuando aumenta el número de lados. <u>Emergentes (software):</u> Exploración sobre el archivo “aumento de lados” en *GeoGebra* para justificar que ocurre con el ángulo interior y el polígono cuando se aumentan sus lados.
	Justifican
	<u>Argumentos:</u> De tipo empírico (experimental) proporcionados por el razonamiento perceptivo y los cambios dinámicos de exploración e identificación de las trasformaciones isométricas. De tipo empírico (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico. De tipo analítico pues se sigue un razonamiento deductivo para interiorizar los conceptos de transformaciones isométricas.

Fuente: Elaboración propia.

Actividad 3

Esta actividad se enfocó en la construcción de teselados regulares, partiendo de la introducción del concepto de teselado regular y la representación de una serie de polígonos regulares, donde se espera que los alumnos identifiquen qué polígonos podrían usar para construir un teselado regular. Como parte de la construcción correcta del teselado, esto al aplicar las transformaciones isométricas, así los alumnos tenían que identificar una propiedad en la construcción del teselado regular, la cual es la suma de las medida de los ángulos interiores que rodean a un solo vértice forman un ángulo de 360º, así como la visualización de los ángulos interiores de polígonos regulares divisores de 360°, esto con la finalidad de que se identificara qué polígonos regulares servirían para la construcción de un teselado regular. Para ello, se solicita a los alumnos la construcción de teselados formados por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos mediante la aplicación de las trasformaciones isométricas. En esta actividad se realizaron sugerencias sobre el uso de las herramientas del software, con el fin de guiar la construcción de los teselado, con el fin de que los alumnos las aplicaran correctamente, tanto en la construcción como en su proceso de argumentación. A continuación, se muestra la configuración epistémica correspondiente a la tercera actividad (Figura 4.5).

Figura 4.5 Configuración epistémica de actividad 3



Uso de sugerencias sobre comandos para construcción de los teselados

<u>Emergentes (software):</u>

Construcción de teselados regulares usando herramientas del Software *GeoGebra*.

Justifican

<u>Argumentos:</u>

De tipo fáctico por el uso de las herramientas de transformación isométrica que intervienen en el proceso construcción.

De tipo empírico por el uso de comandos que llevaron a la construcción y exploración de los teselados usando isometrías en el plano.

De tipo analítico mediante el uso de las herramientas del software para la construcción de teselados, respetando la dinamicidad (arrastre) que involucra un razonamiento deductivo.

Fuente: Elaboración propia.

Actividad 4

Esta actividad partió del concepto de teselado semirregular y se propusieron situaciones, donde la construcción de teselados regulares son un referente para la construcción de los teselados semirregulares. Además, se esperaba que los estudiantes propusieran la combinación de polígonos regulares que pudieran generar un teselado semirregular, así como la construcción de estos mediante la aplicación del *Geogebra* y la utilización de las transformaciones isométricas, con el fin de justificar las propiedades del teselado. Finalmente, se propusieron situaciones de construcción de teselados semirregulares con triángulos equiláteros y cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos, cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos. En cada caso se proporcionaron sugerencias sobre el uso del *GeoGebra* y se solicitó la explicación sobre la construcción del teselado semirregular. En el proceso de construcción de los teselados, la herramienta de arrastre del *GeoGebra* juega el papel de validación en el teselado, ya que al mover algún punto del polígono original este debería preservarse bajo la invarianza. A continuación, se muestra la red de objetos intervinientes y emergentes a través de la configuración epistémica de la cuarta actividad (Figura 4.6).

Figura 4.6 Configuración epistémica de actividad 4

<u>*Situaciones:*</u> Construir teselado semirregular a partir de polígonos regulares. Dibujar las posibles combinaciones de polígonos regulares que servirían para construir un teselado semirregular. Construir y verificar en el software los teselados utilizando las transformaciones geométricas. Construir en el software teselados semirregulares utilizando cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos.

Motivan

Resuelven

<u>*Definiciones/conceptos:*</u>
<u>Previas:</u>
Clasificación de polígonos.
Clasificación de ángulos.
<u>Emergentes:</u>
Conceptualización de teselado semirregular.
Conceptualización de las transformaciones geométricas.

<u>*Propiedades/proposiciones:*</u>
Transformaciones geométricas como operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previa dada.
Transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión).

<u>*Procedimientos:*</u>
<u>Previos (matemáticos):</u>
Cálculo de la suma de medida de los ángulos, cuando al unir polígonos regulares forman un ángulo de 360º.
<u>Emergentes (matemáticos):</u>
Justificar que procedimiento le llevaría el acomodo de polígonos para formar un teselado semirregular.
<u>Previos (software):</u>
Uso de comandos de software GeoGebra para la construcción de un teselado con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos.
Uso de sugerencias para construcción de los teselados.
<u>Emergentes (software):</u>
Construcción de teselados usando transformaciones geométricas mediante comandos del software.
Exploración de la construcción para justificar el procedimiento que llevo a la construcción.

Justifican

<u>*Elementos lingüísticos*</u>
<u>:</u>
Verbal: lenguaje común.

Gráfico-software: construcción de teselados usando comandos del GeoGebra.

Expresa y soporta

Regulan el uso

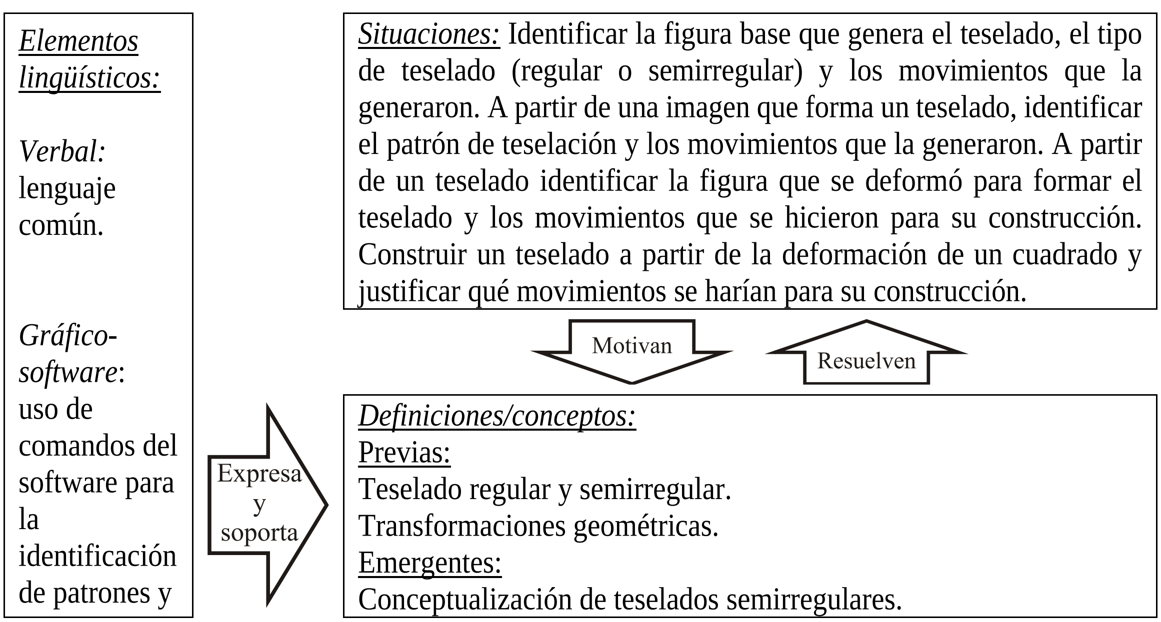
		Argumentos: De tipo empírico (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico en la construcción de teselados, a partir del uso de transformaciones isométricas. De tipo fáctico, proporcionados por los cambios dinámicos sobre la construcción de teselados al repetir los hechos de una situación a modo de explicación o justificación. De tipo analítico al utilizar un razonamiento deductivo para justificar o explicar los movimientos generados en la dinamicidad de la construcción.

Fuente: Elaboración propia.

Actividad 5

La última actividad se enfocó en identificar el patrón de teselación en diferentes tipos de teselados a través de la representación figural, así como en describir los movimientos que la generan. Además, se mostraron teselados en el software que fueron construidos por los alumnos a partir de la deformación de una figura, donde ellos tenían que explorar y argumentar los movimientos que generan los teselados. A continuación, se muestra la configuración epistémica correspondiente a la quinta actividad (Figura 4.7).

Figura 4.7 Configuración epistémica de actividad 5



transformaciones geométricas a partir de una figura para la construcción de un teselado.	Regulan el uso	Teselados a partir de la deformación de una figura.
		Propiedades/proposiciones: Transformaciones geométricas como operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previa dada. Transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión).
		Procedimientos: Previos (matemáticos): Transformaciones isométricas mediante el uso de herramientas del GeoGebra. Manipulación de herramientas del GeoGebra para la construcción de teselados. Emergentes (matemáticos): Justificación de transformaciones geométricas. Deformación de un cuadrado para la construcción de un teselado. Previos (software): Uso de comandos de software GeoGebra para identificar transformaciones geométricas. Emergentes (software): Exploración de teselado usando comandos del software para identificar patrón de teselado y las transformaciones que llevaron a su construcción.
		Justifican
		Argumentos: De tipo empírico (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico durante la exploración del teselado para la identificación de patrones y transformaciones geométricas. De tipo fáctico proporcionados por los cambios dinámicos sobre la identificación de patrones en teselados semirregulares. Así como aquellos desde la deformación de una figura.

Fuente: Elaboración propia.

El análisis a priori referente a las configuraciones epistémicas fue considerado para un análisis a detalle de las actividades, mientras que los esquemas de argumentación se consideraron para la tipificación de argumentos de los alumnos. Es importante mencionar que las actividades 3 y 4 fueron relevantes para evidenciar ampliamente el proceso de argumentación, así como el uso de las herramientas de transformaciones isométricas del software *GeoGebra* cuando los alumnos realizaron el proceso de construcción de teselados regulares y semirregulares. El análisis a posteriori sobre la práctica argumentativa muestra de manera general la tipificación de argumentos, así como las respuestas de una pareja de alumnos paras ejemplificar cada uno de los esquemas de argumentación (fáctico, simbólico, empírico, analítico).

4.3 Implementación del desarrollo de actividades

En este apartado se describe la implementación del desarrollo de actividades correspondiente a la primera y la segunda puesta en escena de las actividades propuestas. En un primer momento se identifica el tipo de argumentos manifestados por los alumnos referente al desarrollo de una propuesta de actividades que fomentan el proceso de argumentación matemática mediante el uso del software de geometría dinámica *GeoGebra*. Así que se aborda la descripción sobre la implementación de un primer y segundo pilotaje.

4.3.1 Primera implementación de las actividades

Esta primera implementación corresponde al estudio exploratorio que se ha mencionado en el apartado 3.4.2. Esta puesta en escena tuvo como interés indagar sobre el tipo de argumentos matemáticos y las habilidades sobre el uso del software de geometría dinámica *GeoGebra*. Por lo que se incorporó el uso de dicho software como parte fundamental del diseño de actividades. El desarrollo de actividades tuvo lugar en el laboratorio de matemáticas de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, donde un grupo de 32 alumnos desarrollaron una secuencia de actividades. Dado que los alumnos trabajaron las actividades en parejas, se formaron 16 de ellas.

El orden de las actividades permitió prever el tiempo destinado que duraría la implementación, el cual tuvo una duración de 13 sesiones de 50 minutos cada sesión. Además, previo a la implementación, la investigadora se aseguró de que las computadoras útiles en el laboratorio contaran con la instalación del software *GeoGebra*. Además, su papel fue del tipo observador participante; es decir, fue quien dirigió el desarrollo de las actividades, cuando los alumnos manifestaron dudas, así como apoyar a los alumnos hacia los objetivos de cada actividad propuesta. También se utilizó notas de campo con el fin rescatar aquellos aspectos que sirvieran como datos a la hora del análisis, como, por ejemplo: si hubo interacción entre las parejas y cómo intervenía para la resolución de la actividad.

El trabajo desarrollado en parejas dejó entre ver el papel que jugó la comunicación e interacción entre los alumnos para la toma de decisiones sobre los argumentos y construcciones de teselados regulares. Esto produjo que los argumentos proporcionados por ellos fueran más enriquecedores, por ejemplo, cuando uno construía y la otra persona aportaba ideas sobre qué herramientas del software debía aplicar. En esos momentos se hicieron sugerencias relacionadas a cómo proceder sobre el uso de herramientas del *GeoGebra*, en los casos que fueron necesarios, con el fin de ir orientando a los alumnos sobre la secuencia de actividades. Además, al final de cada sesión se recogieron las hojas de trabajo con los argumentos de los alumnos y se recogieron los archivos dinámicos del *GeoGebra* donde los alumnos grabaron las vistas gráficas de sus construcciones.

4.3.2 Segunda implementación de las actividades propuestas

EL desarrollo de la segunda implementación de actividades tuvo lugar en el laboratorio de matemáticas de la institución antes mencionado, donde un grupo de 20 alumnos desarrollaron una secuencia de actividades. Cabe resaltar que las actividades que se desarrollaron en esta implementación no fueron muy diferentes a las que se aplicaron en la primera, la diferencia consistió en el número de preguntas y la redacción en aquellas situaciones donde los alumnos tuvieron dificultades para entenderlas, de acuerdo con la primera prueba piloto, y donde no hubo respuestas por parte de ellos. En esta implementación el trabajo desarrollado por los alumnos se realizó en parejas, formando 20 parejas.

El tiempo que duró la implementación fue de 15 sesiones de 50 minutos cada una, así mismo la investigadora se aseguró de que las computadoras útiles en el laboratorio contaran con la instalación del software *GeoGebra*. Además, su papel fue del tipo observador participante; es decir, fue quien dirigió el desarrollo de las actividades cuando los alumnos manifestaron dudas, así como llevar la guía de los alumnos hacia los objetivos de cada actividad propuesta. También se utilizó notas de campo con el fin rescatar aquellos aspectos que sirvieran como datos a la hora del análisis, como, por ejemplo, la interacción dada entre las parejas y cómo intervenía para la resolución de la actividad. También, se hicieron sugerencias relacionadas a cómo proceder con el uso de herramientas del *GeoGebra*, en los casos que fueron necesarios, con el fin de ir orientando a los alumnos sobre la secuencia de actividades. Además, al final de cada sesión se recogieron las hojas de trabajo con los argumentos de los alumnos y los archivos del *GeoGebra* donde los alumnos grabaron las vistas gráficas de sus construcciones.

4.4 Solución experta y valoración a través de la idoneidad didáctica

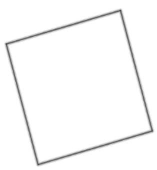
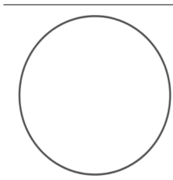
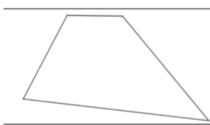
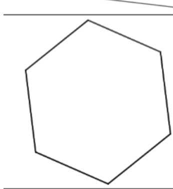
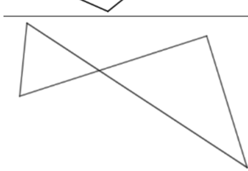
En esta sección se muestra el análisis experto y un primer acercamiento de los procesos matemáticos identificados sobre el primer diseño de actividades, donde las facetas duales fueron los binoculares para observar la práctica realizada y poder asociar un proceso matemático, al cual se asoció un objeto matemático primario (lenguaje, definición, proposición, argumento o procedimiento). Sin embargo, en este primer diseño los objetos matemáticos que tuvieron mayor presencia fueron la definición y el lenguaje.

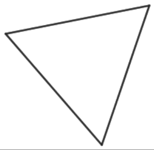
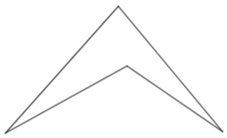
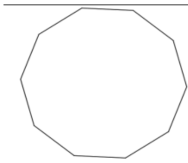
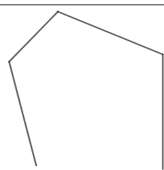
En la Tabla 4.1 se presenta el análisis a priori de la actividad 1, el cual se centra en identificar los procesos matemáticos movilizados en el desarrollo de la actividad, la cual constituye como tarea principal definir la noción de polígono regular e identificar y justificar qué polígonos regulares permiten la construcción de un teselado regular. Este análisis a priori se centra en la solución experta de cada situación y la identificación de los procesos matemáticos asociados a cada situación, de acuerdo con las facetas duales.

Tabla 4.1

Solución experta y procesos matemáticos asociados las situaciones de la actividad 1

Actividad 1			
Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Proceso matemático*
Definición: un polígono es la unión de segmentos que se juntan solo en sus extremos, de tal manera que: (1) como máximo, dos segmentos se encuentran en un punto, y (2) cada segmento toca exactamente a otros dos.			
1. ¿Qué es un polígono regular?	Un polígono regular es aquel cuyos lados son congruentes entre sí, y	Expresión-Contenido	Definición *Significación*

		todos sus ángulos también son congruentes entre sí.		
2. Escribe los elementos que componen un polígono regular		Centro, radio, ángulo interior, ángulo exterior lado o arista, apotema, diagonal, vértice, ángulo central.	Sistémico-Unitario	Descomposición
3. Observa la siguiente tabla y contesta lo que se te pide				
Figura	Clasifica las figuras (polígono regular, polígono irregular o no es polígono)	¿Por qué?		
	Polígono regular Rectángulo Rombo	Tiene lados y ángulos congruentes. Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. El rombo es un paralelogramo cuyos cuatro lados son de igual longitud.	Expresión-Contenido	Significación
	No es polígono	No tiene lados y ángulos congruentes	Expresión-Contenido *Tipo-Ejemplar*	Significación *Generalización*
	Polígono irregular	No es polígono regular	Expresión-Contenido	Definición *Significación*
	Polígono regular	Tiene lados y ángulos congruentes	Expresión-Contenido	Definición *Significación*
	No es polígono	No cumple con la definición de polígono	Expresión-Contenido	Definición Descomposición

			Sistémico-Unitario	
	Polígo no regular	Tiene ángulos y lados congruentes	Expresión-Contenido	Definición *Significación*
	Polígo no irregular	No es polígono regular	Expresión-Contenido	Definición *Significación*
	Polígo no regular	Tiene lados y ángulos congruentes	Expresión-Contenido	Definición *Significación*
	No es polígono	No cumple con la definición de polígono	Expresión-Contenido	Definición *Significación*

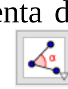
Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.2 se muestra las situaciones problema referente a la actividad 2, las cuales tienen como principal propósito la exploración y manipulación del polígono regular y sus ángulos interiores en un applet. Sobre la solución experta se resalta la propiedad del ángulo interior de cualquier polígono regular es 180°. Además, se identificó el proceso matemático de significación a través de la dualidad expresión contenido, así como el objeto matemático se definición segregado del desarrollo de estas situaciones correspondiente a la actividad 2.

Tabla 4.2

Solución experta y procesos matemáticos asociados las situaciones de la actividad 2

Actividad 2			
Situaciones problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Proceso matemático*

1. Explora la construcción del archivo en GeoGebra con nombre “aumento_lados” ¿Qué pasa cuando aumentas el número de lados?	• El número de lados del polígono aumenta. • Las medidas de los ángulos interiores aumentan. • Cuando se aplica la herramienta de alejar  se asemeja a una circunferencia. • Cuando se aplica la herramienta de aproximar  se percibe una recta.	Expresión - Contenido	Significación
2. Sigue explorando el archivo anterior en GeoGebra. ¿Qué ocurre con la medida del ángulo interior del polígono cuando aumentas sus lados?	El ángulo interior aumenta aproximándose a 180° (ángulo llano). La utilidad la herramienta medición de ángulo ayude a determinar que el ángulo interior aumenta o se aproxima a 180°	Expresión - Contenido	*Significación* *Definición*
3. ¿A qué valor se aproxima el ángulo cuando aumentas el número de lados?	El ángulo interior del polígono regular se aproxima a 180°, porque es un polígono convexo. En el caso de que se utilice la herramienta de medición de ángulo  se podrá generalizar el ángulo de aproximación.	Expresión-contenido	Definición *Significación*

1. ¿El ángulo interior de un polígono regular puede ser 180°? Justifica tu respuesta.	No, dado que es un polígono estrictamente convexo todos sus ángulos interiores son estrictamente menores a 180°.	Expresión-contenido	Definición Significación

Fuente: Elaboración propia.

4.4.1 Operatividad de la idoneidad didáctica

En la sección 2.4 se presenta la noción de idoneidad didáctica, la cual constituye una serie de indicadores referente a la calidad de un proceso de instrucción, o alguna secuencia didáctica. En este sentido, la operatividad de la idoneidad didáctica focaliza criterios de idoneidad que demanda una serie de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios (Breda, Font, Lima & Villela, 2018). Se dice que hay mayor idoneidad epistémica si los significados institucionales implementados (o pretendidos) se representan *adecuadamente* de acuerdo con el significado de referencia. Los criterios de idoneidad didáctica permiten realizar una valoración de las actividades de este estudio, tomando en cuenta los descriptores de cada una de las componentes de la idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica) descritas en la sección 2.4.1. A continuación se analiza y reflexiona sobre cada una de las componentes y sus respectivos descriptores, para lo cual se ha tomado como unidad de análisis cada una de las actividades propuestas (Anexo 1).

La Tabla 4.3 muestra la valoración de las componentes de la idoneidad didáctica, esto a través de la operatividad de sus descriptores, el cual corresponde a un análisis valorativo de cada descriptor sobre una primera propuesta de la secuencia de actividades (Anexo 1). Es importante mencionar que en dos de las cinco actividades hubo ambigüedades, por ejemplo, en la actividad 2c, que refería a la rotación geométrica, se pedía que los alumnos exploraran acerca de la rotación de un triángulo. Sin embargo, se consideró que durante la exploración y manipulación algunas situaciones no movilizaron la emergencia del concepto de rotación geométrica, que era lo que se esperaba por parte los alumnos. De esta manera, por el tipo de argumentos o respuestas de los alumnos se pudo identificar que hubo confusión respecto a algunas de las situaciones desarrolladas en dichas actividades.

Tabla 4.3

Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica de las actividades

Componentes	*Descriptores*
Errores	El planteamiento de situaciones no se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	La actividad 2c presenta ambigüedades cuando se explora el applet referente a la rotación de un polígono regular, por lo que la ambigüedad se da en las siguientes cuestiones: - *¿Respecto a qué objeto del GeoGebra se mueve el polígono verde?* - *¿Cómo es el polígono verde respecto al polígono azul? Explica lo más que puedas tu respuesta.* - *¿El polígono que se rota mantiene su orientación? ¿Por qué?* - *¿El ángulo de rotación cambia cuando aumentas el número de lados del polígono? ¿Por qué?* La actividad 5 presenta ambigüedades cuando a partir de un teselado de figuras se espera que el alumno responda a los siguientes cuestionamientos: - *¿Qué transformaciones geométricas se tuvieron que hacer para formar la tesela? Explica con detalle.* - *Si deformaras el siguiente cuadrado ¿Qué tesela podrías construir que ayude a formar un teselado? Trata de deformarlo de tal manera que formes una tesela y después un teselado.*
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas (actividades) contempla la realización de procesos, como el de: Significación: - *El ángulo interior aumenta aproximándose a 180° (ángulo llano).* - *El uso de la herramienta de medición de ángulo ayude a determinar que el ángulo interior aumenta o se aproxima a 180°.* Argumentación:

	Visualización: - *Cuando se aplica la herramienta de alejar se asemeja a una circunferencia.* - *Cuando se aplica la herramienta de aproximar se percibe una recta.* Definición: - *Tiene lados y ángulos congruentes*
Representatividad	El significado relacionado con los polígonos se recurre a la definición de polígono como parte de los conocimientos previos. Se recurre a la definición para una muestra representativa de los polígonos, esto a través de las representaciones de los polígonos de manera verbal y gráfico mediante el uso del GeoGebra. Los significados parciales son referentes a definiciones de las isometrías en el plano a través de la observación, manipulación y construcción de las isometrías. En la actividad 3 y 4 los significados parciales, sobre las definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos son una muestra representativa en las situaciones. Lo anterior es evidenciado a través de situaciones que involucra la construcción teselados regulares, donde varios significados son movilizados mediante el uso del lenguaje verba, grafico en el uso del GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.4 se describe la valoración del diseño de actividades respecto a los descriptores de la idoneidad cognitiva, en esta componente el análisis corresponde a los significados expuestos según el diseño de actividades. La valoración sobre la construcción de los teselados regulares y semirregulares incluyó que las actividades contemplaron los conocimientos previos respecto a los polígonos regulares, así como sugerencias relacionadas con la aplicación de las isometrías en el plano, considerando que los alumnos reconocen o tienen noción de este concepto, así como aquellos objetos que son emergentes en la construcción de los teselados o cubrimientos en el plano. Asimismo, cuando los alumnos tuvieron que construir los teselados pusieron de manifiesto los objetos matemáticos, los cuales se consideran que estaban en la zona de desarrollo de sus significados y que su vez no representaba alguna dificultad para los alumnos, sin embargo, se observó que dado que los alumnos no están familiarizados con este tipo de situaciones y preguntas para ellos si causó dificultad el responder o argumentar de acuerdo con un lenguaje formal en el campo de las matemáticas.

Tabla 4.4

Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva de las actividades

Componentes	*Descriptores*
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	El diseño de actividades contempla los conocimientos previos necesarios para el estudio de las isometrías en el plano, ya que es un tema que se ha estudiado anteriormente según el plan de estudios de los cursos de secundaria de los alumnos. Los conocimientos previos se ponen de manifiesto a través de las construcciones de teselado regulares y semirregulares mediante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Así los significados pretendidos son alcanzables desde la red de objetos matemáticos primarios, haciendo énfasis en la argumentación a las situaciones propuestas.
Adaptación curricular a las diferencias individuales	Las actividades pueden ser vistas como parte de los significados de ampliación y refuerzo referente al tema de las isometrías en el plano, ya que es un tema que ha sido estudiado previamente por los alumnos del nivel al que se dirige. Además, los teselados se entienden como tareas de aplicación de las isometrías en el plano en el contexto de la geometría dinámica.
Aprendizaje	El diseño de actividades permite observar la apropiación de conocimientos, principalmente el de las isometrías en el plano, así como la aplicación de herramientas relativas a estas transformaciones isométricas. Así los conocimientos pretendidos son puestos en juego para materializarlos y ponerlos en práctica en la construcción de teselados regulares y semirregulares.
Alta demanda cognitiva	Aunque no se promueven procesos metacognitivos, se activan procesos cognitivos relevantes como el de la visualización, argumentación, materialización, representación, significación y conjeturación.

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4.5 refiere a la valoración de la idoneidad emocional/afectiva, en esta componente resaltamos de inicio que el contexto de los teselados o recubrimientos en el plano mediante el uso del software dinámico. De acuerdo con los pilotajes previos, puede provocar en el alumno cierto interés la construcción de los teselados, ya que ponen en jugo la visualización y resulta un reto para ellos el logro de estas construcciones. Sin embargo, dado que se identificaron ambigüedades en algunas situaciones, esto pudo provocar poco interés en el sentido de que los alumnos no fueron explícitos en sus respuestas o argumentos que pedía la actividad. Por otra parte, el trabajo en parejas posibilitó la gestión de acuerdos y actitudes que debían tener los alumnos para trabajar de manera conjunta y concretar las actividades solicitada.

Tabla 4.5

Componentes y descriptores de la idoneidad emocional / afectiva

Componentes	*Indicadores*
Intereses y necesidades	Las actividades se diseñaron en el contexto de los teselados considerando un escenario de interés para los alumnos del nivel educativo. Por ejemplo, al considerar el proceso de construcción de teselados mediante el uso de herramientas de las isometrías del GeoGebra, esto puede generar en el alumno la valoración y sentido de las nociones geométricas. Sin embargo, no se descarta que en el diseño de actividades algunas situaciones no fueron motivantes pues carecían de sentido y claridad para los alumnos.
Actitudes	Las actividades están abiertas a la implicación de la responsabilidad de realizarlas como parte de las actividades a evaluar en la asignatura (geometría analítica) en curso de los alumnos. Las actividades per se favorece la argumentación al considerar que expliquen y justifiquen sus respuestas a las situaciones.
Emociones	Se considera que algunas situaciones de la secuencia de actividades no son del todo significativas para los alumnos, donde hubo situaciones ambiguas, por ejemplo, ¿El ángulo de rotación cambia cuando aumentas el número de lados del polígono? ¿Por qué? Cuando aumentas el número de lados ¿Qué sucede con el ángulo de rotación? Lo que puede provocar poco interés en argumentar detalladamente sus respuestas.

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4.6 se describen las componentes y los descriptores de la idoneidad interaccional que contempló el diseño de actividades, donde se resalta la interacción entre discentes dado que las actividades se trabajaron en parejas y la interacción del investigador se limitó a aspectos específicos del desarrollo de actividades durante la implementación.

Además, se esperaba que los alumnos manifestaran cierta autonomía respecto a las situaciones trabajadas, así como el uso del software *GeoGebra*, por el hecho de que ellos tenían que manifestar argumentos que no fueran influenciados por el investigador.

Tabla 4.6

Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional de las actividades

Componentes	*Descriptores*
Interacción docente – discente	En el diseño de actividades contempla la interacción discente-discente, al tener en cuenta el trabajo en parejas. Además, el papel del investigador se centra en resolver dudas sobre dudas sobre el uso de las herramientas del software o respecto a las situaciones planteadas.
Interacción entre discentes	El diseño de actividades fomenta la argumentación matemática, por lo que se favorece el diálogo y comunicación entre las parejas de alumnos.
Autonomía	El diseño contempla hechos y acciones donde los alumnos tienen la responsabilidad de explorar applets en el *GeoGebra*, referente a las isometrías en el plano. Así como la justificación y validación de los teselados construidos en el software *GeoGebra*.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.7 muestra la valoración de los descriptores que corresponden con la idoneidad mediacional, donde el diseño de actividades incorpora el uso de un software de geometría dinámica GeoGebra, en un laboratorio de matemáticas donde se implementó dicho diseño. Además, se tiene en cuenta el tiempo de duración de la implementación de actividades teniendo en cuenta el contenido matemático desarrollado y el tiempo que tomaría en que los alumnos se adaptaran al uso del software de geometría dinámica.

Tabla 4.7

Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional de las actividades

Componentes	*Descriptores*

Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	El diseño de actividades incorpora el uso de un software de geometría dinámica, GeoGebra que permite introducir situaciones, conceptos, procedimientos, argumentaciones de acuerdo con la aplicación y tratamiento de las herramientas del software, adaptadas al significado pretendido. Las actividades consideran situaciones contextualizadas en los teselados en el plano, esto conlleva a poner en juego la visualización de los objetos geométricos.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El tiempo para el desarrollo de actividades fue apropiado, es decir, se contemplaron las sesiones necesarias para llevar a cabo el desarrollo de todas las actividades. El aula y la distribución de los alumnos para el desarrollo de las actividades fue limitado al número de computadoras, esto llevo a que el trabajo de cada actividad fuera realizado por parejas.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	El tiempo de adecuación para la implementación de las actividades en promedio fue entre 10 y 13 sesiones de clases presenciales. Un mayor tiempo invertido en la implementación de actividades fue en el desarrollo de las construcciones de los teselados en el plano mediante el uso del *GeoGebra,* ya que el manejo de las herramientas del software y el lograr las construcciones requerían un grado de interiorización, tanto de las isometrías en el plano como sus correspondientes al aplicar las herramientas del *GeoGebra*.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.8 se muestran las componentes y descriptores de la idoneidad ecológica, los cuales son contemplados en el diseño de actividades para identificar el contenido matemático adaptado al currículo o al plan de estudios de los alumnos del nivel que se aplica. Esto se corresponde con el currículo de los alumnos de este estudio, quienes cursaban la materia de geometría analítica correspondiente al tercer semestre. Se resalta que el estudio de los teselados corresponde con el estudio de las transformaciones isométricas y su relación con polígonos regulares, esto establece conexiones entre los conceptos matemáticos de ángulos, diagonales, medida, polígono, etc. Además, consideramos que el diseño de actividades abarca una innovación didáctica en el sentido de que los teselados es estudiado integrando el uso de la geometría dinámica.

Tabla 4.8

Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica de las actividades

Componentes	*Descriptores*
Adaptación al currículo	El contenido desarrollado en las actividades y su implementación corresponden a las indicadas en el currículo, dado que el plan de estudios de geometría analítica desarrolla el estudio de las isometrías en el plano.
Conexiones intra e interdisciplinares	En el contexto de los teselados el contenido matemático es de las isometrías en el plano y se relaciona con polígonos regulares. Si bien su relación no es con contenido matemático avanzado este tiene también conexiones con ángulos interiores, diagonales y elementos de los polígonos.
Innovación didáctica	Se considera que el diseño de actividades contempla una práctica reflexiva que permite estudiar el contexto de las teselaciones mediante el uso de un software de geometría dinámica en el aula del contexto escolar.

Fuente: Elaboración propia.

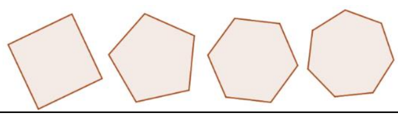
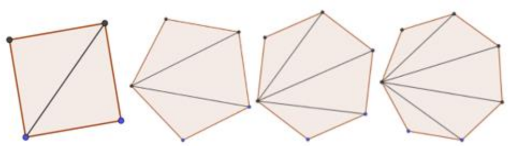
De acuerdo con el análisis de los descriptores de la idoneidad didáctica nos permiten plantear un rediseño que logré abarcar la mayoría de los descriptores, ya que de acuerdo con Godino (2013) debe haber un equilibrio entre cada una de sus facetas (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica) que permitan generar tareas y procesos de instrucción idóneos.

4.5 Rediseño y solución experta de la secuencia de actividades

Los resultados de un primer análisis sugirieron un rediseño enfocándose en la eliminación de situaciones y en la mejora en la redacción de algunas situaciones problemas. Además, el criterio considerado para eliminar algunas de las situaciones ambiguas, como, por ejemplo, ¿Respecto a qué objeto del GeoGebra se mueve el polígono verde? *¿El polígono que se rota mantiene su orientación? ¿Por qué?*, esta pregunta resultó para los alumnos difícil de responder y en otros casos no se respondió, por lo que la falta de argumento fue causa para replantear o eliminar la situación. Por tanto, el nuevo rediseño comprendió cinco actividades teniendo un total de 59 situaciones problemas (Anexo 1). Posteriormente se procedió a realizar la solución experta. En la Tabla 4.9 se muestra el análisis a priori de la solución experta correspondiente a la actividad 1 y 2.

Tabla 4.9

Análisis de solución experta actividad 1 y 2

Actividad 1	
Parte 1. Polígonos regulares	
Situación problema	*Solución experta*
1. ¿Las siguientes figuras son polígonos regulares? ¿Por qué? 	Sí, porque un polígono regular es aquel cuya medida de lados y ángulos son congruentes entre sí.
2. En cada figura mostrada, ¿qué relación hay entre el número de lados y el número de triángulos formados en cada polígono? Justifica tu respuesta. 	La relación entre el número de lados y el número de triángulos formados en cada polígono es: Cuadrado: 4 lados y 2 triángulos Pentágono: 5 lados y 3 triángulos Hexágono: 6 lados y 4 triángulos Heptágono: 7 lados y 5 triángulos Para cada polígono representado el número de triángulos en él siempre es dos veces menor que el número de lados.
3. Si tuvieras un polígono de n lados ¿cuál sería la relación entre el número de triángulos formados y el número de lados? Justifica tu respuesta.	Para encontrar el número de triángulos de cualquier polígono regular de n lados se tiene: $n - 2$.
Actividad 2. Polígonos regulares y su ángulo interior Instrucciones: Abre el archivo “A1_P2” y manipula el deslizador n.	
1. Si los triángulos en la circunferencia son congruentes ¿cuál es el valor del ángulo α, conocido como el ángulo central, para cada valor de n? Justifica tu respuesta.	Cada lado del polígono determina un ángulo central, por tanto, la medida del ángulo central BAB' es el cociente entre 360° y el número de lados, $\frac{360}{n}$.
2. Si n es igual a 12 ¿Cuánto mide el ángulo $CB'B$ en ese polígono? *Sugerencia:* recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Justifica tu respuesta.	El triángulo central BAB' es isósceles dado que los lados AB y AB' son radios de la circunferencia. Considerando que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. La suma de la medida del ángulo ABB' y $AB'B$ del triángulo central equivale a la diferencia entre 180° y

	la medida del ángulo central: $\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 180° - \measuredangle BAB'$ entonces $\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 180° - \frac{360°}{12} = 180° - 30$, así $\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 150°$ (medida del ángulo interno del polígono con $n = 12$).
3. ¿Cuál es la medida del ángulo interior $CB'B$ en el polígono para cada valor de n? Justifica tu respuesta. *Sugerencia:* recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.	Por la respuesta de la pregunta 2 se tiene que para $\measuredangle CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$, para cualquier valor de n.

4. En resumen, completa la siguiente tabla:			
# lados (n)	Nombre del polígono	$\angle$ central α	$\angle CB'B$
3	Triángulo equilátero	$\alpha = \frac{360°}{3} = 120°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{3} = 60°$
4	Cuadrado	$\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{4} = 90°$
5	Pentágono	$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{5} = 108°$
6	Hexágono	$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{6} = 120°$
7	Heptágono	$\alpha = \frac{360°}{7} = 51.42° \ldots$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{7} = 128.57° \ldots$
8	Octágono	$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{8} = 135°$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n – ágono	$\alpha = \frac{360°}{n} = x°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.10 se muestra las situaciones de la actividad 3 desarrolladas por los alumnos de este estudio, misma que se dividió en tres partes, en torno al objeto matemático de las transformaciones isométricas. Particularmente, la traslación geométrica cuyo propósito es que los alumnos conceptualicen estos conceptos y se familiaricen con el uso y la aplicación de las herramientas que se requieren para el desarrollo de construcción de los teselados regulares y semirregulares. Se esperaba que los alumnos experimentaran y exploraran la herramienta de traslación a través de un applet, donde el objeto matemático esencial es el vector de traslación cuya manipulación expresa la relación entre un cuadrado y el vector, el cual representa la distancia desplazada entre los vértices del polígono original y el trasladado

En la segunda parte también se proporciona un applet que representa un mosaico rectangular, se plantean preguntas con la intención de que los alumnos ubiquen diferentes vectores en algún rectángulo y visualicen la traslación de este. Además, ellos deben encontrar la cantidad mínima de vectores que sirven para construir el mosaico, así como encontrar la medida del ángulo formado en cada vértice de cada rectángulo. Teniendo en cuenta lo anterior se esperaba que conceptualizaran la traslación geométrica.

En la tercera parte, los alumnos exploran un applet donde tienen que visualizar diferentes medidas de ángulo de rotación, en el caso particular del hexágono regular si se quisiera formar un teselado, el alumno debiera identificar qué medida de ángulo debe rotar para generar más hexágonos que conformen el teselado. Finalmente, se esperaba que conceptualizaran el objeto matemático de la rotación geométrica.

Tabla 4.10

Análisis de solución experta actividad 3 (parte 1, 2 y 3)

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 3
Parte 1. Traslación geométrica</th></tr>
<tr><td colspan="2">Instrucciones:

- Abre el archivo “A2_P1” y activa las casillas vector y traslación.

- Activa la casilla valor y mueve el punto final $\boldsymbol{B}$ del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ de tal manera que $\boldsymbol{P1}'$ (cuadrado trasladado) tenga un lado común con $\boldsymbol{P1}$ (cuadrado original).</td></tr>
<tr><td>Situación problema</td><td>Solución experta</td></tr>
<tr><td>1. ¿Cuánto debe medir el vector de traslación para que el cuadrado $\boldsymbol{P1}'$ tenga un lado en común:
a) a la derecha de $\boldsymbol{P1}$
b) a la izquierda de $\boldsymbol{P1}$</td><td>4 unidades en cualquiera de las situaciones.</td></tr>
</table>

c) hacia arriba de $\boldsymbol{P1}$ d) hacia abajo de $\boldsymbol{P1}$	
2. si el vector de traslación mide 2 unidades, ¿Cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1' en relación con el cuadrado original P1? Describe en término de las unidades del plano cartesiano.	El cuadrado $P1'$ queda sobrepuesto al cuadrado original $P1$. Cuando la medida del vector es dos unidades, el cuadrado trasladado queda sobrepuesto sobre el cuadrado original en una unidad.
3. Si el vector de traslación mide 6 unidades, ¿Cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1' en relación con el cuadrado original P1? Describe en término de las unidades del plano cartesiano.	Cuando la medida del vector es seis unidades, el cuadrado trasladado $P1'$ se ubica a una unidad de distancia del cuadrado original $P1$.
4. Si la longitud de $\boldsymbol{FG}$ de $\boldsymbol{P1}$ mide 12 unidades, ¿cuánto debe medir el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ para que $\boldsymbol{P1}'$ tenga un lado común con cualquiera de los lados de $\boldsymbol{P1}$? Justifica tu respuesta.	12 unidades, dado que el vector de traslación representa la misma longitud que cada uno de los lados del cuadrado.
5. Mueve o arrastra el punto $\boldsymbol{F}$ del cuadrado $\boldsymbol{P1}$ de tal manera que este quede inclinado. ¿Qué lados del cuadrado $\boldsymbol{P1}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ para que $\boldsymbol{P1}'$ tenga un lado común con $\boldsymbol{FI}$ de $\boldsymbol{P1}$?	La respuesta dependerá de la dirección de arrastre del punto F.
6. ¿Cuál es la relación entre el cuadrado trasladado $\boldsymbol{P1}'$ y el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$? Justifica tu respuesta.	La magnitud del vector representa la distancia desplazada entre los vértices del triángulo original y el trasladado.
Parte 2. Traslación geométrica Instrucciones: Abre el archivo "A2_P2" y reproduce la construcción en el GeoGebra mediante la barra de *"reproducción"* que aparece en la parte inferior de la pantalla.	
1. Si quisieras realizar la misma construcción ¿dónde ubicarías el vector de traslación para trasladar el rectángulo hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo? Justifica tu respuesta.	Se espera que los alumnos supongan una ubicación de vectores sobre cada uno de los lados para que al trasladar el rectángulo base tenga dirección hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo.
2. ¿Cuál es la cantidad mínima de vectores que necesitas para generar la construcción del mosaico rectangular? Justifica tu respuesta.	El número de vectores mínimos para generar la construcción son 4, ya que es suficiente que se ubique un vector por cada lado cuyas direcciones coincidan en un vértice o sigan una misma dirección (sentido horario o antihorario).
3. En la construcción del mosaico rectangular ¿cuál es la medida de la suma de ángulos interiores de los rectángulos en cada vértice? Justifica tu respuesta.	La media de la suma del ángulo en cada vértice es 360°, dado que cada polígono tiene un ángulo recto.
4. ¿Qué es una traslación geométrica?	La traslación es la transformación plana de una figura en la que todos sus puntos se desplazan en la misma dirección,

	sentido y distancia fija. Estos tres datos conforman el vector de traslación.

Parte 3: Rotación geométrica

Instrucciones: Abre el archivo "A3" y explora usando los deslizadores que representan los ángulos de rotación. Responde las siguientes preguntas.

1. Si mueves el deslizador $\boldsymbol{\alpha}$, ¿para qué valor de ángulo los cuadrados rotados tienen un lado común con los lados de $\boldsymbol{P0}$?	Para el ángulo de 90° y 270° los cuadrados rotados tienen un lado común con P0.
2. Al rotar $\boldsymbol{P1_1}$, $\boldsymbol{P2_1}$, $\boldsymbol{P3_1}$ y $\boldsymbol{P4_1}$ moviendo el deslizador $\boldsymbol{\alpha}$, ¿qué relación hay entre los puntos A, B, C y D en $\boldsymbol{P0}$ y los cuadrados rotados? Justifica tu respuesta.	Los puntos A, B, C y D representan los centros de rotación para los cuadrados $P1_1$, $P2_1$, $P3_1$ y $P4_1$, así que cada cuadrado rotado se asocia a un punto y un ángulo a rotar.
3. Si mueves el deslizador $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\alpha}$. ¿Para qué ángulo los cuadrados forman un cuadrado de 3 X 3? Describe los movimientos realizados en relación con los ángulos $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\alpha}$.	En el ángulo de 90° en β y α se forma un cuadrado de 3 X 3. Al mover α a 180° y mantener β en 90° también se forma el cuadrado de 3X3. Si α se mantiene en 180° y β en 270° también se forma el cuadrado de 3 X 3. Finalmente, cuando β y α están en 270° también se forma el cuadrado de 3 X 3.
4. Al formar el cuadrado de 3 X 3, ¿cuál sería el centro de rotación y el ángulo por rotar para que $\boldsymbol{P2}$ quede ubicado a la derecha de $\boldsymbol{P2_1}$? Justifica tu respuesta.	Se espera que visualicen y ubiquen el punto de intersección entre $P2$ y $P2_1$, para posteriormente aplicar la herramienta de rotación con un ángulo de 180°.
5. Teniendo el cuadrado de 3 X 3 ¿Cuál es el valor de la suma de ángulos interiores de los cuadrados en cada vértice del cuadrado $\boldsymbol{P0}$? Justifica tu respuesta.	La media de la suma del ángulo en cada vértice es 360°, dado que cada polígono tiene un ángulo recto.
6. Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con triángulos equiláteros, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada triángulo? Justifica tu respuesta.	La medida del ángulo de rotación sería 60°, dado que los ángulos interiores son de igual medida por ser triángulo equilátero, así como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°. Además, como los triángulos no se sobreponen, ya que en cada vértice confluye seis triángulos, dando como suma 360°.
7. Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con hexágonos regulares, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada hexágono? Justifica tu respuesta.	La medida del ángulo de rotación sería 120°, dado que los ángulos interiores son de igual medida, correspondiente a 120°. Así la medida de la suma de los ángulos internos en cada vértice es de 360°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.
8. ¿Qué es una rotación geométrica?	Dado un punto O y un ángulo orientado α. La rotación es la transformación alrededor del

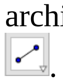
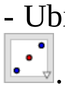
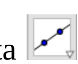
	punto O que mantiene forma y tamaño de la figura original. El ángulo de rotación determina la amplitud de la rotación y el punto O llamado centro de rotación, el cual tiene sentido horario o antihorario.

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4.11 muestra el análisis experto de la actividad correspondiente a la reflexión o simetría axial, en donde los alumnos manipulan y exploran applets que ayuda a visualizar la reflexión geométrica. Entre los conceptos a identificar se encuentran la mediatriz como el eje de simetría, teniendo en cuenta un triángulo trazado y su reflexión de este. Se espera que los alumnos justifiquen que la distancia de cualquier punto al eje de simetría es la misma. En una segunda parte se aborda la construcción de la reflexión geométrica de un polígono regular, con el fin de que los alumnos logren conceptualizar la simetría axial, finalmente, se proporciona un applet de un mosaico de triángulos regulares, donde los alumnos tienen que identificar las simetrías posibles para generar el teselado o mosaico.

Tabla 4.11

Análisis de solución experta actividad 3 (parte 1 y 2)

Actividad 3 **Parte 1. Reflexión geométrica**	
Instrucciones: - Abre el archivo *"A4_P1"* y traza los segmentos $\boldsymbol{CC'}$, $\boldsymbol{DD'}$ y $\boldsymbol{EE'}$ utilizando la herramienta segmento . - Ubica el punto medio de cada segmento trazado utilizando la herramienta medio o centro . - Traza la recta que pasa por esos segmentos utilizando la herramienta recta . Responde las siguientes preguntas.	
1. ¿La recta trazada es perpendicular a los segmentos? Justifica tu respuesta.	Sí, dado que la recta representa la mediatriz de cada segmento, la cual por definición es perpendicular a cada segmento.
2. ¿Qué representa la recta en relación con los segmentos $\boldsymbol{CC'}$, $\boldsymbol{DD'}$ y $\boldsymbol{EE'}$? Justifica tu respuesta.	La recta representa el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los extremos de cada segmento. Además, que es la mediatriz de cada segmento.

3. Si mueves el vértice $\boldsymbol{E}$ del triángulo $\boldsymbol{CDE}$, ¿cambia su orientación? Describe y justifica en término de los vértices de los triángulos $\boldsymbol{CDE}$ y $\boldsymbol{C'D'E'}$.	El movimiento aplicado al punto E coincide en el triángulo $C'D'E'$, aunque la orientación no se preserva, ya que si hacemos un recorrido de vértices $\angle C'E'D'$ de C' a E' y luego a D' el recorrido es a favor de las manecillas del reloj, mientras que, para el triángulo original si aplicamos el mismo recorrido para $\angle CED$ el recorrido es en contra de las manecillas del reloj. Por tanto, la orientación no se preserva.
4. ¿La distancia de cualquier vértice a la recta es la misma? ¿Por qué?	Sí, porque la longitud de un segmento y la de su imagen son iguales. Se puede comprobar utilizando la herramienta longitud para medir la distancia de un punto de la figura original al eje de simetría y su homólogo al mismo eje de simetría.

Parte 2. Reflexión geométrica

Instrucciones:

- Abre un archivo nuevo en GeoGebra y construye en hexágono regular utilizando la herramienta de polígono regular .
- Coloca una recta o segmento de recta en cualquier lugar del plano.
- Aplica simetría axial , seleccionando el polígono y la recta o segmento de recta.
- Mueve la recta y cualquiera de los puntos de la recta o segmento utilizando la herramienta , de tal manera que el polígono transformado tenga un lado común con alguno de sus lados del hexágono regular previamente construido.

1. Considerando la construcción anterior ¿Qué es una reflexión o simetría axial?	Dada una recta l fija en el plano, la reflexión $R(l)$ es la transformación que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto P' del mismo plano tal que la recta l es la mediatriz del segmento PP'. A la recta l se le llama eje de reflexión.
2. Abre el archivo "A4_P2" y selecciona la casilla "Triángulos1". ¿Los triángulos $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$ y $\boldsymbol{P_4}$ son congruentes? Justifica tu respuesta.	Sí, ya que son triángulos equiláteros, así que la medida de sus lados y ángulos son congruentes.
3. Para que un objeto en el GeoGebra pueda ser reflejado utilizando simetría axial es necesario tener un eje de simetría. En la construcción de triángulos del archivo "A4_P2" ¿Quién representa el eje de simetría para $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$ y $\boldsymbol{P_4}$? Explica ampliamente tu respuesta.	En la construcción del GeoGebra el triángulo original o base es ABC:

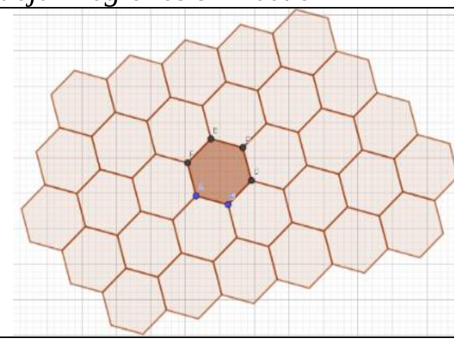
	- El eje de simetría para P_2 es el lado AB del triángulo original. - El eje de simetría para P_3 es el lado BC del triángulo original. - El eje de simetría para P_4 es el lado CA del triángulo original.
4. Selecciona la casilla de "Triángulos2" y responde lo siguiente. ¿Qué triángulos se les aplicó simetría axial y quién fue el eje de simetría para obtener los triángulos $\boldsymbol{P_5}$, $\boldsymbol{P_6}$ y $\boldsymbol{P_7}$? Explica ampliamente tu respuesta.	En la construcción del GeoGebra el triángulo original o base es ABC: - El eje de simetría para P_5 fue el lado AB del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_4. - El eje de simetría para P_6 fue el lado CA del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_2. - El eje de simetría para P_7 fue el lado BC del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_4.

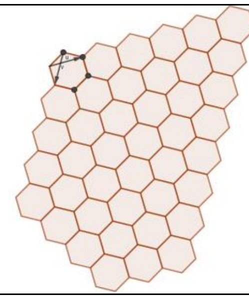
Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.12 se parte de la definición de teselado regular con la intención de que los alumnos identifiquen la noción de este y sea manifestado al momento de realizar la construcción de un teselado regular aplicando las herramientas del software *GeoGebra*. Se esperaba que los alumnos construyeran un teselado regular usando hexágonos regulares y las sugerencias dadas para la construcción. Aquí se esperaba que ellos aplicaran cualquiera de las herramientas correspondientes a las transformaciones isométricas, una vez hecha la construcción se esperaba que los alumnos justificaran su procedimiento, y calcularan la medida de ángulos interiores en cada vértice del teselado regular. Además, para verificar que la construcción se realizó correctamente, los alumnos debían aplicar la herramienta de arrastre que garantice o valide que realmente es un teselado regular. Finalmente, fue necesario que los alumnos razonaran cuándo es posible construir un teselado regular proponiendo que el ángulo en cualquier vértice sea de 360° y que su ángulo interior sea divisor de 360°, así que se espera que proponga otros polígonos regulares que utilizarían para formar otro teselado regular.

Tabla 4.12.

Análisis de solución experta actividad 4

Actividad 4 Construcción de teselado regular	
Definición: *Un teselado regular en el plano se construye con regionales poligonales regulares congruentes tal que no se superponen ni dejan regiones sin recubrir*	
1. Construye un teselado regular en el GeoGebra utilizando hexágonos regulares, puedes aplicar cualquiera de las isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión). Responde ampliamente las preguntas.	
Sugerencias para la construcción: Abre un archivo del GeoGebra y utiliza la herramienta de polígono regular y las transformaciones isométricas (traslación , rotación o simetría axial) del software. Para construir el teselado regular correctamente, recuerda que: • Para la traslación, se debe aplicar un vector de traslación • Para la rotación, requiere de un centro de rotación, el cual puede ser un punto Para la reflexión o simetría axial, utiliza un eje de simetría, el cual puede ser una recta o un segmento de recta .	
1. ¿Cuánto es la medida de la suma de ángulos interiores que rodea cada vértice del teselado? Justifica tu respuesta.	En cada vértice la medida de la suma de ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120 °, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.
2. En el caso de que hayas usado traslación, ¿cuál es la cantidad mínima de vectores que generan el teselado regular? Justifica tu respuesta.	La cantidad mínima de vectores que genera el teselado hexagonal son dos, y se ubican de la siguiente manera:

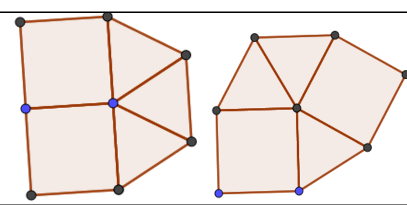
	
3. Si aplicaste traslación, describe a detalle el procedimiento de construcción geométrica que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de traslación del GeoGebra, el cual será recuperado mediante el protocolo de construcción.
4. En el caso de haber usado rotación, explica a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de rotación del GeoGebra, el cual será recuperado mediante el protocolo de construcción.
5. En caso de haber usado reflexión o simetría axial, explica a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de la simetría axial del GeoGebra, además se recuperará el protocolo de construcción.
6. Mueve o arrastra algún punto del hexágono base con la herramienta , ¿sigue siendo un teselado? ¿Cumple con la definición de teselado regular? Justifica tu respuesta.	A modo de verificar la construcción del teselado regular, se espera que se aplique la herramienta de arrastre sobre cualquiera de los puntos del hexágono base, y comprobar si el teselado cumple con las características de un teselado.
7. ¿Qué criterio nos permite determinar cuándo un polígono regular puede teselar un plano? Explica ampliamente.	Para la construcción de cualquier teselado en el plano, es necesario que el ángulo en cualquier vértice sea de 360° y que su ángulo interior sea divisor de 360°.
8. ¿Qué otros polígonos regulares sirven para generar otro teselado regular? Justifica tu respuesta.	El cuadrado y triángulo equilátero, ya que al confluir los polígonos en cualquier vértice forman un ángulo de 360°.

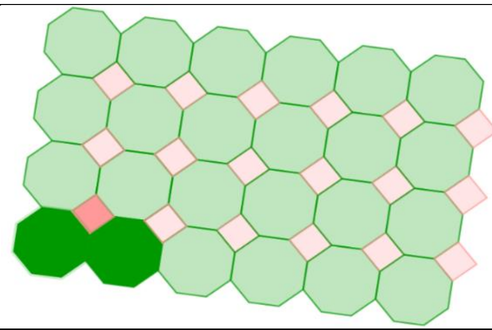
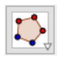
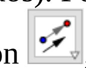
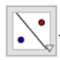
Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.13 se aborda la construcción de un teselado semirregular partiendo de la definición de este, con el fin de que los alumnos identifiquen las características que deben cumplir un teselado. La actividad se compone en dos partes, en la primera se espera que los alumnos propongan una combinación de polígonos utilizando triángulos regulares y cuadrados, es decir, utilizando esos polígonos que posibles teselados se podrían construir. Por lo que se solicitó a los alumnos que propusieron las combinaciones y las construcciones aplicando las herramientas del *GeoGebra*. Posteriormente, se esperaba que los alumnos construyeran al menos una de las combinaciones propuestas, las cuales son dos posibles combinaciones para construir teselados utilizando cuadrados y triángulos equiláteros. En la segunda parte de esta actividad los alumnos tenían que construir otro teselado semirregular compuesto por hexágonos y cuadrados, donde tienen que describir y justificar su construcción. Finalmente, ellos tenían que corroborar que el teselado semirregular era correctamente correcto, esto a través de la aplicación de la herramienta de arrastre.

Tabla 4.13

Análisis de solución experta actividad 5 (parte 1 y 2)

Actividad 5 Parte 1. Construcción de teselado semirregular	
Definición: *Un teselado semirregular es aquel que se forma por más de un tipo de polígono regular cada uno de ellos congruentes, tal que no se superponen ni dejan regiones sin recubrir.*	
1. ¿Podremos construir un teselado utilizando solo triángulos equiláteros y cuadrados? Justifica tu respuesta.	Si, dado que al concurrir en un vértice dos cuadrados y tres triángulos equiláteros de forma un ángulo de 360°. Además, la medida de sus ángulos son divisores de 360°.
2. Si tu respuesta fue afirmativa a la pregunta 1, ¿de cuántas formas se puede construir un teselado utilizando triángulos equiláteros y cuadrados? Dibuja las posibles combinaciones.	Existen dos posibles combinaciones para construir teselados utilizando cuadrados y triángulos equiláteros.
3. Abre el GeoGebra y construye las posibles combinaciones que propusiste en la pregunta 2.	
Parte 2. Construcción de teselados semirregulares	

<table>
<tr><td>1. Construye el siguiente teselado semirregular en el GeoGebra formado por cuadrados y octágonos regulares. Utiliza las transformaciones isométricas para su construcción.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sugerencias para la construcción: Abre un archivo del GeoGebra y utiliza la herramienta de polígono regular  para formar el arreglo base (polígonos sombreados). Posteriormente aplica cualquiera o todas de las transformaciones isométricas (traslación , rotación  o simetría axial ) del software para generar el teselado.</td></tr>
<tr><td>2. ¿Qué transformaciones isométricas aplicaste para generar el teselado?</td><td>Se espera que para la construcción se aplique traslación, rotación o simetría axial.</td></tr>
<tr><td>3. Describe a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado semirregular en el GeoGebra.</td><td>Se espera que se describa el protocolo que se siguió para la construcción del teselado semirregular, en términos de las herramientas de la respectiva transformación geométrica aplicada.</td></tr>
<tr><td>4. Mueve o arrastra algún punto de los polígonos base mediante la herramienta de elige y mueve  ¿la construcción sigue siendo un teselado semirregular? Explica a detalle y justifica si el teselado se mantiene o no.</td><td>A modo de verificar la construcción del teselado regular, se espera que se aplique la herramienta de arrastre sobre cualquiera de los puntos del hexágono base, y comprobar si el teselado cumple con las características de un teselado.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

En este rediseño se identifica la red de objetos intervinientes y emergentes, sin embargo, también da pie para identificar y relacionar procesos cognitivos que nos lleven a indagar a detalle los procesos matemáticos involucrados en las prácticas argumentativas de los alumnos de este estudio. Por lo que en las dos secciones siguientes se muestra las configuraciones asociadas, como parte del análisis a priori, así como la identificación de los procesos matemáticos.

4.6 Análisis a priori de los objetos matemáticos en el rediseño de actividades

Este apartado se desarrolla en dos momentos, el primero corresponde a un análisis epistémico del rediseño de actividades utilizando las configuraciones epistémicas centradas en el objeto matemático de las transformaciones isométricas. El segundo corresponde al análisis de la solución experta referente al rediseño de actividades, esto mediante la identificación de procesos matemáticos del EOS asociados a objetos matemáticos primarios, mismos que integran la configuración epistémica.

4.6.1 Configuraciones epistémicas de las transformaciones isométricas asociadas al rediseño de actividades

La Figura 4.8 muestra el análisis a priori a través de la configuración epistémica, correspondiente a los conocimientos previos misma que integra la manipulación y la exploración de las herramientas del software *GeoGebra*. Esta configuración epistémica muestra la *anatomía* sobre los objetos matemáticos primarios (situaciones, elementos lingüísticos, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos), los cuales ponen de manifiesto las definiciones y los procedimientos previos y emergentes. Esto nos permite identificar los objetos activados en práctica matemática, es decir, un significado de referencia del que es posible comparar con el expuesto en la práctica matemática que desarrollan los alumnos de este estudio. Por ejemplo, en esta configuración se identifican los diferentes elementos lingüísticos dados por el uso del software de geometría dinámica, en tanto a los procedimientos se muestran los previos al identificar elementos que asocian las definiciones al tratar de comprender la situación problema. Mientras que los emergentes se asocian al cálculo de ángulos como el central y los interiores, así como también procedimientos relacionados con el uso de comandos del software *GeoGebra*.

Figura 4.8 Configuración epistémica de actividad 1

Elementos lingüísticos:

Situaciones: que abordan conocimientos previos, como de:

Verbal: lenguaje común

Gráfico-software: el uso de comandos del software para generar dinamicidad en el applet.

Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares.

Representación de ángulo central, ángulo interior y polígonos regulares inscritos en una circunferencia en el GeoGebra.

Algebraica: Para calcular el ángulo central $\frac{360}{\mathrm{n}}$ y ángulo interior en el polígono regular $\measuredangle \mathrm{CB'B} = 180° - \frac{360°}{\mathrm{n}}$.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Polígonos regulares; Relación entre triángulos sobre un polígono regular y el número de lados de este; Exploración y manipulación de diversos polígonos regulares y cálculo de ángulo central en el SGD; Clasificación de polígonos regulares según el número de lados; Determinación de la expresión algebraica para calcular el ángulo interior de un polígono regular de *n* lados.

Motivan

Resuelven

<u>*Definiciones/conceptos:*</u> <u>Previas:</u> Polígono regular Ángulo interior de polígono regular Ángulo central Triángulo isósceles	<u>Emergentes:</u> Polígono regular Congruencia Ángulo interior de polígonos regulares Ángulo central

<u>*Propiedades/proposiciones:*</u>

La medida del ángulo central BAB' es el cociente entre 360° y el número de lados, $\frac{360}{n}$.

El valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

<u>*Procedimientos:*</u>

<u>Previos (matemáticos):</u>

Identificar la relación entre el número de lados y el número de triángulos formados en cada polígono.

Identificar la medida del ángulo central en un polígono regular inscrito en una circunferencia.

Identificación del ángulo interior de un polígono regular considerando la suma de ángulos de cualquier triángulo y el ángulo central.

<u>Emergentes (matemáticos):</u>

Clasificación de polígonos regulares según el número de lados.

Determinar la expresión $n - 2$ para encontrar el número de triángulos en un polígono regular de *n* lados.

Cálculo de la medida del ángulo central según el número de lados del polígono regular, $\frac{360}{n}$.

Cálculo de la medida del ángulo interior de un polígono regular de *n* lados, $\measuredangle CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$.

<u>Previos (software):</u>

Uso de sugerencias sobre la manipulación de comandos durante la exploración del applet.

<u>Emergentes (software):</u>

Uso de comandos de software GeoGebra para la variación de polígonos regulares inscritas en una circunferencia, donde se identifica el ángulo central y ángulo interior de un polígono.

Justifican

Argumentos:
Conceptualizar el objeto de polígono regular.
En cada polígono representado el número de triángulos en él siempre es dos veces menor que el número de lados $(n-2)$.
La expresión algebraica que representa la medida del ángulo interior de cualquier polígono regular es: $\angle CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4.9 muestra la configuración epistémica que involucra los objetos matemáticos primarios, los cuales relacionan la definición de vector, medida, vértice, mosaico, etc. Estas definiciones se ven involucradas en los procedimientos al identificar el vector de traslación en un applet proporcionado. Además, las propiedades, como el de la magnitud del vector representa la distancia desplazada entre los vértices del cuadrado original y el trasladado, ya que emerge a través de la manipulación y exploración de comandos del software *GeoGebra*. Aquí también los diferentes lenguajes (verbal, gráfico software, gráfico geométrico) se ponen de manifiesto para comunicar cada una de las situaciones propuestas.

Figura 4.9 Configuración epistémica de actividad 2

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común.

Gráfico - software: el uso de comandos del software para

Expresa y soporta

Se abordan *situaciones* donde se manipulan objetos geométricos como vector, cuadrado y casillas en un applet. Establecer relación entre el vector de traslación y el objeto trasladado en diferentes direcciones. Analizar un applet que involucra la aplicación de diferentes vectores de traslación. Conceptualizar la traslación geométrica mediante el uso de un SGD.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos: Previas:		Emergentes:
Vector	Mosaico	Traslación geométrica
Medida	Punto	
Rectángulo	Magnitud	
Inclinación	Dirección	

generar dinamicidad en el applet.

Gráfico/geométrico: Representación del vector de traslación en el applet del GeoGebra.

Representación de cuadrados en el applet del GeoGebra.

simbólico: lado FI, vector $\overrightarrow{AB}$ y cuadrados $P1$ y $P1'$.

Regular el uso

Paralelo Vértice	

Propiedades/proposiciones:
La magnitud del vector representa la distancia desplazada entre los vértices del cuadrado original y el trasladado.
La suma del ángulo en cada vértice es 360°, ya que el rectángulo tiene ángulos rectos.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Identificar medida en el vector de traslación y los lados del cuadrado cuando el cuadrado trasladado comparte un lado con el cuadrado original.
Identificar que la magnitud y dirección del vector representa la traslación del objeto a trasladar.
Emergentes (matemáticos):
Determinar la suma del ángulo en cada vértice del mosaico rectangular, el cual corresponde a un ángulo de 360°.
Determinar el número de vectores necesarios para construir el mosaico rectangular.
Previos (software):
Uso de sugerencias sobre la manipulación y exploración sobre comandos que generan la posición, dirección y sentido del objeto a trasladar.
Uso de comandos que representan el vector y cuadrado en el SGD.
Emergentes (software):
Uso de comandos de software GeoGebra para la traslación geométrica de un cuadrado.
Uso de comandos para identificar vectores que indiquen adecuadamente el objeto a trasladar.

Justifican

Argumentos:
Mediante la manipulación y exploración de los applets se argumenta sobre la ubicación del vector de traslación.
Conceptualización de la traslación geométrica.
Los argumentos se describen en términos de los usos de las herramientas del SGD.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4.10 se muestra la configuración epistémica relacionada con la actividad que involucra la rotación geométrica, las situaciones involucran el uso de un applet que pone de manifiesto comando del *GeoGebra* para identificar ángulo de rotación en cuadrados rotados. Esto con el fin de que los alumnos identifiquen ciertos ángulos de rotación, para hexágonos y triángulos regulares, se espera que los alumnos puedan hacer emerger el concepto de rotación geométrica. En esta actividad tanto los procedimientos emergentes matemáticos como los del software dan pie a la conceptualización de la rotación geométrica que a su vez forma parte de los argumentos cuando se aplica en la construcción de un teselado.

Figura 4.10 Configuración epistémica de actividad 3

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común.

Gráfico - software: el uso de comandos del software para generar dinamicidad en el applet.

Gráfico/geométrico:
Representación de ángulos de rotación en el applet del GeoGebra.

Representación de cuadrados rotados en el applet del GeoGebra.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Se abordan *situaciones* donde se manipulan objetos geométricos como ángulo de rotación, cuadrado y deslizadores de en un applet. Establecer relación entre el ángulo de rotación y los objetos rotados (cuadrados). Analizar el ángulo de rotación en relación con un triángulo equilátero y un hexágono regular. Conceptualización de la rotación geométrica mediante el uso de un SGD.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:
Previas:
Ángulo interior
Ángulo o centro de rotación
Polígonos regulares (cuadrado, triángulo, hexágono)
Sentido horario o antihorario.

Emergentes:
Rotación geométrica

Propiedades/proposiciones:
Los puntos A, B, C y D representan los centros de rotación para los cuadrados $P1_1$, $P2_1$, $P3_1$ y $P4_1$.
El valor de la suma en cada vértice es 360°, dado que cada polígono tiene un ángulo recto.
El ángulo de rotación determina la amplitud de la rotación.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Identificar la medida de los ángulos de rotación cuando el objeto a rotar comparte un lado común al objeto base.
Identificar que los vértices del polígono base son centros de rotación.
Emergentes (matemáticos):
Determinar la suma del ángulo en cada vértice del mosaico cuadrangular, el cual corresponde a un ángulo de 360°.

simbólico: centros de rotación (A, B, C y D) y ángulos de rotación (β y α), valores numéricos que representan ángulos.

Determinar la medida del ángulo de rotación para generar un mosaico de triángulos y hexágonos regulares.
Ubicar y visualizar los puntos de intersección del mosaico cuadrangular, mismos que son centros de rotación.
Previos (software):
Uso de sugerencias sobre la manipulación y exploración sobre comandos que generan interacción entre ángulos y centro de rotación.
Uso de comandos que representan ángulos en relación con objetos geométricos rotados en el SGD.
Emergentes (software):
Uso de comandos de software GeoGebra que representan la rotación geométrica en la construcción de un mosaico cuadrangular.
Uso de comandos para identificar ángulos y centros de rotación que indiquen adecuadamente el objeto a rotar.

Justifican

Argumentos:
Mediante la manipulación y exploración del applet se argumenta sobre la medida de ángulos y centros de rotación en relación con un mosaico cuadrangular.
Conceptualización de la rotación geométrica.
Los argumentos se describen en términos de los usos de las herramientas del SGD.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4.11 se muestra la configuración epistémica asociada a la actividad que involucra la reflexión o simetría axial, donde las situaciones propuestas integran el uso de las herramientas que relacionan la mediatriz como el eje de simetría. Así mismo, se involucra la manipulación y exploración de un applet con el fin de conceptualizar la simetría axial. Es importante resaltar que el uso de los comandos del software *GeoGebra* forman parte tanto del lenguaje lingüístico como de los argumentos al tratar de describirlos en términos del uso de estas herramientas.

Figura 4.11 Configuración epistémica de actividad 4

Elementos lingüísticos:

Se abordan *situaciones* de exploración, trazo y manipulación de comandos que representan objetos geométricos, como, segmento, punto medio, recta perpendicular, mediatriz y triángulo en el applet.

Verbal: lenguaje común.

Gráfico - software: el uso de comandos del software para generar trazos en el applet.

Gráfico/geométrico: Representación del eje de simetría y la reflexión de dos objetos geométricos en el applet del GeoGebra.

Representación trazos mediante segmentos y rectas en el applet del GeoGebra.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones de exploración y trazo de la simetría axial incorporando los objetos geométricos previos.
Conceptualización de la simetría axial o reflexión geométrica.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:		Emergentes:
Previas:		Eje de simetría
Segmento	Distancia	Simetría axial o reflexión geométrica
Punto medio	Orientación	
Mediatriz	Triángulo	
Perpendicularidad	Hexágono	
Vértice	Congruencia	

Propiedades/proposiciones:
La recta trazada es perpendicular a los segmentos.
La recta representa el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los extremos de cada segmento.
La distancia de cualquier vértice y su homólogo a una recta es la misma.
Los triángulos equiláteros son congruentes.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Identificación de los vértices de un triángulo y sus homólogos.
Identificar la orientación del triángulo transformado en término de los vértices.
Identificar y representar el eje de simetría.
Emergentes (matemáticos):
Identificar y ubicar puntos medios y recta perpendicular en un segmento.
Determinar la relación entre la recta perpendicular y los segmentos que unen los puntos del triángulo.
Previos (software):
Trazo de segmentos entre puntos homólogos utilizando la herramienta correspondiente del SGD.
Trazo de puntos medios de los segmentos utilizando la herramienta correspondiente del SGD.
Emergentes (software):
Trazo de la mediatriz de un segmento que pasa por los puntos medios ubicados.
Trazo de la recta perpendicular que pasa por los segmentos utilizando la herramienta recta.

Justifican

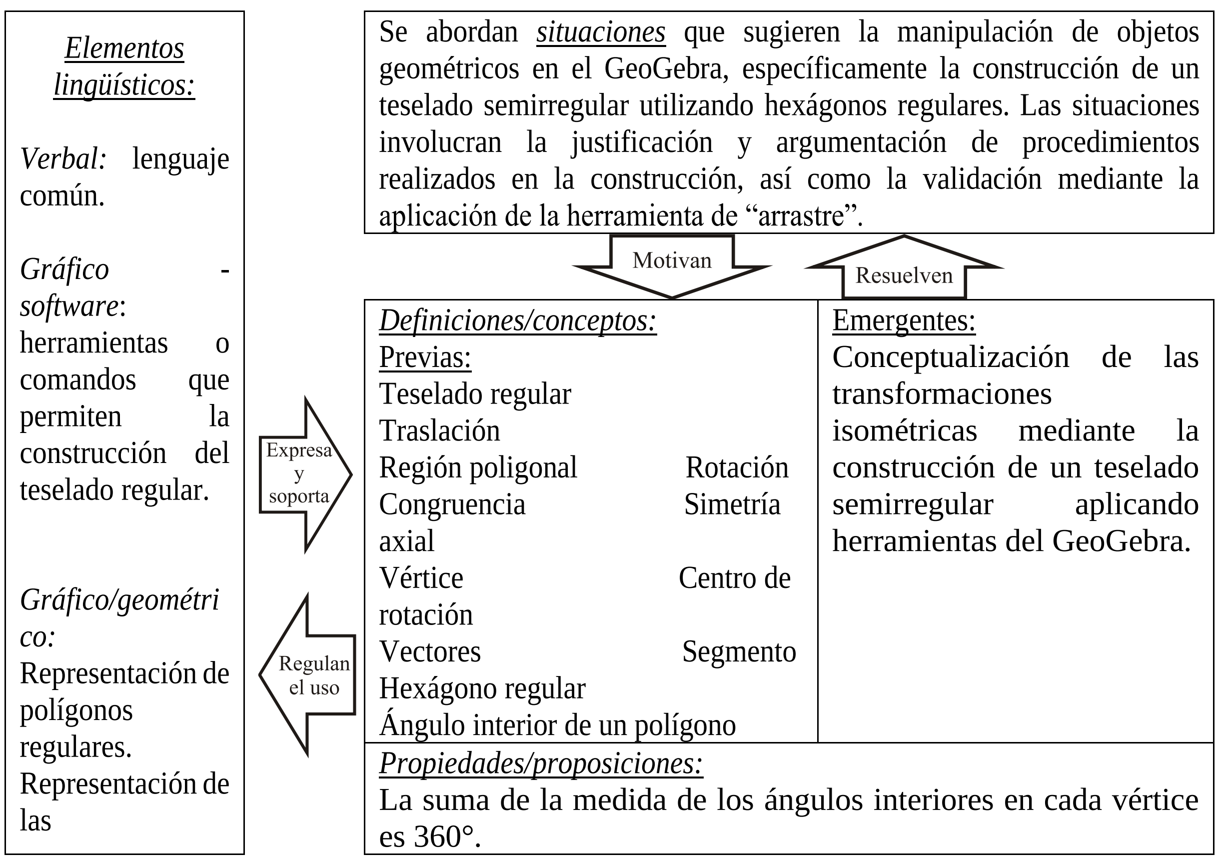
Argumentos:
La recta representa la mediatriz de cada segmento, la cual por definición es perpendicular a cada segmento.

		Utilizar la herramienta longitud para medir la distancia de un punto de la figura original al eje de simetría y su homólogo al mismo eje de simetría, es la misma. Por ser triángulos equiláteros la medida de sus lados y ángulos son congruentes.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 4.12 se asocia a la configuración epistémica de la actividad 5, la cual aborda manipulación y exploración, aquí se identifican varias definiciones como: teselado regular, traslación, región poligonal, rotación, congruencia, simetría axial, vértice, centro de rotación, etc. En esta actividad los significados promovidos tienen que ver con la interiorización de las transformaciones isométricas, con el fin de que los alumnos relaciones las propiedades de la configuración epistémica con el desarrollo de argumentos.

Figura 4.12 Configuración epistémica de actividad 5



<table>
<tr><td rowspan="4">transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.</td><td>Dos vectores generan un teselados hexagonal.
Para la construcción de cualquier teselado en el plano es necesario que el ángulo en cualquiera de los vértices forme un ángulo de 360° y que el ángulo interior del polígono regular (hexágono) sea divisor de 360°.
El cuadrado y el triángulo equilátero son los únicos polígonos que permiten formar un teselado regular.</td></tr>
<tr><td>*Procedimientos:*
Previos (matemáticos):
Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).
Emergentes (matemáticos):
Construcción de un teselado regular utilizando hexágonos regulares.
La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular constituyente en el teselado.
Previos (software):
Identificar los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.
Emergentes (software):
Aplicación de las transformaciones isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión) y sus elementos necesarios que conlleven a la construcción de un teselado regular.
Explicación y descripción del protocolo de construcción del teselado regular en termino de las herramientas dinámicas del GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>↑ Justifican</td></tr>
<tr><td>*Argumentos:*
La suma de la medida de los ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.
Explicitar el protocolo de construcción en el GeoGebra en termino de los usos de sus herramientas.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

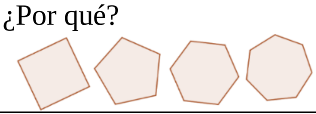
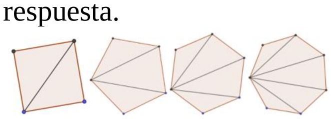
4.6.2 Identificación de procesos matemáticos del EOS en el rediseño de actividades

En este apartado se desarrolla el análisis a priori de los procesos matemáticos propuestos por el EOS (sección 2.3), los cuales se identificaron en las prácticas argumentativas de los alumnos de este estudio, estos procesos permiten identificar de una forma dinámica en qué momento se pone en juego los procesos matemáticos a través de las facetas duales, los cuales vienen a ser como los binoculares que permiten decir de qué manera los procesos del EOS emergen, así como también nos permite relacionar un objeto matemático primario (definición, lenguaje, propiedad,). De esta manera en la Tabla 4.14 se describe la situación que se aborda en la actividad, su solución experta, los procesos matemáticos, la faceta dual y el objeto matemático asociado.

La Tabla 4.14 corresponde al análisis a priori de los procesos matemáticos del EOS, identificado en el rediseño de actividades. Estos procesos fueron identificados mediante la faceta dual que permitió observar y relacionarlo a un objeto matemático primario, por lo que aquí se muestra los procesos identificados en la actividad 1 y 2. En estas primeras tareas se involucra la exploración hacia la conceptualización de las transformaciones isométricas (reflexión, rotación o simetría axial). Los procesos matemáticos asociados son: significación, particularización, descomposición, generalización, visualización y los objetos matemáticos asociados corresponden al lenguaje, definición y proposición.

Tabla 4.14

Análisis a priori de los procesos matemáticos de la actividad 1 y 2

Actividad 1				
Polígonos regulares				
Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Procesos matemáticos*	*Objeto matemático*
1. ¿Las siguientes figuras son polígonos regulares? ¿Por qué? 	Sí, porque un polígono regular es aquel cuya medida de lados y ángulos son congruentes entre sí.	Expresión - contenido	Significación Definición	Definición Lenguaje
2. En cada figura mostrada, ¿qué relación hay entre el número de lados y el número de triángulos formados en cada polígono? Justifica tu respuesta. 	La relación entre el número de lados y el número de triángulos formados en cada polígono es: Cuadrado: 4 lados y 2 triángulos Pentágono: 5 lados y 3 triángulos	Expresión – contenido Sistémico - unitario	Significación Descomposición	Lenguaje

	Hexágono: 6 lados y 4 triángulos Heptágono: 7 lados y 5 triángulos Para cada polígono representado el número de triángulos en él siempre es dos veces menor que el número de lados.			
3. Si tuvieras un polígono de n lados ¿cuál sería la relación entre el número de triángulos formados y el número de lados? Justifica tu respuesta.	Para encontrar el número de triángulos de cualquier polígono regular de n lados se tiene: $n - 2$.	Expresión – contenido Intensivo-extensivo	Significación Generalización	Lenguaje proposición
Actividad 2. Polígonos regulares y su ángulo interior Instrucciones: Abre el archivo “A1_P2” y manipula el deslizador n.				
1. Si los triángulos en la circunferencia son congruentes ¿cuál es el valor del ángulo α, conocido como el ángulo central, para cada valor de n? Justifica tu respuesta.	Cada lado del polígono determina un ángulo central, por tanto, la medida del ángulo central BAB' es el cociente entre 360° y el número de lados, $\frac{360}{n}$.	Expresión - contenido	Significación Visualización	Definición Lenguaje
2. Si n es igual a 12 ¿Cuánto mide el ángulo $CB'B$ en ese polígono? ***Sugerencia:*** recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Justifica tu respuesta.	El triángulo central BAB' es isósceles dado que los lados AB y AB' son radios de la circunferencia. Considerando que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. La suma del ángulo ABB' y $AB'B$ del triángulo central equivale a la diferencia entre 180° y la medida del ángulo central: $\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 180° - \measuredangle BAB'$ entonces $\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 180° - \frac{360°}{12} = 180° - 30$, así	Expresión - contenido Intensivo – Extensivo Ostensivo – no ostensivo	Significación Particularización Idealización – materialización	Definición Proposición Lenguaje Procedimiento

<table>
<tr><td></td><td>$\measuredangle ABB' + \measuredangle AB'B = 150°$ (medida del ángulo interno del polígono con $n = 12$).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. ¿Cuál es la medida del ángulo interior $CB'B$ en el polígono para cada valor de n? Justifica tu respuesta. Sugerencia: recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.</td><td>Por la respuesta de la pregunta 2 se tiene que para $\measuredangle CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$, para cualquier valor de n.</td><td>Expresión - contenido

Intensivo-extensivo</td><td>Significación

Generalización</td><td>Definición
Proposición
Lenguaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. En resumen, completa la siguiente tabla:
<table>
<tr><th># lados (n)</th><th>Nombre del polígono</th><th>Ángulo central α</th><th>Ángulo $CB'B$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Triángulo equilátero</td><td>$\alpha = \frac{360°}{3} = 120°$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{3} = 60°$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Cuadrado</td><td>$\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{4} = 90°$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Pentágono</td><td>$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{5} = 108°$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Hexágono</td><td>$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{6} = 120°$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Heptágono</td><td>$\alpha = \frac{360°}{7} = 51.42$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{7} = 128.57°$ ...</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Octágono</td><td>$\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$</td><td>$CB'B = 180° - \frac{360°}{8} = 135°$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table></td><td>Expresión – contenido

Intensivo – extensivo

Sistémico – unitario</td><td>Significación

Particularización

Generalización

Reificación</td><td>Definición
Lenguaje
Procedimiento</td></tr>
</table>

	n	n – ágono	$\alpha = \frac{360°}{n} = x°$	$CB'B = 180° - \frac{360°}{n}$				

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4.15 corresponde a la actividad 3 la cual se divide en tres partes, cada una aborda una de las isometrías en el plano, se intenta explicitar las instrucciones y se guía al alumno para que conceptualice cada una de ellas. En este análisis a priori el proceso matemático que se evidencia con mayor frecuencia es el de visualización, ya que incluye diferentes applets en el que los alumnos tienen que explorar y manipular.

Tabla 4.15.

Análisis a priori de los procesos matemáticos de la actividad 3 (parte 1, 2 y 3)

Actividad 3 ***Parte 1. Traslación geométrica***				
Instrucciones Abre el archivo “A2_P1” y activa las casillas vector y traslación. Activa la casilla valor y mueve el punto final $\boldsymbol{B}$ del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ de tal manera que $\boldsymbol{P1}$’ (cuadrado trasladado) tenga un lado común con $\boldsymbol{P1}$ (cuadrado original).				
Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Procesos matemáticos*	*Objeto matemático*
1. ¿Cuánto debe medir el vector de traslación para que el cuadrado $\boldsymbol{P1}$’ tenga un lado en común: a) a la derecha de $\boldsymbol{P1}$ b) a la izquierda de $\boldsymbol{P1}$ c) hacia arriba de $\boldsymbol{P1}$ d) hacia abajo de $\boldsymbol{P1}$	4 unidades en cualquiera de las situaciones.	Expresión -contenido Intensivo-extensivo	Significación Particularización Visualización	Definición Lenguaje
2. Si el vector de traslación mide 2 unidades, ¿Cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1’ en relación con el cuadrado original P1? Describe en término de las unidades del plano cartesiano.	El cuadrado $P1$’ queda sobrepuesto al cuadrado original $P1$. Cuando la medida del vector es dos unidades, el cuadrado trasladado queda sobrepuesto sobre el cuadrado original en una unidad.	Intensivo – Extensivo Expresión – contenido	Particularización Visualización	Lenguaje

3. Si el vector de traslación mide 6 unidades, ¿Cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1' en relación con el cuadrado original P1? Describe en término de las unidades del plano cartesiano.	Cuando la medida del vector es seis unidades, el cuadrado trasladado $P1'$ se ubica a una unidad de distancia del cuadrado original $P1$.	Intensivo – Extensivo Expresión – contenido	Particularización Visualización	Lenguaje
4. Si la longitud de $\boldsymbol{FG}$ de $\boldsymbol{P1}$ mide 12 unidades, ¿cuánto debe medir el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ para que $\boldsymbol{P1}'$ tenga un lado común con cualquiera de los lados de $\boldsymbol{P1}$? Justifica tu respuesta.	12 unidades, dado que el vector de traslación representa la misma longitud que cada uno de los lados del cuadrado.	Intensivo – Extensivo Expresión – contenido	Particularización Visualización	Lenguaje
5. Mueve o arrastra el punto $\boldsymbol{F}$ del cuadrado $\boldsymbol{P1}$ de tal manera que este quede inclinado. ¿Qué lados del cuadrado $\boldsymbol{P1}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ para que $\boldsymbol{P1}'$ tenga un lado común con $\boldsymbol{FI}$ de $\boldsymbol{P1}$?	La respuesta dependerá de la dirección de arrastre del punto F.	Expresión – contenido Intensivo – extensivo	Visualización Generalización	Lenguaje
6. ¿Cuál es la relación entre el cuadrado trasladado $\boldsymbol{P1}'$ y el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$? Justifica tu respuesta.	La magnitud del vector representa la distancia desplazada entre los vértices del triángulo original y el trasladado.	Expresión – contenido Sistémico – unitario	Significación Reificación	Definición Lenguaje Proposición
Parte 2. Traslación geométrica				
Instrucciones: Abre el archivo "A2_P2" y reproduce la construcción en el GeoGebra mediante la barra de "reproducción" que aparece en la parte inferior de la pantalla.				
1. Si quisieras realizar la misma construcción ¿dónde ubicarías el vector de traslación para trasladar el rectángulo hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo? Justifica tu respuesta.	Se espera que los alumnos supongan una ubicación de vectores sobre cada uno de los lados para que al trasladar el rectángulo base tenga dirección hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Visualización Idealización	Lenguaje Definición

2. ¿Cuál es la cantidad mínima de vectores que necesitas para generar la construcción del mosaico rectangular? Justifica tu respuesta.	El número de vectores mínimos para generar la construcción son 4, ya que es suficiente que se ubique un vector por cada lado cuyas direcciones coincidan en un vértice o sigan una misma dirección (sentido horario o antihorario).	Expresión – contenido Intensivo – extensivo Ostensivo – no ostensivo	Visualización Particularización Idealización	Lenguaje Definición
3. En la construcción del mosaico rectangular ¿cuál es la medida de la suma de ángulos interiores de los rectángulos en cada vértice? Justifica tu respuesta.	La medida de la suma en cada vértice es 360°, dado que cada polígono tiene un ángulo recto.	Expresión - contenido	Significación Visualización	Lenguaje Propiedad
4. ¿Qué es una traslación geométrica?	La traslación es la transformación plana de una figura en la que todos sus puntos se desplazan en la misma dirección, sentido y distancia fija. Estos tres datos conforman el vector de traslación.	Expresión – contenido Personal – institucional	Significación Visualización Personalización	Definición Lenguaje
Actividad 3 **Parte 3: Rotación geométrica** Instrucciones: Abre el archivo “A3” y explora usando los deslizadores que representan los ángulos de rotación. Responde las siguientes preguntas.				
1. Si mueves el deslizador $\boldsymbol{\alpha}$, ¿para qué valor de ángulo los cuadrados rotados tienen un lado común con los lados de $\boldsymbol{P0}$?	Para el ángulo de 90° y 270° los cuadrados rotados tienen un lado común con P0.	Expresión – contenido	Visualización	Lenguaje
2. Al rotar $\boldsymbol{P1_1}$, $\boldsymbol{P2_1}$, $\boldsymbol{P3_1}$ y $\boldsymbol{P4_1}$ moviendo el deslizador $\boldsymbol{\alpha}$, ¿qué relación hay entre los puntos A, B, C y D en $\boldsymbol{P0}$ y los cuadrados rotados? Justifica tu respuesta.	Los puntos A, B, C y D representan los centros de rotación para los cuadrados $P1_1$, $P2_1$, $P3_1$ y $P4_1$, así que cada cuadrado rotado se asocia a un punto y un ángulo a rotar.	Expresión – contenido	Visualización Significación	Lenguaje Definición

3. Si mueves el deslizador $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\alpha}$. ¿Para qué ángulo los cuadrados forman un cuadrado de 3 X 3? Describe los movimientos realizados en relación con los ángulos $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\alpha}$.	En el ángulo de 90° en β y α se forma un cuadrado de 3 X 3. Al mover α a 180° y mantener β en 90° también se forma el cuadrado de 3X3. Si α se mantiene en 180° y β en 270° también se forma el cuadrado de 3 X 3. Finalmente, cuando β y α están en 270° también se forma el cuadrado de 3 X 3.	Expresión – contenido Intensivo – extensivo Sistémico – unitario	Visualización Significación Particularización Descomposición	Definición Significación
4. Al formar el cuadrado de 3 X 3, ¿cuál sería el centro de rotación y el ángulo por rotar para que $\boldsymbol{P2}$ quede ubicado a la derecha de $\boldsymbol{P2_1}$? Justifica tu respuesta.	Se espera que visualicen y ubiquen el punto de intersección entre $P2$ y $P2_1$, para posteriormente aplicar la herramienta de rotación con un ángulo de 180°.	Sistémico – unitario Expresión – contenido	Descomposición Visualización Significación	Definición Lenguaje
5. Teniendo el cuadrado de 3 X 3 ¿Cuál es el valor de la suma de ángulos interiores de los cuadrados en cada vértice del cuadrado $\boldsymbol{P0}$? Justifica tu respuesta.	La medida de la suma en cada vértice es 360°, dado que cada polígono tiene un ángulo recto.	Expresión – contenido Sistémico – unitario	Significación Descomposición	Definición Lenguaje
6. Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con triángulos equiláteros, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada triángulo? Justifica tu respuesta.	La medida del ángulo de rotación sería 60°, dado que los ángulos interiores son de igual medida por ser triángulo equilátero, así como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°. Además, como los triángulos no se sobreponen, ya que en cada vértice confluye seis triángulos, dando como suma 360°.	Expresión -contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Idealización	Definición Lenguaje Propiedad/proposición

7. Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con hexágonos regulares, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada hexágono? Justifica tu respuesta.	La mediad del ángulo de rotación sería 120°, dado que los ángulos interiores son de igual medida, correspondiente a 120°. Así la medida de la suma de los ángulos internos en cada vértice es de 360°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.	Expresión -contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Idealización	
8. ¿Qué es una rotación geométrica?	Dado un punto O y un ángulo orientado α. La rotación es la transformación alrededor del punto O que mantiene forma y tamaño de la figura original. El ángulo de rotación determina la amplitud de la rotación y el punto O llamado centro de rotación, el cual tiene sentido horario o antihorario.	Expresión – contenido Personal – institucional	Significación Personalización	Definición

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 4.16 se muestran los procesos matemáticos asociados a la solución experta, así como los objetos matemáticos, los que se evidencian en esta solución de las situaciones son los de significación, representación y visualización. Cabe resaltar que la identificación de estos procesos nos permite comprender la práctica argumentativa desarrollada en las actividades propuestas. Los objetos los conceptos matemáticos asociados son la definición y lenguaje, cabe resaltar que el lenguaje es un objeto matemático transversal para comunicar y manifestar un argumento matemático.

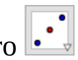
Tabla 4.16.

Análisis a priori de los procesos matemáticos de la actividad 3 (parte 4 y 5)

Actividad 3

Parte 4. Reflexión geométrica

Instrucciones:

- Abre el archivo ''A4_P1'' y traza los segmentos CC', DD' y EE' utilizando la herramienta segmento .
- Ubica el punto medio de cada segmento trazado utilizando la herramienta medio o centro .
- Traza la recta que pasa por esos segmentos utilizando la herramienta recta . Responde las siguientes preguntas.

Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Proceso matemático*	*Objeto matemático*
1. ¿La recta trazada es perpendicular a los segmentos? Justifica tu respuesta.	Sí, dado que la recta representa la mediatriz de cada segmento, la cual por definición es perpendicular a cada segmento.	Expresión – contenido Ostensivo	Significación Representación Materialización	Definición Lenguaje
2. ¿Qué representa la recta en relación con los segmentos CC', DD' y EE'? Justifica tu respuesta.	La recta representa el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los extremos de cada segmento. Además, que es la mediatriz de cada segmento.	Expresión-contenido	Significación Visualización	Definición Lenguaje
3. Si mueves el vértice E del triángulo CDE, ¿cambia su orientación? Describe y justifica en término de los vértices de los triángulos CDE y $C'D'E'$.	El movimiento aplicado al punto E coincide en el triángulo $C'D'E'$, aunque la orientación no se preserva, ya que si hacemos un recorrido de vértices $< C'E'D'$ de C' a E' y luego a D' el recorrido es a favor de las manecillas del reloj, mientras que, para el triángulo original si aplicamos el mismo recorrido para $< CED$ el recorrido es en contra de las manecillas del reloj. Por tanto, la orientación no se preserva.	Expresión – contenido	Visualización Significación	Lenguaje
4. ¿La distancia de cualquier vértice a la recta es la misma? ¿Por qué?	Sí, porque la longitud de un segmento y la de su imagen son iguales. Se puede comprobar utilizando la herramienta longitud para medir la distancia de un punto de la figura original al eje de simetría y su homólogo al mismo eje de simetría.		Significación	Concepto Lenguaje

Parte 5. Reflexión geométrica

Instrucciones:

- Abre un archivo nuevo en GeoGebra y construye en hexágono regular utilizando la herramienta de polígono regular .
- Coloca una recta o segmento de recta en cualquier lugar del plano.
- Aplica simetría axial , seleccionando el polígono y la recta o segmento de recta.
- Mueve la recta y cualquiera de los puntos de la recta o segmento utilizando la herramienta , de tal manera que el polígono transformado tenga un lado común con alguno de sus lados del hexágono regular previamente construido.

Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Proceso matemático*	*Objeto matemático*
1. Considerando la construcción anterior ¿Qué es una reflexión o simetría axial?	Dada una recta l fija en el plano, la reflexión $R(l)$ es la transformación que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto P' del mismo plano tal que la recta l es la mediatriz del segmento PP'. A la recta l se le llama eje de reflexión.	Expresión – contenido	Significación Visualización	Definición Lenguaje
2. Abre el archivo “A4_P2” y selecciona la casilla “Triángulos1”. ¿Los triángulos P_2, P_3 y P_4 son congruentes? Justifica tu respuesta.	Sí, ya que son triángulos equiláteros, así que la medida de sus lados y ángulos son congruentes.	Expresión – contenido	Significación	Definición
3. Para que un objeto en el GeoGebra pueda ser reflejado utilizando simetría axial es necesario tener un eje de simetría. En la construcción de triángulos del archivo “A4_P2” ¿Quién representa el eje de simetría para P_2, P_3 y P_4? Explica ampliamente tu respuesta.	En la construcción del GeoGebra el triángulo original o base es ABC: - El eje de simetría para P_2 es el lado AB del triángulo original. - El eje de simetría para P_3 es el lado BC del triángulo original. - El eje de simetría para P_4 es el lado CA del triángulo original.	Expresión - contenido	Significación Visualización	Lenguaje
4. Selecciona la casilla de “Triángulos2” y responde lo	*En* la construcción del GeoGebra el triángulo original o base es ABC:	Expresión - contenido	Significación Visualización	Definición Lenguaje

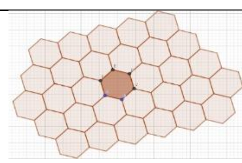
siguiente. ¿Qué triángulos se les aplicó simetría axial y quién fue el eje de simetría para obtener los triángulos P_5, P_6 y P_7? Explica ampliamente tu respuesta.	- El eje de simetría para P_5 fue el lado AB del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_4. - El eje de simetría para P_6 fue el lado CA del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_2. - El eje de simetría para P_7 fue el lado BC del triángulo original y el triángulo que se aplicó la simetría axial fue P_4.			

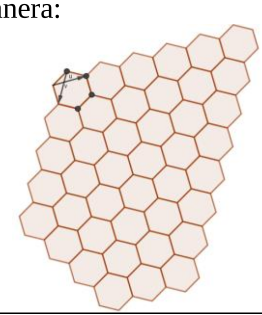
Fuente: elaboración propia.

La Tabla 4.17 muestra las situaciones que abordan la construcción de teselados regulares, este análisis a priori permitió identificar los procesos matemáticos que podrían manifestar los alumnos al argumentar situaciones que involucran la aplicación de las transformaciones isométricas del *GeoGebra*.

Tabla 4.17.

Análisis a priori de los procesos matemáticos de la actividad 4

<table>
<tr><td colspan="5" align="center">Actividad 4
Construcción de teselado regular</td></tr>
<tr><td colspan="5">Definición: Un teselado regular en el plano se construye con regionales poligonales regulares congruentes tal que no se superponen ni dejan regiones sin recubrir</td></tr>
<tr><td align="center">Situación problema</td><td align="center">Solución experta</td><td align="center">Faceta dual</td><td align="center">Procesos matemáticos</td><td align="center">Objetos matemáticos</td></tr>
<tr><td>1. Construye un teselado regular en el GeoGebra utilizando hexágonos regulares, puedes aplicar cualquiera de las isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión). Responde ampliamente las preguntas.</td><td></td><td align="center">Ostensivo – no ostensivo</td><td align="center">Materialización</td><td align="center">Lenguaje
Concepto</td></tr>
<tr><td colspan="5"><u>Sugerencias para la construcción:</u> Abre un archivo del GeoGebra y utiliza la herramienta de polígono regular y las transformaciones isométricas (traslación , rotación o simetría axial) del software. Para construir el teselado regular correctamente, recuerda que:
• Para la traslación, se debe aplicar un vector de traslación .</td></tr>
</table>

• Para la rotación, requiere de un centro de rotación, el cual puede ser un punto. • Para la reflexión o simetría axial, utiliza un eje de simetría, el cual puede ser una recta o un segmento de recta .				
1. ¿Cuánto mide la suma de ángulos interiores que rodea cada vértice del teselado? Justifica tu respuesta.	En cada vértice la suma de ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120 °, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Visualización Idealización	Definición Propiedad Lenguaje
2. En el caso de que hayas usado traslación, ¿cuál es la cantidad mínima de vectores que generan el teselado regular? Justifica tu respuesta.	La cantidad mínima de vectores que genera el teselado hexagonal son dos, y se ubican de la siguiente manera: 	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Visualización Significación Materialización	Definición Lenguaje
3. Si aplicaste traslación, describe a detalle el procedimiento de construcción geométrica que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de traslación y las que conllevan la construcción en el GeoGebra, el cual será recuperado mediante el protocolo de construcción.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Materialización	Definición Lenguaje Propiedad
4. En el caso de haber usado rotación, explica a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de rotación del GeoGebra, el cual será recuperado mediante el protocolo de construcción.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Materialización	Definición Lenguaje Propiedad
5. En caso de haber usado reflexión o simetría axial, explica a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado utilizando hexágonos regulares.	Se espera que describan el proceso de construcción geométrico, en términos de las herramientas de la simetría axial del GeoGebra, además se recuperará el protocolo de construcción.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Materialización	Definición Lenguaje Propiedad
6. Mueve o arrastra algún punto del hexágono base con la	A modo de verificar la construcción del teselado	Expresión - contenido	Visualización Significación	Lenguaje Definición

herramienta , ¿sigue siendo un teselado? ¿Cumple con la definición de teselado regular? Justifica tu respuesta.	regular, se espera que se aplique la herramienta de arrastre sobre cualquiera de los puntos del hexágono base, y comprobar si el teselado cumple con las características de un teselado.			Propiedad (software)
7. ¿Qué criterio nos permite determinar cuándo un polígono regular puede teselar un plano? Explica ampliamente.	Para la construcción de cualquier teselado en el plano, es necesario que el ángulo en cualquier vértice sea de 360° y que su ángulo interior sea divisor de 360°.	Expresión - contenido Personal – institucional	Significación Personalización	Lenguaje Propiedad Definición
8. ¿Qué otros polígonos regulares sirven para generar otro teselado regular? Justifica tu respuesta.	El cuadrado y triángulo equilátero, ya que al confluir los polígonos en cualquier vértice forman un ángulo que mide 360°.	Expresión – contenido	Significación	Lenguaje Propiedad Definición

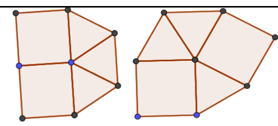
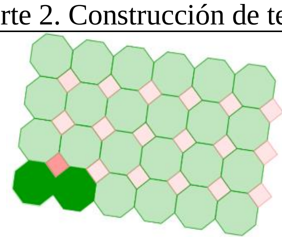
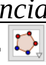
Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 4.18 muestra el análisis a priori referente a la identificación de procesos en el desarrollo de las situaciones que involucraron la construcción de teselados semirregulares, aquí el proceso ampliamente identificado fue el de materialización, ya que los alumnos a través de la aplicación y manipulación de herramientas es posible mediatizar su pensamiento matemático.

Tabla 4.18.

Análisis a priori de los procesos matemáticos de la actividad 5

Actividad 5 Parte 1. Construcción de teselado semirregular				
Definición: Un teselado semirregular es aquel que se forma por más de un tipo de polígono regular cada uno de ellos congruentes, tal que no se superponen ni dejan regiones sin recubrir.				
Situación problema	*Solución experta*	*Faceta dual*	*Procesos matemáticos*	*Objeto matemático*
1. ¿Podremos construir un teselado utilizando solo triángulos equiláteros y cuadrados? Justifica tu respuesta.	Si, dado que al concurrir en un vértice dos cuadrados y tres triángulos equiláteros de forma un ángulo de 360°. Además, que sus ángulos son divisores de 360°.	Expresión – contenido	Significación	Definición Propiedad Lenguaje

2. Si tu respuesta fue afirmativa a la pregunta 1, ¿de cuántas formas se puede construir un teselado utilizando triángulos equiláteros y cuadrados? Dibuja las posibles combinaciones.	Existen dos posibles combinaciones para construir teselados utilizando cuadrados y triángulos equiláteros.	Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Materialización	Definición Lenguaje Propiedad
3. Abre el GeoGebra y construye las posibles combinaciones que propusiste en la pregunta 2.		Ostensivo – no ostensivo	Materialización	
Parte 2. Construcción de teselados semirregulares				
1. Construye el siguiente teselado semirregular en el GeoGebra formado por cuadrados y octágonos regulares. Utiliza las transformaciones isométricas para su construcción.		Expresión – contenido Ostensivo – no ostensivo	Significación Materialización	Definición Lenguaje
<u>Sugerencias para la construcción:</u> Abre un archivo del GeoGebra y utiliza la herramienta de polígono regular  para formar el arreglo base (polígonos sombreados). Posteriormente aplica cualquiera o todas de las transformaciones isométricas (traslación , rotación  o simetría axial ) del software para generar el teselado.				
2. ¿Qué transformaciones isométricas aplicaste para generar el teselado?	Se espera que para la construcción se aplique traslación, rotación o simetría axial.	Expresión – contenido	Significación	Definición Lenguaje Propiedad
3. Describe a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado semirregular en el GeoGebra.	Se espera que se describa el protocolo que se siguió para la construcción del teselado semirregular, en términos de las herramientas de la respectiva transformación geométrica aplicada.	Expresión – contenido	Significación Visualización	Definición Propiedad (software) Lenguaje
4. Mueve o arrastra algún punto de los polígonos base mediante la herramienta de elige y	A modo de verificar la construcción del teselado regular, se espera que se aplique la herramienta de arrastre sobre cualquiera de los puntos del	Expresión - contenido	Visualización Significación	Definición Propiedad (software) Lenguaje

mueve  ¿la construcción sigue siendo un teselado semirregular? Explica a detalle y justifica si el teselado se mantiene o no.	hexágono base, y comprobar si el teselado cumple con las características de un teselado.			

Fuente: elaboración propia.

4.7 Implementación definitiva de las actividades propuestas

En este apartado se describe el desarrollo de la implementación definitiva de las actividades. En esta puesta de escena se aplicó el rediseño de actividades, donde se tomó como aspecto principal los criterios de idoneidad didáctica, los cuales permitieron la valoración del diseño inicialmente propuesto, con el fin de guiar y obtener el rediseño antes mencionado, el cual en la sección 4.5 se describe a detalle.

La implementación se realizó con cinco alumnos de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, que cursaban la asignatura de geometría analítica correspondiente al tercer semestre. Es importante mencionar que esta puesta en escena se desarrolló en tiempos de confinamiento debido a la pandemia (Covid-19) presentada mundialmente, por esta razón se optó por realizar la implementación de manera virtual y sincrónica. Dado que el desarrollo de actividades se realizó de manera individual con cada uno de los alumnos, cada uno trabajó a su propio ritmo y algunos requirieron más sesiones que otros. En la Tabla 4.19 se muestra el número de sesiones, cada una de 60 minutos, que requirió cada alumno para desarrollar las cinco actividades propuestas.

Tabla 4.19.

Número de sesiones en el desarrollo de actividades por cada alumno

Alumnos	Número de sesiones
Pablo	10
Diana	10
Gabriela	13
Ángel	12

Fuente: Elaboración propia.

Como se mencionó las sesiones se realizaron de forma virtual y sincrónica, donde se pedía al alumno iniciar las actividades a través de la plataforma *GeoGebra Classroom* y manteniendo comunicación mediante la plataforma *Zoom*, esto permitió que la investigadora mantuviera comunicación directa sobre lo que el alumno realizaba de manera dinámica en el software *GeoGebra* y los argumentos manifestados a cada una de las situaciones propuestas en la actividad. Cabe resaltar que el papel de la investigadora fungió como guía para orientar al alumno sobre el uso de las herramientas del *GeoGebra*, pero también para solventar aquellas dudas referentes sobre las situaciones desarrolladas por el alumno. Además, fue quien indagó sobre los argumentos manifestados, recurriendo a la entrevista semiestructurada y realizando notas de campo, con el fin de profundizar tanto en las respuestas manifestadas como en los procesos cognitivos matemáticos desarrollados por los alumnos al trabajar las actividades.

Capítulo 5. Análisis y Resultados

Este capítulo comprende el análisis de tres puestas en escena para el desarrollo del objetivo general de esta investigación. El primer análisis correspondiente a la primera puesta en escena de las actividades, la cual se centró en un estudio exploratorio, cuyo fin fue identificar de manera general y empírica el tipo de argumentos que manifiestan los alumnos del nivel medio superior (alumnos de 15 a 16 años) cuando utilizaron un software de geometría dinámica *GeoGebra*.

El segundo análisis corresponde a una segunda implementación de la secuencia de actividades, donde los argumentos manifestados por los alumnos son analizados tomando en cuenta las facetas duales de los procesos matemáticos propuestos por la teoría de enfoque ontosemiótico, esto con el fin de identificar de manera general y empírica los procesos matemáticos emergentes en el desarrollo de las prácticas argumentativas.

El tercer análisis corresponde a identificar los procesos matemáticos involucrados en las prácticas argumentativas de cinco alumnos que realizaron las cinco actividades referentes al rediseño de actividades propuestos. En este análisis el énfasis se hizo en la trayectoria de procesos matemáticos cognitivos recurrentes por parte de los alumnos, dichos procesos son los propuestos por el EOS, así que en los resultados de los cinco casos se pretende mostrar a detalle qué procesos fueron emergentes, así como identificar la red de objetos matemáticos a través de la configuración cognitiva de los alumnos de este estudio.

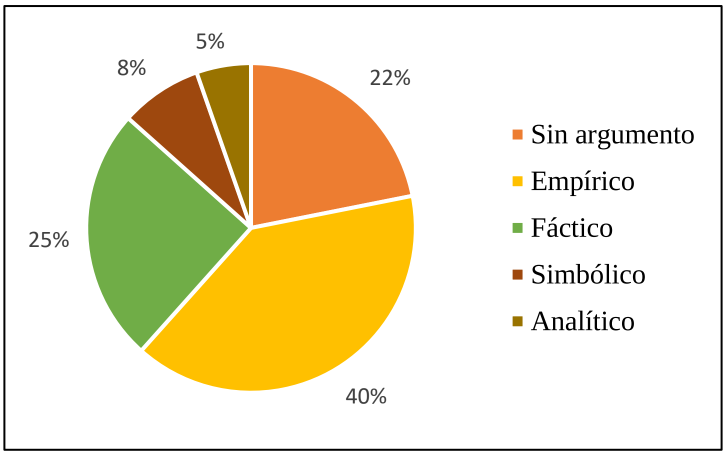
5. 1 Análisis a posteriori de las actividades propuestas

El análisis a posteriori consistió en una tipificación de los argumentos de los alumnos en relación con los esquemas de argumentación propuestos por Flores (2007), estos argumentos categorizados permitieron obtener resultados preliminares y generalizados sobre el tipo de argumentos de los alumnos de este estudio.

5.2 Tipificación de argumentos de los alumnos de la primera puesta en escena

A continuación, la Figura 5.1 muestra el porcentaje correspondiente a la categorización de los esquemas de argumentación, en relación con el análisis de los argumentos proporcionadas por los alumnos sobre la tercera actividad. Cabe mencionar que, el esquema de argumentación empírica fue el más recurrente por los alumnos, principalmente en aquellas situaciones donde ellos tuvieron que justificar y construir teselados regulares usando triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Figura 5.1 Gráfica de los esquemas de argumentación manifestados por los alumnos



Fuente: Elaboración propia.

La gráfica anterior muestra el total (224) de situaciones problemas analizadas referente a la tercera actividad. En la cual 49 (22%) situaciones se categorizaron sin argumento pues estas no se asociaron a un tipo de esquema o no contaban con respuesta. Mientras que 89 (40%) de ellas se asociaron al esquema de argumentación empírica; es decir, la construcción del teselado o la representación figural realizada por los alumnos fungió el papel de argumento o justificación y no como apoyo al proceso de argumentación. El esquema fáctico se asoció a 56 (25%) argumentos de los alumnos, en este caso, ellos recurrieron a explicaciones sobre la aplicación de las herramientas del *GeoGebra* a manera de pasos secuenciales. El esquema simbólico se relacionó con 18 (8%) argumentos de los alumnos, los cuales fueron argumentos donde los conceptos matemáticos fueron poco claros y carecían de sentido. Con respecto al esquema analítico, este fue escasamente recurrente pues se evidencia con solo 12 (5%) argumentos de los alumnos.

Por otra parte, el análisis realizado en términos de los esquemas de argumentación fue para lograr una categorización de los argumentos proporcionados por los alumnos, misma que permitió mostrar las características de cada respuesta, esta caracterización se describe en los cuadros 1, 2 y 3. En todos los cuadros la primera columna, corresponde a la entrada de la situación problema que se le planteó al alumno, la segunda columna corresponde al análisis del argumento proporcionado por el alumno, al cual le llamamos *salida*, y la tercera columna ubica el tipo de esquema de argumentación asignado a dicho análisis.

Para ejemplificar el análisis, se muestra la Tabla 5.1 correspondiente a la tercera actividad referente a la construcción del teselado utilizando triángulos equiláteros. La categorización presenta dos situaciones sin argumento, tres esquemas de argumentación empírica, un esquema de argumentación simbólica y un esquema de argumentación fáctico. De acuerdo con el análisis del protocolo de construcción del *GeoGebra*, una pareja de alumnos de este estudio realizó el teselado usando triángulos equiláteros. A continuación, se describe dicho protocolo de construcción, los alumnos:

1. Tomaron como referencia el eje de las abscisas para construir una serie de triángulos equiláteros utilizando la herramienta de polígono regular.
2. Ubicaron un vector sobre los triángulos para después aplicar la herramienta de traslación geométrica sobre cada uno de los triángulos. Sin embargo, en este proceso algunos triángulos se sobreponen dejando al menos dos triángulos en una misma posición.
3. Colocaron otro vector de menor tamaño y en posición diagonal para trasladar cada uno de los triángulos hacia arriba aplicando la herramienta de traslación geométrica.
4. Siguieron utilizando el vector en diagonal para trasladar triángulos hacia arriba, en algunos casos estos se sobreponen.
5. Ubicaron otro vector horizontal sobre los triángulos trasladados para seguir trasladando hacia la derecha, cuando se aplicó traslación los triángulos se sobreponían.

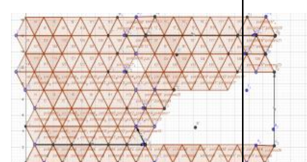
6. Finalmente, terminaron de completar el teselado poniendo triángulos equiláteros en los espacios huecos mediante la herramienta de polígono regular.

Aunque a simple vista se construyó un teselado regular, este se deforma cuando se aplica la herramienta de arrastre o se mueve un punto del triángulo original. Cabe resaltar que los alumnos muestran la inexperiencia con el uso las herramientas del *GeoGebra*, pues se evidencia una construcción basada en el método de prueba y error. La Tabla 5.1 muestra la tipificación de argumentos manifestados por los alumnos en relación con los esquemas de argumentación.

Tabla 5.1.

Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a los esquemas de argumentación

Entrada (situación problema)	*Salida (análisis de la respuesta del alumno)*	*Esquema de argumentación*
Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.	Los alumnos proponen utilizar los polígonos regulares como: hexágono, cuadrado y triangulo, sin argumentar la respuesta.	Sin argumento
Se les proporciona polígonos regulares, donde la consigna es cuales de ellos pueden formar un teselado y por qué forman un teselado.	Los alumnos afirman que para el triángulo equilátero, cuadrado, pentágono y hexágono no quedan espacios al unir y formar teselado. Para el heptágono, octágono y eneágono los polígonos se sobreponen. Se evidencian argumentos basados en percepciones visuales.	Empírico

Si tuvieras que teselar una parte del plano usando el GeoGebra ¿cómo tendrías que mover los polígonos regulares para cubrir la pantalla? Justifica tu respuesta.	Los alumnos formulan una conjetura en la que la "simetría axial pasaría los polígonos a otro plano". Esta conjetura carece de argumento pues no se detalla cómo se formaría el teselado "pasando los polígonos a otro plano".	Simbólico
Si construyeras un teselado regular y sumaras los ángulos que rodean a un solo vértice ¿Cuál sería el valor de la suma? Justifica tu respuesta.	Los alumnos se limitan a decir que el valor de la suma del ángulo es 360º, sin presentar argumentos a esta respuesta.	Sin argumento
Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con triángulos equiláteros. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: teselado3_apellido	Los alumnos construyen el teselado de triángulos equiláteros usando traslación geométrica; sin embargo, al momento de colocar los vectores para ir trasladando el objeto, se pierde el orden y esto provoca que algunos triángulos queden sobrepuestos. Además, si se mueve algún punto del triángulo original se deforma el teselado.	Empírico 
Si mueves el punto A o B del triángulo equilátero original con la herramienta 	Los alumnos justifican que únicamente se requiere que las teselas sean iguales	Empírico

¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	"para seguir encajando entre sí".	
Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	El argumento del alumno se basa en describir en términos de las herramientas del software; es decir, se describen pasos a modo de algoritmo utilizando lenguaje asociado a las herramientas del software.	Fáctico

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.2 corresponde al análisis de la construcción del teselado regular realizado por una pareja de alumnos aplicando herramientas del *GeoGebra*, en particular el teselado regular formado por cuadrados y aplicando simetría axial. Los argumentos de esta pareja de alumnos evidenciaron dos esquemas de argumentación empírica y un esquema de argumentación analítico. Estos argumentos parten de la percepción visual y terminan con procedimientos deductivos aplicando la herramienta de simetría axial. De acuerdo con el análisis del protocolo de construcción en el *GeoGebra* sobre el teselado utilizando cuadrados, relativa a la misma pareja de alumnos de este estudio. A continuación, se describe dicho protocolo de construcción obtenida de la vista grafica del software:

1. Se construyó la unión de cuadrados mediante la aplicación de la herramienta polígono regular tomando como referencia el eje de las abscisas y las ordenadas, construyendo dos filas de seis cuadrados.

2. Se generó el teselado hacia arriba y hacia la derecha mediante la aplicación de la simetría axial para cada uno de los cuadrados que habían transformado. Sin embargo, a simple vista cumplía con las características de teselado regular, aunque algunos cuadrados quedaban sobrepuestos y cuando se aplicaba la prueba de arrastre este se separaba en dos rectángulos formados por cuadrados.

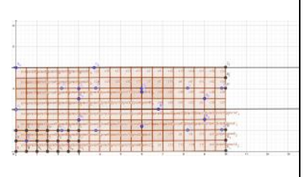
3. Se utilizó cuadrados transformados, es decir, generados por el original aplicando simetría axial y se procedió a ampliar el teselado hacia la derecha, aplicando de nuevo simetría axial sobre los cuadrados originales.

4. Posteriormente, se construyó una recta horizontal sobre todo el teselado, el cual fungió como el eje de simetría y se prosiguió aplicando simetría axial hasta ampliar el teselado hacia arriba. Finalmente, a simple vista se formó un teselado usando cuadrados, aunque se deformó cuando se movió algún punto del cuadrado original.

En la construcción de este teselado, los cuadrados se sobreponían y se deformaba en seis rectángulos formados por cuadrados; es decir, no cumplía con la característica de teselado regular. Sin embargo, la construcción mostró un razonamiento deductivo sobre el cómo los cuadrados fueron *acoplándose*, mediante la aplicación de la herramienta de simetría axial e identificando que el eje de simetría sobre alguno de los cuadrados originales. Se evidencia la práctica experimental y la visualización de los alumnos para generar el teselado regular, aunque este no cumpliera con la característica del arrastre cuando este fue aplicado, es decir, que no se deformara el teselado cuando se moviera algún punto del polígono original construido.

Tabla 5.2.

Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a los esquemas de argumentación

Entrada (situación problema)	*Salida (análisis de la respuesta del alumno)*	*Esquema de argumentación*
Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con cuadrados. Posteriormente guarda el	Los alumnos muestran en su construcción que, para efectos visuales, esta forma un teselado. Sin embargo, se observa que algunos cuadrados están sobrepuestos.	Empírico 

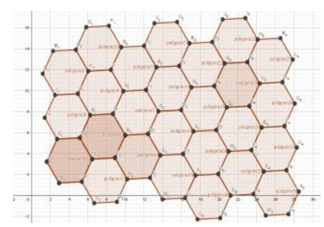
archivo de la siguiente manera: teselado4_apellido		
Si mueves el punto A o B del cuadrado original con la herramienta  ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	El argumento de los alumnos se basa en la percepción visual, ya que para ellos es suficiente que las figuras se acoplen sin tomar en cuenta que algunos cuadrados se sobreponen y que el teselado se deforma al mover algún punto del cuadrado original.	Empírico
Si alguien quisiera construir esta misma teselación ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	Los alumnos evidencian un argumento sobre un procedimiento deductivo sobre la construcción del teselado de cuadrados, ya que se recurre a la aplicación de la simetría axial. Sin embargo, no cumple con las características de un teselado regular.	Analítico

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.3 muestra el análisis de argumentos de los alumnos en relación con la construcción del teselado utilizando hexágonos regulares. Con respecto al protocolo de construcción que realizaron los alumnos, se aplica la herramienta de polígono regular para construir hexágonos regulares, posteriormente, van uniendo los polígonos de tal manera que formen el teselado, el cual aparentemente lo es, sin embargo, solo se enfocaron en utilizar la herramienta de polígono regular e ir colocando en los lados del primer hexágono, en esta construcción se omite que algunos hexágonos se sobreponen. En este sentido, se evidencia un proceso argumentativo basados en esquemas empíricos, pues, aunque el teselado no se deforma, el interés por aplicar alguna herramienta de transformación geométrica es nula. Además, existe incongruencia en la explicación con respecto a la construcción. Finalmente, en la última consigna se reflexiona sobre las herramientas usadas y el ángulo que tienen que hacer *coincidir* para formar teselados regulares.

Tabla 5.3.

Tipificación de argumentos de los alumnos asociados a los esquemas de argumentación

Entrada (situación problema)	*Salida (análisis de la respuesta del alumno)*	*Esquema de argumentación*
Utiliza las trasformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: teselado6_apellido	La construcción realizada por los alumnos se basó en unir hexágonos, de manera que la figura no se deforma, pero se sobreponen algunos hexágonos. Sin embargo, no se aplica ninguna herramienta de transformación isométrica del software.	Empírico 
Si mueves el punto *A* o *B* del hexágono original con la herramienta  ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.	El argumento proporcionado por los alumnos es perceptual visual, pues para ellos es suficiente observar una figura que representa la unión de varios hexágonos.	Empírico
Si alguien quisiera construir esta misma teselación ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.	Los alumnos se enfocan en formar primero el hexágono y construyen una línea continua de estas, para después utilizar un vector y coincidirlas. El procedimiento hace el recuento de las herramientas que se aplicaron. Sin embargo, la explicación es ambigua.	Simbólico

Si los polígonos tienen que ser regulares para poder teselar un plano ¿Por qué podemos hacerlo solamente con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos? Explica lo más que puedas.	El argumento de los alumnos se da a partir de la observación y reflexión sobre la construcción de teselados regulares, tomando en cuenta lo previo. El argumento está relacionado con la unión de ángulos para no dejar huecos entre las teselas.	Analítico

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de una primera puesta en escena permitieron dar cuenta de que el esquema de argumentación empírico es el más recurrente por los alumnos de este estudio. Sin embargo, también hubo situaciones problemas donde las parejas de alumnos no manifestaron respuesta o argumento. Esto nos permitió valorar la propuesta de actividades y realizar un rediseño de estas, por lo que en la siguiente sección se abordará el rediseño de las actividades, la solución experta con el fin de fomentar el proceso de argumentación, así como identificar otros procesos matemáticos propuestos por el EOS.

5.2.1 La Tipificación de argumentos de una pareja de alumnos

Se eligió un caso representativo de las 16 parejas participantes en este estudio para ejemplificar cada uno de esquemas de argumentación (empírico, analítico, factico y simbólico) asociados a los argumentos manifestadas por los alumnos. Esta pareja se eligió por ser el caso que evidenció en sus argumentos los cuatro tipos de esquemas de argumentación; además, porque el resto de las parejas muestran el esquema de argumentación empírica como el más recurrente. La situación mostrada en la Figura 4.2, evidencia un *esquema de argumentación simbólica*. El alumno plantea una conjetura que carece de argumento en su explicación y es poco claro sobre como *pasaría los polígonos a otro plano*.

Figura 5.2 Argumento de alumnos asociado al esquema de argumentación simbólico

> Si tuvieras que teselar una parte del plano usando el GeoGebra, ¿Cómo tendrías que mover los polígonos regulares para cubrir la pantalla? Justifica tu respuesta.
>
> Por simetria axial pasarias los poligonos a otro plano

Fuente: Elaboración propia.

La situación (Figura 5.3) muestra un argumento del *esquema de argumentación fáctico*. En este caso el argumento de la pareja de alumnos consistió en describir una serie de pasos poco estructurados, sin detallar en qué orden se aplicó las herramientas del software, cómo fue que se realizó el *acomodo* y por en ende cómo se generó el teselado. Además, el lenguaje utilizado es informal, el mismo que se da en términos del uso de las herramientas de polígono, vector y traslación del software *GeoGebra*.

Figura 5.3 Argumento de alumnos asociado a esquema de argumentación fáctico

> Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿Cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste para su construcción.
>
> Empezamos por una linea original de triangulos
> y despues utilizamos un vector y traslacion
> y solo fuimos acomodando hasta rellenar

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5.4 se presenta un argumento correspondiente al *esquema de argumentación empírico*. En este caso, los alumnos describen lo observado en el software, pues la figura geométrica juega el rol del argumento y no como parte de la explicación sobre la construcción geométrica del teselado regular, ya que se refieren solo a cómo *van a seguir encajando entre sí*. Por otra parte, el argumento hace referencia a la construcción del teselado de triángulos equiláteros y se muestra el intento por aplicar traslación geométrica, aunque la construcción no cumpla con características del teselado regular.

Figura 5.4 Argumento de alumnos asociado al esquema de argumentación empírico

Utiliza las transformaciones geométricas para construir un teselado en el GeoGebra con triángulos equiláteros. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: teselado3_apellido**.**

Si mueves el punto *A* o *B* del triángulo equilátero original con la herramienta ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta

Si, porque sigen siendo iguales y las figuras van a segir encagando entre sí

Fuente: Elaboración propia.

En esta situación-problema se hicieron amplias recomendaciones sobre las diferentes herramientas a utilizar para la contrucción de teselados regulares mediante el software GeoGebra. Esto con el fin de que los alumnos relacionaran todos los elementos que se nececitaban referentes a las transformaciones isométricas en cada uno de los casos; además se esperaba que establecieran combinaciones al usar estas herramientas. Es decir, podían aplicar para la construcción de un teselado regular más de una herramienta de transformación isométrica.

El *esquema de argumentación analítica* mostrado en la Figura 5.5 ejemplifica el argumento de los alumnos. Aunque no se detalla del por qué *son los únicos polígonos que pueden teselar el plano*, se infiere que los alumnos han reflexionado sobre la construcción del teselado, ya que se presenta que los ángulos en cada vértice forman un ángulo de 360° y que *no dejan ningún espacio*. Esto evidencia la manipulación, observación y reflexión que los alumnos realizaron sobre la construcción de teselados con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. Es necesario mencionar que, aunque en esta situación se hace una reflexión analítica tomando en cuenta el ángulo formado en cada uno de los vértices, esta consideración no se hace en las construcciones anteriores.

Figura 5.5 Argumento de alumnos asociado al esquema de argumentación analítico

Si los polígonos tienen que ser regulares para poder teselar un plano, ¿Por qué podemos hacerlo solamente con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos? Explica lo más que puedas.

porque son los unicos poligonos con los que sus angulos no dejan ningun espacio y forman el plano

Fuente: Elaboración propia.

5.2.2 La configuración cognitiva asociada a los argumentos de una pareja de alumnos

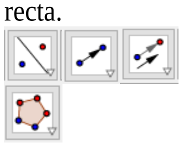
En la Figura 5.6 se describe la configuración cognitiva asociada a una pareja de alumnos, la cual fue elegida por tener el mayor número de argumentos en el desarrollo de actividades. Dicha configuración constituye la relación de objetos matemáticos primarios que emergieron durante el desarrollo de la tercera actividad, la cual tuvo como propósito la construcción de teselados regulares.

Figura 5.6 Configuración cognitiva asociada a una pareja de alumnos

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje informal

Gráfico-software: construcción de teselados usando: Herramienta de polígono regular, traslación y simetría axial y recta.



Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones de construcción de teselados regulares en el GeoGebra aplicando las transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexión o simetría axial) y hexágonos, cuadrados y triángulos equiláteros. Las situaciones requieren explicaciones, justificaciones y argumentos en relación con los procedimientos realizados, así como la validación del teselado mediante la herramienta de arrastre.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:	Emergentes:
Previas: Polígonos regulares Ángulos interiores de un polígono Vector Triángulo equilátero, cuadrado y hexágono Transformaciones isométricas	Construcción de teselados regulares Simetría axial Traslación Ángulos Línea recta

Propiedades/proposiciones:
La suma de la medida de los ángulos en cada vértice del teselado es un ángulo de 360°.

Procedimientos:

Gráfico/geométrico Representación de hexágono regular, cuadrado y triángulos equiláteros. Construcción de teselado regular con polígonos sobrepuestos.		Emergentes (matemáticos): El cálculo sobre la suma de la medida de ángulos a su alrededor forma 360°. La construcción de teselado regular mediante la aplicación de polígonos regulares, simetría axial y traslación. Emergentes (software): Aplicación de herramientas de polígono regular, vector de traslación y traslación geométrica para la construcción del teselado utilizando triángulos equiláteros. Aplicación de herramientas de polígono regular, línea recta, simetría axial para la construcción del teselado utilizando cuadrados. Aplicación de la herramienta de polígono regular únicamente para la unión de hexágonos regulares que conformaron el teselado hexagonal.
		Justifican
		Argumentos: Los alumnos recurrieron al uso de esquema de argumentación empírica, dado a la exploración e implementación de las herramientas de forma empírica, donde la construcción hecha fungió como argumento en la construcción de los teselados regulares. Los alumnos manifestaron un esquema de argumentación analítica al razonar deductivamente cómo ubicar los vectores de traslación sobre la construcción del teselado triangular. El poco manejo de términos de las herramientas de construcción del GeoGebra de los alumnos evidenció esquemas de argumentación simbólica dado que las explicaciones y justificaciones fueron limitadas y poco coherentes.

Fuente: Elaboración propia.

5.3 Resultados sobre la primera y la segunda puesta en escena de las actividades

El objetivo de la primera puesta en escena consistió en un estudio exploratorio el cual nos permitió describir los tipos de argumentos que manifiestan los alumnos de este estudio, esto a través de los esquemas de argumentación (fáctico, analítico, simbólico y empírico) (Flores, 2007) en el contexto de los teselados mediante el uso del software *Geogebra*. Esto ayudó a describir las prácticas argumentativas de un grupo de alumnos de bachillerato, tomando como referencia el análisis a priori de las actividades propuestas. Los resultados de esta primera puesta en escena se muestran en el apartado 5.2.1, donde los argumentos producidos por 16 parejas de alumnos llevaron al planteamiento de conclusiones, de modo genérico, en relación con el proceso de argumentación de los alumnos. Los resultados del apartado 5.2.2 corresponden a la identificación de procesos matemáticos desde la perspectiva del EOS, además, se muestra la descripción de qué procesos matemáticos se evidenciaron al fomentar la práctica argumentativa de los alumnos. Estos resultados corresponden al análisis de las prácticas analizadas de 10 parejas de alumnos correspondiente a una segunda puesta en escena de las actividades. Aquí se consideró la actividad como unidad de análisis, y su vez cada situación problema como una subunidad de análisis (Godino, 2003).

5.3.1 Argumentos asociados a esquemas de argumentación de un grupo de alumnos

La primera unidad de análisis corresponde al conjunto de consignas de la actividad 1, 2 y 2a. El análisis se determinó mediante una entrada a la situación-problema, una salida correspondiente al argumento que proporcionaron los estudiantes y la categorización según el esquema argumentativo correspondiente al argumento proporcionado por los alumnos de este estudio. Una vez identificado el esquema de argumentación se realizó una clasificación del argumento común sobre las consignas analizadas de cada actividad, obteniendo el número total sobre cada tipo de esquema para presentar un análisis general de los resultados.

La Tabla 5.4 representa los esquemas argumentativos (empírico (E), fáctico (F), simbólico (S), analítico (A) y los casos donde se presentaron consignas sin argumentos (S/A) comprendidas en las actividades 1, 2, y 2a. El esquema utilizado con mayor frecuencia por los estudiantes fue el empírico, pudimos notar que este esquema se presentó frecuentemente en las consignas C2, C3 y C5. En estas situaciones se exploró y manipuló el número de lados, ángulo interior y traslación de una figura en los archivos dinámicos proporcionados. Los argumentos evidenciados por los alumnos en esta unidad de análisis se basaron en un razonamiento perceptivo (visual), recurriendo a la descripción observada en el software. Este esquema argumentativo corresponde a lo esperado en la configuración epistémica que se realizó para estas actividades.

Tabla 5.4.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 1, 2 y 2a

Entrada (situación	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16

problema) Actividad 1, 2 y 2a																
C1	E	E	E	S	S	S	F	F	F	F	F	F	E	S	E	E
C2	E	E	E	E	E	E	E	E	A	E	E	E	S	E	E	E
C3	E	S	E	E	E	E	S	E	E	S/A	S/A	E	S	E	E	E
C4	E	S	E	S	E	E	E	A	A	F	F	E	F	A	F	E
C5	E	E	S/A	E	E	S	E	F	E	E	E	E	E	F	E	E
C6	E	E	E	E	E	E	S/A	A	A	E	A	A	E	A	S/A	S
C7	F	F	E	S/A	S/A	E	S/A	E	E	S/A	E	E	E	E	S/A	E

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.5 muestra que los esquemas argumentativos fáctico y analítico se mantienen igual para las 16 parejas de estudiantes. También el argumento analítico es mayormente recurrente para la consigna C2 y C3, ya que a pesar de que en estas consignas se explora la rotación a partir de una construcción, se hace un razonamiento deductivo en términos de los objetos matemáticos involucrados en su construcción. El papel del esquema simbólico no se presenta para muchos casos, ya que en la configuración epistémica de esta actividad no muestra este tipo de esquema. Además, en esta unidad de análisis varias consignas se muestran sin argumento, principalmente donde los estudiantes tenían que construir la traslación geométrica. Para los estudiantes el esquema argumentativo empírico sigue siendo el más utilizado, mismo que corresponde con lo esperado en la configuración epistémica de esta actividad.

Tabla 5.5.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 2b

Entrada (situación problema) Actividad 2b	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
C1	E	E	S/A	E	S/A	E	E	E	E	E	E	F	S	E	F	E
C2	S/A	E	E	E	S/A	E	E	A	F	S/A	S/A	F	S/A	A	A	F
C3	E	E	S/A	S	E	E	E	A	A	E	E	E	S	A	E	E
C4	E	S/A	E	S/A	S/A	S	A	E	A	E	E	F	S	E	E	E
C5	S/A	E	S/A	S/A	F	E	A	F	F	E	A	E	E	E	S/A	F
C6	E	E	A	S/A	S/A	E	S/A	F	S/A	E	S/A	E	E	E	S/A	E

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 5.6 el esquema argumentativo empírico es utilizado en más del 50% de las consignas, la mayoría se enfocaron en la exploración y manipulación del software. En este sentido los estudiantes basaron sus argumentos en una descripción perceptual visual en términos de las herramientas del software. Con respecto al esquema simbólico y fáctico, los estudiantes recurren a estos esquemas utilizando lenguaje matemático poco consistente, donde involucran conceptos incongruentes con respecto a lo hecho en el software y lo descrito en el argumento. Además, utilizan semejanza y simetría para argumentar referente a la distancia entre puntos homólogos sobre el triángulo original y el reflejado. El esquema analítico solo se representa en tres consignas, lo que es consistente con la configuración epistémica donde el interés fue que los estudiantes exploraran, manipularan y conceptualizaran las transformaciones isométricas. Las consignas sin argumentos se presentan principalmente donde se requiere la construcción geométrica en el software.

Tabla 5.6.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 2c

Entrada (situación problema) Actividad 2c	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
C1	F	E	E	S/A	E	E	S	E	E	E	E	E	F	E	F	E
C2	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	A	E	E
C3	E	E	S/A	E	E	S/A	S/A	S/A	E	E	A	E	S	A	E	E
C4	F	S	E	E	F	S	F	S/A	E	E	E	E	S	F	E	E
C5				/A	/A		/A		/A	/A					/A	/A

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.7 el esquema analítico fue pertinente en la mayoría de las consignas de esta actividad, específicamente donde se retoma lo construido y conceptualizado de las actividades previas. El razonamiento deductivo fue necesario para que los estudiantes argumentaran sus construcciones basándose en herramientas del *GeoGebra* y las transformaciones isométricas. Sin embargo, el esquema fue poco utilizado pues solo se muestra en doce consignas. El esquema empírico predominó en la actividad, pues los estudiantes recurrieron a construcciones semejante de un dibujo a lápiz y papel sin utilizar la dinamicidad de las herramientas del software. En este sentido, el papel del software no resultó significativo en términos de la construcción y validez que pueden presentar los estudiantes cuando construyen teselados regulares. El esquema fáctico prevaleció en casi un 50% de la actividad, esto corresponde a lo esperado en el análisis de la configuración epistémica, dado que para algunas consignas los estudiantes realizaron un recuento a manera de explicación o justificación apoyando sus argumentos en traslación, rotación y reflexión. El esquema simbólico fue poco frecuente en el proceso de argumentación, ya que no fue promovido en esta actividad. Esta actividad evidenció un número alto de consignas sin argumentos.

Tabla 5.7.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 3

Entrada (situación problema) Actividad 3	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
C1	S/A	E	E	E	S	S/A	F	S/A	F	A	S/A	S/A	E	E	F	F
C2	E	S	E	E	S	S	A	E	F	A	F	A	E	F	F	E
C3	E	E	E	S	E	E	F	E	S/A	F	E	F	F	S/A	S/A	S/A
C4	S/A	S	E	S	E	E	A	F	F	F	F	S/A	F	F	F	E
C5	E	E	E	S/A	S/A	E	S/A	E	S/A	E	S/A	S/A	E	E	S/A	E
C6	E	E	S/A	S/A	E	E	E	E	E	F	S/A	S/A	E	E	F	E
C7	F	S	E	E	E	F	F	E	F	F	F	E	F	F	F	F
C8	E	E	E	S/A	S/A	E	S/A	E	S/A	E	S/A	S/A	E	E	S/A	S/A
C9	E	E	S	E	E	E	E	E	E	F	F	S/A	A	E	F	S
C10	F	S/A	S/A	E	E	F	F	F	F	F	F	S/A	E	F	F	F
C11	E	E	E	S/A	S/A	E	S/A	E	S/A	E	E	S/A	E	E	S/A	S/A
C12	E	S/A	S	E	E	S/A	E	E	E	F	E	S/A	E	S/A	F	S
C13	S	S/A	E	S	E	F	F	F	F	F	F	S/A	F	F	A	F
C14	A	S/A	E	S	E	S	A	A	S	A	E	S/A	E	A	E	F

Fuente: Elaboración propia.

La necesidad de usar argumentación analítica fue fundamental para el desarrollo de las actividades, así como la pertinencia del uso del software para la construcción y argumentación mediante un razonamiento deductivo. Sin embargo, se identificó que pocos estudiantes recurren a este tipo de esquema mediante un razonamiento deductivo, a pesar de que se promovió en la mayoría de las actividades. Las consignas de la actividad 3 evidencian el esquema analítico mediante argumentos sobre la construcción de teselados regulares y dibujos hechos a lápiz y papel. Por ejemplo, para la consigna C2 se les proporcionó la representación figural de polígonos regulares, para argumentar y justificar cuales de las figuras podrían formar un teselado regular. Los argumentos a esta consigna se vincularon al esquema analítico, dado que los estudiantes tenían argumentar basándose en las transformaciones isométricas para justificar los movimientos de las construcciones y los ángulos interiores formados en cada vértice del teselado. Sin embargo, a pesar de que este esquema se promueve en toda la actividad, solo se identifican tres casos en el que recurren a este tipo de esquema, mientras que el resto, la percepción visual apoya el esquema empírico y fáctico.

La Tabla 5.8 muestra que el esquema más recurrente fue el empírico, pues los procedimientos sobre la construcción de teselados semirregulares mediante el uso del software *GeoGebra* da muestra de ello. Los argumentos describen construcciones empíricas, donde la construcción es el argumento y no un apoyo al proceso de argumentación donde interviene el uso del lenguaje coloquial como herramienta de significación de conocimientos del objeto matemático. El esquema fáctico se muestra con menos del 50% con respecto al empírico, en este caso los argumentos hacen un tipo de recuento de lo que ya se había explorado y explicado, para evidenciar que cualquier teselado semirregular cumple las mismas propiedades al recurrir a las transformaciones isométricas. En esta actividad los esquemas simbólicos y analíticos son poco utilizados en comparación con las demás, a pesar de que se espera que el analítico sea el más frecuente. En el desarrollo de construcción y explicación no se muestran razonamientos deductivos que apoyen la validez de sus argumentos, sin embargo, la generalización de argumentos fue evidente en los pasos que siguieron la para la construcción del teselado semirregular, ya que los argumentos se limitaron con mencionar los conceptos de traslación, rotación y reflexión. En esta actividad también se evidenció un número mayor de consignas sin argumento.

Tabla 5.8.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 4

Entrada (situación problema) Actividad 4	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
C1	E	S	E	S/A	S	E	F	E	S/A	F	F	F	E	E	F	F
C2	E	S	S/A	E	S	S	F	E	E	F	S/A	F	E	S/A	S/A	A
C3	E	E	E	S	S/A	E	A	E	S/A	E	E	E	E	E	S/A	E
C4	E	S	E	S/A	F	E	F	E	S/A	S/A	S/A	S/A	E	F	E	E
C5	E	E	S/A	S/A	E	E	E	E	E	E	S/A	S/A	E	S/A	S/A	A
C6	E	E	E	S/A	E	F	F	F	F	E	S/A	S/A	F	S/A	F	E
C7	A	E	A	S/A	E	E	E	E	S/A	E	S/A	E	E	S/A	S/A	A
C8	A	E	F	S/A	F	F	F	F	S/A	E	S/A	S/A	E	S/A	F	E
C9	E	E	A	S/A	F	E	E	E	S/A	E	S/A	E	E	S/A	S/A	E
C10	E	E	S	S/A	S	F	F	F	S/A	S/A	S/A	S/A	E	S/A	F	F

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.9 el esquema empírico sobresale en un 60% y el fáctico en casi un 30%, estos corresponden con el análisis de la configuración epistémica, ya que mediante el uso de registros semióticos gráficos propuestos tanto en el software como en imágenes visuales sobre teselados semirregulares e irregulares se identifican patrones y transformaciones isométricas. En este sentido, el software dinámico propició que estos esquemas argumentativos predominen en la construcción de un teselado. Mientras que con el esquema analítico no se muestra en ninguna consigna, el esquema simbólico es irrelevante en los argumentos de los estudiantes. Además, este análisis muestra evidencia de pocas consignas sin argumentos.

Tabla 5.9.

Esquemas argumentativos correspondiente a la actividad 5

Entrada (situación	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16

problema) Actividad 5																
C1	E	E	E	E	E	E	E	E	F	E	E	F	F	F	S/A	F
C2	E	E	S	E	E	E	E	E	F	F	F	F	E	F	F	F
C3	E	S	E	E	E	E	E	E	S	F	F	F	F	F	S/A	F
C4	E	S	E	E	S	E	E	E	F	F	F	F	E	F	F	F
C5	E	S	E	E	S	F	E	E	F	F	F	F	F	F	S/A	F
C6	E	E	F	S	S	E	E	S	F	F	F	F	E	F	F	F
C7	E	E	E	E	S	E	F	E	E	F	F	E	E	F	S/A	E
C8	E	E	E	E	E	E	F	E	E	F	F	E	E	F	S/A	E
C9	E	S	S	E	S	E	F	E	E	F	F	E	E	F	E	E
C10	E	E	S	E	E	F	F	S	E	E	E	E	E	E	E	E
C11	E	E	S	E	S	E	E	F	E	E	E	E	E	E	E	F
C12	E	E	E	E	S	E	F	F	E	F	F	F	E	E	E	E
C13	E	S	E	E	E	E	E	E	E	E	E	S/A	E	E	E	E
C14	S/A	E	S	E	E	E	E	F	E	E	E	E	E	E	E	E
C15	E	E	E	E	S	F	F	E	E	E	E	S/A	E	F	F	E
C16	S	E	F	S	E	E	E	E	E	E	E	S/A	E	E	E	E
C17	F	E	E	F	E	E	F	F	E	E	E	E	F	E	E	E

Fuente: Elaboración propia.

Esta tipificación de argumentos por parte de los alumnos de este estudio evidenció el proceso de argumentación de manera genérica, si bien, los esquemas de argumentación ayudaron a clasificar las respuestas de los alumnos, es necesario indagar sobre otros procesos realizan los alumnos de este estudio cuando utilizan el software *GeoGebra*. Por ejemplo, cuando ellos realizan la construcción de teselados, recurren a materializar significados a través de la aplicación de las herramientas del *GeoGebra*. En este sentido, el rediseño es fundamental para una segunda puesta en escena con el fin de identificar algunos procesos matemáticos. En la siguiente sección se presentarán los procesos identificados en los argumentos manifestados por los alumnos de este estudio.

5.3.2 Procesos matemáticos identificados en las prácticas argumentativas

En este apartado se muestra los resultados que corresponden a una segunda implementación de la secuencia de actividades, para esta implementación se tomó en cuenta el análisis a priori correspondiente a la solución experta y la configuración epistémica de cada actividad. Los resultados aquí presentados se desprenden de un análisis que se realizó a través de la clasificación de procesos matemáticos del EOS. Los procesos matemáticos que se identificaron en 10 parejas de alumnos fueron: significación (S), descomposición (D), Enunciación (E), particularización (Pa), personalización (Pe), representación (R), materialización (M), visualización (V), definición (De) e idealización (I). Además, en la tabla se colocó el símbolo de guion (-) para representar que en la situación presentada al alumno no se identificó algún proceso matemático. En las siguientes tablas se muestra los procesos matemáticos identificados en 10 parejas de alumnos de este estudio, correspondiente a la segunda implementación de las actividades.

En la Tabla 5.10 se identificaron diferentes procesos matemáticos, ya que se involucraba el concepto de polígono regular, así que aquí se pudo asociar un proceso de definición, sin embargo, muchos de los alumnos lo definieron como*: polígono regular que tiene lados y ángulos iguales*, sin manifestar de manera ostensiva el concepto de medida. Por lo que, se identificó un proceso de significación (S), donde la mayoría recurrió a dar una interpretación desde igualdad de lados y ángulos. En esta misma actividad, los alumnos describieron objetos matemáticos relacionados con dicha definición, manifestando un proceso de descomposición (D), ya que hicieron énfasis en identificar y describir aquellos elementos como: lados, ángulos, perímetro, área, etc. Por otro lado, los procesos de personalización y particularización son los menos identificados en las respuestas del alumno correspondientes a la actividad 1.

Tabla 5.10.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 1

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 1	Procesos matemáticos									
S1	S	S	S	S, Pe	S	S	S	S	S, Pe	S
S2	D, S	-	S	D	S, D	Pe	S, D	S, D	S, D	S, D
S3	D, S	S, D	S, E, Pe	S, D, E, Pe	S, Pa, Pe	S	S, D	S, R, M	S	S, E, Pa

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.11 da muestra de los procesos matemáticos identificados en las respuestas de los alumnos, misma que corresponde a las situaciones propuestas en la actividad 2. Esta actividad abordó el uso y la manipulación de un applet, que incluía la exploración de diferentes polígonos regulares. De acuerdo con esta tabla, la mayoría de las respuestas de los alumnos se basaron en un proceso de visualización donde el concepto de polígono regular fue relevante para responder a cada situación, ya que las respuestas fueron dadas en términos del uso de las herramientas del *GeoGebra*. Sin embargo, el proceso de significación se evidenció principalmente en las respuestas de las dos últimas situaciones de la actividad 2, ya que sus respuestas presentaron una interpretación del ángulo interior de un polígono regular a partir de la variación del mismo, donde el alumno describió que el ángulo interior de un polígono regular no puede ser 180°, a su vez, recurrían a la representación no ostensiva de la recta, haciendo referencia que este podría ser un ángulo llano y aquí ya no se estaría hablando de un polígono regular.

Tabla 5.11.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 2

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 2	Procesos matemáticos									
S1	S, V	V	V	V	V	V	-	V	V	V
S2	-	V	V	-	V	V	-	-	V	V
S3	S	S	De, S	-	S, V	S, V	-	V	V	De, S, V
S4	De	S	De, S	S	S	S, V	R, S	De	-	De, V

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.12 el proceso de significación (S) y visualización se identificó en la mayoría de las parejas de alumnos referente a la S2 y S3, las cuales se relacionan con el significado de concepto de traslación geométrica a partir de la manipulación de un applet, así como la relación establecida entre el vector de traslación y el polígono trasladado; la mayoría de los alumnos relacionó sus respuestas con la dirección del vector para determinar hacia donde se debiera trasladar el polígono regular y que representaba una distancia entre el polígono original o base y el trasladado. El proceso de materialización fue acentuado cuando los alumnos recurrieron a materializar las construcciones, esto a través del uso de las herramientas específicas que le permitieron generar la traslación de un polígono regular en el software *GeoGebra*.

Tabla 5.12.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 2a

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 2a	Procesos matemáticos									
S1	S, E	-	V	V	V	V	-	V	V	-
S2	S, E	S	S, V	V	S, V	S, V	V	-	S, V	-
S3	Pe, De, S	S	S	De, S	V	S	-	De	S, V	V
S4	M, S	M	M	M	M	M	M	M	M	M

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.13 se presenta el proceso de visualización con mayor frecuencia, esto se debe a que los alumnos tuvieron que manipular y explorar la rotación geometría a través de un applet. Las respuestas asociadas al proceso de visualización se describieron en un lenguaje informal y en términos de las herramientas del software, donde la percepción jugó un papel relevante, por ejemplo, las respuestas comúnmente utilizaban afirmaciones como: giran en un mismo punto, tienen mismo tamaño, ángulos y número de lados, cambia la figura pero no el ángulo, etc., esto referente al comportamiento de la figura rotada en el applet, donde los alumnos tenían que manipular a través de un deslizador. El proceso de materialización en esta actividad también fue asociado a la aplicación de las herramientas específicas del software *GeoGebra*, contrayendo la rotación geométrica de un polígono regular.

Tabla 5.13.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 2b

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 2b	Procesos matemáticos									
S1	S, V	V	-	-	V	V	V	V	V	V
S2	S, V	V	-	V	V	V	V	V	V	V
S3	V, Pa	V	V	V	V	V	S, V	V	V	V
S4	V	V	-	-	V	V	-	V	V	-
S5	-	V	-	V	V	V	-	-	V	Pa
S6	S, V	V	-	V	V	V	-	-	-	V
S7	V	V	V	V	V	V	S, V	V	V	V
S8	S, V	S	S	-	-	S, V	-	De	V	S, V
S9	M	M	S	M	M	M	M	M	M	M

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.14 se muestra los procesos matemáticos asociados a la actividad 2c, el proceso de visualización fue mayormente identificado debido a que los alumnos manipularon un applet, mismo que les permitió responder en términos de lo observado y el uso de las herramientas del *GeoGebra*. El proceso de significación fue recurrente en la situación donde los alumnos tenían que definir la simetría axial o reflexión geométrica, al tratar de describir este concepto los alumnos lo hicieron en lenguaje informal y recurriendo a la idea de analizar la trasformación como un espejo o reflejo con base en una recta, hubo pocos que hicieron referencia al eje de simetría o decir que ambas figuras eran simétricas. Por lo que, aquí se pudo identificar que los alumnos recurrieron a una interpretación de lo que habían observado y manipulado en el applet, así como a la noción de referencia que tenían de reflexión geométrica. En estas respuestas el proceso de materialización fue identificado cuando realizaron la construcción de la simetría axial o reflexión, mediante la aplicación de las herramientas específicas del *GeoGebra*.

Tabla 5.14.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 2c

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 2c	Procesos matemáticos									
S1	S, E	V	V	S, V	V	V	-	S, V	V	-
S2	S	V	-	V	V	V	V	V	V	-
S3	S	V	V	V	V	V	V	-	-	V
S4	-	V	-	V	V	V	-	De, M	S, V	S, V
S5	De, S, Pe	S	-	S	S, V	S, V	S	-	S	S, V
S6	M, R, S	M	S	M	M, R	M, R	M	M	M	M

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.15 los procesos matemáticos mayormente identificado fue el de visualización, materialización y significación. En un primero momento, los alumnos recurren a la materialización para proponer figuras poligonales regulares que utilizarían en la construcción de un teselado regular, por lo que el proceso de idealización está relacionado con el de materialización al proponer de manera escrita y posteriormente mediante un dibujo los polígonos que utilizarían para la construcción de un teselado regular. Las situaciones que involucraron la explicación del proceso de construcción, los alumnos recurrieron a una relación entre el proceso de significación y visualización, ya que, a partir de la aplicación de herramientas del *GeoGebra*, como el de traslación, simetría axial, vectores, ángulos de rotación, etc., los alumnos hicieron explicito la secuencia de pasos que realizaron en la construcción de los teselados regulares. Esto permitió que el significado fuera desarrollado en términos de la usabilidad de las herramientas del *GeoGebra*, recurriendo al concepto de teselado regular.

Tabla 5.15.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 3

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 3	Procesos matemáticos									
S1	Pa, S	S	S	I, S	I	V	I	-	I, Pe	I
S2	Pa, S	M	M	M	M	M	M	M	M	M
S3	R, S, D	De	-	-	S	-	V	-	-	De, V
S4	V	V	-	V	V	V	V	V	V	V
S5	-	V	-	-	S	V	-	-	S, V	S, V
S6	Pa, S	V	De, S	-	-	V	S, V	V	S	V
S7	M	M	M	M	-	M	M	M	M	M
S8	S, V	V	De, S	S, V	-	-	V	De, V	V	S
S9	S	S	S	-	-	R, S	S	-	S, V	S

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.16 muestra que el proceso matemático recurrente fue el de materialización, es decir, aquí los alumnos destacaron en gran medida el proceso de construcción y la mayoría de ellos aplicó herramientas de las trasformaciones isométricas que le permitió la construcción de algún teselado semirregular correspondiente a la actividad 4. Sin embargo, aunque muchos de los alumnos lograron realizar las construcciones manifestando un proceso de visualización, pocos de ellos explicaron correctamente su procedimiento de construcción, ya que la explicación quedaba en términos generales y en un lenguaje informal. De esta manera, el proceso de significación fue presentado parcialmente.

Tabla 5.16.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 4

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 4	Procesos matemáticos									
S1	M	I, M	M	M	M	M	M	-	I	M
S2	S, V	V	-	De, M, Pa, S	-	V	M	-	M, S	S, V
S3	M	M	M	M, R	-	M	M	M	M	M
S4	S, M	M	M	-	-	M	M	M, V	M	M
S5	S	S	S	-	-	R, S	M, R	V	S	S
S6	M	M	M	-	-	M	M	M	M	M
S7	S	S	S	M	-	S	V	S	S	S
S8	M	M	M	-	-	M	-	M	M	M
S9	S	S	S	M	M	S	I	-	S	S

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 5.17 muestra el proceso de visualización con mayor relevancia, aunque en estas situaciones los alumnos no realizan ninguna construcción ellos recurrieron a dicho proceso debido a que realizaron manipulación y exploración de teselados construidos con la finalidad de que ellos conceptualizaran las trasformaciones isométricas a partir de la representación de teselados semirregulares. El proceso de materialización fue evidenciado a través de las representaciones figurales al tratar de explicar de que figura provenía el teselado semirregular propuesto.

Tabla 5.17.

Procesos matemáticos identificados en la actividad 5

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
A 5	Procesos matemáticos									
S1	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
S2	-	V	V	V	R, V	-	V	M, R	V	V
S3	V	V	V	V	-	-	-	R	-	V
S4	De, V	-	-	V	V	-	-	V	V	V
S5	-	-	-	S, V	S	S, V	V	V	-	De, S
S6	S, V	V	V	S, V	-	I, V	-	-	Pe, V	V
S7	M	M, R	M	M	M	M	-	-	M	M
S8	V	V	V	S	-	V	-	V	-	V

S9	V	V	-	M	R, V	I, M, V	V	-	V	S, V
S10	V	V	V	V	-	V	V	-	V	V
S11	M	M	M	M	M	M	M	M	-	M

Fuente: Elaboración propia.

Estos procesos nos permiten conocer cuáles son recurrentes entre los alumnos, sin embargo, el proceso matemático más recurrente fue el de materialización, el cual se relaciona con la dualidad ostensivo – no ostensivo, generalmente no perceptibles. No obstante, son usados en las prácticas a través de sus ostensivos asociados, por ejemplo, símbolos, gráficos, notaciones, etc. (Font y Contreras, 2008). El proceso de materialización está estrechamente relacionado con el proceso de idealización puesto que se puede pasar de un objeto ostensivo a un objeto no ostensivo, y para operativizar estos objetos es necesario hacer uso de representaciones ostensivas, lo que conlleva a un proceso de materialización.

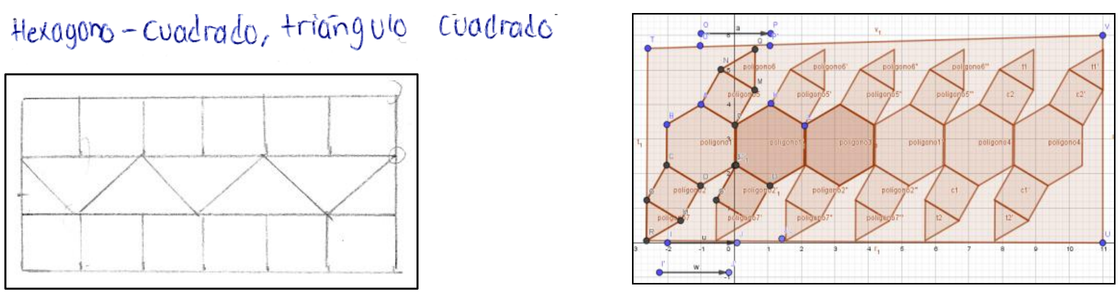
En esta realidad, los alumnos destacan en gran medida el proceso de construcción donde a través del software mediatizan y materializan el pensamiento, es decir, el proceso de materialización sitúa el conocimiento matemático en el campo del artefacto (Radford, 2006). En este estudio resaltamos el proceso de materialización, el cual fue identificado cuando los alumnos propusieron, a lápiz y papel, la combinación de polígonos regulares que utilizarían en la construcción de teselados semirregulares, pero también cuando aplicaron las herramientas del *GeoGebra* para la construcción, por ejemplo, la traslación, la simetría axial, los vectores, los ángulos de rotación, etc. Sin embargo, aunque las herramientas del software se materializaron en la construcción, el proceso de construcción, pocos de los alumnos explicaron correctamente su procedimiento recurriendo a un proceso de visualización a través de un lenguaje informal. Según el EOS, son prácticas visuales o prácticas no visuales, en donde se pone en juego la percepción visual y puede ser solo mental (objetos no ostensivos) o ser objetos perceptibles mediante una representación física (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012).

5.3.3 Ejemplos de procesos matemáticos identificados en la práctica argumentativa

A continuación, se ejemplifica algunos procesos matemáticos de una pareja de alumnos de este estudio, correspondiente a la actividad que involucra la construcción de teselados semirregulares. Los alumnos respondieron las tareas propuestas en las cuales no solo se pedía las construcciones de los teselados sino la justificación de estas mismas construcciones, como parte de su práctica argumentativa, donde tenían que explicitar la secuencia de pasos para la construcción de los teselados. Para identificar los procesos matemáticos en estas prácticas emergentes de los alumnos, se tomó en cuenta un análisis a priori de los mismos.

Las siguientes situaciones ejemplifican algunos procesos involucrados en la justificación y construcción del teselado semirregular, compuesto por triángulos, cuadrados y hexágonos. En la Figura 5.7 se muestra el proceso de materialización, cuya tarea se relacionan con dibujar y construir combinaciones de polígonos regulares para que generen un teselado semirregulares tanto a papel y lápiz como en el software *GeoGebra*. El proceso de materialización se relaciona con el hecho materializar polígonos regulares a través de una representación figural (dibujo) de un teselado semirregular. Así como la representación dinámica, aunque este no representa correctamente un teselado semirregular.

Figura 5.7 Ejemplo del proceso de materialización



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5.8 muestra un proceso de personalización y visualización, el cual corresponde a la tarea de describir el proceso de construcción del teselado semirregular seguido por los alumnos, usando triángulos, cuadrados y hexágonos. El proceso de personalización se relaciona con el significado que pone en uso de las herramientas aplicadas del software, esto a través del desarrollo de un proceso de visualización, es decir, mediante la percepción visual y usando un lenguaje informal son capaces de evidenciar una interpretación de su proceso de construcción del teselado.

Figura 5.8 Ejemplo del proceso de personalización y visualización

- Creamos un cuadrado
- Un vector en uno de sus lados
· Lo multiplicamos con la herramienta de traslación
· Seguimos los mismos pasos con las otras figuras buscando que encajaran perfectamente.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 5.9 muestra un proceso de significación y visualización, donde la tarea consiste en la justificación de un teselado semirregular a través de su definición, donde se involucra la manipulación del software. El proceso de significación se asocia a la definición no ostensiva de un teselado semirregular, misma que los alumnos ponen de manifiesto al decir *acoplar*, además, la percepción visual es puesta en juego en un momento dado, a lo que resulta la evidencia de un proceso de visualización.

Figura 5.9 Ejemplo del proceso de significación y visualización

Serían 360° para que los polígonos se puedan acoplar perfectamente.

Fuente: Elaboración propia.

5.4 Resultados finales sobre la puesta en escena definitiva de las actividades

Dado el objetivo general de esta investigación, el cual se centra en caracterizar los procesos matemáticos cognitivo de los alumnos de este estudio, desde la perspectiva el enfoque ontosemiótico. Esto a través del desarrollo de prácticas matemáticas de cinco alumnos, por lo que en esta sección nos centramos en la descripción detallada del análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Los resultados que aquí se muestran corresponden a la puesta en escena definitiva de las actividades, es importante mencionar la injerencia del uso del software de geometría dinámica en la emergencia y desarrollo de los procesos matemáticos cognitivos.

5.4.1 Análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos de los alumnos

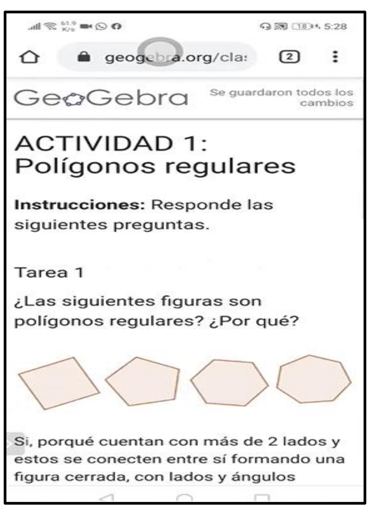
Desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico una misma tarea o situación problema desencadena diversos objetos y procesos matemáticos, y según el contexto se puede priorizar un solo proceso y objeto. Por lo que en este apartado nos interesamos identificar y analizar el conjunto de diversos objetos y procesos en tareas de carácter geométrico, mediante el uso de applets y herramientas específicas del software *GeoGebra*.

El objetivo principal de este apartado es identificar y mostrar los procesos matemáticos cognitivos desarrollados por los alumnos en un ambiente de geometría dinámica. Por lo que el interés es identificar una trayectoria de procesos del EOS, considerando que el proceso matemático se puede ver desde la perspectiva proceso producto. Por tanto, para un análisis más a detalle de las prácticas matemáticas de los alumnos de este estudio, se utiliza la noción de configuración ontosemiótica y los procesos matemáticos del EOS. En particular, la configuración cognitiva resulta muy útil para describir de manera estática la red de objetos matemáticos intervinientes y emergentes, mientras que los procesos matemáticos son herramientas que nos permiten explorar a fondo el funcionamiento dinámico de la configuración cognitiva relacionada con las prácticas movilizadas por los alumnos (Rubio, 2012). Dado que se analizan cinco casos, primeramente, se describe las características relacionadas con la dinámica de trabajo del alumno y el número de sesiones en las que desarrollo la secuencia de actividades. Luego, se describe la práctica matemática realizada en cada una de las sesiones y se muestra la configuración cognitiva del alumno correspondiente a cada actividad realizada y finalmente se muestra un análisis de los procesos matemáticos identificados, tomando en cuenta la mirada de las facetas o dimensiones duales según Godino (2002).

5.4.2 El caso de Pablo

En este caso, el alumno realizó el desarrollo de las actividades en 10 sesiones con una duración de 60 minutos cada una, por cuestiones personales el alumno optó por trabajar las actividades desde su dispositivo móvil (celular), aunque para la construcción de los teselados hizo uso de una computadora (laptop). Lo que, en principio, resultó sencillo el trabajo por el hecho de que la primera actividad no involucraba el uso algún applet en el *GeoGebra*. Por otra parte, al alumno se le explicó la dinámica y se le pidió su autorización para que las sesiones fueran videograbadas. De esta manera, el alumno pararía a responder cada actividad con la idea de que la investigadora podría intervenir para resolver dudas y cuestionar sobre las respuestas manifestadas, aspecto que se le explicitó al alumno. Por otro lado, dado que las actividades se realizaron de manera virtual y sincrónicamente, se le pidió al alumno que accediera a la plataforma de *GeoGebra Classroom* e insertara un código clave que le permitiría acceder a cada actividad, así que por cada actividad se generó un código de acceso.

Figura 5.10 Actividad desarrollada en el dispositivo móvil del alumno



Fuente: Plataforma de *GeoGebra Classroom*.

Prácticas matemáticas de Pablo asociada a la actividad 1

En este caso, el alumno realizó la lectura de las situaciones presentadas y la producción verbal y textual de sus respuestas. En la primera situación el alumno recurre a ideas intuitivas y previas para definir un polígono regular, esto a través de un lenguaje impreciso e informal. Por ejemplo, en dicha situación se afirma que: *los polígonos son regulares porque cuentan con más de dos lados y estos no se muestran de forma extraña o compleja.* Aquí el papel del investigador fue relevante para intervenir, profundizar y ampliar la respuesta. En la siguiente tabla se muestra un extracto del dialogo que se entabló con el alumno con el fin de precisar y profundizar en la respuesta de S1.

Investigador (I) / Alumno (A)
I: ¿A qué te suena que un polígono sea regular? ¿Qué te dice la palabra regular?
A: *qué las figuras tienen una forma estándar*
I: ¿A qué te refieres con forma estándar o como escribiste extrañas o complejas?
A: *que los lados de las figuras sean desiguales*
I: Entonces, ¿Estas figuras qué característica cumplen?
A: *que son congruentes sus lados y sus ángulos*

En este contexto, el alumno tiene noción intuitiva de lo que es un polígono regular; sin embargo, él no hace referencia a la *medida* de los lados y de los ángulos, aunque si menciona el término de *congruencia* por lo que podríamos deducir que la noción de medida se encuentra de manera no ostensiva en los significados del alumno.

En la S2 y S3 el alumno observa detenidamente las figuras y afirma de manera textual *que por cada vértice agregado se agrega un triángulo*, aunque el alumno describe su respuesta de manera ambigua, aquí identifica un patrón o una sucesión de polígonos que cumplen con cierta característica, por lo que el alumno intenta generalizar visualizando otros casos de polígonos e identificando el número de triángulos inscritos, así que para un polígono de n-lados determina la expresión *n-2= cantidad de triángulos con n= lados del polígono*.

Investigador (I) / Alumno (A)
I: Por ejemplo, si observas el pentágono ¿Cuántos triángulos hay?

A: En el pentágono tiene tres vértices, si aumentamos un vértice se aumenta un triángulo más.
I: ¿Cuál es la relación entre el número de lados del polígono y número de triángulos?
A: Se me ocurre que son progresivas
I: ¿Y cómo lo representarías para el polígono de diez lados?
A: Es como una sucesión, tendría ocho triángulos.
I: ¿Y para el polígono de cien lados?
A: A todos les quitas dos, para el de cien lados tendría noventa y ocho lados.
I: ¿Cuál es la relación entre el número de lados del polígono y número de triángulos?
A: Para n lados restar dos, se me ocurre así.

Configuración cognitiva de los objetos matemáticos involucrados en la actividad 1

La Figura 5.11 muestra la red de objetos matemáticos intervinientes y emergentes, lo que constituye una configuración cognitiva de las prácticas matemáticas de Pablo, respecto a la actividad 1. Por lo que se resalta que hasta este momento el alumno recurre principalmente en el uso del *lenguaje* gestual y verbal que lo llevan a plasmar sus ideas intuitivas sobre el concepto de polígono regular. En esta configuración emergen los *conceptos* principales que relaciona los polígonos regulares, así como aquellos que son usados para las respuestas de S1 y S2. Por otro lado, no se identifica propiedad que intervenga o emerja en el desarrollo de prácticas de la actividad 1.

Figura 5.11 Configuración cognitiva de Pablo sobre los objetos matemáticos

<table>
<tr><td rowspan="5">Elementos lingüísticos

Verbal: informal (relacionado con el contexto).

Simbólico: n-2 donde n= número de lados del polígono.

Gestual:</td><td rowspan="5">Expresa y soporta →

← Regulan el uso</td><td colspan="2">Situaciones problema
La justificación de polígonos regulares y su relación de las diagonales formados según sus lados. Determinar la expresión n-2 que calcula el número de diagonales en un polígono regular de n lados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">↓ Motivan   ↑ Resuelven</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición/conceptos</td></tr>
<tr><td>Intervinientes
Polígonos regulares
Lados
Diagonales
Triángulos
Congruencia</td><td>Emergentes
Lados
Figura cerrada
Ángulos congruentes
Triángulos
Polígonos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades/proposiciones</td></tr>
</table>

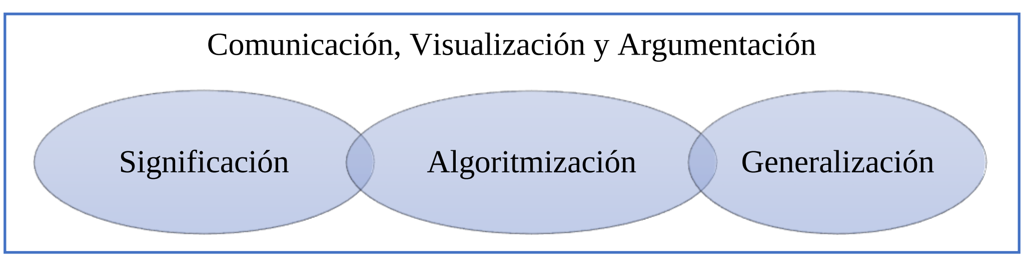
		Procedimientos Emergentes Restar 2, n-2= cantidad de triángulos con n= lados del polígono.
		Justifican
		Argumentos Se deduce la expresión algebraica n-2 para calcular el número de triángulos inscritos en un polígono regular de n- lados a través de la visualización de representaciones poligonales.

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Pablo

En la Figura 5.12 se muestra un esquema que incluye los procesos matemáticos cognitivos identificados durante el desarrollo de la actividad 1, realizada por Pablo. Cabe resaltar que el proceso de comunicación, visualización y argumentación son base en el desarrollo de la práctica matemática manifestada por Pablo. De esta manera se considera que el proceso de comunicación, visualización y argumentación, se consideran procesos transversales en la práctica de Pablo, esto de acuerdo con lo solicitado las situaciones correspondientes a la actividad 1. Estos procesos matemáticos cognitivos fueron analizados desde la perspectiva proceso-producto, es decir se tiene en cuenta una entrada (situación problema) y una salida (respuesta o argumento del alumno).

Figura 5.12 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 1



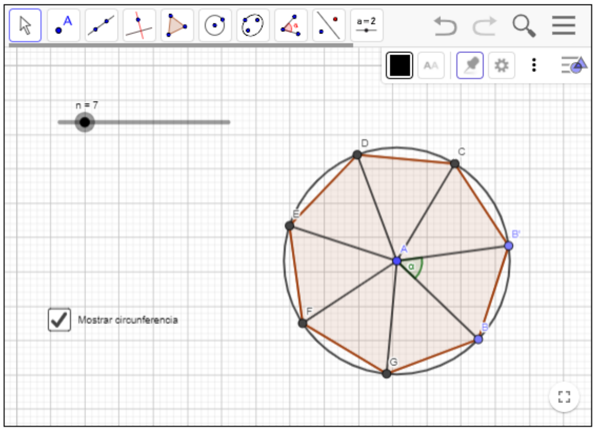
Fuente: Elaboración propia.

Dada la configuración cognitiva, el alumno pasó por un *proceso de comunicación* para comprender e interpretar las situaciones problema, para lo cual tuvo que recurrir a sus conocimientos previos, particularmente intentó expresar la definición de polígono regular (*proceso de significación)* así como el conjunto de conceptos que se relacionan con este (lado, congruencia, ángulo, medida, etc.). Además, el alumno presentó la justificación de S1 y S2 (*proceso de argumentación*), lo que conlleva a representar una expresión algebraica para justificar una regla que le sirve para encontrar el número de diagonales sobre cualquier polígono regular, esto implicó de manera no ostensiva un *proceso* de *algoritmización y visualización*, pues tuvo que relacionar mentalmente el número de lados con número de triángulos formados por sus diagonales, de acuerdo con el dibujo dado. Por tanto, el alumno intenta justificar para otros polígonos que no están representados en la S2, por ejemplo, el polígono de diez y cien lados (*proceso de generalización*).

Prácticas matemáticas de Pablo asociada a la actividad 2

Cabe mencionar que el alumno no cuenta con mayor experiencia respecto al uso del GeoGebra, ya que únicamente lo ha utilizado para graficar funciones en dos dimensiones. El alumno accede a la actividad 2 y lee las instrucciones para comenzar a responder las situaciones que comprenden esta actividad. Aquí el alumno empieza a manipular el applet que incluye diferentes polígonos inscritos sobre una circunferencia, donde a su vez hay triángulos isósceles formados por los vértices del polígono y su ángulo central. Todo esto es visualizado a través del movimiento de un deslizador, por lo que el alumno explora e intenta entender la dinámica de todos los elementos que componen el applet (Figura 5.13).

Figura 5.13 Applet correspondiente a la actividad 2



Fuente: Applet dinámico extraído de la plataforma *GeoGebra.*

En la primera situación el alumno de inicio no identificó cual es el ángulo central en el applet, a lo que se le pide que vuelva a leer la pregunta y posteriormente se genera un dialogo entre el investigador y el alumno, el cual se muestra en el siguiente cuadro. Además, el alumno deduce como calcular el ángulo central para el cuadrado y posteriormente para el hexágono, por lo que expresa de manera general cuando se tiene cualquier polígono regular, como se puede ver en su respuesta de la S1. En la segunda situación el alumno confunde el ángulo central con el ángulo interior de un polígono mostrado en el applet, así que el recurre a manipular el deslizador para representar en el applet un triángulo equilátero, en este caso para el alumno es sencillo visualizar el ángulo interior.

Investigador(I) / Alumno (A)
I: ¿Cómo encuentras la medida del ángulo alfa?
A: Ay, creo que tiene que estar relacionada con la fórmula que se ocupó antes (refiriéndose a la actividad 1)
I: ¿Cuánto mide el ángulo central? Se le pide que ubique un cuadrado e identifique el ángulo central.
A: mide 360°
I: ¿Cómo encuentras el alfa, si tomas en cuenta el ángulo de 360°?
A: Divides 360 entre la cantidad de partes que vas a requerir, en el caso del hexágono son seis triángulos.

En este sentido, cuando el alumno justifica sobre la medida del ángulo interior de un dodecágono, él relaciona el ángulo central, la propiedad de que la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y el hecho de que sobre el polígono regular se forman triángulos isósceles. Por tanto, el alumno fue capaz de calcular la medida del ángulo central, aplicar la propiedad de acuerdo con la configuración epistémica, y de esta manera calculó la medida del ángulo interior del polígono, aquí el alumno se apoyó en ocasiones para hacer uso de la calculadora, por ejemplo, para el cálculo de la medida de los ángulos interiores de algunos polígonos regulares. Posteriormente, generalizó este procedimiento para cualquier polígono regular, aunque este procedimiento es propiamente descriptivo, donde involucró algunos símbolos matemáticos. Finalmente, enuncia y calcula la medida del ángulo interior de algunos polígonos regulares, con el fin de verificar que la formula y procedimiento encontrado efectivamente es para calcular el ángulo interior del cualquier polígono regular.

<u>Configuración cognitiva de objetos matemáticos involucrados en la actividad 2</u>

La siguiente configuración cognitiva (Figura 5.13) corresponde a la red de objetos intervinientes y emergentes que fueron movilizados en la práctica matemática desarrollada por Pablo, cuando involucró el uso de un applet que permitió la visualización de diferentes elementos relacionados con los polígonos regulares. En esta actividad, cuando el alumno hace uso del GeoGebra a través de la manipulación y exploración interviene una propiedad que justifica la emergencia un procedimiento para calcular la medida del ángulo interior de cualquier polígono regular. Todo esto expresando ostensivamente en un lenguaje verbal y textual, principalmente texto y símbolos en forma de ecuación.

Figura 5.14 Configuración cognitiva de Pablo sobre los objetos matemáticos

<table>
<tr><td rowspan="4"><u>Elementos lingüísticos</u>

Verbal informal
Simbólico
Geométrico
Gestual</td><td rowspan="4">Expresa y soporta →

← Regulan el uso</td><td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
Manipulación de un applet en GeoGebra para calcular el ángulo central de cualquier polígono regular, así como calcular la medida del ángulo interior de diferentes polígonos regulares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Motivan ↓   Resuelven ↑</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Definición/conceptos</u></td></tr>
<tr><td><u>Intervinientes</u>
Triángulos
Polígono regular</td><td><u>Emergentes</u>
Triángulos
Polígono</td></tr>
</table>

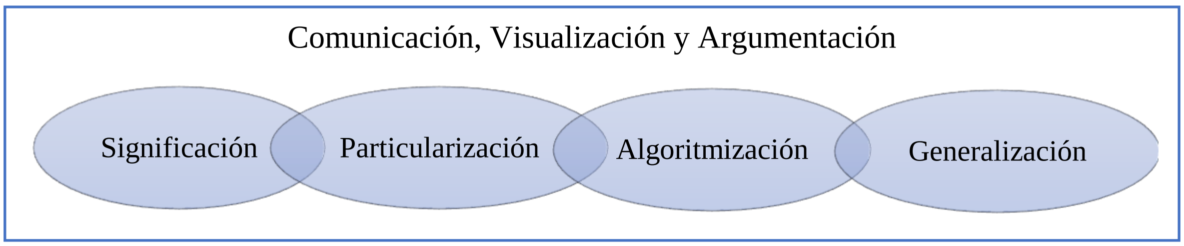
<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="5"></td><td>Congruencia
Ángulo central
Ángulo interior</td><td>Lados
Ángulos internos
Triángulo isósceles
Congruencia
Variable</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
<u>Intervinientes</u>
La medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.
<u>Emergentes</u>
La medida del ángulo central BAB' es el cociente entre 360° y el número de lados, $\frac{360}{n}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Se identifica y calcula la medida del ángulo central 360/n para posteriormente aplicarlo para calcular la medida del ángulo interior de cualquier polígono regular. Es decir, el alumno realiza lo siguiente: 360/n= alfa, 180-alfa=ángulo del triángulo isósceles/2 = ángulos del triángulo isósceles = sumados ambos ángulos congruentes del triángulo isósceles obtienes el ángulo interior del polígono.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifican</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Argumentos</u>
Se justifican los procedimientos aplicando la medida del ángulo central BAB' es el cociente entre 360° y el número de lados, $\frac{360}{n}$, y la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Pablo

Los procesos matemáticos emergentes en un primer momento del desarrollo de la actividad fueron el de *comunicación y visualización*, ya que el alumno tuvo que interpretar y comprender la tarea como identificar conceptos relacionados con la manipulación del applet (ángulo central, ángulo interior, triángulo isósceles, congruencia, etc.), estos procesos fueron recurrentes de manera transversal durante el desarrollo de la práctica del alumno. El proceso de *significación* fue puesto en juego cuando se dedujo la fórmula que permitió calcular el ángulo interior de cualquier polígono regular, ya que el alumno tuvo que establecer una relación de los significados de triángulo isósceles, la propiedad de la suma de ángulos interiores de cualquier triángulo y el ángulo central. Aquí es importante mencionar que, el proceso de *particularización* fue relevante cuando manipulaba el deslizador e identificar un ángulo central o interior de un cierto polígono en particular, aunque esto fuera solo para nombrarlo o visualizarlo. Además, el proceso de *algoritmización* y *generalización* se identificó para el cálculo del ángulo interior de cualquier polígono regular. El proceso de a*rgumentación* se identificó al aplicar la propiedad para justificar la fórmula que sirvió para encontrar el ángulo interior de cualquier polígono regular, así como en los diálogos que establecidos que a su vez ayudaron a indagar y profundizar en las respuestas del alumno.

Figura 5.15 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

<u>Prácticas matemáticas de Pablo asociada a la actividad 3</u>

Es importante mencionar que esta actividad se dividió en cinco apartados, lo que constituyó cinco actividades que se centraron en las traslaciones isométricas y los objetos matemáticos relacionados con estas, por ejemplo, (vector, ángulo de rotación, eje de rotación, mediatriz, vértice, recta, etc.).

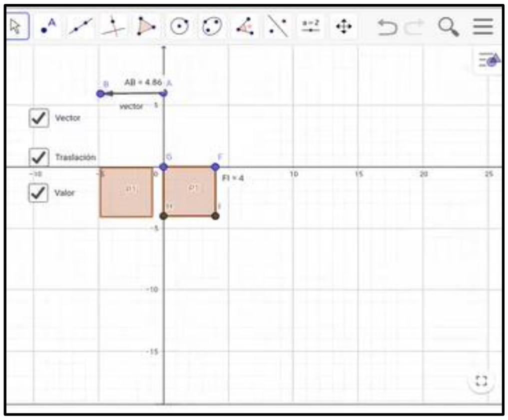
<u>Sobre la traslación</u>

Respecto a la primera parte de la actividad 3, el alumno lee las instrucciones y procede a comprender las situaciones que involucran la manipulación y exploración del applet. En la S1 el alumno verifica y refiere que el cuadrado trasladado y el original están en un mismo rango, a lo que expresa que el vector de traslación debe ser cuatro para que el cuadrado trasladado comparta un lado común con el cuadrado original, aunque el alumno no refiere a la noción de medida.

Figura 5.16 Manipulación y exploración del applet por parte del alumno

Instrucciones:

1. Manipula el applet **TRASLACIÓN** y activa la casilla vector y traslación.
2. Activa la casilla valor y mueve el punto final B del vector AB de tal manera que $P1'$ (cuadrado trasladado) tenga un lado común con P1 (cuadrado base).



Fuente: Applet dinámico extraído de la plataforma del GeoGebra.

El alumno describe su respuesta basándose en lo que observa en el applet, por ejemplo, en la S2 el alumno describe que los polígonos (cuadrados) se sobreponen en dos unidades y de manera ostensiva hace referencia al plano cartesiano, aunque no describa exactamente en qué puntos se sobreponen los polígonos, ya que esta fue descrita de manera verbal y textual. Dado que el applet involucra la traslación de un cuadrado, respecto a la S3, S4 y S5 el alumno realiza manipulación y exploración de acuerdo con lo que se le pide en cada situación, donde la principal acción que realiza es leer la pregunta, manipular y visualizar en el applet para explicar en términos del uso y elementos observados, esto con el fin de que determine la relación que existe entre el vector de traslación y el cuadrado trasladado. Por lo que, en la S6 el alumno indica que *el valor del vector AB indica la distancia a la que se encuentra el lado GH' (un lado que él ha llamado del cuadrado trasladado) del cuadrado P1'.*

Respecto a la segunda parte de la actividad 3 que refiere a la traslación geométrica, el alumno lee las instrucciones y manipula el applet para responder cada una de las situaciones. En S1 resalta que *el vector representa una distancia y dirección, lo que llevaría a mover el rectángulo en la dirección que quiera*, podemos deducir que el alumno aplica un proceso de visualización y de significación de los conceptos que ha venido utilizando. Aquí el alumno hace énfasis (en voz alta) en que el vector nos solo representa distancia, sino que también una dirección, aspecto que no había considerado en la actividad anterior. Dado que la situación cuestiona dónde se ubicaría el vector, el investigador entabla un dialogo al respecto.

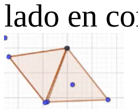
Investigador (I) / Alumno (A)
I: ¿Dónde ubicarías el vector de traslación? A: En cada vértice del rectángulo, por ejemplo, si lo quiero mover para abajo lo ubicaría en el vértice A, si lo quiero mover a la izquierda en el vértice C y así.

En la segunda situación, el alumno indica que los vectores de traslación que generan el teselado rectangular los ubicaría sobre el triángulo inicial, aunque para nombrar el vector se refiere a diagonales, aquí hay un conflicto semiótico, ya que el alumno refiere al vector como diagonal, cuando hace referencia a que es una manera en cómo se trazarían. En la S3 el alumno recurre a sus conocimientos previos para decir que el rectángulo tiene ángulos de medida de 90°, lo que utiliza para justificar que *la suma de la medida de ángulos en cada vértice es de 360°*. Finalmente, en la S4, el alumno institucionaliza y personaliza una definición de acuerdo con lo que ha manipulado y concebido de la práctica realizada, pues define la traslación geométrica como:

Desplazar figuras geométricas idénticas a partir de una figura base por medio de vectores que representarían su dirección y desplazamiento.

<u>*Sobre la rotación*</u>

En relación con la tercera parte de la actividad 3, la cual refiere a la rotación geométrica. El alumno lee las instrucciones, manipula y explora el applet, como acción principal para responder a todas las situaciones propuestas en esta actividad. El applet incluye deslizadores que representan la variación de ángulos de rotación de un mosaico formado por cuadrados. En la S2 el alumno explicita *que los vértices en el cuadrado base determinan la rotación con el valor del ángulo que tenga*, en vez de explicitar que el vértice viene a ser el centro de rotación, según el ángulo en el deslizador para cada cuadrado rotado. Respecto a la S3 y S4 el alumno refiere a el ángulo que se ha rotado en el mosaico, por ejemplo, cuando el *ángulo alfa 180° y ángulo beta 90° con centro el vértice C los cuadrados P2 y $P2_1$ se mueven para quedar a la derecha.* En S5 y S6 el alumno identifica que, para formar un mosaico en cada vértice debe haber un ángulo de 360° justificando que para el caso de los cuadrados de suman los ángulos interiores, el cual es 90°. El alumno visualiza y experimenta en el GeoGebra que para un mosaico formado por triángulos equiláteros tendría que sumar ángulos de 60°, por lo que al verificar platea su respuesta afirmando que los vértices tendrían que ser los centros de rotación y el ángulo para rotar seria de 60°. A continuación, se muestra una conversación que refiere a lo anterior.

Investigador (I) / Alumno (A)
I: Acuérdate qué se te está preguntando por un triángulo equilátero ¿qué quiere decir que sea equilátero?
A: Que sus lados son iguales (el alumno dibuja un triángulo equilátero en el GeoGebra)
I: Si quisieras rotar el triángulo en contra de las manecillas del reloj ¿qué ángulo tendrías que rotar?
A:180°
I: Recuerda que el triángulo rotado debe quedar justo al lado de ese triángulo que creaste
A: (el alumno ubica el triángulo justo sobre un lado de otro triángulo, compartiendo un lado en común)

I: ¿Cuánto debe medir el ángulo de rotación?
A: mmmmmm…
I: ¿Cuánto miden sus ángulos interiores?
A: 60°
I: Si rotas otro triángulo ¿Cuántos grados lo tienes que rotar y quede justo al lado de otro triángulo?
A: desde el mismo vértice otros 60°.

Cuando se le pregunta al alumno por un mosaico formado por hexágonos usa el mismo razonamiento y concluye que únicamente se tendría que cambiar el ángulo de rotación. Sin embargo, afirma que la medida del ángulo interior de un pentágono es 120°, a lo que recurre a trazar un pentágono y medir su ángulo interior, cuando observa que no es cierto afirma que el hexágono tiene ángulo interior de 120° porque son dos triángulos unidos de 60°. Por lo tanto, la herramienta del GeoGebra viene hacer un medio por el cual el alumno verifica sus conjeturas. Finalmente, el alumno describe su significado respecto a la rotación geométrica como:

> *Mover una figura a partir de un vértice, y la ubicación será determinada por el ángulo que en que se haya rotado*.

Sobre la reflexión o simetría axial

En relación con la cuarta y quinta parte de la actividad 3, la cual refiere a la reflexión o simetría axial. En esta última parte se incluye un applet que incluye la reflexión de un triángulo, donde no se explicita el eje de simetría. De acuerdo con las instrucciones, el alumno se le pide trazar el eje de simetría, el cual viene a ser la mediatriz de los segmentos trazados que unen los vértices del triángulo base y su transformado. Posteriormente el alumno responde las situaciones, en la S1 y la S2 el alumno conjetura y justifica que la recta representa la mediatriz porque pasa por los puntos medios de los segmentos trazados entre los triángulos. Además, afirma que el eje de simetría o mediatriz es perpendicular a los segmentos ya que forma un ángulo recto, aunque esto no es verificado o justificado.

En la S3 el alumno a simple vista observa que la orientación no cambia si mueve un vértice en particular del triángulo base u original; sin embargo, después de realizar más movimientos en otro vértice el alumno cambia la respuesta respecto a esta situación, afirmando que la *orientación puede cambiar a un lado opuesto al que se encontraba inicialmente.* Finalmente, a través de las manipulaciones de los vértices y la visualización del comportamiento dinámico de la simetría axial, el alumno determina que la distancia de cualquier punto a la recta es la misma, ya que *son figuras espejo (son congruentes entre sí, pero reflejadas en direcciones opuestas), se encuentran a la misma distancia y siempre mantendrán los mismos lados y ángulos con respecto a la otra, si mueves el vértice E el vértice E' se moverá igual.* Esta idea lo lleva a formular un significado referente a la simetría axial o reflexión geométrica, de la siguiente manera:

> *Un espejismo de la figura, refiriéndome a la figura trazada inicialmente reflejada de forma igual en otra parte del plano.*

Los procesos matemáticos cognitivos en la práctica argumentativa de Pablo

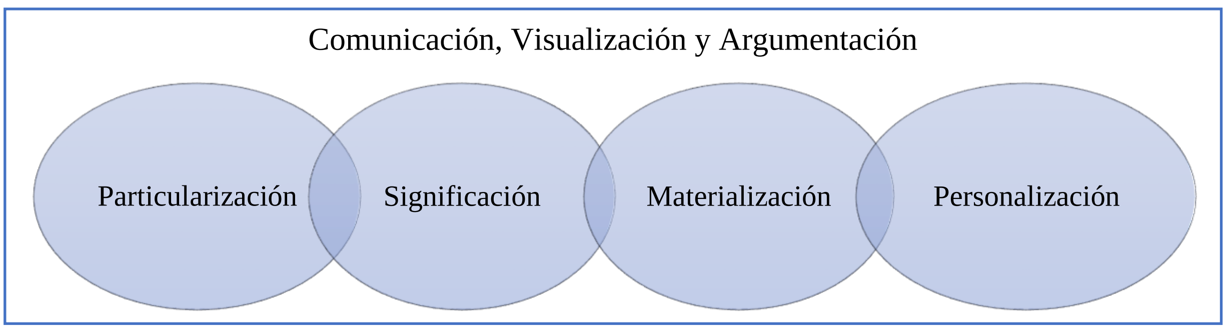
El desarrollo de la actividad 3 dio apertura a profundizar sobre el uso de ciertas herramientas del Geogebra relacionadas con las transformaciones isométricas, lo que permitió al alumno (Pablo) movilizar significados a través de la manipulación y la exploración de los applets. En un primer momento el alumno pone de manifiesto el *proceso de comunicación* cuando lee y comprende las instrucciones para establecer ciertas acciones de manipulación en el software GeoGebra. Asimismo, el alumno manifiesta la recurrencia del *proceso de visualización* cuando interpreta y relaciona los elementos manipulados en el applet, por ejemplo, en la traslación identifica la relación entre el vector de traslación y el objeto trasladado, y como este vector puede ser ubicado para que forme un teselado, aunque el alumno no se percate de ello.

En el caso de la rotación, establece un centro de rotación y un ángulo para rotar diferentes polígonos regulares, como el triángulo equilátero y hexágono, aquí visualiza los posibles ángulos a rotar. Mientras que en la reflexión analiza y visualiza un escenario sobre qué objeto geométrico podría ser un eje de simetría que le permita generar un teselado. Entonces, podemos notar que el proceso de visualización juega un rol esencial para la movilización de significados que intervienen para conceptualizar de manera ostensiva las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial). Todo lo anterior es comunicado por el alumno a través de un lenguaje verbal, simbólico y textual, donde el *proceso de personalización* es recurrente al momento de definir las isometrías en el plano, ya que desde su propia experiencia y significados (*proceso de significación*) puestos en juego el alumno propone el concepto referente a la traslación, rotación y simetría axial, aunque estos no son matemáticamente correctos. Es importa mencionar que durante el desarrollo de la actividad el alumno recurre a un proceso de metacognitivo, puesto que toma en cuenta las experiencias realizadas respecto a la manipulación del applet, lo que lo lleva a valorar la forma de expresar las respuestas a cada situación.

También hay un *proceso de argumentación* dado que en la mayoría de las situaciones el alumno tiene que conjeturar y justificar sus respuestas, donde las herramientas del GeoGebra son principalmente para validar y explicar en términos del uso que se les da. Por ejemplo, cuando el alumno afirmó que el ángulo interior de un pentágono era 120°, él recurrió a dibujar un dicho polígono y verificó midiendo el ángulo interior con la herramienta para medir ángulo. Lo anterior lo llevo a recurrir a un *proceso de materialización* donde hizo ostensivo una representación figural. Finalmente, el *proceso de particularización* pues en el caso de la rotación para ciertos ángulos identificados, el alumno es capaz de relacionar donde se ubicaría el polígono.

Por tanto, la Figura 5.17 muestra el conjunto de procesos que fueron movilizados por el alumno en el desarrollo de la actividad 3, donde se considera que el proceso de visualización, comunicación y argumentación jugaron un papel transversal en el desarrollo de la practica matemática manifestada en esta actividad.

Figura 5.17 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 3



Fuente: Elaboración propia.

Configuración cognitiva de Pablo sobre la práctica matemática de la actividad 3

Los objetos matemáticos principales que pone en juego el alumno en esta actividad están relacionados con las transformaciones isométricas, se resalta un lenguaje verbal, gráfico, software- geométrico y simbólico que el alumno establece tanto con el investigador en términos del uso del software, por ejemplo al describir el significado del alumno referente a la traslación geométrica (*Desplazar figuras geométricas idénticas a partir de una figura base por medio de vectores que representarían su dirección y desplazamiento).* Se considera que el tipo de situaciones motiva al alumno a involucrar diferentes objetos matemáticos que previamente ha estudiado a lo largo de su educación matemática.

Figura 5.18 configuración cognitiva de Pablo sobre los objetos matemáticos

<table>
<tr>
<td rowspan="8"><u>Elementos lingüísticos</u>
Verbal y Gestual: lenguaje relacionado con el contexto.

Gráfico - *software*: el uso de deslizadores en el applet.

Gráfico/geométrico: Representación del vector, ángulo, eje de simetría, polígono, etc. en el applet del GeoGebra.

simbólico: por ejemplo, lado FI, vector $\overrightarrow{AB}$ y cuadrados P1 y P1′.</td>
<td rowspan="8">Expresa y soporta →

← Regulan el uso</td>
<td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
Conceptualización de las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) a través de la manipulación y exploración de applets.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">↓ Motivan ↑ Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Definición/conceptos</u></td>
</tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Vector
Ángulo interior
Vértice
Triángulo equilátero
Congruencia
Hexágono
Ángulo recto</td>
<td><u>Emergentes</u>
Traslación
Rotación
simetría axial
Mediatriz
Eje de simetría</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
La medida de la suma de los ángulos de cada vértice es 360°
La medida de los ángulos interiores de los triángulos equiláteros es congruente.
La mediatriz pasa por los puntos medios de los segmentos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Determinar medida de la suma de los ángulos interiores del mosaico rectangular, el cual es 360°.
Determinar el número de vectores necesarios para construir el mosaico rectangular.
Identifica que para aplicar rotación se requiere un ángulo y un centro de rotación.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">↑ Justifican</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Argumentos</u>
La argumentación se sitúa en la justificación del comportamiento de los objetos geométricos cuando se aplica cierta manipulación o exploración en el applet. Según el comportamiento, el alumno desprende una explicación de acuerdo con el uso de las herramientas del GeoGebra y su comportamiento en este, donde la visualización juega un rol esencial.</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

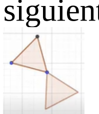
<u>Prácticas matemáticas de Pablo asociada a la actividad 4</u>

La actividad 4 se centró en la construcción de teselados regulares formados polígonos regulares a través de la aplicación de las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial o reflexión), para ello se le indicaron instrucciones referentes al uso de las herramientas del *GeoGebra* a utilizar. Para la construcción del teselado usando hexágonos el alumno se le indicó que tenía que aplicar solo la herramienta de traslación. Para la construcción del teselado usando triángulos y cuadrados el alumno tenía que aplicar rotación y reflexión geométrica respectivamente.

En este caso, el alumno comienza con la construcción del teselado regular usando triángulos y aplicando rotación geométrica. En primer lugar, el alumno realiza una exploración de las herramientas que necesita para aplicar rotación, procede a ubicar un polígono regular y posteriormente aplica rotación seleccionando un punto del triángulo en uno de los vértices y un ángulo de 45°, en este momento el alumno se percata que la figura no se rotó. Así que se le indica que tiene que seleccionar toda la figura y aplicar la rotación y el ángulo a rotar. El alumno procede a la reproducción del teselado aplicando, a manera de prueba y error, distintos ángulos de rotación, esto con el fin de visualizar el comportamiento de los polígonos y sí estos se rotaban a manera de que se cumpliera con la definición del teselado regular, es decir:

Un teselado regular en el plano se construye con regionales poligonales regulares congruentes tal que no se superponen ni dejan regiones sin recubrir.

Después de varios intentos, el alumno desistió al no ubicar quién sería su centro de rotación y sin visualizar hacía que sentido debiera rotar el triángulo general el teselado regular, a lo que se le cuestiona lo siguiente:

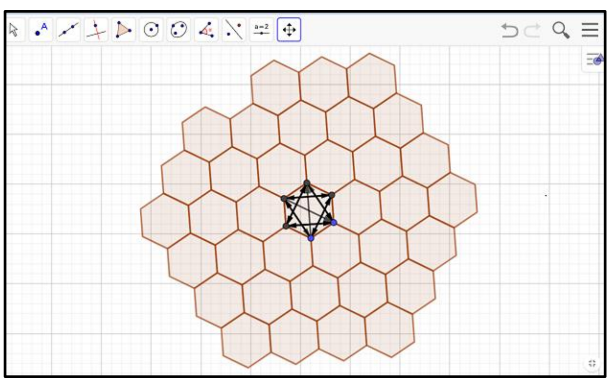
Invesigador (I) / Alumno (A)
I: ¿Hacia qué sentido quieres rotar y qué ángulo? El alumno no responde, aunque sigue aplicando la herramienta de rotación, teniendo lo siguiente:  A: Aquí apliqué el ángulo de 60° y en sentido horario.

El alumno identifica que cualquiera de los dos triángulos puede ser rotados.

<u>La construcción de los teselados regulares</u>

En la construcción de los teselados, el alumno utilizó la computadora debido a que en el teléfono móvil le pareció difícil aplicar las herramientas debido a era más complicado aplicar las herramientas del GeoGebra. De esta manera, el alumno procedió a realizar la construcción del teselado regular aplicando traslación y usando hexágonos regulares. Inicialmente ubicó un hexágono regular y procedió a ubicar vectores, aunque estos no fueron ubicados sobre el hexágono base, lo que conlleva a que los hexágonos trasladados formen el teselado regular. Después de poner en práctica varios intentos sobre la ubicación de vectores fuera del hexágono base, el alumno logra comprender por qué los vectores tendrían que estar sobre el hexágono base. Esto a través de la validación al aplicar la herramienta de *arrastre*, el cual le permite validar si el teselado está correctamente construido. Por tanto, el alumno logra materializar y representar el teselado regular formado por hexágonos.

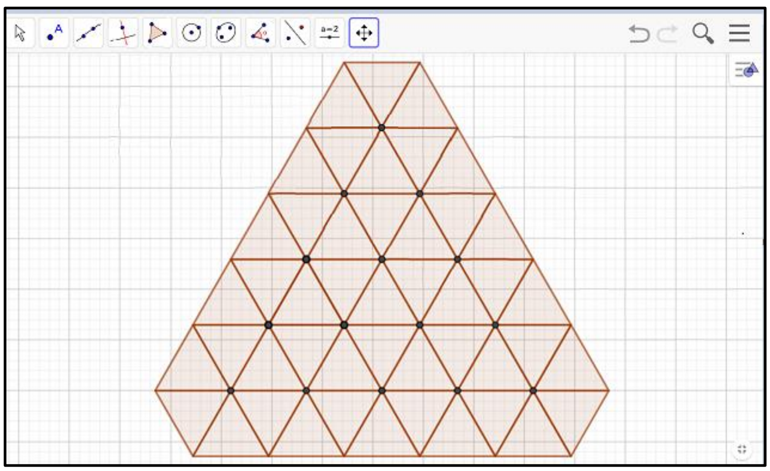
Figura 5.19 Construcción del teselado regular aplicando traslación geométrica



Fuente: Imagen extraída de la plataforma de *GeoGebra Classroom*.

En la construcción del teselado regular formado por triángulos equiláteros y aplicando rotación, el alumno ubicó un centro de rotación, el ángulo a rotar y el sentido al que debía rotar el polígono. Un aspecto importante fue que el alumno percibió que los ángulos a rotar para el triángulo regular debían ser múltiplos de 60, así que para los siguientes intentos aplicó ángulos de rotación de 120°, 180°, 240°, 300° y 360°. Además, cuando el alumno observaba que se sobreponen los triángulos, significaba que ese ángulo no era el correcto, así que, al observar y analizar el comportamiento de la construcción, realiza intentos a prueba y error para identificar el ángulo conveniente que le permite rotar el triángulo en la posición requerida. Por tanto, la visualización en esta situación es primordial para la construcción del teselado, pues la validación a través de la prueba de *arrastre* permite la apertura de significados visuales y cognitivos, logrando así el teselado regular correctamente construido.

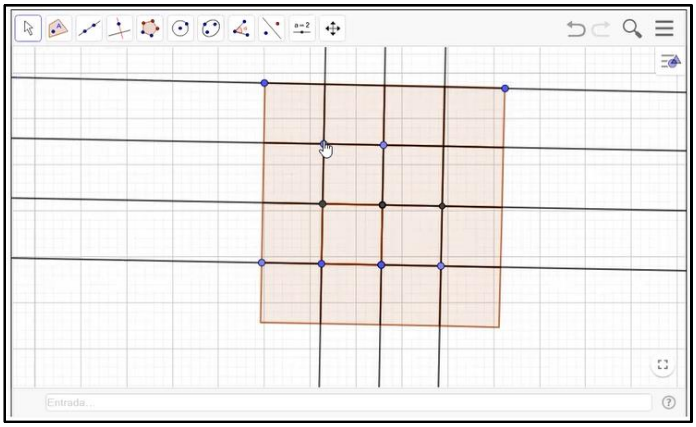
Figura 5.20 Construcción del teselado regular aplicando rotación geométrica



Fuente: Imagen extraída de la plataforma de *GeoGebra Classroom*.

Por otra parte, para la construcción del teselado regular formado por cuadrados implicó la aplicación de la herramienta de simetría axial, por lo que el alumno ubica cuatro rectas que considera como ejes de simetría. Posteriormente, el alumno recurre a ubicar puntos con la herramienta de punto en objeto, justificando que hace uso de esta herramienta porque la de intersección no lo deja poner punto de intersección para ubicar las rectas que está considerando como eje de simetría. Asimismo, el alumno sigue colocando puntos en los vértices con el fin de ir ubicando más rectas para utilizarlos como eje de simetría, hasta obtener una construcción de la siguiente manera.

Figura 5.21 Construcción del teselado regular aplicando rotación geométrica



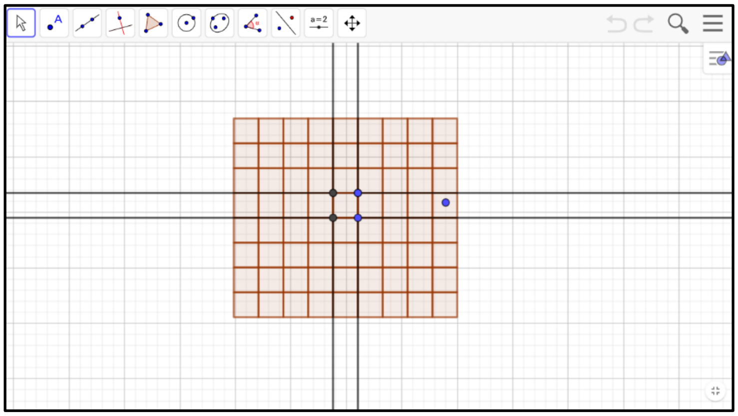
Fuente: Imagen extraída de la plataforma de *GeoGebra Classroom*.

Hasta este punto, el alumno ha ubicado puntos que no necesariamente se encuentran en los vértices de los cuadrados, así que cuando se le pide que aplique la herramienta de arrastre para visualizar si la construcción es correcta y si cumple con la definición de teselado regular. Al aplicar dicha herramienta (arrastre) el alumno observa que se deforma o se deshace la construcción, así que vuelve a empezar con la construcción por iniciativa propia.

Investigador (I) /Alumno (A)
I: ¿Qué rectas de las que tienes si están fijas o ancladas que te permitan generar el teselado? A: Las primeras cuatro porque esas no se mueven I: Entonces ¿esas rectas te sirven para ampliar el teselado? A: Sí (el alumno deshace toda la construcción y procede a iniciar el teselado)

Cabe resaltar que el alumno genera la construcción utilizando las cuatro rectas, que representan el eje de simetría, sin embargo, él lo hace a prueba y error, ya que en un primer momento no se percata que ejes sirven para reflejar los cuadrados que se ubican hacia la derecha o izquierda, hasta que esto lo repite varias veces logra identificar y comprender que objeto es reflejado según el eje de simetría.

Figura 5.22 Construcción del teselado regular aplicando rotación geométrica



Fuente: Imagen extraída de la plataforma de *GeoGebra Classroom*.

<u>Configuración cognitiva de Pablo sobre la práctica matemática de la actividad 4</u>

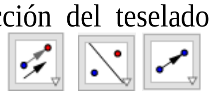
La configuración cognitiva asociada a la actividad 4 muestra la relación de objetos matemáticos, los cuales están entorno a la construcción de teselados regulares. De donde se rescata la propiedad de que la suma de los ángulos formado en cada vértice debe ser de 360° en la construcción de los teselados, así como al aplicar la herramienta de arrastre permite validar tal construcción.

Figura 5.23 configuración cognitiva de Pablo sobre los objetos matemáticos

<u>Elementos lingüísticos:</u>

Verbal: lenguaje común, gestual.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.



Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares.

Expresa y soporta

Se abordan *<u>situaciones</u>* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado regular utilizando hexágonos, cuadrados y triángulos. Las situaciones involucran la justificación y argumentación del procedimiento de construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

<u>Definiciones/conceptos:</u>
<u>Previas:</u>
Traslación
Rotación
Simetría axial
Vértice
Ángulo de rotación
Vectores
Ángulo interior de un polígono

<u>Emergentes:</u>
Conceptualización de la traslación, rotación y simetría axial mediante la construcción de un teselado regular aplicando herramientas del GeoGebra.

Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Regulan el uso

Propiedades/proposiciones:
La medida del ángulo de 360° forma una circunferencia completa.
La medida de los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) den como resultado 360º creando una circunferencia con un centro que sería el vértice, y que la medida de los ángulos interiores del polígono sean múltiplos de 360º.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Se identifica los objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).
Emergentes (matemáticos):
Para completar el teselado se necesitan 6 triángulos y cada uno aporta 60º para formar el teselado, creando circunferencias de 360º, lo mismo aplica para los hexágonos con ángulos de 120º se necesitan 3 hexágonos para completar un teselado que crea una circunferencia de 360º.
Previos (software):
Se identifican los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.
Emergentes (software):
Aplicación de las transformaciones isometrías (traslación, rotación o reflexión),

Justifican

Argumentos:
En las distintas construcciones del teselado regular, se justifica la construcción a partir de la medida de la suma de ángulos interiores en cada vértice debe de 360°.
Se valida la construcción de acuerdo con la aplicación de la herramienta de arrastre y se describe el proceso de construcción en termino de los usos que se hace de las herramientas del GeoGebra.

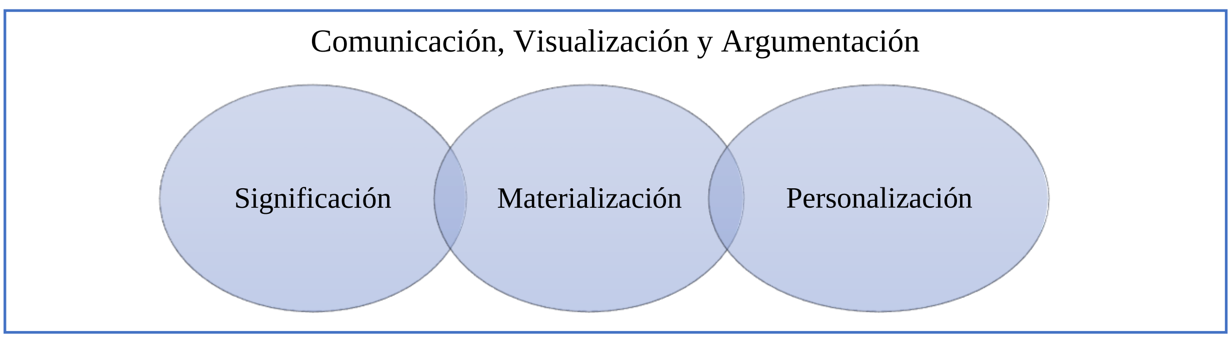
Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos en la práctica argumentativa de Pablo

Durante el desarrollo de la actividad 4, el alumno movilizó con mayor frecuencia el *proceso de materialización*, ya que al aplicar las herramientas del software GeoGebra representan para el alumno significados que conlleva a materializar su pensamiento a través del uso y la explicación que manifestó, aunque este haya sido en términos informales, por ejemplo cuando el alumno afirma lo siguiente: *los vectores mínimos necesarios para unir los* *vértices, después con la herramienta de traslación tuve que seleccionar la figura que quería trasladar y el vector que ocuparía para mover la figura (la figura era cualquier copia del polígono inicial) en esa dirección.*

Respecto al proceso de *significación y personalización*, el alumno es capaz de referenciar al concepto de teselado regular y justificar que en cada uno forman circunferencias completas, es decir que en cada vértice que comparten los polígonos que conforman el teselado, se forma un ángulo de 360°. El alumno valida la construcción a través de la aplicación de la herramienta de arrastre, donde pone en juego el proceso de visualización para determinar que efectivamente la construcción es un teselado regular, lo que lo lleva a deducir que: *los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) den como resultado 360º creando una circunferencia con un centro que sería el vértice, y que los ángulos del polígono sean múltiplos de 360º.*

Figura 5.24 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 4

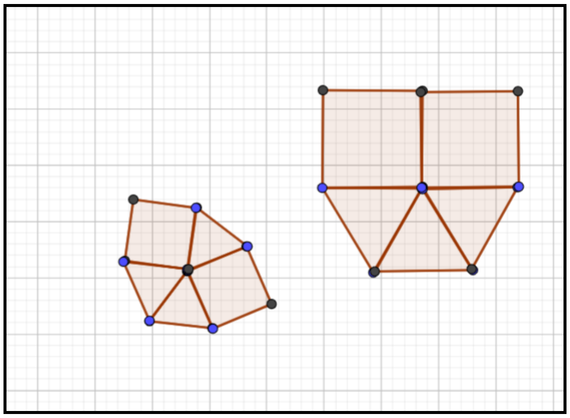


Fuente: Elaboración propia.

<u>*Prácticas matemáticas de Pablo asociada a la actividad 5*</u>

El centro de la actividad 5 fue la construcción de teselados semirregulares, aquí el alumno pone en juego cierta experiencia ganada durante la construcción de los teselados regulares. Así en la primera situación, el alumno lleva a colación que es posible construir un teselado semirregular formado por triángulos y cuadrados, ya que explica que la medida de sus ángulos interiores son múltiplos de 360°, lo que conlleva a que los polígonos pueden formar un teselado semirregular. Posteriormente el alumno propone dos combinaciones posibles, en el GeoGebra, que le permiten generar un teselado semirregular a través de la aplicación de la traslación para el caso del cuadrado y la rotación en el caso del triángulo, así como del uso de triángulos y cuadrados, dichas combinaciones son como las que se muestran a continuación:

Figura 5.25 Combinaciones de polígonos para formar un teselado semirregular.

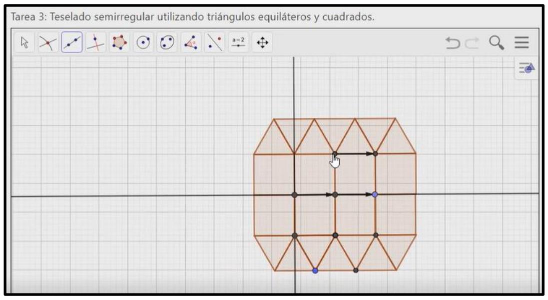


Fuente: Interfaz del GeoGebra.

Posteriormente, se le pide al alumno que amplíe el teselado aplicando las transformaciones isométricas, verificando la construcción a través de la herramienta de arrastre. Por lo que el alumno pone en juego distintas herramientas para lograr la construcción, como la simetría axial y centros de rotación a través de la intersección de polígonos para seguir rotando el polígono, en este caso el triángulo equilátero. Cabe resaltar que, durante la construcción, él se asegura que la construcción no se deforma y cumple con la definición de teselado semirregular, por lo que se resalta el siguiente dialogo:

Investigador (I) / Alumno (A)
I: ¿Es posible seguir ampliando el teselado? (El alumno explora la posibilidad de ampliar el teselado, utilizando el mismo vector propuesto, pero observa que esto no es posible dado que los polígonos se sobreponen) A: ¡Yo creo que ya no se puede! I: ¿Por qué crees que no se puede? A: Porque es semirregular, el teselado.

Figura 5.26 Construcción de teselado semirregular realizada por Pablo

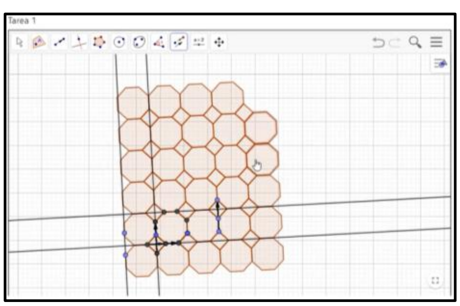


Fuente: Interfaz del *GeoGebra Classroom.*

En este punto el alumno valora, la pertinencia de volver a construir el teselado de manera que pueda seguir ampliando la construcción, para ello toma en cuenta el vector de traslación, debiera ser más grande de modo que le permita trasladar tanto el cuadrado como el triángulo, donde el vector generador es utilizado para seguir ampliando el teselado semirregular, el alumno describe a detalle su procedimiento de la siguiente manera: *Utilicé traslación, simetría axial y rotación, y las utilice para poder acomodar las figuras a conveniencia y crear el teselado, ya que a veces es más fácil utilizar rotación y otras traslación para ubicar figuras dependiendo de donde las quieras.*

Una segunda construcción de teselado semirregular, es el que se conforma por octágonos y cuadrados, en este caso el alumno muestra más confianza al mostrar mayor familiaridad, tanto con las isometrías en el plano del GeoGebra como con las herramientas necesarias que se involucran en la construcción. Por tanto, para el alumno resultó más sencillo construir y ampliar el teselado semirregular, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 5.27 Construcción de teselado semirregular realizada por Pablo



Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom

Configuración cognitiva de Pablo sobre la práctica matemática de la actividad 5

Figura 5.28 Construcción de teselado semirregular realizada por Pablo

Se abordan *situaciones* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado semirregular utilizando hexágonos regulares. Las situaciones involucran la justificación y argumentación de procedimientos realizados en la construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común, verbal, informal.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.

Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Definiciones/conceptos:	Emergentes:
Previas: Teselado regular Traslación Rotación Congruencia Simetría axial Vértice Centro de rotación Vectores Segmento Hexágono regular Ángulo interior de un polígono	Conceptualización de las transformaciones isométricas mediante la construcción de un teselado semirregular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice es 360°.

Para la construcción de cualquier teselado en el plano es necesario que el ángulo en cualquiera de los vértices forme un ángulo de 360° y que el ángulo interior del polígono regular (hexágono) sea divisor de 360°.

Los ángulos internos de un octágono son de 135°

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).

Se suman los ángulos interiores de un vértice da como resultado 360º.

Emergentes (matemáticos):

Construcción de un teselado regular utilizando hexágonos regulares.

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular constituyente en el teselado.

Previos (software):

Identificar los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.

<u>Emergentes (software):</u>

Aplicación de las transformaciones isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión) y sus elementos necesarios que conlleven a la construcción de un teselado regular.

Explicación y descripción del protocolo de construcción del teselado regular en termino de las herramientas dinámicas del GeoGebra.

Justifican

<u>Argumentos:</u>

La suma de la medida de los ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares.

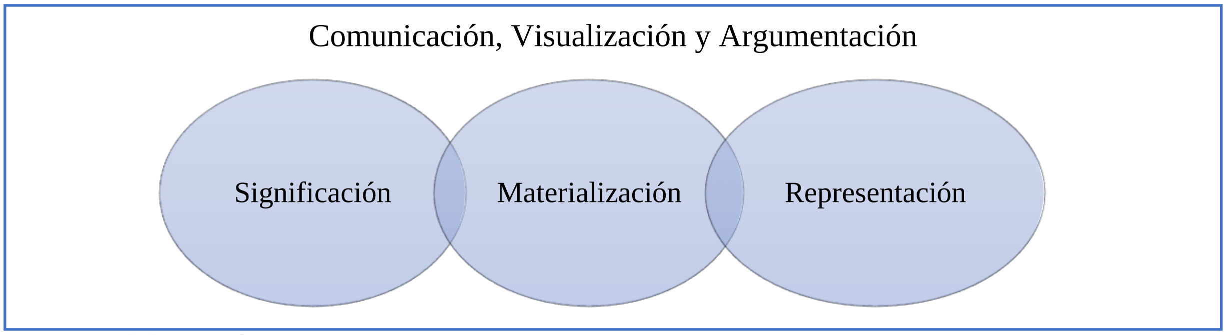
Explicitar el protocolo de construcción en el GeoGebra en termino de los usos de sus herramientas.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Pablo</u>

Los procesos matemáticos emergentes en las prácticas de Pablo, respecto a la actividad 5, son el de *representación y materialización* durante la construcción de los teselados semirregulares, ya que a través del software mediatiza y materializa su conocimiento, lo que constituye los significados relacionados con las transformaciones isométricas y lleva a desarrollar un proceso de *significación*. Además, el proceso de *comunicación* fue manifestados al interpretar y comunicar a través del leguaje gráfico y textual, en donde preciso y justificó el procedimiento de construcción, por lo que también manifestó un proceso de *argumentación y visualización*. Cabe resaltar que el alumno puso en juego pruebas empíricas para la construcción correcta de los teselados semirregulares.

Figura 5.29 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 5



Fuente: Elaboración propia.

5.4.3 El caso de Diana

Diana realizó el desarrollo de actividades en su computadora (laptop) durante 10 sesiones de 60 minutos cada una. De igual manera a todos los alumnos, se les explicó la dinámica y se contó con su autorización para que las sesiones fueran videograbadas, especificando el objetivo que tendría la recopilación y manipulación de la información.

Dado que las actividades se realizaron de manera virtual y sincrónicamente, se le pidió a la alumna que accediera a la plataforma de *GeoGebra Classroom* e insertara un código clave que le permitiría acceder a cada actividad, así que por cada actividad se generó un código de acceso.

Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 1

La alumna responde de acuerdo con lo que observa, en donde busca relaciones entre las representaciones de polígonos regulares y gestiona su conocimiento esperando una aprobación de los significados por parte de la investigadora. Además, muestra un desconocimiento de los objetos geométricos involucrados, por ejemplo, para referirse de manera verbal a sus ángulos y lados no hace referencia a la noción de medida, aunque cuando redacta su respuesta sí hace referencia a este concepto (medida); asimismo para referirse a las diagonales involucradas en los polígonos, hace referencia la palabra *rayita*, lo que conlleva a un lenguaje poco estructurado e impreciso. La alumna establece una relación entre los lados del polígono y el número de triángulos formados a partir de las diagonales, por lo que analiza para casos particulares, como el pentágono y el hexágono. Posteriormente, se le cuestiona sobre el caso cuando el polígono tiene cien lados, a lo que ella deduce que en el polígono regular se formarían noventa y ocho triángulos, por lo que describe la expresión algebraica *n-2*. En la Figura 5.30 se presenta la configuración cognitiva referente a la actividad 1, en donde la alumna hace emerger los conceptos de *ángulos y lados iguales, triángulos y polígonos*, cabe resaltar que ella no refiere a la noción de *medida* cuando menciona que los ángulos y lados son iguales.

Figura 5.30 Configuración cognitiva de Diana asociada a la actividad 1

<table>
<tr>
<td rowspan="8"><u>Elementos lingüísticos</u>

Verbal: informal (relacionado con el contexto).

Simbólico: n-2 donde n= número de lados del polígono.

Gestual: utiliza ademanes cuando habla de ciertos objetos matemáticos.</td>
<td rowspan="8">Expresa y soporta

Regulan el uso</td>
<td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
La justificación de polígonos regulares y su relación de las diagonales formados según sus lados. Determinar la expresión n-2 que calcula el número de diagonales en un polígono regular de n lados.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Motivan Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Definición/conceptos</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Polígonos regulares
Lados
Diagonales
Triángulos
Congruencia</td>
<td><u>Emergentes</u>
Ángulos iguales
Lados iguales
Triángulos
Polígonos</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Procedimientos</u>

<u>Emergentes</u>

Al número de lados se le van a restar 2, N-2, N representaría el número de lados de los polígonos regulares.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Justifican</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Argumentos</u>
Se deduce la expresión algebraica n-2, para calcular el número de triángulos inscritos en un polígono regular de</td>
</tr>
</table>

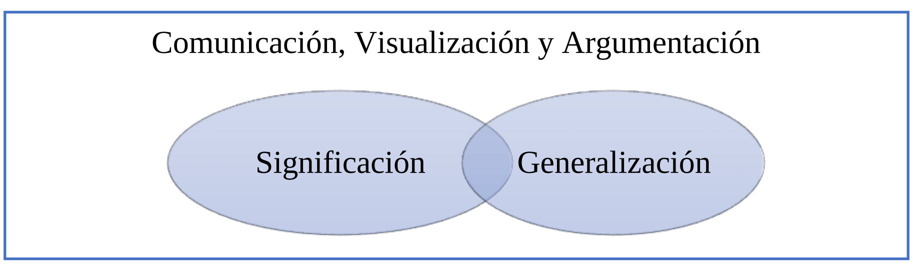
		n- lados, a través de la visualización de representaciones sobre los poligonales.

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Diana

En la Figura 5.31 se muestran los procesos matemáticos cognitivos que fueron transversales en el desarrollo de la actividad 1, mismos que son *comunicación, visualización y argumentación*. Sin duda alguna la alumna recurre a la necesidad de comunicar sus significados que son relativos al polígono regular y sus elementos que lo componen, donde pone en jugo la visualización y la argumentación para justificar sus respuestas, por ejemplo, *Si, porque sus lados y ángulos deben tener la misma medida entre sí.* Por tanto, la alumna pone en juego sus significados previos respecto a los polígonos regulares y generaliza cuando afirma que el número de lados se le van a restar dos, a lo que representa la expresión $n-2$. La alumna recurre a un proceso de *generalización* al tratar de analizar inductivamente el número de lados del polígono y el número de triángulos formados por las diagonales que aparecen sobre el polígono, ya que analiza casos particulares para posteriormente definir la expresión $n-2$. De esta manera se involucra un proceso de *significación* referente al número de lados y número de triángulos formados sobre el polígono.

Figura 5.31 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 1

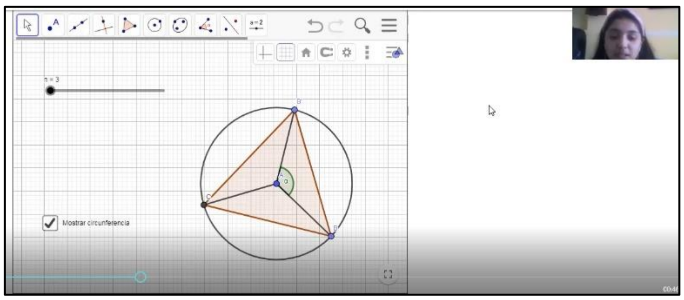


Fuente: Elaboración propia.

Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 2

El propósito de la actividad 2 fue realizar la manipulación de un applet para identificar la relación entre los polígonos regulares, el ángulo central y el ángulo interior. La alumna mantiene su cámara activa y procede a leer las instrucciones para la exploración del applet, en donde mueve un deslizador que le permiten visualizar los diferentes polígonos regulares construidos y como varia la medida del ángulo central y ángulo interior, además; se muestra una casilla que permite activar una circunferencia que tiene a los polígonos inscritos,como se muestra en la Figura 5.32.

Figura 5.32 Manipulación y exploración del applet realizado por Diana



Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom

En la primera situación se le pide a la alumna identificar el ángulo central para cada valor de *n* donde *n* es el número de lados de cada polígono regular. La alumna regresa a la manipulación del applet y afirma que *ella tendría que darle un valor al ángulo central*, en el siguiente cuadro se muestra un extracto de conversación establecido entre la investigadora y la alumna que permite mostrar la conjetura que plantea la alumna para encontrar el ángulo central para cada valor de *n*.

Investigadora (I) / Alumna (A)
I: Si tú sumaras la medida de los ángulos que rodean al punto A ¿Cuánto seria la suma de ese ángulo?
A: La alumna afirma que 180°
I: ¿Por qué 180°?
A: Porque ese es para triángulo ¿No? Y 360° es para el ángulo completo
I: Entonces ¿El ángulo central cuánto mide?
A: Ah, ósea dividiría 360 entre 3 ¿No?
I: Entonces, para este caso del triángulo equilátero ¿Quién sería el ángulo alfa o ángulo central?

A: La alumna semana la amplitud del ángulo y afirma que sería 120, porque si lo multiplicas por tres, te daría 360°.

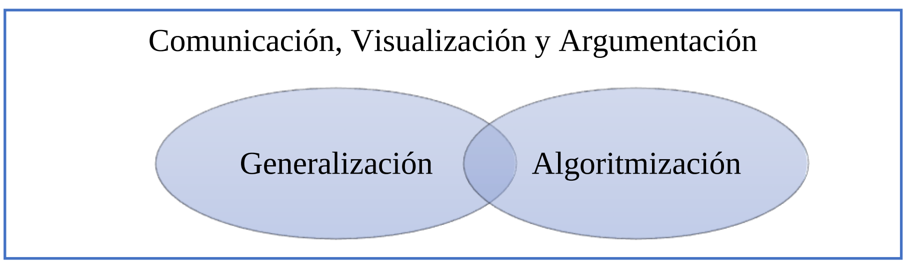
De esta manera, alumna explora para otros casos como el pentágono y decágono para deducir que para cualquier polígono regular tendría que *dividir 360 entre el número de lados de los polígonos regulares para encontrar el ángulo central*. Para la siguiente tarea de esa actividad (situación 2), se cuestiona sobre la medida del ángulo interior del polígono regular de 12 lados, ella afirma que solo tendría que dividir 360 entre 12, aunque aquí no percibe que se le está preguntando por la medida de ángulo interior del polígono. Aquí la alumna desconoce cómo se nombran los ángulos interiores y tiende a confundir el ángulo central con el ángulo interior del polígono. Cuando la alumna intenta encontrar la medida del ángulo interior de cualquier polígono, ella recurre al caso del triángulo y afirma que tendría que dividir ahora 180 entre 3, aunque cuando analiza para el caso del polígono de 12 lados y se le cuestiona sobre qué tipo de triángulo es el que se forma, ella afirma que es un triángulo equilátero, por lo que intenta relacionar el ángulo central y la propiedad de que la suma de la medida de los ángulos interiores de cualquier triángulo debe ser 180°. Finalmente, ella logra encontrar la medida del ángulo interior del polígono de 12 lados, ella afirma que es *150, porque divide 360 entre el número de lados, en este caso 12 y me dio 30 y eso lo reste a la suma de los ángulos interiores del triángulo (180) y me dio 150.* Es importante mencionar, que para la alumna resulta en un tanto difícil expresar su respuesta en los términos apropiados, por lo que comúnmente recurre al lenguaje informal.

La alumna intenta generalizar al responder la tercera situación, ya que ella tendría que calcular la medida del ángulo interior para cualquier polígono de *n* lados. De esta manera, la alumna intenta deducir una afirmación que le sirve para calcular la medida de cualquier polígono regular, ella afirma que; *Dividir 360 entre el número de lados "N" y eso se lo restamos a la suma de los ángulos interiores del triángulo que es 180.*

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Diana

La alumna recurre frecuentemente al proceso matemático de *comunicación* cuando trata de comprender y expresar sus respuestas de la situación, en este proceso ella espera constantemente la validación de sus respuestas por parte de la investigadora. Además, recurre al proceso de argumentación para justificar sus conjeturas que plantea a través de la observación, lo que la lleva a recurrir al proceso de visualización, por ejemplo, al afirmar que el ángulo de 360° es un ángulo completo. La alumna recurre a un proceso de generalización tomando en cuenta la inducción, es decir, ella analiza para un caso cómo podría encontrar tanto la medida de ángulo central como la medida del ángulo interior del polígono. De esta manera, la alumna recurre a un procedimiento que le permite calcular en ángulo interior de cualquier polígono regular, aunque su respuesta es escrita de manera textual (*Dividir 360 entre el número de lados "N" y eso se lo restamos a la suma de los ángulos interiores del triángulo que es 180*). Entonces, la alumna recurre a definir un proceso de *algoritmización* en términos de la exploración, manipulación y visualización del applet, lo que a su vez logra establecer una generalización. Cabe resaltar, que la alumna manifiesta dificultades al referirse de manera apropiada a los objetos geométricos que se están involucrado en la actividad. Dichos procesos identificados en la práctica de Diana se muestran en la Figura 5.33.

Figura 5.33 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

<u>Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 3</u>

Es importante mencionar que esta actividad se dividió en cinco apartados, lo que constituyó cinco actividades que se centraron en las transformaciones isométricas y los objetos matemáticos relacionados con estas, por ejemplo, (vector, ángulo de rotación, eje de rotación, mediatriz, vértice, recta, etc.).

<u>Sobre la traslación</u>

En esta primera sección de la tercera actividad consistió en la manipulación de un applet, donde la alumna manipuló y exploró herramientas del GeoGebra relacionadas con el objeto matemático de la traslación isométrica. Diana manipuló un vector de traslación y luego exploró los diferentes casos en los que se trasladaría un cuadrado. Ella analizó que los cuadrados quedaran acoplados, la medida del vector tenía que ser de igual medida que el lado del cuadrado, para cada caso que se traslade. Sin embargo, en su respuesta ella omite que la medida del vector debe medir 4 unidades para que ambos cuadrados (original y trasladado queden acoplados o tengan un lado común). De esta manera, la alumna sigue explorando y analizando qué sucede cuando el vector es menor a 4 y mayor a 4, a lo que ella concluye que el vector, en definitiva, debe medir lo mismo que el lado del cuadrado para establecer o asegurar que tengan un lado común ambos cuadrados, el original y el trasladado. Además, una vez que la alumna ha explorado el applet, establece una relación entre el vector de traslación y la figura trasladada, donde ella afirma que *el cuadrado trasladado se mueve a la distancia del vector teniendo como referencia el cuadrado original*, aquí no se toma en cuenta la dirección del vector. Cabe señalar que en todo momento ella describe de manera verbal y en términos informales y haciendo referencia al uso de las herramientas del GeoGebra.

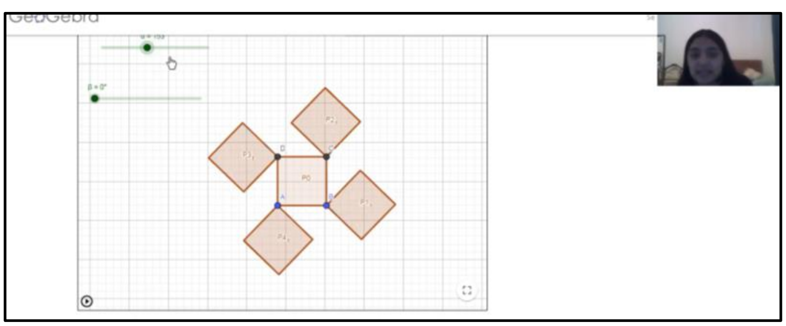
Por otro lado, cuando se muestra a la alumna un applet que incluye la construcción de un mosaico formado por rectángulos, ella observa y analizar la reproducción de ese mosaico, aplicando el botón de reproducir. La alumna hace referencia que a base de un cuadrado se pueden obtener los demás, luego se le pregunta ¿Cuántos vectores necesitas para la construcción del mosaico y dónde los ubicarías? Luego ella visualiza la figura para tratar de ubicar los vectores, de manera no ostensiva la alumna visualizó cómo y dónde ubicaría los vectores, haciendo referencia qué distancia debiera tener el vector de traslación. La alumna concluye que para generar el mosaico requiere de 4 vectores para ubicar los rectángulos a la derecha, izquierda, arriba y abajo, los cuales son suficientes para poder trasladar los rectángulos que se ubican en las esquinas. Además, la alumna luego analiza la medida del ángulo que se forma en cualquier vértice del mosaico, ella justifica que la medida del ángulo en cada vértice tiene que ser 360° porque los rectángulos tienen 4 ángulos rectos que miden 90° y la suma de estos es 360°. Finalmente, la alumna define de la siguiente manera noción de traslación isométrica:

La traslación geométrica es la que con ayuda de un vector hace que podamos mover una figura hacia donde sea

<u>*Sobre la rotación*</u>

En esta sección la alumna explora un applet que involucra la rotación geométrica de cuadrados, donde a través de deslizadores se visualiza la rotación y cómo los ángulos de rotación van cambiando. La alumna identifica para qué medidas de ángulos los cuadrados comparten un lado en común con el cuadrado original y cuándo estos forman un cuadrado de *3X3*, en este caso identifica el ángulo de 90°, 180° y 270°. Además, ella identifica los puntos de intersecciones entre los cuadrados para referirse a los puntos o centros de rotación que se considera en el applet para rotar los cuadrados generados por el original, como se ve en la Figura 5.34. Por otro lado, la alumna identifica la medida del ángulo formado en cada vértice de un teselado usando triángulos y hexágonos, su justificación es porque en el triángulo hay ángulos de 60° y en el hexágono de 120°. Sin embargo, omite que estos ángulos son divisores del ángulo de 360°.

Figura 5.34 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeGebra Classroom.

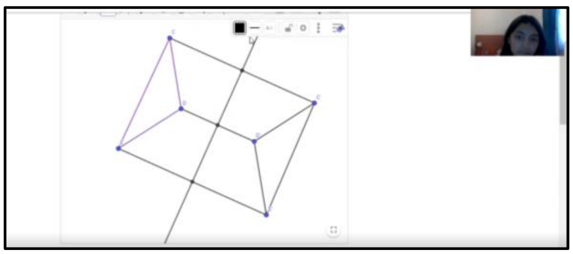
Finalmente, la alumna deduce una definición de la noción de rotación geométrica, como se muestra en el siguiente cuadro:

La que, con ayuda de un ángulo, vértice y una figura podemos hacer que la figura rote desde la intersección de un vértice.

<u>*Sobre la reflexión o simetría axial*</u>

En esta sección la alumna realizó el trazo de la simetría axial trazando puntos medios de los segmentos que unen los vértices de los triángulos propuestos en el applet, aquí la alumna deduce que es la mediatriz de los segmentos trazados, porque es perpendicular y pasa por los puntos medios (Figura 5.35).

Figura 5.35 Alumna manipulando y explorando el applet referente a la simetría axial

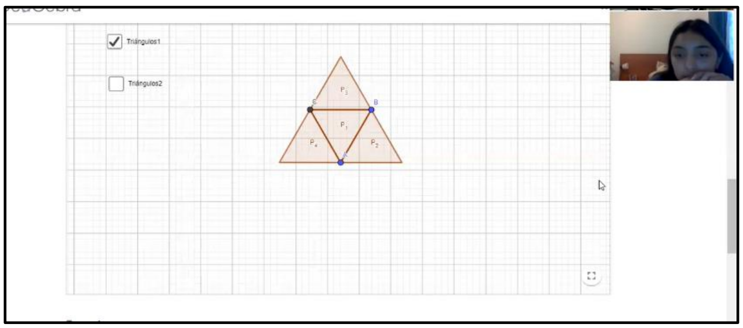


Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom.

Por otro lado, en un primer momento la alumna analiza la distancia que existe entre la recta (mediatriz) y los vértices de cada triángulo, ella concluye que la distancia siempre es la misma porque la mediatriz siempre pasa por la mita. Además, como parte de esta actividad la alumna lee una serie de instrucciones, donde ella tiene que trazar un polígono y aplicar simetría axial de tal manera que los hexágonos queden acoplados, es decir, tengan lados comunes entre ellos. En un primer momento la alumna no ubica la recta o segmento de recta, que le permita generar un hexágono con un lado común sobre el hexágono original, por lo que después de varios intentos ella platea una la definición de reflexión o simetría axial, como: *Es la que usa como referencia una recta o segmento para mover un nuevo polígono. Para crear un nuevo polígono necesitamos un polígono y un segmento o recta.*

En un segundo momento la alumna analiza la congruencia entre polígonos equiláteros, manipulando y explorando un applet que conforma un mosaico con triángulos regulares. Sin embargo, cuando se justifica la noción de congruencia no hace referencia a que la medida de sus lados es igual. Asimismo, la alumna identifica ejes de simetría en los triángulos equiláteros, a los que denomina o los nombra según el lado correspondiente, por ejemplo, *el eje de simetría de P2 sería el lado AB del triángulo P1*. Además, la alumna identifica los lados que se usaron para aplicar simetría axial y así generar el mosaico triangular regular, por ejemplo, *el eje de simetría de P5 fue el lado AC del triángulo P2* (Figura 5.36).

Figura 5.36 Alumna explorando el applet referente a la simetría axial en un mosaico



Fuente: Interfaz extraído de la plataforma GeoGebra Classroom

<u>*Configuración cognitiva de Diana sobre la práctica matemática de la actividad 3*</u>

En la figura 5.37 se muestra la configuración cognitiva desarrollada por la alumna Diana, en la cual se presenta la red de objetos emergentes de su práctica matemática, los cuales están relacionados con las transformaciones isométricas. La alumna pone en juego un leguaje formal informal, ya que no utiliza los términos matemáticos para referirse a ellos, por ejemplo, cuando refiere a la diagonal del polígono menciona la palabra *rayita o cuando refiere a la medida del ángulo solo refiere a ángulo*. Respecto al lenguaje gestual ella suele reírse cuando duda de alguna respuesta cuestionada por la investigadora, asimismo se resalta un lenguaje verbal, gráfico, software- geométrico y simbólico que la alumna establece para comunicarse con la investigadora, en términos del uso del software. Por ejemplo, al describir el significado del alumno referente a la traslación geométrica que en el momento que escribe su respuesta la va describiendo en voz alta, esto muestra que, en efecto, de nuevo espera la aprobación de la investigadora, como un medio de validar si su respuesta es correcta o incorrecta. En relación con las propiedades, la alumna deduce que 360° es un ángulo completo a partir de la representación del applet y lo relaciona con una propiedad que deben cumplir los teselados en cada vértice de los polígonos, para que formen un teselado regular.

Figura 5.37 Configuración cognitiva de Diana asociada a la actividad 3

<table>
<tr>
<td rowspan="8"><u>Elementos lingüísticos</u>
Verbal y Gestual: lenguaje relacionado con el contexto y los conflictos presentes para justificar sus respuestas.

Gráfico - software: el uso de deslizadores en el applet.

Gráfico/geométrico:
Representación del vector, ángulo, eje de simetría, polígono, etc. en el applet del GeoGebra.

simbólico: por ejemplo, lado FI, vector $\overrightarrow{AB}$ y cuadrados P1 y P1′.</td>
<td rowspan="8">Expresa y soporta →

← Regulan el uso</td>
<td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
Conceptualización de las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) a través de la manipulación y exploración de applets.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">↓ Motivan ↑ Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Definición/conceptos</u></td>
</tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Vector
Ángulo interior
Vértice
Triángulo equilátero
Congruencia
Hexágono
Ángulo recto</td>
<td><u>Emergentes</u>
Traslación
Rotación
simetría axial
Mediatriz
Congruencia
Eje de simetría</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
La medida de la suma de los ángulos de cada vértice es 360°
La medida de los ángulos interiores de los triángulos equiláteros es congruente.
La mediatriz pasa por los puntos medios de los segmentos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Emergentes
Determina la suma de la medida de los ángulos interiores del mosaico rectangular, el cual es 360°, así como del triangular y el hexagonal.
Determina el número de vectores necesarios para construir el mosaico rectangular.
Identifica que para aplicar rotación se requiere un ángulo y un centro de rotación o punto de intersección, así como el eje de simetría al aplicar simetría axial.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">↑ Justifican</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Argumentos</u>
La argumentación se sitúa en la justificación del comportamiento de los objetos geométricos cuando se aplica cierta manipulación o exploración en el applet. Se usa la</td>
</tr>
</table>

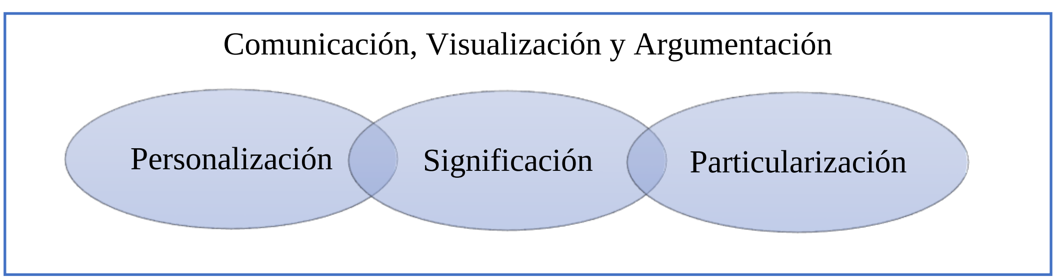
		medida de los ángulos interiores de los polígonos para justificar que podrían formar un teselado. Se justifica la construcción de la mediatriz en términos de la aplicación de las herramientas del GeoGebra, donde la visualización juega un rol esencial.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Diana</u>

Los procesos matemáticos que movilizó la alumna Diana de manera transversal fueron el de *comunicación y visualización* ya que la alumna trato de comprender e interpretar las tareas asignadas y comunicó sus soluciones, aunque estas hayan sido manifestadas de manera textual y verbal informal. Por otra parte, el proceso de *significación y personalización* fue recurrente por la alumna al proporcionar cada una de las definiciones de las transformaciones isométricas, como las que se describieron la práctica matemática, al definirlas desde su propia experiencia con las herramientas del GeoGebra. Además, se mostró un proceso de *particularización* cuando Diana puntualizó para casos específicos sobre la traslación y la rotación utilizando, un vector, ángulo o polígono en particular, recurriendo de nuevo al proceso de *visualización*, que la llevaron a explicitar sus respuestas en término de la aplicación de las herramientas del GeoGebra. Finalmente, el proceso de *argumentación* fue movilizado por la alumna cuando justifico la noción de congruencia y la mediatriz involucrada en la isometría axial.

Figura 5.38 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

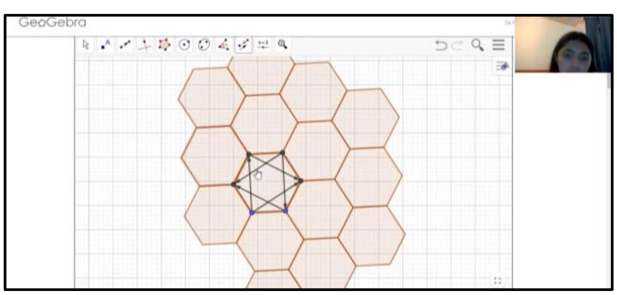
<u>Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 4</u>

La actividad fundamental al que se enfrentó la alumna fue a la construcción de los teselados regulares utilizando las transformaciones isométricas, para ello se proporcionaron sugerencias sobre las herramientas que podía aplicar para la construcción y se proporcionó la definición de teselado regular.

<u>La construcción de los teselados regulares</u>

La alumna lee las instrucciones referentes a la construcción de un teselado regular usando hexágonos aplicando la traslación geométrica. En primer lugar, la alumna recurre a identificar la herramienta del polígono regular y aplica varias veces para generar el teselado, sin embargo, aunque esta construcción parece un teselado, a simple vista, la alumna necesita aplicar la herramienta de traslación. En esta construcción, la alumna empieza a explorar con vectores que están ubicados fuera del primer hexágono, pero los hexágonos trasladados no hacen que los polígonos queden acoplados. En este momento la investigadora le recuerda a Diana que recuerde el applet donde experimentó la traslación de un cuadrado, la alumna comienza a ubicar polígonos sobre los lados del polígono base, se da cuenta que este caso tampoco le funciona. Posteriormente, la alumna se da cuenta que el vector debiera de estar anclado al polígono desde dos de sus vértices, de esta manera ella ubica seis vectores que le permiten generar los hexágonos anclados a los lados del polígono base, asimismo la alumna utiliza estos mismos vectores que le permiten ampliar y construir el teselado regular, aunque ella no se percata que en algunos casos los polígonos quedan sobre puestos cuando selecciona el hexágono equivocado.

Figura 5.39 Construcción del teselado regular usando hexágonos



Fuente: Interfaz extraído de la plataforma GeoGebra Classroom

En la primera situación de la actividad 4, la alumna identifica que en cada vértice la medida del ángulo es 360°, sin embargo, tiene a confundir ángulos con vértices, cuando afirma que es la suma de todos estos puntitos, refiriéndose a los ángulos. Cuando se le cuestiona ¿Qué es lo que estás sumando? Ella afirma que los vértices, justificando que es 120 y la suma da 360°. No obstante, cuando ella escribe su respuesta afirma que *para el teselado regular de hexágonos mide 120, ya que la suma de sus ángulos debe ser 360 esto lo dividimos entre 3 porque son el total de ángulos que rodean al vértice.*

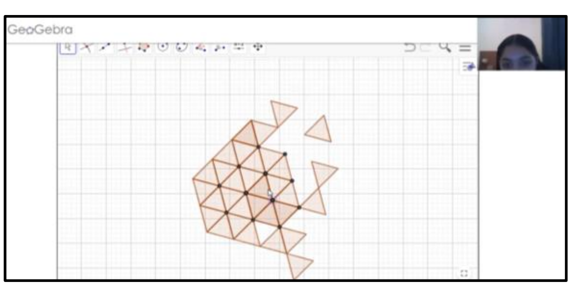
Por otro lado, la alumna detalla el procedimiento de construcción que realizó para generar el teselado regular usando hexágonos, en esta explicación ella refiere a los a la dirección del vector como flechas, por ejemplo, *hice un hexágono regular y de ahí aplique un vector donde la flecha estuviera apuntando hacia arriba, recordando que debía estar dentro del hexágono y tocando los dos vértices que iba a utilizar, y después hice lo mismo, pero ahora de arriba para abajo, que la flecha apuntara hacia abajo y recordando lo mismo de estar dentro del hexágono y siempre tocando los dos vértices que se utilizarían.*

Finalmente, la alumna verifica la construcción aplicando la herramienta de arrastre, en donde ella tiene que verificar que cuando mueva algún vértice del teselado regular, este no se deforma, así que procede a justificar que los vectores ayudan para que los hexágonos permanezcan juntos.

Respecto a la construcción del teselado regular utilizando triángulos equiláteros y aplicando rotación geométrica. La alumna procede a leer las instrucciones para realizar la construcción, aunque no considera que los puntos sobre los vértices podrían utilizar como centro de rotación, por lo que en un inicio intenta ubicar puntos para aplicar rotación, sin embargo, se da cuenta que sobre esos vértices ya hay puntos y los utiliza para rotar el triángulo equilátero. Además, aplica ángulos al tanteo para intentar rotar el triángulo y observó lo que resultó, así que en un primer intento aplica un ángulo de 180° y luego un ángulo de 45°, pero observa que no resulta, la alumna vuelve aplicar 180° pero en sentido antihorario, de esta manera prueba con el ángulo de 90°, 110°, 75°, 25°,120°, 60° y 160°; así que mediante prueba y error observa qué ángulos le funcionan. Así que para seguir ampliando el teselado ella sólo aplica ángulos de 120°, 60° y 180°. Sin embargo, cuando ha rotado sobre los tres lados de triángulo base, ella considera que debe crear unos nuevos puntos de intersección de tal manera que sirvan como centro de rotación; se le cuestiona sobre dónde los ubicaría, la alumna procede a ubicar puntos con la herramienta de puntos donde se intersecan los triángulos. Así que se le sugiere que busque la herramienta de intersección de tal manera que pueda ubicar puntos que intersecan los triángulos. La alumna procede a aplicar la herramienta intersección y usarlos como centro de rotación, mismos que le permiten ampliar el teselado regular. Asimismo, afirma que la medida del ángulo en cada vértice es 360° porque la suma de los ángulos interiores son 6 rodeando el vértice, así que asume que la medida de los ángulos es 60°. La explicación de su procedimiento se centró en describir lo siguiente: *Empecé haciendo un triángulo equilátero y los puntos de intersección de este triangulo los utilice para la rotación geométrica, empecé aplicando con el punto de intersección de arriba y utilice 180 grados, y después con los de abajo y así hasta crear triángulos que rodearan mi triángulo original y después apliqué la intersección en los nuevos puntos que se crearon y estos nuevos puntos de intersección los utilice para seguir creando más triángulos al rededor. Utilice los ángulos de 60°, 120° y 180° porque la suma de los ángulos interiores es de 360° entonces solo era ver que triangulo iba a utilizar de tal forma que viera la mitad de este, por ejemplo, si quería sacar uno arriba de un triángulo utilizaba 180° porque sería la mitad de los ángulos interiores de la figura.*

Finalmente, la alumna verifica si su teselado es correctamente construido o este se deforma al aplicarle la prueba o herramienta de arrastre, en algún vértice del triángulo. La alumna observa que para algunos puntos si se verifica la correctamente, mientras que si mueve otros puntos se deforma, ella explica que se debe a los puntos de intersección.

Figura 5.40 Construcción del teselado regular usando hexágonos

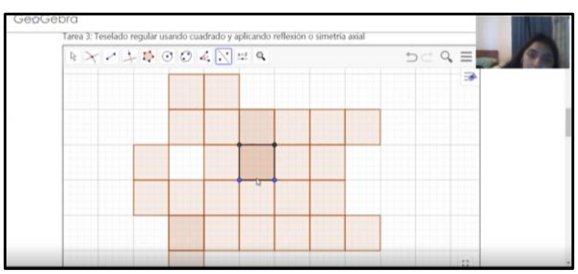


Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom.

En relación con la construcción del teselado regular utilizando cuadrados y aplicando reflexión o simetría axial, en este caso la alumna recurre a ubicar un cuadrado y posteriormente ubica un segmento de recta en el plano, luego aplica la herramienta de simetría axial. La alumna observa que el cuadrado transformado no queda acoplado al cuadrado base u original, así que se le cuestiona sobre *¿Cómo harías para que el cuadrado transformado quedé justamente acoplado al cuadrado base?*, ella manipula el segmento de recta y observa que para que el cuadrado transformado quede justamente acoplado, debe ubicar el segmento de recta sobre uno de los lados de cuadrado base.

Luego que la alumna realiza ese procedimiento para cada lado del cuadrado base, se le cuestiona sobre *¿Cómo utilizaría esos segmentos de manera que siga ampliando el teselado regular?*, ella afirma que necesita otro punto sobre los cuadrados transformados para ubicar más segmentos e intenta utilizar la herramienta de intersección, aunque ella observa que no se puede porque no hay puntos intersecados. Luego la alumna utiliza los segmentos que ya tiene para ampliar el teselado, se da cuenta de que es posible seguir aplicando la herramienta de simetría axial para generar el teselado, aunque esto lo hace a prueba y error, lo que conlleva a que algunos cuadrados queden sobrepuestos, ya que no establecer cuál es la relación que existe, para generar la ubicación de los cuadrados transformados.

Figura 5.41 Construcción del teselado regular usando hexágonos



Fuente: interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom.

Por otro lado, cuando la alumna describe su procedimiento de la construcción del teselado formado por cuadrados, ella lo hace en términos de las herramientas que aplicó, por ejemplo, *empecé haciendo un cuadrado y a este le aplique segmentos de recta en sus 4 vértices, después puse la simetría axial seleccionando el cuadrado original y un segmento de recta y así se empezaron a formar los demás cuadrados, por ejemplo cuando seleccionaba el de abajo y elegía el segmento de recta de arriba del cuadrado original, el cuadrado que se formaría seria arriba, porque era como un espejo entonces si seleccionaba el de abajo me daría el de arriba.* Cabe resaltar que, la alumna hasta este momento reflexionó (idealizó) y describió cómo era el comportamiento entre el cuadrado transformado y la simetría axial aplicada a cada segmento de recta. Además, cuando aplico la herramienta de arrastre del GeoGebra, verificó que la construcción del teselado regular no se deformaba, afirmando que *sigue siendo un teselado porque, aunque mueva el cuadrado original, los cuadrados que están a su alrededor se mueven con él.*

Finalmente, la alumna explica que para determinar cuándo un polígono regular puede teselar el plano, se debe considerar que e*n el vértice del teselado se formará con la suma de los ángulos de las figuras que rodean al vértice, el ángulo que se formara es de 360 grados.* Aquí la alumna no expresa claramente la idea que quiere explicar, pues resulta confuso hablar de un vértice del teselado, así como tampoco menciona que la medida de los ángulos interiores de dichos polígonos debe sumar en cada uno de sus vértices el ángulo de 360°. Finalmente, la alumna plantea una conjetura relacionada con la existencia de otros polígonos regulares que podrían formar teselados regulares, aunque estos debieran cumplir que en cada vértice la suma de la medida de ángulos interiores del polígono regular deber ser 360°.

Configuración cognitiva de Diana sobre la práctica matemática de la actividad 4

La figura 5.42 presenta la red de objetos emergentes en la práctica matemática de Diana, estos objetos matemáticos están relacionados a la construcción de teselados regulares utilizando las transformaciones isométricas del GeoGebra y polígonos regulares (triángulo hexágono y cuadrado). Cabe resaltar que, la propiedad de que la suma de los ángulos formado en cada vértice debe ser de 360° en la construcción de los teselados, así como al aplicar la herramienta de arrastre permite validar tal construcción.

Figura 5.42 Configuración cognitiva de las prácticas de Diana asociada a la actividad 4

Se abordan *situaciones* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado regular utilizando hexágonos, cuadrados y triángulos. Las situaciones involucran la justificación y argumentación del procedimiento de construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:

Previas:

Traslación
Rotación
Simetría axial
Vértice
Ángulo de rotación
Vectores
Ángulo interior de un polígono

Emergentes:

Conceptualización de la traslación, rotación y simetría axial mediante la construcción de un teselado regular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La medida del ángulo de 360° forma una circunferencia completa.
La medida de los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) den como resultado 360º.

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

Se identifica los objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).

Emergentes (matemáticos):

Se aplica la traslación, pero no se considera la dirección del vector.
Se aplican ángulos de rotación, pero estos son propuestos a prueba y error.
Se identifican puntos de rotación la construcción del teselado usando triángulos.

Previos (software):

Se identifican los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.

Emergentes (software):

Aplicación de las transformaciones isometrías (traslación, rotación o reflexión), tomando en cuenta, vector, rotación y eje de simetría.

Justifican

Argumentos:

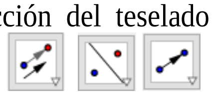
En las distintas construcciones del teselado regular, se justifica la construcción a partir de la medida de la suma de ángulos interiores en cada vértice debe de 360°.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común, gestual.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado  regular.

Gráfico/geométrico:
Representación de polígonos regulares.
Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

		Se valida la construcción de acuerdo con la aplicación de la herramienta de arrastre del GeoGebra y se describe el proceso de construcción en términos del uso que se hace de las herramientas del GeoGebra.

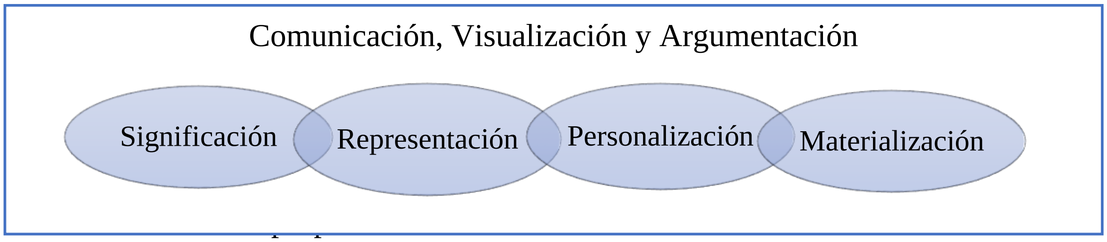
Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Diana</u>

Los procesos matemáticos que fueron movilizados por la alumna Diana durante el desarrollo de la actividad 4, fue principalmente el proceso de *materialización ya que la alumna recurrió a la aplicación de diferentes herramientas del GeoGebra*, por ejemplo, desde que la alumna realiza exploración y manipulación de los applets y luego cuando generó los teselados regulares. En este sentido, la alumna moviliza significados que la llevan a materializar su pensamiento a través del uso, explicaciones y justificaciones manifestadas. Además, la alumna realizó sus explicaciones en términos informales, por ejemplo, cuando el alumna afirma lo siguiente: *Hice un hexágono regular y de ahí aplique un vector donde la flecha estuviera apuntando hacia arriba, recordando que debía estar dentro del hexágono y tocando los dos vértices que iba a utilizar, y después hice lo mismo, pero ahora de arriba para abajo, que la flecha apuntara hacia abajo y recordando lo mismo de estar dentro del hexágono y siempre tocando los dos vértices que se utilizarían.*

Por otro lado, la alumna recurrió al proceso de *significación y personalización* para referencial al concepto de teselado regular y verificarlo cuando aplicó la herramienta de arrastre, de esta manera fue capaz de validar su construcción y recurrir a la noción de teselado regular. Además, se identificó que en cada teselado se formaba un ángulo completo (360°) en cada uno de los vértices. Como la alumna realizó una validación de la construcción de los teselados mediante la herramienta de arrastre, fue movilizado el proceso de *visualización* y *representación* al completar de manera correcta el teselado usando traslación y reflexión, pero no en el caso de la rotación isométrica. Por otro lado, la alumna recurre a procesos matemáticos que son desarrollados de manera transversal entorno a la práctica realizada, los cuales son el de *comunicación y argumentación*. Por un lado, la alumna lee y comprende la situación a desarrollar, en este momento ella comunica de manera verbal o escrita, lo que conlleva a un proceso de argumentación, tal como se asume en la sección 2.5 de este trabajo.

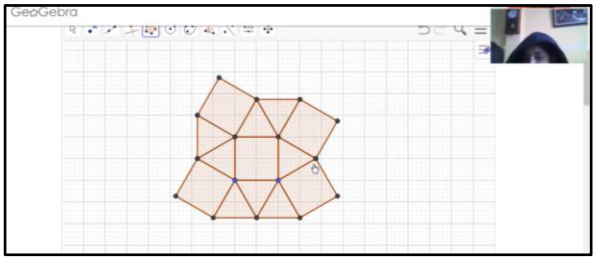
Figura 5.43 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 4



<u>*Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 5*</u>

La actividad 5 se centró en la construcción de los teselados semirregulares, los cuales son aquellos que se forman por más de un tipo de polígono regular cada uno de ellos congruentes, tal que no se superponen ni dejan regiones sin cubrir. En un primer momento, la alumna recurre a dibujar a papel y lápiz para identificar si los cuadrados y los triángulos equiláteros formarían un teselado semirregular. De manera intuitiva, la alumna asegura que si es posible realizar esta construcción, cuando realiza el dibujo en su cuaderno, ella afirma que los triángulos pueden verse también como cuadrados, al poner dos de ellos juntos. Esto conlleva a describir en su respuesta que, *sí se podría usar triángulos equiláteros y cuadrados para formar un teselados semirregular, ya que son congruentes y si lo dibujamos cumple con lo que es un teselado semirregular, el ángulo del triángulo es de 60° y el del cuadrado del 90° y la suma de los ángulos del vértice miden en total 360*. Posteriormente, la alumna recurre a realizar el dibujo, que hizo a papel y lápiz, en GeoGebra aplicando la herramienta de polígono regular. Sin embargo, cuando genera el dibujo que representa el teselado semirregular (Figura 5.40), se le cuestiona lo siguiente ¿Cuándo sabes cuándo poner triángulo y cuándo poner cuadrado? Ella afirma que, *si la figura está muy abierta va cuadrado y cuando esta más cerrado es triángulo*, haciendo referencia a la medida del ángulo.

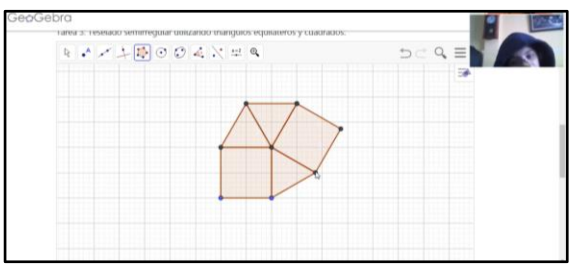
Figura 5.44 Polígonos base que necesita Diana para generar el teselado semirregular



Fuente: Imagen extraída del interfaz de la plataforma de GeoGebra Classroom.

Sin embargo, la investigadora menciona que es un dibujo que se ha generado mediante la unión de sólo polígonos regulares, por lo que se espera que se apliquen transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) para cumplir con las indicaciones de la actividad. En este caso, la alumna afirma que tiene primero que ubicar los polígonos que le permitirán ampliar el teselado semirregular. La alumna considera una figura base que le permiten generar el teselado usando triángulo y cuadrado, como se puede ver en la Figura 5.45.

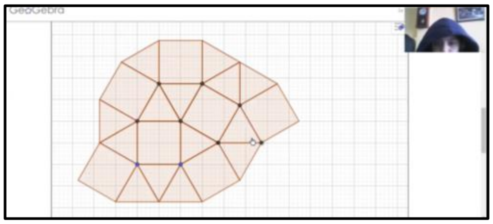
Figura 5.45 Polígonos base que necesita Diana para generar el teselado semirregular



Fuente: Imagen extraída del interfaz de la plataforma de GeoGebra Classroom

Una vez que la alumna tiene la figura base, intenta aplicar traslación, pero le resultó complicado saber de qué manera ubicaría los vectores, por lo que opta aplicar la simetría axial. Sin embargo, vuelve a tener ciertas dificultades para identificar dónde ubicaría los ejes de simetría, por lo que descarta la reflexión. Así que opta por aplicar rotación, la alumna sabe que tiene que ubicar el centro de rotación y aplicar ángulos que le permitan ampliar el teselado semirregular, ella plica la herramienta de intersección para ubicar los centros de rotación y los ángulos de 150° y 210°, este procedimiento resulta más sencillo para la alumna porque sabe que ángulos debe rotar para cada polígono, por lo que esto la lleva a obtener el teselado solicitado (Figura 5.46).

Figura 5.46 Polígonos base que necesita Diana para generar el teselado semirregular

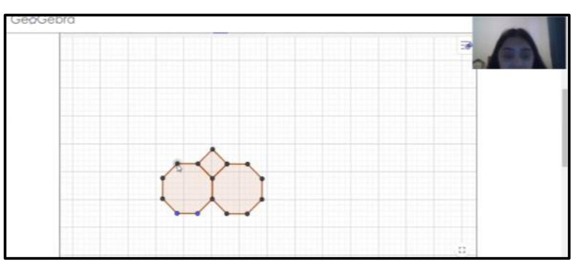


Fuente: Interfaz extraída de la plataforma GeoGebra Classroom

Finalmente, la alumna detalla el procedimiento que siguió para generar el teselado semirregular, además, ella valida la construcción aplicando la prueba de arrastre y afirma que, *el teselado construido forma un teselado semirregular porque las figuras siguen juntas del cuadrado original y no importa a donde lo muevas las figuras nuevas siguen junto al cuadrado original y era importante que los puntos fueran puntos de intersección para que junto a los 3 triángulos y los 2 cuadrados estos formaran 360°.*

Respecto a la construcción del teselado semirregular usando cuadrados y octágonos utilizando cualquier de las transformaciones isométricas (traslación, rotación, simetría axial), la alumna realiza primeramente su *figura base*, la cual considera útil para generar el teselados, dado que ella ya cuenta con experiencia aplicando rotación geométrica recurre a aplicar esta transformación para ampliar el teselado.

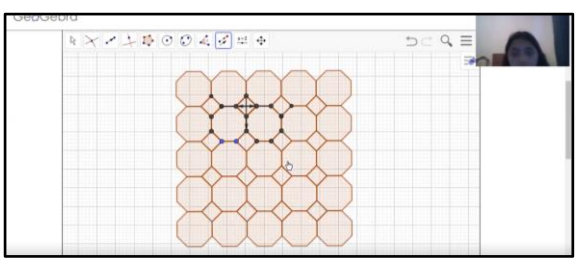
Figura 5.47 Polígonos base que necesita Diana para generar el teselado semirregular



Fuente: Extraída de la interfaz del GeoGebra Classroom

La alumna intenta aplicar rotación para un octágono, donde considera los puntos de los polígonos, que se ubican en los vértices, como centro de rotación y considera ángulos a prueba y error, por ejemplo, la alumna intenta aplicar la medida del ángulo de 150°, 130°, 140°, 145°, 110°, 120°, 130°, 128°y 135°. Con la medida de este último ángulo, la alumna comienza a notar que el ángulo de 135° es el indicado para rotar los octágonos y lo sigue aplicando para los demás, sin embargo, frecuentemente recurre a mirar el teselado formado por octágonos y cuadrados, que se proporcionó para que fuera construido. Luego, cuando quiere trasladar el cuadrado, observa que la rotación no le sirve para ubicarlo en la posición que necesita, por lo que utiliza traslación para trasladar el cuadrado, aplicando vectores como se ve en la Figura 5.48. Finalmente, la alumna logra obtener la construcción del teselado semirregular aplicando rotación y traslación y usando cuadrados y octágonos, aunque cuando aplicó la herramienta de arrastre, para validar su construcción, el teselado construido fue deformado. Además, la alumna describió su procedimiento que la llevó a generar el teselado, el cual fue el siguiente: *hice mi figura base que fueron dos octágonos regulares y un cuadrado y de ahí, empecé a usar la rotación con los puntos que ya tenía mi figura base y empecé a rotar con los ángulos de 135° y 225° ya que estos ángulos quedaban a la medida que quería las demás figuras, después utilice la traslación en tres direcciones, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda y estos los puse de tal forma que pasaran por tres intersecciones y de ahí fui eligiendo cual quería mover y hacía que dirección y ya.*

Figura 5.48 Polígonos base que necesita Diana para generar el teselado semirregular



Fuente: Interfaz extraído de la plataforma GeoGebra Classroom

<u>*Configuración cognitiva de Diana sobre la práctica matemática de la actividad 5*</u>

La Figura 5.49 presenta la red de objetos matemáticos manifestados en la práctica matemática de la alumna Diana, en esta configuración se resalta la riqueza de conceptos entorno a las isometrías en el plano, cuando se realizaron las construcciones de los teselados semirregulares. En esta actividad la alumna fue capaz de aplicar correctamente las transformaciones isométricas e hizo uso de aquellos conceptos con los que ya se sentía familiarizada, por ejemplo, el de rotación, traslación, vector, punto de intersección, entre otros. Asimismo, sus argumentos se basaron en la propiedad que debiera caracterizar el teselado, el cual fue que en cada uno de sus vértices la suma de la medida del ángulo debía ser 360°.

Figura 5.49 Configuración cognitiva de Diana asociada a la actividad 5

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común, verbal, informal.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.

Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Se abordan *situaciones* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado semirregular utilizando hexágonos regulares. Las situaciones involucran la justificación y argumentación de procedimientos realizados en la construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos:

Previas:

Teselado regular

Traslación

Rotación

Congruencia — Simetría axial

Vértice — Centro de rotación

Vectores — Segmento

Hexágono regular

Emergentes:

Conceptualización de las transformaciones isométricas mediante la construcción de un teselado semirregular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice es 360°.

Para la construcción de cualquier teselado en el plano es necesario que el ángulo en cualquiera de los vértices forme un ángulo de 360° y que el ángulo interior del polígono regular (hexágono) sea divisor de 360°.

Los ángulos internos de un octágono son de 135°

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

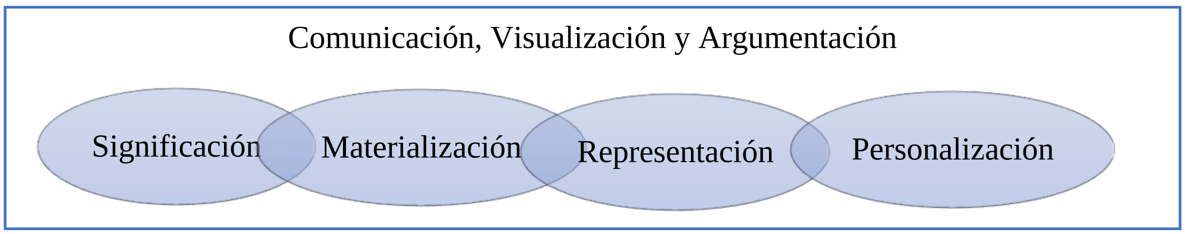
Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.	Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.). <u>Emergentes (matemáticos):</u> Construcción de un teselado regular utilizando hexágonos regulares. La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular constituyente en el teselado. <u>Previos (software):</u> Identificar los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular. <u>Emergentes (software):</u> Aplicación de las transformaciones isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión) y sus elementos necesarios que conlleven a la construcción de un teselado regular. Explicación y descripción del protocolo de construcción del teselado regular en termino de las herramientas dinámicas del GeoGebra.
	Justifican
	<u>Argumentos:</u> La suma de la medida de los ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares. Explicitar el protocolo de construcción en el GeoGebra en termino de los usos de sus herramientas.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Diana</u>

Los procesos matemáticos emergentes en las prácticas de Diana respecto a la actividad 5, son el de *representación y materialización* durante la construcción de los teselados semirregulares, ya que a través del software mediatiza y materializa su conocimiento, cuando involucra las nociones relacionadas con las transformaciones isométricas y que la llevan a desarrollar un proceso de *significación*, el cual es manifestado a través de lenguaje informal a través de las herramientas del GeoGebra, que aplica en sus construcciones, por lo que en el desarrollo de estos significados recurre a un proceso de *personalización*. Además, el proceso de *comunicación* fue manifestados al interpretar y comunicar a través del leguaje gráfico y textual, en donde preciso y justificó el procedimiento de construcción, por lo que también manifestó un proceso de *argumentación y visualización*. Cabe resaltar que el alumno puso en juego pruebas empíricas para la construcción correcta de los teselados semirregulares.

Figura 5.50 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 5



Fuente: Elaboración propia.

5.4.4 El caso de Gabriela

Diana realizó el desarrollo de actividades en su computadora (laptop) durante 13 sesiones de 60 minutos cada una. De igual manera se le explicó la dinámica y se contó con su autorización para que las sesiones fueran videograbadas, especificando el objetivo que tendría la recopilación y el tratamiento de la información. Asimismo, se le pidió a la alumna que accediera a la plataforma de *GeoGebra Classroom* e insertara un código clave que le permitiría acceder a cada actividad, así que por cada actividad se generó un código de acceso.

Prácticas matemáticas de Gabriela asociada a la actividad 1

La alumna recurre a expresar de manera verbal las características del polígono regular, como, por ejemplo, que es una figura plana, tienen vértices, lados rectos y todas estas cosas, por lo que evidencia un lenguaje informal y coloquial. A lo que se indaga sobre lo que significa que sea regular, a continuación, se muestra el dialogo:

Investigador (I)/Alumno (A)
I: Los lados del polígono ¿cómo son entre ellos? ¿Por ejemplo en el pentágono? A: Son iguales ¿Qué puedes decir del polígono regular? A: Que todos sus lados y todos sus ángulos son iguales.

Cabe resaltar que la alumna no refiere a la media del ángulo y medida del lado, de esta manera resalta que un polígono es regular *porque todos sus ángulos y lados son iguales entre sí.* Respecto a la relación entre el número de lados y el número de triángulos, formados por los lados y diagonales trazadas en el polígono, las cuales son representados por un dibujo. La alumna, aunque contabiliza el número de lados y diagonales con detenimiento no establece una relación que le permita identificar la relación entre ambos objetos.

<u>Configuración cognitiva de Gabriela sobre la práctica matemática de la actividad 1</u>

La configuración cognitiva muestra los objetos matemáticos que la alumna movilizó cuando desarrolla la actividad 1, se rescata que para deducir la expresión generalizada que relaciona el número de lados y triángulos formados en él, la alumna tiene que recurrir a casos particulares de los polígonos mostrados, para después identificar que: *conforme el aumento del número de lados la diferencia será de dos triángulos.*

Figura 5.51 Configuración cognitiva de Gabriela asociada a la actividad 1

<table>
<tr>
<td rowspan="6"><u>Elementos lingüísticos</u>

Verbal: informal (relacionado con el contexto).

Simbólico: n-2 donde n= número de lados del polígono.

Gestual: utiliza ademanes cuando habla de ciertos objetos matemáticos.</td>
<td rowspan="6">Expresa y soporta

Regulan el uso</td>
<td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
La justificación de polígonos regulares y su relación de las diagonales formados según sus lados. Determinar la expresión n-2 que calcula el número de diagonales en un polígono regular de n lados.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Motivan Resuelven</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Definición/conceptos</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Polígonos regulares
Lados
Diagonales
Triángulos
Congruencia</td>
<td><u>Emergentes</u>
Ángulos iguales
Lados iguales
Triángulos
Vértice</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Procedimientos</u>

<u>Emergentes</u></td>
</tr>
</table>

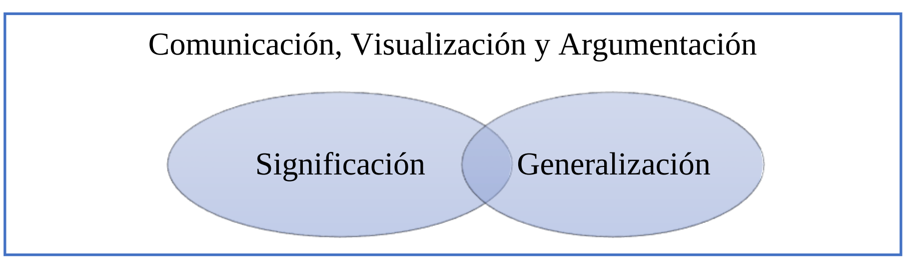
		Conforme el aumento del número de lados la diferencia será de dos triángulos.
		Justifican
		<u>Argumentos</u> Se deduce la expresión algebraica n-2 para calcular el número de triángulos inscritos en un polígono regular de n- lados a través de la visualización de representaciones sobre los poligonales.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Gabriela</u>

Durante el desarrollo de esta actividad, la alumna lee en voz alta para comprender mejor la situación; sin embargo, expresa de manera textual que comparten características, por tanto, hay un *proceso de comunicación y visualización*. Cabe resaltar que la alumna gestiona su conocimiento, aunque la mayoría de las veces espera la aprobación de la investigadora. La alumna recurre a un *proceso de argumentación* cuando visualiza la relación entre el número de triángulos formados y el número de lados, a lo que justifica particularmente para unos casos y posteriormente, explicita la expresión algebraica que le permite encontrar esa relación en cualquier polígono regular (*proceso de generalización*). Aquí surge un *proceso de significación* que es puesto en juego en los conocimientos previos de la alumna respecto al polígono regular relacionado con sus elementos que la conforman.

Figura 5.52 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 1

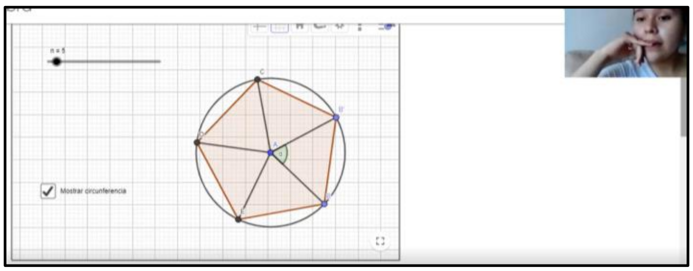


Fuente: Elaboración propia.

Prácticas matemáticas de Gabriela asociada a la actividad 2

El desarrollo de la actividad 2 parte de la manipulación y exploración de un applet, el cual consiste en una variedad de polígonos inscritos en una circunferencia, los cuales deben ser explorados a través de un deslizador. En un primer momento, la alumna intenta deducir el ángulo central para cada polígono de lados *n*, sin embargo, resulta poco claro para ella identificar quién es el ángulo central y tiende a confundirlo con el ángulo formado por la suma de los ángulos interiores de los triángulos que aparecen en el applet (Figura 5.53).

Figura 5.53 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 1



Fuente: Elaboración propia.

Por lo que la investigadora recurre a ciertos cuestionamientos para que la alumna intente deducir el ángulo central, como lo podemos ver en el siguiente extracto de conversación.

Investigador (I)/Alumno (A)
I: ¿Cuál es la medida del ángulo formado por la suma de las medidas de ángulos que rodean al punto A? A: mmm… ¿360°? I: ¿Por qué 360°? A: Porque es el total, es una vuelta completa (hace gestos con la mano refiriéndose a una circunferencia) I: Tu ya sabes que la suma es 360°, quisieras encontrar alfa ¿Cómo la encuentras? A: Dividiendo 360° entre el número de lados que tiene la figura.

En un segundo momento la alumna intenta ver casos particulares para identificar que efectivamente dividir 360° entre un número de lados de un polígono en particular resulta que obtiene el ángulo central. Una vez que la alumna ha observado casos particulares generaliza para cualquier polígono de *n* lados. Por lo que afirma que, *el valor del ángulo alfa es la división de 360 entre el número de lados, n.*

Por otro lado, cuando la alumna justifica la medida del ángulo interior de cualquier polígono regular, ella ha recurrido explorar algunos casos de polígonos regulares y su relación con los triángulos que se forman en el polígono. Luego, la alumna deduce que, para conocer el ángulo interior de un polígono regular, es necesario calcular la medida del ángulo central y restarlo al ángulo de 180°, es decir, *alfa=360/n y 180-360/n* entre dos y finalmente ese resultado multiplicarlo por 2. Aquí la alumna explica un algoritmización o procedimiento que le permite calcular el ángulo interior del polígono regular, a partir de los ángulos interiores de los triángulos isósceles formados en ellos. Finalmente, la alumna realiza este procedimiento para calcular los ángulos interiores de polígonos en particular, como el del pentágono, hexágono, octágono, entre otros.

Configuración cognitiva de Gabriela sobre la práctica matemática de la actividad 2

Figura 5.54 Configuración cognitiva de Gabriela asociada a la actividad 2

<table>
<tr><td rowspan="5">Elementos lingüísticos

Verbal informal
Simbólico
Geométrico
Gestual</td><td rowspan="5">Expresa y soporta

Regulan el uso</td><td colspan="2">Situaciones problema
Manipulación de un applet en GeoGebra para calcular el ángulo central de cualquier polígono regular, así como calcular la medida del ángulo interior de diferentes polígonos regulares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Motivan Resuelven</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definición/conceptos</td></tr>
<tr><td>Intervinientes
Triángulos
Polígono regular
Congruencia
Ángulo central
Ángulo interior</td><td>Emergentes
Triángulos
Polígono
Lados
Ángulos
Triángulo isósceles
Congruencia
Variable</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propiedades/proposiciones
Intervinientes
La medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.</td></tr>
</table>

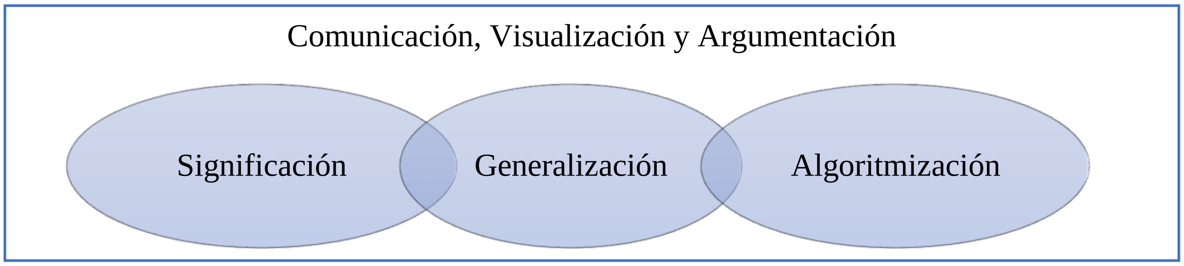
		<u>Emergentes</u> La medida del ángulo central BAB' es $\frac{360}{n}$.
		<u>Procedimientos</u> Se describe un procedimiento para calcular el ángulo central y luego se resta el valor de 180 grados, para posteriormente el resultado se divide entre dos para después multiplicarlo por 2 Ángulo central=360/12=30 180-30=150 150/2=75 (75 es igual al valor de los ángulos del triángulo isósceles) 75x2=150 (150 es el valor del ángulo interno del polígono).
		Justifican
		<u>Argumentos</u> Se justifican los procedimientos aplicando la medida del ángulo central BAB' y el número de lados, $\frac{360}{n}$, y la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Gabriela</u>

En un primer momento la alumna recurre a procesos de *comunicación y visualización* para la interpretación de la situación, la cual implica la manipulación de un applet, donde se pone en juego la visualización de diferentes objetos geométricos, como el ángulo central, ángulo interior para diferentes polígonos regulares. También, la alumna recurre a un proceso de *algoritmización* cuando ella es capaz de calcular el ángulo interior para diferentes polígonos regulares, tomando en cuenta el ángulo central y la medida de la suma de ángulos interiores de un triángulo. Posteriormente, la alumna recurre a un proceso de *significación y generalización* cuando ella identifica la medida del ángulo central y determina la medida del ángulo interior para un polígono de lado *n*. Además, experimenta un proceso de argumentación mediante el planteamiento de conjeturas a través de software y justificarlas a través de este.

Figura 5.55 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

<u>Prácticas matemáticas de Gabriela asociada a la actividad 3</u>

La actividad 3 conformó cinco apartados centrados en las transformaciones isométricas y los objetos matemáticos relacionados con estas, por ejemplo, (vector, ángulo de rotación, eje de rotación, mediatriz, vértice, recta, etc.).

<u>Sobre la traslación</u>

Esta sección correspondiente a la traslación, donde la alumna realiza manipulación y exploración de un applet que le permite visualizar la traslación de un cuadrado a través de la manipulación de un vector. La alumna identifica la ubicación de vector de tal manera que el cuadrado trasladado quede acoplado al cuadrado original, esto le lleva a la alumna a determinar que el vector debe medir 6 unidades para que ambos cuadrados tengan un lado común. Además, cuando la alumna manipula el vector logra identificar que, en algunos valores del vector, el cuadrado trasladado queda sobrepuesto al cuadrado original, para ello la alumna recurre a la visualización en repetidas veces para describir correctamente lo que se le solicita. Por otro lado, ella muestra inseguridad para manifestar sus respuestas, ya que al explicar no se refiere correctamente a los objetos geométricos. Por ejemplo, *la ubicación de p1´ al momento de encimarse con p1 no tiene relación con el vector, pero sí con las medidas sobrantes (lo no encimado).* Aquí ella debiera mencionar regiones o áreas sombreadas. Luego, la alumna identifica una relación entre el vector de traslación y la figura trasladada, estableciendo que las medidas del cuadrado no cambian cuando la medida del vector cambia.

Por otro lado, cuando la alumna explora una construcción de mosaicos rectangulares, ella identificó que para construirlo los vectores debieran estar ubicados de manera vertical, hacia arriba y había abajo, así como de derecha a izquierda, de tal manera de generar los lo rectángulos y que entre ellos tengan lados comunes. Además, es recurrente que la alumna relacioné la medida del ángulo de 360° con la representación gestual de una vuelta completa, sin embargo, al justificar ella menciona que para que se forme la medida del ángulo de 360° es necesario sumar cuatro veces la medida del ángulo 90°.

Finalmente, la alumna es capaz de dar una significación al concepto de la traslación geométrica, haciendo referencia a *mover una figura de lugar con respecto al vector, manteniendo siempre las mismas características, tomando en cuenta las medidas originales de la figura inicial.*

Sobre la rotación

La alumna procede a la lectura de las instrucciones y realiza la manipulación y exploración del applet, el cual está relacionado con la rotación de cuadrados. En este caso, la alumna tiene que mover deslizadores de tal manera que ubique las medidas de ángulos de rotación, así como centros de rotación que se requieren para que efectivamente sea un mosaico formado por cuadrados. Para ello, la alumna ha identificado la media de ángulos correspondientes a 270° y 90° para el caso en que el P0, es decir, el cuadrado original comparte un lado común con otros cuadrados, en cada uno de sus lados.

Respecto a los centros de rotación, la alumna ubica los vértices como unión (en vez de centro de rotación), donde los cuadrados tienen una rotación de 360° con respecto al cuadrado original. Además, la alumna vuelve a identificar que la medida de la suma en cada vértice es *de 360° en cada vértice del cuadrado, por el hecho de que cada cuadrado tiene medidas de ángulos de 90°.* Es importante mencionar, la alumna se refiere al centro de rotación como un elemento necesario que le ayudé a rotar los cuadrados, y señala que los puntos de intersección encadan vértice podría formar más centros de rotación que le permitan ampliar o generar el mosaico, en este caso formado por cuadrados. Luego, la alumna se le cuestiona la medida de los ángulos que debiera rotar en caso de que formara un mosaico con triángulos equiláteros y hexágonos regulares. A lo que ella afirma que para el caso del triángulo debe de ser *60° en 60° porque todos los ángulos internos de un triángulo equilátero* *miden 60°*, mientras que para el caso del hexágono la medida de ángulo a rotar debe ser *120 grados para que se pueda mantener la figura de hexágono regular*. Cabe resaltar que, en este momento, ella recurre a recordar como calcular la media de un ángulo interior para determinar la medida del hexágono, esto con la ayuda de la visualización del applet donde la alumna se le pedía encontrar la medida de ángulos interiores de polígonos regulares.

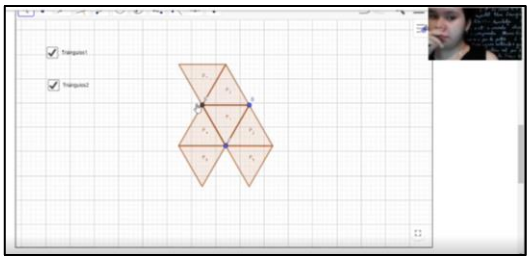
Finalmente, la alumna es capaz de dar significado al objeto de la rotación geométrica, el cual ella refiere en *girar sobre un mismo punto que en este caso sería A, B, C o D en cualquier medida del ángulo.*

<u>*Sobre la reflexión o simetría axial*</u>

Respecto a la reflexión, la alumna procede a leer las instrucciones y a explicar y manipular el applet, el cual tiene que ver con el trazo de segmentos entre vértices de dos triángulos reflejados, es decir que se les ha aplicado la herramienta de simetría axial. Una vez que la alumna ha realizado el trazo de los segmentos, traza la recta que pasa por los puntos medios de tales segmentos, justificando que es perpendicular a los segmentos, ya que *se forma un ángulo de 90 grados y solo tiene un punto de intersección con cada segmento*, aquí la alumna señala la intersección del segmento y la recta. Además, cuándo se le pregunta ¿Qué representa esa recta referente a los segmentos trazados? en este momento la alumna duda sobre su respuesta y afirma *que tienen puntos en común en una misma recta*, refiriéndose al punto de intersección entre los segmentos y la recta, por tanto, ella pasa por alto que la recta representa la mediatriz de esos segmentos trazados. La investigadora le pregunta a la alumna a ¿qué puntos en común te refieres? la alumna afirma que *a las mitades que se partieron, a la mediatriz*, cuando se le pregunta ¿Quién es la mediatriz? La alumna señala que es la recta que, para aquí, señalando la recta en el applet. En este momento la alumna no se refiere al concepto correcto de la noción de mediatriz.

Por otra parte, la alumna determina que la distancia que hay entre la recta y cualquier vértice de los triángulos dados, es la misma, ya que *la recta es la representante de la mediatriz tiene que partir exactamente la mitad de cada segmento.* Hay que mencionar que la alumna constantemente espera la confirmación de la investigadora. Finalmente, la alumna identifica ejes de simetría que le permiten reflejar triángulos equiláteros, esto desde la exploración y visualización del applet. Por ejemplo, *el eje de simetría para p2 (cuadrado) es el segmento BA, para p3 (cuadrado) es CB y para p4 (cuadrado) CA; esto pasa por el hecho de que las medidas que poseen esos segmentos son congruentes entre sí mismos y con ellos se puede reproducir perfectamente la construcción.*

Figura 5.56 Manipulación del applet para identificar ejes de simetría en la actividad 3



Fuente: Interfaz del GeoGebra Classroom.

Configuración cognitiva de Gabriela sobre la práctica matemática de la actividad 3

En la Figura 5.57 se muestra la configuración cognitiva asociada a las prácticas matemáticas de Gabriela, donde pone de manifiesto la red de objetos matemáticos intervinientes y emergentes en el desarrollo de la actividad 3. Se destaca la significación que asocia a las transformaciones isométricas, donde recurre a concepto de vector, ángulo interior, mediatriz, congruencia, entre otros. Se recurre a la propiedad de que la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares que conforman un mosaico debe medir 360°.

Por otro lado, la alumna fue capaz de realizar procedimientos relacionados con identificar tanto el ángulo interior de cualquier polígono regular, así como la medida de la suma del ángulo que se formaría en cada vértice de los mosaicos presentados en el software GeoGebra.

Figura 5.57 Configuración cognitiva de Gabriela asociada a la actividad 3

Elementos lingüísticos		Situaciones problema

<table>
<tr>
<td rowspan="8">Verbal y Gestual: lenguaje relacionado con el contexto y los conflictos presentes para justificar sus respuestas.

Gráfico - software: el uso de deslizadores y herramientas del applet.

Gráfico/geométrico: Representación del vector, ángulo, eje de simetría, polígono, etc. en el applet del GeoGebra.

simbólico: por ejemplo, lado FI, vector $\overrightarrow{AB}$ y cuadrados $P1$ y $P1'$.</td>
<td rowspan="8">Expresa y soporta

Regulan el uso</td>
<td colspan="2">Conceptualización de las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) a través de la manipulación y exploración de applets.</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Motivan Resuelven</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Definición/conceptos</u></td></tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Vector
Ángulo interior
Vértice
Triángulo equilátero
Congruencia
Hexágono
Ángulo recto</td>
<td><u>Emergentes</u>
Traslación
Rotación
simetría axial
Mediatriz
Congruencia
Eje de simetría
Intersección
Ángulo de rotación, ángulo recto.</td>
</tr>
<tr><td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
La medida de la suma de los ángulos de cada vértice es 360°
La medida de los ángulos interiores de los triángulos equiláteros es congruente.
La mediatriz pasa por los puntos medios de los segmentos y los divide a la mitad.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Emergentes
Se determina la suma de la medida de los ángulos interiores del mosaico rectangular, el cual es 360°, así como del triangular y el hexagonal.
Se determinan 8 vectores como necesarios para construir un mosaico rectangular.
Se identifican objetos necesarios para aplicar cada una de las transformaciones isométricas, por ejemplo, para aplicar rotación se requiere un ángulo y un centro de rotación o punto de intersección, así como el eje de simetría al aplicar simetría axial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifican</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Argumentos</u>
Los argumentos se desarrollan cuando se justifica el comportamiento de los objetos geométricos cuando se aplica cierta manipulación o exploración en el applet. Se plantean conjeturas relacionadas con la manipulación, la exploración y visualización. Se conjetura sobre la medida</td></tr>
</table>

		de los ángulos interiores de los polígonos para justificar que podrían formar un teselado. Se justifica la construcción de la mediatriz en términos de la distancia entre los extremos de los segmentos y la recta mediatriz.

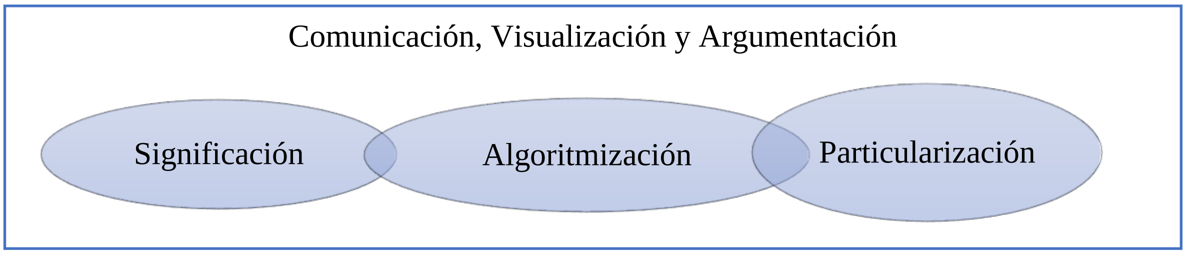
Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Gabriela

La alumna inicialmente realizó un proceso de *comunicación* al interpretar cada una de las situaciones, así como desarrollar instrucciones referentes al uso de los applet en el GeoGebra, a su vez y en este momento ella recurrió constantemente a un proceso de *visualización q*ue le permitió usar un lenguaje informal para interpretar y comunicar sus ideas y razonamientos sobre los objetos geométricos involucrados, como fueron los vectores, ángulos, puntos de intersección, espejo, desplazamiento, rotación, mediatriz, etc. Por otro lado, el proceso de *significación* fue recurrente, cuando una vez que la alumna había realizado, exploración, manipulación y visualización de los applets, ella fue capaz de conceptualizar las nociones de las transformaciones isométricas, por ejemplo, al referirse a la traslación como el movimiento de una figura con respecto a un vector. De esta manera, para cada una de las transformaciones la alumna identifico las herramientas y los objetos geométricos necesarios que le permitieran deducir una conjetura entorno a la definición de las isometrías en el plano. También, la alumna recurrió a un procedo de *algoritmización* cuando ella realizó el cálculo de los ángulos interiores a partir de la manipulación del applet y utilizando la propiedad de que la suma de la medida de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°, eso fue en avance esencial para las construcciones posteriores que ella tenía que realizar referente a los teselados.

El proceso de *particularización* fue recurrente cuando la alumna analizaba casos particulares y diferentes al caso que se le pedía en la situación, por ejemplo, cuando se le pedía que moviera el vector de tal manera que el cuadrado original quedara acoplado con el transformado o que compartieran un lado en común, ella exploraba el caso cuando quedaba sobrepuesto, pero también cuando quedaban muy alejados entre ellos. En la Figura 5.58 se muestran los procesos identificados durante el desarrollo de la práctica matemática de la alumna, en donde el proceso de comunicación, visualización y argumentación son procesos transversales en toda la práctica realizada, ya que el uso de estos procesos fue constantemente fomentado en el desarrollo de las actividades.

Figura 5.58 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 3



Fuente: Elaboración propia.

<u>Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 4</u>

La actividad fundamental al que se enfrentó la alumna fue a la construcción de los teselados regulares utilizando las transformaciones isométricas, para ello se proporcionaron sugerencias sobre las herramientas del GeoGebra que podía aplicar para la construcción y se proporcionó la definición de teselado regular.

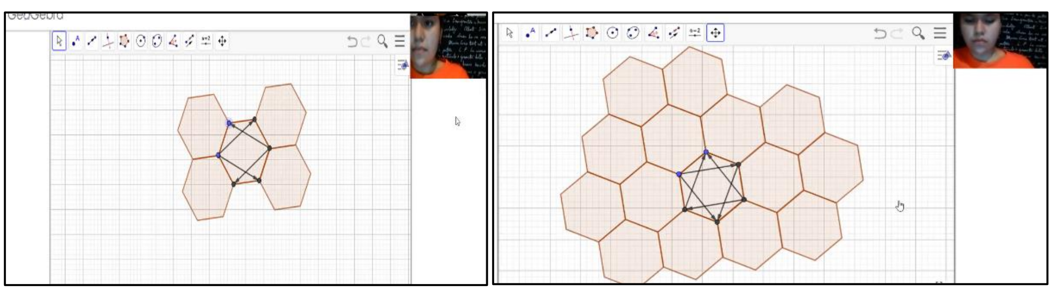
<u>La construcción de los teselados regulares</u>

En la primera construcción se le da la indicación de utilizar solo la traslación geométrica y use hexágonos regulares, sin embargo, aunque se le da instrucciones sobre la aplicación de las herramientas necesarias para la construcción, la alumna las omite y no tiene claro como ubicar los vectores de traslación. Durante la construcción la alumna ubica los vectores desde un vértice y sobre el plano, no sobre el polígono base, a lo que se le indica a la alumna que esa construcción no es similar a la construcción que ya se le ha presentado. Se le pide que lea la definición de teselado regular, entonces la alumna analiza sobre cómo debiera ubicar los polígonos, en voz baja dice ella: *tengo que usar otro vector*, por lo que sigue ubicando vectores, sin embargo, estos solo trasladan polígonos que quedan sobrepuestos o muy alejados del polígono base. Hasta este momento, cuando se le pide a la alumna que mueva o arrastre un punto del vértice del polígono base, ella dice: se deshace la forma, se le cuestiona lo que aparece en el siguiente cuadro.

Investigador (I)/Alumno (A)
I: ¿Por qué crees que la construcción se deforma? A: Porque las medidas cambian y con los vectores no sirve. I: ¿Crees que los vectores tienen que ver para que se deforme? A: sí I: Entonces ¿cómo debieras de ubicar los vectores para que no se te deforme la construcción? A: ¿Por dentro? I: Entonces intenta realizarlo de la manera que me estás diciendo.

Posteriormente, la alumna vuelve a realizar la construcción, pero en este caso ella ubica los vectores sobre los lados del hexágono, sin embargo, se da cuenta que los polígonos se vuelven a sobreponer, así que ella vuelve a experimentar, moviendo los vectores de tal manera que el polígono trasladado queda sobre un lado del polígono base y se da cuenta que los vectores deben ser ubicados en diagonal. Finalmente, la alumna amplia el teselado aplicando otros vectores que le permiten ampliar el teselado regular, como lo podemos ver en la Figura 5.59.

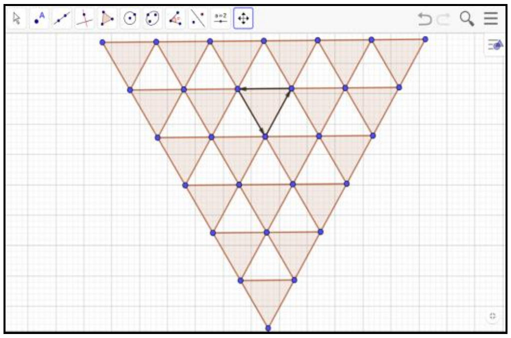
Figura 5.59 Construcción del teselado regular aplicando traslación geométrica



Fuente: interfaz de la plataforma GeoGebra.

En el caso de la construcción del teselado regular formado por triángulos equiláteros y aplicando traslación geométrica, sin embargo, en este caso ella dejo regiones sin cubrir, tales regiones eran formados por los triángulos equiláteros. De esta manera, la alumna asumió que también era un teselado regular, considerando que las regiones sin cubrir eran parte del teselado regular como en la Figura 5.60.

Figura 5.60 Construcción del teselado regular aplicando traslación geométrica

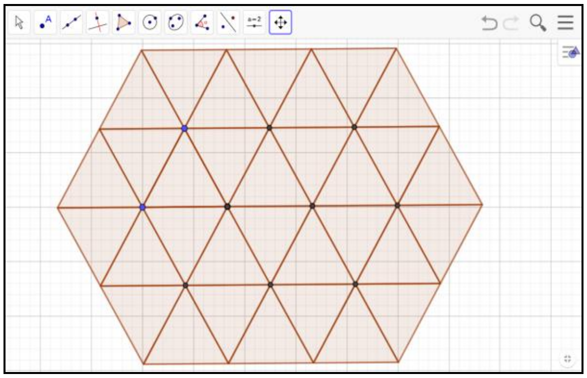


Fuente: Interfaz de la plataforma GeoGebra Classroom.

Posteriormente, la alumna realiza la construcción del teselado regular usando triángulos y aplicando rotación geométrica, para lo cual aplica la media del ángulo de 60° y usa los puntos que están sobre el vértice del triángulo base. Sin embargo, cuando ya no es posible de seguir usando esos puntos, la alumna crea sus propios puntos con la herramienta punto del *GeoGebra*, cabe mencionar que estos puntos solo quedaban sobre puestos en el vértice del polígono, de tal manera que no quedaban fijos, lo que ocasiona que al rotar los triángulos y posteriormente aplicara la herramienta de arrastre, el teselado se deformara.

En este momento, la investigadora sugería que aplicara el arrastre a cualquier punto del triángulo base para que la alumna observara que el teselado no se estaba construyendo correctamente. Por lo que la investigadora interviene, recordándole a la alumna cómo se llama el punto formado por dos rectas que se cruzan, haciendo una analogía con dos lápices, a lo que ella inmediatamente recuerda que es el punto de intersección, así que se le pide que busque si hay esa herramienta en el GeoGebra, que le permita ubicar el punto de intersección. La alumna recurre a la búsqueda y encuentra esa herramienta, ubicando el punto de intersección entre dos polígonos y continúa rotando los triángulos aplicando la medida de ángulo de 60°, luego sin que le diga la investigadora, la alumna verifica si efectivamente la construcción del teselado se está construyendo correctamente, es decir, no se deforma, ella se sorprende (haciendo un gesto en voz alta) al observar que lo está construyendo correctamente. Finalmente, la alumna amplia el teselado regular formado por triángulos equiláteros como en la Figura 5.61.

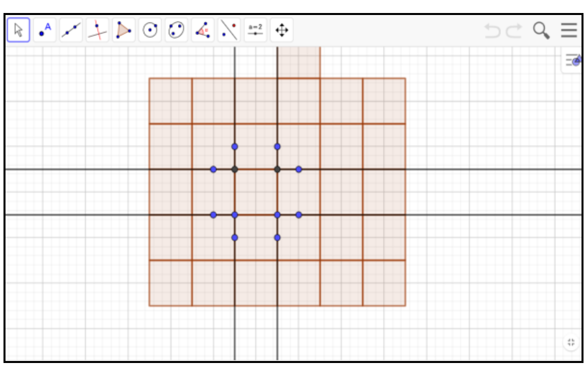
Figura 5.61 Construcción del teselado regular aplicando traslación geométrica



Fuente: Interfaz de la plataforma GeoGebra Classroom.

En el caso del teselado regular usando cuadrados y simetría axial, la alumna ubica un cuadrado y los ejes de simetría que le permitirán transformar el cuadrado base. Por lo que considera que los ejes de simetría (considerada como la línea que va a ser el espejo) debieran estar sobre los lados del cuadrado base, y comienza a reflejar los cuadrados (Figura 5.62). Finalmente, la alumna sigue experimentando a prueba y error sobre cómo usar esos mismos ejes de simetría que le permitan ampliar el teselado, lo que la lleva a identificar que: *para mandar un cuadrado a la izquierda verticalmente, le daba clic a la recta vertical del lado derecho.*

Figura 5.62 Construcción del teselado regular aplicando traslación geométrica



Fuente: Interfaz de la plataforma GeoGebra Classroom.

Respecto a la explicación de su procedimiento la alumna no usa los conceptos correctos para justificar su procedimiento de construcción, por ejemplo, cuando ella confunde el eje de simetría con el cuadrado, así como también confunde la recta con un segmento de recta. Sin embargo, la alumna justifica que uso la recta como eje de simetría porque ya lo conocía y lo había visto en un video de *YouTube*, así que por eso se le ocurrió que podía usar recta en vez de un segmento o el lado del cuadrado base. Por otro lado, cuando ella valida su construcción a través de la herramienta de arrastre, ella se percata que la construcción se deforma y lo describe de la siguiente manera: *no sigue siendo un teselado por el hecho de que al mover la figura base no se mantienen unidos los cuadrados y las rectas están mal ubicadas porque no mantiene unido al teselado*.

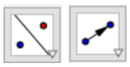
<u>*Configuración cognitiva de Gabriela sobre la práctica matemática de la actividad 4*</u>

La Figura 5.52 corresponde a la configuración cognitiva de los objetos matemáticos que pone en juego la alumna Gabriela. En esta configuración la alumna conceptualiza las transformaciones isométricas, estas nociones las materializa en la construcción de los teselados regulares, por ejemplo, cuando aplica la rotación la alumna recurre a identificar un centro de rotación, el cual ella crea ubicando un punto de intersección. Para el caso cuando la alumna aplica traslación requiere de ubicar vectores sobre la figura base, esto lo hace mediante la exploración y experimentación para determinar la ubicación de los vectores y cuántos se requieren para generar el teselado regular. En estas construcciones se pone a prueba la validación de la construcción y de la propiedad referente a la medida de la suma de ángulos en cada vértice, el cual debe ser 360°. Por otra parte, la argumentación y justificación de la construcción se realizó desde el uso de las herramientas, es decir, de cómo se fueron aplicando para que se realizara una correcta construcción.

Figura 5.63 Configuración cognitiva de Gabriela asociada a la actividad 4

<u>*Elementos lingüísticos:*</u>	Se abordan <u>*situaciones*</u> que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de

Verbal: lenguaje común, gestual.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.  

Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

un teselado regular utilizando hexágonos, cuadrados y triángulos. Las situaciones involucran la justificación y argumentación del procedimiento de construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos: Previas: Traslación Rotación Simetría axial Vértice Ángulo de rotación Vectores Ángulo interior de un polígono	Emergentes: Conceptualización de la traslación, rotación y simetría axial mediante la construcción de un teselado regular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La medida del ángulo de 360° forma una circunferencia completa.

La medida de los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) dan como resultado 360º.

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

Se identifica los objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).

Emergentes (matemáticos):

Se aplica la traslación, sin considerar que los vectores de traslación deben estar sobre el polígono base.

Se aplican el ángulo de rotación de medida 60°.

Se identifican puntos de intersección para usarse como centro de rotación en la construcción del teselado usando triángulos.

Previos (software):

Se identifican los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.

Emergentes (software):

Aplicación de las transformaciones isometrías (traslación, rotación o reflexión), tomando en cuenta, vector, rotación y eje de simetría.

Justifican

Argumentos:

En las distintas construcciones del teselado regular, se justifica la construcción a partir de la medida de la suma de

		la medida de los ángulos interiores en cada vértice, el cual debe de 360°. Se valida la construcción de acuerdo con la aplicación de la herramienta de arrastre del GeoGebra y se describe el proceso de construcción en términos del uso que se hace de las herramientas del GeoGebra.

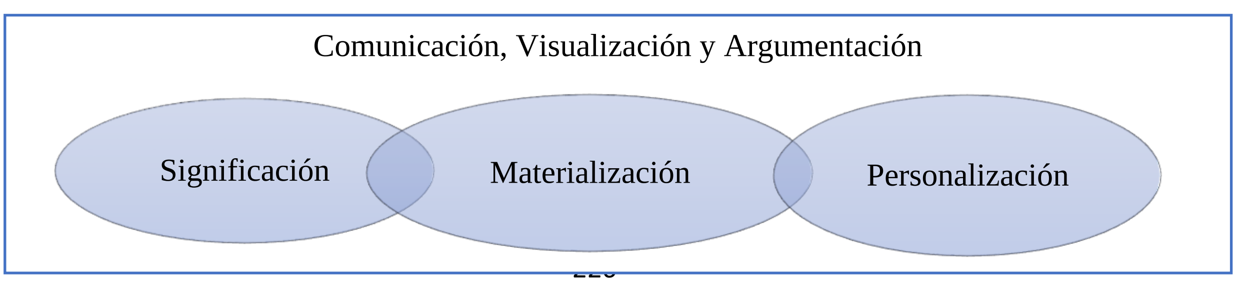
Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Gabriela</u>

Los procesos matemáticos identificados en la práctica matemática de Gabriela correspondiente a la actividad 4, se relaciona principalmente con el proceso de *materialización, significación, personalización, argumentación, visualización y comunicación*. Cuando la alumna comprende e interpreta las situaciones problemas entra en un proceso de comunicación tanto con las tareas asignadas como con las herramientas del software GeoGebra, así como la comunicación establecida con la investigadora sobre las exploraciones y construcciones realizadas.

Por otra parte, el proceso de visualización se hace presente en cada momento cuando la alumna requiere de identificar dónde ubicar los vectores, cuánto es la medida que tiene que rotar del ángulo y dónde se ubicaría tal polígono transformado. Referente al proceso de significación la alumna es capaz de identificar cuando en la construcción aplica una rotación o una traslación, pues conoce que herramientas son las necesarias para construir el teselado, sin embargo, cuando justifica el procedimiento no es capaz de referirse correctamente a los objetos matemáticos, como es el caso del eje de simetría, esto desencadena que el proceso de personalización sea recurrente tanto en la construcción como en su justificación. Cabe señalar que el proceso de visualización, comunicación y argumentación se dan de manera transversal en toda la práctica matemática de la alumna.

Figura 5.64 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 4



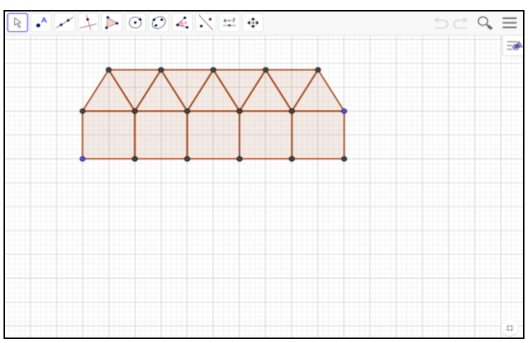
Fuente: Elaboración propia.

Prácticas matemáticas de Diana asociada a la actividad 5

En el desarrollo de la actividad 5 abarcó dos momentos, el primero constituyó la propuesta, por parte de la alumna, sobre una posible combinación de polígonos que le permitieran formar un teselado semirregular, mientras que el segundo momento fue respecto a la construcción específica de un teselado semirregular mediante la aplicación de las transformaciones isométricas.

En la primera parte se le proporcionó a la alumna la definición de teselado semirregular y se le cuestionó sobre si era posible realizar la construcción de un teselado semirregular, formado por triángulos equiláteros y cuadrados. La alumna asume que la construcción es posible y esto lo justifica con la definición del teselado semirregular y con la propiedad de que la medida de la suma de los ángulos interiores de los polígonos sea de 360°. Luego, la alumna recurre al uso de GeoGebra para proporcionar una posible combinación de polígonos (triángulo equilátero y cuadrado) para construir un teselado semirregular (Figura 5.65).

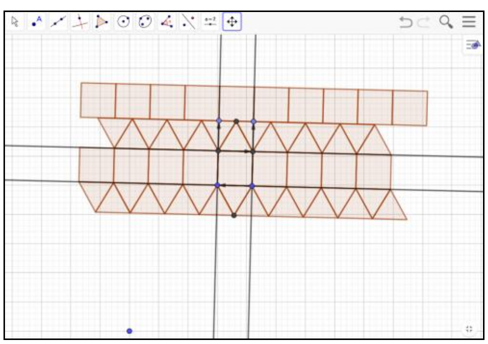
Figura 5.65 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 5



Fuente: Interfaz del GeoGebra.

En este sentido, se le pide a la alumna que amplie la propuesta de construcción de tal manera que genere un teselado semirregular, considerando cualquier transformación isométrica. En este momento, la alumna aplica vectores para trasladar tanto los cuadrados como los triángulos, pero se da cuenta que no es posible para trasladar el triángulo, por lo que empieza a explorar las otras trasformaciones, como la reflexión y la rotación. Después de experimentar y haber realizado varios intentos, tanto con rotación, simetría axial y transformación, decide quedarse con traslación y simetría axial, de esta manera genera el teselado, como se ve en la Figura 5.66. En este caso la alumna es capaz de construir y materializar las nociones de transformaciones isométricas y de teselado semirregular, esto a través de la descripción del siguiente procedimiento: *primero seleccione mis dos polígonos para poder construir el teselado, después coloque rectas a los costados del cuadrado, es decir pegado en cada cara, después reproduje los cuadrados con simetría axial, con el triángulo para poderlo cambiar de posición aplique la rotación a 60 grados y para poder seguir ampliando el teselado tuve que usar traslación de modo que los vectores seguían los lados del cuadrado, pero para poder ir arriba o abajo los vectores se colocaron a doble medida del cuadrado original para no amontonar a los cuadrados con los triángulos.*

Figura 5.66 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad

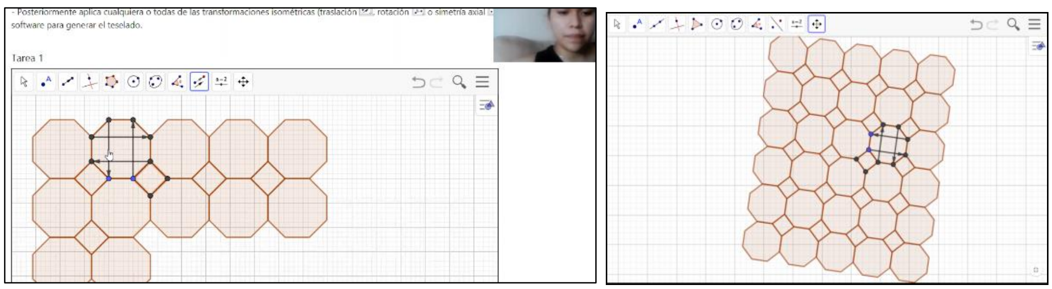


Fuente: Interfaz del GeoGebra.

Posteriormente, la alumna concreta la construcción de un teselado semirregular y es capaz de ponerlo en evidencia cuando ella aplica la prueba de arrastre y corrobora que la construcción cumple con la definición de teselado semirregular.

En la segunda parte de la actividad 5, donde la alumna tuvo que realizar la construcción de un teselado semirregular, formado por cuadrados y octágonos. En un primer momento, la alumna lee las instrucciones y a ubicar los polígonos requeridos como base para posteriormente, aplicarles las transformaciones isométricas que le permitan generar el teselado. En este caso, la alumna es consciente de que los vectores los debe ubicar sobre los polígonos base, por lo que considera que es suficiente tener cuatro vectores para generar el teselado, tales vectores de traslación los ubica de manera horizontal y vertical.

Figura 5.67 Construcción de un teselado semirregular usando traslación



Fuente: interfaz del GeoGebra.

Finalmente, la alumna describe el proceso de construcción refiriéndose a procedimiento que siguió al momento de aplicar las herramientas del GeoGebra, por ejemplo, *Primero seleccione la opción de polígono regular marcando 8 vértices para el octágono, después colocándome en la cara baja del lado derecho puse el cuadrado con la misma opción de polígono regular, procedí a usar vectores de modo que los coloque de vértice a vértice, es decir de arriba a abajo, de izquierda a derecha y viceversa, únicamente los coloqué en el octágono, finalmente seleccioné la traslación y le di clic al polígono, después al vector hacía la dirección que quisiera mandar a cualquier polígono, para ampliar el teselado le daba clic a las figuras que no fueran las iniciales para no encimar.* Por otra parte, la alumna validó la construcción a través de la herramienta de arrastre y verificando que cumpliera con la noción de teselado semirregular. Además, resaltó que *la medida de la suma de sus ángulos interiores de los polígonos, el cuadrado con un ángulo interior de 90 grados y por dos octágonos con un ángulo de 135 grados, entonces el total de la suma es 360 grados.*

Configuración cognitiva de Gabriela sobre la práctica matemática de la actividad 5

La Figura 5.68 presenta la red de objetos matemáticos manifestados en la práctica matemática de la alumna Gabriela, quién desarrollo una riqueza de conceptos entorno a las isometrías en el plano, ya que en esta actividad fue capaz de integrar las diferentes transformaciones durante la construcción de los teselados semirregulares. En esta actividad la alumna sentía familiarizada con tales herramientas del GeoGebra, por ejemplo, el de punto de intersección para aplicar rotación, la ubicación de los vectores para aplicar la traslación, y el uso de rectas para utilizarlas como ejes de simetría cuando necesitaba aplicar simetría axial, entre otros. Además, durante la construcción se aseguraba que este no se deformara y cumpliera con la definición de teselado semirregular. Asimismo, la justificación de sus respuestas se basó en la propiedad que caracteriza el teselado, el cual fue que en cada uno de sus vértices la medida de la suma de los ángulos interiores de los polígonos debe ser 360°.

Figura 5.68 Configuración cognitiva de Gabriela asociada a la actividad 5

Se abordan *situaciones* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado semirregular utilizando hexágonos regulares. Las situaciones involucran la justificación y argumentación de procedimientos realizados en la construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Elementos lingüísticos:

Verbal: lenguaje común, verbal, informal.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.

Gráfico/geométrico:

Expresa y soporta

Regulan el uso

Definiciones/conceptos:

Previas:

Teselado regular
Traslación
Punto de intersección
Rotación
Simetría axial
Vértice
Centro de rotación
Vectores
Segmento
Hexágono regular

Emergentes:

Conceptualización de las transformaciones isométricas mediante la construcción de un teselado semirregular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice es 360°.

Para la construcción de cualquier teselado en el plano es necesario que la medida del ángulo, en cualquier vértice forme

Representación de polígonos regulares.
Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

un ángulo de 360° y que el ángulo interior del polígono regular (hexágono) sea divisor de 360°.
Los ángulos internos de un octágono son de 135°.

Procedimientos:
Previos (matemáticos):
Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).
Emergentes (matemáticos):
Construcción de un teselado regular utilizando hexágonos regulares.
La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular constituyente en el teselado.
Previos (software):
Identificar los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.
Emergentes (software):
Aplicación de las transformaciones isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión) y sus elementos necesarios que conlleven a la construcción de un teselado regular.
Explicación y descripción del protocolo de construcción del teselado regular en termino de las herramientas dinámicas del GeoGebra.

Justifican

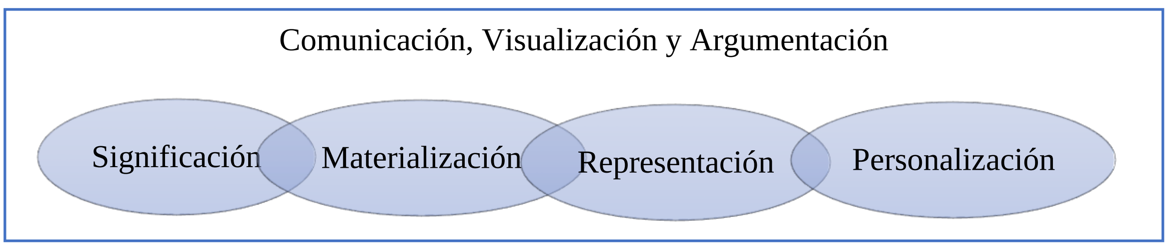
Argumentos:
La suma de la medida de los ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior de un cuadrado mide 120° y el del octágono mide 135°.
Se justifica la construcción a partir del uso de las herramientas aplicadas del GeoGebra, así como la prueba de arrastre que permite validar la construcción.

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Gabriela

Los procesos matemáticos emergentes en las prácticas de Gabriela respecto a la actividad 5, fueron son el de *representación y materialización* durante la construcción de los teselados semirregulares, ya que a través del software mediatiza y materializa su conocimiento, cuando involucra las nociones relacionadas con las transformaciones isométricas y que la llevan a desarrollar un proceso de *significación*, el cual es manifestado a través de lenguaje informal mediante el uso de las herramientas del GeoGebra, las cuales son aplicadas en las construcciones de los teselados, por lo que en el desarrollo de estos significados recurre a un proceso de *personalización*. Además, los procesos de *comunicación argumentación* y *visualización* fueron procesos transversales durante el desarrollo de la practica matemática, esto al interpretar y comunicar a través del leguaje gráfico y textual, en donde la alumna precisó y justificó el procedimiento de construcción. Cabe resaltar que, la alumna puso en juego pruebas empíricas, por ejemplo, al tratar de construir el teselado semirregular optaba por visualizar la ubicación y la dirección de los vectores, para una correcta construcción correcta de los teselados semirregulares.

Figura 5.69 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 5



Fuente: Elaboración propia.

5.4.5 El caso de Ángel

El alumno llevó a cabo el desarrollo de actividades en 12 sesiones de 60 minutos cada una. De igual manera se explicitó la dinámica y se contó con su autorización para que las sesiones fueran videograbadas, especificando el objetivo que tendría la recopilación y el tratamiento de la información. Asimismo, se le pidió al alumno que accediera a la plataforma de *GeoGebra Classroom* e insertara un código clave que le permitiría acceder a cada actividad, así que por cada actividad se generó un código de acceso.

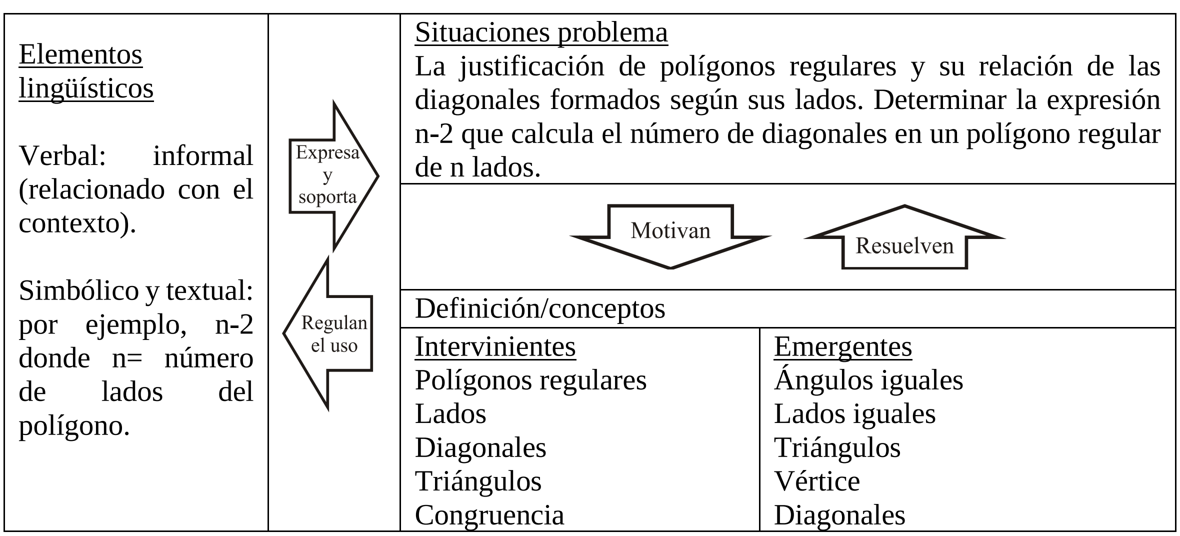
Prácticas matemáticas de Ángel asociada a la actividad 1

La práctica matemática del alumno se basó primordialmente en la observación y análisis de las situaciones, lo que le permitió comprender e interpretar las situaciones que comprendían la actividad 1. Se centro en explicar de manera verbal que los polígonos mostrados eran regulares porque sus *ángulos y lados son iguales*, aunque también hace mención del concepto de *congruencia y medida*, los cuales el alumno los relaciona con la igualdad en valor de lados y ángulos. El alumno comenta, en voz alta que, para él es necesario leer detenidamente para reactivar y organizar sus ideas. Además, expresa un procedimiento visual que refiere a lo que pasa en los polígonos mostrados y su relación con las diagonales trazadas sobre él. A través de esta relación el alumno es capaz de analizar para cada uno de los polígonos y tratar de visualizar la regla o la expresión algebraica, que le permite determinar el número de triángulos de acuerdo con las diagonales trazadas sobre el polígono.

Configuración cognitiva de Ángel sobre la práctica matemática de la actividad 1

La configuración cognitiva asociada a la actividad realizada por Ángel se muestra en la Figura 5.70, en la cual podemos resaltar el procedimiento visual emergente para expresar un discurso asociado a los elementos que intervienen en la representación de los polígonos y las diagonales trazados sobre ellos. Este tipo de procedimiento cobra relevancia para justificar la regla que permite determinar o relacionar el número de lados de un polígono regular y el número de triángulos formados en él. Así, es como el proceso de argumentación se hace presente cuando se recurre a ciertos aspectos visuales en la situación.

Figura 5.70 Configuración cognitiva de Ángel asociada a la actividad 1



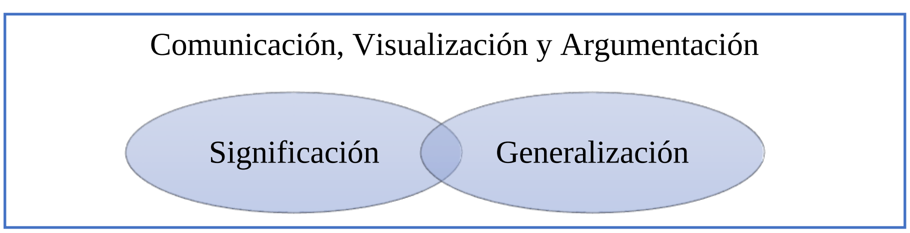
<table>
<tr><td rowspan="6">Gestual: utiliza ademanes cuando habla de ciertos objetos matemáticos.</td><td rowspan="6"></td><td></td><td>Congruencia</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
<u>Emergentes</u>
A medida que incrementan el número de lados incrementaran las diagonales a trazar formando un mayor número de diagonales. Dependiendo de "n" numero de lados haremos una diferencia de menos dos para conocer el número de triángulos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifican</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Argumentos</u>
Se deduce la expresión algebraica n-2 a partir de la propiedad visual identificado de manera particular en cada uno de los polígonos presentados.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

<u>*Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Ángel*</u>

El alumno de inicio recurre a un *proceso de comunicación, visualización y argumentación*, ya que para interpretar y comprender la situación visualiza una definición que se basa en las representaciones de polígonos regulares, e intenta organizar sus ideas para ser lo más claro en su respuesta, ya que manifiesta que no sabe cómo explicar o justificar. Para lo cual el alumno, tiene que recurrir a sus conocimientos previos relativos al polígono regular y los elementos que lo conforman en la situación propuesta, por lo que está en juego un *proceso de significación*, cuando habla de congruencia y medida, se refiere a la igualdad entre lados del polígono regular, aunque cuando redacta su respuesta no lo hace explicito.

Figura 5.71 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 1



Fuente: Elaboración propia.

Prácticas matemáticas de Ángel asociada a la actividad 2

En esta actividad el alumno recurre a la manipulación de un applet, donde tiene que usar un deslizador para hacer variar el número de lados de polígonos regulares. Con base en lo anterior, el alumno en un primer momento identifica el ángulo central en la construcción de varios polígonos regulares, el cual refiere a él como: *alfa= 360/3*, justificando que *al ser polígonos regulares los ángulos que complementan alfa deben de medir lo mismo. alfa=360/n. "n" representado el número de lados del polígono.* Aquí podemos notar que el alumno aborda un caso particular para cuando se trata de un polígono de tres lados y posteriormente cuando se refiere a un polígono de *n* lados.

Por otro lado, cuando el alumno manipula el applet para el caso del polígono regular de doce lados, él muestra un procedimiento que le permite encontrar el ángulo interior del polígono regular de doce lados. Asimismo, el alumno recurre a aplicar tal procedimiento para calcular el ángulo interior de cualquier polígono regular, es decir, para el caso general, por lo que resalta lo siguiente: *360/n=alfa 180-alfa= la suma de dos ángulos que son iguales del triángulo isósceles La suma de los ángulos/2= cualquiera de los dos ángulos iguales que tiene el triángulo isósceles a+a= el ángulo interior del polígono. "a" representa al ángulo del triángulo isósceles.* En esta explicación se puede notar que el alumno suele combinar el lenguaje algebraico y común, dejando entre ver su lenguaje informal.

Finalmente, de acuerdo con la manipulación y exploración del applet, el alumno fue capaz de calcular los ángulos interiores para diferentes polígonos regulares, de esta manera, él pudo generalizar para cada polígono regular de *n* lados, es necesario aplicar la siguiente relación: *n=180- El valor de alfa.* Cabe resaltar que, el alumno suele combinar expresiones algebraicas con el lenguaje común para referirse a los objetos matemáticos, en este caso que refieren a objetos geométricos.

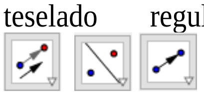
Configuración cognitiva de Ángel sobre la práctica matemática de la actividad 2

Durante la práctica matemática correspondiente a la actividad 2, el alumno relacionó una red de objetos matemáticos, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos a través de la aplicación de las herramientas del GeoGebra, así como la justificación o argumentos, cuando el alumno determinó un procedimiento para calcular el ángulo interior. Además, el alumno fue capaz de integrar algunas nociones, como, por ejemplo, el ángulo central con el de ángulo interior. Asimismo, se identificó un procedimiento que le permitió al alumno calcular el ángulo interior del polígono regular. Por otra parte, se evidenciaron las nociones de medida, congruencia, triángulo isósceles, los cuales se fueron recurrentes para justificar procedimientos particulares como generales. En la justificación de argumentos, el alumno recurrió a utilizar.

Figura 5.72 Configuración cognitiva de Ángel asociada a la actividad 2

<table>
<tr>
<td rowspan="8"><u>Elementos lingüísticos</u>

Verbal: lenguaje común, informal, gestual.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.


Gráfico/geométrico:
Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.</td>
<td rowspan="8">Expresa y soporta

Regulan el uso</td>
<td colspan="2"><u>Situaciones problema</u>
Manipulación de un applet en GeoGebra para calcular el ángulo central de cualquier polígono regular, así como calcular la medida del ángulo interior de diferentes polígonos regulares.</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Motivan Resuelven</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Definición/conceptos</u></td></tr>
<tr>
<td><u>Intervinientes</u>
Triángulos
Polígono regular
Congruencia
Ángulo central
Ángulo interior</td>
<td><u>Emergentes</u>
Triángulos
Polígono
Lados
Ángulo central e interior
Triángulo isósceles
Congruencia</td>
</tr>
<tr><td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
<u>Intervinientes</u>
La medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.
<u>Emergentes</u>
La medida del ángulo central BAB' es $\frac{360}{n}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Se realizó un procedimiento para el cálculo del ángulo central, tanto para casos particulares de polígonos regulares como el caso general.
Se realizó un procedimiento para el cálculo del ángulo interior para casos particulares de polígonos regulares, como para el caso general.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifican</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Argumentos</u></td></tr>
</table>

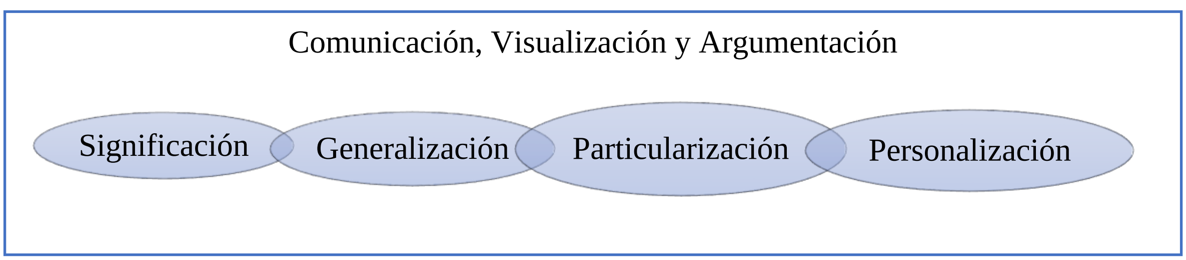
		Se justifican los procedimientos aplicando la medida del ángulo central BAB' y el número de lados, $\frac{360}{n}$, y la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo isósceles es 180°.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Ángel</u>

Los procesos matemáticos evidenciados por el alumno fueron el de *particularización* y *generalización*, los cuales fue recurrente cuando el alumno identificó la medida del ángulo central y la medida del ángulo interior para casos particulares de polígonos regulares, y luego para el caso general. Por otra parte, los procesos de *significación* y de *personalización* fueron manifestados cuando el alumno fue capaz de identificar y relacionar varios conceptos. Además, los procesos de *comunicación, visualización* y *argumentación* fueron transversales en el desarrollo de la práctica, ya que el alumno interpretó las situaciones presentadas y expresó y comunicó sus ideas con la investigadora. Asimismo, la justificación de los argumentos o conjeturas fue recurrente cuando justificaba las medidas de los ángulos interiores, lo que puedo deducir a través de la manipulación, la exploración y visualización del applet.

Figura 5.73 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

<u>Prácticas matemáticas de Ángel asociada a la actividad 3</u>

La actividad 3 conformó cinco apartados centrados en la manipulación y exploración de applets referente a las transformaciones isométricas y los objetos matemáticos relacionados con estas, por ejemplo, (vector, ángulo de rotación, eje de rotación, mediatriz, vértice, recta, etc.).

Sobre la traslación

La actividad referente a la traslación corresponde a dos secciones en la primera, el alumno lee y comprende las preguntas asociadas a la manipulación y la exploración del applet, por lo que manipula un vector de traslación asociado a un cuadrado trasladado, por lo que el alumno relaciona la noción de vector con medida de lados del cuadrado trasladado. De esta manera el alumno, establece una relación entre el vector de traslación y el cuadrado transformado, identificando medida y dirección que debiera cumplir el vector para la traslación del cuadrado, en términos del alumno establece que: *el vector AB es el que le va a indicar las unidades en que se debe de trasladarse y moverse el cuadrado P1*, todos estos elementos mencionados son relacionados con los objetos geométricos que fueron manipulados en el applet.

Respecto a la segunda sección, el alumno manipuló un applet correspondiente a la construcción de un mosaico formado por rectángulos e identificó posibles maneras donde ubicar vectores de traslación de tal manera que pudiera generara el mosaico. Por lo que el alumno describió los posibles casos de los vectores que sirvieran para trasladar el rectángulo base, por ejemplo, ubicar un vector con dirección hacia arriba de tal manera que le permitiera generar rectángulos arriba del rectángulo base. Además, aplicar posibles vectores de traslación le permitió identificar la cantidad de vectores para generar un teselado, en este caso de rectángulos, así como la ubicación de estos. Asimismo, el alumno identificó que la medida del ángulo interior formado en cada vértice del mosaico es de 360°, dado que en cada vértice concurren cuatro ángulos de 90°. Finalmente, el alumno conceptualiza de manera personal lo que es una traslación geométrica, a la cual refiere como: *la construcción de una figura rectangular utilizado un vector que constituye dos puntos con el cual podremos moverlo a voluntad para colocarlo en una posición que indique una actividad, tarea, etc.*

Sobre la rotación

Para el caso de la rotación, el alumno tiene que manipular un applet que incluye un mosaico formado por cuadrados, los cuales se transformaron a través de la rotación. En este caso, el alumno lee la situación y mueve el deslizador relacionado con la medida de ángulos, él identifica la medida de ángulos donde los cuadrados transformados y el base tienen un lado común, en este caso el alumno afirma que para que eso suceda la medida del ángulo de rotación debe ser en 90° y 270°. Además, a través de la visualización de objetos geométricos el alumno es capaz de identificar los vértices como puntos de origen en vez de decir que son el centro de rotación de cada uno de los cuadrados transformados en el applet.

Por otro lado, el alumno identifica casos particulares de medida de ángulos de rotación para cada uno de los cuadrados transformados, ocasionalmente recurre a la visualización del applet, haciendo variar la medida de los ángulos a través del deslizador. Asimismo, las explicaciones se dan de manera informal como, por ejemplo: *para los ángulos de 90-90, 90-180, 270-270 se forman un cuadrado de 3X3, Para los dos casos del deslizador de Beta y alfa tienen un movimiento de afuera para dentro de manera tipo circular*. Posteriormente, el alumno identifica que en cada vértice la medida de la suma de ángulos interiores de cada cuadrado es de 360°, ya que todos los cuadrados son polígonos regulares y todos sus ángulos miden lo mismo. Cabe resaltar que cuando el alumno refiere al ángulo de 360°, lo considera como una vuelta completa. Por otra parte, cuando se le cuestiona sobre la medida de los ángulos que tendría que rotar si formara un mosaico con triángulos equiláteros o hexágonos, el alumno da respuestas ambiguas que no permiten especificar la medida del ángulo, así como tampoco recurre a las medidas de los ángulos interiores de dichos polígonos regulares. Finalmente, el alumno ofrece un significado personal referente a la rotación geométrica, esta noción refiere *al movimiento de una figura a partir de un punto fijo*.

Sobre la reflexión o simetría axial

La actividad respecto a la simetría axial trata de dos secciones, en el primero el alumno comienza con la manipulación y exploración del applet sobre la reflexión de un triángulo. En la segunda sección el alumno da una significación personal entorno a la simetría axial. Una primera indicación sobre el applet es que el alumno tuvo que trazar segmentos entre los puntos homólogos y luego la recta que pasa por los puntos medios de dichos segmentos. Una vez que el alumno ha realizado los trazos procede a justificar que la recta trazada es perpendicular a los segmentos trazados, ya que pasa por los puntos medios y forma ángulos de 90°. Además, menciona que la recta es la mediatriz que pasa por el punto medio, de esta manera, el alumno deduce a través de la visualización que la distancia entre cualquier vértice a la recta (mediatriz) *es la misma ya que al sacar el punto medio de cada segmento y conociendo que el punto medio es punto donde es la misma distancia que existe de E a E´ por ejemplo podemos concluir que si es la misma distancia.*

Configuración cognitiva de Ángel sobre la práctica matemática de la actividad 3

La configuración cognitiva (Figura 5.74) del alumno Ángel muestra la red de objetos matemáticos intervinientes y emergentes, por ejemplo, se recurre a la noción de congruencia identificando ángulos y lados iguales, aunque en este caso no se recurre a la noción de la medida. Respecto a los procedimientos, se aplicaron las transformaciones isométricas para ubicar y comprender aquellos elementos que se relacionan cuando se aplican las transformaciones, por ejemplo, en el caso de la simetría axial, se recurre a identificar los segmentos de los lados del polígono para deducir un procedimiento de construcción de un mosaico. Por otro lado, el alumno logró integrar la aplicación de las transformaciones isométricas y sus correspondientes herramientas necesarias para llevar a cabo la construcción de los teselados en la próxima actividad.

Figura 5.74 Configuración cognitiva de Ángel asociada a la actividad 3

<table>
<tr><td rowspan="4">Elementos lingüísticos
Verbal y Gestual: lenguaje relacionado con el contexto y los conflictos presentes para justificar sus respuestas.

Gráfico - software: el uso de deslizadores y herramientas del applet.</td><td rowspan="2">Expresa y soporta</td><td colspan="2">Situaciones problema
Conceptualización de las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) a través de la manipulación y exploración de applets.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Motivan   Resuelven</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Regulan el uso</td><td colspan="2">Definición/conceptos</td></tr>
<tr><td>Intervinientes
Vector</td><td>Emergentes
Traslación
Rotación</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5">Gráfico/geométrico:
Representación del vector, ángulo, eje de simetría, polígono, etc. en el applet del GeoGebra.

simbólico: Los triángulos P2, P3 y P4. El eje de simetría para P5 fue AB para el P6 fue A y para P7 fue C.</td><td rowspan="5"></td><td>Ángulo interior, recto y rotación
Vértice
Triángulo equilátero
Congruencia
Hexágono</td><td>simetría axial
Mediatriz
Eje de simetría
Ángulo de rotación, ángulo recto.
Congruencia</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Propiedades/proposiciones</u>
La medida de la suma de los ángulos de cada vértice es 360°
La mediatriz pasa por los puntos medios de los segmentos y los divide a la mitad.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Procedimientos</u>
Emergentes
Se determina la suma de la medida de los ángulos interiores del mosaico rectangular, el cual es 360°.
Se determinan ocho vectores como necesarios para construir un mosaico rectangular.
Se identifican objetos necesarios para aplicar cada una de las transformaciones isométricas, por ejemplo, para aplicar rotación se requiere un ángulo y un centro de rotación o punto de intersección, así como el eje de simetría al aplicar simetría axial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifican</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Argumentos</u>
Se justificaron procedimientos de construcción desarrollados en el GeoGebra, cuando se aplica cierta manipulación o exploración en el applet. Se plantean conjeturas relacionadas con la manipulación, la exploración y visualización. Se conjetura sobre la medida de los ángulos interiores y rectos de los polígonos para justificar que podrían formar un teselado.
Se justifica la construcción de la mediatriz en términos de la distancia entre los extremos de los segmentos y la recta mediatriz.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

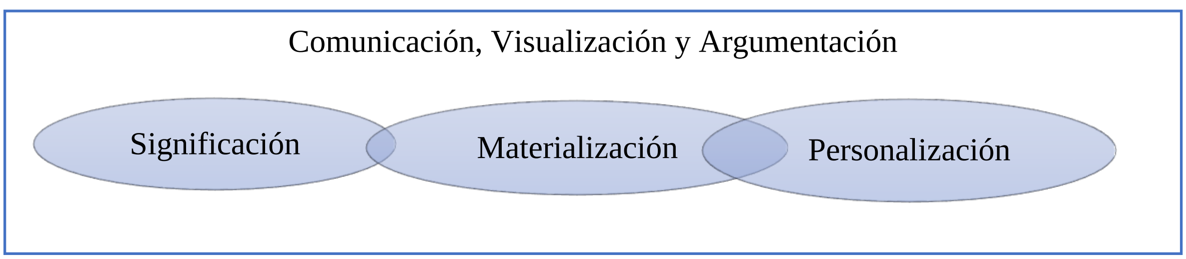
Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Ángel

Los procesos matemáticos emergentes en la práctica de Ángel respecto a la actividad 3, fueron el de *significación, materialización, particularización* y *personalización.* En un primer momento, cuando el alumno interpretó y comprendió cada una de las situaciones, él recurrió al proceso de comunicación y visualización al aplicar cada una de las herramientas del GeoGebra, en particular las transformaciones isométricas.

Respecto al proceso de argumentación, el alumno recurrió durante todo el desarrollo de la actividad, ya que constantemente justificó el procedimiento de construcción, al deducir medida de ángulos o congruencia entre lados. Cabe resaltar que, los tres procesos matemáticos antes mencionados, fueron considerados recurrentes por el alumno, de manera transversal en el desarrollo de su práctica matemática.

Por otro lado, el alumno manifestó un proceso de significación al tratar de definir cada una de las transformaciones isométricas, esto desde el punto de vista personal, ya que tal noción la determinó desde el uso que realizó de las herramientas del GeoGebra. Lo anterior llevó a deducir que el alumno recurrió a un proceso de materialización, ya que, al relacionar algunos objetos geométricos, como el eje de simetría, congruencia, mediatriz, centro de rotación, vector, ángulos interiores, etc. el alumno fue capaz de evocar tales conceptos que lo llevaron a materializar su pensamiento en la aplicación de las herramientas concretas del GeoGebra, como lo fueron las transformaciones isométricas.

Figura 5.75 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad 3



Fuente: Elaboración propia.

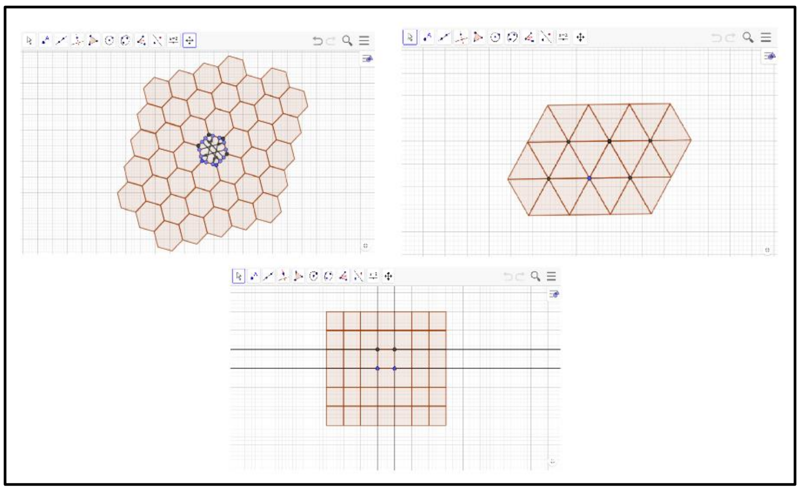
<u>Prácticas matemáticas de Ángel asociada a la actividad 4</u>

La práctica del alumno de la actividad 4 corresponde a la construcción de teselados regulares, los cuales tenían que ser construidos en la plataforma del GeoGebra. En primer lugar, el alumno lee las instrucciones y procede a la construcción de un teselado regular usando hexágonos y la transformación de traslación, sin embargo, cuando el alumno ubica los vectores para él no es claro como debiera de ubicar los vectores de tal manera que los polígonos queden *acoplados* o con un lado en común, esto lo verifica el alumno cuando aplica la herramienta de arrastre que le permite validar si la construcción es correcta o no. Entonces, una vez que ha experimentado con varios vectores (prueba y error), se da cuenta que los vectores deben ser ubicados sobre el hexágono, de tal manera que le permitan ampliar el teselado. Así, el alumno procedió a ubicar seis vectores que le permitieron ampliar el teselado.

En el caso de la construcción del teselado regular usando triángulo equilátero y aplicando rotación geométrica, aquí el alumno aplica puntos de intersección con la herramienta de intersección, los cuales fueron usados como centros de rotación para cada triángulo transformado, asimismo se aplicaron ángulos de 60, 120 y 180 grados. Luego, el alumno describió el procedimiento en términos de los usos que hizo de las herramientas del GeoGebra, es decir, el alumno describe a manera de pasos cómo fue que aplicó las herramientas que le permitieron la construcción del teselado, por ejemplo, *primero utilicé la herramienta de polígono regular, generando un polígono regular de tres lados en este caso, después el vértice de arriba coloque un punto y de ahí partí con las rotaciones del triángulo utilizando la herramienta de rota alrededor de un punto cuando de la figura original ya no pude trazar más rotaciones, utilicé la herramienta de intercesión.*

Respecto a la simetría axial, el alumno ubica un cuadrado y cuatro rectas, una por cada lado, las cuales utilizó como ejes de simetría para reflejar cuadrados alrededor del cuadrado base. Cabe resaltar que el alumno hace varios intentos que le permiten transformar los cuadrados, ya que cuando los reflejaba y notaba que estos quedaban sobrepuestos, él corrigió y volvió a intentar para asegurarse que la construcción fuera correcta. Luego el alumno procede a utilizar los cuadrados transformados para seguir ampliando el teselado, sin embargo, cuando el alumno da su explicación, de manera verbal, él refirió a los ejes de simetría como las rectas y segmentos a la vez, por lo que muestra que las concibe tales objetos geométricos como los mismos. Cabe señalar que, en cada una de las construcciones de los teselados, el alumno recurrió a la validación aplicando la prueba de arrastre, afirmando que: *al mover el teselado continúa siendo un teselado ya que en ningún momento alguna figura se mueve o se desplaza generando huecos en el teselado, también sigue cumpliendo la definición de teselado regular ya que solo se agrande la figuras o se hacen más chiquitas,* *pero continúan siendo un polígono regular*. Finalmente, el alumno identifica la propiedad de que en cualquier vértice de cualquier figura que conforma un teselado se forma un ángulo de 360° a partir de los ángulos interiores de tales polígonos regulares, en este sentido, el alumno deduce que es necesario que se cumpla esta propiedad para saber cuándo un polígono regular puede formar un teselado regular. A continuación, se muestran las construcciones de los teselados regulares que realizó el alumno.

Figura 5.76 Construcción de teselados regulares elaborado por el alumno



Fuente: Interfaz del software GeoGebra.

<u>Configuración cognitiva de Ángel sobre la práctica matemática de la actividad 4</u>

La configuración cognitiva del alumno (Figura 5.77) referente a la actividad 4 muestra la red de objetos matemáticos intervinientes y emergentes durante el desarrollo de la actividad 4. Podemos resaltar que el tipo de lenguaje recurrente por el alumno es informal y poco claro, dado que se usan términos como, *las figuras del teselado regular se hacen grandes o se hacen más chiquitas, pero continúan siendo un polígono regular*. Por otro lado, la integración de diferentes nociones (vector, centro de rotación, eje de simetría, ángulo interior, traslación, vértice, etc.) en la justificación de argumentos, muestra la comprensión de las trasformaciones isométricas, al aplicarlas a un procedimiento de construcción, obteniendo así la construcción de teselados. Además, el alumno fue capaz de identificar la propiedad necesaria para validar la construcción de un teselado regular, tal propiedad corresponde a: *que los ángulos interiores de los polígonos regulares en cada vértice formen un ángulo de 360 grados.*

Figura 5.77 Configuración cognitiva de Ángel asociada a la actividad 4

Se abordan <u>*situaciones*</u> que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un teselado regular utilizando hexágonos, cuadrados y triángulos. Las situaciones involucran la justificación y argumentación del procedimiento de construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

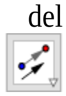
Motivan

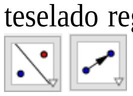
Resuelven

<u>*Elementos lingüísticos:*</u>

Verbal: lenguaje común, gestual.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.





Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

<u>*Definiciones/conceptos:*</u>

<u>Previas:</u>
Traslación
Rotación
Simetría axial
Vértice
Ángulo de rotación
Vectores
Ángulo interior de un polígono

<u>Emergentes:</u>
Conceptualización de la traslación, rotación y simetría axial mediante la construcción de un teselado regular aplicando herramientas del GeoGebra.

<u>*Propiedades/proposiciones:*</u>
La medida de los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) dan como resultado 360º.

<u>*Procedimientos:*</u>
<u>Previos (matemáticos):</u>
Se identifica los objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).
<u>Emergentes (matemáticos):</u>
Se aplicó la traslación considerando que la ubicación de los vectores estar sobre el polígono base.
Se aplicó el ángulo de rotación de medida 60°,120° y 180°
Se identifican puntos de intersección para usarse como centro de rotación en la construcción del teselado usando triángulos.
Se aplicaron rectas para usarse como ejes de simetría.
<u>Previos (software):</u>
Se identifican los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.
<u>Emergentes (software):</u>

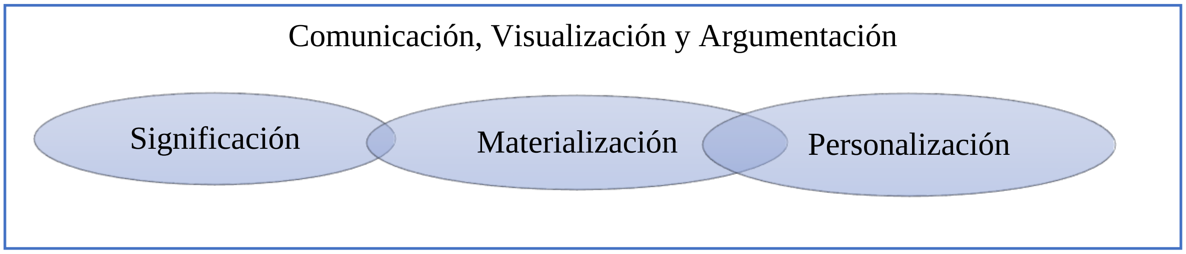
	Aplicación de las transformaciones isometrías (traslación, rotación o reflexión), tomando en cuenta, vector, rotación y eje de simetría.
	Justifican
	Argumentos: En las distintas construcciones del teselado regular, se justifica la construcción a partir de la medida de la suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice, el cual debe de 360°. Se valida la construcción de acuerdo con la aplicación de la herramienta de arrastre del GeoGebra y se describe el proceso de construcción en términos del uso que se hace de las herramientas del GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Ángel

Los procesos matemáticos emergentes en la práctica de Ángel respecto a la actividad 4, fueron el de *significación, materialización* y *personalización.* En un primer momento, cuando el alumno interpretó y comprendió cada una de las situaciones, él recurrió al proceso de *comunicación* y *visualización* al aplicar cada una de las herramientas del GeoGebra, en particular las transformaciones isométricas. Respecto al proceso de significación el alumno fue capaz de relacionar conceptos para concretar la construcción del teselado regular, lo que llevó a dar significado sobre las trasformaciones isométricas y llevar a cabo la construcción con éxito, esto también desencadenó un proceso de justificación al validar la construcción elaborada y deducir la propiedad que deben cumplir los teselados regulares. Además, al realizar la construcción el alumno recurrió a la visualización para materializar sus procedimientos que le permitieron realizar la construcción del teselado, lo que llevó a determinar un procedimiento para tal construcción derivándose un proceso de personalización.

Figura 5.78 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad *4*



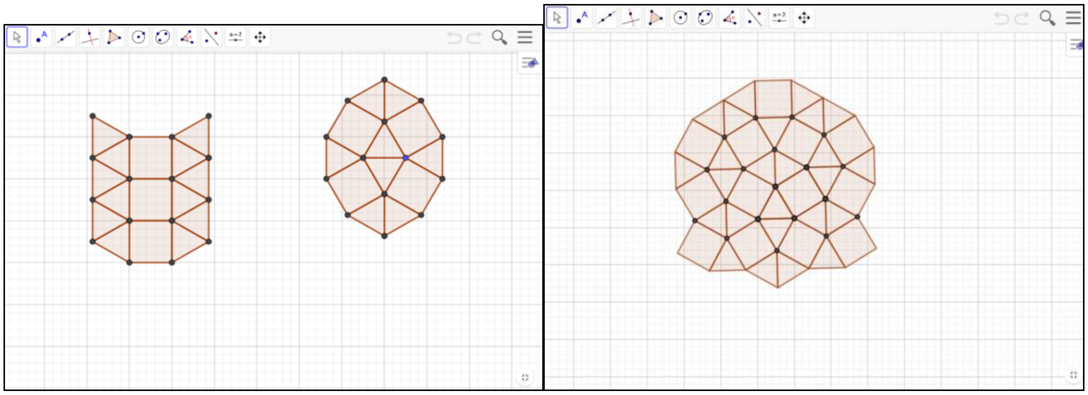
Fuente: Elaboración propia.

Prácticas matemáticas de Ángel asociada a la actividad 5

Las prácticas matemáticas desarrolladas en la actividad 5 fueron entorno a la construcción de teselados semirregulares, en un primer momento el alumno tuvo que proponer posibles combinaciones de polígonos regulares, que le permitieran al alumno generar un teselado semirregular. Luego, en un segundo momento, se le propuso un teselado semirregular donde él tuvo que realizar la construcción. Cabe resaltar que, en este momento el alumno mostro familiaridad con las herramientas del GeoGebra, dado que ya había experimentado, principalmente, con las transformaciones isométricas. En este sentido, el alumno procedió a proponer una posible combinación de polígonos (cuadrados y triángulos), para generar un teselado, lo que le fue posible al aplicar la rotación identificando siempre un centro de rotación y la medida de un ángulo.

Finalmente, el alumno describe un proceso de construcción, el que primero propone su figura base formado por un triángulo y un cuadrado, para después aplicar rotación a cada uno de esos polígonos, resalta que a medida que requirió ubicar un punto o centro de rotación, lo ubicó con la herramienta de intersección. Sin embargo, al referirse a los polígonos transformados, el alumno aludía a las figuras primas. Una vez realizada la construcción del teselado, este fue validado a través de la prueba de arrastre y se asegura que cumpla con la definición de teselado semirregular.

Figura 5.79 Combinación de polígonos para la construcción de un teselado semirregular



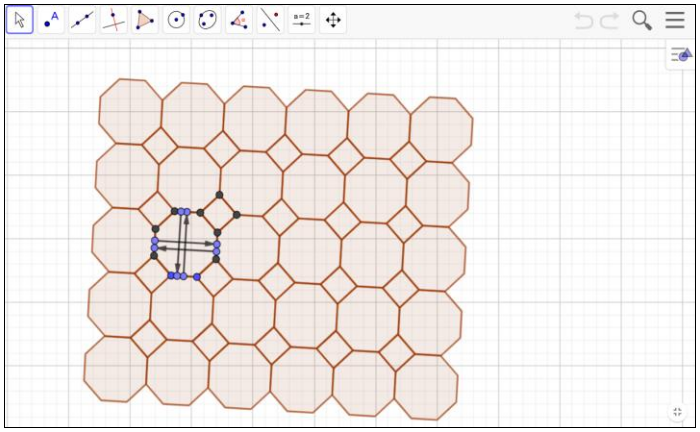
Fuente: Interfaz del GeoGebra.

Referente a la segunda parte de la actividad 5, el alumno realizó otro teselado semirregular formado por octágonos y cuadrados, para el cual tuvo que formar el mosaico base, formado por un octágono y un cuadrado, luego aplicó vectores sobre el octágono base, lo que le permitió generar tanto los octágonos como los cuadrados, en este caso, los vectores aplicados le permitieron generar polígonos hacia abajo, arriba izquierda y derecha. Además, el alumno explica que utilizó esta herramienta por que se le hizo más fácil, sencillo y rápido.

Por otra parte, una vez realizada la construcción el alumno procedió a validar la construcción través de la prueba de arrastre, lo que le permitió asegurar que *la construcción sí es un teselado semirregular ya que mantiene las características de no dejar ningún espacio o hueco vacío, también de cumplir con la definición y usar dos polígonos regulares para la creación del teselado semirregular y los ángulos sumados de cualquier vértice cumplen con los 360 de grados que deben de sumar.*

En la respuesta del alumno se puede notar que para un teselado es necesario que en cada vértice la suma de los ángulos interiores que concurren en ese vértice sea de 360°, lo que el alumno lo justifica para la construcción que ha realizado, afirmando que como conoce el ángulo interior del cuadrado y sabe que en cada vértice sobre el teselado, debe haber un ángulo de 360°, él puede restar la medida del ángulo interior del cuadrado y conocer la medida del ángulo interior del octágono, de esta manera deducir si efectivamente se forma un ángulo de 360°.

Figura 5.80 Combinación de polígonos para la construcción de un teselado semirregular



Fuente: Interfaz del GeoGebra.

<u>Configuración cognitiva de Ángel sobre la práctica matemática de la actividad 5</u>

En el desarrollo de la actividad 5, el alumno muestra la relación de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes que fueron integrados en la construcción de los teselados semirregulares como en la justificación de la construcción. Durante el desarrollo de esta actividad el alumno manifestó cierta familiaridad con las herramientas de las transformaciones del GeoGebra, así como los elementos (vector, centro de rotación, eje de simetría, recta, segmento, ángulos, etc.) involucrados para aplicar la rotación, la traslación y la rotación. La Figura 5.81 muestra la configuración respecto a los conceptos, como el de teselado, transformaciones isométricas, además, se resalta el lenguaje verbal informal y el gráfico-software, ya que a través de la aplicación de herramientas del GeoGebra el alumno conceptualizó y materializo su pensamiento y planteamiento de ideas que lo llevaron a una correcta construcción del teselado semirregular. Por otro lado, el alumno identificó la propiedad de que la medida de la suma de los ángulos interiores en cada vértice es 360°, la cual valido en el proceso de construcción. Finalmente, dicha propiedad se utilizó para justificar el proceso de la construcción, al mismo tiempo el uso y aplicación de las herramientas del GeoGebra influyeron para explicar y justificar las respuestas.

Figura 5.81 Configuración cognitiva de Ángel asociada a la actividad 5

<u>Elementos lingüísticos:</u>	Se abordan *<u>situaciones</u>* que sugieren la manipulación de objetos geométricos en el GeoGebra, específicamente la construcción de un

Verbal: lenguaje común, verbal, informal.

Gráfico - software: herramientas o comandos que permiten la construcción del teselado regular.

Gráfico/geométrico: Representación de polígonos regulares. Representación de las transformaciones isométricas.

Simbólico: notación que identifica elementos en los applets propuestos.

Expresa y soporta

Regulan el uso

teselado semirregular utilizando hexágonos regulares. Las situaciones involucran la justificación y argumentación de procedimientos realizados en la construcción, así como la validación mediante la aplicación de la herramienta de "arrastre".

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos: Previas: Teselado regular Traslación Rotación Congruencia Simetría axial Vértice Centro de rotación Vectores Segmento Hexágono regular	Emergentes: Conceptualización de las transformaciones isométricas mediante la construcción de un teselado semirregular aplicando herramientas del GeoGebra.

Propiedades/proposiciones:

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice es 360°.

Para la construcción de cualquier teselado en el plano es necesario que el ángulo en cualquiera de los vértices forme un ángulo de 360° y que el ángulo interior del polígono regular (hexágono) sea divisor de 360°.

Los ángulos internos de un octágono son de 135°.

Procedimientos:

Previos (matemáticos):

Identificar objetos geométricos que intervienen en la construcción del teselado (vector, recta, segmento, ángulo, etc.).

Emergentes (matemáticos):

Construcción de un teselado regular utilizando hexágonos regulares, cuadrados, y triángulos regulares.

La suma de la medida de los ángulos interiores en cada vértice según el polígono regular constituyente en el teselado.

Previos (software):

Identificar los objetos geométricos correspondientes a las herramientas (polígono regular, vector, traslación, vértice, rotación, etc.) en el GeoGebra que permiten construir el teselado regular.

Emergentes (software):

Aplicación de las transformaciones isometrías en el plano (traslación, rotación o reflexión) y sus elementos necesarios que conlleven a la construcción de un teselado regular.

Explicación y descripción del protocolo de construcción del teselado regular en termino de las herramientas dinámicas del GeoGebra.

Justifican

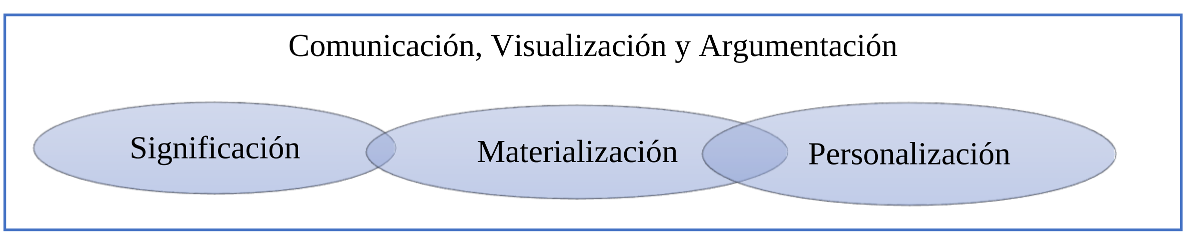
		<u>Argumentos:</u> La suma de la medida de los ángulos interiores es 360°, dado que cada ángulo interior del hexágono mide 120°, ya que en cada vértice confluye tres hexágonos regulares. Explicitar el protocolo de construcción en el GeoGebra en termino de los usos de sus herramientas.

Fuente: Elaboración propia.

<u>Los procesos matemáticos cognitivos de la práctica argumentativa de Ángel</u>

Los procesos matemáticos emergentes en la práctica de Ángel respecto a la actividad 5, fueron el de *significación, materialización* y *personalización.* En un primer momento, cuando el alumno interpretó y comprendió cada una de las situaciones, él recurrió al proceso de *comunicación* y *visualización* al aplicar cada una de las herramientas del GeoGebra, en particular las transformaciones isométricas. Respecto al proceso de significación el alumno fue capaz de relacionar conceptos para concretar la construcción del teselado semirregular, lo que llevó a dar significado respecto a las trasformaciones isométricas y llevar a cabo la construcción correctamente, esto también desencadenó un proceso de justificación al validar la construcción elaborada y deducir la propiedad que deben cumplir los teselados regulares. La cual refiere a la suma del ángulo en cada vértice es 360°, para lo cual el alumno debía conocer la medida de los ángulos interiores del polígono regular que constituye el teselado semirregular. Además, al realizar la construcción el alumno recurrió a la visualización para materializar sus procedimientos que le permitieron realizar la construcción del teselado, lo que llevó a determinar un procedimiento para tal construcción derivándose un proceso de personalización.

Figura 5.82 Procesos matemáticos identificados durante el desarrollo de la actividad *5*



Fuente: Elaboración propia.

5.4.1 Síntesis de los procesos matemáticos identificados en los alumnos

En esta sección se presenta una síntesis de los procesos matemáticos que se identificaron el cada uno de los casos los alumnos. A manera de síntesis en la Tabla 5.18 presenta los procesos matemáticos identificados en el desarrollo de actividades de cada alumno, respecto a la actividad 1 todos los alumnos manifestaron el proceso de significación y generalización, pues estos procesos correspondían con los desarrollados en la actividad 1. Además, Pablo recurrió al proceso del algoritmización al representar una expresión algebraica para justificar una regla que le sirve para encontrar el número de diagonales sobre cualquier polígono regular.

Respecto a la actividad 2, todos los alumnos recurrieron al proceso de generalización, esto se debió a que debían que deducir una expresión que les permitiera encontrar la medida del ángulo interior de algunos polígonos. Luego los alumnos recurrieron mayormente a los procesos de particularización y algoritmización, considerando que los alumnos tenían que explorar y experimentar casos particulares entorno a las transformaciones isométricas. Respecto a la actividad 3, se resalta el proceso recurrente fue el de significación, ya que en este momento los alumnos tuvieron que definir o conceptualizar las transformaciones isométricas, desde la su propia experiencia con el software y que este fuera lo más cercano a un al significado formal del objeto matemático. Sin embargo, este solo fue definido en termino de los usos que se hizo de las herramientas del GeoGebra (rotación, reflexión y simetría axial).

Respecto a la actividad 4 y 5, se resalta el proceso de significación y materialización, ya que en estos casos los alumnos se enfocaron en la construcción de los teselados regulares y semirregulares, donde fue evidente el proceso de materialización a través de los significados de las transformaciones isométricas y su capacidad para que estos fueran aplicados a un proceso de construcción, por lo que el proceso de personalización estuvo presente en diferentes niveles, es decir, para algunos resulto más sencillo realizar la construcción, mientras que para otros fue difícil, por ejemplo, sobre el cómo aplicar los objetos geométricos que necesitaban para cada una de las transformaciones isométricas.

Tabla 5.18.

Procesos matemáticos correspondientes a las actividades desarrolladas por los alumnos

	Pablo	Diana	Gabriela	Ángel
	Procesos			
Actividad 1	Comunicación, Visualización y Argumentación			
	Significación Algoritmización Generalización	Significación Generalización	Significación Generalización	Significación Generalización
Actividad 2	Comunicación, Visualización y Argumentación			
	Significación Particularización Algoritmización Generalización	Generalización Algoritmización	Significación Generalización Algoritmización	Significación Generalización Particularización Personalización
Actividad 3	Comunicación, Visualización y Argumentación			
	Particularización Significación Materialización Personalización	Personalización Significación Particularización	Significación Algoritmización Particularización	Significación Materialización Personalización
Actividad 4	Comunicación, Visualización y Argumentación			
	Significación Materialización Personalización	Significación Representación Personalización Materialización	Significación Materialización Personalización	Significación Materialización Personalización
Actividad 5	Comunicación, Visualización y Argumentación			
	Significación Materialización Personalización	Significación Materialización Representación Personalización	Significación Materialización Representación Personalización	Significación Materialización Personalización

Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 6. Conclusiones y comentarios finales

En este capítulo se da respuesta a las preguntas que guiaron la investigación. La información se ha organizado en torno a los objetivos de investigación, esto en concordancia con los análisis realizados en las diferentes fases de la investigación y tomando en cuenta los archivos del GeoGebra (protocolos), las hojas de trabajo, las entrevistas y las videograbaciones de su actividad matemática. El capítulo se divide, principalmente, en tres secciones que presentan aspectos relevantes relacionados con los objetivos planteados en la sección 1.6.1 del capítulo 1. Los cuales tienen que ver con:

- El tipo de situaciones problemas pertinentes en el proceso de construcción mediante el uso del software *GeoGebra*, durante el proceso de argumentación matemática.
- El tipo de argumentos que manifiestan los alumnos cuando se incorpora el uso de la geometría dinámica en construcciones geométricas.
- Los procesos matemáticos del EOS movilizados en el sistema de prácticas argumentativas del alumno cuando utiliza el SGD *GeoGebra*.
- El papel del software *GeoGebra* en el desarrollo de los procesos matemáticos recurrentes por los alumnos de este estudio al realizar construcciones geométricas.

Dichos aspectos se describen y se engloban a continuación en los siguientes apartados, los cuales se relacionan entre sí. Posteriormente, en este capítulo se presenta las conclusiones sobre los resultados del estudio, las publicaciones derivadas y las implicaciones y futuras líneas de investigación a desarrollar.

6.1 Conclusiones de los resultados

6.1.1 Sobre el diseño de tareas o situaciones en un ambiente de geometría dinámica

Un aspecto importante que resaltar en el diseño de actividades, mediante el uso de la geometría dinámica, es que estas deben ser gestionadas bajo ciertos criterios que permitan potenciar el aprendizaje de los alumnos, así como definir hasta qué punto la tecnología juega el papel de mediador para que los alumnos pongan en juego los objetos primarios (definiciones, propiedades, argumentos, procedimientos). En este estudio, aunque las actividades se relacionaron entre sí, los alumnos no establecieron tal relación ya que no consideraban lo previo para seguir avanzando en su resolución. En este sentido se identificaron conflictos cognitivos, principalmente sobre la construcción de teselados regulares, ya que no hubo *conexión* con respecto a la conceptualización de las trasformaciones isométricas y la aplicación de herramientas del software *GeoGebra*.

Este estudio nos permite tener referencia de los procesos de matemáticos que movilizan los alumnos cuando resuelven situaciones en el contexto geométrico, mediante la aplicación de la geometría dinámica. Lo anterior da pie para crear una trayectoria que guie al alumno, en el caso del proceso de argumentación, a pasar de esquemas de argumentación no analíticos a esquemas analíticos, asimismo de transitar entre procesos matemáticos (particularización, generalización, visualización, significación, representación, etc.). Entonces hemos de señalar que es pertinente considerar como profesores de la enseñanza de la matemática, la constante labor sobre el rediseño de tareas como parte de las competencias del profesorado, sobre todo aquellas de demanden el desarrollo de procesos, como el de argumentación o demostración matemática. Esto con el fin de guiar al alumno lo suficiente en los procesos de razonamiento y como consecuencia entender los procesos cognitivos matemáticos que están detrás de su práctica operativa y discursiva.

Es importante resaltar que el software GeoGebra es una herramienta que por sí sola proporciona suficiente información entorno a los objetos geométricos, y esto favorece y conlleva a que al resolver situaciones geométricas se pongan en juego aspectos como el razonamiento, la percepción y la creación o la visualización. Sin embargo, que el GeoGebra proporcione bastante información puede resultar que los alumnos no razonen sobre la matemática que existe en el uso de ciertas herramientas del GeoGebra, por ejemplo, cuando se intenta construir un teselado usando herramientas de transformaciones isométricas, los alumnos pueden notar que esta construcción puede ser realizada ubicando sólo polígonos necesarios, hasta conseguir visualmente un teselado.

6.1.2 Sobre el tipo de argumentos mediante el uso de la geometría dinámica

Los primeros resultados de este estudio despliegan esquemas argumentativos recurrentes por los estudiantes en el contexto de la geometría dinámica. A continuación, se destacan conclusiones generales sobre la pertenencia del uso del software *GeoGebra* y más a delante se describen aspectos generales sobre los tipos de argumentos desarrollados por los alumnos de este estudio, en un ambiente de geometría dinámica. El uso del software evidenció un proceso discursivo que apoyó la práctica argumentativa, pues la interacción entre parejas influyó para la verificación y toma de decisiones sobre el tipo de explicación o justificación de las consignas. Dado que los estudiantes tenían que poner en juego el pensamiento analítico y deductivo, se observaron conflictos y dificultades al intentar argumentar usando un lenguaje matemático y a la vez lenguaje coloquial, esto los llevo a limitarse en sus argumentos, enfocándose solo en describir lo visualizado en el software en términos del uso de sus herramientas.

En el análisis de los argumentos se identificó que el esquema utilizado con mayor frecuencia fue el empírico, este corresponde a un poco más del 50% del total de consignas. Las características principales que mostraron los esquemas empíricos fue que los estudiantes argumentaron en términos de la experimentación y manipulación del software, esto los llevó a mostrar argumentos descriptivos en función de lo observado y el uso de las herramientas del software *GeoGebra*.

El esquema fáctico fue el segundo en abarcar un mayor número de consignas. Se caracterizó por apreciar una argumentación poco estructurada, ya que los estudiantes comúnmente repetían un argumento generalizado sin considerar un razonamiento analítico y reflexivo. Este esquema mostró una recopilación de explicaciones y justificaciones, en el sentido de mostrar una serie de pasos para realizar construcciones y argumentos basados en la visualización. Se coincide con Flores (2007) en que la estructura de estos tipos de esquemas el razonamiento deductivo no se ve favorecido, ya que la organización de proposiciones, el uso del lenguaje y conceptos es impreciso.

Las características del esquema simbólico fueron significativas aun cuando el análisis epistémico no lo evidenció en el desarrollo de las actividades. Este esquema muestra poca organización sobre el uso de conceptos y lenguaje matemático, puesto que comúnmente el argumento presentó inconsistencia y poca claridad. A pesar de los esfuerzos de los estudiantes, este tipo de esquema mostraron afirmaciones que carecían de argumento matemático, pues los estudiantes más bien recurrían a explicaciones mediante el uso del lenguaje coloquial.

El esquema analítico fue el menos recurrente, pues este únicamente se identificó en un 4% del total de las consignas a pesar de que el diseño lo promovió en casi todas las actividades. En los pocos casos en que se presentó, la característica principal de este esquema fue que los estudiantes recurrieron a explicaciones relacionadas con el uso de conceptos con poca precisión, donde el uso de herramientas juega el papel de argumento más que como apoyo al proceso de argumentación.

Es necesario reconocer que la práctica argumentativa va más allá de un aprendizaje pasivo en el aula, pues se requiere que se integre un diseño apropiado de actividades apoyadas por el uso de tecnologías digitales, que promuevan el pensamiento analítico y reflexivo del alumno. Por otro lado, el uso de la geometría dinámica fue fundamental para promover y favorecer el proceso de argumentación de los estudiantes. La función de arrastre les permitió validar sus construcciones y cuestionar las razones sobre si la construcción cumplía con ciertas propiedades, mientras que en algunos casos se mostró una resistencia ante esta función. Aunque los estudiantes mostraron poco interés sobre esta función que les permitía dar validez, especialmente cuando tenían que construir teselados regulares y semirregulares, manifestaron esfuerzos por interpretar, explicar y describir las propiedades, conceptos y procedimientos de sus argumentos mediante un lenguaje que representara la construcción hecha en el software. Este hecho expresa que los significados matemáticos que manifiestan los estudiantes a través del uso del software están relacionados con las potencialidades que ofrece la geometría dinámica (Mariotti, 2000). En este sentido, se considera que el uso del software *GeoGebra* fue esencial para el desarrollo de actividades, a pesar de que los estudiantes no contaban con mayor conocimiento de esta herramienta digital.

6.1.3 Sobre la movilización de procesos matemáticos en un ambiente de geometría dinámica

De manera general, los procesos matemáticos cognitivos que movilizan los alumnos son procesos que ha ido adoptando cada uno de ellos a través de la experiencia de aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la enseñanza que se les ha brindado a lo largo de su educación escolar. Esto conlleva al alumno a una replicación de ideas y modos de pensar que se enfocan en la reproducción de ciertos procedimientos o algoritmos que han sido abstraídos de otra persona que se los ha compartido, así el individuo va formando su propio acervo de conocimiento personal y cultura. En concordancia con Rubio (2012), es una manera dinámica de entender el pensamiento matemático y de acuerdo con el EOS se relaciona con la configuración de objetos que pueden emerger en la actividad matemática.

La identificación de procesos matemáticos del EOS permiten vislumbrar el tipo de prácticas argumentativas y el desarrollo de los objetos matemáticos puestos en juego de los alumnos de este estudio, cuando argumentan mediante el uso del GeoGebra. Esto nos lleva a reflexionar sobre el diseño de actividades que los docentes debieran fomentar tanto en la argumentación matemática, en un ambiente dinámico, como al planteamiento de situaciones que permita evidenciar procesos matemáticos en el desarrollo de estas prácticas. Es necesario resaltar que el uso del software GeoGebra en este estudio evidenció un proceso discursivo de los alumnos que va acompañado de la práctica argumentativa, aunque este haya sido a través de un lenguaje informal. Además, los alumnos no relacionaron ni comprendieron las propiedades matemáticas involucradas en la construcción, lo cual desembocó en argumentos anclados a propiedades propiamente del software. Por ejemplo, al afirmar que con cualquier polígono regular se podría formar un teselado de tal manera que estos se “acoplaran perfectamente”, deja entre ver que la percepción visual juega un papel relevante en el desarrollo de la construcción, pero no en la argumentación del proceso de construcción. Por lo tanto, es necesario que el alumno comprenda la lógica de un software dinámico para realizar cualquier construcción geométrica, para ello se requiere que haya un conocimiento de propiedades o definiciones involucradas en tal proceso de construcción.

Ante esta realidad, es evidente y pertinente dar un seguimiento de los procesos matemáticos-cognitivos que manifiestan los alumnos durante su aprendizaje de la matemática mediante el uso de la geometría dinámica. En un primer momento se identificaron de manera parcial los procesos matemáticos con veinte alumnos, cuya información sirvió para para marcar una pauta que permitió realizar un rediseño de las actividades, lo que llevó a evidenciar otros procesos matemáticos del EOS y en particular su relación con el proceso de argumentación, más aún, cuando se involucra una reflexión sobre qué tipos de argumentos podrían manifestar los alumnos desde la perspectiva de dicha teoría.

Este primer análisis superficial de los procesos matemáticos fue una limitante para profundizar en ellos, en el sentido de detallar cómo se dio su desarrollo y desencadenamiento de estos en el estudio. Esto se debió a que se hizo énfasis en los procesos matemáticos cognitivos en un grupo de alumnos, y no se detalló en la actividad matemática de casos particulares. Sin embargo, si se logró un rediseño de las actividades que nos llevó a enfocarnos en la emergencia de más procesos matemáticos cognitivos, como el de materialización y algoritmización. Por lo que, se puso a prueba estas actividades con cuatro alumnos de la misma institución.

El segundo análisis se evidenció a detalle los procesos matemáticos de los alumnos, aquí se tomó en cuenta tanto la actividad escrita de las hojas de trabaja como las videograbaciones. Al hacer una comparativa de los procesos, entre el análisis a priori y a posteriori se puedo identificar que los procesos que manifestaron los alumnos fueron correspondientes con el análisis a priori, a excepción del proceso de descomposición. En la Anexo 2 se muestra una comparación sobre los procesos matemáticos identificados en la práctica del alumno Pablo,

6.2 Publicaciones derivadas del estudio

Durante el desarrollo del presente trabajo de investigación se han derivado las siguientes publicaciones en revistas, actas de congresos y presentaciones a congresos.

Artículos

- Morales, G. y Rubio, N. (2020). Una experiencia con teselado mediante el GeoGebra. Atención a la diversidad en el aula de Matemáticas. Revista UNO. 90, pp. 65-71.
- Morales, G., Larios, V., y Rubio, N. (2021). Esquemas de argumentación de alumnos de Bachillerato al usar GeoGebra en el contexto de teselados. UNICIENCIA. V. 35(2), pp. 1-18.
- Morales, G., Rubio, N., y Larios, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. Bolema: Boletim de Educação Matemática. V.70, pp. XX.

Actas de congresos

- La argumentación matemática fomentada en estudiantes del nivel medio superior mediante el uso del software de geometría dinámica. (2019). Actas del XXII Congreso internacional, EDUTEC. En A. Patiño y C. Rivero (Ed). pp. 383-391. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en: http://edutec.es/sites/all/files/ACTAS/Edutec2019-Libro-Resumenes-Comunicaciones.pdf
- Una reflexión sobre el uso de la geometría dinámica en el contexto escolar. (2020). Actas del X Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas. En C. Gaita, J. Flores y F. Ugarte (Ed). pp. 294-300. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568?fbclid=IwAR3VrSzK0GRSaeMDcoAgLCY1BsA2QFLu4xiKVZ8AsHARizgNHs_VmfvDQhI

Comunicaciones presentadas a congresos

- Ponencia: La argumentación matemática en alumnos de bachillerato mediante el uso de la geometría dinámica. Realizado en el Seminario latinoamericano de colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico. Llevado a cabo en la Universidad de los Lagos Chile, en el año de 2021.
- Ponencia: Caracterización de los procesos matemáticos cognitivos cuando se promueve la argumentación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica. Realizado en el Seminario del grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Lagos Chile, en el año de 2020.
- Impartición de Taller: Una reflexión sobre el uso de la geometría dinámica en el contexto escolar. Realizado en el X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (XCIEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el año de 2020.
- Ponencia: La argumentación matemática fomentada en estudiantes del nivel medio superior mediante el uso del software de geometría dinámica. Realizado en *XXII Congreso Internacional EDUTEC 2019*. Llevado a cabo en la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Ponencia: Los procesos matemáticos en el desarrollo de la validación matemática en ambientes de geometría dinámica. Realizado en la XXVIII Semana Nacional de Investigación y Docencia de las Matemáticas. Llevado a cabo en la Universidad de Sonora del año 2018.
- Ponencia: Un diseño para la validación matemáticas en ambientes de geometría dinámica. Realizado en el V encuentro SUMEM. Las matemáticas y la interdisciplina. Llevado a cabo en la Universidad Nacional Autónoma de México del año 2018.

6.3 Implicaciones y líneas abiertas de la investigación realizada

Un primer paso para comprender la práctica matemática es entender cómo razonan y realizan el procesamiento de información los alumnos, pero más aún como esta es presentada o materializada por parte de ellos. El trabajo desarrollado en esta investigación tiene implicaciones para quienes realizan estudios sobre la argumentación y los procesos matemáticos cognitivos, en las prácticas matemáticas desarrolladas por profesores o por alumnos, todo esto entorno a un ambiente de geometría dinámica. Se trata de un campo de investigación que ha cobrado relevancia y que permite entender y comprender, por un lado, como aprenden los alumnos y por otro cuales son los significados alcanzados por el individuo respecto al objeto matemático en estudio.

Este estudio nos permite reflexionar entorno al uso de la geometría dinámica en las prácticas matemáticas, como un medio que favorezca la argumentación, pero más aún sobre cómo movilizar procesos matemáticos del EOS que permita al alumno aprender matemáticas. Así que este trabajo da pie para su posible ampliación en otros contextos de la matemática, por ejemplo, movilizar estos procesos en el campo del álgebra y la geometría mediante el uso de la geometría dinámica.

Un aspecto en el que se podría profundizar es de qué manera influyen esta tipología en el razonamiento deductivo, que lleve al alumno a ser consciente de su propio aprendizaje, es decir, desarrollar un proceso metacognitivo. Por lo que es clave que en la enseñanza se diseñen tareas donde se promuevan diferentes procesos matemáticos, por lo que el análisis de ellos es conveniente replicarlos en diferentes temas de la matemática, como el álgebra, el cálculo, entre otros.

Volviendo al punto del proceso de argumentación y bajo la perspectiva del EOS, es pertinente pensar y cuestionarnos sobre una tipología de argumentos en términos de los objetos y procesos matemáticos.

Referencias Bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. *Colección Paidós Educador. México: Paidós Mexicana*.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. (8).

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education September/October. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Disponible en: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate…. July/August. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Disponible en: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html>.

Benítez, A., Benítez, H., & García, M. (2016). La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes del Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. *Educación Matemática*. 28 (3). 175-216.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa.* España: La muralla.

Breda, A., Font, V., Lima, M., & Villela, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Cabero, J. & Llorente, M. (2005). Las plataformas virtuales en el ámbito de la teleformación. *Revista electrónica Alternativas de Educación y Comunicación*. 1-24.

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista colombiana de educación.* 60 (2). pp.40-60.

Cuoco, A. & Goldenberg, E. (1996). A role for technology in Mathematics Education. *Journal Education*. 178 (2). 15-32.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática 1. *Paradigma*. *28* (2). 49-77.

De Pablos, M., Colás, P., López Gracia, A. y García-Lázaro, I. (2019). Uses of digital platforms in Higher Education from the perspectives of the educational research. REDU. *Revista de Docencia Universitaria*. 17 (1). 59-72. https://doi.org/10.4995/redu.2019.11177

Distéfano, L., Pochulu, M., & Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *REDIMAT*. *4* (3). 202-233. doi: 10.4471/redimat.2015.1568

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. In BOERO, P. (Ed.) Teorems in School: From history, epistemology and cognition to classroom practice. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 163-181.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 23-49.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Figueroa, S., Anchorena, S., & Distéfano, M. L. (2014). Valoración de la Idoneidad Epistémica y Cognitiva de un Proceso de Instrucción en la Resolución de Problemas Bayesianos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*. *28* (48). 169-190.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*. *8* (1). 67-98.

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 14(3). 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & *Font, V.* (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International Journal on Mathematics Education. 39 (1-2). pp. 127-135.

Godino, J. Gonzato, M., Cajaraville, A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. 30 (2). 109-130.

Godino, J. & Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración. *Enseñanza de las Ciencias*. *19* (3). 405-414.

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 8 (11). 111-132.

Godino, J. (2009). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Colección Digital Eudoxus*.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*. *27* (2). 221-252.

Godino, J., Wilhelmi, M., Blanco, T., Contreras, Á. & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*. (10). 91-110.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studie. en: Schoenfeld, A.; Kaput, J.; Dubinsky, E. (ed.). Research in collegiate mathematics education III. Washington DC: ams, p. 234-283.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En: BOERO, P. (Ed.). Theorems in schools. From history, epistemology, and cognition to classroom practice. Rotterdam: Sense Publishers, 2007, p. 65- 78.

Hoyles C. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (eds) *Second International Handbook of Mathematics Education*.

Springer International Handbooks of Education. Vol 10. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_11

Hummes, V. B., Font, V. & Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*. *21* (1). 64-82.

Iranzo D., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*. *27* (3). 433-446.

Karadag, Z. & McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool. In *Model-Centered Learning* (pp. 169-181). Sense Publisher.

Lagrange, B., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. pp. 239–271.

Larios, V. & González, N. (2017). Integración de instrumentos metodológicos para el análisis de la validación matemática en la escuela. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Larios, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. En *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Mariotti, A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM*. 4*1* (4). 427-440.

Mariotti, A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*. *44* (1). 25-53.

Mejía, C., & Molina, O. (2014). Mediación y Geometría Dinámica: una alternativa para involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa en geometría. *Revista Científica*. 660-664.

Mendoza, H. H., Burbano, V. M., & Valdivieso, M. A. (2019). El Rol del Docente de Matemáticas en Educación Virtual Universitaria. Un Estudio en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. *Formación Universitaria*. *12* (5). 51-60.

Moschkovich, J. N., & Brenner, M. E. (2000). Integrating a naturalistic paradigm into research on mathematics and science cognition and learning. *Handbook of research design in mathematics and science education*. 457- 486.

Moreno, H. (2017). Encrucijada del discurso matemático escolar contemporáneo: conocimientos profesionales del profesor, tecnologías digitales y prácticas socioculturales. En Hernandez, L. & Slisko, Josip (Ed.), *Avances en la educación matemática basada en la investigación*. (Primera edición). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

National of Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles standards for school mathematics, NCTM. *Reston. VA.*

OCDE. (2016). *Programa para la evaluación internacional de alumnos* (PISA) PISA (2015)-Resultados. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

OCDE, M. D. E. (2017). Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, Matemáticas y Ciencias.

OECD (2020), *Making the Most of Technology for Learning and Training in Latin America*, OECD Skills Studies. OECD Publishing. Paris. Disponible en https://doi.org/10.1787/ce2b1a62-en

Perdomo-Díaz, J., Camacho, M. & Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.

Rabardel, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations, en Blandford A., Vanderdonckt J., Gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*. p. 17-30. Berlín: Springer-Verlag.

Rafael (2007) Modulo I: Máster en Paido Psiquiatría. Universidad Autónoma de Barcelona. Catalunya.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. 103-129.

Radford, L. & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. 12 (2). 215-250.

Ramirez, W. & Barajas, J. (2017). Uso de las plataformas educativas y su impacto en la práctica pedagógica en instituciones de educación superior de San Luis Potosí, EDUTEC. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 60. Recuperado el 11/11/2020 de http://www.edutec.es/revista.

Rojano, T. (2006). Enseñanza de la física y las matemáticas con tecnología. *México. SEP*.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*. 11-30.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. España.

Samper, C., Cepeda-Buitrago, L. & Vargas-Guerrero, C. (2015). Descubrir un hecho geométrico: ¿mayor conocimiento implica mejor des empeño? *Magis*, *Revista Internacional de Investigación en Educación*. *7* (15). 33-48.

Sandoval Cáceres, Ivonne Twiggy. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*. *21* (1). 5-27.

SEP. (2017). El modelo educativo 2016; el planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa, Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, S.C.

Silvio, J. (2005). Sense of community, perceived cognitive learning, and persistence in asynchronous learning networks. The Internet and Higher Education. 5 (4). 319-332

Tall, D. (1992). Mathematical processes and symbols in the mind. *ZA Karian, Symbolic computation in undergraduate mathematics education*.

Toulmin, E. (2007). Los usos de la argumentación. Barcelona: Península.

Vaillant, D., Rodríguez, Z. & Bentancor G. (2020). Uso de plataformas y herramientas digitales para la enseñanza de la Matemática. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*. *28* (108). 718-740. https://dx.doi.org/10.1590/s0104-40362020002802241

Vygotsky, L. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.

Anexo 1

En este anexo presenta las actividades referentes al primer y segunda implementación

Actividad 1

Nombre (s): ____Fecha: _____

Materia: ____________________________________Semestre: ____________

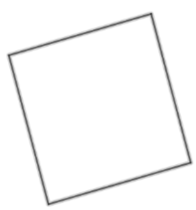
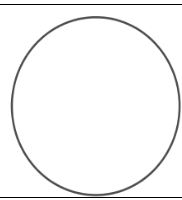
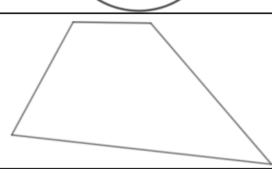
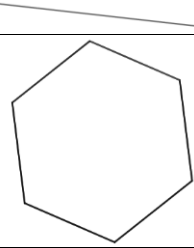
Instrucciones

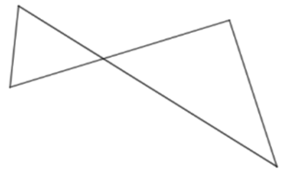
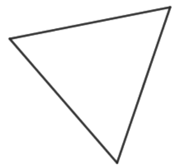
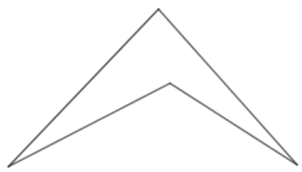
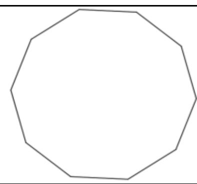
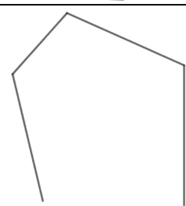
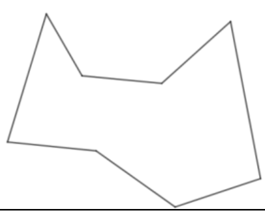
Contesta lo que se pide y las respuestas escríbelas con pluma color azul, sin borrar nada, si consideras que tienes que borrar sólo tacha con una línea, ~~por ejemplo.~~

1. ¿Qué es un polígono regular?

2. Escribe los elementos que componen un polígono regular.

3. Observa la siguiente tabla y contesta lo que se pide.

Figura	Clasifica las figuras (polígono regular, polígono irregular o no es polígono)	¿Por qué?
		
		
		
		

Utiliza el siguiente enlace para responder la Actividad 2: https://drive.google.com/open?id=1wG_rSoAUFlVHDax3-XHvmCvva6zy1jGU

Actividad 2

Nombre (s): ____Fecha: ______

Materia: ____Semestre: ___

Contesta lo que se pide y las respuestas escríbelas con pluma color azul, sin borrar nada, si consideras que tienes que borrar sólo tacha con una línea, ~~por ejemplo.~~

1. Explora la construcción del archivo en GeoGebra con nombre **“aumento_lados”.** ¿Qué pasa cuando aumentas el número de lados?

- ✓ Puedes utilizar el cursor del mouse  para alejar y acercar la figura.
- ✓ Puedes utilizar la herramienta desplaza vista grafica  para tener mayor visualización de la figura.

2. Sigue explorando el archivo anterior en GeoGebra. ¿Qué ocurre con la medida del ángulo interior del polígono cuando aumentas sus lados?

3. ¿A qué valor se aproxima el ángulo interior del polígono cuando aumenta el número de lados? ¿Por qué?

4. ¿El ángulo interior de un polígono regular puede ser 180º? Justifica tu respuesta.

Actividad 2a

Nombre (s): ____Fecha: _____

Materia: ____Semestre: ___

1. Explora la construcción del archivo en GeoGebra con nombre **“traslada_triángulo”**, apóyate de las indicaciones que aparecen en el recuadro de la derecha. En seguida responde las siguientes preguntas.

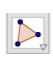
Oprime la casilla del vector y observa que sucede. Oprime el botón “traslada triángulo”. **Mueve** cada uno de los puntos del triángulo original y observa que pasa. **Mueve** el vector de traslación desde cualquiera de sus puntos.

2. ¿La figura trasladada tiene la misma forma, tamaño y orientación respecto a la figura original? ¿Por qué?

3. ¿Cuál es la relación entre el triángulo trasladado y el vector AB?

4. ¿Qué es una traslación geométrica?

5. Construye la traslación de un hexágono usando las herramientas del GeoGebra. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **2a_APELLIDO**

Para realizar la construcción puedes utilizar las herramientas de vector , polígono  y traslación.

Actividad 2b

Nombre (s): ____Fecha: ______

Materia: ____Semestre: _____

1. Explora la construcción del archivo en GeoGebra con nombre **“rotación_polígono”** apóyate de las indicaciones que aparecen en el recuadro de la derecha. Enseguida responde las siguientes preguntas.

Mueve el deslizador que representa el ángulo de rotación. Mueve el deslizador que representa el número de lados del polígono regular. Mueve el centro de rotación O y observa que pasa. Selecciona las casillas de los ángulos de rotación y vuelve a mover en centro de rotación.

2. ¿Respecto a qué objeto del GeoGebra se mueve el polígono verde?

3. ¿Cómo es el polígono verde respecto al polígono azul? Explica lo más que puedas tu respuesta.

4. ¿El polígono que se rota mantiene la misma forma y tamaño? ¿Por qué?
5. ¿El polígono que se rota mantiene su orientación? ¿Por qué?

6. ¿El ángulo de rotación cambia cuando aumentas el número de lados del polígono? ¿Por qué?

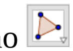
Puedes activar las casillas de ángulos de rotación.

7. Cuando aumentas el número de lados ¿Qué sucede con el ángulo de rotación?

8. ¿Qué pasa cuando el valor del ángulo de rotación es 360°? Explica lo más que puedas tu respuesta.

9. ¿Qué es una rotación geométrica?

10. Construye la rotación de un cuadrilátero usando las herramientas de GeoGebra. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **2b_APELLIDO**

Para la construcción necesitas un centro de rotación , polígono  y la herramienta de rotación .

Actividad 2c

Nombre (s): ____Fecha: _____

Materia: ____Semestre: ___

1. Explora la construcción del archivo en GeoGebra con nombre **“reflexión_triángulo”**, apóyate de las indicaciones que aparecen en el recuadro de la derecha. Enseguida responde las siguientes preguntas.

> ✓ Mueve algún punto del triángulo original y observa que pasa.
> ✓ Mueve el punto A que se encuentra en sobre la recta.
> ✓ Activa la casilla de líneas auxiliares y vuelve a mover el triángulo.

2. ¿El triángulo transformado tiene la misma forma y tamaño respecto al triángulo original? Explica lo más que puedas tu respuesta.

3. Si mueves el punto *E* del triángulo original ¿Qué pasa con la orientación? Explica tu respuesta.

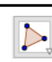
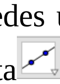
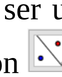
4. Si mueves el punto *A* sobre la recta, ¿Qué sucede con el triángulo transformado? Explica lo más que puedas tu respuesta.

5. ¿La distancia de dos puntos homólogos a la recta es la misma? ¿Por qué?

> Puedes apoyarte de la herramienta distancia o longitud  para responder la pregunta.

6. ¿Qué es una reflexión geométrica?

7. Construye la reflexión de un pentágono usando las herramientas del GeoGebra. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **2c_APELLIDO**

> Puedes utilizar la herramienta de polígono , el objeto reflexión que puede ser una recta  o un segmento de recta  y la herramienta de simetría axial o reflexión .

Actividad 3

Nombre (s): ____Fecha: _______

Materia: ____Semestre: _____

Instrucciones

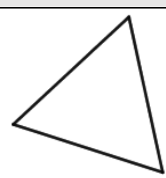
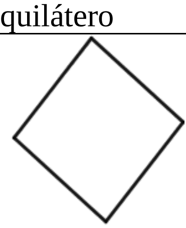
- Contesta lo que se pide y las respuestas escríbelas con pluma color azul, sin borrar nada, si consideras que tienes que borrar sólo tacha con una línea, ~~por ejemplo.~~

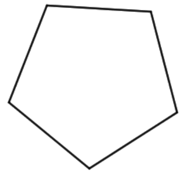
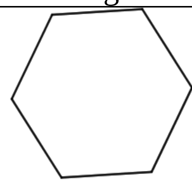
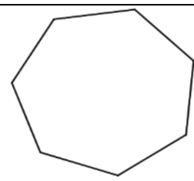
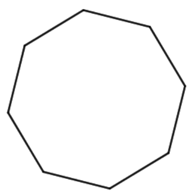
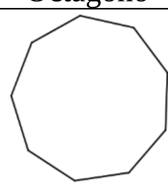
Un teselado o recubrimiento regular del plano es la repetición de un polígono regular mediante la aplicación de transformaciones isométricas (traslación, reflexión y rotación) de tal manera que estas no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir.

1. Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.

2. Dibuja un teselado con algún polígono regular que hayas propuesto en la pregunta anterior.

3. Contesta lo que se pide en la siguiente tabla.

Polígono regular	Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano	¿Por qué?
 Triángulo equilátero		
 Cuadrado		

 Pentágono		
 Hexágono		
 Heptágono		
 Octágono		
 Eneágono		

4. Mueve el punto D sobre la construcción de triángulos. ¿Forma un teselado? ¿Por qué?

5. Explora la construcción de triángulos y explica cuáles movimientos crees que se necesitó para construirlo. Explica lo más que puedas.

6. ¿Cuánto mide la suma de ángulos que rodea el punto D? Justifica tu respuesta.

7. Utiliza las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **T6_APELLIDO**

> Utiliza la herramienta de polígonos regulares y considera que puedes hacer combinaciones sobre las transformaciones geométricas para construir el teselado.

> ✓ Recuerda que para la traslación necesitas un vector y la herramienta de traslación
>
> ✓ Para la rotación ocupas el centro de rotación, puede ser un punto, el ángulo y la herramienta para rotar .
>
> ✓ Para la reflexión necesitas tu eje de simetría que puede ser una recta o segmento de recta y la simetría axial .

8. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.

9. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.

Actividad 4

Nombre (s): ____Fecha: _______

Materia: ____Semestre: _____

Instrucciones

Contesta lo que se pide y las respuestas escríbelas con pluma color azul, sin borrar nada, si consideras que tienes que borrar sólo tacha con una línea, ~~por ejemplo.~~

Los teselados semirregulares son aquellos que están formados por dos o más polígonos regulares.

1. Escribe dos posibles combinaciones de polígonos regulares que servirían para hacer teselados semirregulares, enseguida dibuja tus posibilidades.

2. Si construyeras un teselado semirregular y sumaras los ángulos que rodean a un solo vértice ¿Cuál sería el valor de la suma? Justifica tu respuesta.

3. Construye en GeoGebra las combinaciones que propusiste en el punto anterior. Mueve cualquiera de los puntos de la figura original y verifica que sigue siendo un teselado. Enseguida guarda el archivo de la siguiente manera: **SEMI_APELLIDO**

   Recuerda utilizar las transformaciones geométricas (traslación, rotación y reflexión) para generar tus construcciones.

4. Construye dos teselados semirregulares en GeoGebra, trata de cubrir la pantalla utilizando transformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión). Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: **T1_APELLIDO** y **T2_APELLIDO**

5. Explica a detalle cada uno de los pasos que seguiste para construir los dos teselados semirregulares anteriores.

6. Si no pudiste construir ningún teselado semirregular. Explica por qué no pudiste construirlo.

7. Realiza en el GeoGebra un teselado semirregular utilizando solo triángulos equiláteros y cuadrados. ¿Cómo tendría que ser el acomodo? Enseguida guarda el archivo con el siguiente nombre: **TS1_APELLIDO**

Apóyate de las herramientas del GeoGebra, puedes usar traslación , rotación  o simetría axial .

8. Escribe y explica a detalle cada uno de los pasos que seguiste para construir tu teselado semirregular utilizando solo triángulos equiláteros y cuadrados.

9. Realiza en el GeoGebra un teselado semirregular utilizando solo cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos. ¿Cómo tendría que ser el acomodo? **TS2_APELLIDO**

Apóyate de las herramientas del GeoGebra, puedes usar traslación , rotación  o simetría axial .

10. Escribe y explica a detalle cada uno de los pasos que seguiste para construir tu teselado semirregular utilizando solo cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos.

Actividad 5

Nombre (s): ____Fecha: _______

Materia: ____Semestre: ____

Instrucciones

Contesta lo que se pide y las respuestas escríbelas con pluma color azul, sin borrar nada, si consideras que tienes que borrar sólo tacha con una línea, ~~por ejemplo.~~

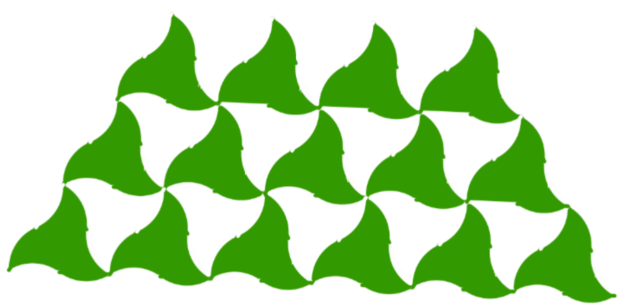
1. Explora el archivo **A5_teselado1** en GeoGebra.

2. ¿Qué figura se tuvo que deformar para obtener la tesela que forma el teselado?
3. ¿Qué transformaciones geométricas se tuvieron que hacer para formar la tesela? Explica con detalle.

4. ¿Qué forma tiene la tesela?

5. Explora el archivo en GeoGebra y explica cuáles fueron los movimientos que sirvieron para formar el teselado.

6. Observa la siguiente imagen y contesta lo que se te pide.



7. ¿La siguiente imagen es un teselado? ¿Por qué?

8. Si tuvieras que construir la figura anterior, ¿Qué polígono tomarías como base para la construcción? Justifica tu respuesta.

9. Haz un dibujo de la figura base y las transformaciones que le harías para obtener la figura anterior. Explícalo a detalle.

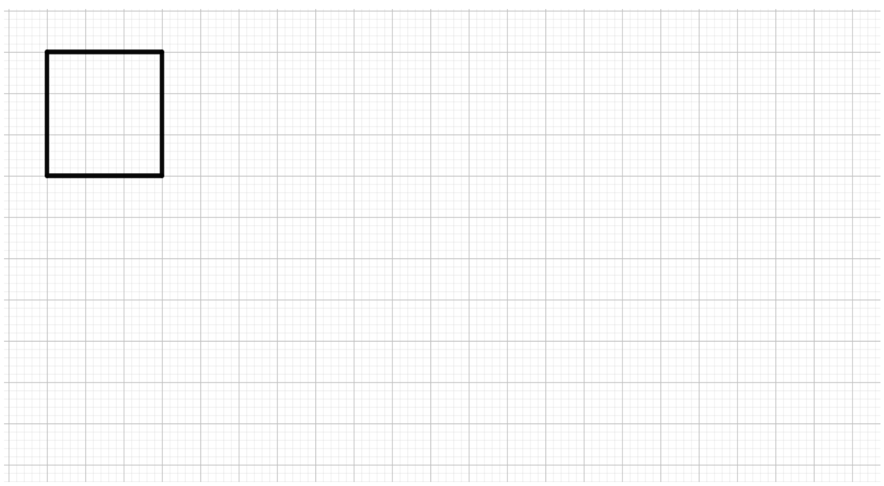
10. Explora el archivo **A5_teselado2** y contesta lo que se te pide.

11. La imagen mostrada ¿forma un teselado? ¿Por qué?

12. ¿A partir de que figura está construida la imagen? Explica con detalle.

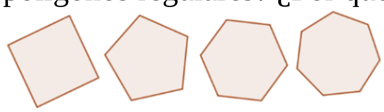
13. Mediante la exploración del archivo, explica cuáles fueron los movimientos que sirvieron para formar el teselado.

14. Si deformaras el siguiente cuadrado ¿Qué tesela podrías construir que ayude a formar un teselado? Trata de deformarlo de tal manera que formes una tesela y después un teselado.



Anexo 2

El rediseño y el análisis de los procesos matemáticos cognitivos, el caso de Pablo

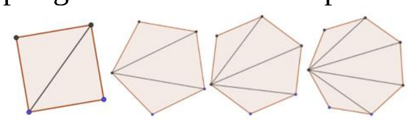
<table>
<tr><th colspan="3">Actividad 1: Polígonos regulares</th></tr>
<tr><th>Situación problema (entrada)</th><th>Procesos matemáticos</th><th>Respuestas de Pablo</th></tr>
<tr><td>S1: ¿Las siguientes figuras son polígonos regulares? ¿Por qué?
</td><td rowspan="3">Comunicación

Algoritmización (geométrico)

Significación (definición)

Generalización

Argumentación

Visualización</td><td>Si, porqué cuentan con más de 2 lados y estos se conecten entre sí formando una figura cerrada, con lados y ángulos congruentes, tampoco se muestran de formas extrañas, complejas o abstractas.</td></tr>
<tr><td>S2: En cada una de las siguientes figuras, ¿qué relación hay entre el número de lados y el número de triángulos formados por los lados y diagonales trazadas en cada polígono? Justifica tu respuesta.
</td><td>Para n lados restar 2, n-2= cantidad de triángulos con n= lados del polígono.</td></tr>
<tr><td>S3: Si tuvieras un polígono de n lados ¿Cuál sería la relación entre el número de triángulos formados y el número de lados? Justifica tu respuesta.</td><td>Para cualquier polígono de n lados restar 2 n-2 donde n= número de lados del polígono.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Actividad 2: Polígonos regulares y ángulos</th></tr>
<tr><th colspan="3">Instrucciones: Manipulación de un applet a través de un deslizador</th></tr>
<tr><th>Situación problema</th><th>Proceso matemático</th><th>Respuesta de Pablo</th></tr>
<tr><td>S1: Si los triángulos de la circunferencia son congruentes ¿cuál es el valor del ángulo alfa, conocido como el ángulo central, para cada valor de n? Justifica tu respuesta.</td><td rowspan="2">Visualización

Comunicación</td><td>Para cada polígono alfa= 360°/n donde n es la cantidad de triángulos encontrados dentro del polígono que a su vez aumenta el número de lados del polígono.</td></tr>
<tr><td>S2: Si es igual a 12 ¿Cuánto mide el ángulo interior en ese</td><td>180 - 30= 150 donde 30 es el valor del ángulo alfa encontrado con la</td></tr>
</table>

polígono? Justifica tu respuesta. *Sugerencia:* recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.	*Significación* *Argumentación*	*fórmula 360/n con n siendo lados del polígono y sus triángulos, luego 180 es el valor de la suma total de los ángulos internos de un triángulo, y 150 es el valor de los ángulos C, B del triángulo que serían el valor de cada ángulo A, B, C... del polígono.*
S3: ¿Cuál es la medida del ángulo interior en el polígono para cada valor de n? *Sugerencia*: recuerda que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Justifica tu respuesta.	*Algoritmización* *Particularización*	*360/n= alfa, 180-alfa=ángulo del triángulo isósceles/2 = ángulos del triángulo isósceles = sumados ambos ángulos congruentes del triángulo isósceles obtienes el ángulo interior del polígono.*
S4: Describe el nombre de los polígonos regulares que tienen 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., n lados.	*Generalización*	*Equilátero para el de 3 lados, Cuadrado para el de 4, Pentágono para el de 5 lados, Hexágono para el de 6, Heptágono para el de 7 y Octágono para el de 8*
S5: De acuerdo con la manipulación del applet POLÍGONOS, determina la medida del ángulo central para cada polígono regular nombrado en el punto anterior.		*360/n= alfa, n igual al número de lados del polígono. Triángulo = 120° Cuadrado = 90° Pentágono = 72° Hexágono = 60° Heptágono = 51° Octágono = 45°*
S6: De acuerdo con la manipulación del applet POLÍGONOS, determina la medida del ángulo $CB'B$ para cada polígono regular nombrado en el primer punto.		*360/n = alfa, alfa + C + B= 180, donde C y B son ángulos Internos del triángulo isósceles congruentes, C= 180-alfa= C/2 =ángulo interno del polígono. (como B y C son congruentes y por ende tienen el mismo valor solo ocupamos una de estas variables).*

Actividad 3 – P1: Traslación geométrica		
Instrucciones: Manipulación de un applet a través de un vector y la activación de casillas		
Situaciones problemas	*Proceso matemático*	*Respuesta de Pablo*

S1: Cuánto debe medir el vector de traslación para que el cuadrado P1’ tenga un lado en común: • a la derecha de P1 • a la izquierda de P1 • hacia arriba de P1 • hacia abajo de P1	*Comunicación* *Visualización* *Particularización (noción de traslación)*	*El valor del vector es 4 para todas las posiciones en las que se tenga un lado en común ambos cuadrados.*
S2: Si el vector de traslación mide 2 unidades, ¿cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1’ en relación con el cuadrado base P1? Describe en términos de las unidades del plano cartesiano.		*El cuadrado trasladado se sobrepone en 2 unidades en el cuadrado base Con el vector en valor 2 dirección hacia B Las coordenadas del cuadrado trasladado son: Esquina superior derecha: 2, G Esquina superior izquierda: 2, F Esquina inferior izquierda: - 2, G Esquina inferior derecha: - 2, F.*
S3: Si el vector de traslación mide 6 unidades, ¿cuál es la ubicación del cuadrado trasladado P1’ en relación con el cuadrado base P1? Describe en términos de las unidades del plano cartesiano.		*El cuadrado trasladado se encuentra a 2 unidades de distancia del cuadrado base, en cualquier dirección del vector.*
S4: Si la longitud de FG de P1 mide 12 unidades, ¿cuánto debe medir el vector AB para que P1’ tenga un lado común con cualquiera de los lados de P1? Justifica tu respuesta.		*Una longitud de 12 será necesaria en el vector para tener un lado en común. Ya que el valor del vector es igual al valor de los lados del cuadrado.*
S5: Mueve o arrastra el punto F del cuadrado P1 de tal manera que este quede inclinado. ¿Qué lados del cuadrado P1 son paralelos al vector AB para que P1’ tenga un lado común con FI de P1?		*Los lados GF y HI son paralelos al vector AB*

S6: ¿Cuál es la relación entre el cuadrado trasladado P1’ y el vector AB? Justifica tu respuesta.		*El valor del vector AB indica la distancia a la que se encuentra el lado GH' del cuadrado P1'.*

Actividad 3- P2: Traslación geométrica		
Introducción: Exploración de applet a través de la reproducción de un mosaico rectangular		
Situación problema	Procesos matemáticos	*Respuesta de Pablo*
S1: Si quisieras realizar la construcción anterior trasladando de rectángulo ABCD ¿dónde ubicarías el vector de traslación para trasladar el rectángulo hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo? Justifica tu respuesta.	*Visualización* *Comunicación* *Argumentación* *Personalización* *Significación* *Particularización*	*El vector de traslación lo movería en la dirección en que se quiera mover el rectángulo ABCD con el vector ubicado sobre los lados del rectángulo inicial, ya que el vector indica la distancia y dirección en que se encuentra el rectángulo trasladado.*
S2: ¿Cuál es la cantidad mínima de vectores que necesitas para generar la construcción del mosaico rectangular? Justifica tu respuesta.		*Seis vectores, cuatro se ubicarían en los lados del rectángulo y los otros dos serían las diagonales A a C y la otra sería de B a D del rectángulo.*
S3: En la construcción del mosaico rectangular, ¿cuál es la medida de la suma de ángulos interiores de los rectángulos en cada vértice? Justifica tu respuesta.		*360°, ya que cada ángulo interior de los rectángulos tiene un valor de 90° al ser ángulos rectos.*
S4: ¿Qué es la traslación geométrica?		*Desplazar figuras geométricas idénticas a partir de una figura base por medio de vectores que representarían su dirección y desplazamiento.*

Actividad 3 – P3: Rotación geométrica
Introducción: manipulación de applet a través de un deslizador que representa ángulos de rotación.

Alumno: Pablo Martínez	Procesos matemáticos	Respuesta del alumno
S1: Si mueves el deslizador, ¿para qué valor de ángulo los cuadrados rotados tienen un lado común con los lados de P0?	*Visualización* *Comunicación* *Argumentación*	*En 90° y en 270°.*
S2: Al rotar $P1_1$, $P2_1$, $P3_1$ y $P4_1$ moviendo el deslizador α, ¿qué relación hay entre los puntos A, B, C Y D en P0 y los cuadrados rotados? Justifica tu respuesta.	*Particularización* *Significación* *Personalización*	*Los puntos A, B, C, D son vértices de los cuadrados P0 y P1, P2, P3, P4. Los puntos A, B, C, D se relacionan ya que determinan la rotación de los cuadrados con el valor del ángulo que tengan.*
S3: Si mueves el deslizador β y α, ¿para qué ángulos los cuadrados forman un cuadrado de 3 X 3? Describe los movimientos realizados en relación con los ángulos α y β.		*Para el ángulo alfa en 180°, 270° y el beta en 90° y 270° se forma el cuadrado de 3x3, y sus movimientos comienzan a partir del centro del cuadrado y sus vértices y se determinan por el ángulo que tengan.*
S4: Al formar el cuadrado de 3 X 3, ¿quién sería el centro de rotación y la medida del ángulo a rotar para que P2 quede ubicado a la derecha de $P2_1$? Justifica tu respuesta.		*Ángulo alfa 180° y ángulo beta 90° con centro el vértice C ya que en base a él los cuadrados P2 y P21 se mueven para quedar a la derecha.*
S5: Teniendo el cuadrado de 3 X 3 ¿Cuál es el valor de la suma de ángulos interiores de los cuadrados en cada vértice del cuadrado P0? Justifica tu respuesta.		*La sumatoria resulta en 360° ya que los ángulos interiores del cuadrado siempre serán 90° porque son ángulos rectos y un cuadrado sólo cuenta con 4 ángulos interiores, 4x90=360.*
S6: Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con triángulos equiláteros, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada triángulo? Justifica tu respuesta		*Un ángulo de 60°, ya que los ángulos interiores de triángulos equiláteros miden eso y para rotar un triángulo a partir de un vértice A del triángulo inicial y quede a su derecha necesitarías rotarlo en 60°*
S7: Si quisieras construir una figura como la anterior en el GeoGebra con hexágonos regulares, ¿cuál sería el ángulo de rotación para cada		*120° ya que los ángulos interiores del Hexágono tienen esta medida, y rotaría os los Hexágono a partir de un vértice de la figura inicial y para que la figura rotada quede a un lado*

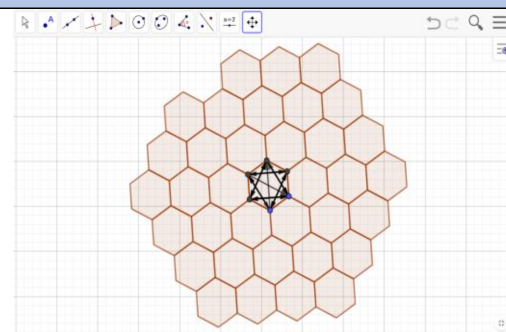
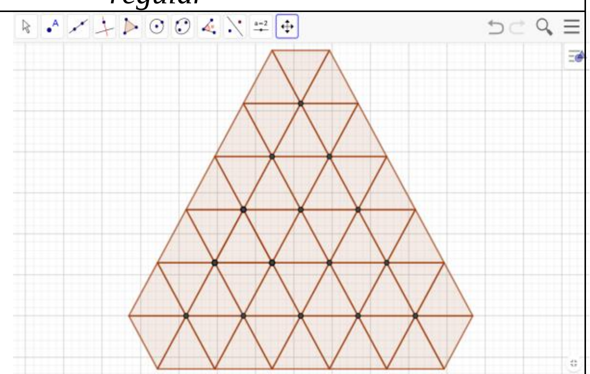
hexágono? Justifica tu respuesta.		*del Hexágono inicial necesitaríamos rotarlo con esta medida.*
S8: ¿Qué relación guardan los ángulos interiores del triángulo equilátero, cuadrado y hexágono regular con el ángulo de 360°?		
S9: ¿Qué es la rotación geométrica?		*Mover una figura a partir de un vértice, y la ubicación será determinada por el ángulo que en que se haya rotado.*

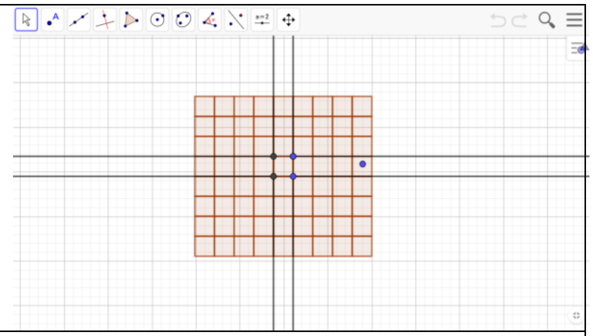
Actividad 3- P4: Reflexión (simetría axial) geométrica		
Instrucciones: a partir de la reflexión de un triángulo se le pide al alumno trazar la mediatriz de los puntos medios de los segmentos CC’, EE’ y DD’.		
Situación problema	*Procesos matemáticos*	*Respuesta de Pablo*
S1: ¿La recta trazada es perpendicular a los segmentos? Justifica tu respuesta.	*Visualización* *Comunicación* *Argumentación*	*Si es perpendicular, ya que cruza de forma recta los segmento y crea ángulos de 90°.*
S2: ¿Qué representa la recta en relación con los segmentos CC’, DD’ y EE’? Justifica tu respuesta.	*Significación (concepto)* *Personalización*	*Su mediatriz ya que pasa por los puntos medios de estos segmentos.*
S3: Si mueves el vértice E del triángulo CDE, ¿cambia su orientación? Describe y justifica en término de los vértices de los triángulos CDE y C’D’E’.	*M*aterialización	*No su orientación no cambia, solo alarga la longitud de los segmentos trazados del vértice E al E’ y la longitud de los vértices C D al vértice E, al igual que los vértices C’ D’ al vértice E’.* *Si, su orientación puede cambiar puede orientarse al lado opuesto en el que se encontraba el triángulo inicialmente, si se mueve el vértice E lo suficiente se pueden cambiar las direcciones y longitudes de los lados que van desde los vértices C D hacia el*

		E y de igual forma aplica al triangulo C' D' E'.
S4: ¿La distancia de cualquier vértice a la recta es la misma? ¿Por qué?		*Si, porqué son figuras espejo (son congruentes entre sí, pero reflejadas en direcciones opuestas), se encuentran a la misma distancia y siempre mantendrán los mismos lados y ángulos con respecto a la otra, si mueves el vértice E el vértice E' se moverá igual.*

Actividad 3-P5: Reflexión (simetría axial) geométrica		
Instrucciones: Se dan sugerencias para aplicar simetría axial a través de un hexágono regular		
Situación problema	*Procesos matemáticos*	*Respuesta de Pablo*
S1: Considerando la construcción anterior ¿Qué es una reflexión o simetría axial?		*Un espejismo de la figura, refiriéndome a la figura trazada inicialmente reflejada de forma igual en otra parte del plano.*
Instrucciones: Exploración de un applet a través de la activación de casillas		
S2: ¿Los triángulos, y son congruentes? Justifica tu respuesta.		*Si, ya que los triángulos P2, P3, P4 son una simetría axial de los tres lados del triángulo equilátero P1 por ende son congruentes entre sí.*
S3: Para que un objeto en el GeoGebra pueda ser reflejado utilizando simetría axial es necesario tener un eje de simetría. En la construcción de triángulos del applet ¿Quién representa el eje de simetría para P2, P3 y P4? Explica ampliamente tu respuesta.		*Los 3 lados del triángulo P1, ya que en base a cualquiera de esos lados se tomará la longitud para replicar la figura en la otra parte del plano.*
S4: Selecciona la casilla de "Triángulos2" y		*Se le aplicó simetría axial al triangulo P1 y el eje de*

responde lo siguiente. ¿Qué triángulos se les aplicó simetría axial y quién fue el eje de simetría para obtener los triángulos P5, P6 y P7? Explica ampliamente tu respuesta.		*simetría serían los lados que van del vértice A al B, B al C y C al A, y con ellos se pueden replicar los triángulos P5, P6, P7 aplicando simetría axial.*

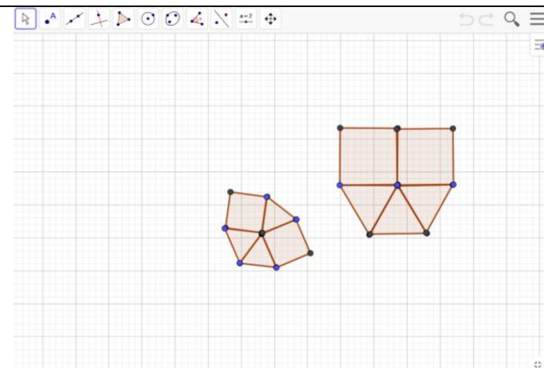
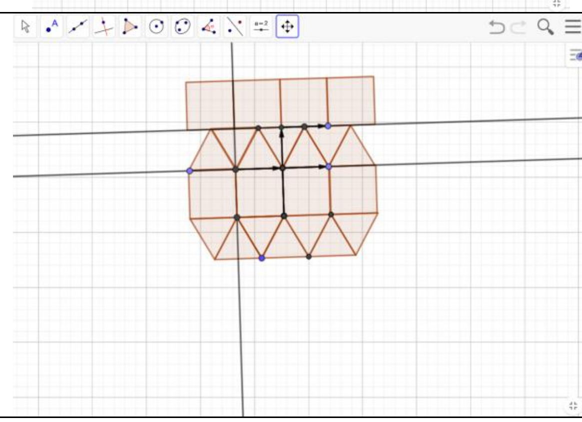
Actividad 4: Teselados regulares		
Instrucciones: Se da una definición de teselado regular y se dan sugerencias para la construcción de teselados regulares utilizando las transformaciones isométricas.		
Situación problema (entrada)	*Procesos matemáticos*	*Respuesta de Pablo (salida)*
S1: Construcción del teselado regular utilizando hexágonos regulares y aplicando traslación	Materialización Significación Personalización	
Protocolo de construcción		- *Aplica la herramienta de polígono regular*
S2: Construcción del teselado regular utilizando triángulos equiláteros y aplicando rotación.	Materialización	
Protocolo de construcción		

S3: Construcción del teselado regular utilizando cuadrados y aplicando simetría axial.	Materialización	
Protocolo de construcción		
S4: ¿Cuánto mide la suma de ángulos interiores que rodea cada vértice de cada teselado regular? Justifica tu respuesta.	*Significación* *Argumentación* *Personalización*	*360º, ya que los teselados forman circunferencias completas con sus figuras colocadas en base a la definición de teselado, para los triángulos se suman ángulos de 60º en 60º para completar el teselado se necesitan 6 triángulos y cada uno aporta 60º para formar el teselado, creando circunferencias de 360º, lo mismo aplica para los hexágonos con ángulos de 120º se necesitan 3 hexágonos para completar un teselado que crea una circunferencia de 360º.* *Para el caso de los cuadrados la suma de los ángulos interiores en cada vértice del teselado es de 360º, ya que para crear un teselado con cuadrados se deben unir cuatro lados en un solo vértice de cuatro cuadrados diferentes, cada ángulo de estos vértices tiene un valor de 90º, como son cuatro ángulos sumados dan un total de 360º.*
S5: En el teselado regular donde aplicaste traslación, ¿cuál fue la cantidad mínima de vectores que ocupaste para generar el teselado regular? Justifica tu respuesta.		*6 vectores, ya que se necesitaban unir los seis vértices de manera inscrita en el polígono regular de seis lados, y con sólo 6 vectores se pudieron unir todos estos vértices.*
S6: Describe a detalle el procedimiento de construcción que seguiste para generar el		*Primero tuve que trazar los vectores mínimos necesarios para unir los vértices, después con la herramienta de traslación tuve que seleccionar la figura que quería*

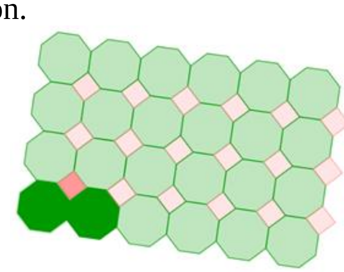
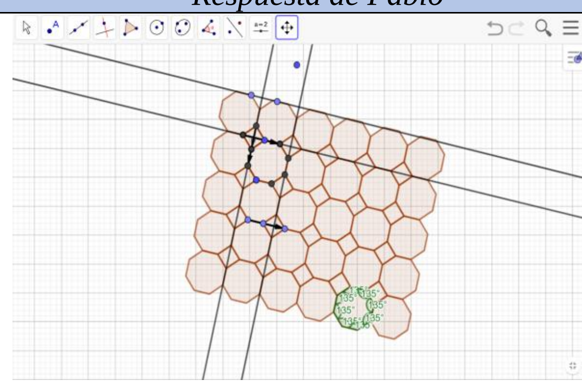
teselado utilizando hexágonos regulares y traslación geométrica.		*trasladar y el vector que ocuparía para mover la figura (la figura era cualquier copia del polígono inicial) en esa dirección, y así se repitió el proceso en todo momento y para cualquier capa.*
S7: En el teselado regular donde aplicaste rotación, ¿Dónde ubicaste los centros de rotación que te permitieron generar o ampliar el teselado regular? ¿Qué ángulo tuviste que rotar para cada polígono? Explica a detalle.		*Los centros de rotación los ubique en los vértices de los triángulos en base al punto de intersección, y los ángulos los ponía a conveniencia dependiendo de donde quería ubicar el triángulo y desde que vértice, siempre girando de 60º en 60º (o sea 60º, 120º, 180º, 240º, 300º) buscando moverlos en una circunferencia, si lo necesitaba al lado opuesto lo giraba 240º y si lo quería poner a la derecha o a la izquierda cambiaba el sentido de rotación.*
S8: Describe a detalle el procedimiento de construcción que seguiste para generar el teselado utilizando triángulos equiláteros y rotación geométrica.		*Primero seleccionaba la herramienta rotación y seleccionaba el triángulo posteriormente tomaba el punto de rotación desde el que se rotaría el triángulo seleccionado y después anotaba el ángulo que quería rotar desde 60º hasta 300º yendo de 60º en 60º, cuando se completaba la circunferencia de un vértice, pasaba a seleccionar otro vértice con la herramienta de intersección y repetía el proceso, los ángulos los movía en sentido horario o anti horario dependiendo hacia donde quisiera rotarlos, a la derecha sentido horario y a la izquierda sentido anti horario.*
S9: En el teselado regular donde aplicaste reflexión o simetría axial, ¿Qué objeto geométrico consideraste como el eje de simetría? ¿Por qué?		*Las rectas que se ubicaron en los cuatro lados del cuadrado inicial, ya que en base a estas se podían reflejar los cuadrados de manera simétrica en todos los aspectos, pero del lado opuesto del cuadrado que se reflejaría.*
S10: Describe a detalle el procedimiento de construcción que seguiste para generar el teselado utilizando cuadrados y simetría axial.		*Para el cuadrado utilice las rectas que coloque en los cuatro lados del cuadrado inicial, en base a estas rectas con el apoyo de la simetría axial seleccionaba el cuadrado que quería reflejar y seleccionaba la recta que necesitaba para moverlo donde quisiera, si lo quería mover*

		a la derecha o a la izquierda usaba las rectas verticales, si lo quería mover de arriba a abajo usaba las rectas horizontales, y la figura se reflejaba del lado opuesto donde se encontraba, por ejemplo si reflejaba un cuadrado que se encontraba arriba del inicial se reflejaría hacia abajo, utilizando las rectas opuestas es que movía los cuadrados por ejemplo si quería mover un cuadrado que estaba a la izquierda y reflejarlo a la derecha, ocupaba la recta más lejana a este de las verticales o las horizontales dependiendo de cual ocupara.
S11: Mueve o arrastra algún punto del polígono base que construiste en cada uno de los tres teselados con la herramienta , ¿sigue siendo un teselado? ¿cumple con la definición de teselado regular? Justifica tu respuesta.		*Si, en la construcción de traslación las figuras copiadas siguen manteniendo igualdad con la figura inicial, y se mantienen con un lado compartido sin encimarse y no dejan regiones sin cubrir.* *Si, sigue siendo un teselado ya que basándonos en la definición de teselado los polígonos tienen un lado en común, sin sobreponerse y sin dejar áreas descubiertas, y para el caso de los triángulos se cumplen estas condiciones.* *Si, continúa cumpliendo ya que recordando nuevamente la definición de teselado podemos ver que en el teselado de cuadrados todas las figuras tienen un lado en común con otras sin sobreponerse y sin dejar espacios en blanco cubriendo toda el área.*
S12: ¿Qué criterio permite determinar cuándo un polígono regular puede teselar un plano? Explica ampliamente.		*Qué los ángulos interiores de los polígonos (triangulo, cuadrado, hexágono) den como resultado 360º creando una circunferencia con un centro que sería el vértice, y que los ángulos del polígono sean múltiplos de 360º.*
S13: ¿Consideras que estos polígonos (cuadrado, triángulo		*Si, ya que otras figuras no podrían sumar 360º con los ángulos interiores en base a un*

equilátero y hexágono regular) son los únicos que sirven para generar un teselado regular? Justifica tu respuesta.		*solo vértice, sin dejar espacios sin cubrir y con lados en común.*

Actividad 5- P1: Teselado semirregular	
Definición del teselado semirregular	
Situación problema	*Respuesta de Pablo*
S1: ¿Es posible construir un teselado semirregular utilizando solo triángulos equiláteros y cuadrados? Justifica tu respuesta.	*Si ya que son figuras geométricas con ángulos múltiplos de 360º y por ende podrían formar teselados semirregulares.*
S2: Si tu respuesta fue afirmativa a la pregunta anterior, ¿Cuáles son las combinaciones posibles para construir un teselado semirregular utilizando triángulos equiláteros y cuadrados? Utiliza el GeoGebra para construir las posibles combinaciones.	
S3: Construye un teselado semirregular utilizando alguna (s) herramienta (s) de las transformaciones isométricas (traslación, rotación o simetría axial) y alguna de las combinaciones propuesta por triángulos equiláteros y cuadrados.	
Protocolo de construcción	
S4: ¿Qué transformaciones isométricas aplicaste para generar el teselado? ¿Por qué utilizaste esta (s) transformación (es)?	*Traslación, simetría axial y rotación, y las utilice para poder acomodar las figuras a conveniencia y crear el teselado, ya que a veces es más fácil utilizar rotación y otras*

	traslaciones para ubicar figuras dependiendo de donde las quieras.
S5: Describe a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado semirregular en el GeoGebra.	*Primero cree un triángulo regular y con la rotación cree una hilera de triángulos con lados en común, después cree un cuadrado regular situado encima del triángulo inicial y coloque vectores en el para trasladarlo una vez teniendo otra hilera de cuadrados sobre la hilera de triángulos, utilice la simetría axial creando una recta que iba en los vértices superiores de los cuadrados y con la simetría axila traslade los triángulos usando esta recta con la nueva hilera de triángulos creada de la misma manera que la anterior se concluyó con la parte inicial, para ampliarla se necesita colocar un vector que va desde un vértice del cuadrado a la mediatriz de un triángulo y se traslada el cuadrado y se puede continuar ampliando el teselado ocupando este procedimiento.*
S6: Mueve o arrastra algún punto de los polígonos base mediante la herramienta de elige y mueve ¿la construcción sigue siendo un teselado semirregular? Explica a detalle y justifica si el teselado se mantiene o no.	*Si, el teselado se mantiene, ya que en ningún momento se deforma mantiene ángulos interiores que sumados dan 360º y no deja espacios en blanco utilizando dos polígonos diferentes*

Actividad 5- P2: Teselado semirregular	
Situación problema	*Respuesta de Pablo*
S1: Construye el siguiente teselado semirregular en el GeoGebra formado por cuadrados y octágonos regulares. Utiliza las transformaciones isométricas para su construcción.  *Sugerencias para la construcción*: - Utiliza la herramienta de polígono regular  para	

formar el arreglo base (polígonos sombreados). Posteriormente aplica cualquiera o todas de las transformaciones isométricas (traslación , rotación o simetría axial) del software para generar el teselado.	
S2: ¿Qué transformaciones isométricas aplicaste para generar el teselado?	*Simetría axial y traslación*
S3: Describe a detalle el procedimiento que seguiste para construir el teselado semirregular en el GeoGebra.	*Primero construí un cuadrado regular y a partir de dos vértices construí el octágono después cree cuatro rectas que pasaban por el centro del cuadrado y por los lados de los octágonos y utilizando simetría axial replique la figura de los octágonos hasta tener cuatro octágonos que rodearan al primer cuadrado y después coloque vectores que se ubicaban del vértice del cuadrado pasando por un octágono y terminando el vértice del siguiente octágono, coloque dos uno en dirección de arriba a abajo y el otro de izquierda a derecha y con traslación seleccionaba la figura que quería mover usaba el vector que más me acomodara para ubicarlo.*
S4: Mueve o arrastra algún punto de los polígonos base mediante la herramienta de elige y mueve ¿la construcción sigue siendo un teselado semirregular? Explica a detalle y justifica si el teselado se mantiene o no.	*Si, continúa siendo un teselado semirregular ya que los polígonos mantienen lados en común sin sobreponerse y sin dejar áreas descubiertas y si se suman los ángulos interiores de un vértice da como resultado 360º.*
S5: ¿Cuál es la medida de la suma de ángulos en cada vértice? Justifica tu respuesta.	*si se suman los ángulos interiores de un vértice da como resultado 360º.*

Anexo 3

Análisis de los procesos matemáticos cognitivos, el caso de Pablo

<table>
<tr><th colspan="6">Procesos matemáticos movilizados en la práctica de Pablo</th></tr>
<tr><th>Actividad
Procesos matemáticos</th><th>Actividad 1</th><th>Actividad 2</th><th>Actividad 3</th><th>Actividad 4</th><th>Actividad 5</th></tr>
<tr><td>Significación</td><td colspan="5">El alumno intenta expresar la definición de polígono regular, así como el conjunto de conceptos que se relacionan con este (lado, congruencia, ángulo, medida, etc.).
El alumno deduce la fórmula que le permite calcular el ángulo interior de cualquier polígono regular, ya que el alumno tuvo que establecer una relación de los significados de triángulo isósceles, la propiedad de la suma de ángulos interiores y el ángulo central.
Pone en juego conceptos y definiciones que ya han sido trabajadas en las actividades previas, haciendo emerger las transformaciones isométricas.
El alumno es capaz de referenciar el concepto de teselado regular y justificar que en cada uno forman circunferencias completas, es decir que en cada vértice que comparten los polígonos se forma un ángulo de 360°, aunque sea expresado a través de un lenguaje informa.
Los significados sobre polígonos regulares, teselados y transformaciones isométricas son manifestados en esta última actividad.</td></tr>
<tr><td>Algoritmización</td><td colspan="5">El alumno expresa de manera no ostensiva la relación entre número de lados y el número de triángulos inscritos en un polígono con pocos lados (análisis de casos particulares).

El alumno aplicó de manera reiterada la expresión general que dedujo para identificar y calcular el ángulo interior de cualquier polígono regular.</td></tr>
<tr><td>Generalización</td><td colspan="5">El alumno identifica un patrón o una sucesión de polígonos que cumplen con cierta característica, por lo que el alumno intenta generalizar visualizando otros casos de polígonos e identificando el número de triángulos inscritos, así que para un polígono de n-lados determina la expresión n-2= cantidad de triángulos con n= lados del polígono.</td></tr>
<tr><td>Particularización</td><td colspan="5">El alumno recurre a particularizar a través de la manipulación del deslizador para identificar un ángulo central o interior de un cierto polígono en particular, aunque esto fuera solo para nombrarlo o visualizarlo.
El alumno analiza casos particulares para definir donde ubicar el vector de traslación qué ángulo de rotación debiera aplicar para construir cierto teselado regular.</td></tr>
</table>

Materialización	El alumno recurre a dibujar polígonos y verificar midiendo el ángulo interior con la herramienta correspondiente. Donde hizo ostensivo una representación figural. El alumno al aplicar las herramientas del software GeoGebra representa para él significados que conlleva a materializar su pensamiento a través del uso y la explicación que manifestó, aunque este haya sido en términos informales El alumno durante las construcciones de los teselados semirregulares materializa y mediatiza su conocimiento a través de las herramientas del software, lo que constituye los significados relacionados con las transformaciones isométricas y conlleva a desarrollar un proceso de *significación*.				
Personalización	El alumno manifiesta una cognición personal al definir las isometrías en el plano, ya que, desde su propia experiencia y significados puestos en juego, propone el concepto referente a la traslación, rotación y simetría axial.				
Representación	El alumno representa y justifica a través de la aplicación de herramientas del software GeoGebra como los conceptos sobre las transformaciones isométricas que le permiten lograr las construcciones.				
Objetos matemáticos primarios	Conceptos Lenguaje Proposición	Conceptos Argumentos Lenguaje	Conceptos Argumentos Lenguaje Propiedades	Procedimientos Conceptos Lenguaje Propiedades	Conceptos Procedimientos Lenguaje Propiedades