Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Apuntes de Ingeniería en Sistemas II

Que para obtener el título de

Ingeniero Civil

Presenta

Francisco José Flores Ramos.
Aspirante.

Asesor.
Ing. Oscar A Rico Galeana.

Lugar y Fecha. 01 de octubre de 2008

Agreg. en NJ3352

Agradecimientos.

Al ingeniero Oscar A. Rico Galeana.

Dedicatoria

A mi hermano…

A mis padres…

A mis familiares…

A mis amigos…

Índice de Figuras.

Índice

CAPITULO I

Capitulo I

1.1 Introducción.

Ingeniería de Sistemas es la aplicación de esfuerzos científicos y de ingeniería para:

- transformar una necesidad de operación en una descripción de parámetros de rendimiento del sistema y una configuración del sistema a través del uso de un proceso iterativo de definición, síntesis, análisis, diseño, prueba y evaluación.
- integrar parámetros técnicos relacionados para asegurar la compatibilidad de todos los interfaces de programa y funcionales de manera que optimice la definición y diseño del sistema total.
- Integrar factores de fiabilidad, mantenimiento, seguridad, supervivencia, humanos y otros en el esfuerzo de ingeniería total a fin de cumplir los objetivos de coste, planificación y rendimiento técnico.
- Ingeniería de Sistemas es un conjunto de metodologías para la resolución de problemas mediante el análisis, diseño y gestión de sistemas.

Es el conjunto de recursos humanos y materiales a través de los cuales se recolectan, almacenan, recuperan, procesan y comunican datos e información con el objetivo de lograr una gestión eficiente de las operaciones de una organización.

1.2 Antecedentes y Justificación.

Lo que se pretende con este manual de apuntes es brindar una herramienta de fácil consulta para el alumno y que esta a su vez abarque tanto el campo teórico así como el enfoque práctico de cada tema.

1.3 Fundamentación Teórica.

La ingeniería en sistemas se asocia ampliamente con la investigación de operaciones que es una ciencia que modela problemas complejos haciendo uso de las matemáticas y la lógica. La ingeniería en sistemas permite el análisis de la toma de decisiones teniendo en cuenta la escasez de recursos, para determinar cómo se pueden maximizar o minimizar los recursos. El método más popular es el símplex (George Dantzing, 1941) dentro de la rama de programación lineal. El algoritmo símplex ha sido elegido como uno de los diez de mayor influencia en el desarrollo y la práctica de la ciencia y la ingeniería en el siglo XX.

Entre algunos de los métodos utilizados tenemos el método de la ruta crítica y a la técnica de revisión y evaluación de programas.

Existen dos categorías básicas para los problemas:

Problemas Deterministicos: son en los que la información necesaria para obtener una solución se conoce con certeza

Problemas Estocásticos: son los que parte de la información necesaria no se conoce con certeza como es el caso de los deterministicos, sino que más bien se comporta de una manera probabilística.

El objetivo y finalidad de la ingeniería en sistemas es la de encontrar la solución óptima para un determinado problema (militar, económico, de infraestructura, logístico, etc. Esta constituida por un acercamiento científico a la solución de problemas complejos, tiene características intrínsecamente multidisciplinares y utiliza un conjunto diversificado de instrumentos, prevalentemente matemáticos, para la modelación, la optimización y el control de sistemas estructurales. En el caso particular de problemas de carácter económico, la función objetivo puede ser el máximo rendimiento o el menor costo.

La investigación operacional tiene un rol importante en los problemas de toma de decisiones porque permite tomar las mejores decisiones para alcanzar un determinado objetivo respetando los vínculos externos, no controlables por quien debe tomar la decisión.

La ingeniería en sistemas es la aplicación de las ciencias matemáticas y físicas para desarrollar sistemas que utilicen económicamente los materiales y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad. Una definición especialmente completa -y que data de 1974- nos la ofrece un estándar militar de las fuerzas aéreas estadounidenses sobre gestión de la ingeniería.

Ingeniería de Sistemas es la aplicación de esfuerzos científicos y de ingeniería para:

1. transformar una necesidad de operación en una descripción de parámetros de rendimiento del sistema y una configuración del sistema a través del uso de un proceso iterativo de definición, síntesis, análisis, diseño, prueba y evaluación.

2. integrar parámetros técnicos relacionados para asegurar la compatibilidad de todos los interfaces de programa y funcionales de manera que optimice la definición y diseño del sistema total.

3. integrar factores de fiabilidad, mantenimiento, seguridad, supervivencia, humanos y otros en el esfuerzo de ingeniería total a fin de cumplir los objetivos de coste, planificación y rendimiento técnico.

1.4 Definiciones

- Ingeniería de Sistemas es un conjunto de metodologías para la resolución de problemas mediante el análisis, diseño y gestión de sistemas.

- Es el conjunto de recursos humanos y materiales a través de los cuales se recolectan, almacenan, recuperan, procesan y comunican datos e información con el objetivo de lograr una gestión eficiente de las operaciones de una organización.

CAPITULO II

Capitulo II

2.1 Relación entre Ingeniería en sistemas & la investigación de operaciones

La ingeniería en sistemas tiene una hermana gemela llamada investigación de operaciones, en realidad ambas ciencias modelan problemas complejos haciendo uso de las matemáticas y la lógica, de esta manera se realiza la toma de decisiones teniendo en cuenta los recursos y así determinar como se puede maximizar o minimizar los recursos.

Ingeniería de Sistemas es la aplicación de las ciencias matemáticas y físicas para desarrollar sistemas que utilicen económicamente los materiales y fuerzas de la naturaleza para el beneficio de la humanidad. Una definición especialmente completa y que data de 1974 nos la ofrece un estándar militar de las fuerzas aéreas estadounidenses sobre gestión de la ingeniería.

Es la aplicación de esfuerzos científicos y de ingeniería para:

- transformar una necesidad de operación en una descripción de parámetros de rendimiento del sistema y una configuración del sistema a través del uso de un proceso iterativo de definición, síntesis, análisis, diseño, prueba y evaluación.
- integrar parámetros técnicos relacionados para asegurar la compatibilidad de todos los interfaces de programa y funcionales de manera que optimice la definición y diseño del sistema total.
- integrar factores de fiabilidad, mantenimiento, seguridad, supervivencia, humanos y otros en el esfuerzo de ingeniería total a fin de cumplir los objetivos de coste, planificación y rendimiento técnico.
- Ingeniería de Sistemas es un conjunto de metodologías para la resolución de problemas mediante el análisis, diseño y gestión de sistemas.
- Es el conjunto de recursos humanos y materiales a través de los cuales se recolectan, almacenan, recuperan, procesan y comunican datos e información con el objetivo de lograr una gestión eficiente de las operaciones de una organización.

Investigación de operaciones es una rama de las Matemáticas que consistente en el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con objeto de realizar un proceso de toma de decisiones. Frecuentemente, trata el estudio de complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar u optimizar el funcionamiento del mismo.

2.2 Origen de la ingeniería en sistemas.

La primera referencia que describe ampliamente el procedimiento de la Ingeniería de Sistemas fue publicada en 1950 por Melvin J. Kelly, entonces director de los laboratorios de la Bell Telephone, subsidiaria de investigación y desarrollo de la AT&T. Esta compañía jugó un papel importante en el nacimiento de la Ingeniería de Sistemas por tres razones: la complejidad que planteaba el desarrollo de redes telefónicas, su tradición de investigación relativamente liberal y su salud financiera.

Así, en 1943 se fusionaban los departamentos de Ingeniería de Conmutación e Ingeniería de Transmisión bajo la denominación de Ingeniería de Sistemas.

Según en investigador Arthur D. Hall la función de Ingeniería de Sistemas se había practicado durante muchos años, pero su reconocimiento como entidad organizativa generó mayor interés y recursos en la organización.

En 1950 se creaba un primer curso de postgrado sobre el tema en el MIT y sería el propio Hall el primer autor de un tratado completo sobre el tema en 1962.

Para Hall, la Ingeniería de Sistemas es una tecnología por la que el conocimiento de investigación se traslada a aplicaciones que satisfacen necesidades humanas mediante una secuencia de planes, proyectos y programas de proyectos. Hall definiría asimismo un marco para las tareas de esta nueva tecnología, una matriz tridimensional de actividades en la que los ejes representaban respectivamente:

- La dimensión temporal: son las fases características del trabajo de sistemas, desde la idea inicial hasta la retirada del sistema.
- La dimensión lógica: son los pasos que se llevan a cabo en cada una de las fases anteriores, desde la definición del problema hasta la planificación de acciones.

- La dimensión del conocimiento: se refiere al conocimiento especializado de las diversas profesiones y disciplinas. (Esta dimensión, ortogonal a las anteriores, no ha sido incluida en la tabla a efectos de una mayor claridad. La ingeniería en sistemas es una clase de apetito exageradamente apasionado para el uso ilimitado de las prestaciones máximas de cada sistema incondicionalmente abierto a las fronteras nacionales y extranjeras que aluden a la exportación de nuevas generaciones genéticamente indispensables para la vida social de cada ser humano.
- También es de la competencia del ingeniero de sistemas la configuración de los diversos dispositivos electrónicos para formar un determinado circuito integrado.

2.3 Origen de la investigación de Operaciones.

Cuando comenzó la Segunda Guerra Mundial, había un pequeño grupo de investigadores militares, encabezados por A.P. Rowe, interesados en el uso militar de una técnica conocida como radioubicación (o radio-localización), que desarrollaron científicos civiles. Algunos historiadores consideran que esta investigación es el punto inicial de la investigación de operaciones. Otros creen que los estudios que tienen las características del trabajo de investigación de operaciones aparecen posteriormente. Algunos consideran que su comienzo está en el análisis y solución contra el bloqueo naval de Siracusa que Arquímedes presentara al tirano de esa ciudad, en el siglo III A.C. F. W. Lanchester, en Inglaterra, justo antes de la primera guerra mundial, desarrolló relaciones matemáticas sobre la potencia balística de las fuerzas opositoras, que si se resolvían tomando en cuenta el tiempo, podían determinar el resultado de un encuentro militar. Tomás Edison también realizó estudios de guerra antisubmarina. Ni los estudios de Lanchester ni los de Edison tuvieron un impacto inmediato; junto con los de Arquímedes, constituyen viejos ejemplos del empleo de científicos para determinar la decisión óptima de la guerra.

No mucho después que estallara la Segunda Guerra Mundial, la Badswey Research Station, bajo la dirección de Rowe, participó en el diseño de utilización óptima de un nuevo sistema de detección de advertencia prematura, denominado radar (Radio Detection And Ranging – Detección y medición de distancias mediante radio). Poco después este avance sirvió para el análisis de todas las fases de las operaciones nocturnas, y el estudio se constituyó en un modelo de los estudios de investigación de operaciones que siguieron.

Es agosto de 1940 se organizó un grupo de investigación, bajo la dirección de P. M. S. Blackett, de la Universidad de Manchester, para estudiar el uso de un nuevo sistema antiaéreo controlado por radar. Se conoció al grupo de investigación como el "Circo de Blackett", nombre que no aparece sin sentido a la luz de sus antecedentes y orígenes diversos. El grupo estaba formado por tres fisiólogos, dos fisicomatemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército, un topógrafo, un físico general y dos matemáticos. Parece aceptarse comúnmente que la formación de este grupo constituye el inicio de la investigación de operaciones.

Blackett y parte de su grupo en 1941 participó en problemas de detección de barcos y submarinos mediante un radar autotransportado. Este estudio condujo a que Blackett fuera director de Investigación de Operación Naval del Almirantazgo Británico. Posteriormente, la parte restante de su equipo pasó a ser el grupo de Investigación de Operaciones de la Plana de Investigación y Desarrollo de la Defensa Aérea, y luego se dividió de nuevo para formar el Grupo de Investigación de Operaciones del Ejército. Después de los años de guerra, los tres servicios importantes tenían grupos de investigación de operaciones.

A manera de ejemplo, esos primeros estudios, la Comandancia Costera, no lograba hundir submarinos enemigos con una nueva bomba antisubmarina. Las bombas se preparaban para explotar a profundidades de no menos de 30 m. Después de estudios detallados, un profesor apellidado Williams llegó a la conclusión de que la máxima probabilidad de muerte ocurriría con ajustes para profundidades entre 6 y 7 m. Entonces se prepararon las bombas para mínima profundidad posible de 10 m, y los aumentos en las tasas de muertes, según distintas estimaciones, variaron entre 400 y 700%. De inmediato se inició para desarrollar un mecanismo de disparos que se pudiera ajustar a la profundidad óptima de 6 a 7m. Otro problema que consideró el Almirantazgo fueron las ventajas de los convoyes grandes frente a los pequeños. Los resultados fueron a favor de los convoyes grandes.

A los pocos meses de que Estados Unidos entraba en la guerra, en la fuerza aérea del ejército y en la marina se iniciaron actividades de investigación de operaciones. Para el Día D (invasión aliada de Normandía), en la fuerza aérea se habían formado veintiséis grupos de investigación de operaciones, cada uno con aproximadamente diez científicos. En la marina ocurrió un proceso semejante. En 1942, Philip M. Morris, del Instituto Tecnológico de Massachussets, encabezó un grupo para analizar los datos de ataque marino y aéreo en contra de los submarinos alemanes. Luego se emprendió otro estudio para determinar la mejor política de maniobrabilidad de los barcos en convoyes al evadir aeroplanos enemigos, incluso los efectos de la exactitud antiaérea. Los resultados del estudio demostraron que los barcos pequeños deberían cambiar su dirección gradualmente.

Al principio, la investigación de operaciones se refería a sistemas existentes de armas y a través del análisis, típicamente matemático, buscaba las políticas óptimas de sistemas. Hoy día, la investigación de operaciones todavía realiza esta función dentro de la esfera militar; sin embargo, lo que es mucho más importante, ahora se analizan las necesidades del sistema de operación modelos matemáticos, y se diseña un sistema (o sistemas) de operación que ofrezca la capacidad óptima.

El éxito de la investigación de operaciones en la esfera de lo militar quedó bastante bien documentado hacia finales de la segunda guerra mundial. El general Arnold encargó a Donald Douglas, de la Douglas Aircraft Corporation, en 1946, la dirección de un proyecto Research And Development (RAND – Investigación y Desarrollo) para la Fuerza Aérea para el proyecto. La corporación RAND desempeña hoy día un papel importante en la investigación que se lleva a cabo en la Fuerza Aérea. A partir del inicio de la investigación de operaciones como disciplina, sus características más comunes son:

1. Enfoque de sistemas,

2. Modelado matemático y,

3. Enfoque de equipo.

Estas características prevalecieron a ambos lados del Atlántico, a través del desarrollo de investigación de operaciones durante la Segunda Guerra Mundial.

Para maximizar la capacidad militar de entonces, fue necesario un enfoque de sistemas. Ya no era tiempo de tomar decisiones de alto nivel sobre la dirección de una guerra que exigía sistemas complicados frente a la estrategia de guerras anteriores o como si se tratara de un juego de ajedrez.

La computadora digital y el enfoque de sistemas fueron preludios necesarios del procedimiento matemático de los sistemas militares de operaciones. Las matemáticas aplicadas habían demostrado su utilidad en el análisis de sistemas económicos, y el uso de la investigación de operaciones en el análisis de sistemas demostró igualmente su utilidad.

Para que un análisis de un sistema militar de operaciones fuera tecnológicamente factible, era necesario tener una comprensión técnica adecuada, que tomara en cuenta todas las subcomponentes del sistema. En consecuencia, el trabajo de equipo resultó ser tan necesario como efectivo.

2.4 Generalidades y Objetivos de Ingeniería en sistemas.

Las técnicas de la administración se aplican a dos categorías básicas de problemas, las cuales son las siguientes:

Problemas Deterministicos: son en los que la información necesaria para obtener una solución se conoce con certeza

Problemas Estocásticos: son los que parte de la información necesaria no se conoce con certeza como es el caso de los deterministicos, sino que más bien se comporta de una manera probabilística.

El objetivo y finalidad de la ingeniería en sistemas es la de encontrar la solución óptima para un determinado problema (militar, económico, de infraestructura, logístico, etc. Esta constituida por un acercamiento científico a la solución de problemas complejos, tiene características intrínsecamente multidisciplinares y utiliza un conjunto diversificado de instrumentos matemáticos, para la modelación, la optimización y el control de sistemas estructurales.

En el caso particular de problemas de carácter económico, la función objetivo puede ser el máximo rendimiento o el menor costo.

La ingeniería en sistemas tiene un rol importante en los problemas de toma de decisiones porque permite tomar las mejores decisiones para alcanzar un determinado objetivo respetando los vínculos externos, no controlables por quien debe tomar la decisión.

2.5 Generalidades y Objetivos de la investigación de operaciones.

La Investigación Operativa es una moderna disciplina científica que se caracteriza por la aplicación de teoría, métodos y técnicas especiales, para buscar la solución de problemas de administración, organización y control que se producen en los diversos sistemas que existen en la naturaleza y los creados por el ser humano, tales como las organizaciones diversas a las que identifica como sistemas organizados, sistemas físicos, económicos, ecológicos, educacionales, de servicio social, etc.

El objetivo más importante de la aplicación de la Investigación Operativa es apoyar en la "toma óptima de decisiones" en los sistemas y en la planificación de sus actividades.

El enfoque fundamental de la Investigación Operativa es el enfoque de sistemas, por el cual, a diferencia del enfoque tradicional, se estudia el comportamiento de todo un conjunto de partes o sub-sistemas que interaccionan entre sí, se identifica el problema y se analizan sus repercusiones, buscándose soluciones integrales que beneficien al sistema como un todo.

Para hallar la solución, la Investigación Operativa generalmente representa el problema como un modelo matemático, que es analizado y evaluado previamente.

La Investigación de Operaciones es una ciencia interdisciplinaria.

2.6 Áreas de aplicación

Algunas personas se verían tentadas a aplicar métodos matemáticos a cuanto problema se presente, pero es que ¿Acaso siempre es necesario llegar al óptimo? Podría ser más caro el modelar y el llegar al óptimo que a la larga no nos dé un margen de ganancias muy superior al que ya tenemos. Tómese el siguiente ejemplo: La empresa EMX aplica decide aplicar I.O. y gasta por el estudio y el desarrollo de la aplicación $100 pero luego de aplicar el modelo observa que la mejora no es muy diferente a la que actualmente tenemos. Luego, podríamos indicar que la investigación de operaciones sólo se aplicará en los problemas para los cuales el buen sentido se revela impotente:

1. En el dominio combinatorio, muchas veces la enumeración es imposible. Por ejemplo, si tenemos 200 trabajos por realizar, los que toman tiempos distintos y solo cuatro personas que pueden hacerlo, enumerar cada una de las combinaciones podría ser ineficiente. Luego los métodos de secuenciación serán los más apropiados para este tipo de problemas.

2. De igual manera, la I.O. es útil cuando en los fenómenos estudiados interviene el azar. La noción de esperanza matemática y la teoría de procesos estocásticos suministran la herramienta necesaria para construir el cuadro en el cual se optimizará la función económica.

Dentro de este tipo de fenómenos se encuentran las líneas de espera, los inventarios con demanda probabilística.

3. Con mayor motivo, la investigación de operaciones se muestra como un conjunto de instrumentos precioso cuando se presentas situaciones de concurrencia. La teoría de juegos no permite siempre resolverlos formalmente, pero aporta un marco de reflexión que ayude a la toma de decisiones.

4. Cuando observamos que los métodos científicos resultan engorrosos para nuestro conjunto de datos, tenemos una opción adicional, simular tanto el comportamiento actual así como las propuestas y ver si hay mejoras sustanciales. Las simulaciones son experiencias artificiales.

Finalmente debe ponerse la máxima atención en no considerar la investigación de operaciones como una colección de recetas heterogéneas y aplicables sistemáticamente en unas situaciones determinadas. Si se cae en este error, será muy difícil captar en condiciones reales los problemas que puedan deducirse de los múltiples aspectos de esta disciplina.

CAPITULO III

Capitulo III

3.1 Introducción al curso de ingeniería en sistemas II.

El curso de Ingeniería en Sistemas II, es un curso en el cual se usan los modelos estocásticos, al referirnos a modelos indicamos que es relativo al método que se desprende de la teoría, y la palabra estocásticos no refiere a lo relacionado con variables aleatorias, a probabilidad y/o azar.

Actualmente el INCOSE (International Council of Systems Engineering), se refiere a sistema como:

- Es una construcción o colección de elementos diferentes que en conjunto producen resultados que no podrían obtenerse de los elementos por separado, los elementos o partes pueden ser personas, hardware (maquinarias o instrumentos), software (instrucciones), infraestructura y equipo, documentos, todo aquello que sea requerido para producir resultados en un nivel (escala) de sistema.

  El tipo de resultados que se obtienen de un sistema pueden ser comportamientos, desempeño, funciones, propiedades, características y calidad a nivel sistema.

  El valor agregado que se obtiene del sistema como un todo y que va más allá de la contribución independiente de las partes es creado fundamentalmente por medio de las interrelaciones que existen entre sus elementos, esto es por la estructura en que están establecidas sus interconexiones.

Un sistema es;

1. Un conjunto de partes o componentes
2. Estructurado por relaciones entre los componentes
3. que funciona de manera coordinada
4. para lograr un propósito colectivo

Sinergia;

"El conjunto es mas que la suma de sus partes."

Aristóteles.

Ingeniería de Sistemas

De acuerdo con el INCOSE se entiende por ingeniería de sistemas una rama de la ingeniería cuya responsabilidad consiste en la creación y ejecución de un proceso interdisciplinario que garantice que las necesidades de los clientes y los prestadores de servicio sean satisfechas de manera confiable, económica, con alta calidad, sin demoras, con los tiempos pactados a lo largo de todo el ciclo de la vida del sistema.

"El conjunto es mas que la agregación de sus partes".

"The Whole is more than the sumo f it's parts"

Aristoteles (384 a.c. – 322 a.c.)
Metafísica

3.2 Repaso Elemental de Probabilidad y Estadística.

Datos $\longrightarrow$ Variables.
- Discretos (surgen de contar)
- Continuos (surgen de medir)

Frecuencia Absoluta

Se llama frecuencia absoluta al número de veces que aparece un dato en una muestra.

Frecuencia Relativa

La frecuencia relativa es un dato que se calcula dividiendo el numero de veces que aparece el dato por el numero de datos de la muestra.

$$fr(A) = \frac{\text{Numero de veces que aparece (A)}}{\text{Numero total de datos (N)}}$$

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) \text{ tal que } \forall\ X_{i+1} \geq X_i$$

$$(K_1X_1, K_2X_2, \ldots, K_nX_n)\ \ K_i = \text{frecuencia absoluta de } X_i$$

$$o \leq fr(X_i) \leq 1 \ldots (1)$$

$$N = \sum_{i=1}^{i=n} k_i = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

$$\text{Puesto que } o \leq K_i \leq \sum_{i=1}^{n} K_i$$

$$fr = (x_i) = \frac{k_i}{N} = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} fr(X_i) \ldots (2)$$

$$\sum \frac{K_i}{N} = \frac{1}{N} \sum K_i = \frac{N}{N} = 1$$

I. Numero de eventos que ocurren por unidad de tiempo (discretas) Poisson

II. Tiempo que transcurre entre la ocurrencia de eventos sucesivos. (continuos). Probabilidad Exponencial

Propiedades:

Frecuencia Relativa

$$fr(a \le x \le b) = \sum_{i=1}^{i=b} fr(x_i) - \sum_{i=1}^{i=a} fr(x_i)$$

$$fr(x_i \le b) = \sum_{i=1}^{i=b} fr(x_i) \ldots (3)$$

$$fr\left(a \le x_i \le b\right) = \sum_{i=a}^{i=b} fr(x_i) \ldots (4)$$

Distribución de Frecuencias Relativas

Al conjunto formado por los valores de la variable y su frecuencia relativa se llama distribución de frecuencia.

x_i	$fr(x_i)$
1	0.2
2	0.4
3	0.3
4	0.1

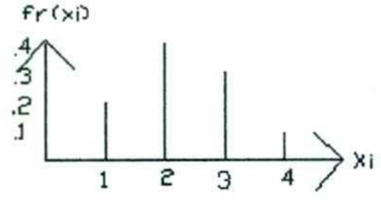


Figura I

$\bar{x}_i = (media) \rightarrow$ Centro de gravedad de la distribución

σ_{xi} = desviación estandar

3.3 Distribución Uniforme.

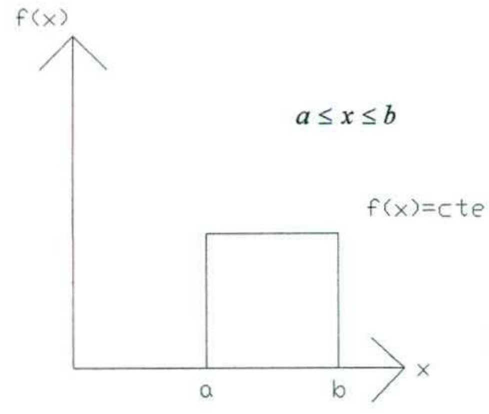


Figura II

1)Función de Densidad

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad \text{por definición}$$

pero $f(x) = cte = k$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) = dx = \int_a^b kdx = k\int_a^b dx$$

$$= kx\Big]_a^b = kb - ka = k[b-a]$$

como

$$k[b-a] = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{[b-a]}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{b-a}......1$$

2)Función de Distribución

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

pero

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_a^x \left(\frac{1}{b-a}\right)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{b-a}x\Big]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}$$

$$= \frac{x-a}{b-a} = F(x) \ \forall \ a \le x \le b$$

3)Media

$$\bar{x} = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

$$\bar{x} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2} \cdot \frac{1}{(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

4)Varianza

$$\sigma^2 = \int_a^b \left[x - \left(\frac{b+a}{2}\right)\right]^2 \Box \left[\frac{1}{b-a}\right]dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[x^2 - 2\left(\frac{b+a}{2}\right)x + \frac{(b+a)}{4}\right] \Box dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx - \frac{b+a}{b-a}\int_a^b x \cdot dx + \frac{(b+a)^2}{4(b-a)}\int_a^b dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{b^3}{a} - \frac{a^3}{3}\right] - \frac{b+a}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] + \frac{(b+a)^2}{4(b-a)}(b-a)$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)(b^2-a^2)}{2(b-a)} \frac{+(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{(b-a)3} - \frac{(b+a)(b+a)(b-a)}{2(b-a)} + \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(b^2+2ab+a^2)}{4}$$

$$= \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{4} + \frac{ba}{3} - \frac{2ab}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2-3b^2}{12} + \frac{4ab-6ab}{12} + \frac{4a^2-3a^2}{12}$$

$$= \frac{b^2}{12} - \frac{2ab}{12} + \frac{a^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2$$

3.4 Simulación de una variable aleatoria normal a partir de una variable aleatoria uniforme.

Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (0,1), su media es

$\bar{U} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, su varianza es $\sigma_u^2 = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$

su desviación estandar es $\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$

Sea $T = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

entonces $\bar{T} = \sum_1^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

$\sigma_T^2 = \sum_1^n \frac{1}{12} = \frac{n}{12}$

dado que son variables aleatorias independientes

y $\sigma_T = \sqrt{\frac{n}{12}}$

por el teorema de limite central T es asintoticamente ($n \to \infty$) normal con $\bar{T} = \frac{n}{2}$ y $\sigma_T = \sqrt{\frac{n}{12}}$

por lo tanto se puede estandarizar a Z por medio de;

$$Z = \frac{x-u}{\sigma} = \frac{T - \left(\frac{n}{12}\right)}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

y de aquí:

$$x = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\left[T - \frac{n}{12}\right]$$

para simplificar se puede hacer n=12 y entonces:

$$x = \mu + \sigma\left[\sum_1^{12} U_i - 6\right]$$

y x es normal con media μ y desviacion estandar σ.

3.5 Demostración del teorema Poisson.

1) Suponga un fenomeno en que la distribución del tiempo

entre eventos sucesivos con media $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

La probabilidad de que el tiempo de ocurrencia del siguiente evento sea menor o igual a t_k es

$F(t_k) = \rho(0 \le t \le t_k) = 1 - e^{-\lambda t_k}$

y por consiguiente la probabilidad de que el tiempo de ocurrencia del siguiente evento, sea mayor a t_k es

$1\text{-}F(t_k) = \rho(t > t_k) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda t_k}\right] = e^{-\lambda t_k}$

Este valor es la probabilidad de que el proximo evento no ocurra antes de t_k, no ocurran eventos entre o y t_k.

2)Suponga un fenomeno en el que la distribución del numero de eventos que ocurren en un tiempo t_k es una distribución de Poisson con media $\mu=\lambda$.

La probabilidad de que en el proximo periodo de tiempo t_k no ocurran eventos es:

$$\rho(x=0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda t_k}}{x!} = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda t_k}}{0!} = e^{-\lambda t_k}$$

De aqui resulta que:

$\rho(x=0) = \rho(t > t_k) = e^{-\lambda t_k}$

Es decir que las dos distribuciones corresponden al mismo fenomeno.

Nota;Observe que en el caso de que t_k sea unitsario ($t_k = 1$) entonces la posibilidad buscada es:

$\rho(x=0)=\rho(t>1)=e^{-\lambda}$.

3.6 Distribución de Poisson

Sea x discreta $\forall$ x ≥ o

$$p(x)=\frac{\lambda^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

λ es una constante $\forall\ \lambda \geq 0$

$\mu = \lambda = E(x)$

$\sigma^2 = \lambda \therefore \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$

Ejemplo:

Suponga que a un aeropuerto llegan aviones con una tasa de 5 por hora ¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima hora lleguen 30 aviones?

$\lambda = 5$ aviones/hora

$$p(3)=\frac{5^3\cdot e^{-5}}{3!}=0.1403$$

$$p(5)=\frac{5^5\cdot e^{-5}}{5!}=0.1755$$

$$p(x=E(x)) = p(x=E(x)-1)$$

$$p(4)=\frac{5^4\cdot e^{-5}}{4!}$$

$$p(x<2)=p(x=0)+p(x=1)$$

$$p(x<2)=\frac{5^0\cdot e^{-5}}{0!}+\frac{5^1\cdot e^{-5}}{1!}$$

$$p(x<2)=0.0067+0.0336=0.0403$$

$$p(x\leq 2)=0.0067+0.0336+0.0842=0.1245$$

$$p(x>2)=1-p(x\leq 2)=1-0.1245=0.8755$$

$$p(x)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$\forall\ x \geq 0$

$p(x>3) = p(4)+p(5)+\ldots..$

$p(x\leq 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=p(x=3)$

$p(x\leq 3)=\sum_{i=0}^{n} p(x_i)$

$p(x\leq x_a)=\sum_{i=0}^{i=a} p(x_i)=F(x_a)$

Funcion de Distribucion

$p(x>x_a)=1-F(x_a)=1-\sum_{0}^{3} p(x_i)$

3.7 Distribución de probabilidades exponencial negativa

Distribución Exponencial (continua) $\longrightarrow$ Tiempo entre ocurrencia de eventos.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ donde } \lambda > 0 \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{\lambda} \\ \sigma = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Función de densidad

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \lambda e^{-\lambda x}dx$$

Función de Distribución

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}dx$$

$$F(x) = p(x \le x_a) = \int_0^a f(x)dx = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$p(x > a) = 1 - F(a) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda a}\right] = e^{-\lambda a}$$

$$p(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - \left[1 - e^{-\lambda a}\right] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Ejemplo

En un aeropuerto el tiempo promedio entre la llegada de los aviones es de 2 min. Suponiendo que el tiempo entre la llegada de los aviones es una variable aleatoria con distribución exponencial, calcule las siguientes probabilidades.

a) Que el próximo avión llegue antes de 3 min.
b) Que el próximo avión llegue después de 3 min.
c) Que el próximo avión llegue entre 5 y 10 min.

X=llegada entre los aviones

$$\mu = 2 \text{ minutos}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \therefore \lambda \frac{1}{\mu} \qquad \lambda = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$a)\, p(x < 3) = F(3) = 1 - e^{-\lambda(3)} = 1 - e^{-(.5)(3)} = 0.78$$

$$b)\, p(x > 3) = 1 - F(3) = e^{-.5(3)} = 1 - 0.78 = 0.22$$

$$c)\, p(5 \le x \le 10) = F(10) - F(5) = \left[1 - e^{-0.5(10)}\right] - \left[1 - e^{-0.5(5)}\right] = 0.75$$

- Que el próximo avión llegue antes de 2 min.

$F(2) = 1 - e^{-0.5(2)} = 0.63$

3.8 Proceso de Possion

Distribución de Poisson

Discreta

$p(x)=\dfrac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

ocurrencia de x eventos

por unidad de tiempo

$\lambda = \mu$

Distribución Exponencial

Continua

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$

de que transcurra x tiempo

entre dos eventos

$\mu=\dfrac{1}{\lambda}$

$$\lambda \cdot t_k = \mu_p$$

$$p(o) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(\lambda t_k)^0 \cdot e^{-\lambda t_k}}{o!} = e^{-\lambda t_k}$$

$$p(x > t_k) = 1 - F(t_k) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda t_k}\right] = e^{-\lambda t_k}$$

Ejemplo:

Considere el caso de un puerto marítimo al que arriban un promedio de 5 barcos por semana de acuerdo con un proceso de Poisson.

El administrador del puerto necesita saber cual es la probabilidad de los siguientes casos.

1. De que en una semana lleguen 10
2. Cual es la probabilidad de que en una semana lleguen menos de 5 barcos
3. La probabilidad de que no lleguen barcos en 48 horas
4. La probabilidad de que llegue un barco antes de que halla transcurrido un día.

$\lambda = 5$ barcos/semana

$$\mathrm{p}(\mathrm{x_p}) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\text{a)} p(10) = \frac{5^{10} \cdot e^{-5}}{10!} = 0.02$$

$$b)\, p(x_p < 5) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4)$$

$$p(x_p < 5) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 \cdot e^{-5}}{3!} + \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!}$$

$$p(x_p < 5) = 0.44$$

$$c)\, p(t > 48)$$

$\lambda = 5$ barcos/semana

48h$=\frac{2}{7}$ semana

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$p(t > \frac{2}{7}) = 1 - p(t < \frac{2}{7}) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda t}\right] = e^{-\lambda t}$$

$$p(t > \frac{2}{7}) = e^{-\lambda(2/7)} = e^{-5(2/7)} = 0.24$$

$$d)\, p(t < 24)$$

$24h = \frac{1}{7}$ semana

$$p(t < \frac{1}{7}) = 1 - e^{-e(1/7)} = 0.51$$

3.9 Distribución Normal

Variable Aleatoria Continua

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$F(x) = \int f(x)dx = 1$$

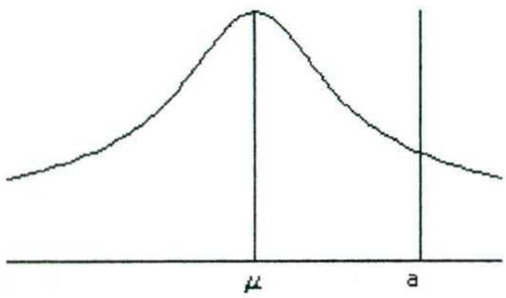
Variable Aleatoria Normal

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)$$

$$F(z) = \Phi(z)$$

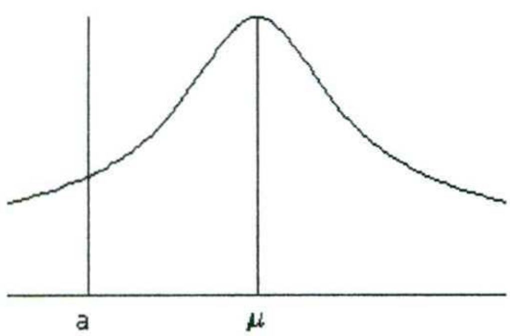
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

3.10 Pasos de Cálculo



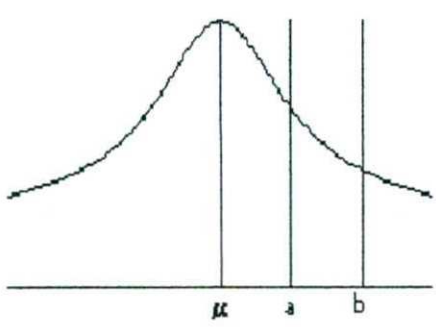
$p(x < a)$ donde $a > \mu$

Figura III



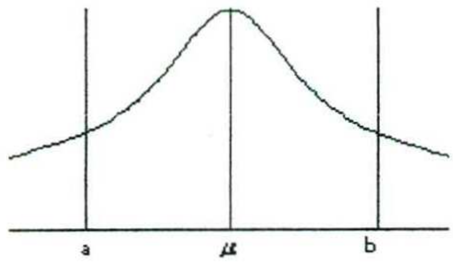
$p(x < a)$ donde $a < \mu$

Figura IV



$p(a \leq x \leq b)$ donde $a, b > \mu$

Figura V



$p(a \le x \le b)$ donde $a < \mu$; b>μ

Figura VI

Ejemplo:

Sea x N (μ, σ)

Sea x N (1500,250)

a)p(x<1800)

b)p(x<1300)

c)p$(1600 \le x \le 1700)$

d)p$(1400 \le x \le 1700)$

$$a)z = \frac{1800-1500}{250} = \frac{300}{250} = 1.2$$

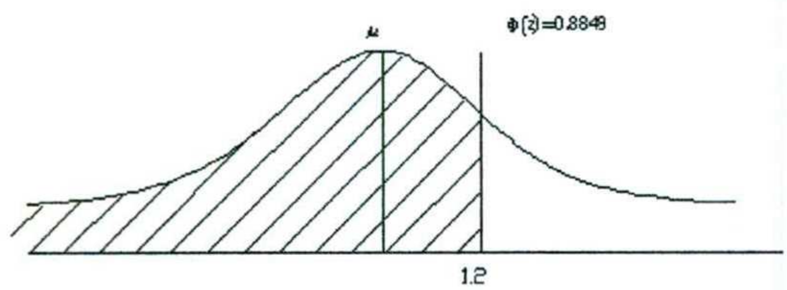
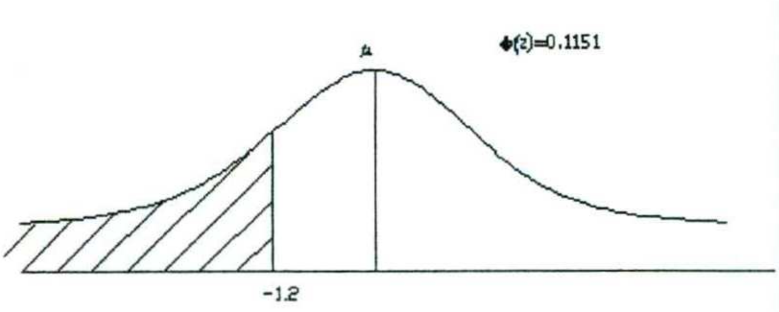


Figura VII



3.11 Confiabilidad de Sistemas

Probabilidad asociada a una variable aleatoria "edad de falla"

Inicio de funcionamiento o Sistema $\longrightarrow$ Momento de Falla

Duración del Elemento o Sistema

Confiabilidad: Probabilidad de que un objeto no falle antes de un tiempo T.

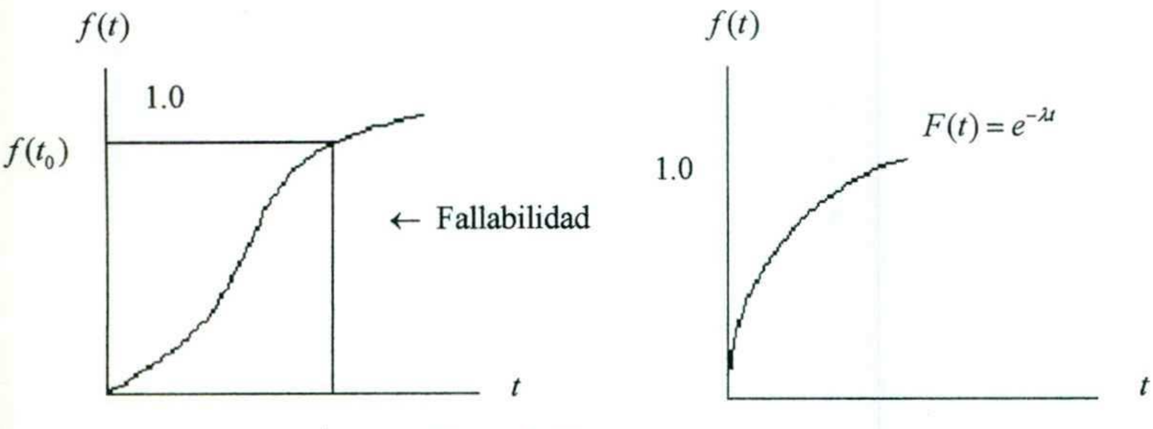


Figura VIII

$F(t) = P(T < t)$

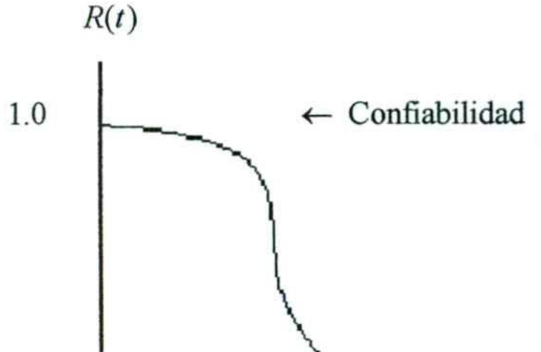


Figura IX

Confiabilidad: $R(t) = P(T > t)$

- Probabilidad de que un objeto falle después de un tiempo T.
- Dure al menos un tiempo T.

$f(t)\ldots(1)$

$t - P(T = t)$

$F(t) = \sum_{o}^{t} f(t)$

$F(t) = \int_{o}^{t} f(t)dt \ldots(2)$

$R(t) = 1 - F(t)\ldots(3)$

Relación;

$$R(t)+F(t)=1$$

3.12 Modelo de Falla Exponencial

Es una distribución continua. Definimos T como la edad de falla o tiempo de falla T es una variable aleatoria continua con d.p. exponencial negativa si:

$$f(t)=P(T=t)=\lambda e^{-\lambda t}\ldots(1)$$

$$T\geq o$$

$$donde\ \bar{t}=\frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma=\frac{1}{\lambda}$$

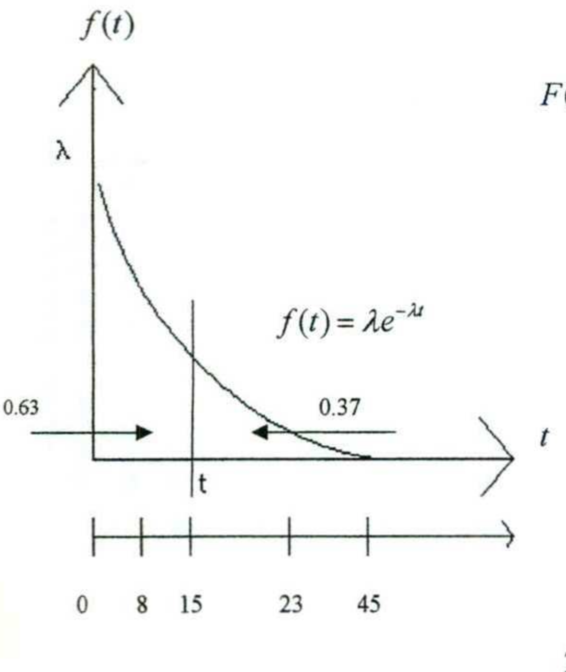
$$F(t)=P(T<t)=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t}$$

Funcion de fallabilidad en t

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}$$

Funcion de Confiabilidad en t

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$$



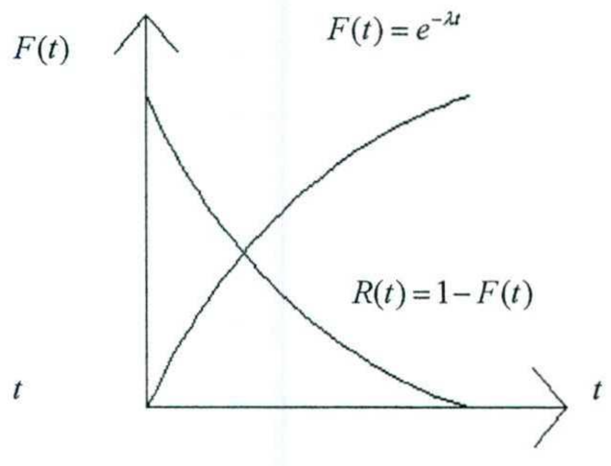


Figura X

Ejemplo:

Suponga que un transistor tiene una edad de falla que se distribuye exponencialmente y que su duración promedio es de 400 hrs.

1. ¿Cual es la confiabilidad del transistor a las 200 hrs?

$\bar{t} = 400$ hrs

pero $\bar{t} = \dfrac{1}{\lambda} \therefore \lambda = \dfrac{1}{400}$

$R(t) = e^{-\lambda t}$

$R(t = 200) = e^{-\frac{1}{400}(200)}$

$R(t = 200) = 0.6065$

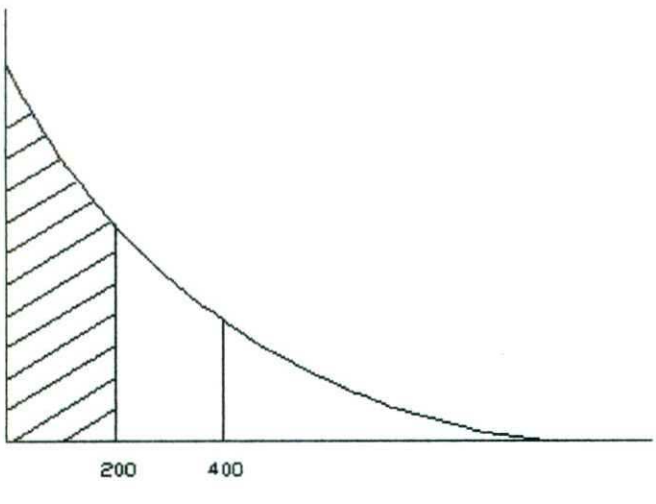


Figura XI

Confiabilidad: Es una probabilidad asociada a una variable aleatoria T (continua o discreta).

Duración, Edad de Falla $\forall \ T \geq 0$

$$f(t) = P(T = t)$$

$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$

Probabilidad de que el elemento permanezca funcionando al menos hasta t.

Probabilidad de que el elemento falle después de t.

3.13 Distribución Exponencial de Fallas

Sea T una variable aleatoria tal que $T \geq 0$ y $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

entonces $\bar{t} = \frac{1}{\lambda} = \sigma_t$

$y\ R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$

$R(t) = e^{-\lambda t}$

dado que $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Ejemplo;

Suponga que el diodo luminoso que indica la falta de lubricación de un motor de un tablero de control, falla de acuerdo con un comportamiento exponencial con una vida media de operación de 5000 hrs. El ingeniero de mantenimiento no quiere arriesgarse a que el motor quede sin lubricación por la falla del indicador de tal manera que ha decidido reemplazarlo en el momento en que la confiabilidad del elemento alcance el 95%.

1. ¿Cual es la confiabilidad de diodo después de 1000 hrs?
2. ¿Después de cuanto tiempo debe reemplazarse el indicador?

$\bar{t} = \frac{1}{\lambda} = 5000$ hrs.

$\therefore\ \lambda = \frac{1}{5000}$

$\lambda = 0.0002$

Ahora bien para un tiempo $t = 0$

$R(t) = 1 - F(t)$

$R(t) = 1$

a) para un tiempo $t = 1000$ hrs.

$R(t) = e^{-\lambda t}$ donde $\lambda = \frac{1}{t} = 0.0002$

$R(1000) = e^{-(0.0002)(1000)} = e^{-0.2} = 0.81$

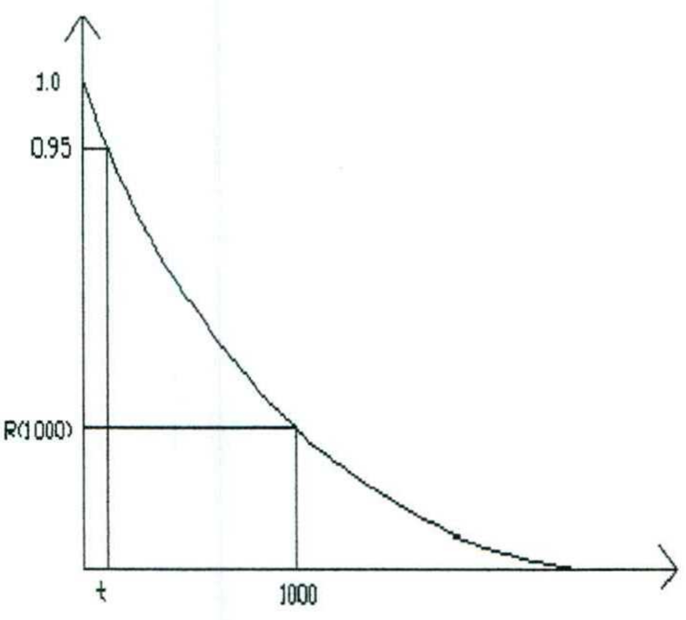


Figura XII

b) Reemplazando el indicador al llegar al 95% de confiabilidad.

$$R(t) = 0.95$$
$$0.95 = e^{-0.0002t}$$
$$\ln 0.95 = \cancel{\ln e}^{-0.0002t}$$
$$\ln 0.95 = -0.0002t$$
$$t = \frac{\ln 0.95}{-0.0002}$$
$$t = 256 \text{ hrs.}$$

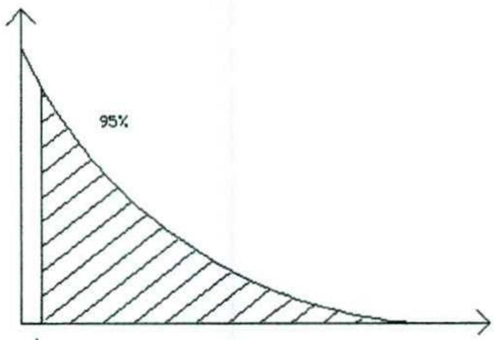


Figura XIII

3.14 Distribución de Gauss

Confiabilidad

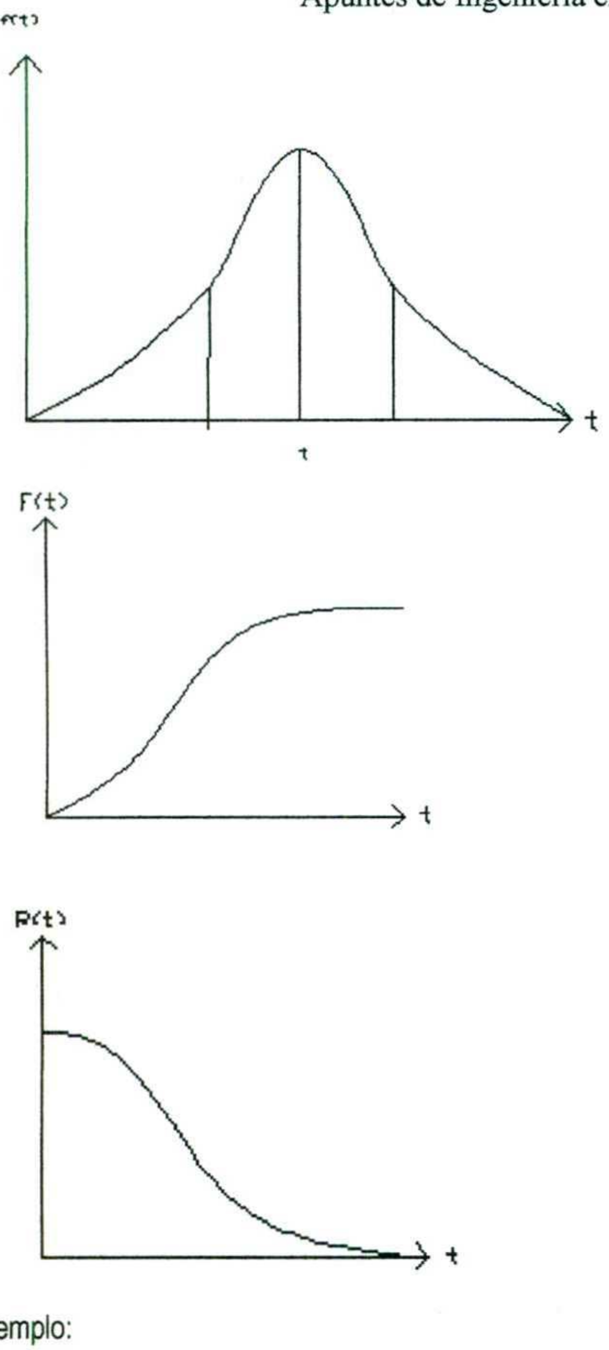
$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$
$$F(t) = P(T < t) = \int f(t)dt$$

Sea una variable aleatoria T continua $\forall\ T \geq 0$ y su $f(t)$ sera

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\bar{t}}{\sigma}\right]^2}$$

$Z\ \forall$ Z es una variable aleatoria continua $N \sim (0,1)$ tal que $Z = \dfrac{T-\bar{t}_t}{\sigma_T}$

$$F(z) = \int f(z)dz = \Phi(z)$$
$$\Phi(z) = P(T > t) \quad \text{(tablas)}$$
$$\text{R(t)=1-}\Phi(z) \leftarrow P(T \geq t)$$



$F(t)$

$R(t)$

Figura XIV

Ejemplo:

Un interruptor tiene una duración que es una variable aleatoria con una distribución de probabilidades normal con media de 10000 usos y una desviación estándar de 2000 usos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el interruptor funcione al menos en 12000 ocasiones?
2. ¿y al menos en 5000 ocasione?
3. ¿La probabilidad de que falle en el intervalo de 9500 y 10500 usos?

1.- $P(T > 12000) = R(t = 12000)$

$\bar{t} = 10000$

$\sigma = 2000$

$Z(t = 12000) = \dfrac{12000 - 10000}{2000} = \dfrac{2000}{2000} = 1$

$F(t) = \Phi(z) = 0.84$

$\therefore$

$R(t) = 1 - \Phi(z)$

$R(t) = 1 - 0.84 = 0.16$

Es la probabilidad de que dure mas de 12 000 usos.

2.- $P(T \geq 5000)$

$Z(t = 5000) = \dfrac{5000 - 10000}{2000}$

$Z(t = 5000) = -2.5$

$\Phi(z) = 0.0062$

$R(z) = 1 - \Phi$

$R(z) = 1 - 0.0062$

$R(z) = .9938$

3.- $P(9500 \leq T \leq 10500)$

$z(t = 9500) = \dfrac{9500 - 10000}{2000}$

$z(t = 9500) = -0.25$

$\Phi(z) = 0.4013$

$z(t = 10500) = \dfrac{10500 - 10000}{2000}$

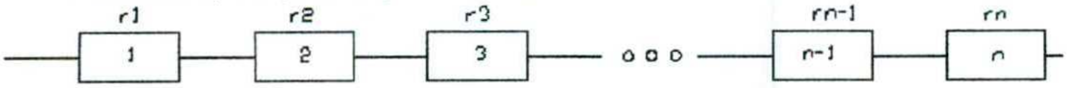
$z(t = 10500) = 0.25$

$\Phi = 0.5987$

3.15 Confiabilidad de Sistemas

Conjunto de Componentes.

a) Sistema de componentes en serie, cuando es imprescindible que trabajen todos los elementos para que trabaje el sistema.



$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Figura XV

$$R_s = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_{n-1} \cdot r_n = \prod_{i=1}^{n} r_i \begin{cases} 0 \le r_i \le 1 \\ R_s \le \min\{r_i\} \end{cases}$$

b) Sistema en paralelo

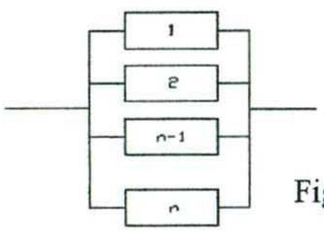


Figura XV

$$1 - R_s = (1 - r_1)(1 - r_2) \ldots (1 - r_n)$$

$$R_p = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - r_i)$$

$$R_p \ge \max\{r_i\}$$

c) Arreglos de componentes mixtos

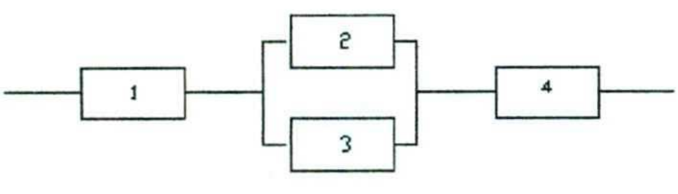


Figura XVI

Ejemplos:

$a)$

$R_s = (0.8)(0.7)(0.6)$

$R_s = 0.337$

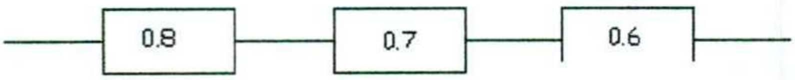


Figura XVII

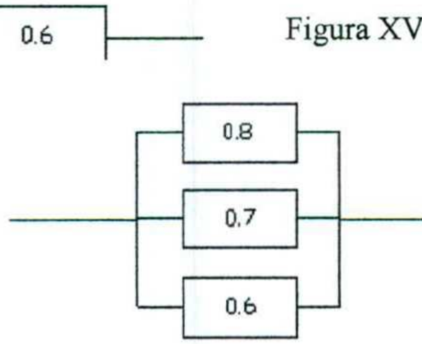


Figura XVIII

b)

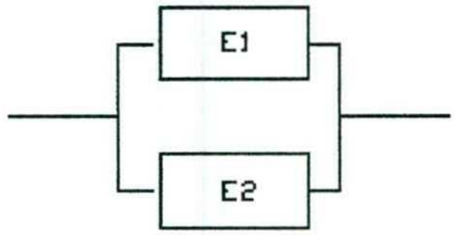
$R_p = 1-(1-0.8)(1-0.7)(1-0.6)$

$R_p = 0.976$

c)

$R_m = 1-(1-0.337)^2$

$R_m = 0.56$



$E_1 = 0.337$

$E_2 = 0.337$

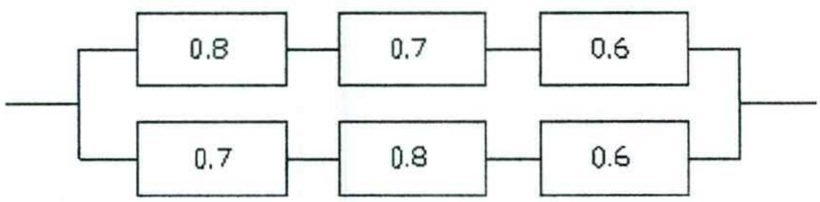


Figura XIX

Ejemplo:

Un avión tiene 4 motores 2 en cada ala. Para que el avión pueda volar debe funcionar al menos un motor de cada lado.

¿Cuál es la confiabilidad del avión si cada motor tiene una confiabilidad de 0.85?

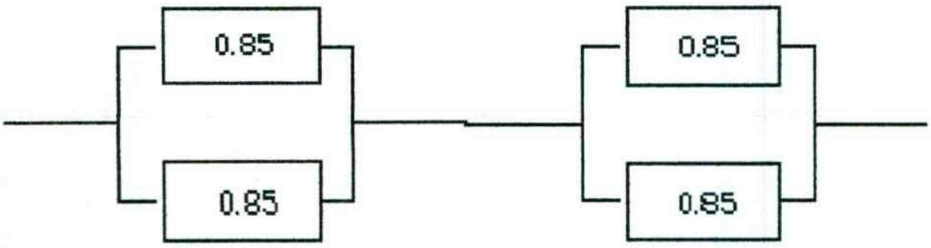


Figura XX

Primero analizamos cada ala por separado.

$R_p = 1-(1-0.85)(1-0.85)(1-0.85)$

$R_p = 0.996625$

Ahora las dos alas

$R_p = (0.996625)(0.996625)$

$R_p = 0.993261$

3.16 Numero óptimo de elementos redundantes.

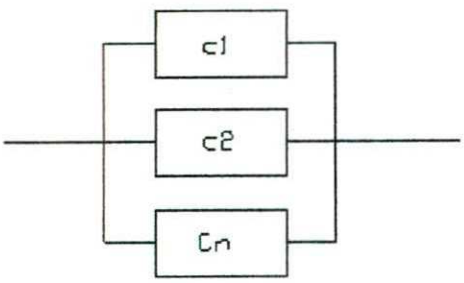


Figura XXI

$R_s = 1-(1-r)^n$ si r=0.8 p. eje

$R_s = 1-(1-0.8) = 1-(0.2) = 0.8$ si n=1

$R_s = 1-(1-0.8)^2 = 1-(0.2)(0.2) = 0.96$ si n=2

Conforme $n \to \infty \to R_s \to 1$

Probabilidad de Falla = $1-R_s$

$P_F = 1-\left[1-(1-r)^n\right] = (1-r)^n$

$P_F = (1-r)(1-r)\ldots(1-r)$

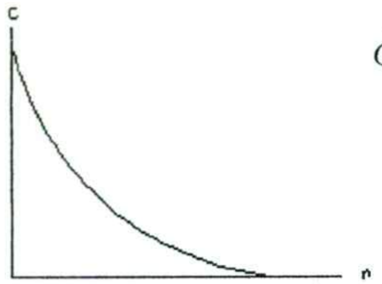
$0 \leq P_F \leq 1$

$P_F = 0.763$

3.17 Costo esperado de fallas.

$\bar{C_f} = C_f P_f$

Representa la función de costo de falla.



$$\bar{C_f} = C_f P_f = C_f(1-r)^2$$

Figura XXII

Costo Unitario C_u

Costo Total $\qquad C_T = nC_u + C_f(1-r)^n$

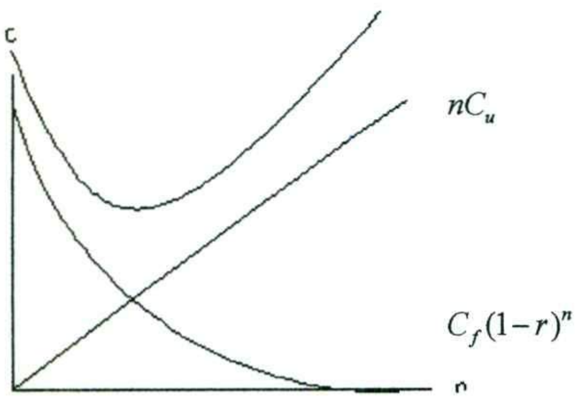


Figura XXIII

$$C_T = nC_u + C_f(1-r)^n$$

Considerando que:

$$\frac{d}{dx}a^v = a^v \cdot \ln a \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dC_T}{dn} = C_u \frac{dn}{dn} + C_f (1-r)^n \cdot \ln(1-r)\frac{dn}{dn}$$

$$= C_u + C_f (1-r)^n \cdot \ln(1-r)$$

$$C_u + C_f (1-r)^n \cdot \ln(1-r) = 0$$

$$(1-r)^n = \frac{-C_u}{C_f \cdot \ln(1-r)}$$

$$n \cdot \ln(1-r) = \ln\left[\frac{-C_u}{C_f \cdot \ln(1-r)}\right]$$

$$n = \frac{\ln\left[\frac{-C_u}{C_f \cdot \ln(1-r)}\right]}{\ln(1-r)}$$

n = numero optimo

Ejemplo: El sistema de inyección de combustible de una turbina de avión tiene un sistema de filtros en paralelo. Cada filtro cuesta \$1000 y tiene una confiabilidad de 0.75. Si los filtros se tapan, el costo de falla es de \$50000 ¿Cuántos filtros se deben instalar para que el costo del sistema sea mínimo?

$C_f = 50000$ pesos

$C_u = 1000$ pesos

$\sigma = 0.75$

$n = ?$

$$n = \frac{\ln\left[\frac{-1000}{50000\ln(1-0.75)}\right]}{\ln(1-0.75)} = 3.05$$

$$C_{T3} = 1000(3) + 50000(0.25)^3 = 3000 + 781.25 = 3781.25$$

$$C_{T4} = 1000(4) + 50000(0.25)^4 = 4000 + 195.31 = 4195.31$$

3.18 Modelos de Líneas de espera.

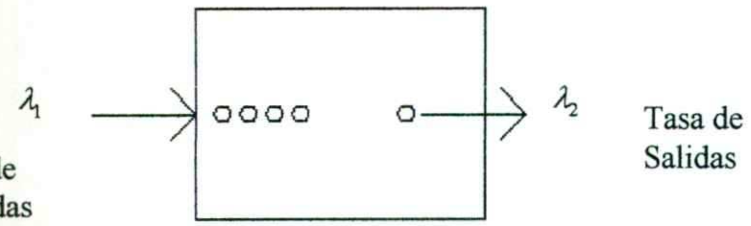


Figura XXIV

$$Si\ \lambda_1 \geq \lambda_2$$
$$L_q \rightarrow \infty$$
$$\rho = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Factor de Utilización

L = Número de clientes en el sistema.
λ_1 = Número de clientes que arriban por unidad de tiempo X_1

$\bar{X}$ = Tasa de Llegadas promedio
λ_2 = Número de clientes atendidos por unidad de tiempo. X_2

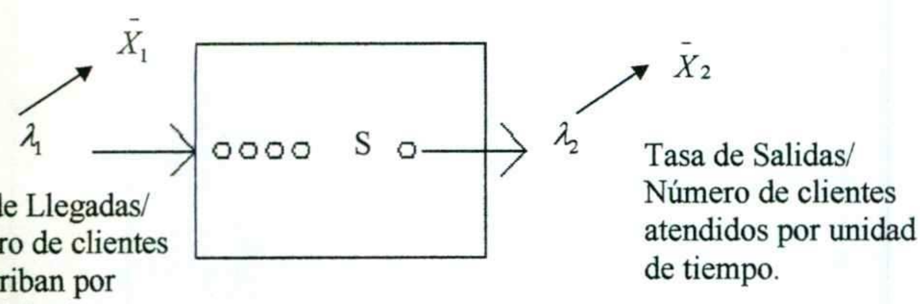


Figura XXV

Aspectos que definen los sistemas de líneas de espera.

1. *V* patrón de llegadas (arribos)
2. *W* patrón de servicio (salidas)
3. *X* Número de servidores
4. *Y* Capacidad del sistema (tamaño)
5. *Z* Disciplina o política de atención o servicio

Notación de kendall

$V/W/X/Y/Z$

Claves V/W $\begin{cases} \text{D Determinístico (No aleatorio)} \\ \text{M Exponencial} \\ \text{Ek Erlang} \\ \text{G Cualquier otra} \end{cases}$

Z		
	FIFO →	Primero que llega primero que se atiende
	LIFO →	Ultimo en llegas primero que se atiende
	SIRO →	Orden aleatorio de atención
	PRI →	Alguna prioridad
	GD →	Cualquier otro

$M/M/S/S0/FIFO$

Algunas Relaciones Matemáticas

$\lambda =$ Tasa promedio de llegadas por unidad de tiempo.

$\frac{1}{\lambda} =$ Tiempo promedio entre llegadas.

$\mu =$ Tasa promedio de servicios por unidad de tiempo.

$\frac{1}{\mu} =$ Tiempo promedio de servicio por cliente.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} =$ Intensidad de tránsito en el sistema

Si $\lambda > \mu \rightarrow \rho > 1$ Se dice que el sistema esta en estado inestable (la fila tiende a infinito).

Condición de trabajo es $\rho < 1 \rightarrow \lambda < \mu$ (Estado estable)

$$P_n = \rho^n(1-\rho)$$

$$si$$

$$n = 0$$

$$\rho_0 = \rho^0(1-\rho)$$

$$\rho_0 = (1-\rho)$$

$$\rho = 1-\rho_0$$

$$\rho = \rho(n > 0)$$

$L =$ Se llama número promedio de clientes en el sistema.

$L_q =$ Se llama número promedio de clientes en la línea de espera (Longitud promedio). Valores promedio por unidad de tiempo.

$\omega =$ Tiempo promedio por cliente en el sistema.

ω_q = Tiempo promedio que cada cliente permanece en la cola..

$\omega(t)$ = Es la probabilidad de que un cliente permanezca más de t unidades de tiempo en el sistema.

$\omega_q(t)$ = Es la probabilidad de que un cliente permanezca más de t unidades de tiempo en la cola.

$\omega = \omega_q + \frac{1}{\mu} \rightarrow$ Tiempo de servicio promedio.

$$\left.\begin{aligned} L &= \lambda\omega \\ L_q &= \lambda\omega_q \end{aligned}\right\} \text{Fórmulas de Little.}$$

Se pueden aplicar en general.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Ejemplo: En una línea de producción arriban televisores en proceso con una tasa de llegada de 6 por hora. El servicio que se les presta toma promedio de 15 minutos. ¿Calcule cual es el número de televisores que se acumulan en espera en la primera hora y cuál es el tiempo promedio que cada televisor permanece en ese lugar?.

$\lambda = 6$ por hora que equivale a $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6}$ hora = 10 minutos.

$\frac{1}{\mu} = 15$ Minutos $\rightarrow \mu = 4$ por hora.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{4} = 1.5$$

t	Evento
0	Inicia la operación
10	Arriba T1
10	Entra a servicio
20	Arriba T2 $\rightarrow$ Entra a servicio

25	Sale T1
25	Entra T2 a servicio
30	Llega T3
40	Llega T4 sale T2
40	Entra T3
50	Llega T5
55	Sale T3 entra T4
60	Llega T6

¿Cuál es el tiempo promedio para ser atendido (tiempo en espera)?

T1	0
T2	5
T3	10
T4	15
T5	10
T6	0

Total = 40 min.

$$\omega_q = \frac{40}{6} = 6.66\,\text{min}.$$

T1	15
T2	20
T3	25
T4	30
T5	10
T6	0

Total = 100 min.

$$\omega = \frac{100}{6} = 16.66\,\text{min}.$$

Si...

$\lambda < \mu \rightarrow \rho < 1$ Sistema estable

$\lambda > \mu \rightarrow \rho > 1$ Sistema inestable. $\rightarrow \infty$

$\lambda \cong \mu$
$\rho \cong 1$ Sistema inestable.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu M}$$

No de clientes

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho_n$$

La probabilidad de que al llegar al lugar sea necesario esperar.

$$L - L_q = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = (1 - \rho_0)$$

Para un canal *M = 1*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Para un canal $M > 1$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu M}$$

$$L = \lambda\omega \therefore \omega = \frac{L}{\lambda}$$

$$L_q = \lambda\omega_q \therefore \omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\omega = \omega_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L - L_q = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = (1 - \rho_0)$$

Caso 1 $M / M / 1 / \infty / FIFO$

M: Tiempo entre llegadas (exponencial)
M: Tiempo entre servicio (exponencial)
1: Numero de servidores
∞: Capacidad del sistema
FIFO: Primero en llegar primero que se atiende.

$$\rho_o = 1 - \rho$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$ Probabilidad de que no halla nadie.

$$\rho_n = (1 - \rho)\rho^n$$ Probabilidad de que haya n clientes.

$L = \frac{\rho}{1-\rho}$ Número promedio de clientes en el sistema.

$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ Número promedio de clientes en la línea de espera.

$\omega = \frac{1}{\mu - \lambda}$ Tiempo promedio por clientes en el sistema.

$\omega_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$ Tiempo promedio de cada cliente en la cola.

Ejemplo:

Para un sistema M/M/1 con $\lambda = 4$ y $\mu = 6$, Calcule todos los parámetros característicos.

1. ¿Es estable? $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ si dado que $\rho < 1$
2. $\rho_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0.33$
3. $\rho_5 = (1-\rho)\rho^5 = (1 - 2/3)(2/3)^5 = 0.043$
4. $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1 - 2/3} = 2$
5. $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(2/3\right)^2}{1 - 2/3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1.33$
6. $\omega = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2} = 0.5$
7. $\omega_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = \frac{2/3}{6-4} = \frac{1}{3} = 0.33$

Probabilidad de que el servidor este ocioso.

$$\rho_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$1 - \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow$ Esto es cero cuando $\lambda = 0$ Cuando no llega nadie por unidad de tiempo.

$L =$ Número promedio de los que esperan y están siendo atendidos.
$L_q =$ Número promedio de los que solo esperan.
$\omega =$ Tiempo empleado en el sistema.
$\omega_q =$ Tiempo empleado de espera antes de ser atendido.

Probabilidad de que el tiempo de permanencia en el sistema sea mayor que un valor ω_0

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$
$$F(t) = \rho(T \leq t)$$
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$R(t) = \rho(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$
$$W = \bar{t} = \frac{1}{\lambda} \therefore \lambda = \frac{1}{t}$$
$$F(w) = \frac{1}{w} e^{-\frac{1}{w} w}$$
$$F(w) = \rho(w_0 \leq w) = 1 - e^{-\frac{1}{w} w_0}$$
$$R(w) = e^{-\frac{1}{w} w_0} = e^{-(\mu - \lambda) w_0}$$

Ejemplo:

Suponga que en un barco se cumplen las condiciones para tener un sistema M/M/1, con una tasa de llegadas de 10 por hora y una tasa de servicio de 15 por hora, ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente permanezca más de 30 minutos en el sistema?

$\lambda = 10$ por hora

$\mu = 15$ por hora

$\omega_0 =$ 0.5 por hora

$\rho(\omega_0 \geq 0.5h) = e^{-(15-10)0.5} = 0.08$

$\rho(\omega_0 \geq 0.25h) = e^{-(15-10)0.25} = 0.28$

Recordemos que

1. La distribución de los eventos por unidad de tiempo es Poisson.
2. Distribución del tiempo entre eventos es exponencial.

Ejemplo:

Considere el caso de un aeropuerto en que las maniobras de aterrizaje y despegue se comportan de acuerdo con un proceso de Poisson, con un tiempo promedio entre eventos de 5 minutos. En el aeropuerto hay solo una pista y el tiempo requerido para cada maniobra es una variable aleatoria continua con distribución exponencial, y con media de 3 minutos. Suponga que el número de aviones que pueden usar el aeropuerto es infinito y que ocupan la pista en el orden que se van presentando. Si la unidad de medida del tiempo es una hora, responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el valor de las tasas de llegada y de servicio?
2. ¿Cuál es la proporción del tiempo que la pista se encuentra si uso?
3. ¿Cuál es el número promedio de aviones por hora que esperan para usar la pista?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que un avión requiera más de 10 minutos para completar una maniobra?

Tipo de Sistema

$M/M/1/\infty/FIFO$

$$\bar{t}_a = 5\,\text{min} = \frac{1}{12}\ \text{hora.}$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_a} = \frac{1}{1/12} = 12\ \text{aviones por hora.}$$

1.- $$\bar{t}_s = 3\,\text{min} = \frac{1}{20}\ \text{hora.}$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_s} = \frac{1}{1/20} = 20\ \text{aviones por hora.}$$

$$\rho = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

2.- Probabilidad de que haya cero.

$\rho_0 = 1 - \rho$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0.6$

$\rho_0 = 1 - 0.6 = 0.4$

$R = 40\%$

3.- Los que esperan.

$L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{(0.6)^2}{1-0.6} = 0.9$ aviones por hora haciendo cola.

$10\,\text{min} = \dfrac{1}{6}$ hora

4.- $\rho(T > 10\,\text{min}) = e^{-(\mu-\lambda)w_0}$

$\rho(T > 10\,\text{min}) = e^{-(20-12)\frac{1}{6}} = 0.2635$

3.19 Canales Múltiples.

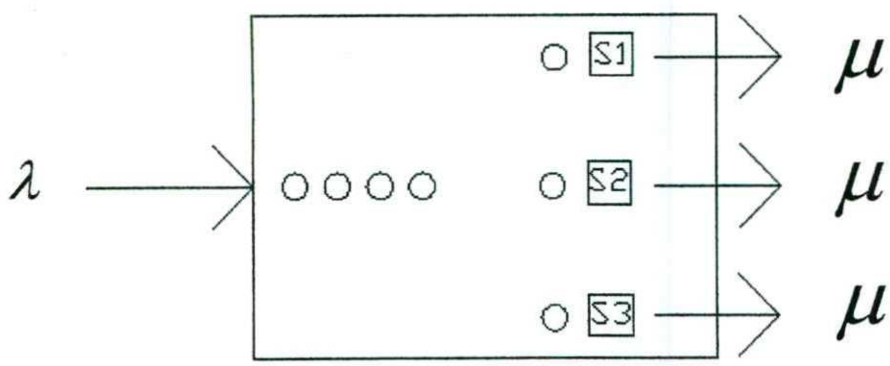


Figura XXVI

Tipo de Servicio Exponencial, Universo Finito.

$M / M / M / \infty / FIFO$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu M}$$

$$\rho_0 = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(M\rho)^n}{n!} + \frac{(M\rho)^M}{M!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \rho_0 \frac{M^M \rho^{M+1}}{M!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo:

Considere el caso de un aeropuerto en que las maniobras de aterrizaje y despegue se comportan de acuerdo con un proceso de Poisson, con un tiempo promedio entre eventos de 1 minutos. En el aeropuerto hay solo una pista y el tiempo requerido para cada maniobra es una variable aleatoria continua con distribución exponencial, y con media de 3 minutos. Suponga que el número de aviones que pueden usar el aeropuerto es infinito y que ocupan la pista en el orden que se van presentando

$\mu = 20$ aviones por hora.

$\lambda = 60$ aviones por hora.

$a) M = ?$

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu} \therefore M = \frac{\lambda}{\rho\mu}$$

$si\ \rho = 1$

$$M = \frac{\lambda}{\rho\mu} = \frac{60}{(1)20} = 3$$

Se deduce que con un número de 3 servidores la densidad del sistema será igual a 1, lo cual aún no es suficiente para mantenerlo estable.

$b) si$ M = 4 pistas, $\lambda = 60, \mu = 20$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu M} = \frac{60}{4 \cdot 20} = 0.75$$

$c)\ L_q = \rho_0 \dfrac{M^M \rho^{M+1}}{M!(1-\rho)^2}$

Calcular ρ_0

$$\rho_0 = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(M\rho)^n}{n!} + \frac{(M\rho)^M}{M!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(4 \cdot 0.75)^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} \cdot \left(\frac{1}{1-0.75}\right)\right]^{-1}$$

$\rho_0 = 0.037$

probabilidad de que en un momento no haya aviones

Por lo tanto.

$$L_q = \rho_0 \frac{M^M \rho^{M+1}}{M!(1-\rho)^2} = 0.037 \frac{4^4 0.75^5}{4!(1-0.75)^2}$$

$L_q = 1.49$ aviones por hora promedio en la linea de espera.

$d) W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}; \dfrac{1.49}{60} = 0.024$ horas que espera cada avión para usar la pista 1.44 min.

3.20 Número optimo de canales de servicio.

Si

$\mu \to \infty$

$W_q \to 0$

Aumentar μ para que reduzca W_q y L_q dado que

$L_q = W_q \cdot \lambda$

$C_T = C_1 M + C_2 L_q$

$C_1 =$ Costo por unidad de tiempo de operar un canal de servicio.

$C_2 =$ Costo por unidad de tiempo de espera de los clientes.

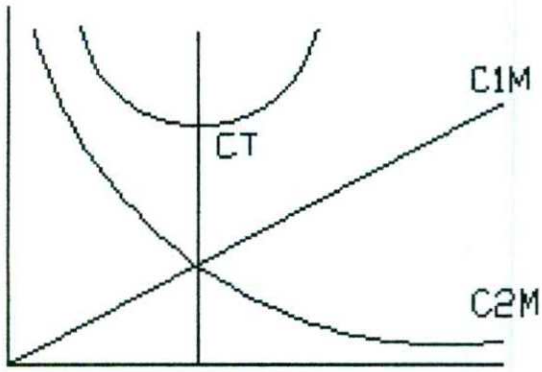


Figura XXVII

M	1	2	3	4	5
ρ					
ρ_0					
L_q					
$C_2 L_q$					
$C_1 M$					
C_T	A	B	C	D	E

En un puerto llegan un número promedio de 10 barcos por semana. El tiempo promedio de servicio es de media semana, lo cual se realiza en un muelle. El costo de operación por semana de cada muelle es de 50. El costo de espera de cada barco por semana es de 10. Determine el número óptimo de muelles para que el costo total sea mínimo.

$\lambda = 10$ barcos por semana (tasa de llegadas)

$\mu = \frac{1}{0.5} = \frac{1}{t_s} = 2$ barcos por semana (tasa de servicio)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{2} = 5$ (Indice de Saturación.) $\rho < 1$ $\rho = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{10}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$ $M = 6$

M de partida 6 muelles.

M	6	7	8
ρ	0.8	0.71	0.625
ρ_0	0.00609	0.0061	0.0064
L_q	2.07	1.78	0.30
C_2L_q	62.1	53.4	9.12
C_1M	300	350	400
C_T	362.7	403.4	409.12

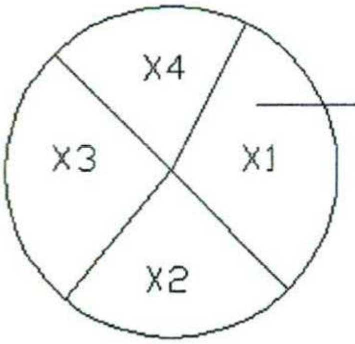
$$\rho_0 = \left[\frac{[(6)(0.8)]^0}{0!} + \frac{(4.8)^1}{1!} + \frac{(4.8)^2}{2!} + \frac{(4.8)^3}{3!} + \frac{(4.8)^4}{4!} + \frac{(4.8)^5}{5!} + \frac{(4.8)^6}{6!} \cdot \frac{1}{0.2} \right]^{-1} = 0.0069$$

$$L_q = \rho_0 \frac{M^M \rho^{M+1}}{M!(1-\rho)^2} = 0.0069 \frac{6^6 (0.8)^7}{6!(0.2)^2} = 2.07$$

M	6	7	8
C_T	362.7	403.4	409.12

3.21 Simulación de Sistemas.

Método de Montecarlo.



Números aleatorios
- ✓ Valor al azar
- ✓ (0,1)
- ✓ Distribución Unitaria.

Figura XXVIII

Los números aleatorios son los posibles resultados a los posibles valores que puede tomar una variable aleatoria con distribución de probabilidad uniforme definido en el intervalo (0,1).

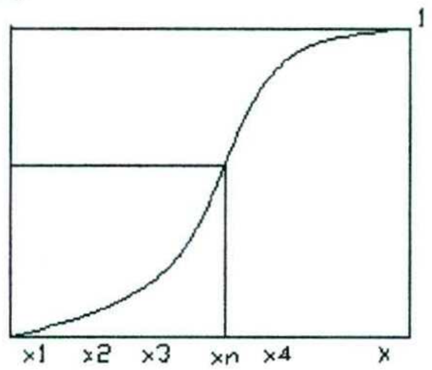


Figura XXIX

$$F(x) = \int f(x)dx$$

x	$f(x)$	$F(x)$	# Indice
x_1	$f(x_1)$	$F(x_1)$	$001 - F(x_1)$
x_2	$f(x_2)$	$F(x_2)$	$F(x_1) - F(x_2)$
x_3	$f(x_3)$	$F(x_3)$	$F(x_2) - F(x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$F(x_n)$	$F(x_n) - 000$

Simulación de una variable aleatoria x con distribución exponencial.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$F(x) = A$$
$$A = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$a = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$e^{-\lambda x} = 1 - a$$
$$\lambda x \ln e = \ln(1-a)$$
$$o \leq F(x) \leq 1$$
$$0 \leq A \leq 1$$
$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$x = \frac{\ln(1-a)}{-\lambda}$$

x = Tiene distribución exponencial.
a = Tiene distribución uniforme.
λ = Define a la distribución exponencial.

En un aeropuerto el tiempo que ocurre entre el aterrizar de los aviones es una variable aleatoria con distribución exponencial y valor medio de 5 min. Con base en números aleatorios simule el tiempo de llegada para los próximos 5 aviones.

$$x = \frac{\ln(1-a)}{-\lambda}$$
$$\mu = 5\min$$
$$\lambda = \frac{1}{5} = 0.2$$

Num. Aleatorio a	Tiempo x
0.965	16.76 min.
0.335	2.04 min.
0.569	4.20 min.
0.295	1.74 min.
0.789	7.97 min.

$$x = \frac{\ln(1-0.965)}{0.2}$$
$$x = \frac{\ln(1-0.385)}{0.2}$$

x	$f(x)$	$F(x)$	# Indice

0	0.2	0.2	0.001-0.200
2	0.4	0.6	0.200-0.600
4	0.3	0.9	0.601-0.900
6	0.1	1.0	0.901-0.000

Distribución de Poisson

$$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$x \geq 0$$

$$\lambda = 4$$

$$p(x) = 2 = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!}$$

Simulación de una variable aleatoria con distribución de Poisson.

Este problema se resuelve recurriendo al hecho de que una distribución de Poisson con parámetro λ tiene asociada una distribución exponencial negativa con parámetro $1/\lambda$.

Ejemplo:

Simule por el método de Montecarlo el comportamiento de una variable aleatoria con distribución de Poisson y una media de 2 eventos por hora. Simule las próximas 4 horas.

Sea x una variable aleatoria con distribución tal que:

$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = 2$ eventos por unidad de tiempo.

Evento	# Aleatorio	Tiempo % Eventos	Reloj
1	0.695	0.5937	0.5937
2	0.204	0.1140	0.7077
3	0.704	0.6086	1.3163
4	0.029	0.015	1.33
5	0.467	0.315	1.645
6	0.741	0.675	2.320
7	0.335	0.203	2.524
8	0.569	0.420	2.943
9	0.295	0.174	3.117
10	0.789	0.777	3.895
11	0.063	0.033	3.928
12	0.459	0.307	4.235

Ejemplo:

Considere un puerto al que llegue un promedio de 5 barcos por semana de acuerdo con un proceso de Poisson. El puerto tiene un segundo servidor con una capacidad de 4 barcos por semana promedio (la distribución del tiempo de servicio es exponencial)

Por el método de Montecarlo simule la operación del puerto para 5 barcos y determine el tiempo promedio que esperan los barcos antes de ser atendidos.

$W_q = Montecarlo$

$\lambda = 5$ llegada

$a_i = Ran\#$

$t_i = \dfrac{\ln(1-a)}{-\lambda}$ tiempo eventos.

$t_i = \dfrac{\ln(1-a)}{-\mu}$ tiempo servicio.

Tipo de reloj acumulado.

Paso 1.- Hora de llegada

	a_i	t_i	T(reloj)
B1	0.201	0.0448	0.0448
B2	0.640	0.2043	0.298
B3	0.723	0.256	0.504
B4	0.629	0.1953	0.702
B5	0.489	0.1342	0.836

Paso 2.- Duración de servicio

	a_i	t_i
B1	0.249	0.0715
B2	0.729	0.3264
B3	0.773	0.3707
B4	0.239	0.0682
B5	0.504	0.1732

Paso 3.- Hora de entrada y salida del servidor.

	Entrada	Sale	T espera
B1	0.044	0.115	0
B2	0.248	0.574	0
B3	0.579	0.949	0.070
B4	0.949	1.017	0.247
B5	1.017	1.192	0.181

$$\sum t_c = 0.498$$

Sale = Entrada + Duración de servicio.

$$W_q = \frac{\sum t_c}{5} = \frac{0.498}{5} = 0.0996$$

Paso 4.- Calcule el tiempo promedio que permanece cada barco en el sistema.

	Entrada	Salida	(S-E)
B1	0.044	0.115	0.071
B2	0.248	0.574	0.326
B3	0.579	0.949	0.445
B4	0.949	1.017	0.315
B5	1.017	1.192	0.356

$$\sum (S-E) = 1.513$$

$$W_q = \frac{1.513}{5} = 0.3026$$

Simulando un sistema $M/M/2/\infty/FIFO$

Mediante el método Montecarlo, simular para los diez primeros clientes con una tasa de servicio de $\mu_1 = 5$ clientes por hora para el primer servidor y $\mu_2 = 3$ clientes por hora.

Determine:

1. El tiempo promedio de espera para ser atendido (minutos)
2. La longitud promedio de la fila por hora.

Hora llegada	a_i	t_i	T(reloj)
B1	0.836	0.I807	0.1807
B2	0.242	0.0277	0.2084
B3	0.586	0.0881	0.2965
B4	0.499	0.0691	0.3656
B5	0.483	0.0659	0.4315
B6	0.11	0.0116	0.4431
B7	0.536	0.0767	0.5198
B8	0.335	0.0407	0.5605
B9	0.72	0.1272	0.6877
B10	0.567	0.083	0.7707

Duración Servicio	a_i	$\mu = 5$	$\mu = 3$
B1	0.935	0.546	0.911
B2	0.506	0.141	0.235
B3	0.641	0.204	0.341
B4	0.758	0.283	
B5	0.441	0.116	
B6	0.163	0.035	
B7	0.771	0.294	
B8	0.743	0.271	
B9	0.098	0.020	
B10	0.275	0.064	

3.22 Generación de valores de una variable aleatoria con distribución probabilística normal con parámetros (m,s) a partir de números aleatorios con distribución probabilística uniforme.

1. Teoría del limite central

La variable aleatoria que se forma mediante la suma de N variable (entre mas grande N mejor), con distribuciones cualesquiera tienen distribución probabilística normal.

Sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (a,b) = (0,1) entonces su

$$\bar{U} = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

su varianza es

$$\sigma_u^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{2} = \frac{1}{12}$$

su desviación estandar

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^{\,2}} = \sqrt{1/12} = 1/\sqrt{12}$$

$$T = U_1 + U_1 + U_1 + \ldots + U_n$$

Entonces

Definimos la variable aleatoria $\bar{T} = \sum_1^n \bar{U} = \sum_1^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

$$\sigma_T^2 = \sum_1^n \sigma_u^2 = \sum_1^{12} \frac{1}{12} = \frac{n}{12}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n}{12}}$$

Por el teorema del límite central T es asintóticamente normal

$$(n \to \infty) \text{ con } \mu = T = \frac{n}{2}$$

$$\sigma = \sigma_T = \sqrt{\frac{n}{12}}$$

Por lo tanto se puede estandarizar mediante la via Z que es $N \rightarrow (0,1)$ donde

$$Z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \text{ donde}$$

$$x \rightarrow N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$\frac{T-\bar{T}}{\sigma_T} = Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\frac{T-\left(\frac{n}{12}\right)}{\sqrt{\frac{n}{12}}} = Z\frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow x = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\left[T - \frac{n}{12}\right]$$

Ejemplo: Sea x una variable aleatoria normal con media 55 y desviación estándar de 5. Simule la extracción al azar de 3 elementos es esa población (Utilice n = 10).

Sea n = 10

$$\frac{n}{2} = 5$$

$$\sqrt{n/12} = \sqrt{10/12} = 0.912$$

$T_1 = 6.082$ $\qquad X_1 = 55 + (\frac{5}{0.91})(6.082-5) = 60.91k_a$

$T_2 = 5.038$ $\qquad X_2 = 55 + (\frac{5}{0.91})(5.038-5) = 55.21k_a$

$T_3 = 3.302$ $\qquad X_3 = 55 + (\frac{5}{0.91})(3.302-5) = 45.67k_a$

3.23 Teoría de Decisiones

¿Qué es una decisión?

Decidir es un proceso mediante el cual se elige una acción alternativa de entre varias posibles, aplicando o utilizando un criterio claramente definido.

Un proceso de decisión requiere los siguientes elementos:

1. Un decisor con propositos definidos.
2. Dos o mas acciones alternativas posibles: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$
3. Un entorno con varias situaciones posibles (n) que afectan los resultados de las acciones al decisor $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$
4. Debe haber un conjunto de resultados consecuencia de las acciones que están definidas para cada situación del entorno. Este conjunto de resultados es la imagen de una función que relaciona las tres variables: acciones, resultados y situaciones.

$$f(a_i, s_j) \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & \cdots & & s_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Un Criterio que define cual de las acciones satisface de la mejor manera posible los propósitos del decisor.

En este curso estudiaremos dos casos.

- Completa incertidumbre: No se conoce la probabilidad de que ocurra las (n) situaciones posibles.
- Con incertidumbre: Se conoce la probabilidad de que ocurra s_i

3.24 Decisiones bajo completa incertidumbre.

Posibles criterios.

1. Criterio optimista "maximizar las ganancias máximas de cada opción"
2. Criterio medio "maximizar el promedio de los resultados de cada opción".
3. Criterio mínimax "minimizar la pérdida máxima y maximizar la ganancia mínima"

Ejercicio

Un vendedor debe proveerse para la próxima temporada navideña. Su problema consiste en decidir cuantos artículos comprar a su proveedor. Para ello debe tomar en cuenta lo siguiente.

- La posible demanda dependiendo que tan buena resulte la temporada, pueden ser 20, 50, 80 artículos.
- El vendedor solo puede comprar paquetes de producto contenido en 20, 40, 60 o 100 artículos.
- Cada artículo que vende le deja utilidades por $15 pesos, cada artículo que regresa al proveedor implica un costo menos $10 pesos; cada venta perdida representa un costo de menos $5 pesos.

Diga que decisión debe tomar el vendedor con los tres criterios posibles.

Matriz de Ganancias

		S_1	S_2	S_3			
		20	**50**	**80**	**optimista**	**pesimista**	**promedio**
a_1	**20**	300	150	0	300	0	150
a_2	**40**	100	550	400	550	100	350
a_3	**60**	-100	650	800	800	-100	450
a_4	**100**	-500	250	1000	1000	-500	250

CAPITULO IV

Capitulo IV

4.1Referencias

- **Eduardo A. Arbones Malisani ,2001, INGENIERÍA DE SISTEMAS, Ed. Marcombo**

- **Hamdy A. Taha, 1998, INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES, Tomo I, Ed. Prentice Hall**