

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Funciones de Bézier como Esquema Numérico para Resolver
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

Rodrigo Cabral Ortega

Dirigido por

Victor Antonio Aguilar Arteaga

Centro Universitario, Querétaro, Qro.

Fecha de aprobación por el Consejo Universitario (mes y año)

México



Dirección General de Bibliotecas y Servicios Digitales
de Información



Funciones de Bézier como Esquema Numérico para
Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

por

Rodrigo Cabral Ortega

se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0
Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Clave RI: IGLIN-151714

DEDICATORIAS

A mi hija Alessa,

Que tu vida esté llena de felicidad y gozo, que siempre sientas refugio en los brazos de tu madre y que tu conciencia te deje saber que cada día buscaré hacer menos difícil tu camino.

AGRADECIMIENTOS

No tengo palabras suficientes para agradecer a mi amigo Fernando Alcántara por todo su apoyo durante estos años. Fer, eres un ejemplo de solidaridad, constancia, conciencia y esfuerzo, agradezco haberte tenido cerca durante todo este tiempo.

Te deseo todo el éxito y felicidad que mereces en la vida, estoy seguro que cada día los continuaras cosechando.

RESUMEN

En un curso clásico de ecuaciones diferenciales ordinarias se presentan varios tipos de ecuaciones a las que se les encuentra una solución por métodos analíticos. Como alternativa a los métodos de solución analíticos existen también métodos de soluciones numéricos y semi-analíticos que presentan soluciones aproximadas.

El trabajo explotará las múltiples propiedades que poseen las curvas de Bézier como lo son la interpolación, extrapolación, continuidad y el hecho de ser infinitamente continuas y diferenciables para utilizarlas, precisamente, como un método de solución semi-analítico que resultará ser simple, sistemático, robusto y de muy fácil manejo.

El trabajo se fundamentará en teoremas muy importantes y conocidos como lo son los teoremas de Weierstrass y de Picard además de propiedades de las curvas de Bézier tales como el aumento de grado y la diferenciabilidad.

Se hará notar la rápida convergencia del método a la solución y además que el error que presenta es muy pequeño y disminuye conforme el grado de la curva de Bézier se aumenta, así se estará mostrando una manera de aproximar soluciones de ecuaciones

diferenciales combinando la fuerza del álgebra lineal y la potencia computacional en un método robusto y de muy fácil entendimiento. (Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos semi-analíticos, curvas de Bézier).

SUMMARY

In a classic course of ordinary differential equations several types of equations are presented where a solution is found by analytical methods. As an alternative to analytical solution methods there are also numerical and semi-analytical solution methods that present approximate solutions.

Our work will exploit the multiple properties that Bézier curves possess, such as interpolation, extrapolation, continuity and the fact that they are infinitely continuous and differentiable, to use them as a semi-analytical solution method which will be simple, systematic, robust and very easy to use.

We will rely on very important and well-known theorems such as Weierstrass and Picard's theorems as well as properties of Bézier curves such as degree increase and differentiability.

The rapid convergence of the method will be noticed as well as the fact that the error it presents is very small and decreases as the degree of the Bézier curve increases, thus we will be showing a way to approximate solutions of differential equations combining the

strength of algebra linear and computational power in a robust and very easy to understand method.

(key words: ordinary differential equations, semi-analytical methods, Bézier curves).

ÍNDICE GENERAL

Dedicatorias	I
Agradecimientos.....	II
Resumen.....	III
Summary.....	V
Índice General.....	VII
1. Introducción.....	1
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Justificación	5
1.3. Descripción del problema	6
1.4. Hipótesis	8
1.5. Objetivos.....	8
1.6. Estructura de la tesis	8
2. Curvas de Bézier	10
2.1. Definiciones.....	10
2.2. Propiedades de los polinomios de Bernstein y las curvas de Bézier.....	10
2.3. Multiplicación de polinomios de Bernstein.....	14
2.4. Multiplicación de curvas de Bézier.....	15
2.5. Derivadas	16

2.6.	Elevación de Grado.....	19
2.7.	Derivada de una curva de Bézier elevada de grado.....	21
2.8.	Elevación n-esimo de grado de una curva de Bézier.....	23
3.	Ecuaciones Diferenciales Mediante Curvas de Bézier	26
3.1.	Problemas de valor inicial.....	27
3.2.	Problemas de Valor en la Frontera.....	34
3.2.1.	Problemas de Valor en la Frontera de Cauchy.....	34
3.2.2.	Problemas de Valor en la Frontera de Dirichlet	37
4.	Manejo Matricial de Curvas de Bézier	40
5.	Ecuaciones Diferenciales No Lineales	47
5.1.	Aproximación de soluciones de sistemas SIR	47
5.2.	Aproximación de soluciones para ecuaciones de tipo Riccati	55
6.	Conclusiones.....	59

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Resultados al Problema 2. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.....	32
Figura 2. Resultados al Problema 3. Figura izquierda, solución con $n = 10$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.....	37
Figura 3. Resultados al Problema 5. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.....	39
Figura 4. Resultados al Problema 7. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.....	46

INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Desde que el hombre dejó de guiarse por su instinto y comenzó a pensar por sí mismo, ha intentado entender el universo en el que se encuentra a través de la comprensión de los fenómenos naturales que lo rodean. Desarrollando su inteligencia y razonamiento llegó a concebir los principios que los forman desarrollando, a través de la matemática, lo que ahora se conoce como modelación matemática. Formalmente, la modelación matemática es un conjunto de relaciones y/o ecuaciones matemáticas capaces de capturar las características esenciales de un sistema natural o artificial complejo (Salsa, 2016); en particular, estas relaciones matemáticas se suelen expresar mediante ecuaciones diferenciales o integrales.

En las ecuaciones diferenciales se estudian existencia, unicidad y la dependencia ante condiciones iniciales (problema bien planteado en el sentido de Adamar), (Pinchover & Rubinstein, 2005) donde el teorema de Picard es de fundamental importancia (Simmons, 1991).

Además de diversos métodos que permiten resolver una gran cantidad de tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde por mencionar algunos están ecuaciones separables, variación de parámetros, soluciones en serie de potencias, transformada de Laplace.

No hay duda en que, para entender un fenómeno mediante ecuaciones diferenciales, el objetivo ideal es encontrar la función real o multivaluada que la describe; y así poder entender su comportamiento, encontrar posibles causas que lo generan y hasta generar pronósticos.

Sin embargo, el conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución analítica es expresable en términos de funciones primitivas o bien, el conjunto de ecuaciones diferenciales resolubles mediante métodos clásicos es muy pequeño en comparación al conjunto de ecuaciones diferenciales existentes o que existirán.

Debido a lo anterior, se desarrollaron los métodos numéricos de tal forma que las ecuaciones diferenciables pudieran ser resueltas mediante operaciones aritméticas (Chapra et al., 2015); de esta manera, las ecuaciones diferenciales se transformaron en ecuaciones en diferencias, donde en lugar de conocer la función que describía el fenómeno en términos de una variable independiente, se encuentran los valores de la función desconocida en ciertos puntos del dominio llamados nodos. A lo largo de los años, una gran cantidad de métodos numéricos han sido desarrollados, donde para probar su validez se deben probar criterios equivalentes a los criterios de Hadamard; a saber, consistencia, estabilidad y convergencia, desafortunadamente, los métodos numéricos generan errores numéricos generados por el propio método y por la

computadora. Por mencionar algunos métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias, se encuentran el método de Euler, del punto medio, métodos Runge-Kutta; mientras que, para ecuaciones diferenciales parciales, se encuentran, diferencias finitas, elemento finito, volúmenes finitos y diversos métodos sin mallas (Chakraverty, 2019).

Aunque los métodos numéricos permiten dar solución a un conjunto mayor de ecuaciones diferenciales en comparación a los métodos analíticos, existen limitaciones ineludibles al trabajar con este tipo de métodos entre las cuales se destacan: el desconocer el valor de la función en puntos distintos a los nodos, la restricción a un dominio finito de solución, la carga computacional que puede generar el método, entre otras.

Como alternativa, existen los métodos de aproximación o métodos semi-analíticos que consisten en aproximar la solución de una ecuación diferencial mediante un conjunto de primitivas tales como el método de descomposición de Adomian (Shawagfeh & Kaya, 2004) , método de perturbación de homotopía (He, 2003) y método con curvas de Bézier (Zheng et al., 2004).

A diferencia de los métodos numéricos, los métodos de aproximación semi-analíticos permiten aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales en dominios continuos además de minimizar la carga computacional necesaria para calcular la aproximación, por lo que resultan ser más robustos que los métodos numéricos; sin embargo, vale la pena mencionar también que los métodos de

aproximación contienen errores de aproximación por lo que no llegan a tener tantos beneficios como los métodos analíticos.

Las curvas de Bézier fueron inicialmente desarrolladas como un método de dibujo computacional que permite expresar la forma deseada a través de propiedades de convexidad del llamado polígono de control; en particular, las curvas de Bézier se definen como una combinación lineal de funciones conocidas como polinomios de Bernstein (los coeficientes que acompañan a los polinomios de Bernstein son llamados puntos de control). Sin embargo, debido a las propiedades que las curvas de Bézier aportan tales como ajuste de curvas, segmentación, interpolación, extrapolación, combinación y fusión de curvas entre otras (Fitter, 2014; Marco & Martí´nez, 2010); este método fue aplicado como método semi-analítico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Así pues, la aplicación de las curvas de Bézier a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales ha ido evolucionando con el tiempo. En ellos se aproxima la función desconocida y de sus derivadas con una curva de Bézier y se encuentran los puntos de control a través de la solución de un problema de optimización minimizando el error generado. Aplicaciones que van desde ecuaciones ordinarias lineales (Zheng et al., 2004), aplicación a ecuaciones diferenciales parciales lineales (Venkataraman & Michopoulos, 2007), llegando a resolver problemas tan generales como el de la armónica y la bi-armónica (Monterde & Ugail, 2004), problemas no lineales como la ecuación de Ricatti (Ghomanjani & Khorram, 2017) y ecuaciones de tipo Volterra (Maleknejad et al., 2011) y hasta la ecuación de Boussinesq (Nazir et al., 2019) que

es tan importante en áreas como la mecánica de fluidos donde, para el caso de ecuaciones diferenciales parciales, el trabajo de curvas de Bézier se ha aplicado desde los clásicos dominios rectangulares hasta dominios poligonales (Wu, 2012).

1.2. Justificación

Como se ha mencionado ya, existe en la literatura una gran cantidad de métodos para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales. A nivel licenciatura el enfoque de solución que se les presentan a los alumnos es, en la mayoría de los casos, puramente analítico siendo pocas las herramientas que se aprenden para encontrar soluciones numéricas o semi-analíticas.

Con este trabajo se pretende centrarse en aplicar las ideas de curvas de Bézier para desarrollar un método de aproximación o de soluciones semi-analíticas a ecuaciones diferenciales ordinarias que promete ser elegante y de simple manejo. Representará además una opción robusta y sistemática que puede ser entendida y aplicada por estudiantes de licenciatura que quieran adentrarse a conocer herramientas no clásicas para resolver modelos de fenómenos físico-matemáticos.

Explotando las propiedades de las curvas de Bézier (ajuste de curvas, segmentación, interpolación, extrapolación, combinación y unión de curvas) se mostrará que el método propuesto se diferencia de la implementación tradicional de curvas de Bézier, donde se transforma el problema de resolver una ecuación diferencial a un problema de optimización, en el hecho de que en este enfoque se encontrará una regla de recurrencia para los puntos de control de tal manera que la curva de Bézier aproxime

a la función solución. El método desarrollado será entonces producto de diferentes áreas vistas a lo largo de la carrera tales como Cálculo, necesario para entender el tipo de solución que puede alcanzarse con el método propuesto; Álgebra Lineal, cuyas herramientas son pilar fundamental para el método; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, cuya base es necesaria para entender la diferencia entre solución analítica y semi-analítica y por tanto conocer el potencial del método, así como sus límites.

1.3. Descripción del problema

La manera más común de trabajar con las curvas de Bézier es la de construir una curva $C(t)$ a partir de un conjunto de n puntos de control. Un enfoque alternativo es el de plantearnos de manera inversa el problema, esto es, dada una función continua y diferenciable $Y(t)$ encontrar un conjunto de n puntos de control asociados a ella que sean capaces de aproximarla mediante una curva de Bézier.

Dado que este objetivo es un poco más complicado de lograr, en caso de que no exista un conjunto de n puntos asociados a la curva $Y(t)$ buscaremos construir una curva $C(t)$ próxima a $Y(t)$ que mantenga la menor distancia posible con ella, esto es, que

$$\|C(t) - Y(t)\| < E_n$$

Para un error máximo permitido E_n .

Una vez que logremos construir dicha curva $C(t)$ próxima a $Y(t)$ y acotando nuestro estudio al conjunto de las funciones diferenciables, al proponer una curva $C(t)$ tal

que $C(t) \approx Y(t)$ observaremos que la derivada de la curva aproxima a la derivada de la función, es decir, $C'(t) \approx Y'(t)$, más aún, que la derivada enésima de $C(t)$ aproxima a la derivada enésima de $Y(t)$ ($C^{(n)} \approx Y^{(n)}$).

Esta observación nos llevará a plantearnos la duda central de nuestro trabajo. Dada una ecuación diferencial

$$f(Y, Y', Y'', \dots) = a$$

donde a es constante.

¿Es posible encontrar una solución aproximada ($C(t)$) que sea solución de la ecuación diferencial $f(C, C', C'', \dots) = a$?

Es así que nuestro trabajo se desarrollará sobre los casos en los que es posible encontrar una solución semi-analítica $C(t)$ que aproxime a $Y(t)$, sobre las condiciones que necesita cumplir la función $Y(t)$ para que sea posible lograrlo y sobre la construcción y los detalles del método.

Serán las ecuaciones diferenciales ordinarias sobre las que trabajaremos, diferenciando entre ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de segundo orden, lineales y no lineales, donde se destaca la ecuación de tipo SIR, básica en modelos epidemiológicos.

1.4. Hipótesis

Las curvas de Bézier poseen propiedades algebraicas potentes y robustas que nos permiten utilizarlas como un método de solución semi-analítico para una amplia cantidad de ecuaciones diferenciales ordinarias que cumplan las condiciones del teorema de Picard.

1.5. Objetivos

Objetivo general

Desarrollar un método de aproximación semi-analítico que brinde soluciones a un conjunto amplio de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando como herramienta las curvas de Bézier y sus propiedades algebraicas.

Objetivos particulares

- Exponer las condiciones necesarias que deben de cumplir las ecuaciones diferenciales para que pueda construirse una aproximación semi-analítica.
- Mostrar ejemplos explícitos de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales a las que puede encontrarse una aproximación semi-analítica con el método de curvas de Bézier.
- Reescribir el método expuesto en una forma matricial que simplifique la notación y desarrollo para la obtención de la solución.

1.6. Estructura de la tesis

El Capítulo 2 mostrará las definiciones básicas de polinomios de Bernstein así como de curvas de Bézier desarrollando a detalle sus propiedades fundamentales que servirán como base para el método propuesto; en el Capítulo 3 se mostrará el método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a través de curvas de Bézier y su implementación a algunos problemas; el Capítulo 4 muestra la esencia de este trabajo, donde se muestra que el método mediante curvas de Bézier puede ser sistematizado y potenciado mediante matrices; el Capítulo 5 muestra el cómo las curvas de Bézier también pueden ser aplicados a ecuaciones no lineales y finalmente, el Capítulo 6 resume las conclusiones alcanzadas a lo largo de este trabajo.

CURVAS DE BÉZIER

2.1. Definiciones

Definición 1 (Polinomio de Bernstein). Se define un polinomio de Bernstein $B_i^n(t)$ en un intervalo $[a, b]$ como

$$B_i^n(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (t-a)^i (b-t)^{n-i} \quad \text{con } t \in [a, b], \quad 0 \leq i \leq n.$$

Definición 2 (Curva de Bézier). Se define una curva de Bézier $c(t)$ como

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

donde $b_i := \binom{i}{n}, b_{i+1}$ son constantes llamadas puntos de control y n es llamado el grado de la curva de Bézier.

Notemos entonces que, la primera coordenada de b_i es una partición uniforme del dominio $[a, b]$.

2.2. Propiedades de los polinomios de Bernstein y las curvas de Bézier

Proposición 1. Los polinomios de Bernstein $\{B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n\}$ definidos en el intervalo $[a, b]$ forman una base del espacio vectorial de polinomios canónicos de grado n .

Demostración

Mostraremos primero que los polinomios de Bernstein forman una base en el intervalo $[0, 1]$. Para hacer esto exhibiremos una matriz M de cambio de base que va de los polinomios de Bernstein a la base canónica $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Mostraremos además que dicha matriz es invertible, concluyendo con ello que la matriz M representa una biyección entre la base de polinomios de Bernstein y la base canónica.

Para el desarrollo de nuestra demostración utilizaremos el teorema del binomio que dice lo siguiente

Teorema del binomio: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Queremos exhibir ahora una matriz M tal que:

$$\begin{pmatrix} B_0^n \\ B_1^n \\ \vdots \\ B_n^n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}$$

Mostraremos primero que dicha matriz existe dentro del intervalo $[0, 1]$.

De la definición de polinomio de Bernstein B_i^n tenemos que en el intervalo $[0, 1]$ el polinomio se reduce a

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Por el teorema del binomio dicho polinomio se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} 1^{n-i-k} (-t)^k \right] = \binom{n}{i} t^i \left[\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-t)^k \right] \\ &= \binom{n}{i} \left[\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} t^i (-1)^k (t)^k \right] = \binom{n}{i} \left[\sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k (t)^{k+i} \right] \end{aligned}$$

Después de hacer este desarrollo definimos entonces los elementos de la matriz M por

$$a_{i,j+i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (-1)^j$$

Para $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq n - i$ y 0 para otro caso.

De esta manera la matriz de cambio de coordenadas queda descrita en la forma

$$M = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} \binom{n-0}{0} (-1)^0 & \binom{n}{0} \binom{n-0}{1} (-1)^1 & \dots & \binom{n}{0} \binom{n-0}{n} (-1)^n \\ 0 & \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} (-1)^0 & \dots & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \binom{n-n}{0} (-1)^0 \end{bmatrix}$$

Por lo que M existe.

Notemos ahora que nuestra matriz es una matriz triangular superior por lo que su determinante está dado por la multiplicación de los elementos de su diagonal, como cada uno de estos elementos es distinto de cero, tenemos entonces que su multiplicación es distinta de cero, por lo tanto, la matriz M es invertible y la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica a los polinomios de Bernstein es la inversa de M . Se concluye, por lo tanto, que existe una biyección entre la base canónica y los polinomios de Bernstein, por lo que estos últimos son una base para los polinomios canónicos en el intervalo $[0,1]$.

Mostraremos ahora que existe una biyección entre el intervalo $[0, 1]$ y cualquier intervalo $[a, b]$, con lo que, al hacer la composición de dos funciones biyectivas tendremos una función biyectiva que nos dará como conclusión el hecho de que los polinomios de Bernstein son una base del espacio vectorial de polinomios canónicos en los reales.

Definamos la función

$$f(x) = b + (b - a)(x - 1)$$

Con $f: [0,1] \rightarrow [a, b]$

f es inyectiva ya que si

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Entonces

$$b + (b - a)(x_1 - 1) = b + (b - a)(x_2 - 1)$$

$$(b - a)(x_1 - 1) = (b - a)(x_2 - 1)$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$x_1 = x_2$$

f también es suprayectiva ya que si $a < y_1 < b$ entonces elegimos

$$x_1 = 1 + \frac{y_1 - b}{b - a}.$$

Tenemos que $0 < x_1 < 1$ ya que $-1 < \frac{y_1 - b}{b - a} < 0$.

La desigualdad de la derecha se cumple debido a que $y_1 - b < 0$ y $b - a > 0$ mientras que la desigualdad de la izquierda se cumple por el hecho de que

$$a < y_1$$

$$a - b < y_1 - b$$

$$(b - a)(-1) < y_1 - b$$

$$-1 < \frac{y_1 - b}{b - a}.$$

Tenemos además que $f(x_1) = y_1$.

Así f es una biyección entre el intervalo $[0, 1]$ y el intervalo $[a, b]$ lo que nos permite concluir que los polinomios de Bernstein son una base de los polinomios canónicos sobre el campo de los reales. ■

Proposición 2. Toda curva de Bézier comienza y termina en el primer y último punto de control respectivamente.

Demostración

Bastará mostrar que la curva de Bézier evaluada en los puntos a y b toma como valores b_0 y b_n respectivamente.

Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned}
c(a) &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(a) \\
&= b_0 B_0^n(a) + b_1 B_1^n(a) + b_2 B_2^n(a) + \cdots + b_n B_n^n(a) \\
&= b_0 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (a-a)^0 (b-a)^n \right] + b_1 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{1} (a-a)^1 (b-a)^{n-1} \right] \\
&\quad + b_2 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{2} (a-a)^2 (b-a)^{n-2} \right] + \cdots \\
&\quad + b_n \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (a-a)^n (b-a)^{n-n} \right] \\
&= b_0 * 1 + b_1 * 0 + b_2 * 0 + \cdots + b_n * 0 \\
&= b_0
\end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned}
c(b) &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(b) \\
&= b_0 B_0^n(b) + b_1 B_1^n(b) + b_2 B_2^n(b) + \cdots + b_n B_n^n(b) \\
&= b_0 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (b-a)^0 (b-b)^n \right] + b_1 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{1} (b-a)^1 (b-b)^{n-1} \right] \\
&\quad + b_2 \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{2} (b-a)^2 (b-b)^{n-2} \right] + \cdots \\
&\quad + b_n \left[\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (b-a)^n (b-b)^0 \right] \\
&= b_0 * 0 + b_1 * 0 + b_2 * 0 + \cdots + b_n * 1 \\
&= b_n
\end{aligned}$$

■

2.3. Multiplicación de polinomios de Bernstein

Dados los polinomios de Bernstein $B_i^n(t)$ y $B_j^m(t)$ su multiplicación está dada por

$$B_i^n(t) B_j^m(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (t-a)^i (b-t)^{n-i} \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{j} (t-a)^j (b-t)^{m-j}$$

$$\begin{aligned}
B_i^n(t)B_j^m(t) &= \frac{1}{(b-a)^n} \frac{1}{(b-a)^m} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (t-a)^{i+j} (b-t)^{m+n-i-j} \\
&= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (t-a)^{i+j} (b-t)^{m+n-i-j} \\
&= \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} B_{i+j}^{n+m}.
\end{aligned}$$

2.4. Multiplicación de curvas de Bézier

Dadas las curvas de Bézier $B(t)$ y $C(t)$ en el intervalo $[a, b]$ tenemos que su multiplicación está dada por

$$\begin{aligned}
B(t) * C(t) &= \left[\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right] * \left[\sum_{j=0}^m c_j B_j^m(t) \right] \\
&= \left[b_0 \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (t-a)^0 (b-t)^{n-0} + b_1 \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{1} (t-a)^1 (b-t)^{n-1} \right. \\
&\quad + b_2 \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{2} (t-a)^2 (b-t)^{n-2} + \dots \\
&\quad \left. + b_n \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{n} (t-a)^n (b-t)^{n-n} \right] \\
&\quad * \left[c_0 \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{0} (t-a)^0 (b-t)^{m-0} \right. \\
&\quad + c_1 \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{1} (t-a)^1 (b-t)^{m-1} \\
&\quad + c_2 \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{2} (t-a)^2 (b-t)^{m-2} + \dots \\
&\quad \left. + c_m \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{m} (t-a)^m (b-t)^{m-m} \right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \{ b_0 c_0 \binom{n}{0} \binom{m}{0} (t-a)^0 (b-t)^{n+m} + [b_0 c_1 \binom{n}{0} \binom{m}{1} + b_1 c_0 \binom{n}{1} \binom{m}{0}] (t-a)^1 (b-t)^{n+m-1} \\
&\quad + [b_0 c_2 \binom{n}{0} \binom{m}{2} + b_1 c_1 \binom{n}{1} \binom{m}{1} + b_2 c_0 \binom{n}{2} \binom{m}{0}] (t-a)^2 (b-t)^{n+m-2} + \dots \\
&\quad + b_n c_m \binom{n}{n} \binom{m}{m} (t-a)^{n+m} (b-t)^{n+m-n-m} \}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \alpha_i B_i^{n+m}$$

con

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=0}^{\min(i,m,n)} b_j c_{i-j} \binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{n+m}{i}} \quad \text{donde } c_{i-j} = 0 \text{ para } i-j > \max(n, m).$$

Introduciendo la notación $\delta_{i,j}^{n,m}$ como

$$\delta_{i,j}^{n,m} = \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{n+m}{i}}$$

α_i queda definido como

$$\alpha_i = \delta_{i,j}^{n,m} \sum_{j=0}^{\min(i,m,n)} b_j c_{i-j}$$

2.5. Derivadas

Proposición 3. La derivada de un polinomio de Bernstein en un intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = \frac{n}{b-a} [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]$$

Demostración

Un polinomio de Bernstein en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$B_i^n(t) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (t-a)^i (b-t)^{n-i}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} [i * (t-a)^{i-1} * (b-t)^{n-i} + (n-i)(t-a)^i (b-t)^{n-i-1}(-1)] \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \left\{ \frac{n! * i}{i! (n-i)!} [(t-a)^{i-1} * (b-t)^{n-i}] - \frac{n! * (n-i)}{i! (n-i)!} [(t-a)^i * (b-t)^{n-i-1}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(b-a)^n} \left\{ \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [(t-a)^{i-1} * (b-t)^{n-i}] \right. \\
&\quad \left. - \frac{n! * (n-i)}{i!(n-i)!} [(t-a)^i * (b-t)^{n-i-1}] \right\} \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \left\{ n * \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} [(t-a)^{i-1} * (b-t)^{n-i}] - n \right. \\
&\quad \left. * \frac{(n-1)!}{i!((n-1)-i)!} [(t-a)^i * (b-t)^{n-i-1}] \right\} \\
&= n \left[\frac{1}{b-a} * \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} [(t-a)^{i-1} * (b-t)^{n-i}] - \frac{1}{b-a} \right. \\
&\quad \left. * \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i} [(t-a)^i * (b-t)^{n-i-1}] \right] \\
&= \frac{n}{b-a} [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)].
\end{aligned}$$

■

Corolario. La derivada de un polinomio de Bernstein en el intervalo $[0, 1]$ está dada por

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]$$

Demostración

Dicha fórmula se obtiene sustituyendo 0 y 1 en la fórmula del intervalo general.

Proposición 4. Una curva de Bézier en el intervalo $[a, b]$

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

Tiene por derivada

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t)$$

donde $B_{-1}^{n-1} \equiv B_n^{n-1} \equiv 0$.

Demostración

Tenemos que

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + b_2 B_2^n(t) + \cdots + b_{n-1} B_{n-1}^n(t) + b_n B_n^n(t)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= b_0 \frac{n}{b-a} [B_{-1}^{n-1}(t) - B_0^{n-1}(t)] + b_1 \frac{n}{b-a} [B_0^{n-1}(t) - B_1^{n-1}(t)] \\ &\quad + b_2 \frac{n}{b-a} [B_1^{n-1}(t) - B_2^{n-1}(t)] + \cdots + b_{n-1} \frac{n}{b-a} [B_{n-2}^{n-1}(t) - B_{n-1}^{n-1}(t)] \\ &\quad + b_n \frac{n}{b-a} [B_{n-1}^{n-1}(t) - B_n^{n-1}(t)] \\ &= \frac{n}{b-a} [(b_1 - b_0) B_0^{n-1}(t) + (b_2 - b_1) B_1^{n-1}(t) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) B_{n-1}^{n-1}(t)] \\ &= \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

■

Corolario. Una curva de Bézier en el intervalo $[0, 1]$

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

Tiene por derivada

$$\frac{d}{dt} c(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t)$$

Demostración

Dicha fórmula se obtiene sustituyendo 0 y 1 en la fórmula del intervalo general.

Proposición 5. Todo polinomio de Bernstein y, por tanto, toda curva de Bézier son infinitamente diferenciables.

Demostración

Como cualquier polinomio de Bernstein de grado n es equivalente a una combinación de los polinomios canónicos entonces dicho polinomio se puede escribir como combinación lineal de la base $\{1, x, x^2, \dots\}$, luego dicho polinomio es infinitamente diferenciable por ser una suma de funciones infinitamente diferenciables.

Como cualquier curva de Bézier es una suma de polinomios de Bernstein que son infinitamente diferenciables luego la curva también es infinitamente diferenciable. ■

2.6. Elevación de Grado

Proposición 6. Una curva de Bézier de grado n se puede expresar como una combinación de $n+1$ polinomios de Bernstein en la forma

$$c(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \left[\frac{i}{n+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) b_i \right] B_i^{n+1}.$$

Llamamos a esta expresión elevación de grado de la curva.

Demostración

Tenemos que una curva de Bézier de grado n está definida por

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

A partir de dicha expresión podemos hacer el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (t-a)^i (b-t)^{n-i} * 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n b_i \frac{1}{(b-a)^n} \frac{n!}{i!(n-i)!} (t-a)^i (b-t)^{n-i} * \frac{(t-a+b-t)}{(b-a)} \\
&= \sum_{i=0}^n b_i \frac{1}{(b-a)^n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left[\frac{(t-a)^{i+1} (b-t)^{n-i} + (t-a)^i (b-t)^{n+1-i}}{(b-a)} \right] \\
&= \sum_{i=0}^n b_i \frac{1}{(b-a)^n} \left[\frac{i+1}{n+1} \frac{n!(n+1)}{i!(n-i)!} \frac{(t-a)^{i+1} (b-t)^{(n+1)-(i+1)}}{(b-a)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+1-i}{n+1} \frac{n!(n+1)}{(n-i)!i!(n+1-i)} \frac{(t-a)^i (b-t)^{n+1-i}}{(b-a)} \right] \\
&= \sum_{i=0}^n b_i \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \left[\frac{i+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n+1-i-1)!} (t-a)^{i+1} (b-t)^{(n+1)-(i+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{n+1-i}{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} (t-a)^i (b-t)^{n+1-i} \right] \\
&= \sum_{i=0}^n b_i \left[\frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1} + \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1} \right] \\
&= b_0 \left[\frac{0+1}{n+1} B_{0+1}^{n+1} + \frac{n+1-0}{n+1} B_0^{n+1} \right] + b_1 \left[\frac{1+1}{n+1} B_{1+1}^{n+1} + \frac{n+1-(1)}{n+1} B_1^{n+1} \right] \\
&\quad + b_2 \left[\frac{2+1}{n+1} B_{2+1}^{n+1} + \frac{n+1-(2)}{n+1} B_2^{n+1} \right] + \dots \\
&= b_0 \frac{n+1-0}{n+1} B_0^{n+1} + \left[\frac{0+1}{n+1} b_0 + \frac{n+1-(1)}{n+1} b_1 \right] B_1^{n+1} \\
&\quad + \left[\frac{2}{n+1} b_1 + \frac{n+1-(2)}{n+1} b_2 \right] B_2^{n+1} + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left[\frac{i}{n+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) b_i \right] B_i^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Utilizando los cálculos de cómo queda la derivada y la elevación de grado de una curva de Bézier nos es posible calcular la forma que tiene la ecuación de la primera y la segunda derivada de una curva de Bézier elevada de grado.

2.7. Derivada de una curva de Bézier elevada de grado

Proposición 7. Una curva de Bézier

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

Tiene por derivada elevada de grado a la curva

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Demostración

Tenemos que la derivada de una curva de Bézier $\mathbf{b}(t)$ en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}$$

Considerando $m = n - 1$; $c_i = b_{i+1} - b_i$; $c_{i-1} = b_i - b_{i-1}$

La curva queda expresada en la forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^m c_i B_i^m(t)$$

La cual, si se eleva de grado, queda expresada como

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{m+1} \left[\left(1 - \frac{i}{m+1}\right) c_i + \frac{i}{m+1} c_{i-1} \right] B_i^{m+1} \\ &= \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^n \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) (b_{i+1} - b_i) + \frac{i}{n} (b_i - b_{i-1}) \right] B_i^n \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} - (n-i)b_i + ib_i - ib_{i-1}] B_i^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n.$$

■

Proposición 8. Una curva de Bézier

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

Tiene por segunda derivada elevada de grado a la curva

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} c(t) &= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} \\ &\quad + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i \\ &\quad + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] B_i^n \end{aligned}$$

Demostración

Haciendo el cambio de variable $d_i = (n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}$ en la ecuación de la primera derivada elevada de grado obtenemos

$$\frac{d c(t)}{dt} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n d_i B_i^n(t)$$

La cual tiene en sí misma la forma de una ecuación de Bézier, por lo que tendrá por derivada elevada de grado

$$= \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)d_{i+1} + (2i-n)d_i - id_{i-1}] B_i^n.$$

Considerando además que

$$d_{i+1} = (n-i-1)b_{i+2} + (2i+2-n)b_{i+1} - (i+1)b_i$$

$$d_i = (n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}$$

y

$$d_{i-1} = (n-i+1)b_i + (2i-2-n)b_{i-1} - (i-1)b_{i-2}$$

Y sustituyendo estos valores en la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n \{ (n-i)[(n-i-1)b_{i+2} + (2i+2-n)b_{i+1} - (i+1)b_i] \\
&\quad + (2i-n)[(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] - i[(n-i+1)b_i \\
&\quad + (2i-2-n)b_{i-1} - (i-1)b_{i-2}] \} B_i^n \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n [(n^2 - in - n - in + i^2 + i)b_{i+2} + (2in + 2n - n^2 - 2i^2 - 2i + in)b_{i+1} \\
&\quad + (i^2 + i - in - n)b_i + (2in - 2i^2 - n^2 + in)b_{i+1} \\
&\quad + (4i^2 - 2in - 2in + n^2)b_i + (in - 2i^2)b_{i-1} + (i^2 - ni - i)b_i \\
&\quad + (2i + in - 2i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] B_i^n \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} \\
&\quad + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] B_i^n.
\end{aligned}$$

■

2.8. Elevación n-ésimo de grado de una curva de Bézier

Teorema 1 (Aumento de grado de una curva de Bézier). Una curva de Bézier

$$C(t) = \sum_{i=0}^m c_i B_i^m(t)$$

Se puede escribir como combinación de $n+m$ polinomios de Bernstein (esto es, puede ser elevada de grado n veces) reescribiéndose en la forma:

$$\sum_{i=0}^{m+n} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} c_j \right] B_i^{n+m}(t)$$

Con $\delta_{i,j}^{n,m} = \frac{\binom{m}{j}\binom{n}{i-j}}{\binom{n+m}{i}}$ Y $\binom{m}{i-j} = 0$, $\binom{n}{j} = 0$ Para $i - j > m$ y $j > n$

Demostración

Mostraremos primero como elevar de grado un polinomio de Bernstein.

Tenemos que un polinomio de Bernstein en el intervalo $[a, b]$ se escribe en la forma

$$B_i^m(t) = \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i}$$

Desde donde se puede llevar a cabo el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i} (b-t+t-a)^n \frac{1}{(b-a)^n} \\ &= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \binom{m}{i} (t-a)^i (b-t)^{m-i} * \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (b-t)^{n-k} (t-a)^k \\ &= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \sum_{k=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{k} (b-t)^{m+n-(k+i)} (t-a)^{k+i} \\ &= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{i+k} (b-t)^{m+n-(k+i)} (t-a)^{k+i} * \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{i+k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{i+k}} B_{i+k}^{n+m} \\ \therefore B_i^n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{i+k}} B_{i+k}^{n+m}. \end{aligned}$$

Tomando esta equivalencia en cuenta tenemos que la elevación de n grados de una curva de Bézier de grado m se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{i=0}^m c_i B_i^m \\ &= \sum_{i=0}^m c_i \left(\sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{i+k}} B_{i+k}^{m+n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_o \sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{0} \binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} B_k^{m+n} + c_1 \sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{k}}{\binom{m+n}{1+k}} B_{1+k}^{m+n} + \dots + c_m \sum_{k=0}^n \frac{\binom{m}{m} \binom{n}{k}}{\binom{m+n}{m+k}} B_{m+k}^{m+n} \\
&= \left[c_o \frac{\binom{m}{0} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{0}} B_0^{m+n} + c_o \frac{\binom{m}{0} \binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}} B_1^{m+n} + \dots + c_o \frac{\binom{m}{0} \binom{n}{n}}{\binom{m+n}{n}} B_n^{m+n} \right] \\
&\quad + \left[c_1 \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{1}} B_1^{m+n} + c_1 \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{1}}{\binom{m+n}{2}} B_2^{m+n} + \dots + c_1 \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{m+1}}{\binom{m+n}{m+1}} B_{m+1}^{m+n} \right] + \dots \\
&\quad + \left[c_m \frac{\binom{m}{m} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{n}} B_n^{m+n} + c_m \frac{\binom{m}{m} \binom{n}{1}}{\binom{m+n}{n+1}} B_{n+1}^{m+n} + \dots + c_m \frac{\binom{m}{m} \binom{n}{n+m}}{\binom{m+n}{n+m}} B_{n+m}^{m+n} \right] \\
&= \frac{\binom{m}{0} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{0}} c_o B_0^{m+n} + \left[\frac{\binom{m}{0} \binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}} c_o + \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{1}} c_1 \right] B_1^{m+n} \\
&\quad + \left[\frac{\binom{m}{0} \binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}} c_o + \frac{\binom{m}{1} \binom{n}{1}}{\binom{m+n}{2}} c_1 + \frac{\binom{m}{2} \binom{n}{0}}{\binom{m+n}{2}} c_2 \right] B_2^{m+n} + \dots + \left[\frac{\binom{m}{m} \binom{n}{n+m}}{\binom{m+n}{n+m}} c_m \right] B_{n+m}^{m+n} \\
&= \sum_{i=0}^{m+n} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} c_j \right] B_i^{n+m} \\
\text{con } \delta_{i,j}^{n,m} &= \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{m+n}{i}} \quad Y \quad \binom{m}{i-j} = 0 \quad \binom{n}{j} = 0 \quad \text{Para } i-j > m \text{ y } j > n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE CURVAS DE BÉZIER

Armados con las definiciones, propiedades y teoremas que arropan a las curvas de Bézier y que hemos expuesto hasta el momento, nos es posible considerar el utilizar dicha teoría para desarrollar un método de solución semi-analítico que aproxime soluciones para un conjunto muy extenso y variado de ecuaciones diferenciales ordinarias, inclusive, nos atreveremos a dejar la pregunta abierta de si existe algún tipo de ecuación diferencial ordinaria que cumpla las hipótesis de Picard y para el que nuestro método no presente una solución aproximada. Así pues, en adelante nos dedicaremos a presentar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias y a exponer las aproximaciones de solución que nuestro método entrega, mostrando su adaptabilidad, rápida convergencia y fácil manejo.

El procedimiento que llevaremos a cabo para dar una solución aproximada a una ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Será buscar resolver en su lugar la ecuación diferencial

$$F(x, c, c', c'', \dots, c^{(n)}) = 0$$

Donde $c(x)$ es una curva de Bézier y $c \approx y$.

Siempre pensando en que la solución de dicha ecuación diferencial existe y es única, esto es, que cumple las hipótesis del teorema de Picard

Teorema 2. (Teorema de Picard-Lindelöf) Sea $f: \Omega \subset (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ donde Ω es un abierto, una función continua y localmente lipschitz respect de x . Entonces dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ Podemos encontrar un intervalo centrado $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset \mathfrak{R}, \alpha > 0$ donde existe solución única del siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Que cumple que los pares $(t, x(t)) \in \Omega, \forall t \in I_\alpha$.

3.1. Problemas de valor inicial

Problema 1 (Línea recta). Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier con tres puntos de control para la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = c_1 \\ y(0) = c_2 \end{cases}$$

Para c_1, c_2 constantes

Solución.

Nota 1: Hemos mostrado ya que cualquier curva de Bézier comienza y termina en el primer y último punto de control respectivamente. Sabemos además que la solución de toda ecuación diferencial comienza en el valor de la condición inicial de la ecuación, por esta razón se elige el primer punto de control de una curva de Bézier como la condición inicial de la ecuación.

Como $y(0) = c_2$ entonces consideramos $b_0 = c_2$.

Tenemos además que la derivada de una curva de Bézier se escribe en la forma

$$y' = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Por lo que al buscar una solución aproximada por curvas de Bézier de la ecuación tenemos

$$c_1 = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

$$c_1(b-a) = \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Haciendo un desarrollo para $n=2$ tenemos que

$$c_1(b-a) = [2b_1 - 2b_0]B_0^2 + [b_2 - b_0]B_1^2 + [2b_2 - 2b_1]B_2^2$$

$$c_1(b-a) = [2b_1 - 2b_0] \left[\frac{1}{(b-a)^2} \binom{2}{0} (b-t)^2 \right]$$

$$+ [b_2 - b_0] \left[\frac{1}{(b-a)^2} \binom{2}{1} (t-a)(b-t) \right]$$

$$+ [2b_2 - 2b_1] \left[\frac{1}{(b-a)^2} \binom{2}{2} (t-a)^2 \right]$$

$$c_1(b-a)^3 = [2b_1 - 2b_0](b-t)^2 + [2b_2 - 2b_0](t-a)(b-t) + [2b_2 - 2b_1](t-a)^2$$

$$c_1(b-a)^3 = [2b_1 - 2b_0](b^2 - 2bt + t^2) + [2b_2 - 2b_0](bt - t^2 - ab + at)$$

$$+ [2b_2 - 2b_1](t^2 - 2at + a^2)$$

$$c_1(b-a)^3 = [(2b_1 - 2b_0)b^2 + (2b_2 - 2b_0)(-ab) + (2b_2 - 2b_1)a^2]$$

$$+ [(2b_0 - 2b_1)2b + (2b_2 - 2b_0)(b+a) - 2a(2b_2 - 2b_1)]t$$

$$+ [(2b_1 - 2b_0) + (2b_0 - 2b_2) + (2b_2 - 2b_1)]t^2$$

De esta ecuación concluimos las siguientes dos igualdades

$$c_1(b-a)^3 = [(2b_1 - 2b_0)b^2 + (2b_2 - 2b_0)(-ab) + (2b_2 - 2b_1)a^2]$$

Y

$$0 = [(2b_0 - 2b_1)2b + (2b_2 - 2b_0)(b+a) - 2a(2b_2 - 2b_1)]$$

Dado que $b_0 = c_2$ entonces nuestras dos incógnitas en estas dos ecuaciones son b_1 y

b_2 . Continuando con el despeje tenemos entonces que

$$(2b^2 - 2a^2)b_1 + (2a^2 - 2ab)b_2 = c_1(b-a)^3 + (2b^2 - 2ab)b_0 \quad (1)$$

Y

$$(4a - 4b)b_1 + (2b - 2a)b_2 = (2a - 2b)b_0 \quad (2)$$

Despejando b_1 de la ecuación (2) tenemos que

$$b_1 = \frac{(2a - 2b)b_0 + (2a - 2b)b_2}{4a - 4b}$$

O bien

$$b_1 = \frac{(a - b)b_0 + (a - b)b_2}{2a - 2b}$$

$$b_1 = \frac{b_0 + b_2}{2}$$

Sustituyendo b_1 en (1) tenemos que

$$(2b^2 - 2a^2) \left(\frac{b_0 + b_2}{2} \right) + (2a^2 - 2ab)b_2 = c_1(b - a)^3 + (2b^2 - 2ab)b_0$$

$$(b^2 - a^2)(b_0 + b_2) + (2a^2 - 2ab)b_2 = c_1(b - a)^3 + (2b^2 - 2ab)b_0$$

$$(b - a)^2 b_2 = c_1(b - a)^3 + (b^2 - 2ab + a^2)b_0$$

$$(b - a)^2 b_2 = c_1(b - a)^3 + (b - a)^2 b_0$$

$$\mathbf{b_2 = c_1(b - a) + b_0}$$

Por lo que

$$b_1 = \frac{b_0 + b_0 + c_1(b - a)}{2}$$

$$\mathbf{b_1 = b_0 + \frac{c_1(b - a)}{2}}.$$

Nota 2: Notemos que los tres puntos de control son colineales y se encuentran sobre la recta solución de la ecuación diferencial. De hecho bastarían dos puntos de control ya que como sabemos dos puntos son suficientes para determinar una recta.

Problema 2 (Exponencial). Encuentre una solución aproximada mediante curvas de

Bézier de la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $[a, b]$

$$\begin{cases} y = y' \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solución.

Sustituyendo la curva de Bézier y su derivada elevada de grado por la ecuación obtenemos

$$\sum_{i=0}^n b_i B_i^n = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Como tenemos que $y(0) = 1$ entonces tomaremos como primer punto de control $b_0 = 1$.

Para $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ tenemos que una manera de que la igualdad se dé es que, termino a término, los polinomios de Bernstein sean iguales, esto es que

$$b_i = \frac{1}{(b-a)} * [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}]$$

Despejando b_{i+1} de esta ecuación obtenemos

$$(b-a) * b_i + (n-2i)b_i + ib_{i-1} = (n-i)b_{i+1}$$

$$b_{i+1} = \frac{(b-a) + n - 2i}{n-i} b_i + \frac{i}{n-i} b_{i-1}.$$

Podemos aproximar una solución particular de la ecuación diferencial con 5 puntos de control ($n=4$) en el intervalo $[0,10]$. Tenemos que

$$b_0 = 1;$$

$$b_1 = \frac{(10-0) + 4 - 2 * 0}{4-0} * 1$$

$$b_1 = \frac{10+4}{4} * 1$$

$$b_1 = \frac{14}{4}$$

$$b_2 = \frac{(10-0) + 4 - 2 * 1}{4-1} * \frac{14}{4} + \frac{1}{4-1} * 1$$

$$b_2 = \frac{10+4-2}{3} * \frac{14}{4} + \frac{1}{3} * 1$$

$$b_2 = \frac{12}{3} * \frac{14}{4} + \frac{1}{3} * 1$$

$$b_2 = \frac{12}{3} * \frac{14}{4} + \frac{1}{3} * 1$$

$$b_2 = \frac{43}{3}$$

$$b_3 = \frac{(10 - 0) + 4 - 2 * 2}{4 - 2} * \frac{43}{3} + \frac{2}{4 - 2} * \frac{14}{4}$$

$$b_3 = \frac{10}{2} * \frac{43}{3} + \frac{2}{2} * \frac{14}{4}$$

$$b_3 = \frac{451}{6}$$

$$b_4 = \frac{(10 - 0) + 4 - 2 * 3}{4 - 3} * \frac{451}{6} + \frac{3}{4 - 3} * \frac{43}{3}$$

$$b_4 = \frac{8}{1} * \frac{451}{6} + \frac{3}{1} * \frac{43}{3}$$

$$b_4 = \frac{8}{1} * \frac{451}{6} + \frac{3}{1} * \frac{43}{3}$$

$$b_4 = \frac{1933}{3}$$

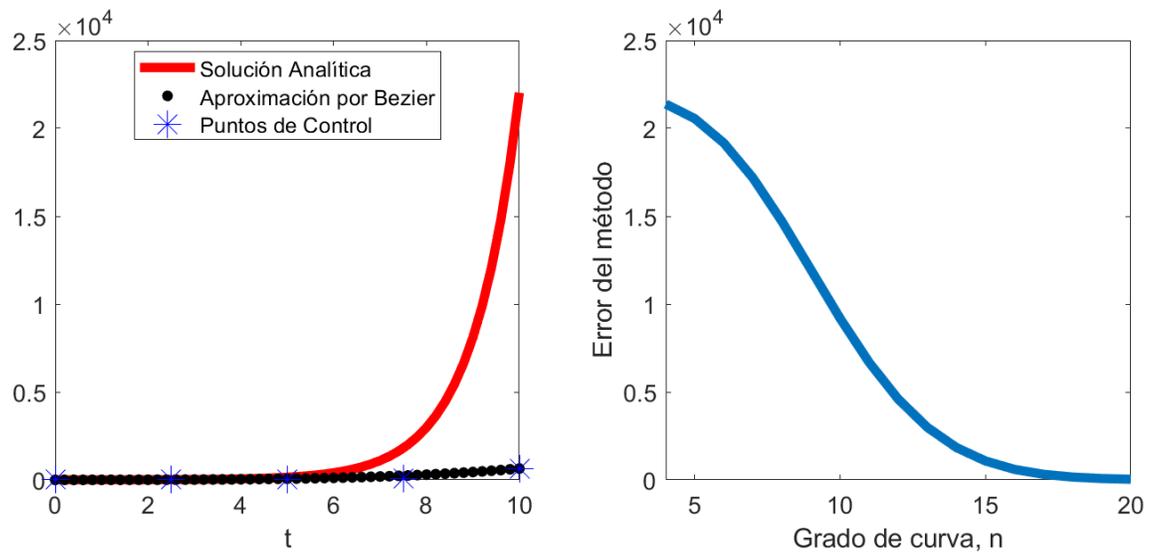


Figura 1. Resultados al Problema 2. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.

La imagen de la derecha muestra el error con la norma infinito donde se observa que al incrementar el grado de la curva de Bézier el error tiende a cero. Aquí podemos observar que para $n \geq 17$ el error es prácticamente a cero, esto es, la aproximación es prácticamente igual a la solución analítica.

Problema 3 (Polinomio). Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier de la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $[0, 1]$ utilizando 4 puntos de control

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 + 4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Solución

Sabemos que integrando la ecuación diferencial podemos obtener la solución de la ecuación que es:

$$y(t) = t^3 + 4t + 2$$

Resolviendo por curvas de Bézier tenemos que $b_0 = 2$ dado que $y(0) = 2$.

Tenemos además que sustituyendo la derivada de la curva por la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n = 3t^2 + 4$$

Resolviendo para $n=3$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} [(3b_1 - 3b_0)B_0^3 + (2b_2 - b_1 - b_0)B_1^3 + (b_3 + b_2 - 2b_1)B_2^3 + (3b_3 - 3b_2)B_3^3] \\ & = (3t^2 + 4) \\ & (3b_1 - 3b_0) \left[\frac{1}{(b-a)^3} (b-t)^3 \right] + (2b_2 - b_1 - b_0) \left[\frac{1}{(b-a)^3} 3(t-a)(b-t)^2 \right] \\ & \quad + (b_3 + b_2 - 2b_1) \left[\frac{1}{(b-a)^3} 3(t-a)^2(b-t) \right] \\ & \quad + (3b_3 - 3b_2) \left[\frac{1}{(b-a)^3} (t-a)^3 \right] = (3t^2 + 4)(b-a) \\ & (3b_1 - 3b_0)[b^3 - 3b^2t + 3bt^2 - t^3] + (2b_2 - b_1 - b_0)[3(t-a)(b^2 - 2bt + t^2)] \\ & \quad + (b_3 + b_2 - 2b_1)[3(t^2 - 2at + a^2)(b-t)] \\ & \quad + (3b_3 - 3b_2)[t^3 - 3at^2 + 3a^2t - a^3] = (3t^2 + 4)(b-a)^4 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} & [(-3b^3 + 3ab^2)b_0 + (3b^3 + 3ab^2 - 6a^2b)b_1 + (3a^3 - 6ab^2 + 3a^2b)b_2 \\ & \quad + (3a^2b - 3a^3)b_3] \\ & \quad + [(6b^2 - 6ab)b_0 + (6a^2 + 6ab - 12b^2)b_1 + (6b^2 + 6ab - 12a^2)b_2 \\ & \quad + (6a^2 - 6ab)b_3]t \\ & \quad + [(3a - 3b)b_0 + (9b - 9a)b_1 + (9a - 9b)b_2 + (3b - 3a)b_3]t^2 \\ & = (3t^2 + 4)(b-a)^4 \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} & (-3b^3 + 3ab^2)b_0 + (3b^3 + 3ab^2 - 6a^2b)b_1 + (3a^3 - 6ab^2 + 3a^2b)b_2 \\ & \quad + (3a^2b - 3a^3)b_3 = 4(b-a)^4 \\ & (6b^2 - 6ab)b_0 + (6a^2 + 6ab - 12b^2)b_1 + (6b^2 + 6ab - 12a^2)b_2 + (6a^2 - 6ab)b_3 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Y

$$(3a - 3b)b_0 + (9b - 9a)b_1 + (9a - 9b)b_2 + (3b - 3a)b_3 = 3(b - a)^4$$

Sustituyendo en estas ecuaciones los valores de a y b del intervalo deseado se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se resuelve para b_1, b_2 y b_3 .

En el caso particular del intervalo $[0, 1]$ los valores de b_1, b_2 y b_3 son respectivamente $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}$ y 7 .

La curva de Bézier asociada a estos puntos de control es

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=1}^3 b_i B_i^n \\ &= 2(1-t)^3 + \left(\frac{10}{3}\right)(3t)(1-t)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)(3t^2)(1-t) + (7)t^3 \\ &= 2 + 4t + t^3 \end{aligned}$$

Que es justamente la solución de la ecuación diferencial inicial.

Nota 3: La solución que se obtiene por curvas de Bézier en los problemas 1 y 3 coinciden exactamente con la solución analítica del problema, esto es debido a que las soluciones son polinomios que, como hemos visto ya, pueden expresarse como una curva de Bézier de manera exacta.

El método de curvas de Bézier nos sirve para encontrar la solución tanto de un problema de condiciones iniciales como de un problema de condiciones de frontera como se expone a continuación.

3.2. Problemas de Valor en la Frontera

3.2.1. Problemas de Valor en la Frontera de Cauchy

Problema 4 (Coseno). Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} y = -y'' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución.

Sustituyendo la ecuación diferencial por la solución aproximada $c(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b_i B_i^n = & -\frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} \\ & + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i \\ & + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] B_i^n. \end{aligned}$$

Despejando b_{i+2} tenemos que

$$\begin{aligned} b_i = & -\frac{1}{(b-a)^2} [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} \\ & + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(b-a)^2 b_i = & [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} \\ & + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{i+2} = & \frac{2n^2 - 2n - 6in + 2i + 4i^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i+1} + \frac{-(b-a)^2 - 6i^2 + 6in + n - n^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_i \\ & + \frac{4i^2 - 2i - 2in}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i-1} + \frac{i - i^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i-2} \end{aligned}$$

Como $y(0) = 1$ entonces $b_0 = 1$

Como $y'(0) = 0$ entonces

$$\frac{1}{b-a} [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n(0) = 0$$

De donde

$$(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1} = 0$$

Para $i=0$ tenemos que

$$nb_1 + (-n)b_0 = 0$$

Luego

$$b_1 = b_0 = 1$$

También para $i=0$

$$b_2 = \frac{2n^2 - 2n}{n^2 - n} b_1 + \frac{-(b-a)^2 + n - n^2}{n^2 - n} b_0 = \frac{n^2 - n - (b-a)^2}{n^2 - n} b_0$$

Y para $i=1$

$$b_3 = \frac{2n^2 - 2n - 6n + 2 + 4}{n^2 - 2n - n + 1 + 1} b_2 + \frac{-(b-a)^2 - 6 + 6n + n - n^2}{n^2 - 2n - n + 1 + 1} b_1 + \frac{4 - 2 - 2n}{n^2 - 2n - n + 1 + 1} b_0$$

$$b_3 = \frac{2n^2 - 8n + 6}{n^2 - 3n + 2} b_2 + \frac{-n^2 + 7n - 6 - (b-a)^2}{n^2 - 3n + 2} b_1 + \frac{2 - 2n}{n^2 - 3n + 2} b_0$$

Para $i > 1$ tendríamos el despeje original, es decir

$$b_{i+2} = \frac{2n^2 - 2n - 6in + 2i + 4i^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i+1} + \frac{-(b-a)^2 - 6i^2 + 6in + n - n^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_i + \frac{4i^2 - 2i - 2in}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i-1} + \frac{i - i^2}{n^2 - 2in - n + i + i^2} b_{i-2}.$$

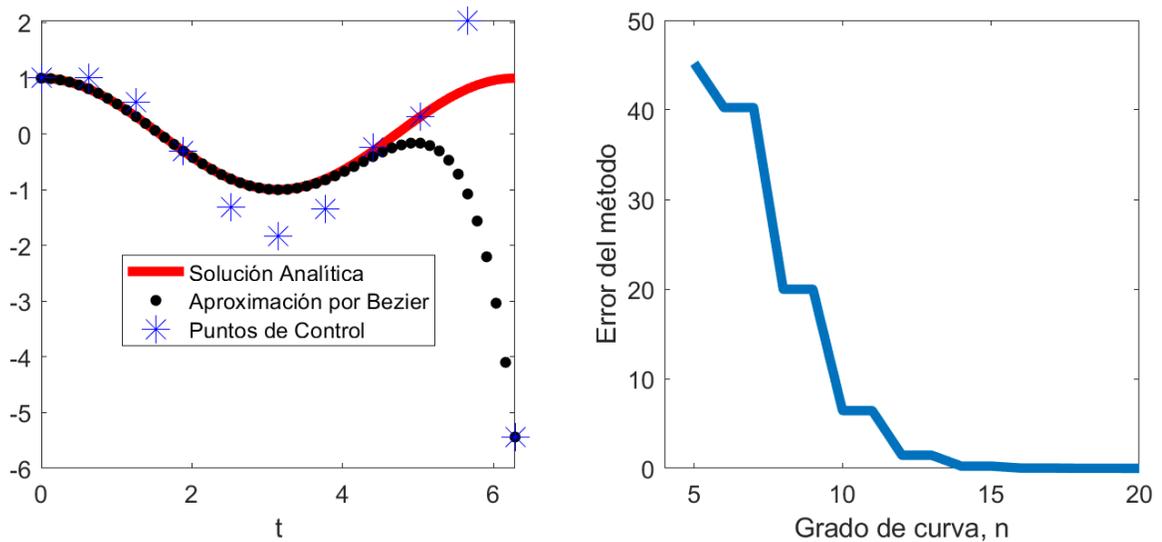


Figura 2. Resultados al Problema 3. Figura izquierda, solución con $n = 10$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.

Nota 4: Podemos observar en la gráfica de la izquierda que para tiempos cortos la solución semi-analítica aproxima muy bien a la solución analítica mientras que para tiempos largos la solución semi-analítica se alejará mucho de la solución analítica. Este comportamiento se obtiene debido a la naturaleza del tipo de problema, es decir problemas de valor en la frontera, haciendo que la condición inicial adicional asegure la precisión en tiempos cortos.

Nota 5: Podemos observar en la gráfica de la derecha que el error es una función escalonada, este es un comportamiento particular de este problema debido a que la función coseno es una función par, esto hace que para las curvas de Bézier el error sea igual para un orden de la curva par o para el impar inmediato siguiente.

3.2.2. Problemas de Valor en la Frontera de Dirichlet

Problema 5 (Coseno). Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} y = -y'' \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases}$$

Solución.

Sustituyendo la curva por la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n b_i B_i^n = & -\frac{1}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^n [(n^2 - 2in - n + i + i^2)b_{i+2} \\ & + (-2n^2 + 2n + 6in - 2i - 4i^2)b_{i+1} + (6i^2 - 6in - n + n^2)b_i \\ & + (2i + 2in - 4i^2)b_{i-1} + (i^2 - i)b_{i-2}] B_i^n\end{aligned}$$

Al resolver para el caso de $n = 4$ (con 5 puntos de control).

Como $y(0) = 1$ y $y(2\pi) = 1$ se llega a que $b_0 = 1$ y $b_4 = 1$

Para $i = 0$ se tiene

$$-b_2 + 2b_1 - 4.29 = 0$$

Para $i = 1$

$$-b_3 + b_2 - 5.58b_1 - b_0 = 0$$

Para $i = 2$

$$-b_4 - 2b_3 - 13.74b_2 - 2b_1 - 1 = 0$$

Como $b_0 = 1$ y $b_4 = 1$ entonces se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que al resolverse da como solución

$$b_1 = 3.02323; b_2 = 1.7566; b_3 = -16.0827.$$

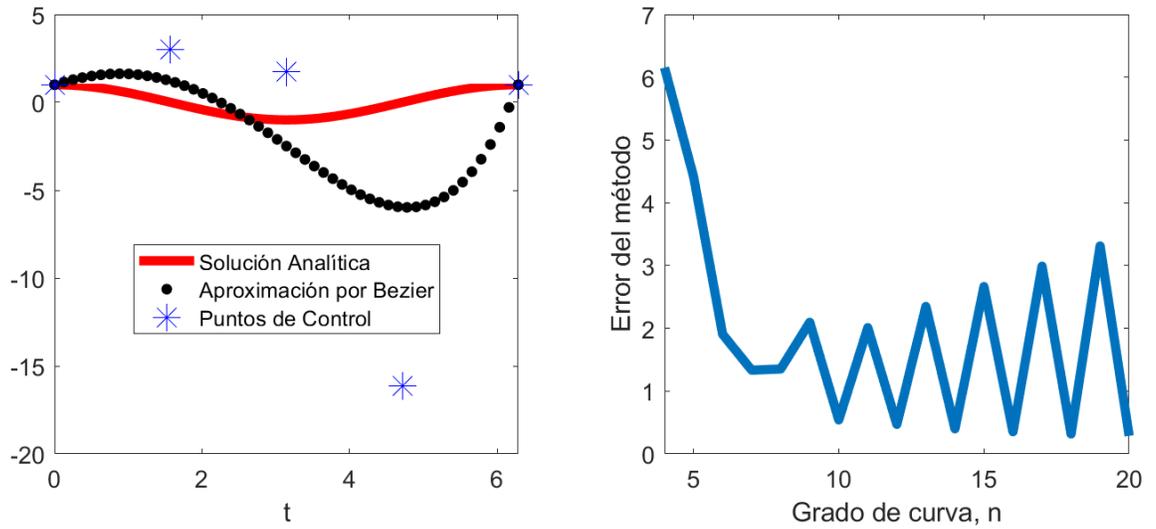


Figura 3. Resultados al Problema 5. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.

Nota 6: En este ejemplo, la gráfica de error de la derecha muestra como para órdenes de la curva de Bézier pares el error decrece con lentitud. También se puede observar que para órdenes impares el error se ve fuertemente influenciado por la propagación del error de los puntos de control anteriores. Se puede ver que una aproximación de la solución analítica se obtendrá trabajando con un número par de puntos de control, lo cual se puede entender comparando la solución con su expansión en serie de Taylor.

MANEJO MATRICIAL DE CURVAS DE BÉZIER

Hasta ahora se ha mostrado que la derivada de una curva de Bézier elevada de grado está dada por la expresión:

$$c'(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Obsérvese ahora que si en la curva original de Bézier

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n$$

denotando por B al vector columna de polinomios de Bernstein y por D al vector fila de coeficientes b_i que acompañan a dichos polinomios, entonces se reescribe la ecuación en la forma

$$c(t) = DB$$

Más aún, si denotando por M a la matriz cuadrada de dimensión $n+1$.

$$M = \begin{pmatrix} -i & 2i-n & n-i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 2i-n & n-i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & 2i-n & n-i \end{pmatrix}$$

Donde i va de 0 a n fila por fila, se puede observar que las operaciones algebraicas que realizamos al obtener la derivada de la curva de Bézier y elevarla de grado son equivalentes a multiplicar primero $\frac{1}{(b-a)}\mathbf{M}$ por \mathbf{D} y después multiplicar dicha matriz por \mathbf{B} a partir del segundo coeficiente de nuestra curva.

Si se va más allá en el análisis, se puede hacer además la siguiente observación:

La ecuación de la derivada de una curva de Bézier elevada de grado está dada por

$$c'(t) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

Haciendo el cambio de variable

$$d_i = \frac{1}{b-a} * [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}]$$

será más fácil notar que la derivada de una curva de Bézier es en sí misma una curva de Bézier de la forma

$$b'(t) = \sum_{i=0}^n d_i B_i^n$$

Denotando por \mathbf{D}_2 al vector fila de coeficientes d_i se puede ver que podemos obtener la segunda derivada simplemente volviendo a multiplicar el vector \mathbf{D}_2 por la matriz \mathbf{M} , esto es,

$$c''(t) = \frac{1}{(b-a)} \mathbf{M} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}$$

Pero $\mathbf{D}_2 = \frac{1}{(b-a)} \mathbf{M} \mathbf{b}$, entonces

$$b''(t) = \frac{1}{(b-a)} \mathbf{M} \frac{1}{(b-a)} \mathbf{M} \mathbf{b} \mathbf{B}$$

$$b''(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \mathbf{M}^2 \mathbf{b} \mathbf{B}.$$

Haciendo este desarrollo de manera general se habrá llegado al siguiente resultado

Teorema 3. La v -ésima derivada de una curva de Bézier elevada de grado estará dada por

$$b^{(v)}(t) = \frac{1}{(b-a)^v} M^v bB$$

Nota 7: El procedimiento de resolver una ecuación con curvas de Bézier por matrices da una solución particular para cada número n de puntos de control que se utilice mientras que resolver la ecuación de manera recursiva podría resolverse en el caso general para cualquier n en algunos tipos de ecuaciones.

Problema 6. Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier de la siguiente ecuación diferencial dentro del intervalo $[0,1]$. Utilice el método matricial para 4 puntos de control en la curva

$$\begin{cases} y' = 3t^2 + 4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Solución.

Se tiene que dentro del intervalo $[0,1]$ para el caso $n = 3$ la matriz M tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que la ecuación matricial de la curva C queda de la forma:

$$\frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (B_0^3 \quad B_1^3 \quad B_2^3 \quad B_3^3) = 3t^2 + 4$$

Ahora bien, se debe reescribir primero la parte derecha de la ecuación en polinomios de Bernstein. Tenemos que

$$B_0^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$$

Como B_0^3 es el único polinomio de Bernstein que tiene una parte constante luego eso no obliga a que $d_0 = 4$. De este hecho se deriva entonces que

$$4B_0^3 = 4(1-t)^3 = 4 - 12t + 12t^2 - 4t^3$$

Después $B_0^3 = 3 * (t - 2t^2 + t^3) = 3t - 6t^2 + 3t^3$

Como se necesita que $-12t + d_1 * 3t = 0$ por lo que d_1 debe ser igual a 4. Esto implica entonces que

$$4 * 3(t * (1-t)^2) = 12t - 24t^2 + 12t^3.$$

Se tiene además que $B_2^3 = 3t^2 - 3t^3$ de donde $-12t^2 + d_2 * 3t^2 = 3t^2$

Por lo que $d_2 = 5$

Por último $B_3^3 = t^3$

De donde $-4t^3 + 12t^3 - 15t^3 + d_3t^3 = 0$

$$-7t^3 + d_3t^3 = 0$$

Así

$$d_3 = 7.$$

Así la ecuación matricial que se debe resolver es:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (B_0^3 \quad B_1^3 \quad B_2^3 \quad B_3^3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} (B_0^3 \quad B_1^3 \quad B_2^3 \quad B_3^3)$$

De donde

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Simplificando se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3b_0 \\ 4 + b_0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3b_0 \\ 4 + b_0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por la condición inicial tenemos que $b_0 = 2$, luego

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación se tiene que $b_1 = \frac{10}{3}$; $b_2 = \frac{14}{3}$; $b_3 = 7$.

Los puntos de control b_1, b_2 y b_3 generan, como ya lo hemos visto en el problema 6, una solución exacta de la ecuación diferencial debido a que son base de los polinomios.

Problema 7. Encuentre una solución aproximada mediante curvas de Bézier de la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $[0, 2\pi]$. Utilice el método matricial para 5 puntos de control en la curva

$$\begin{cases} y = -y'' \\ y(0) = 1 \\ y(2\pi) = 1 \end{cases}$$

Solución.

La aproximación a la solución de la ecuación diferencial equivale a resolver la siguiente ecuación matricial en lugar de la ecuación diferencial original

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} (B_0^4 \ B_1^4 \ B_2^4 \ B_3^4 \ B_4^4) = -\frac{1}{(b-a)^2} M^2 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} (B_0^4 \ B_1^4 \ B_2^4 \ B_3^4 \ B_4^4)$$

Donde

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$M^2 = \begin{bmatrix} 12 & -24 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -12 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

Así se tiene que

$$-(2\pi)^2 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -24 & 12 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -12 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

O

$$\begin{bmatrix} -12 - (2\pi)^2 & 24 & -12 & 0 & 0 \\ -6 & 6 - (2\pi)^2 & 6 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & 12 - (2\pi)^2 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 6 - (2\pi)^2 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & 24 & -12 - (2\pi)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial para las primeras tres filas de la matriz se obtiene que los valores de b_1 b_2 y b_3 son

$$b_1 = 3.02323; b_2 = 1.7566; b_3 = -16.0827$$

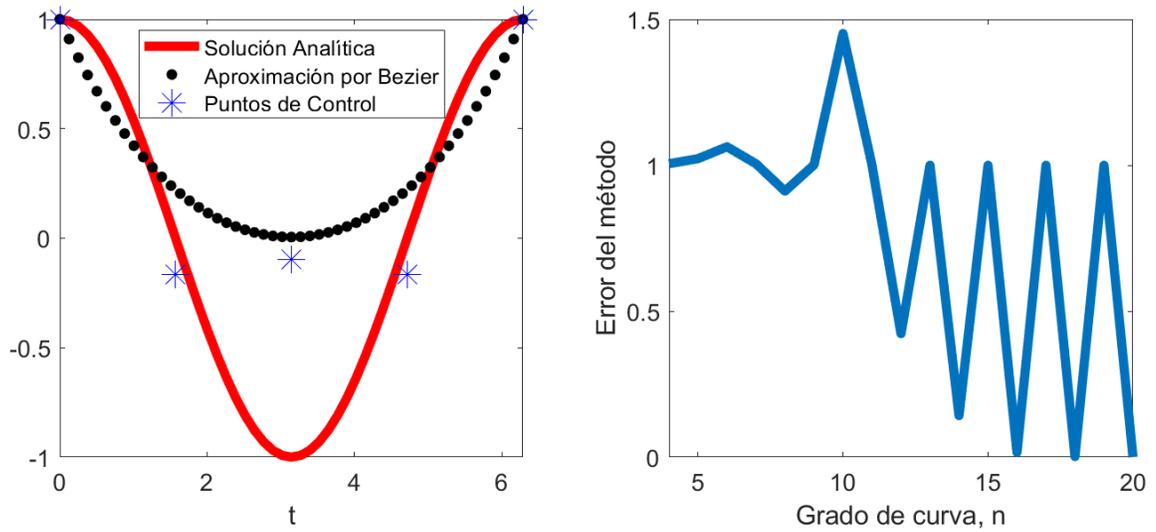


Figura 4. Resultados al Problema 7. Figura izquierda, solución con $n = 4$ puntos de control; Figura derecha, error en función del grado de la curva.

Nota 8: Se puede observar que la solución de este problema es diferente a la solución del problema 5 aun cuando es la misma ecuación diferencial, sin embargo, se puede comprobar que esta segunda solución aproxima de mejor manera a la solución analítica. Esto se debe a que al utilizar la aproximación matricial se está utilizando de manera implícita la pseudo inversa de una matriz, asegurando que el error siempre sea mínimo en el sentido de mínimos cuadrados. Esto no se puede asegurar con la manera en que se abordó el problema en el capítulo anterior.

ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

5.1. Aproximación de soluciones de sistemas SIR

Se mostrará ahora que nuestro modelo es lo suficientemente potente para resolver sistemas del tipo SIR que es un tipo de modelo epidemiológico que se define a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI \quad (1) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \quad (2) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (3) \end{array} \right.$$

donde

S = Número de individuos suseptibles

I = Número de individuos infectados

R = Número de individuos recuperados

$N = S + I + R$ = Población total

β = tasa de transmisión

y

γ = tasa de recuperación

Obsérvese que en la ecuación (3) R' solamente depende de I por lo que se puede obtener cada uno de los puntos de control de R una vez que se haya encontrado los valores de los puntos de control de I . Por esta razón el estudio se centrará en las ecuaciones (1) y (2) del sistema

$$\text{Sean } S = \sum_{i=0}^n s_i B_i^n, \quad I = \sum_{j=0}^m I_j B_j^m \quad \text{y} \quad R = \sum_{k=0}^p r_k B_k^p$$

Buscando una solución aproximada mediante curvas de Bézier y sustituyendo por las curvas y sus derivadas en las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)s_{i+1} + (2i-n)s_i - is_{i-1}] B_i^n = \frac{-\beta}{N} \left[\sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right) B_i^{n+m} \right]$$

Y

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)I_{i+1} + (2i-n)I_i - iI_{i-1}] B_i^n &= \frac{\beta}{N} \left[\sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right) B_i^{n+m} \right] \\ &- \gamma \sum_{i=0}^n I_i B_i^n \end{aligned}$$

Elevando m veces de grado las curvas de Bézier correspondientes a la derivada se obtiene:

$$(1) \quad \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n+m} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)s_{j+1} + (2j-n)s_j - js_{j-1}] \right] B_i^{n+m} = \frac{-\beta}{N} \left[\sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right) B_i^{n+m} \right]$$

Y

$$(2) \quad \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{n+m} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] \right] B_i^{n+m} = \frac{\beta}{N} \left[\sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right) B_i^{n+m} \right] - \gamma \sum_{i=0}^{n+m} \left[\sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \right] B_i^{n+m}$$

Al despejar s_{i+1} de la ecuación (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)s_{j+1} + (2j-n)s_j - js_{j-1}] = \\
& = \frac{-\beta}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)s_{j+1} + (2j-n)s_j - js_{j-1}] \\
& \quad + \delta_{i,i}^{n,m} [(n-i)s_{i+1} + (2j-n)s_i - js_{i-1}] \\
& = \frac{-\beta(b-a)}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] [(n-i)s_{i+1} + (2j-n)s_i - js_{i-1}] \\
& = \frac{1}{\delta_{i,i}^{n,m}} * \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)s_{j+1} + (2j-n)s_j - js_{j-1}] \right\} \\
s_{i+1} & = \frac{\frac{1}{\delta_{i,i}^{n,m}} * \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)s_{j+1} + (2j-n)s_j - js_{j-1}] \right\}}{(n-i)} \\
& \quad + \frac{(n-2i)s_i + is_{i-1}}{(n-i)}
\end{aligned}$$

De la misma forma despejando I_{i+1} de la ecuación (2) se llega a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] & = \frac{\beta}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \gamma \sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \\
\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] & = (b-a) \left(\frac{\beta}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \gamma \sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \right) \\
\sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] & + \delta_{i,i}^{n,m} [(n-i)I_{i+1} + (2i-n)I_i - iI_{i-1}] \\
& = (b-a) \left(\frac{\beta}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \gamma \sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(n-i)I_{i+1} + (2i-n)I_i - iI_{i-1}] \\
&= \frac{1}{\delta_{i,i}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left(\frac{\beta}{N} \left[\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right] - \gamma \sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] \right\} \\
I_{i+1} &= \frac{\frac{1}{\delta_{i,i}^{n,m}} \left\{ [b-a] \left[\frac{\beta}{N} \left(\sum_{j=0}^{\min(i,n,m)} \delta_{i,j}^{n,m} I_j S_{i-j} \right) - \gamma \sum_{j=0}^i I_j \delta_{i,j}^{n,m} \right] - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,m} [(n-j)I_{j+1} + (2j-n)I_j - jI_{j-1}] \right\}}{(n-i)} \\
&\quad + \frac{(n-2i)I_i + iI_{i-1}}{(n-i)}
\end{aligned}$$

A modo de explicar de forma más clara las fórmulas se expondrá como quedan éstas para la búsqueda de los primeros cuatro puntos de control en un problema de condiciones iniciales. Se muestra primero como quedan todos los puntos de control de S e I y después como obtener los puntos de control de R.

De la primera ecuación considerando $i = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\frac{1}{\delta_{0,0}^{n,m}} * \left[\frac{-\beta(b-a)}{N} \delta_{0,0}^{n,m} I_0 S_0 \right] + nS_0}{n} \\
S_1 &= \frac{\left[\frac{-\beta(b-a)}{N} I_0 S_0 \right]}{n} + S_0 \\
S_1 &= \frac{-\beta(b-a)}{Nn} I_0 S_0 + S_0
\end{aligned}$$

De la misma forma, para $i=0$ de la ecuación 2 se obtiene:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\frac{1}{\delta_{0,0}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left[\frac{\beta}{N} \delta_{0,0}^{n,m} I_0 S_0 - \gamma I_0 \delta_{0,0}^{n,m} \right] \right\} + nI_0}{n} \\
I_1 &= \frac{(b-a) \left[\frac{\beta}{N} I_0 S_0 - \gamma I_0 \right] + nI_0}{n}
\end{aligned}$$

$$I_1 = I_0 + \frac{(b-a) \left[\frac{\beta}{N} I_0 S_0 - \gamma I_0 \right]}{n}$$

Para $i = 1$ se tiene para la ecuación 1:

$$S_2 = \frac{\frac{1}{\delta_{1,1}^{n,m}} * \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} [\delta_{1,0}^{n,m} I_0 S_1 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1 S_0] - \delta_{1,0}^{n,m} [nS_1 - nS_0] \right\} + (n-2)S_1 + S_0}{n-1}$$

Para $i = 1$ en la ecuación 2 se tiene:

$$I_2 = \frac{\frac{1}{\delta_{1,1}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left[\frac{\beta}{N} (\delta_{1,0}^{n,m} I_0 S_1 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1 S_0) - \gamma (\delta_{1,0}^{n,m} I_0 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1) \right] - \delta_{1,0}^{n,m} (nI_1 - nI_0) \right\}}{(n-1)} + \frac{(n-2)I_1 + I_0}{(n-1)}$$

Para $i = 2$ de la ecuación 1 se obtiene:

$$S_3 = \frac{\frac{1}{\delta_{2,2}^{n,m}} \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} [\delta_{2,0}^{n,m} I_0 S_2 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 S_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2 S_0] - \delta_{2,0}^{n,m} [nS_1 - nS_0] - \delta_{2,1}^{n,m} [(n-1)S_2 + (2-n)S_1 - S_0] \right\}}{(n-2)} + \frac{(n-4)S_2 + 2S_1}{(n-2)}$$

Para $i = 2$ de la ecuación 2 se obtiene:

$$I_3 = \frac{\frac{1}{\delta_{2,2}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left[\frac{\beta}{N} (\delta_{2,0}^{n,m} I_0 S_2 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 S_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2 S_0) - \gamma (\delta_{2,0}^{n,m} I_0 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2) \right] - \delta_{2,0}^{n,m} [nI_1 - nI_0] - \delta_{2,1}^{n,m} [(n-1)I_2 + (2-n)I_1 - I_0] \right\}}{(n-2)} + \frac{(n-4)I_2 + 2I_1}{(n-2)}$$

Para obtener los valores de cada r_i utilizamos la ecuación 3:

$$R' = \gamma I$$

$$\frac{1}{(b-a)} \sum_{i=0}^n [(n-i)r_{i+1} + (2i-n)r_i - ir_{i-1}] B_i^n = \gamma I_i B_i^n$$

Así para $i=0, 1$ y 2 se tiene respectivamente

i=0

$$\frac{1}{(b-a)} [nr_1 - nr_0] = \gamma I_0$$

$$r_1 = \frac{(b-a)\gamma I_0 + nr_0}{n}$$

i=1

$$\frac{1}{(b-a)} [(n-1)r_2 + (2-n)r_1 - r_0] = \gamma I_1$$

$$(n-1)r_2 + (2-n)r_1 - r_0 = (b-a)\gamma I_1$$

$$r_2 = \frac{(b-a)\gamma I_1 + (n-2)r_1 + r_0}{(n-1)}$$

I=2

$$\frac{1}{(b-a)} [(n-2)r_3 + (4-n)r_2 - 2r_1] = \gamma I_2$$

$$(n-2)r_3 + (4-n)r_2 - 2r_1 = (b-a)\gamma I_2$$

$$r_3 = \frac{(b-a)\gamma I_2 + (n-4)r_2 + 2r_1}{(n-2)}$$

Caso práctico

Encontrar las curvas S, I y R que describen el comportamiento del sistema SIR para los valores $S(0) = 127,792,286$; $I(0) = 1$; $R(0) = 0$; $\beta = 4.855$ y $\gamma = 4.8$ considerando $n=3$ en un intervalo de tiempo de 2 años.

Se tiene que

$$S_1 = \frac{-\beta(b-a)}{Nn} I_0 S_0 + S_0$$

$$S_1 = \frac{-4.855(730)}{127792287 * (3)} 1 * 127792286 + 127792286$$

$$S_1 = 127,791,104.62$$

e

$$I_1 = I_0 + \frac{(b-a) \left[\frac{\beta}{N} I_0 S_0 - \gamma I_0 \right]}{n}$$

$$I_1 = 1 + \frac{(730) \left[\frac{4.855}{127,792,287} * 1 * 127,792,287 - 4.8 * 1 \right]}{3}$$

$$I_1 = 1 + \frac{(730) \left[\frac{4.855}{127,792,287} * 1 * 127,792,287 - 4.8 * 1 \right]}{3}$$

$$I_1 = 14.38$$

Con los valores de S_1 e I_1 se puede obtener los valores de S_2 e I_2 que corresponden a

$$S_2 = \frac{\frac{1}{\delta_{1,1}^{n,m}} * \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} [\delta_{1,0}^{n,m} I_0 S_1 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1 S_0] - \delta_{1,0}^{n,m} [nS_1 - nS_0] \right\} + (n-2)S_1 + S_0}{n-1}$$

$$S_2 = \frac{\frac{-\beta(b-a)}{N} [I_0 S_1 + I_1 S_0] - [nS_1 - nS_0] + (n-2)S_1 + S_0}{n-1}$$

S_2

$$= \frac{-4.855(730)}{127,792,287} [127,791,104.62 + 14.38 * 127,792,286] - [3 * 127,791,104.62 - 3 * 127,792,286]$$

$$+ \frac{+127,791,104.62 + 127,792,286}{2}$$

$$S_2 = 127,766,207$$

e

I_2

$$= \frac{\frac{1}{\delta_{1,1}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left[\frac{\beta}{N} (\delta_{1,0}^{n,m} I_0 S_1 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1 S_0) - \gamma (\delta_{1,0}^{n,m} I_0 + \delta_{1,1}^{n,m} I_1) \right] - \delta_{1,0}^{n,m} (nI_1 - nI_0) \right\} + (n-2)I_1 + I_0}{(n-1)}$$

$$I_2 = \frac{(b-a) \left[\frac{\beta}{N} (I_0 S_1 + I_1 S_0) - \gamma (I_0 + I_1) \right] - (nI_1 - nI_0) + (n-2)I_1 + I_0}{(n-1)}$$

$$I_2 = \frac{(730) \left[\frac{4.855}{127,792,287} (127,791,104.62 + 14.38 * 127,792,286) - 4.8(1 + 14.38) \right]}{2} - \frac{(3 * 14.38 - 3 * 1) + 14.38 + 1}{2}$$

$$I_2 = 296.42$$

Por último los valores de S_3 e I_3 están dados por

$$S_3 = \frac{\frac{1}{\delta_{2,2}^{n,m}} \left\{ \frac{-\beta(b-a)}{N} [\delta_{2,0}^{n,m} I_0 S_2 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 S_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2 S_0] - \delta_{2,0}^{n,m} [n S_1 - n S_0] - \delta_{2,1}^{n,m} [(n-1) S_2 + (2-n) S_1 - S_0] \right\}}{(n-2)} + \frac{+(n-4) S_2 + 2 S_1}{(n-2)}$$

$$S_3 = 127,773,980$$

e

$$I_3 = \frac{\frac{1}{\delta_{2,2}^{n,m}} \left\{ (b-a) \left[\frac{\beta}{N} (\delta_{2,0}^{n,m} I_0 S_2 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 S_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2 S_0) - \gamma (\delta_{2,0}^{n,m} I_0 + \delta_{2,1}^{n,m} I_1 + \delta_{2,2}^{n,m} I_2) \right] - \delta_{2,0}^{n,m} [n I_1 - n I_0] - \delta_{2,1}^{n,m} [(n-1) I_2 + (2-n) I_1 - I_0] \right\}}{(n-2)} + \frac{(n-4) I_2 + 2 I_1}{(n-2)}$$

$$I_3 = 15,188.6$$

De la misma forma los valores de r_1 , r_2 y r_3 están dados por

$$r_1 = \frac{(b-a)\gamma I_0 + n r_0}{n}$$

$$r_1 = 1,168$$

$$r_2 = \frac{(b-a)\gamma I_1 + (n-2)r_1 + r_0}{(n-1)}$$

$$r_2 = 25,783.58$$

Y

$$r_3 = \frac{(b-a)\gamma I_2 + (n-4)r_2 + 2r_1}{(n-2)}$$

$$r_3 = 1,015,209.19$$

5.2. Aproximación de soluciones para ecuaciones de tipo Riccati

Una ecuación de Riccati es una ecuación de la forma

$$y'(x) + p(x)y(x) + q(x)y^2(x) = f(x)$$

Donde $p(x), q(x)$ y $f(x)$ son funciones que dependen de x . En este estudio se considerará el caso cuando p, q y f son constantes. Esto es, cuando la ecuación de Riccati tiene la forma

$$y'(x) + py(x) + qy^2(x) = f.$$

Al proponer una curva de Bézier $y(x)$ como solución aproximada de la ecuación de Riccati se sabe que ésta está descrita por

$$y = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n$$

Por lo que se tiene entonces que

$$y^2 = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i B_i^{2n} \quad \text{con} \quad \alpha_i = \frac{\sum_{j=0}^{\min(i,n)} b_j b_{i-j} \binom{n}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{2n}{i}} \quad \text{donde } b_{i-j} = 0 \text{ para } i-j > n$$

De la misma forma tenemos que dicha curva y elevada de grado n veces queda expresada en la forma

$$y = \sum_{i=0}^{2n} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j \right] B_i^{2n}$$

Con $\delta_{i,j}^{n,n} = \frac{\binom{n}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{2n}{i}}$ donde $\binom{n}{i-j} = 0$ y $\binom{n}{j} = 0$. Para $i-j > n$ y $j > n$

Y que y' elevada de grado está descrita por

$$y' = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] B_i^n$$

La cual elevada n veces más de grado queda en la forma

$$y' = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{2n} \left\{ \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}] \right\} B_i^{2n}$$

Por lo que la ecuación de Riccati expresada en términos de la aproximación de Bézier queda en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^{2n} \left\{ \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}] \right\} B_i^{2n} + p * \sum_{i=0}^{2n} \left[\sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j \right] B_i^{2n} \\ + q * \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i B_i^{2n} = f \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{b-a} \delta_{0,0}^{n,n} [nb_1 - nb_0] + p \delta_{0,0}^{n,n} b_0 + qb_0^2 = f \quad \text{Para } i = 0$$

Y

$$\frac{1}{b-a} \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}] + p \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j + q\alpha_i = 0 \quad \text{Para } i > 0$$

Despejando b_1 de la primera ecuación se obtiene

$$b_1 = b_0 + \frac{(b-a)}{n\delta_{0,0}^{n,n}} [f - p\delta_{0,0}^{n,n} b_0 - qb_0^2]$$

$$\text{Donde se tiene que } \delta_{0,0}^{n,n} = \frac{\binom{n}{0}\binom{n}{0}}{\binom{2n}{0}} = 1$$

Por lo que

$$b_1 = b_0 + \frac{(b-a)}{n} [f - pb_0 - qb_0^2]$$

De la misma forma el despeje de b_{i+1} de la segunda ecuación queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{b-a} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}] \right. \\ \left. + \delta_{i,i}^{n,n} [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] \right\} + p \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j + q\alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}] + \delta_{i,i}^{n,n} [(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] \\ = (a-b) \left(p \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j + q\alpha_i \right)$$

$$[(n-i)b_{i+1} + (2i-n)b_i - ib_{i-1}] \\ = \frac{(a-b)(p \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j + q\alpha_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}]}{\delta_{i,i}^{n,n}}$$

$$\mathbf{b}_{i+1} \\ = \frac{(a-b)(p \sum_{j=0}^i \delta_{i,j}^{n,n} b_j + q\alpha_i) - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_{i,j}^{n,n} [(n-j)b_{j+1} + (2j-n)b_j - jb_{j-1}]}{\delta_{i,i}^{n,n}} + (n-2i)b_i + ib_{i-1} \\ = \frac{\hspace{15em}}{(n-i)}$$

Problema 8. Encuentre mediante curvas de Bézier una solución aproximada de la ecuación utilizando 4 puntos de control en el intervalo $[0, 10]$

$$\begin{cases} y' = -y + y^2 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución.

Se tiene que en la ecuación $p = 1$, $q = -1$, $f = 0$ y $b_0 = \frac{1}{2}$.

Resolviendo para $n=3$ se tiene que

Para $i = 0$

$$b_1 = b_0 + \frac{(b-a)}{n} [f - pb_0 - qb_0^2]$$

$$b_1 = \frac{1}{2} + \frac{10}{3} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right]$$

$$b_1 = -\frac{1}{3}$$

Para $i = 1$

$$\begin{aligned} & b_2 \\ & \frac{(-10)(\sum_{j=0}^1 \delta_{1,j}^{3,3} b_j + q\alpha_1) - \sum_{j=0}^0 \delta_{1,j}^{3,3} [(3-j)b_{j+1} + (2j-3)b_j - jb_{j-1}]}{\delta_{1,1}^{3,3}} + (3-2)b_1 + b_0 \\ = & \frac{\hspace{10em}}{2} \\ & b_2 = \frac{(-10)(b_0 + b_1 - 2b_0b_1) + 3b_0 - 3b_1 + b_1 + b_0}{2} \\ & b_2 = \frac{(-10)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2} \\ & b_2 = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Para $i = 2$

$$\begin{aligned} & b_3 \\ & \frac{(-10)(\sum_{j=0}^2 \delta_{2,j}^{3,3} b_j - \alpha_2) - \sum_{j=0}^1 \delta_{2,j}^{3,3} [(3-j)b_{j+1} + (2j-3)b_j - jb_{j-1}]}{\delta_{2,2}^{3,3}} + (3-4)b_2 + 2b_1 \\ = & \frac{\hspace{10em}}{(3-2)} \\ & b_3 \\ & \frac{(-10)\left[\frac{3}{15}b_0 + \frac{9}{15}b_1 + \frac{3}{15}b_2 - \left(\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}b_0b_2 + \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}b_1^2 + \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}}b_2b_0\right)\right] - \frac{3}{15}[3b_1 - 3b_0] - \frac{9}{15}[2b_2 - b_1 - b_0]}{\frac{3}{15}} \\ & - b_2 + 2b_1 \\ & b_3 = (-10)[b_0 + 3b_1 + b_2 - (2b_0b_2 + 3b_1^2)] - [3b_1 - 3b_0] - 3[2b_2 - b_1 - b_0] - b_2 \\ & \quad + 2b_1 \end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{113}{6}$$

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha conjuntado teoría algebraica, teoremas importantes de cálculo, ecuaciones diferenciales y análisis matemático y combinarlo con herramientas computacionales para crear un nuevo método de solución semi-analítico para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este método resulta ser además de elegante, muy robusto y de rápida convergencia, se presenta como un puente entre las soluciones de tipo analítico y numérico de ecuaciones diferenciales.

Se han abordado muy variados tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan todos los tipos que se presentan en un curso clásico de ecuaciones diferenciales sin tener mayor problema en presentar una solución aproximada que la velocidad de convergencia.

Se han considerado además dos formas distintas de abordar el método, por iteraciones y mediante una equivalencia matricial mostrando que el método de curvas de Bézier puede ser implementado de diferentes maneras y continuar presentando una gran robustez.

BIBLIOGRAFÍA

- Chakraverty, S. (Ed.). (2019). *Advanced numerical and semi analytical methods for differential equations*. John Wiley & Sons, Inc.
- Chapra, S. C., Canale, R. P., García Ruiz, R. S., Ibarra Mercado, V. H., Muñoz Díaz, E., & Evangelista Benites, G. (2015). *Métodos numéricos: Para ingenieros*.
- Fitter, H. N. (2014). A Review on Approaches for Handling Bézier Curves in CAD for Manufacturing. *Procedia Engineering*, 12.
- Ghomanjani, F., & Khorram, E. (2017). Approximate solution for quadratic Riccati differential equation. *Journal of Taibah University for Science*, 11(2), 246–250. <https://doi.org/10.1016/j.jtusci.2015.04.001>
- He, J.-H. (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique q. *Appl. Math. Comput.*, 7.
- Maleknejad, K., Hashemizadeh, E., & Ezzati, R. (2011). A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein's approximation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(2), 647–655. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.006>
- Marco, A., & Martínez, J.-J. (2010). Polynomial least squares fitting in the Bernstein basis. *Linear Algebra and Its Applications*, 433(7), 1254–1264. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.06.031>

- Monterde, J., & Ugail, H. (2004). On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 21(7), 697–715. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2004.07.003>
- Nazir, T., Abbas, M., & Kashif Iqbal, M. (2019). A new quintic B-spline approximation for numerical treatment of Boussinesq equation. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 20(01), 30–42. <https://doi.org/10.22436/jmcs.020.01.04>
- Pinchover, Y., & Rubinstein, J. (2005). *Introduction to partial differential equations*. Cambridge University Press.
- Salsa, S. (2016). *Partial differential equations in action: From modelling to theory* (Third edition). Springer.
- Shawagfeh, N., & Kaya, D. (2004). Comparing numerical methods for the solutions of systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 17(3), 323–328. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(04\)90070-5](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(04)90070-5)
- Simmons, G. F. (1991). *Differential equations, with applications and historical notes* (2nd ed). McGraw-Hill.
- Venkataraman, P., & Michopoulos, J. G. (2007). Explicit Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations Using Bézier Functions. *Volume 2: 27th Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B*, 69–80. <https://doi.org/10.1115/DETC2007-35439>
- Wu, J. (2012). Least squares methods for solving partial differential equations by using Bézier control points. *Applied Mathematics and Computation*, 219(8), 3655–3663. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.09.063>

Zheng, J., Sederberg, T. W., & Johnson, R. W. (2004). Least squares methods for solving differential equations using Bézier control points. *Applied Numerical Mathematics*, 48(2), 237–252. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2002.01.001>