

Control no lineal robusto para un sistema de  
rotor horizontal y cojinetes magnéticos activos

Ing. Sergio Miguel  
Delfín Prieto

2014



Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería

Control no lineal robusto para un sistema de rotor  
horizontal y cojinetes magnéticos activos

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en

Instrumentación y Control Automático

Presenta

Ing. Sergio Miguel Delfín Prieto

Dirigido por:

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa

C.U. Querétaro, Querétaro. Junio 2014.



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias en Instrumentación y Control Automático

**Control no lineal robusto para un sistema de rotor horizontal y cojinetes magnéticos activos**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias en Instrumentación y Control Automático

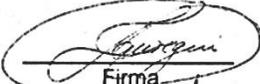
**Presenta:**

Ing. Sergio Miguel Delfín Prieto

**Dirigido por:**

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa

Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa  
Presidente



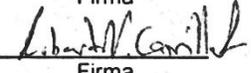
Firma

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán  
Secretario



Firma

Dr. Roberto Valentín Serrano Carrillo  
Vocal



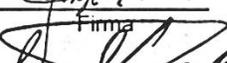
Firma

Dr. Gerardo Silva Navarro  
Suplente

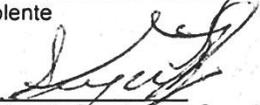


Firma

Dr. Jorge Alberto Orrante Sakanassi  
Suplente



Firma

  
Dr. Aurelio Domínguez González  
Director de la Facultad



Firma  
Dr. Imreó Torres Pacheco  
Director de Investigación y  
Posgrado

Centro Universitario  
Santiago de Querétaro, Qro.  
Junio de 2014  
México

## Resumen.

En esta obra se ostenta el estudio de estabilidad de un rotor horizontal sometido a velocidades de rotación bajo el sustento de cojinetes magnéticos activos, mostrando las ventajas de estos soportes frente a sus homólogos cojinetes de fricción e hidrodinámicos, como por ejemplo: el movimiento independiente del contacto mecánico, eliminación de la fricción y el desgaste de las partes involucradas, la exclusión de un programa de mantenimiento, etcétera, además, se enfatiza en la necesidad de la aplicación de un control retroalimentado para lograr la sustentabilidad de la flecha incluso ante vibraciones no deseadas que inciten a la inestabilidad del sistema.

**Palabras claves:** Cojinete magnético activo, control robusto, dinámica del rotor.

## Summary.

In this work holds the stability study of a horizontal rotor shaft under rotational velocities supported by active magnetic bearing, showing the advantage of this bears compared with their counterparts by friction and hydrodynamic, for example: the frictionless motion of the shaft, the avoidance of the wear, the debarment of maintenance schedule, additionally, it emphasizes on the necessity of usage of feedback control to achieve the sustainability of the shaft, even in the face of undesired vibration that incite the unstability of system.

**Keywords:** Active magnetic bearing, sliding mode control, rotor dynamic, magnetic force.

## Agradecimientos.

*Si yo hablase lenguas humanas y angélicas, y no tengo amor, vengo a ser como un metal que resuena, o címbalo que retiñe.*

*Y si tuviese profecía, y entendiese todos los misterios y toda ciencia, y si tuviese toda fe, de tal manera que trasladase los montes, y no tengo amor, nada soy. 1 Co 13.1.*

*A Dios por brindarme la perseverancia y a mi familia por su invaluable apoyo.*

Agradezco de forma especial a mi asesor el *Dr. Juan Carlos Jáuregui Correa* por la dirección de este trabajo y por sus sabios consejos para la realización y finalización de esta obra.

También agradezco con orgullo a mis amigos: *Gil, Yanet, Marce, Rafa, Moi, Forty, Manuel, Alberto, Chuchin, Waldo, Chavita, Chava* por sus apreciables consejos, por su compañía, por hacer de la maestría y el laboratorio de Mecatrónica una estancia amena para trabajar.

# Índice de contenido.

RESUMEN. ....	III
SUMMARY. ....	IV
AGRADECIMIENTOS. ....	V
ÍNDICE DE CONTENIDO. ....	VI
ÍNDICE DE TABLAS. ....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS. ....	VIII
<b>I. INTRODUCCIÓN. ....</b>	<b>1</b>
I.1. JUSTIFICACIÓN. ....	2
I.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. ....	4
I.3. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS. ....	5
I.3.1. Hipótesis. ....	5
I.3.2. Objetivo general. ....	6
I.3.3. Objetivos particulares. ....	6
<b>II. REVISIÓN DE LITERATURA. ....</b>	<b>7</b>
<b>III. METODOLOGÍA. ....</b>	<b>13</b>
III.1. MARCO TEÓRICO. ....	13
III.1.1. Cojinetes magnéticos activos. ....	13
III.1.2. Modelado matemático del cojinete magnético activo simple. ....	21
III.1.3. Modelado matemático del rotor Jeffcott de dos grados de libertad. ....	30
III.1.4. Modelado completo del sistema de cojinete magnético activo. ....	34
III.1.5. Control por modos deslizantes. ....	41
III.2. DESARROLLO METODOLÓGICO. ....	53
III.2.1. Arquitectura del cojinete magnético. ....	53
III.2.2. Diseño electrónico. ....	55
III.2.3. Sensores. ....	56
III.2.4. Microcontrolador. ....	58
III.2.5. Esquema de control. ....	59
III.2.6. Prototipo de cojinete magnético activo. ....	60
<b>IV. RESULTADOS Y DISCUSIONES. ....</b>	<b>61</b>
IV.1. CONCLUSIONES. ....	71
<b>BIBLIOGRAFÍA. ....</b>	<b>73</b>
<b>ANEXO 1. ....</b>	<b>76</b>
<b>ANEXO 2. ....</b>	<b>81</b>

## Índice de tablas.

TABLA 1. DIFERENTES TÓPICOS DE CONTROL APLICADOS A LOS LEVITADORES MAGNÉTICOS.....	8
TABLA 2. PATENTES RELACIONADAS CON LOS SISTEMAS DE COJINETES MAGNÉTICOS ACTIVOS. ....	11
TABLA 3. TIPOS DE FUERZAS PARA LA LEVITACIÓN MAGNÉTICA. BLEULER (1992) .....	16
TABLA 4. PARÁMETROS DEL SISTEMAS CMA. ....	61

## Índice de figuras.

FIGURA 1. SÍMBOLO DE UN COJINETE MAGNÉTICO ACTIVO ESTABLECIDO EN LA ISO 14839-1. ....	14
FIGURA 2. ESQUEMA BÁSICO DE UN COJINETE MAGNÉTICO ACTIVO.....	15
FIGURA 3. ESQUEMA DE UN LAZO DE CONTROL DEFINIDO POR EL ESTANDAR ISO 14839-1. ....	15
FIGURA 4. CLASIFICACIÓN DE LOS COJINETES MAGNÉTICOS PROPUESTO POR BLEULER (1992), LOS CUADROS SOMBRADOS SON ESTABLES CON UN CONTROL ACTIVO, EL RESTO DE LOS TIPOS DE LEVITACIÓN SON PASIVOS ESTABLES SIN UN CONTROL. ....	20
FIGURA 5. BOSQUEJO DE UN LEVITADOR MAGNÉTICO SIMPLE. ....	22
FIGURA 6. NOMENCLATURA DEL LEVITADOR MAGNÉTICO. ....	23
FIGURA 7. CIRCUITO MAGNÉTICO EQUIVALENTE. ....	24
FIGURA 8. RELACIÓN ENTRE EL ESLABONAMIENTO DEL FLUJO Y LA CORRIENTE MAGNÉTICA. ....	26
FIGURA 9. RELACIÓN LINEAL ENTRE EL ESLABONAMIENTO DEL FLUJO Y CORRIENTE ELÉCTRICA. ....	28
FIGURA 10. ROTORES JEFFCOTT PERFECTAMENTE BALANCEADOS. A) EL ROTOR CONSISTE EN UNA MASA PUNTUAL SOBRE UN ROTOR FLEXIBLE Y COJINETES RÍGIDOS. B) LA FLECHA ES COMPLETAMENTE RÍGIDA MIENTRAS QUE LOS COJINETES SON FLEXIBLES. C) AMBOS LA FLECHA Y LOS COJINETES SON CONSIDERADOS CUERPOS DEFORMABLES. GENTA (2005).....	31
FIGURA 11. ROTOR JEFFCOTT DESBALANCEADO. A) ABSTRACCIÓN DEL SISTEMA. B) UBICACIÓN EN EL PLANO XY. GENTA (2005). ....	32
FIGURA 12. SECCIÓN TRANSVERSAL DEL COJINE MAGNÉTICO ACTIVO. ....	35
FIGURA 13. INTERCONEXIÓN DE ESTRUCTURAS EN UNA PLANTA CON ENTRADA Y SALIDA. ....	43
FIGURA 14. LAZO CERRADO CON RETROALIMENTACIÓN DISCONTINUA (PISANO, 2000). ....	44
FIGURA 15. RESPUESTA DINÁMICA DEL LAZO CERRADO DISCONTINUO. ....	45
FIGURA 16. LAZO CERRADO DISCONTINUO CON PERTURBACIONES ACOPLADAS (PISANO, 2000). ....	45
FIGURA 17. A) COMPORTAMIENTO DEL LAZO CERRADO DISCONTINUO CON PERTURBACIONES ACOPLADAS. B) AMPLIACIÓN DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO $x=0$ . ....	46
FIGURA 18. PROCESO DE DISEÑO DE UN CMA. ....	53
FIGURA 19. ARQUITECTURA DEL CMA DE OCHO POLOS. A) LÁMINA DE ACERO AL SILICIO. B) NÚCLEO COMPUESTO POR UN CONJUNTO DE LÁMINAS DE ACERO AL SILICIO. C) VISTA FRONTAL DEL CMA. D) VISTA ISOMÉTRICA DEL CMA. ....	54
FIGURA 20. CIRCUITO BÁSICO PARA LA CONMUTACIÓN DE LA BOBINA CON EL VOLTAJE DE ALIMENTACIÓN.....	55
FIGURA 21. CIRCUITO ELECTRÓNICO DE POTENCIA PARA CMA. ....	55
FIGURA 22. CIRCUITO ELECTRÓNICO PARA EL SENSOR DE CORRIENTE. A) VISTA SUPERIOR. B) VISTA INFERIOR. ....	56
FIGURA 23. PCB-COIL PARA EL CIRCUITO TANQUE. ....	57
FIGURA 24. CONEXIÓN DE LAS SEÑALES DE LOS SENSORES AL MICROCONTROLADOR. ....	58
FIGURA 25. VISTAS ISOMÉTRICAS DEL PROTOTIPO DE ROTOR HORIZONTAL. ....	60
FIGURA 26. TRAYECTORIA DE LA POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL CENTRO DEL ROTOR EN LA DIRECCIÓN VERTICAL. A) POSICIÓN Y ERROR DE POSICIÓN. B) VELOCIDAD DEL ROTOR .....	63
FIGURA 27. TRAYECTORIA DE LA CORRIENTE Y SEÑAL DE CONTROL PARA EL SISTEMA EN LAS COORDENADAS DEL ERROR. ....	63
FIGURA 28. VOLTAJE APLICADO EN LAS TERMINALES DEL ELECTROIMÁN SUPERIOR Y CORRIENTE ELÉCTRICA. ....	64
FIGURA 29. VOLTAJE APLICADO EN LAS TERMINALES DEL ELECTROIMÁN INFERIOR Y CORRIENTE ELÉCTRICA. ....	64
FIGURA 30. SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO EN TÉRMINOS DE LOS ESTADOS DEL ERROR. ....	65
FIGURA 31. TRAYECTORIA DEL CENTRO DEL ROTOR BAJO EL DOMINIO DEL CONTROL EN MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN. ....	65
FIGURA 32. TRAYECTORIA DE LA POSICIÓN Y VELOCIDAD DEL CENTRO DEL ROTOR EN LA DIRECCIÓN VERTICAL. A) POSICIÓN Y ERROR DE POSICIÓN. B) VELOCIDAD DEL ROTOR .....	67
FIGURA 33. TRAYECTORIA DE LA CORRIENTE Y SEÑAL DE CONTROL PARA EL SISTEMA EN LAS COORDENADAS DEL ERROR. ....	67

FIGURA 34. AMPLIACIÓN DE LAS TRAYECTORIAS DEL CONTROL Y LA CORRIENTE DURANTE EL PRIMER SEGUNDO DEL ALGORITMO ST. .....	68
FIGURA 35. VOLTAJE APLICADO EN LAS TERMINALES DEL ELECTROIMÁN SUPERIOR Y CORRIENTE ELÉCTRICA. ....	68
FIGURA 36. VOLTAJE APLICADO EN LAS TERMINALES DEL ELECTROIMÁN INFERIOR Y CORRIENTE ELÉCTRICA. ....	69
FIGURA 37. SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO EN TÉRMINOS DE LOS ESTADOS DEL ERROR. ....	69
FIGURA 38. TRAYECTORIA DEL CENTRO DEL ROTOR BAJO EL DOMINIO DEL CONTROL EN MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN. .....	70
FIGURA 39. DIAGRAMA SIMULINK. DINÁMICA DEL ELECTROIMÁN EN DIRECCIÓN X. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN.....	76
FIGURA 40. . DIAGRAMA SIMULINK. DINÁMICA DEL ELECTROIMÁN EN DIRECCIÓN Y. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE PRIMER ORDEN.....	79
FIGURA 41. <i>DIAGRAMA SIMULINK. DINÁMICA DEL ELECTROIMÁN EN DIRECCIÓN X. ALGORITMO SUPER-TWISTING.</i> .....	82
FIGURA 42. <i>DIAGRAMA SIMULINK. DINÁMICA DEL ELECTROIMÁN EN DIRECCIÓN Y. ALGORITMO SUPER-TWISTING.</i> .....	85

# Capítulo 1:

---

## *I. Introducción.*

Un mundo sin las máquinas en la actualidad sería un mundo sin comodidad, por decirlo de una manera burda y peyorativa. La necesidad de mantener una cadena de suministros de manera continua requiere de métodos avanzados de fabricación. Enseres desde lo más básicos como son los alimenticios y los de consumo personal, hasta los productos más complejos como son las partes automotrices, aeronáuticas y de electrónica requieren de sofisticados procesos de manufactura, además, aunado al gran crecimiento de la población mundial, y por lo tanto del consumismo, es cada vez más menesteroso tener un flujo de energía constante que permita a las máquinas el correcto funcionamiento y la fabricación de todos y cada uno de los productos que se compran-venden a diario, lo cual, por mencionarlo de una forma contundente, forman una cadena y un ciclo ininterrumpido de consumismo, poniendo a los mercados en una situación crítica a la hora de faltar algún eslabón de la cadena.

La gran mayoría de la energía requerida para estos fines es derivada de los recursos del tipo fósil, en donde los máximos exponentes son el carbón, el petróleo y el gas natural. La extracción del carbón es accesible en la superficie terrestre; con el petróleo y el gas natural se tienen tres opciones: pozos petrolíferos en la corteza terrestre, yacimientos en aguas someras o reservas en aguas profundas. Estas dos últimas requieren de tecnologías sofisticadas para la extracción de la materia prima. Es aquí donde la ciencia aplicada cobra un papel muy significativo, ya que dependerá de la forma en que se explote el recurso natural y de si lo mantiene de manera continua.

La principal máquina en desempeñar esta tarea es el turbocompresor. La principal función de un turbocompresor es de suministrar de forma continua gas natural a la superficie del mar, en donde será almacenado por grandes buques

petrolíferos. Los componentes principalmente de esta máquina son: alabes, rotor, cojinetes, motor eléctrico, carcasa y base de fijación. Como componente principal y que define el desempeño del sistema son los cojinetes o soportes para el rotor. Estos cojinetes tienen tres presentaciones básicamente: de bolas, hidrodinámicos y magnéticos. Los dos primeros presentan la desventaja de que son sometidos constantemente a la fricción y por ende punitivamente se desgastan hasta llegar a la falla total, por lo tanto, requieren un programa de mantenimiento por parte de los operadores para garantizar el funcionamiento del aparato, en cambio los cojinetes magnéticos activos son ideales para operar en condiciones adversas ya que su principio de operación le permiten trabajar en cualquier ambiente, es decir, ofrece las ventajas de la eliminación completa de la fricción y también del desgaste, además, no requiere de un costo programa de mantenimiento para su operación y los rotores en sustentación pueden girar a altas velocidades angulares, es por eso que los cojinetes magnéticos activos son una solución atractiva para los ingenieros diseñadores de máquinas.

Las aplicaciones de los cojinetes magnéticos no sólo se limitan a los turbocompresores, también se centran en los procesos de maquinados, bombas turbo moleculares de vacío, aplicaciones en medicina como las bombas para el corazón, desarrollos de satélites de comunicaciones, en la producción de energía nuclear, absorción de vibraciones, por mencionar algunos (Schweitzer *et al*, 2009).

## **I.1. Justificación.**

Los beneficios de usar tecnología moderna de alta velocidad en lugar de usar maquinaria convencional son cada vez más evidentes. Mayor densidad de potencia y mejor eficiencia son ventajas que por lo regular se pretende, lo que conduce a máquinas más pequeñas y con menor consumo de energía. Motores eléctricos y generadores de energía móviles son aplicaciones en las que estas ventajas se convierten en obvias, y el número de aplicaciones es probable que

aumente en el futuro, por ejemplo, recientemente, el término máquinas de alta velocidad se puso en marcha refiriéndose a una investigación del MIT sobre pequeños turbogeneradores de 0.1 kW operando entre 1 y 2 millones de rpm, lo que conlleva a una atractiva aplicación de los cojinetes magnéticos.

Prescindir de las desventajas de los cojinetes metálicos o cerámicos abre paso a una diversidad de aplicaciones para los sistemas de levitación magnética, por ejemplo, en algunos entornos el nivel de ruido determina la elección de los cojinetes. Si el rotor no está perfectamente equilibrado, o tal vez se desgasta con el tiempo y se desequilibra, un rodamiento con una gran rigidez trasladará las vibraciones a la carcasa y por lo tanto deben evitarse, sí se trata de turbomaquinaria, el rotor es acoplado a cojinetes magnéticos, en el cual se aprovecha también para aplicar altas revoluciones por minuto y la absorción de vibraciones

En otros casos, la cuestión debe ser de libre lubricación, por ejemplo, en ambientes libres de hidrocarburos como la industria de procesamiento de fármacos o la industria del vacío. Operación libre de mantenimiento se requiere a menudo y algo que lubrica rodamientos no lo pueden ofrecer. Las chumaceras con rodamientos de bolas de cerámica, cojinetes o rodamientos de fluido de aire son a menudo utilizadas, todos con sus limitaciones especiales. No es sorprendente que una nueva clase de rodamientos, cojinetes magnéticos, se está convirtiendo en una opción de diseño en las máquinas de alta velocidad.

Los cojinetes magnéticos existen en varios tipos diferentes, todos ellos ofrecen una operación sin contacto, por lo tanto, todos ellos tienen una vida útil muy larga. Son de libre lubricación y por lo tanto libre de mantenimiento. Tienen baja rigidez y por consiguiente no se transmiten vibraciones a la carcasa. Son silenciosas y tienen muy bajas pérdidas, incluso a muy alta velocidad.

Cualquier máquina que no tolere la contaminación de los lubricantes o las partículas de desgaste supone un objetivo para los cojinetes magnéticos.

Por otro lado, los cojinetes magnéticos presentan desventajas considerables, por ejemplo, un costo inicial muy excesivo, inestabilidad en el sistema de control, la posibilidad de la falla en el sistema eléctrico. Sin embargo, hay aplicaciones donde se utilizan, esto es aprovechando al máximo los méritos de los cojinetes magnéticos.

## **I.2. Planteamiento del problema.**

Un ingeniero que diseña una máquina de alta velocidad tendrá que hacer frente a otros tipos de problemas de los que generalmente se tratan por los cursos de ingeniería. Cuestiones como la manera de reducir las pérdidas de resistencia del aire o cómo tratar los problemas relativos a la dinámica del rotor y control de la vibración que probablemente se produzca.

Un tipo especial de problema que muchos ingenieros enfrentan suele ser la más difícil, la elección de los cojinetes. A altas velocidades el tiempo de vida de un cojinete de bolas es muy limitado. Esto puede no importar para algunas aplicaciones como es el caso de un destornillador de mano que sólo opera unos pocos segundos, pero para otras aplicaciones la vida útil es crucial.

Los fenómenos que presentan los rotores a elevadas velocidades angulares y con tiempos de operación prolongados son: el desbalanceo del centro de masa del objeto rotatorio, en consecuencia produce vibraciones mecánicas que podrían desestabilizar el sistema, por otro lado, está también la elasticidad de la flecha, que a ciertas velocidades angulares presenta los modos de vibración, a causa de esto, la flecha tiende a flexionarse, y por lo tanto, deben de evitarse, también está el efecto giróscopo, que es una consecuencia de los momentos de inercia en diversos grados de libertad y esta característica inherente al sistema aporta considerables componentes de fuerzas a los soportes.

En cuanto a los problemas inherentes en los cojinetes magnéticos, se presentan por ejemplo: la saturación magnética en el núcleo ferromagnético, que a grandes aplicaciones de corriente en el inductor, el flujo magnético deja de incrementarse de manera que ya no elevaría la fuerza de atracción, también está la no linealidad en la relación fuerza-corriente, donde ésta última es un término cuadrático, por lo que la teoría de control clásica no aplica de forma directa, otro fenómeno presente en los materiales con propiedades magnéticas es la histéresis, donde la variación de la corriente en el embobinado da como resultado otra no linealidad que afectaría al desempeño del sistema, desde el punto de vista de la eficiencia energética, se observa que hay pérdidas de potencia por corriente de Eddy.

Conformando todos los fenómenos mencionados anteriormente, se presenta el gran desafío de la estabilidad del rotor-cojinete, esto se lograría utilizando teoría de control moderno, que en efecto, trata sobre sistemas no lineales y esquemas de control no lineal, por lo que el estudio se centraría en proponer un controlador no lineal para estabilizar al sistema.

### **I.3. Hipótesis y objetivos.**

#### **I.3.1. Hipótesis.**

*“En un rotor operando a altas velocidades se presentan vibraciones no deseadas que afectan el desempeño de la dinámica de la máquina, entonces, con la implementación de un controlador no lineal y la consecuente producción fuerzas magnéticas aplicadas en el rotor se puede asegurar la estabilidad de la flecha, y al mismo tiempo, mitigar las vibraciones del rotor”.*

### **I.3.2. Objetivo general.**

Establecer una propuesta de sistema de control no lineal para cojinetes magnéticos que permita una robustez ante perturbaciones.

### **I.3.3. Objetivos particulares.**

- Validar el esquema de control en un software.
- Desarrollar la etapa de potencia.
- Generar una estación de trabajo para probar y validar los algoritmos que en un futuro servirá como un equipo con fines de investigación.

# Capítulo 2:

---

## *II. Revisión de literatura.*

La idea de la levitación magnética no es nueva en estos días, desde que James Clerk Maxwell planteó las ecuaciones que ahora conocemos como ecuaciones de Maxwell, la comunidad científica tiene un amplio panorama y percepción de los fenómenos electromagnéticos y pueden entender experimentos teóricos utilizando sólo ecuaciones matemáticas, entre los fenómenos que más cautiva a los científicos son la interacción entre los campos magnéticos y la materia, presenciando el interesante efecto de atracción, sin perder tiempo un grupo pequeño de esta comunidad (los ingenieros) pusieron manos a la obra para aprovechar estos fenómenos en aplicaciones como motores eléctricos y grúas con electroimanes potentes para levantar grandes cantidades de materiales ferromagnéticos, entre otros, estas maravillas eran posible ya que no requerían tecnologías avanzadas para su funcionamiento, pero cuando surgió el caso de cómo mantener objetos suspendidos en el aire mediante campos magnéticos se enfrentaron al problema de que la tecnología contemporánea no era posible de llevarse a la implementación. Es con los avances científicos en el campo de la electrónica como por ejemplo: los semiconductores de potencia (permiten un manejo de la energía eléctrica más eficiente), los microprocesadores (tienen la virtud de operar mayor densidad de información, entre ellos, operaciones matemáticas con números en punto flotante, es decir, números decimales) y los sensores (en combinación con microchips forman una dupla para la obtención de datos con mayor precisión y menores márgenes de error) que en los años 80s la comunidad científica se centraron en desarrollar técnicas de control para levitadores magnéticos, en particular los cojinetes magnéticos activos (CMA).

A continuación se mencionan algunos reportes que usan diferentes técnicas de control en los CMA.

Tabla 1. Diferentes tópicos de control aplicados a los levitadores magnéticos.



➤ Control adaptable.

Fan *et al* (2008) diseñaron un control adaptable y un estimador de fuerza para el control de vibraciones causadas por el desbalanceo de un rotor suspendido en cojinetes magnéticos activos, con el cual demostraron que dicho sistema adaptable es más exacto que un observador de tipo integral, aun cuando el sistema modelado tiene errores en los parámetros del mismo.

Long *et al* (1996) diseñaron un control adaptable para un grado de libertad de un cojinete magnético activo basada en la técnica de *backstepping* integral para lidiar con los cambios abruptos de carga y desbalanceo, de modo que se mantenga el eje de rotación ideal, concluyen que este esquema garantiza un error cero en estado estacionario en presencia de carga estática y de desbalanceo.

➤ Control *backstepping*.

Queiroz *et al* (1996) desarrollan un controlador no lineal para rotor de disco plano basado la técnica de *backstepping* tomando en cuenta la estructura electromecánica del sistema, es decir, el sistema se compone de los subsistemas: mecánico (posición y velocidad), eléctrico (corriente y voltaje eléctrico) y la relación algebraica de las fuerzas magnéticas, logrando con ello una convergencia global y exponencial de la posición del rotor en forma de simulación.

Sivrioglu S. (2007) implementa en un procesador de señales un control con enfoque en *backstepping* adaptable aplicado a un prototipo de cojinete magnético activo, teniendo de éste último un modelo matemático con parámetros desconocidos, llegando a la conclusión de que el nivel de las perturbaciones son dos veces más grandes en comparación con un controlador PID.

➤ Control  $H^\infty$ .

Matsumura *et al* (1996) diseñan un control con el cual eliminan las vibraciones del rotor debido al desbalanceo utilizando un esquema de ganancias programadas con enfoque en  $H^\infty$ , probando así la efectividad y robustez del controlador ante perturbaciones de frecuencias variables.

Hiroki Seto y Toru Namerikawa (2005) proponen control  $H^\infty$  modificado mediante la metodología DIA (*Disturbance and Initial state uncertainty Attenuation*) con el fin de considerar las perturbaciones periódicas para los CMA, logrando la efectividad y robustez del controlador ante variaciones en la velocidad de rotación de la flecha.

➤ Control en modos deslizantes.

Zhang *et al* (2008) diseñan un control por modos deslizantes en tiempo discreto basado en la ley de alcanzabilidad y el modelado del CMA, muestran de manera numérica y experimental que la metodología de control de estructura variable es robusta contra perturbaciones externas que el control clásico PID, enfatizando en que el control por modos deslizantes es un buen prospecto para los sistemas magnéticos de esta naturaleza.

Rundell *et al* (1996) desarrollan un controlador por modos deslizantes para estabilizar la dinámica rotacional de una flecha vertical y CMA, así también muestran un observador en modos deslizantes para los estados del sistema y estimar la perturbación ocasionado por el desbalances del rotor. Consuman que la implementación de algoritmos por modos deslizantes es ideal para los convertidores de potencias que usan los electromagnetos, el cual requiere de señales de PWM, también señalan de manera numérica que los controladores de estructura variable incluyen robustez ante incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas.

Muthairi y Zribi (2004) proponen dos esquemas de control por modos deslizantes: estática y dinámica, estos esquemas garantizan regulación asintótica de los estados del sistema a los valores deseados, de manera concluyente y numérica finalizan que son robustos ante los cambios de parámetros del proceso.

Lee *et al* (2003) trataron con el problema del balanceo de una viga horizontal con un par de electromagnetos simétricos aplicados una bomba artificial para corazón, utilizaron la representación en variables de estados del sistema para proponer un controlador en modos deslizantes junto con el desarrollo de una superficie de deslizamiento y una función continua acotada para evitar la vibraciones de alta frecuencia o también llamado el fenómeno del *chattering*.

Chen y Lin (2011) presentan un control terminal en modos deslizantes no singular para lograr trayectorias en tiempo finito para la posición axial de un cojinete magnético activo. Comparando con un deslizante de primer orden que tiene una superficie de deslizamiento lineal, los modos deslizantes terminal tienen en su superficie términos no lineales enfatizando en que son más rápidos en converger y tener una alta precisión para controlar.

➤ Teoría de juegos.

Jiménez y Fridman (2008) lidian con el problema de dos jugadores lineales con incertidumbre, basados en los trabajos de equilibrios robustos de Nash para múltiples modelos lineales, en donde los jugadores componen una táctica del

mínimo-máximo para combatir con las incertidumbre, por tal motivo proponen que si se agrega la estrategia del control en modos deslizantes integral desde el comienzo estas incertidumbre pueden ser eliminadas obteniendo de este modo un juego dinámico equivalente con las incertidumbre eliminadas, esta novedad se aplica de manera numérica al CMA.

En cuanto a patentes, existen varias propiedades intelectuales en la base de datos de los Estados Unidos. Se mencionan algunas relacionadas al trabajo de investigación.

Tabla 2. Patentes relacionadas con los sistemas de cojinetes magnéticos activos.

<b>Autor</b>	<b>Título</b>	<b>Fecha</b>	<b>Patente</b>
Mizuno <i>et al.</i>	Controlled type magnetic bearing device.	Jun. 13, 1986.	US 4 839 550
Kanemitsu.	Controller for magnetic bearing system.	Nov. 7, 1986	US 4 879 500
Wakui.	Control system for magnetic bearing.	May. 7, 1991	US 5 013 987
Wilson	Active magnetic bearing device for controlling rotor vibrations.	Oct. 22, 1991	US 5 059 845
Nakagawa <i>et al</i>	Control apparatus of magnetic bearing.	Sep. 21, 1993	US 5 247 219 A
Buhler <i>et al</i>	Magnetic bearing with constant current source.	Oct. 28, 1997	US 5 682 071 A
Ueyama	Control magnetic bearing.	Apr. 10, 2001	US 6 215 218 B1
Allaire <i>et al</i>	Control of magnetic bearing	Jul. 31, 2001	US 6 267 876 B1

	supported rotors.		
Shinozaki	Magnetic bearing controller.	Dec. 2, 2003	US 6 657 345 B2
Setiawnn <i>et al</i>	Adaptive compensation of sensor run out and mass unbalance in magnetic bearing systems without changing rotor speed.	Jul. 13, 2004	US 6 763 285 B2
Shinozaki	Controlled magnetic bearing apparatus.	Oct. 26, 2004	US 6 809 449 B2
Okada <i>et al</i>	Controlled radial magnetic bearing.	Apr. 26, 2005	US 6 885 121 B2
Ueyama <i>et al</i>	Control magnetic bearing device.	May. 30, 2006	US 7 053 582 B2
Barada <i>et al</i>	Magnetic bearing apparatus.	May. 17, 2011	US 7 944 104 B2
Kawata	Electromagnetic attraction type magnetic bearing and control method thereof.	Jun. 19, 2012	US 8 203 243 B2
Vollmer	Magnetic radial bearing and magnetic bearing system having a three phase controller.	Feb. 19, 2013	US 8 378 541 B2
Post	Magnetic bearing element with adjustable stiffness.	Nov. 12, 2013	US 8 581 463 B2

# Capítulo 3:

---

## *III. Metodología.*

### III.1. Marco teórico.

#### III.1.1. Cojinetes magnéticos activos.

La levitación magnética tiene dos campos principales de aplicación: sistema de transporte y cojinetes para rotores. De estos dos el tren *MAGLEV* es el más conocido por el público en general, pero los cojinetes son los más establecidos en las aplicaciones industriales. Los cojinetes magnéticos para rotores han estado en la industria por más de una década, por ejemplo en varios de los campos principales de la rotodinámica: desde la tecnología aeroespacial a los procesos de maquinados pasando por las bombas, turbinas y turbocompresores (Bleuler, 1992).

En concordancia con Hollis *et al* (1991) se propone llamar al objeto en levitación como “*flotor*”, ya que no necesariamente se trata siempre de un rotor. La siguiente definición empírica es propuesta: la levitación magnética es un estado estable en suspensión sin ningún contacto mecánico, donde la fuerza de gravedad es balanceada sólo por fuerzas magnéticas. La posición del *flotor* tiene un estado permanente aun cuando es sujeto de perturbaciones razonables. El contacto libre debe tomar lugar para todo los grados de libertad del cuerpo rígido.

Algunas veces, una distinción es necesaria entre suspensión magnética y levitación magnética, la primera se refiere a sistemas basados en atracción de fuerzas magnéticas y la segunda a sistemas basados en repulsión de la fuerza magnética. Esta distinción podría ser obvia, sin embargo, este sentido restrictivo no cubre todos los tipos de soportes magnéticos de libre contacto.

Más recientemente la ISO (*International Organization for Standardization*) ha desarrollado una serie de normas estándares para los cojinetes magnéticos activos en su versión ISO TC108/SC2/WG7 establecido en 1996, y desde entonces ha estado en expandiéndose en forma de proyecto integrado por diferentes investigadores de distintas universidades y empresas de Japón y EUA. Como resultado, han publicado en mayo del 2002 el estándar ISO 14839-1 referente al vocabulario; en septiembre del 2004 el ISO 14839-2 como un tratado sobre el desarrollo de cojinetes magnéticos activos (CMA) para turbo maquinaria, así como la evaluación de vibraciones estándares para máquinas equipadas con cojinetes convencionales considerando los máximos valores de vibración y la corriente aplicada al CMA para regular las oscilaciones; y por último el ISO 14839-3 referente a los márgenes de estabilidad.

Entre los léxicos que se encuentran en la ISO 14839-1 [1]:

Símbolo del CMA. Para maquinarias rotativas equipadas con CMA, el símbolo gráfico se muestra en la siguiente figura.

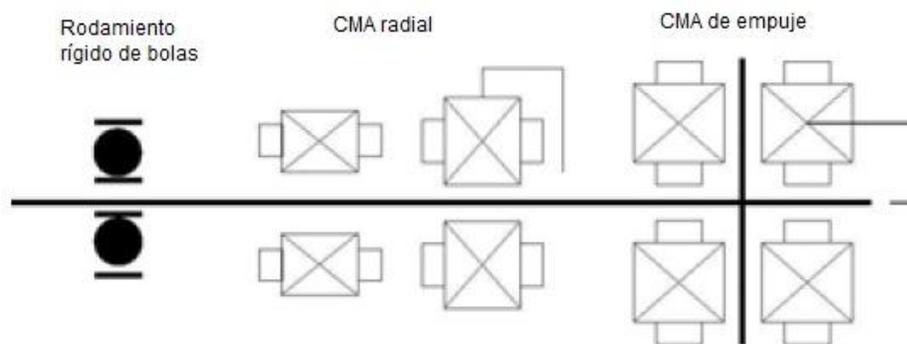


Figura 1. Símbolo de un cojinete magnético activo establecido en la ISO 14839-1.

*Cojinete magnético activo* (AMB, por sus siglas en inglés). Significa apoyar un rotor sin contacto mecánico, usando solamente fuerzas magnéticas de atracción basados en tecnología de servo retroalimentación, el cual consiste

normalmente en sensores, electroimanes, amplificadores de potencia, fuentes de poder y controlador. La siguiente figura muestra estos elementos.

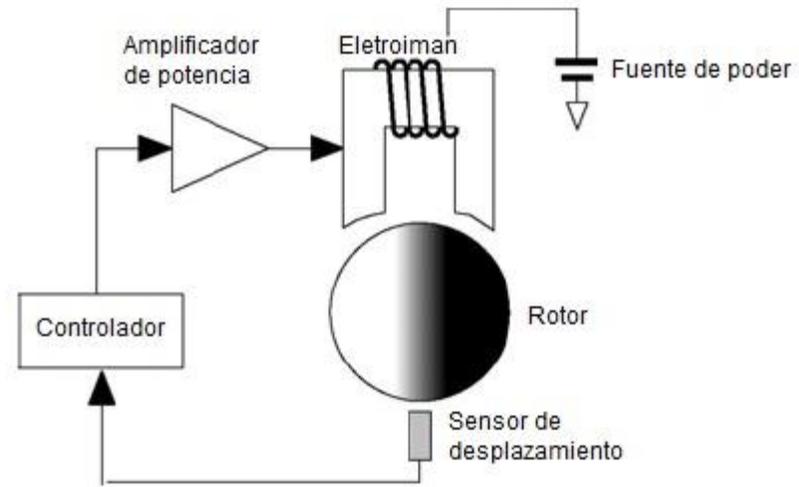


Figura 2. Esquema básico de un cojinete magnético activo.

*Sistema CMA.* Es un sistema que consiste de un rotor, un sensor de posición u otro medio para detectar la posición del rotor, controladores, amplificadores de potencia y electroimanes para levitar y soportar el rotor por medio de fuerzas magnéticas de atracción.

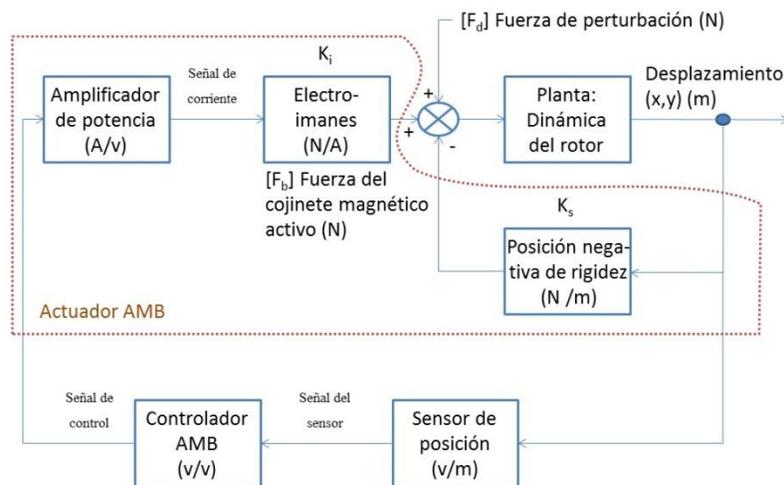


Figura 3. Esquema de un lazo de control definido por el estándar ISO 14839-1.

*Dos tipos básicos de fuerzas magnéticas.*

Una fuerza  $f$  sobre una carga  $Q$  resulta de acuerdo con la ley  $f = Q(E + v \times B)$ , con el campo eléctrico  $E$  y  $Q$  moviéndose a la velocidad  $v$  en una densidad de flujo magnético  $B$ . Esta expresión fue establecida por el físico holandés Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928). El movimiento de cargas eléctricas puede ser analizado desde el punto de vista cuántico o macroscópico. En la práctica, cuando no concierne la atención a escala atómica, el análisis puede llevarse a cabo por la constante de magnetización  $\mu = \mu_r \mu_0$ , con  $\mu_r$  en dependencia del tipo de material. Tales materiales están sujetos a fuerzas magnéticas llamadas fuerzas de reluctancia para distinguirlas de las fuerza de Lorentz. La fuerza de reluctancia es obtenida del principio de trabajo virtual según la disposición de los materiales con permeabilidad  $\mu$ . La fuerza es calculada como  $f = \partial W / \partial s$ , con la energía del campo  $\partial W$  y el desplazamiento virtual  $\partial s$  del objeto soportado. La fuerza magnética de este tipo siempre alcanza la superficie del medio de diferente permeabilidad relativa  $\mu_r$ , por ejemplo el hierro y el aire, la dirección de la fuerza es perpendicular al área del medio. En contraste con la fuerza de reluctancia, la energía del campo de la fuerza del Lorentz no cambia con la geometría del desplazamiento del *flotor*.

Tabla 3. Tipos de fuerzas para la levitación magnética. Bleuler (1992)

	<b>Grupo 1: Fuerza por reluctancia</b>	<b>Grupo 2: Fuerza de Lorentz</b>
<b>Principio básico</b>	Energía del campo magnético, principio de trabajo virtual	Producto cruz de la corriente eléctrica y el flujo magnético
<b>Ecuación establecida</b>	$f = \partial W / \partial s$	$f = i \times B$
<b>Dirección de la fuerza</b>	Perpendicular a la superficie del material de diferente $\mu_r$	Perpendicular al flujo magnético
<b>Dependencia con la corriente y el entrehierro</b>	Cuadrática a la corriente e inverso del cuadrado del entrehierro	Lineal cuando la corriente y el flujo no son del uno y del otro, independiente del entrehierro
<b>Relación con otras teorías de la literatura</b>	Principio de alineamiento magnético de la fuerza de Maxwell	Principio de interacción electrodinámica de la fuerza de Lorentz

Cuatro tipos básicos de fuerza magnética por reluctancia para la levitación.

Diferentes mecanismos de levitación pueden ser clasificados de acuerdo con el valor de la permeabilidad relativa  $\mu_r$  del material involucrado (ferro-, para- o diamagnético), de estos sólo los ferromagnéticos y el efecto Meissner-Ochsenfeld son de interés técnico. Los dispositivos ferromagnéticos son realizados con electroimanes o imanes permanentes, el cual pueden ser pasivos o controlados activamente. Hay cuatro posibles combinaciones: electromagnetos activos, electromagnetos pasivos, imanes permanentes activos e imanes permanentes pasivos.

*Tipo 1: Cojinetes magnéticos activos con fuerzas de reluctancia.*

La configuración básica de este tipo de cojinete es bien conocida: las señales de posición procedentes del sensor de desplazamiento son usados por el controlador y el amplificador de potencia para poner las corriente y voltajes apropiados en el electromagneto, de tal manera que la levitación se estabiliza. Se le asigna el adjetivo “activo” porque necesita del lazo de control y un actuador para la estabilización. Este tipo de chumacera ha encontrado un amplio rango de aplicaciones industriales.

*Tipo 2: Cojinetes sintonizados con circuitos LCR.*

Este tipo de cojinete logra características estables de rigidez con un circuito LC ligeramente fuera de la resonancia. El circuito LC es formado con la inductancia del electroimán del CMA y un capacitor. El desplazamiento mecánico del *flotor* cambia la inductancia de la bobina. EL circuito LC es operado cerca de la resonancia y sintonizado de tal manera que se aproxima a la resonancia cuando el *flotor* se aleja del electroimán. Esto incrementa la corriente procedente de la fuente voltaje alterna de frecuencia constante y empuja al *flotor* a su posición nominal. La fuerza y la rigidez obtenida no son grandes pero suficientes para ciertas aplicaciones en instrumentación. Ya que es estable sin un lazo de control, es llamado “pasivo”, aunque disipa energía. La principal desventaja es que no hay

amortiguamiento, es decir, sin medidas adicionales tales como el amortiguador mecánico o cojinetes hidrodinámicos tales sistemas tiende a ser inestables, su principal ventaja es el bajo costo de construcción.

*Tipo 3. Cojinetes de imanes permanentes ferromagnéticos (sin superconductores).*

Sin control activo, los sistemas pasivos con imanes permanentes no son permitidos para mantener objetos en levitación en sus posiciones estables y en todos los grados de libertad. Tales cojinetes de imanes permanentes sin lazos de control pueden solamente ser usados para reducir la carga de ejes convencionales de transmisión.

*Tipo 4: Dispositivos diamagnéticos y el efecto Meissner-Ochsenfeld.*

El cuarto dispositivo yace en el efecto diamagnético ( $\mu_r < 1$ ). Sólo el efecto en superconductores (efecto Meissner-Ochsenfeld) es suficientemente fuerte para producir fuerzas de intereses técnicos. Aunque está en la etapa de laboratorio, las aplicaciones industriales se prevén para un futuro no muy distante.

*Cuatro tipos de levitación por medio de la fuerza de Lorentz.*

*Tipo 5: Levitación electrodinámicamente pasiva de sistemas en movimiento relativo.*

La levitación electrodinámica ocurre con control activo cuando altas corrientes parásitas son inducidas en un rápido movimiento relativo del estator y el flotor. Tales cojinetes han sido estudiados a fondo para vehículos de altas velocidades y ocasionalmente para cojinetes de rotores. Desafortunadamente las pérdidas son muy altas cuando son logradas fuerzas de levitación considerables.

*Tipo 6: Interacción de corriente alterna y corriente inducida, sistema pasivo.*

Si el movimiento relativo es reemplazado por un flujo alternante, un tipo similar de levitación pasiva es obtenida. De nuevo, en conducción normal, la

fuerza de levitación producida por corrientes parásitas inducidas es relativamente débil comparado con las pérdidas de potencia. Al mismo tiempo, tales cojinetes (llamadas cojinetes de corriente alterna) tienen propiedades de amortiguamiento débiles. Estas dos fundamentales desventajas son la razón del porqué tales cojinetes no son aplicadas en la industria, aunque algunas aplicaciones especiales son concebidas.

*Tipo 7: Interacción de corriente alterna y corriente inducida, sistema activo.*

Los motores de inducción tienen buena eficiencia, por lo tanto, las componentes de las fuerzas tangenciales que producen el torque de accionamiento tienen el potencial de sumar las fuerzas radiales con un control adecuado de la corriente del estator. Aunque un esquema de control elaborado y/o bobinas adicionales, las fuerzas en el rotor pueden ser producidas de tal manera que el efecto resultante no es solo acoplado sobre el eje del rotor, pero conteniendo también componentes radiales. Este componente radial es controlado de acuerdo a las señales del sensor de entrehierro, sólo con en el caso de los cojinetes magnéticos activos de fuerzas de reluctancia. La eficiencia del sistema puede ser esperada igual que el del motor de inducción. Todas las propiedades deseables de los cojinetes activos, especialmente el alto amortiguamiento y la versatilidad, pueden ser logradas fácilmente con tal dispositivo.

*Tipo 8: Interacción de corriente controlada y flujo estático.*

Este tipo de cojinete es similar con la versión anterior excepto el hecho de que la corriente inducida del rotor es reemplazada por un rotor de imanes permanente. Tal como una fuerza de Lorentz en CMA han sido realizadas para una combinación de cojinete y motor síncrono.

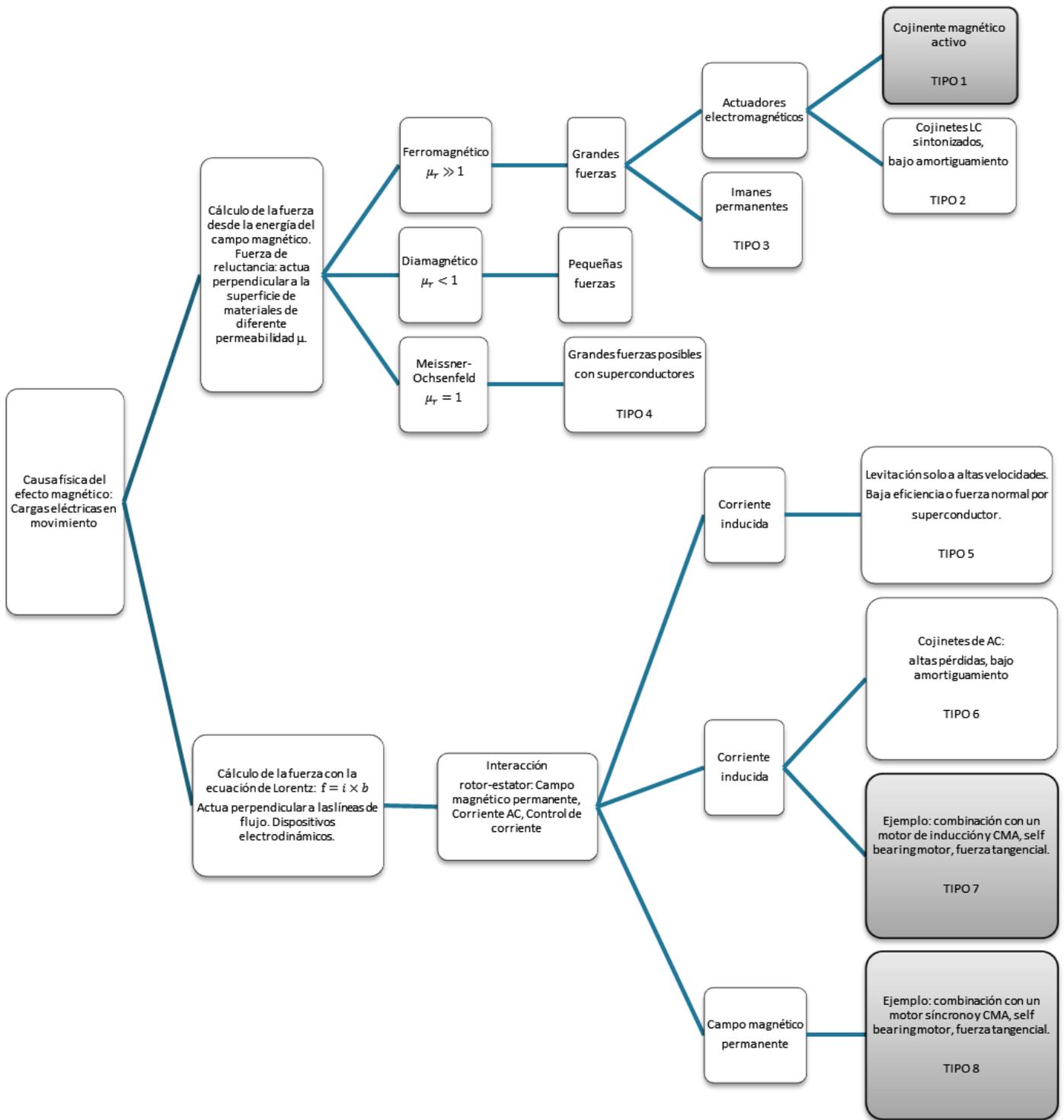


Figura 4. Clasificación de los cojinetes magnéticos propuesto por Bleuler (1992), los cuadros sombreados son estables con un control activo, el resto de los tipos de levitación son pasivos estables sin un control.

### III.1.2. Modelado matemático del cojinete magnético activo simple.

En la figura (5) se muestra la estructura básica de un levitador magnético de un grado de libertad con un controlador retroalimentado, podría decirse que (de forma empírica) existen tres casos de operación del sistema: uno, si al sistema se le aplicara la corriente máxima que soporta la bobina, este produciría la máxima fuerza por lo que la masa suspendida vendría topando con la superficie del electroimán; dos, si no se le aplicara corriente a la bobina entonces no se produciría fuerza alguna, por lo que la masa estaría en movimiento debido y en dirección a la gravedad; tres y último evento de nuestro interés, si se le aplicara corriente a la bobina se produciría un flujo magnético con una trayectoria marcada por la forma del núcleo, el objeto en antigravedad y el entrehierro, este flujo pasa dos veces por las aberturas del núcleo y masa suspendida en el aire, de modo que se completa el circuito magnético y se genera una fuerza de atracción entre el estator y el flotor (masa suspendida), si la fuerza magnética es más grande que el peso del flotor, entonces éste último se aproximaría al núcleo, por lo que el sensor de desplazamiento observaría esta variación y enviaría una señal al controlador, este computador calcula por medio de un algoritmo una señal correctiva en baja potencia, por lo que la etapa de potencial adecua la señal (por medio de un voltaje aplicado en las terminales de la bobina) en una corriente eléctrica y en menor magnitud para que el flotor no llegue a tocar al núcleo y sea el mismo peso quien incite a que se aleje del estator, este proceso se realiza de manera continua y manteniendo al flotor en una posición deseada, es decir, produciendo una fuerza magnética de atracción de igual magnitud al producto de la masa del flotor y a la aceleración de la gravedad para satisfacer la condición de equilibrio del sistema.

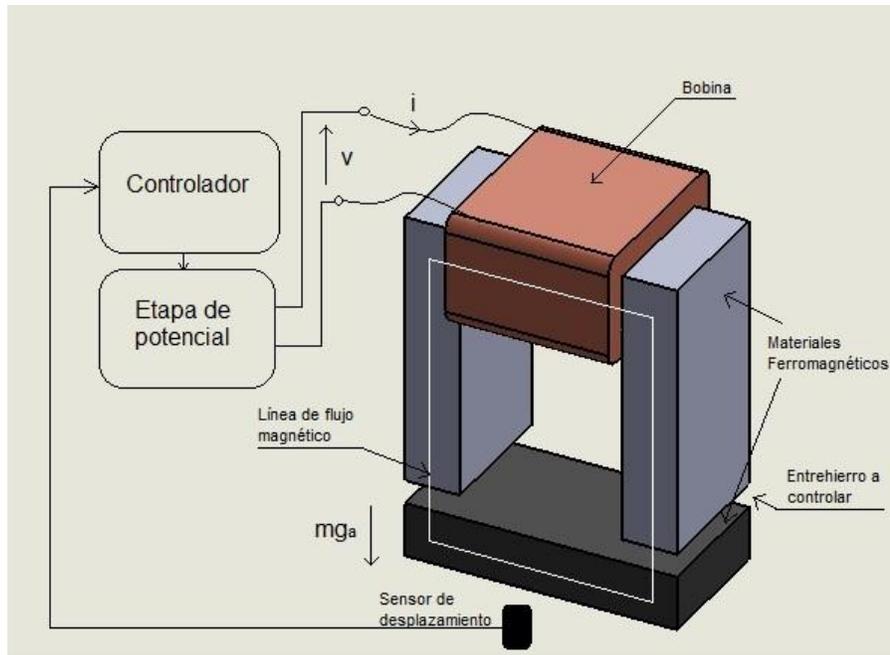


Figura 5. Bosquejo de un levitador magnético simple.

Unas de las herramientas importantes en la ingeniería de control es el modelado matemático de sistemas dinámicos con el cual podemos tener acceso al entendimiento de los fenómenos físicos que ocurren en el campo de la ingeniería. Este modelado matemático es una aproximación de la realidad pero es suficiente para darnos una idea de cómo podemos interactuar con el sistema, más aún, cómo podemos gobernar al sistema.

En la siguiente sección mostraremos la obtención del modelo matemático de la fuerza magnética como parte fundamental para futuros esquemas de control. (Chiba *et al*, 2005)

En la figura (6) se muestra el diagrama básico de una suspensión magnética, el núcleo en "C" tiene un ancho  $w$  y una profundidad  $l$ . La trayectoria del flujo magnético está denotada por la línea punteada. Las longitudes del flujo magnético en el núcleo en "C" están definidas por  $l_1$  y  $l_2$  y el trayecto del flujo magnético en el objeto en antigravedad es  $l_3$ . El embobinado tiene  $N$  vueltas de alambre de cobre. La corriente en el embobinado es  $i$ , por lo que la fuerza

magnetomotriz (FMM) es  $Ni$ . El entrehierro es  $g$  en la posición nominal. Una coordenada de posición  $x$  es definida para la posición del flotor, por lo que el espacio del entrehierro queda definida como  $(g - x)$ .

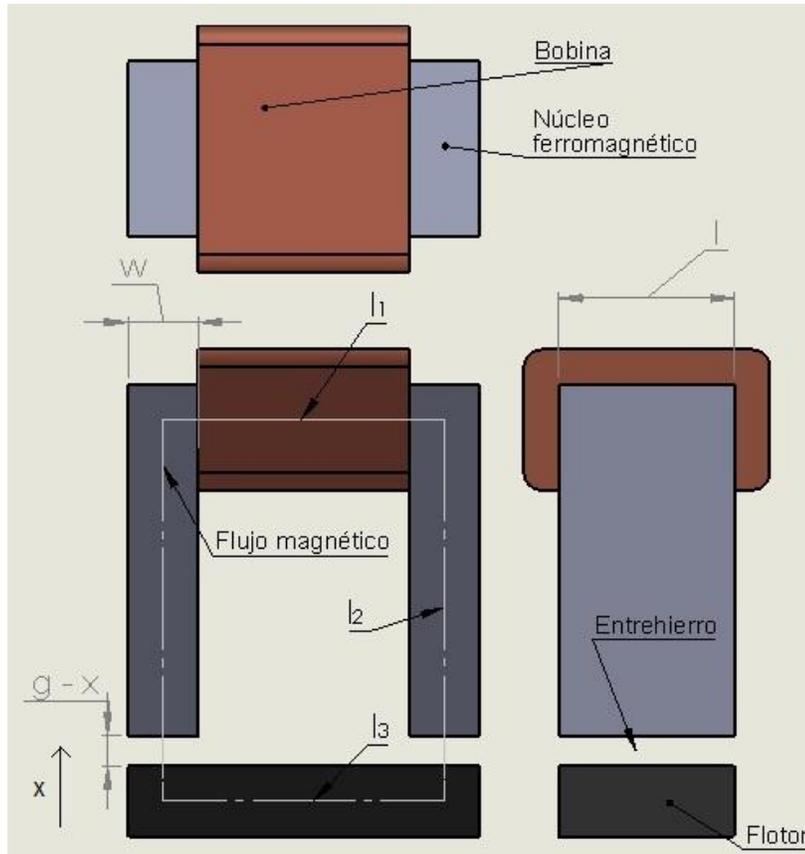


Figura 6. Nomenclatura del levitador magnético.

La reluctancia  $R$  (la oposición al paso del flujo magnético, pensando en su homólogo del circuito eléctrico, la resistencia eléctrica) de un circuito magnético está dada por la ecuación (1), donde  $l_{fp}$  es la longitud de la trayectoria del flujo,  $\mu_{mt}$  es la permeabilidad del material y  $S$  es el área de la sección transversal del flujo.

$$R = \frac{l_{fp}}{\mu_{mt} S} \quad (1)$$

La permeancia es la función inversa de la reluctancia magnética:

$$P_a = \frac{\mu_{mt} S}{l_{fp}} \quad (2)$$

La Figura (7) muestra un diagrama equivalente para el circuito magnético del electroimán, haciendo referencia a su análogo circuito eléctrico. En términos de FMM (como el voltaje), el flujo (como la corriente eléctrica) y la reluctancia (como la resistencia eléctrica), un circuito magnético constante (CD) puede ser tratado de la misma manera que un circuito eléctrico. La fuente de “voltaje continuo” Ni representa la fuerza magnetomotriz generado por la corriente que circula en el devanado.  $R_c$  y  $R_l$  son las reluctancia magnética en el núcleo en “C” y el núcleo en “I” respectivamente y  $R_g$  representa la reluctancia magnética en el entrehierro, y están descritas como siguen:

$$R_g = \frac{g - x}{\mu_0 w l} \quad (3)$$

$$R_c = \frac{2l_1 + l_2}{\mu_0 \mu_r w l} \quad (4)$$

$$R_l = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r w l} \quad (5)$$

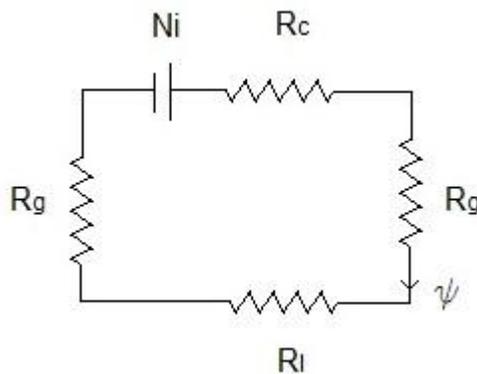


Figura 7. Circuito magnético equivalente.

Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre ( $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} H/m$ ) y  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa ( $\mu_{mt} = \mu_r \mu_0$ ). El valor de  $\mu_r$  para el hierro está

típicamente en el rango de los 1000 y 10000. La permeabilidad relativa del aire es aproximadamente igual a 1. En el mejor de los casos la reluctancia del aire es significativamente más grande que la reluctancia del hierro, por lo que la reluctancia magnética en el hierro puede ser despreciada para los siguientes cálculos. Por lo tanto, el circuito eléctrico equivalente es simplificado. El flujo magnético es:

$$\psi = \frac{Ni}{2R_g} = \frac{Ni}{2} \frac{\mu_0 w l}{g - x} \quad (6)$$

El eslabonamiento del flujo magnético  $\lambda_I$  de la bobina es definido como el número de vueltas  $N$  multiplicado por el flujo magnético a través de la bobina:

$$\lambda_I = \frac{N^2 i}{2} \frac{\mu_0 w l}{g - x} \quad (7)$$

Pero la inductancia está definida como el eslabonamiento del flujo magnético dividido por la corriente eléctrica ( $L = \lambda_I / i$ ), dando lugar a:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 w l}{2(g - x)} \quad (8)$$

Si el desplazamiento  $x$  es suficientemente pequeño con respecto al espacio del entrehierro, la siguiente expansión en series de potencias es válida:

$$\frac{1}{g - x} = \frac{1}{g} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{g}\right)} = \frac{1}{g} \left(1 + \frac{x}{g} + \frac{x^2}{g^2} + \frac{x^3}{g^3} + \dots\right) \quad (9)$$

Y si sólo el primero y el segundo término son considerados, la inductancia puede ser aproximada a:

$$L = L_0 \left(1 + \frac{x}{g}\right) \quad (10)$$

Donde la inductancia  $L_0$  es definida como la inductancia nominal:

$$L_0 = \frac{N^2 \mu_0 w l}{2g} \quad (11)$$

En consecuencia, la densidad del flujo magnético  $B$  en el entrehierro puede ser derivada como:

$$B = \frac{\psi}{wl} = \frac{N\mu_0 i}{2(g-x)} \quad (12)$$

La figura (8) muestra la relación entre el eslabonamiento del flujo y la corriente eléctrica circuitos magnéticos con núcleo ferromagnéticos.

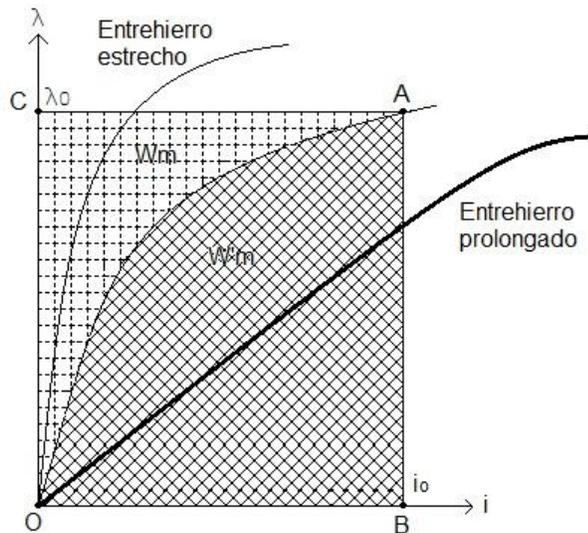


Figura 8. Relación entre el eslabonamiento del flujo y la corriente magnética.

El eslabonamiento del flujo es proporcional a la corriente sólo en valores bajos, en altas corrientes, los núcleos magnéticos se saturan, produciendo características no lineales. En aceros al silicio, la saturación magnética ocurre con una densidad de flujo magnético entre 1.2 y 1.8 Teslas. Las curvas de magnetización de los diferentes tipos de aceros son proporcionados por la compañía manufacturera.

Las curvas de magnetización dependen también del espacio del entrehierro. Con aberturas estrechas, la curva  $\lambda/i$  tiene un comportamiento bastante no lineal porque el circuito magnético es dominado por las reluctancias del núcleo y del *flotor* con altas corrientes eléctricas. Con espacios de entrehierro

más amplios resulta en un comportamiento más lineal porque la reluctancia del circuito es ahora dominada por la reluctancia del entrehierro aún a altas corrientes, el cual no se satura con facilidad.

Supongamos que el punto de operación es A en la Figura (8), con una corriente  $i_0$  y un eslabonamiento del flujo  $\lambda_0$ . La energía magnética  $W_m$  en el sistema magnético es obtenida desde:

$$W_m = \int_0^{\lambda_0} i d\lambda \quad (13)$$

La integración corresponde al área rodeada por los puntos O, C y A. Adicionalmente para la energía magnética, podemos introducir la coenergía magnética  $W'_m$ , el cual se define como:

$$W'_m = \int_0^{i_0} \lambda di \quad (14)$$

Esta definición indica que la coenergía magnética es representada por el área rodeada por los puntos O, B y A. La suma de  $W'_m$  y  $W_m$  es igual al producto de la corriente  $i_0$  y el eslabonamiento del flujo  $\lambda_0$ ,  $W_m$  es la energía magnética almacenada en el sistema, mientras la coenergía es una componente el cual introducimos para facilitar el análisis pero no tiene ningún significado físico.

Las variables independientes en la suspensión magnética son normalmente la corriente en el embobinado y el objeto a desplazarse. Si el sistema es movido por  $\delta x$  entonces puede ser mostrado que el trabajo final es igual al cambio en la coenergía del sistema. Ya que el trabajo final es la fuerza  $F \times \delta x$ , la fuerza electromagnética F está dada como la derivada parcial de la coenergía magnética:

$$F = \frac{\partial W'_m}{\partial x} \quad (15)$$

Esta ecuación provee la expresión para la fuerza magnética entre el núcleo en “C” y el núcleo en “I” con características magnéticas no lineales.

Si las características magnéticas son lineales (por ejemplo, que no se presente la saturación) entonces la relación entre la corriente y el eslabonamiento del flujo se muestra en la Figura (9). Se ve que la energía y la coenergía del flujo se muestra en la Figura (9). Se ve que la energía y la coenergía magnética es igual a:

$$W_m = W'_m \quad (16)$$

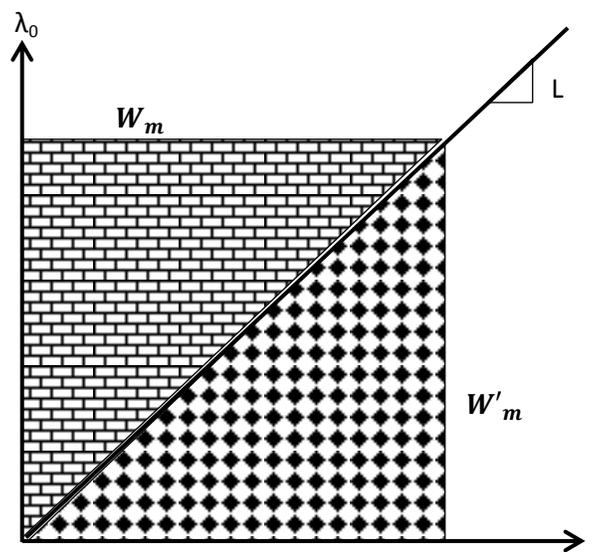


Figura 9. Relación lineal entre el eslabonamiento del flujo y corriente eléctrica.

En esta instancia, la fuerza magnética puede ser entonces escrita como:

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x} \quad (17)$$

Note que esta ecuación es válida sólo para sistemas magnéticamente lineales.

Asumiendo un sistema lineal, donde la autoinductancia  $L$  es constante y  $Li = \lambda$ , la coenergía magnética  $W'_m$  es derivada como:

$$W'_m = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2 \quad (18)$$

La fuerza magnética  $F$  es:

$$F = \frac{\partial W'_m}{\partial x} = \frac{\partial L i^2}{\partial x} \quad (19)$$

La derivada parcial de  $L$  con respecto a  $x$  es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{L_0}{g} \quad (20)$$

Substituyendo obtenemos:

$$F = \frac{L_0 i^2}{g} \quad (21)$$

Con esta ecuación se llega a apreciar que la fuerza depende directamente del cuadrado de la corriente aplicada a la bobina, también se observa, que conforme disminuye el espacio del entrehierro la fuerza aumenta. Si se considera a la corriente como una de las variables de estado del sistema físico a controlar, se ve claramente que está multiplicada por sí misma, por lo que el sistema se considera como un sistema dinámico no lineal, por lo tanto, se recurre a técnicas de control no lineal, para que sea posible llevar a la realidad el sistema construyendo un prototipo experimental.

Otra expresión para la fuerza magnética es la siguiente:

$$F = \frac{B_0^2}{2\mu_0} S \quad (22)$$

Esta ecuación da la visión directa en la generación de fuerza magnética. Se puede decir que la fuerza magnética es proporcional al cuadrado de la densidad de flujo magnético en el entrehierro. La fuerza es proporcional a la sección transversal del núcleo, por lo que se puede concluir que si se mantiene la misma densidad de flujo y se aumenta la sección transversal, por ende la fuerza producida aumentará, esto es una ecuación a tomar en cuenta para el diseño de núcleos magnéticos para cojinetes magnéticos activos.

### III.1.3. Modelado matemático del rotor Jeffcott de dos grados de libertad.

En dinámica de rotores, el modelo matemático del rotor *Jeffcott* es un ejemplo clásico, es decir, una simplificación de la naturaleza real de un rotor, pero que mantiene características básicas que nos permiten ganar una percepción cualitativa en los fenómenos importantes de la rotodinámica. En el estudio del comportamiento de ejes sometidos a velocidades angulares donde se presentan anomalías es importante conocer qué factores están envueltos en estos casos, con éste esquema se puede apreciar con bastante aproximación los fenómenos implicados en la inestabilidad del sistema y por ende sus límites de operación, por mencionar algunos fenómenos se encuentran las fuerzas de desbalanceo, los modos de vibraciones, los momentos giroscópicos, entre otras anomalías que se pueden estudiar con base en este modelo.

Con el propósito de conocer las fuerzas que interactúan con el cojinete magnético activo, se presenta el desarrollo del rotor *Jeffcott* isotrópico y de dos grados de libertad, presentando principalmente la naturaleza de la fuerza de desbalanceo, sin embargo, para un estudio más completo se puede recurrir a Genta (2005).

El modelo más simple que puede ser usado para el estudio del comportamiento de un rotor flexible consiste en un punto de masa atado a un eje de masa despreciable. Los tres esquemas mostrados en la Figura (10) produce el mismo resultado siempre que el sistema sea: sin amortiguamiento, es decir, los efectos de amortiguamiento sean asociados a los resortes o a la flecha y el sistema sea axialmente simétrico.

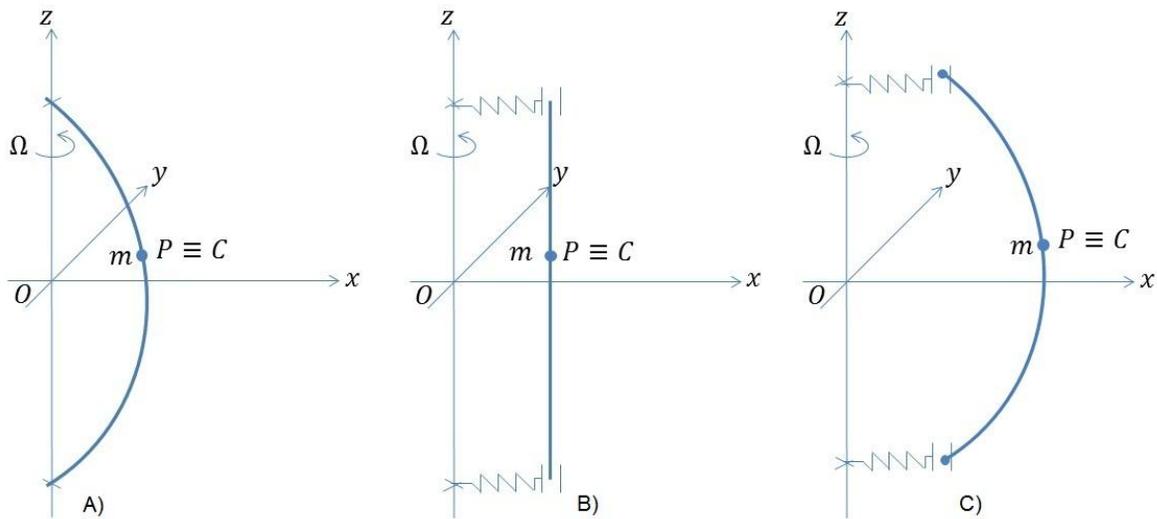


Figura 10. Rotores Jeffcott perfectamente balanceados. A) El rotor consiste en una masa puntual sobre un rotor flexible y cojinetes rígidos. B) La flecha es completamente rígida mientras que los cojinetes son flexibles. C) Ambos la flecha y los cojinetes son considerados cuerpos deformables. Genta (2005).

El punto  $P$ , en donde la masa  $m$  es fija y siempre contenida en el plano  $xy$ , esta declaración es justificada por el desacoplamiento entre los movimientos axial y radial, y depende del supuesto de pequeños movimientos. Estas asunciones son idealizadas en demasía. En la práctica, nunca ocurre que el punto  $P$  (en el cual la masa  $m$  está colocada) coincida exactamente con el punto céntrico y elástico  $C$  de la sección transversal de la flecha. Sin embargo, podría ser que la distancia entre  $P$  y  $C$  sea pequeña, presenciado en forma de excentricidad  $\epsilon$ , como en la figura 11, el cual causa un desbalanceo  $m\epsilon$  que puede afectar fuertemente el comportamiento del sistema.

En rotordinámica básica, la velocidad angular  $\Omega$  del sistema es asumida constante, tomando como tiempo inicial  $t = 0$  el instante en el cual el vector  $\overline{P - C}$  es paralelo con el eje  $x$ , el ángulo entre  $\overline{P - C}$  y el eje  $x$  es  $\theta = \Omega t$ .

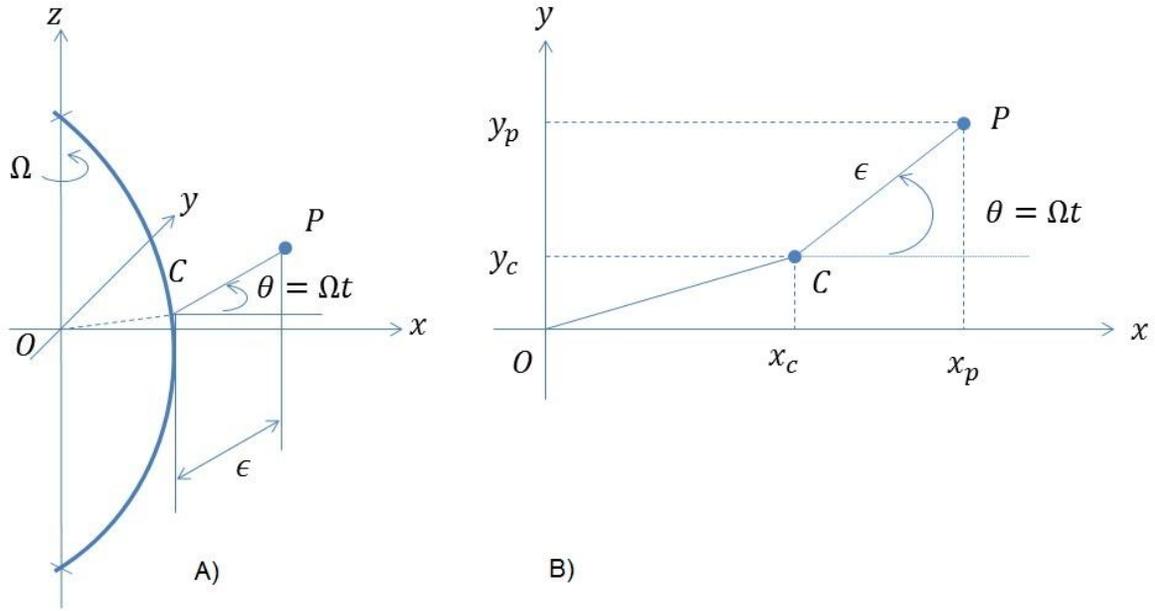


Figura 11. Rotor Jeffcott desbalanceado. A) Abstracción del sistema. B) Ubicación en el plano xy. Genta (2005).

Se pueden seleccionar dos coordenadas generalizadas para el sistema: las coordenadas  $x_c$  y  $y_c$  del punto  $C$  (el punto geométrico o deformación del centro de la flecha) o el punto  $P$  con componentes  $x_p$  y  $y_p$  que expresan el centro de masa. A continuación el desarrollo matemático para la obtención de las ecuaciones de movimiento.

Considere el punto  $\overline{P-O}$ .

$$\overline{P-O} = r_p(t) = \begin{Bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_c(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\dot{r}_p(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{y}_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_c(t) - \epsilon \Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_c(t) + \epsilon \Omega \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Por lo que la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema quedan respectivamente como:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) = \frac{1}{2} m \{ \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \epsilon^2 \Omega^2 + 2\epsilon \Omega [-\dot{x}_c \sin(\Omega t) + \dot{y}_c \cos(\Omega t)] \} \quad (25)$$

$$U = \frac{1}{2} k(x_c^2 + y_c^2) \quad (26)$$

La ecuación de Lagrange se define como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial q_i} = Q_i \quad (27)$$

Donde  $q_i$  es la coordenada de Lagrange, es decir,  $x_c$  y  $y_c$ . Desarrollando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_c} = -kx_c \quad (28)$$

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_c} = m\dot{x}_c - m\epsilon\Omega \sin(\Omega t) \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_c} \right) = m\ddot{x}_c - m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (30)$$

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial y_c} = -ky_c \quad (31)$$

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{y}_c} = m\dot{y}_c + m\epsilon\Omega \cos(\Omega t) \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{y}_c} \right) = m\ddot{y}_c + m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (33)$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento del sistema quedan definidas para  $x_c$  y  $y_c$  respectivamente como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial x_c} = m\ddot{x}_c + kx_c = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) + F_x \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial y_c} = m\ddot{y}_c + ky_c = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) + F_y \quad (35)$$

Como se observa en el lado derecho de las ecuaciones 34 y 35 los términos  $F_x$  y  $F_y$  corresponden a fuerzas externas actuando en el plano  $xy$  y el sumando  $m\epsilon\Omega^2$  es la amplitud de la fuerza de desbalanceo alternante con una frecuencia igual a la velocidad angular.

Las soluciones homogéneas de las ecuaciones 34 y 35 muestran que el sistema presenta un par frecuencias naturales de oscilación de la forma:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (36)$$

Donde  $k$  es la constante de rigidez del rotor flexible, que depende de la geometría y material con que está construida la flecha y  $m$  la masa del rotor.

La frecuencia natural del rotor *Jeffcott*  $\omega_n$  no depende de la velocidad angular  $\Omega$  con que se somete el rotor. La velocidad angular crítica  $\Omega_{cr}$  es aquella en donde la velocidad de rotación coincide con la frecuencia natural del sistema ( $\Omega = \omega_n$ ), dicha velocidad juega un papel de gran importancia en el comportamiento del sistema, instando a la inestabilidad de la planta por medio de la resonancia si no se tiene idea alguna del valor por lo menos aproximado de  $\Omega_{cr}$ . Cabe destacar que en la realidad existen varias velocidades críticas, dependiendo de a qué velocidad se quiera operar el sistema y de los grados de libertad con que se modele el sistema.

### III. 1.4. Modelado completo del sistema de cojinete magnético activo.

El sistema CMA está representado principalmente por dos dinámicas: la dinámica mecánica y la dinámica eléctrica. Estas dos dinámicas serán analizadas a continuación con el fin de obtener una representación matemáticas que permita el posterior diseño del controlador.

El sistema CMA se divide en dos marcos de referencias independientes o desacopladas, debido a la propiedad algebraica del plano  $\mathbb{R}^2$ , en donde los vectores generadores del espacio son ortonormales, estos son: la dirección  $y$  o vertical y la dirección  $x$  u horizontal. Estas direcciones de movimientos contienen las dos dinámicas que dominan al sistema. (Delfín y Jáuregui, 2014).

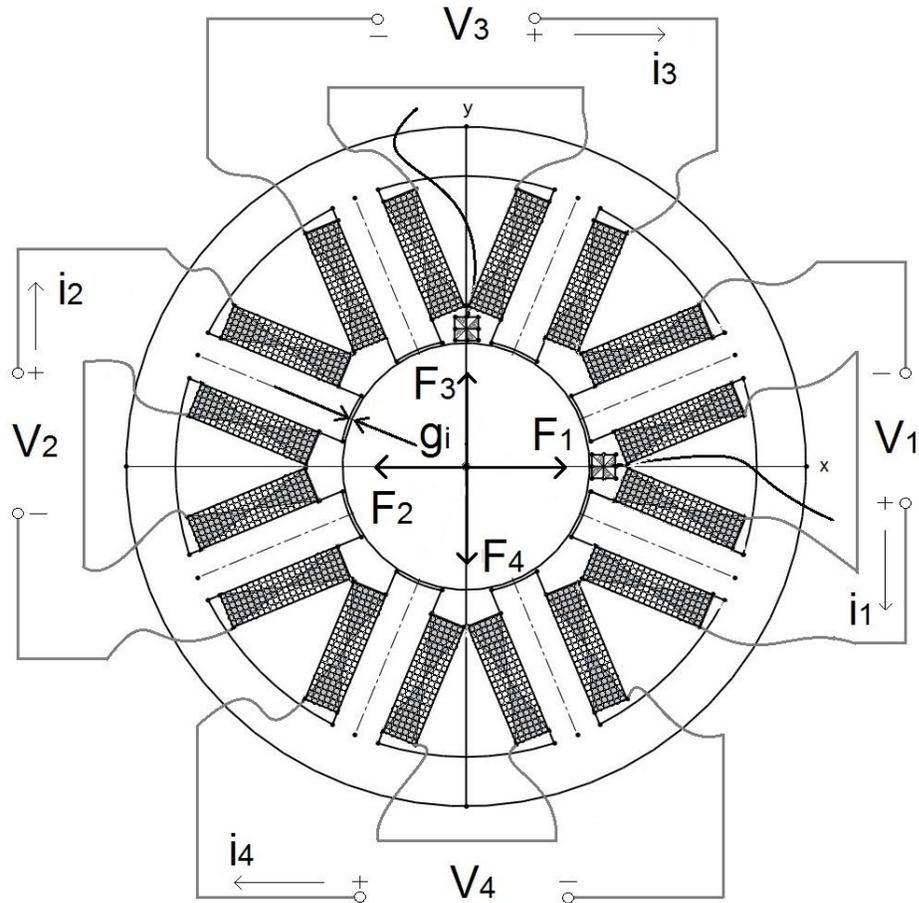


Figura 12. Sección transversal del cojine magnético activo.

Basadas en las leyes físicas de Newton, se obtiene la dinámica mecánica regida en la dirección  $y$ .

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (37)$$

$$m \frac{d\dot{y}}{dt} = F_3 - F_4 - mg + F_{dy} \quad (38)$$

Donde  $y$  es el desplazamiento del rotor,  $\dot{y}$  es la velocidad del rotor en dicha dirección,  $m$  la masa del rotor,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $F_3$  y  $F_4$  son las fuerzas magnéticas en la dirección vertical y sentido opuesto como se indica en la Figura (12).

Si sustituimos las fuerzas  $F_3$  y  $F_4$  por sus correspondientes representaciones eléctricas de acuerdo a las ecuaciones (21), la ecuación (38) se convierte en

$$m\ddot{y} = C_m \frac{i_3^2}{g_3^2} - C_m \frac{i_4^2}{g_4^2} - mg + F_{dy} \quad (39)$$

El equilibrio de las fuerzas en el sistema magnético está influenciado principalmente por las corrientes eléctricas  $i_3$  e  $i_4$  así como por el entrehierro que existe en las paredes de la sección transversal del polo magnético y la superficie del rotor  $g_3$  y  $g_4$ , por lo que las dinámicas eléctricas de cada electroimán están descritas como (Woodson y Melcher, 1968)

$$v_3 = Ri_3 + \frac{d\lambda_3}{dt} \quad (40)$$

$$v_4 = Ri_4 + \frac{d\lambda_4}{dt} \quad (41)$$

Donde  $v_3$  y  $v_4$  son los voltajes aplicados en las terminales de las bobinas como se indica en la Figura (12),  $R$  es la resistencia eléctrica,  $i_3$  e  $i_4$  son las corrientes eléctricas a través de las bobinas,  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  son el eslabonamiento del flujo magnético.

El eslabonamiento del flujo magnético representa la forma en que se origina la autoinductancia debido al arrollamiento de alambre de cobre, la corriente eléctrica y el medio por el cual pasa el flujo magnético, la dinámica que describe el comportamiento está dada por

$$\lambda_3 = L_3(y)i_3 \quad (42)$$

$$\lambda_4 = L_4(y)i_4 \quad (43)$$

Donde  $L_3(y)$  y  $L_4(y)$  son las inductancias de cada electroimán en dependencia con la posición descrita como

$$L_3(y) = L_0 + \frac{2C_m}{g_0 - y} \quad (44)$$

$$L_4(y) = L_0 + \frac{2C_m}{g_0 + y} \quad (45)$$

Donde  $L_0$  es la inductancia nominal y el término  $(g_0 - y)$  es reemplazado en lugar de  $g_3$  y  $(g_0 + y)$  es reemplazado en lugar de  $g_4$  para tener un entrehierro en términos del desplazamiento vertical.

La dinámica que describe al sistema completo en la dirección  $y$  queda como sigue

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (46)$$

$$m\ddot{y} = C_m \frac{i_3^2}{(g_0 - y)^2} - C_m \frac{i_4^2}{(g_0 + y)^2} - mg + F_{dy} \quad (47)$$

$$v_3 = Ri_3 + L_3(y) \frac{di_3}{dt} + \frac{4C_m}{(g_0 - y)^2} \dot{y}i_3 \quad (48)$$

$$v_4 = Ri_4 + L_4(y) \frac{di_4}{dt} + \frac{4C_m}{(g_0 + y)^2} \dot{y}i_4 \quad (49)$$

Las ecuaciones (46 - 49) representan el modelo matemático del sistema CMA, sin embargo, para generar las fuerzas magnéticas se necesitan la aplicaciones de dos corriente eléctricas por medio de dos voltajes, esto implica que si se toman como señales de control los voltajes, será necesario calcular dichas señales por medio de algoritmos de control. Una forma de facilitar esta tarea es reducir las dinámicas eléctricas a una sola ecuación.

Considere las siguientes relaciones

$$i_3 = i_0 + i_y \quad (50)$$

$$i_4 = i_0 - i_y \quad (51)$$

$$v_3 = v_0 + v_y \quad (52)$$

$$v_4 = v_0 - v_y \quad (53)$$

Donde  $i_0$  e  $i_y$  son la corriente constante de polarización y la corriente de control respectivamente;  $v_0$  y  $v_y$  los voltajes de polarización constante y de control

respectivamente. Este cambio de variables provoca que sólo se calcule la trayectoria de la corriente  $i_y$  por medio de la señal de voltaje  $v_y$ , por lo tanto, al aplicar este artificio se reduce el número de ecuaciones en la dinámica eléctrica. La dinámica eléctrica resultante queda como

$$v_y = Ri_y + \frac{1}{2}(L_3 + L_4)\frac{di_y}{dt} + 2C_m\left(\frac{i_0 + i_y}{(g_0 - y)^2} + \frac{i_0 - i_y}{(g_0 + y)^2}\right)\dot{y} \quad (54)$$

Las ecuaciones (46, 47 y 54) presentan el modelo matemático reducido para el sistema CMA, con esta representación no es posible aplicar las técnicas de control debido al entramado de las variables, por lo que el sistema será transformado al espacio de estados para reducir el orden de las ecuaciones diferenciales, de la forma  $\bar{y} = f(y_1, y_2, y_3, u_y)$ . Los estados del sistema son

$$y_1 = y \rightarrow \dot{y}_1 = \dot{y} \quad (55)$$

$$y_2 = \dot{y} \rightarrow \dot{y}_2 = \ddot{y} \quad (56)$$

$$y_3 = i_y \rightarrow \dot{y}_3 = \frac{di_y}{dt} \quad (57)$$

$$u_y = v_y \quad (58)$$

Realizando las operaciones necesarias, el sistema representado en el espacio de estados queda como

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (59)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{C_m}{m}\left(\frac{i_0 + y_3}{g_0 - y_1}\right)^2 - \frac{C_m}{m}\left(\frac{i_0 - y_3}{g_0 + y_1}\right)^2 - g + \frac{1}{m}F_{dy} \quad (60)$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{2R}{L_3 + L_4}y_3 - \frac{4C}{L_3 + L_4}\left(\frac{i_0 + y_3}{(g_0 - y_1)^2} + \frac{i_0 - y_3}{(g_0 + y_1)^2}\right)y_2 + \frac{2}{L_3 + L_4}u_y \quad (61)$$

Con la representación descrita por las ecuaciones (59 – 61), el diseño del esquema de control se facilita, sin embargo, esta tarea se ve obstaculizada por el hecho de que si queremos modificar la dinámica  $y_1$  a través de la señal  $u_y$ , resultaría en tarea compleja, ya que las variables de estados están relacionadas de manera cruzada y además presentan no linealidades. Una forma de resolver este

problema es transformar el sistema es variables de estados en la forma canónica del controlador.

El sistema (59 – 61) tiene un punto de equilibrio descrito como

$$\bar{y}_e = (y_{1e}, y_{2e}, y_{3e}) \quad (62)$$

El punto de equilibrio tiene que ver con las trayectorias deseadas del sistema. Por lo que partiendo de las ecuaciones (59 – 61), se llega a

$$\frac{C_m}{m} \left( \frac{i_0 + y_3}{g_0 - y_1} \right)^2 - \frac{C_m}{m} \left( \frac{i_0 - y_3}{g_0 + y_1} \right)^2 - g + \frac{1}{m} F_{dy} = 0 \quad (63)$$

Por lo tanto

$$y_{1e} = y_{1d} \quad (64)$$

$$y_{2e} = 0 \quad (65)$$

$$y_{3e} = \sqrt{ab(mg - F_{dy}) \left( \frac{1}{C_m(a - b)} \right) - i_0^2 + \left( \frac{c}{2} \right)^2} - \frac{c}{2} \quad (66)$$

$$a = (g_0 + y_{1d})^2 \quad (67)$$

$$b = (g_0 - y_{1d})^2 \quad (68)$$

$$c = \frac{2ai_0 + 2bi_0}{a - b} \quad (69)$$

La idea es que por medio del control las trayectorias del sistema  $\bar{y} = f(y_1, y_2, y_3)$  converjan al punto de equilibrio  $\bar{y}_e = (y_{1e}, y_{2e}, y_{3e})$ , logrando con esto el rendimiento requerido en el sistema. Una forma que permite lograr este objetivo es transformar el sistema (59 – 61) a la forma canónica controlable, el cual facilita el diseño del controlador, así como establecer trayectorias deseadas.

El cambio de coordenadas se define como  $\bar{e}_y = (e_{y1}, e_{y2}, e_{y3})$  establecidas como

$$e_{y1} = y_{1d} - y_1 \quad (70)$$

$$e_{y2} = y_2 \quad (71)$$

$$e_{y3} = \frac{C_m}{m} \left( \frac{i_0 + y_3}{g_0 - y_1} \right)^2 - \frac{C_m}{m} \left( \frac{i_0 - y_3}{g_0 + y_1} \right)^2 - g + \frac{1}{m} F_{dy} \quad (72)$$

Es decir, el error de posición deseada, el error de velocidad y el error de aceleración para compensar las fuerzas que interactúan en el sistema. Después de unos cálculos algebraicos y realizando algunas derivadas, se obtiene el sistema en el nuevo marco de coordenadas

$$\dot{e}_{y1} = e_{y2} \quad (73)$$

$$\dot{e}_{y2} = e_{y3} \quad (74)$$

$$\dot{e}_{y3} = f(\bar{e}) + g(\bar{e})u_y + d(t) \quad (75)$$

$$f(\bar{e}) = \frac{2C_m}{m} \left\{ \left[ \frac{(i_0 + y_3(e_{y3}))^2}{(g_0 - y_{1d} + e_{y1})^3} + \frac{(i_0 - y_3(e_{y3}))^2}{(g_0 + y_{1d} - e_{y1})^3} \right] e_{y2} + \left[ \frac{i_0 + y_3(e_{y3})}{(g_0 - y_{1d} + e_{y1})^2} + \frac{i_0 - y_3(e_{y3})}{(g_0 + y_{1d} - e_{y1})^2} \right] \left[ -\frac{2R}{L_1 + L_2} y_3(e_{y3}) - \frac{4C_m}{L_1 + L_2} \left( \frac{i_0 + y_3(e_{y3})}{(g_0 - y_{1d} + e_{y1})^2} + \frac{i_0 - y_3(e_{y3})}{(g_0 + y_{1d} - e_{y1})^2} \right) e_{y2} \right] \right\} \quad (76)$$

$$g(\bar{e}) = \frac{2C_m}{m} \left( \frac{i_0 + y_3(e_{y3})}{(g_0 - y_{1d} + e_{y1})^2} + \frac{i_0 - y_3(e_{y3})}{(g_0 + y_{1d} - e_{y1})^2} \right) \left( \frac{2}{L_1 + L_2} \right) \quad (77)$$

$$d(t) = \frac{1}{m} \frac{dF_{dy}}{dt} \quad (78)$$

$$y_3(e_{y3}) = \sqrt{\frac{a'b'}{C_m(a' + b')}} (me_{y3} + mg - F_{dy}) - i_0^2 + \left( \frac{c'}{2} \right)^2 - \frac{c'}{2} \quad (79)$$

$$a' = (g_0 + y_{1d} - e_{y1})^2 \quad (80)$$

$$b' = (g_0 - y_{1d} + e_{y1})^2 \quad (81)$$

$$c' = \frac{2a'i_0 + 2b'i_0}{a' - b'} \quad (82)$$

Esta representación condensa todas las no linealidades del sistema en la última ecuación de primer grado, por lo que si se quiere modificar la dinámica de la ecuación (73), la señal de control pasaría a través del sistema como una cadena de integradores hasta llegar al primer estado. Con esta realización, el diseño del esquema de control se facilita enormemente, ya que sólo se requiere el cálculo de una señal de control para lograrlo, además, si se logra por medio del control  $u_y$  que  $\bar{e}_y = (e_{y1}, e_{y2}, e_{y3}) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\bar{y} = f(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \bar{y}_e = (y_{1e}, y_{2e}, y_{3e})$  tanto como  $t \rightarrow \infty$ .

Para reconstruir los estados originales basta aplicar las siguientes relaciones

$$y_1 = y_{1d} - e_{y1} \quad (83)$$

$$y_2 = e_{y2} \quad (84)$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{a'b'}{C_m(a' + b')} (me_{y3} + mg - F_{dy}) - i_0^2 + \left(\frac{c'}{2}\right)^2} - \frac{c'}{2} \quad (85)$$

Con esta metodología se obtiene el modelado matemático del sistema CMA en la dirección  $y$ , incluyendo las dinámicas tanto eléctricas como mecánicas, este sistema presenta la ventaja de que sólo se requiere diseñar un esquema de control para gobernar al sistema en dicha dirección.

### III.1.5. Control por modos deslizantes.

Gobernar el comportamiento dinámico de un sistema es la principal premisa de la ingeniería de control. Con base al modelado matemático, se conocen las interacciones entre sí de las variables internas del sistema, sin embargo, cabe destacar que el modelado matemático representa una aproximación al sistema real, por lo que tener un perfil fidedigno del sistema se

torna complejo. La diferencia que existe entre la planta real y el modelo matemático nos lleva a tener imprecisiones a la hora de diseñar controladores y experimentar con los algoritmos. Desde el punto de vista de la ingeniería de control, la inexactitud del modelado puede ser clasificada en dos tipos: incertidumbre estructural (o paramétrica) e incertidumbre no estructural (o dinámica no modelada). El primero corresponde a inexactitudes en los términos incluidos en el modelo, mientras que el segundo tipo corresponde a inexactitudes en el orden del sistema, esta falta de exactitud tiene fuertes efectos en sistemas de control no lineal, por lo que en la práctica se debe hacer frente explícitamente. Un enfoque con el cual se puede atacar es el denominado control robusto (Slotine y Li, 1992), un caso particular para el control robusto es el llamado control por modos deslizantes.

El control robusto estudiado en este trabajo es: sistemas de estructura variable (*Variable Structure Systems* <VSS> por sus siglas en inglés), que es de gran importancia en el contexto de la teoría de control. Esta teoría surgió en los años 50 en lo que era la Unión Soviética liderada por los investigadores Stanislav Vasilievich Emelyanov, Vadim Utkin, U. Itkis, por mencionar a algunos, con el objetivo de enfrentar los problemas específicos asociados con los sistemas de estructura variable. La problemática asociada con este tipo de sistemas radica en que incluyen señales de control discontinuas, y por tanto las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de estos sistemas son discontinuas. Dentro de los sistemas VSS hay una rama de estudio caracterizado por tener un comportamiento “deslizante”.

Los sistemas VSS consisten en un conjunto de subsistemas continuos junto con una adecuada lógica de conmutación, con el cual se tienen propiedades ventajosas con el cambio de estas estructuras. En principio los sistemas VSS pueden ser representados por la conexión en paralelo de diferentes sistemas continuos llamados “estructuras” que actúan uno a la vez en el trayecto de entrada-salida. Una cierta lógica de conmutación maneja las estructuras.

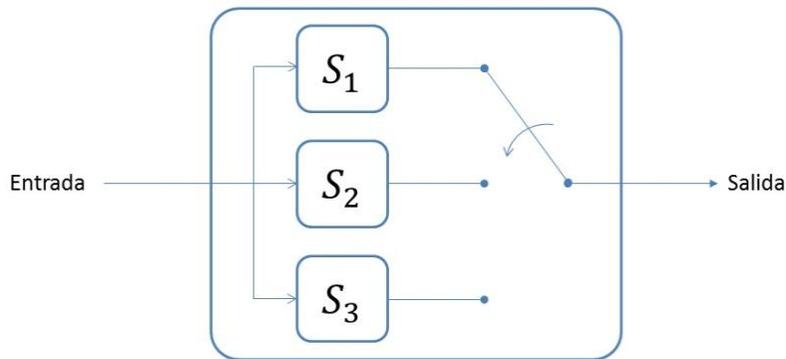


Figura 13. Interconexión de estructuras en una planta con entrada y salida.

A manera de ejemplo, una representación VSS puede ser como sigue:

$$\dot{x} = \begin{cases} 4x + u & \text{sí } x \leq -3 \\ 3 + u & \text{sí } -3 < x < 2 \\ -6x + u & \text{sí } x \geq 2 \end{cases} \quad (86)$$

El sistema (86) es la interconexión entre tres estructuras lineales, mientras el sistema completo es no lineal. Debe estar evidenciado que la interconexión entre plantas estables puede producir ya sea plantas estables o inestables, dependiendo de la lógica de conmutación (Utkin, 1992).

Una propiedad fundamental de los sistemas VSS es que frecuentemente exhiben un comportamiento particular llamado comportamiento en modos deslizantes o movimiento deslizante (*Sliding Mode Behaviour, Sliding Motion*), caracterizado por el hecho de que la conmutación entre los diferentes sistemas produce una frecuencia infinita.

En el contexto de la teoría de control, los sistemas VSS se derivan generalmente de la implementación de un control de retroalimentación discontinuo. Considere por ejemplo, el sistema  $\dot{x} = u$  bajo la acción de la retroalimentación discontinua  $u = -\text{sign}(x)$ , el sistema en lazo cerrado es autónomo.

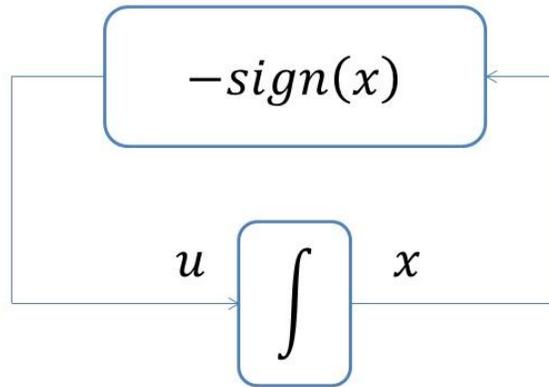


Figura 14. Lazo cerrado con retroalimentación discontinua (Pisano, 2000).

$$\dot{x} = \begin{cases} 1 & \text{sí } x \leq 0 \\ -1 & \text{sí } x > 0 \end{cases} \quad (87)$$

El sistema comienza con una condición inicial positiva, la estructura  $\dot{x} = -1$  es primeramente habilitada, mientras que  $x$  se aproxima a 0 hasta que la superficie discontinua  $x = 0$  es alcanzada. Lo mismo pasa sí la condición inicial es negativa. Una vez que el punto  $x = 0$  es alcanzada, es evidente que tan pronto  $x$  se aproxima a  $0^+$ , dirigido por la estructura correspondiente  $\dot{x} = 1$ , inmediatamente  $\dot{x} = -1$  se redirige a cero, de forma que este proceso se repite infinitamente rápido para todo el tiempo subsecuente. Por lo tanto, después de que el punto  $x = 0$  ha sido alcanzado, las dos estructuras conmutan a infinita frecuencia, y la superficie discontinua  $x = 0$  es un conjunto invariante para el movimiento del sistema VSS. Tal sistema se dice que realiza el modo deslizante (*Sliding Mode*) sobre la superficie de deslizamiento (*Sliding Manifold*)  $x = 0$ .

Mediante una simulación se puede verificar que el movimiento deslizante exhibido por el sistema (87) es robusto contra perturbaciones aditivas y multiplicativas actuando en el canal de control. La metodología generalmente es referida como control por modos deslizantes (*Sliding Mode Control, SMC*), el cual es aprovechada para propósitos de control y las propiedades del comportamiento del modo deslizante se ven reflejadas en la insensibilidad a las variaciones de los parámetros y el rechazo de las perturbaciones acopladas.

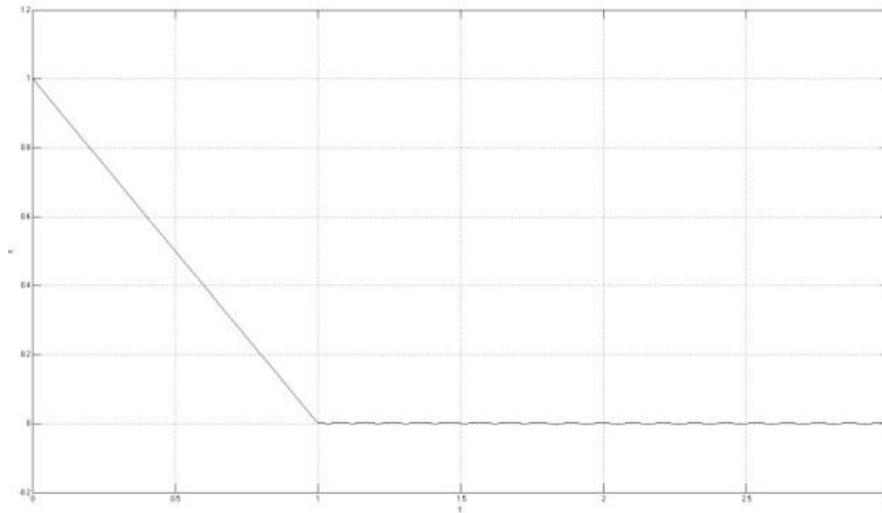


Figura 15. Respuesta dinámica del lazo cerrado discontinuo.

Se puede verificar por simulación que el movimiento deslizante exhibido por el sistema (87) es robusto contra perturbaciones aditivas y multiplicativas actuando en el canal de control. Refiérase a perturbaciones como en la Fig. (16), el modo deslizante es mantenido si la perturbación exógena  $\Delta_a$  y  $\Delta_m$  son  $\Delta_m(t) > 0$  y  $|\Delta_a(t)/\Delta_m(t)| < 1$ .

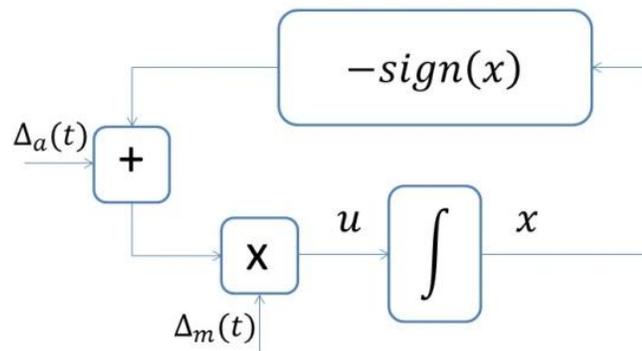
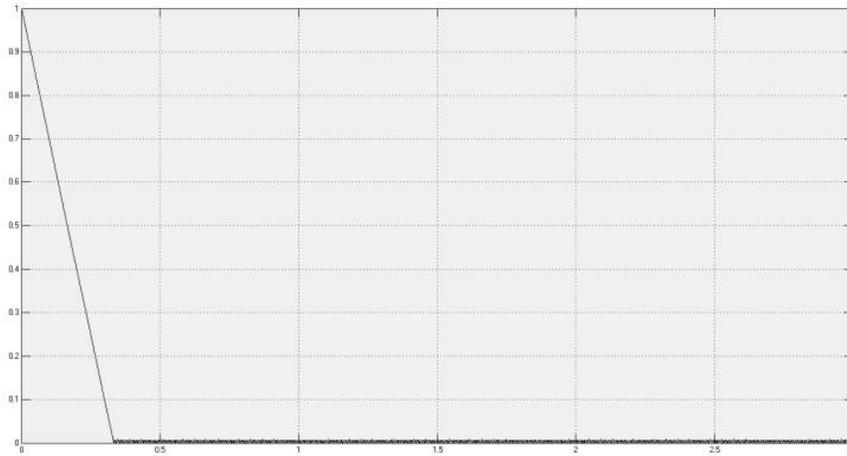
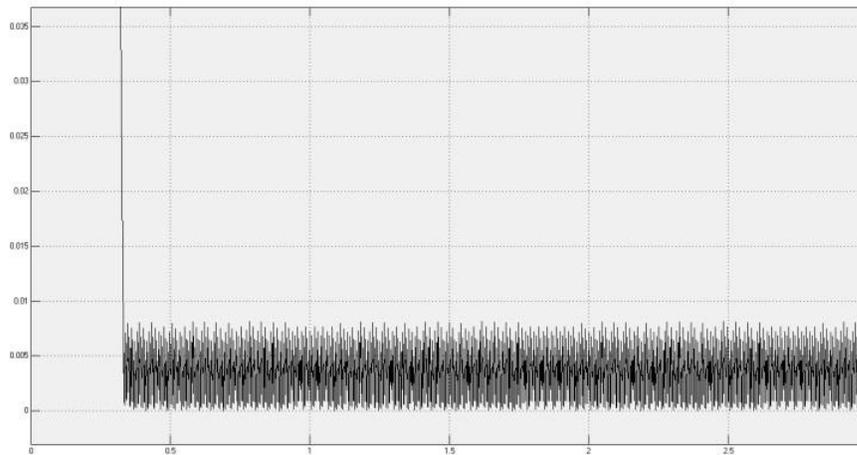


Figura 16. Lazo cerrado discontinuo con perturbaciones acopladas (Pisano, 2000).

En la Figura (17), se muestra el desempeño del lazo cerrado discontinuo con perturbaciones acopladas en la entrada del control, se observa en la ampliación Figura (17b) que el sistema converge a la superficie y donde el efecto de la conmutación de alta frecuencia debido a la función signo se hace evidente.



a)



b)

Figura 17. a) Comportamiento del lazo cerrado discontinuo con perturbaciones acopladas. b) Ampliación de la superficie de deslizamiento  $x=0$ .

El enfoque de modos deslizantes consiste en dos pasos: el primer paso, la selección de la superficie de deslizamiento (*Manifold*) en el espacio de estados, tal que, una vez que las trayectorias del estado son restringidas en el mismo, la planta controlada exhibe el comportamiento deseado; el segundo paso, el diseño de la retroalimentación discontinua de estados capaz de forzar al sistema a alcanzar en tiempo finito a la superficie de deslizamiento.

Durante el movimiento deslizante, el llamado “principio de invariancia” (Drazenovic, 1969) (Levant y Fridman, 1996) puede ser invocado, cualquier

sistema perteneciente a cierto conjunto se comporta en la misma. Esto motiva a estudiar por qué este enfoque es adecuado para lidiar con incertidumbre en el sistema. En otras palabras, diferentes sistemas realizando un modo deslizante sobre la misma superficie podría exhibir el mismo comportamiento, el cual depende sólo de la superficie por donde el modo deslizante ocurre. En cierto sentido, el modo deslizante “borra” la dinámica del sistema original y lo reemplaza con la adecuada superficie de deslizamiento. Otra interesante peculiaridad del comportamiento en modo deslizante es la restricción geométrica representada por la superficie de deslizamiento, un sistema en modo deslizante se comporta como un sistema de orden reducido respecto a la planta original.

Actualmente la técnica de control de modos deslizantes es utilizada en multitud de aplicaciones por su versatilidad, puesto que se puede aplicar en muchos tipos de sistemas (lineales, no lineales, SISO, MIMO, discretos, estocásticos, etc.) y también por su capacidad de añadir robustez en el comportamiento del sistema.

#### *Control por modos deslizantes de primer orden.*

En esta sección se presentan los aspectos generales del control por modos deslizantes, tales como: la selección de la superficie de deslizamiento, el control equivalente y la retroalimentación discontinua para la estabilidad y robustez del punto de equilibrio mediante el análisis de Liapunov y por último la estructura del algoritmo *Super-Twisting*. Estos aspectos serán empleados para el diseño del esquema de control para el sistema de levitación magnética.

Considere un sistema general en el espacio de estados

$$\dot{x} = f(x, u, d) \tag{88}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es un vector el cual representa el estado y  $u \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control. Se asume que  $f(\cdot)$  es diferenciable con respecto a  $x$  y absolutamente continua con respecto al tiempo. La cantidad  $d \in \mathbb{R}^q$  representa las

perturbaciones e incertidumbres externas y acotadas del sistema. Considere la superficie en el espacio de estados dada por

$$\mathcal{S} = \{x : \sigma(x) = 0\} \quad (89)$$

Un modo deslizante ideal se dice que toma lugar en ecuación (89) si los estados  $x(t)$  evolucionan con el tiempo tal que  $\sigma(x(t_r)) = 0$  y para algún tiempo  $t_r \in \mathbb{R}^+$  y  $\sigma(x(t)) = 0$  para todo  $t > t_r$ .

El vector  $\sigma$  es referido como superficie de deslizamiento (*Sliding Surface*) y es seleccionada de una manera particular. En el diseño de un controlador en modos deslizantes, se desea la siguiente relación

$$x_n = -k_1x_1 - k_2x_2 - \dots - k_{n-1}x_{n-1} \quad (90)$$

Lo cual produce la siguiente superficie de deslizamiento

$$\sigma = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{n-1}x_{n-1} + x_n \quad (91)$$

de forma que las ganancias  $k_i$  son seleccionadas de tal forma que el siguiente polinomio (92) sea Hurwitz y describe la dinámica deseada del sistema sobre la superficie.

$$\lambda^{n-1} + k_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + k_2\lambda + k_1 = 0 \quad (92)$$

#### *Concepto de control equivalente.*

El control equivalente es la acción de control necesaria para mantener un movimiento deslizante ideal sobre  $\mathcal{S}$ . La idea es explotar el hecho que en un modo deslizante convencional ambos  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ . La restricción de la derivada de  $\sigma$  puede ser descrita como

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u, d) = 0 \quad (93)$$

Esto representa una ecuación algebraica en  $x$ ,  $u$  y  $d$ , por definición, la señal de control equivalente  $u_{eq}(t)$ , el cual es la función de control continuo requerida para mantener el deslizamiento, es la solución a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u, d) = 0 \quad (94)$$

Por ejemplo, considere el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d \quad (95)$$

La estructura específica, el cual ha sido impuesto aquí asegura que para una  $x$  dada, la entrada de control aparece lineal. Consecuentemente la ecuación (94) se simplifica a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)u_{eq} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} d = 0 \quad (96)$$

y entonces, siempre que  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x)$  sea no singular, de la ecuación (96) se tiene

$$u_{eq} = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x) - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} d \quad (97)$$

La respuesta del lazo cerrado es dada sustituyendo la expresión (97) en (95) para obtener

$$\dot{x} = \left( I - g(x) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(x) - \left( I - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) d \quad (98)$$

Observaciones: la expresión para el control equivalente  $u_{eq}$  en (97) viene de formalmente resolver la ecuación (94), considerada como una ecuación algebraica. Por lo tanto, es bastante independiente a la señal de control el cual es actualmente aplicado. La señal de control el cual es físicamente aplicado a la planta puede ser discontinua esencialmente. El control equivalente depende de la perturbación  $d(t)$ , el cual generalmente será desconocido, por lo que el control equivalente físicamente no será implementado. El control equivalente es mejor

visto como un concepto abstracto para facilitar la creación de una expresión de un sistema reducido (Shtessel, 2013).

*Estabilidad del controlador en modos deslizantes de primer orden.*

Considere el sistema dinámico no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(t) \quad (99)$$

La superficie de deslizamiento de la forma

$$\sigma = \sigma(t) \quad (100)$$

y su derivada temporal

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \dot{x} = G(x)\dot{x} = G(x)[f(x) + g(x)u + d(t)] \quad (101)$$

De forma que se logre estabilidad asintótica del punto de equilibrio  $\sigma = 0$  en la función de Lyapunov, las siguientes condiciones deben ser satisfechas:

- a)  $\dot{V} < 0$ , para  $\sigma \neq 0$ , es decir, negativa definida.
- b)  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$ , es decir, positiva definida
- c) Si se quiere lograr una convergencia en tiempo finito (globalmente estable en tiempo finito), la condición (a) se modifica, con  $\alpha > 0$ .

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} \quad (102)$$

La función candidata de Lyapunov propuesta es de la forma

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (103)$$

La derivada temporal de la función  $V$  esta dada por

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} \quad (104)$$

$$\dot{V} = \sigma [G(x)f(x) + G(x)g(x)u + G(x)d(t)] \quad (105)$$

El control equivalente asociado al sistema para que la solución a la ecuación  $\dot{\sigma} = 0$  permanezca en régimen deslizante y se logre el sistema de orden reducido, está dada por

$$u_{eq} = (G(x)g(x))^{-1}[-G(x)f(x) + G(x)d(t) + v] \quad (106)$$

siempre que  $\det(G(x)g(x)) \neq 0$  y  $[G(x)g(x)]^{-1}$  exista.

Por lo que  $\dot{V}$  es reducido a

$$\dot{V} = \sigma[G(x)d(t) + v] \quad (107)$$

Si  $|G(x)d(t)| < L$ , entonces la condición de seminegativa definida se cumple sí

$$\dot{V} \leq |\sigma|L + \sigma v \quad (108)$$

Seleccionando  $v = -k \text{sign}(\sigma)$ , con  $k > 0$ , entonces

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|k = |\sigma|(L - k) \quad (109)$$

Para lograr convergencia finita se usa la ecuación 103 y la ecuación 102

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (110)$$

Combinando las ecuaciones (109 y 110) se tiene que

$$\dot{V} \leq |\sigma|(L - k) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \quad (111)$$

Por lo que la ganancia de la función discontinua queda como

$$k = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (112)$$

Control por modos de segundo orden.

Considere el sistema dinámico

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u \quad (113)$$

$$\sigma = \sigma(t, x) \quad (114)$$

de grado relativo uno y suponga que

$$\dot{\sigma} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (115)$$

Además, asuma que para algunas constantes positivas  $C$ ,  $K_M$ ,  $K_m$ ,  $U_M$ ,  $q$

$$\begin{aligned} |\dot{h}| + U_M |\dot{g}| &\leq C \\ 0 &\leq K_m \leq g(t, x) \leq K_M \\ \left| \frac{h}{g} \right| &< qU_M \\ 0 &< q < 1 \end{aligned} \quad (116)$$

permanecen y definen

$$u = -\lambda |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + u_1 \quad (117)$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u & , |u| > U_M \\ -a \text{sign}(\sigma) & , |u| \leq U_M \end{cases} \quad (118)$$

El siguiente resultado es obtenido. Con  $K_m \alpha > C$  y  $\lambda$  suficientemente grande, el controlador (117 - 118) garantiza la aparición del modo deslizante de segundo orden  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$  en el sistema (113), el cual atrae las trayectorias en tiempo finito. El control  $u$  entra en tiempo finito en el segmento  $[-U_M, U_M]$  y permanece ahí mismo. Nunca deja el segmento si el valor inicial está dentro desde el inicio. Este controlador es llamado *algoritmo Super-Twisting*.

### III.2. Desarrollo metodológico.

Un punto importante en el diseño y control de CMA es garantizar el funcionamiento global del sistema, desde los pequeños bloques hasta la piedra angular que conforman el aparato. En esta sección se propone un proceso de diseño de un CMA, el cual está estructurado como lo indica la Figura (18). Cada bloque representa un avance recursivo en el proceso de diseño.

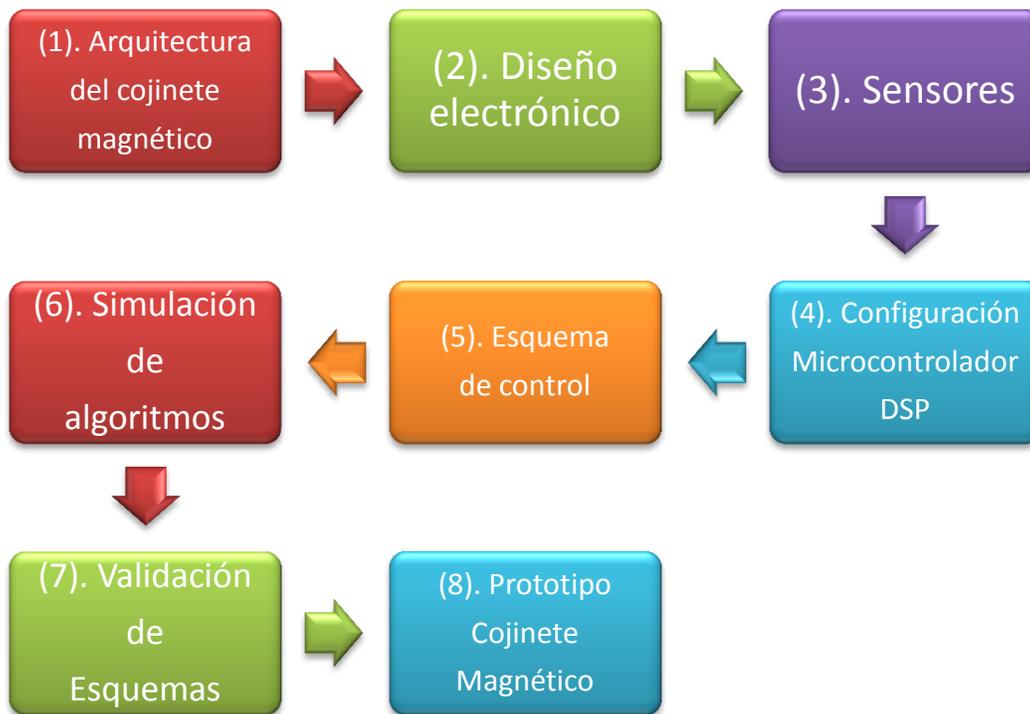


Figura 18. Proceso de diseño de un CMA.

#### III.2.1. Arquitectura del cojinete magnético.

La arquitectura del CMA está basado en el trabajo de Delfín *et al* (2013), donde se definen las dimensiones del núcleo magnético y las bobinas, tomando como punto de partida las fuerzas máximas de interacción en el sistema, tales como la fuerza de desbalanceo y la masa del rotor, esta fuerza máxima de interacción es soportada directamente por los electroimanes, por lo que se

procede a calcular la corriente necesaria para generar dicha fuerza tomando en cuenta el material con propiedades ferromagnéticas y su máxima densidad de flujo permisible antes de la saturación magnética, además, el material metálico es seleccionado con forma laminar para minimizar las pérdidas por corrientes parásitas generadas por la alta frecuencia de conmutación, se establece el número de vueltas de alambre magneto, el espacio del entrehierro, el número de polos y la sección transversal del polo; con estos datos se dimensiona el CMA tomando el criterio del mínimo espacio y máxima fuerza.

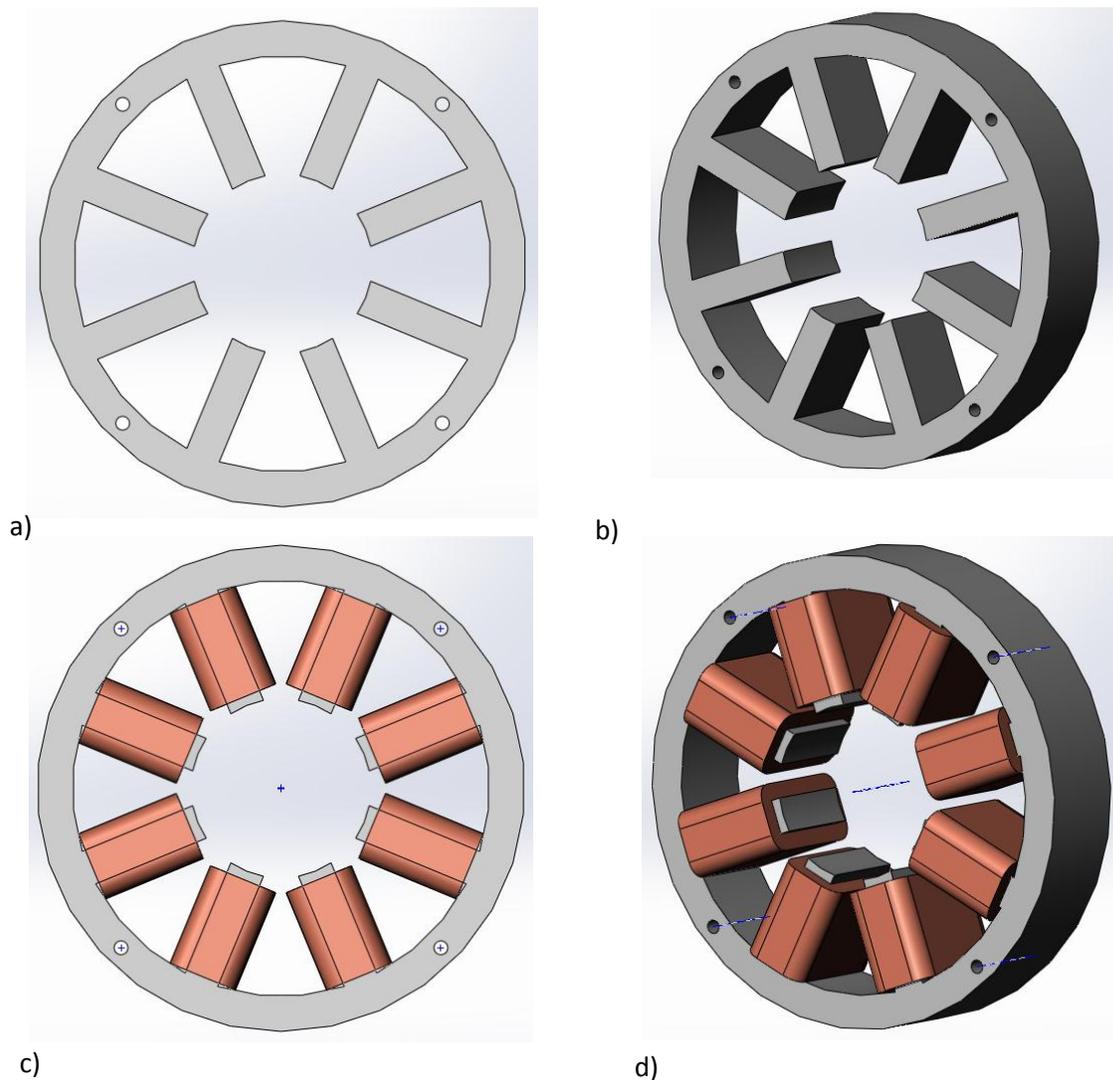


Figura 19. Arquitectura del CMA de ocho polos. a) Lámina de acero al silicio. b) Núcleo compuesto por un conjunto de láminas de acero al silicio. c) Vista frontal del CMA. d) Vista isométrica del CMA.

### III.2.2. Diseño electrónico.

El diseño electrónico contempla principalmente las etapas de potencias que suministrarán de la energía eléctrica a las bobinas del CMA. Consiste en un circuito transistorizado tipo MOSFET, el cual se utiliza en modo corte saturación por medio de una señal de PWM (Pulse Width Modulation, por sus siglas en inglés) en la compuerta del semiconductor y conectado en serie a la bobina correspondiente, de modo que con este tipo señal el controlador genere un voltaje promedio en la bobina y regular la corriente. El circuito electrónico está acompañado de un pre-driver, se trata de un circuito integrado capaz de disparar mediante un voltaje en la compuerta de los transistores tipo MOSFET con tecnología TTL, presentando la ventaja de que las señales digitales provenientes del microcontrolador están aisladas, lo que brinda mayor seguridad de protección entre la etapa de potencia y el sistema digital.

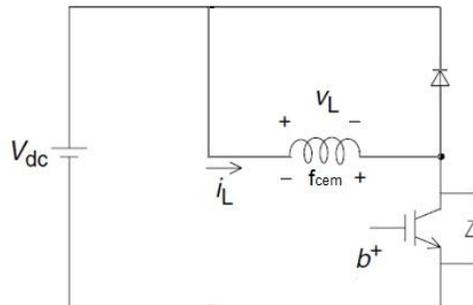


Figura 20. Circuito básico para la conmutación de la bobina con el voltaje de alimentación.

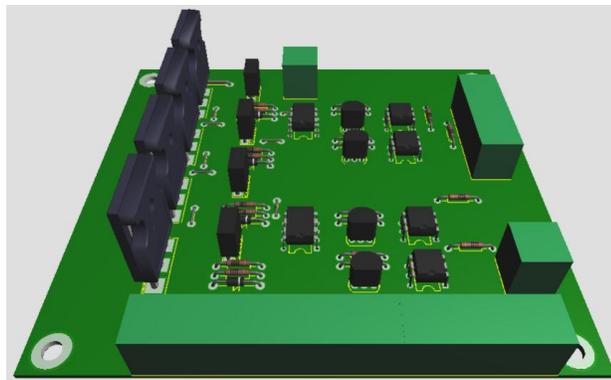
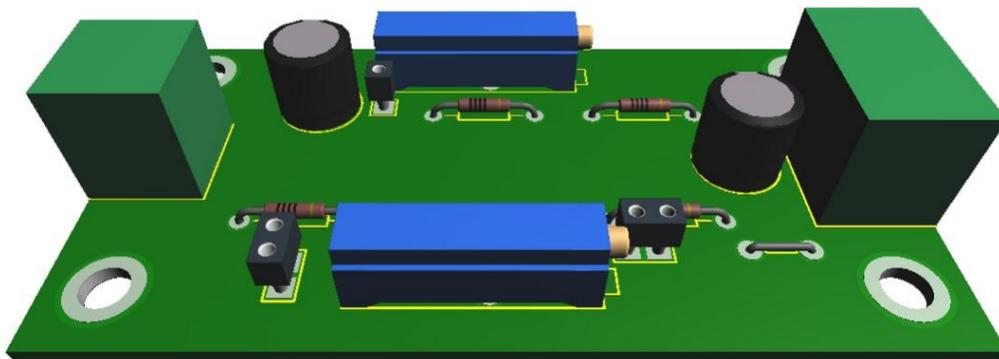


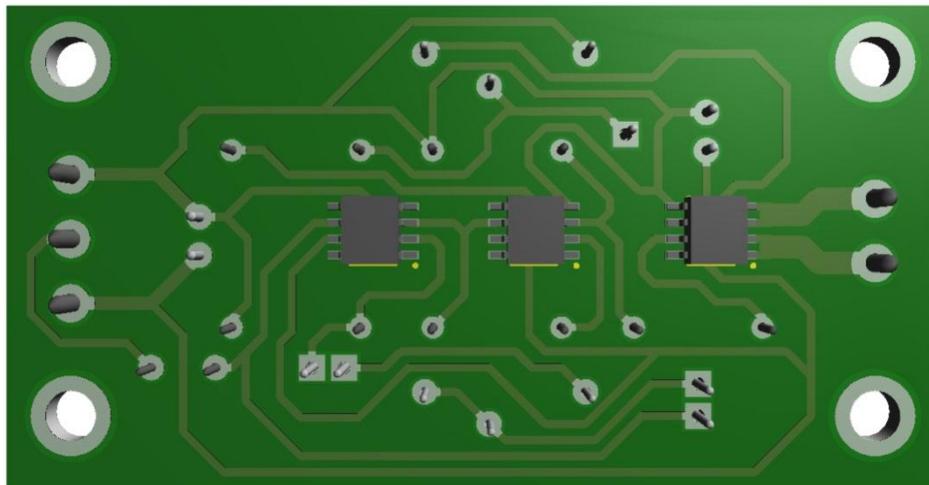
Figura 21. Circuito electrónico de potencia para CMA.

### III.2.3. Sensores.

Los sensores corresponden al monitoreo de las corrientes que pasan por las bobinas y el desplazamiento del rotor en la dirección vertical y horizontal. Para el sensor de corriente se utiliza un sensor de efecto Hall con relación entrada-salida lineal y valores de operación de -20 A a 20 A de entrada y 0 V a 5 V de corriente directa como salida, seguido de una etapa de amplificadores operacionales para establecer el rango y la resolución, además de adecuar la señal a 3.3 V para la entrada al microcontrolador.



a)



b)

Figura 22. Circuito electrónico para el sensor de corriente. a) Vista superior. b) Vista inferior.

El sensor de posición comprende de una bobina impresa sobre la placa de baquelita (conocida como *pcb-coil*), este elemento tiene una inductancia y está conectada en paralelo a un capacitor de tal forma que definen un circuito tanque, el circuito tanque es sometido a resonancia por medio de una señal de voltaje oscilante generado por un circuito integrado llamado convertidor de inductancia a digital (LDC1000 de Texas Instruments), cuando el circuito tanque se acerca a una superficie metálica se generan corrientes parásitas en la placa de metal, de modo que se crea una autoinductancia entre la *pcb-coil* y la superficie metálica, logrando con esto que se produzca un cambio en la inductancia de la bobina , estos cambios de inductancia son detectados por el circuito integrado y convertidos en una señal digital de tipo serial síncrono. La señal digital tiene una resolución de dos bytes de información directamente relacionados con los cambios de inductancia, por lo que pueden ser correlacionados con el desplazamiento entre la superficie metálica y la *pcb-coil*.

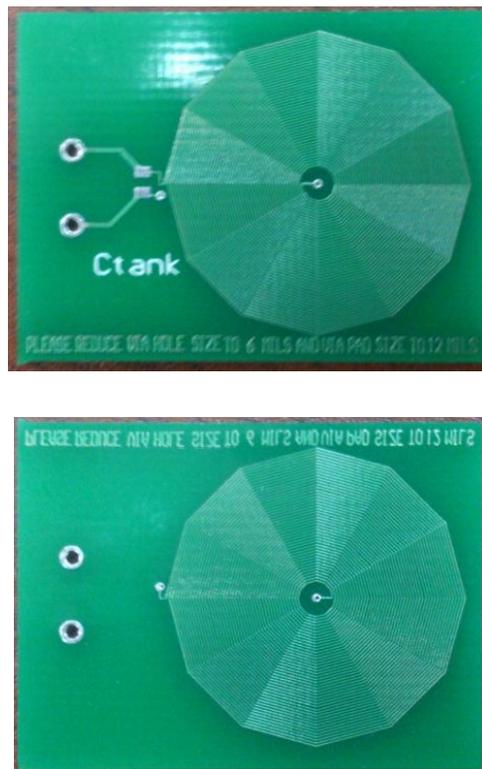


Figura 23. PCB-COIL para el circuito tanque.

### III.2.4. Microcontrolador.

El ambiente embebido para la implementación de los algoritmos es el DSP Delfino F28335 de la familia C2000 de Texas Instruments, este dispositivo tiene una arquitectura Harvard de 32 bits con operaciones en punto flotante, hasta 8 generadores de PWM, 12 entradas de ADC, tiene capacidad de realizar operaciones de hasta 100 MSPS, un cristal de operación de 150 MHz, lo que lo hace un candidato idóneo para realizar las operaciones requeridas por el algoritmo de control.

Las señales de los sensores de corriente son conectados a las entradas de ADC y las señales de los sensores de posición (son digitales) se comunican de manera serial síncrona, estos datos son requeridos por el algoritmo de control para regular la fuerza magnética a través de las señales PWM.

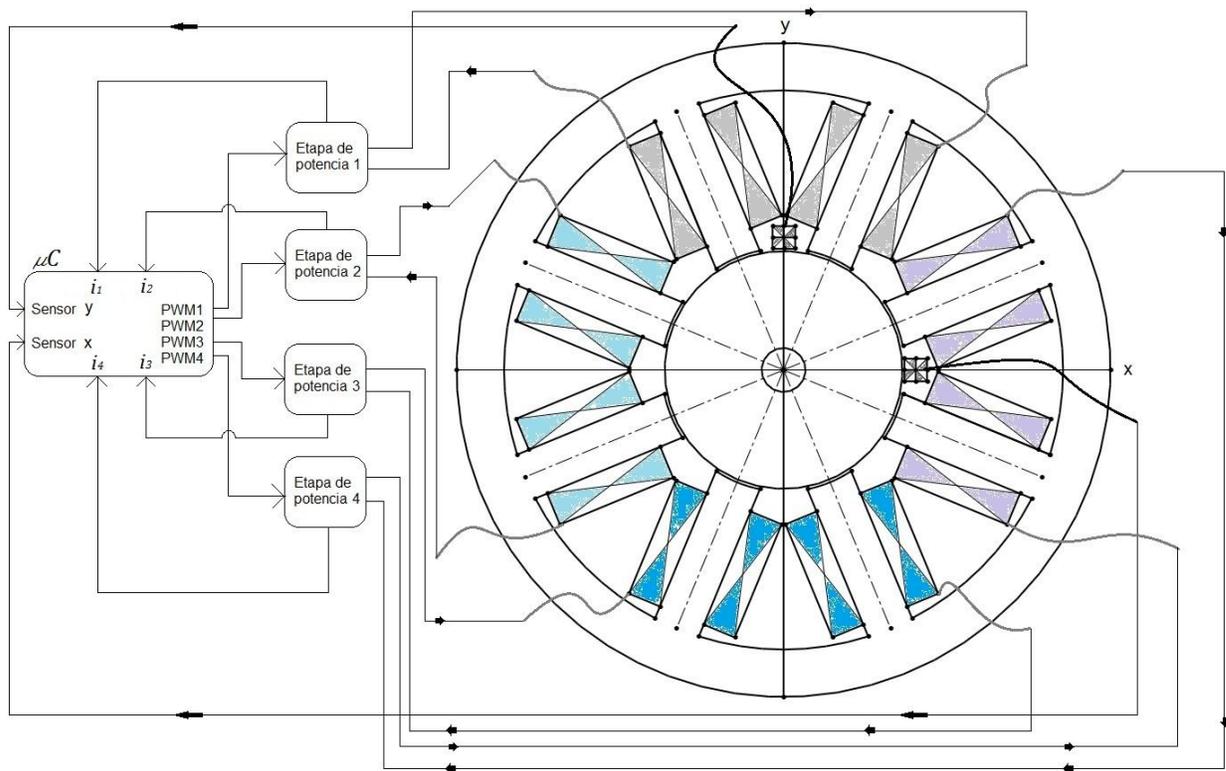


Figura 24. Conexión de las señales de los sensores al microcontrolador.

### III.2.5. Esquema de control.

El esquema de control es llevado a cabo por medio de la metodología desarrollada en el marco teórico. A continuación se describen los algoritmos de control basados en el modelo matemático del sistema CMA en la dirección  $y$ .

*Controlador por modos deslizantes de primer orden.*

La superficie de deslizamiento para el sistema (73 - 75) queda como

$$\sigma = k_1 e_{y1} + k_2 e_{y2} + e_{y3} \quad (119)$$

El control equivalente para mantener el modo deslizante, queda como

$$u_y = \left( \frac{1}{g(\bar{e})} \right) (-f(\bar{e}) - k_2 e_{y3} - k_1 e_{y2} + \psi) \quad (120)$$

$$\psi = -K \text{sign}(\sigma) \quad (121)$$

El control garantiza que

*Controlador por modos deslizantes de segundo orden.*

Bajo el mismo esquema de superficie de deslizamiento de la ecuación (119) y el control equivalente en la ecuación (120), el algoritmo *Super-Twisting* queda como:

$$\begin{aligned} \psi &= -K_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + \omega \\ \dot{\omega} &= -K_1 \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (122)$$

Con estos controladores se logra por medio del control  $u_y$  que  $\bar{e}_y = (e_{y1}, e_{y2}, e_{y3}) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\bar{y} = f(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \bar{y}_e = (y_{1e}, y_{2e}, y_{3e})$  tanto como  $t \rightarrow \infty$ .

### III.2.6. Prototipo de cojinete magnético activo.

Con base a los resultados en el proceso de diseño, se dibujó en un software de CAD las dimensiones del cojinete magnético, dando como resultado la siguiente simulación del prototipo de CMA con rotor horizontal propuesto.

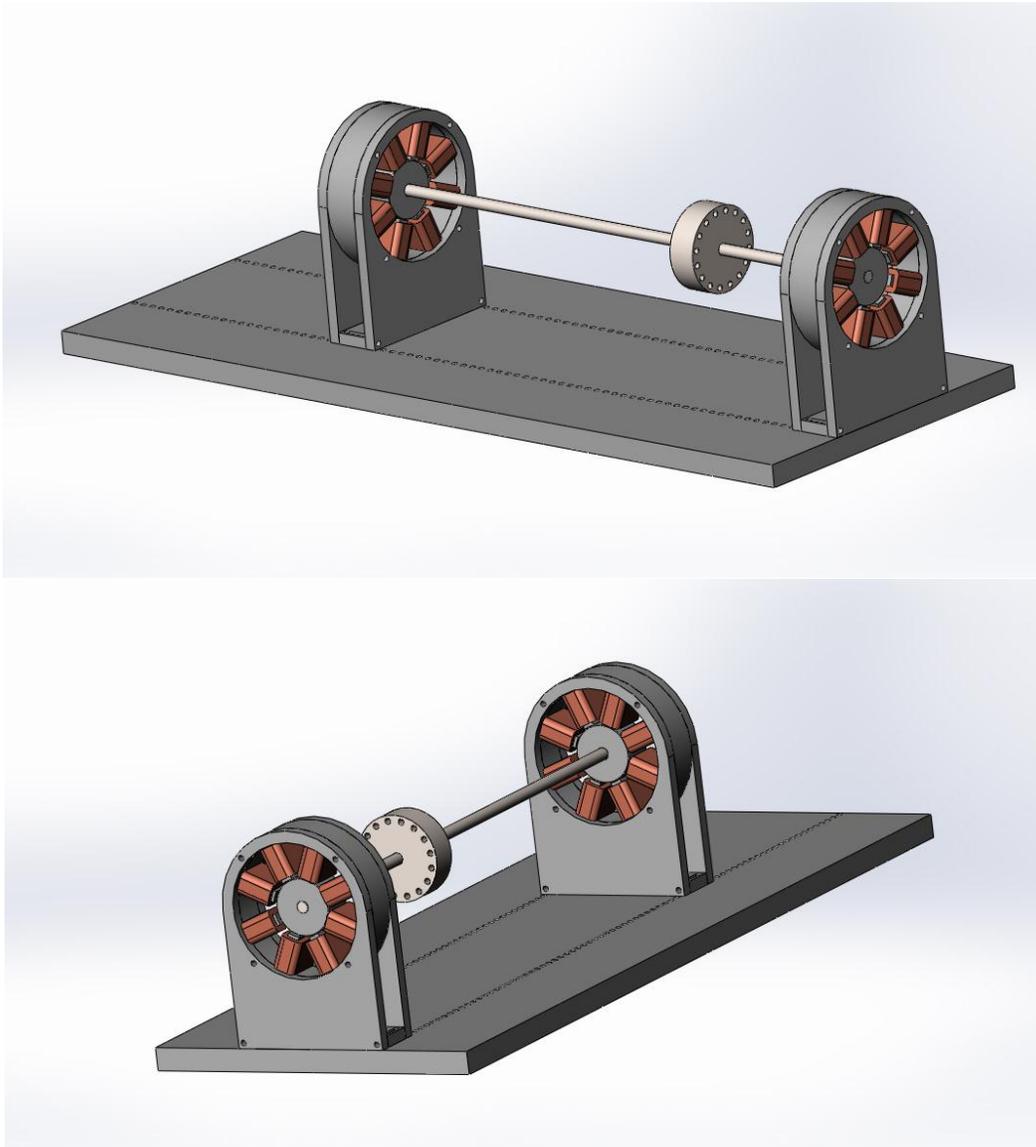


Figura 25. Vistas isométricas del prototipo de rotor horizontal.

# Capítulo 4.

## IV. Resultados y discusiones.

Se muestran los resultados a manera de simulación los algoritmos de control para el sistema de levitación magnética. Los parámetros del sistema están listados en la tabla (4).

Tabla 4. Parámetros del sistemas CMA.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
<b>Masa</b>	$m$	4	<b>Kg</b>
<b>Constante magnética</b>	$C$	3.258* $10^{-6}$	
<b>Resistencia eléctrica</b>	$R$	2.169	<b><math>\Omega</math></b>
<b>Constante gravedad</b>	$g$	9.81	<b><math>m/s^2</math></b>
<b>Entrehierro nominal</b>	$g_0$	0.001	<b>m</b>
<b>Inductancia nominal</b>	$L_0$	0.0065	<b>H</b>
<b>Corriente de polarización</b>	$i_0$	0.001	<b>A</b>
<b>Voltaje de polarización</b>	$v_0$	0.0022	<b>V</b>
<b>Excentricidad</b>	$\varepsilon_r$	0.001	<b>m</b>
<b>Velocidad angular</b>	$\omega_r$	523.5988	<b>rad/s</b>
<b>Fuerza de desbalanceo</b>	$F_d = m\varepsilon_r\omega_r^2 \sin(\omega_r t)$	<b>1096.6*<math>\sin(\omega_r t)</math></b>	<b>N</b>

*Control por modos deslizantes de primer orden.*

En primera instancia se muestran las simulaciones del controlador en modos deslizantes de primer orden. Las ganancias de la superficie de deslizamiento son:  $k_1 = 150$ ,  $k_2 = 50$ , y la ganancia de la función discontinua  $K = 3$ . En la Figura (26) se muestran las convergencias de las trayectorias del desplazamiento del rotor en la dirección vertical  $y_1$  y el error de posición  $e_{y1}$

respectivamente, cuando la referencia es  $y_{1d} = 0$ , además, se aprecia el perfil de velocidad  $e_{y2} = y_2$  necesaria para llegar al *setpoint*. En la Figura (27) está representada la evolución de la señal de control  $u_y$  que genera la corriente  $y_3$  en el sistema reducido, como elemento de seguridad, en la simulación se ha puesto una saturación en el voltaje para delimitar la corriente eléctrica que circula por la bobina, esto con el fin de comprobar que el controlador genere trayectoria coherentes con la realidad y no caiga en valores que jamás se alcanzarían de manera práctica. Para ilustrar las virtudes del controlador, el sistema está continuamente perturbado por la fuerza de desbalanceo y la fuerza de gravedad, por lo que el voltaje y la corriente en el electroimán superior se muestran en la Figura (28), así como del electroimán inferior mostradas por la Figura (29).

En la Figura (30) la superficie de deslizamiento está en función de los estados en el error, se hace evidente la discontinuidad de la superficie en  $\sigma = 0$ , debido a la alta frecuencia de conmutación de la función signo.

Por último, la gráfica X-Y (Figura 31) del desplazamiento del rotor cuando se implementa el sistema de control tanto para la dirección vertical como para la dirección horizontal. Mediante el control por modos deslizantes, los desplazamientos de la flecha se ven inalterada bajo la presenta de perturbaciones exógenas acotadas.

La aparente “mancha” en los voltajes y corrientes de los electroimanes es en realidad producido por la alta frecuencia de conmutación del controlador dentro de la función signo, por lo que el fenómeno del *chattering* se haría patente en el comportamiento mecánico del sistema.

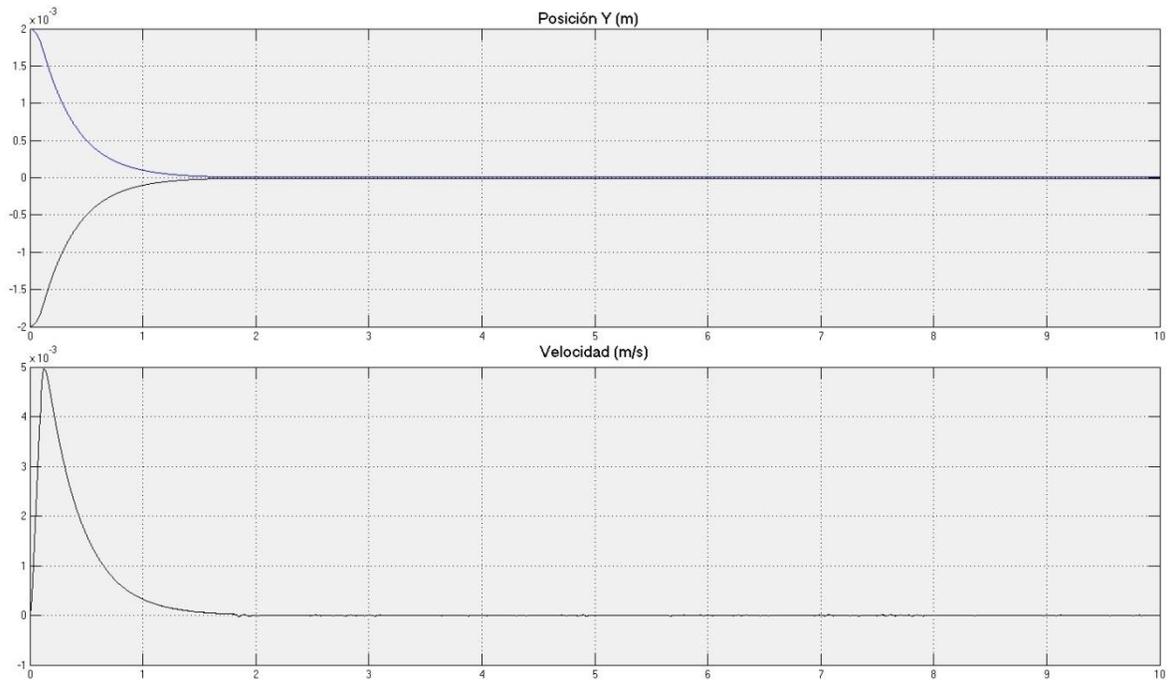


Figura 26. Trayectoria de la posición y velocidad del centro del rotor en la dirección vertical. a) Posición y error de posición. b) Velocidad del rotor

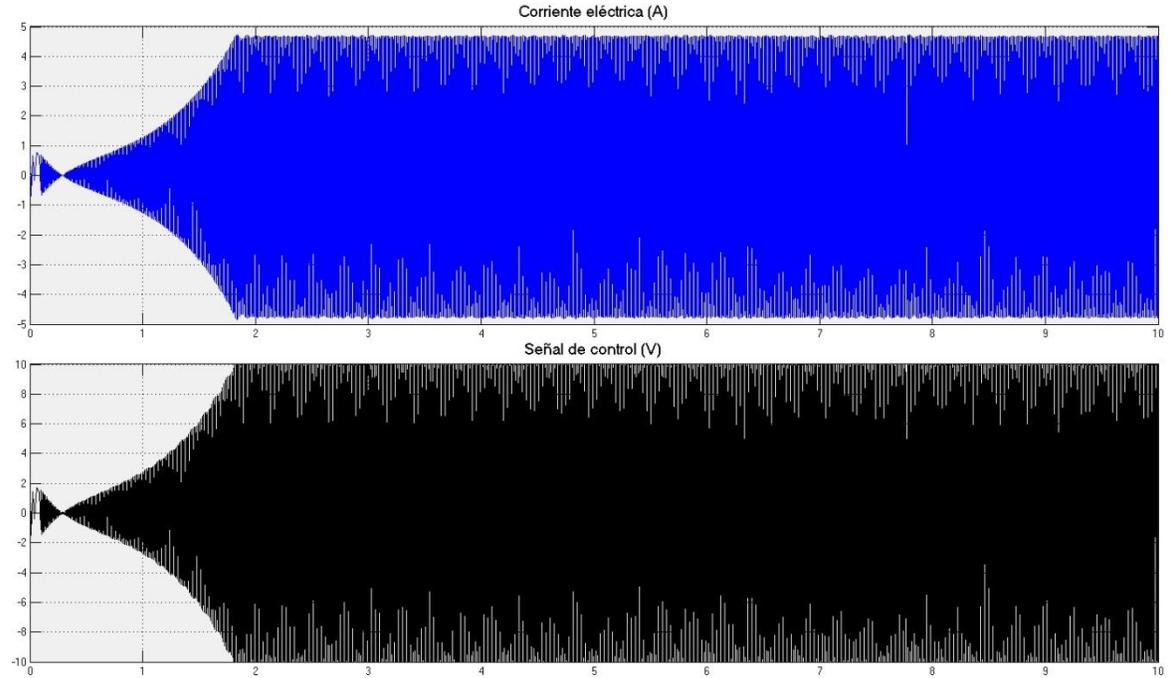


Figura 27. Trayectoria de la corriente y señal de control para el sistema en las coordenadas del error.

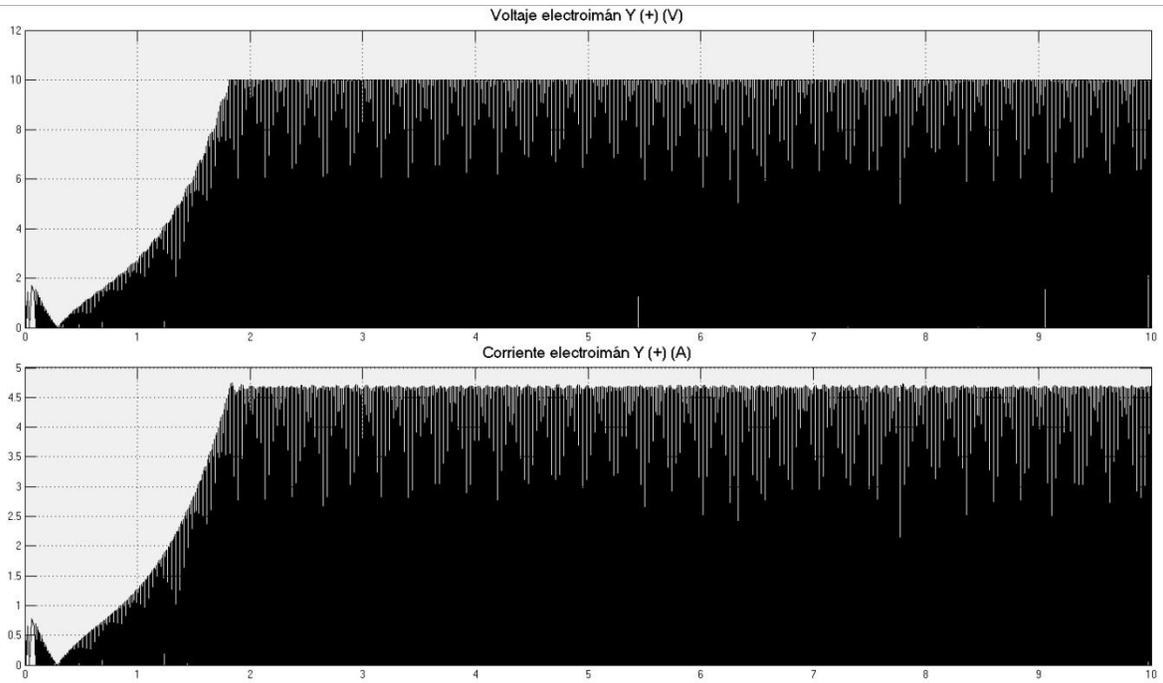


Figura 28. Voltaje aplicado en las terminales del electroimán superior y corriente eléctrica.

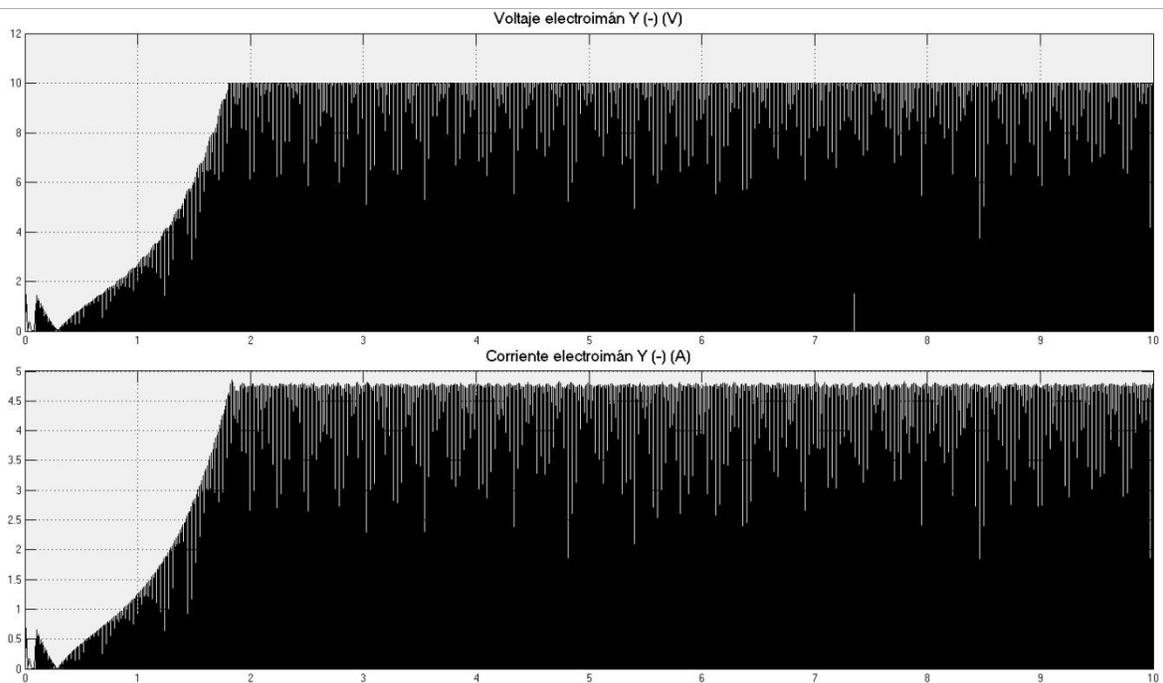


Figura 29. Voltaje aplicado en las terminales del electroimán inferior y corriente eléctrica.

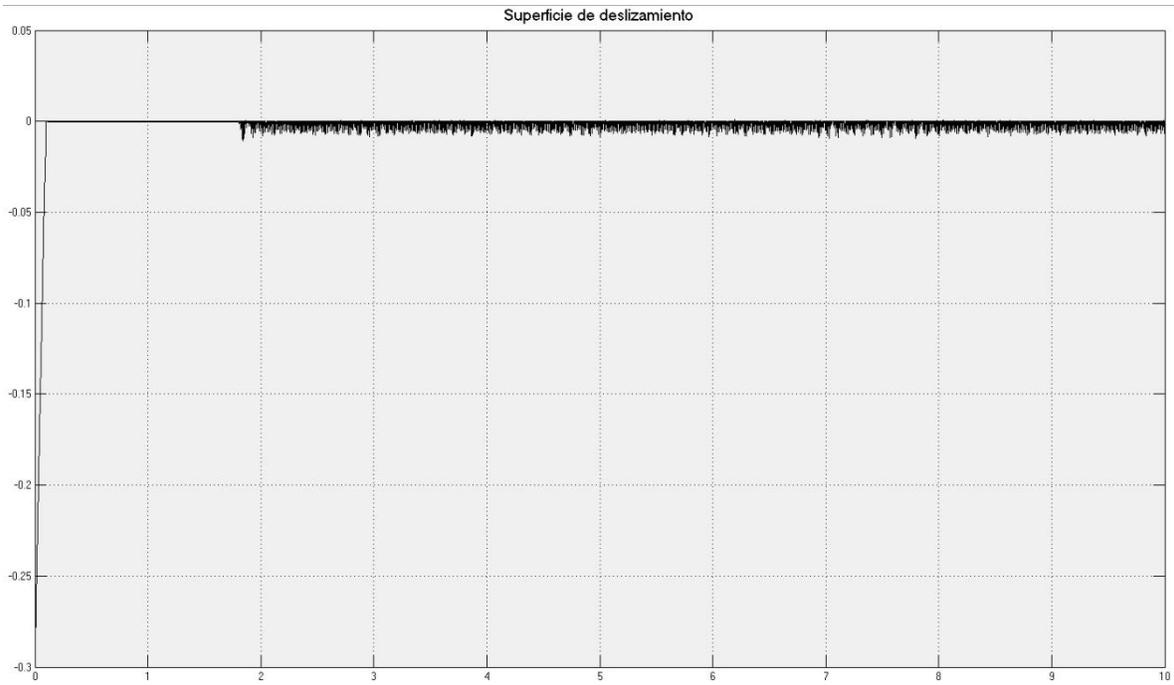


Figura 30. Superficie de deslizamiento en términos de los estados del error.

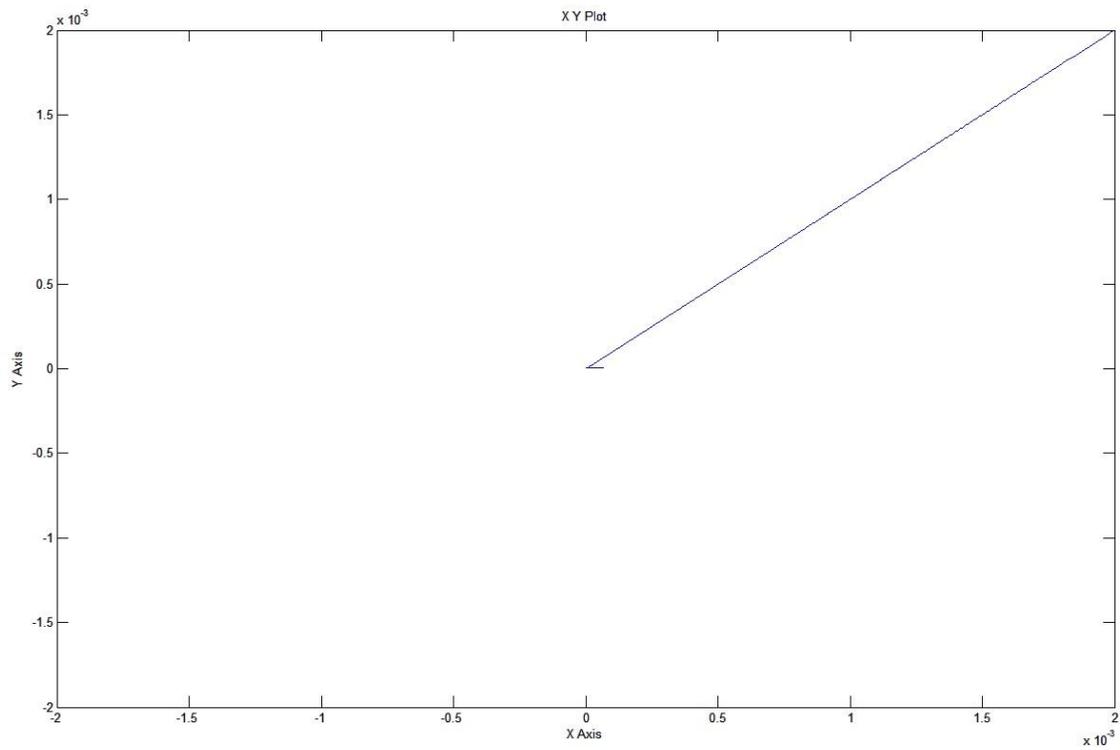


Figura 31. Trayectoria del centro del rotor bajo el dominio del control en modos deslizantes de primer orden.

### *Control por modos deslizantes de segundo orden.*

Para lidiar con el fenómeno del *chattering* y minimizar las amplitudes del mismo, el *algoritmo Super-Twisting* logra reducir los efectos de la conmutación de alta frecuencia por medio de una señal de control continua.

A continuación se presentan las gráficas de la simulación del controlador con el sistema CMA. Las ganancias de la superficie de deslizamiento son:  $k_1 = 550$ ,  $k_2 = 50$ , y la ganancia de la cota máxima  $K = 3$  y las ganancias del algoritmo  $K_1 = 16.2$  y  $K_2 = 10.5$ . En la Figura (32) se muestran las trayectorias del desplazamiento del rotor en la dirección vertical  $y_1$  y el error de posición  $e_{y1}$  cuando la referencia es  $y_{1d} = 0$ .

La trayectoria de posición del rotor con el AST no logra converger completamente a cero debido a la saturación impuesta en el voltaje, lo que debilita la señal de control cuando la perturbación externa tiene a ser máxima, sin embargo, yace cerca del origen aún presencia del desbalanceo y la fuerza de gravedad, por lo que el desempeño del sistema permanece en régimen deslizante.

En la Figura (33) las señales de control y de corriente en el sistema reducido se ven mejoradas con respecto al controlador anterior, por lo que el fenómeno del *chattering* es minimizado y se hace evidente en la ampliación de la gráfica como se muestra en la Figura (34), donde la inyección de control se aprecia continua de tal forma que rechaza la fuerza sinusoidal externa.

En las Figuras (35-36) se aprecian las descomposiciones de las señales de la Figura (33) en sus respectivos voltajes y corrientes de los electroimanes, donde la nitidez del control repercute en menor medida en el desempeño de la electrónica de potencia.

La Figura (37) representa la superficie de deslizamiento en función de las coordenadas del error. La Figura (38) muestra el desempeño del sistema con el controlador aplicado a la dirección horizontal y vertical, mostrando la versatilidad del algoritmo ST para el seguimiento de referencias.

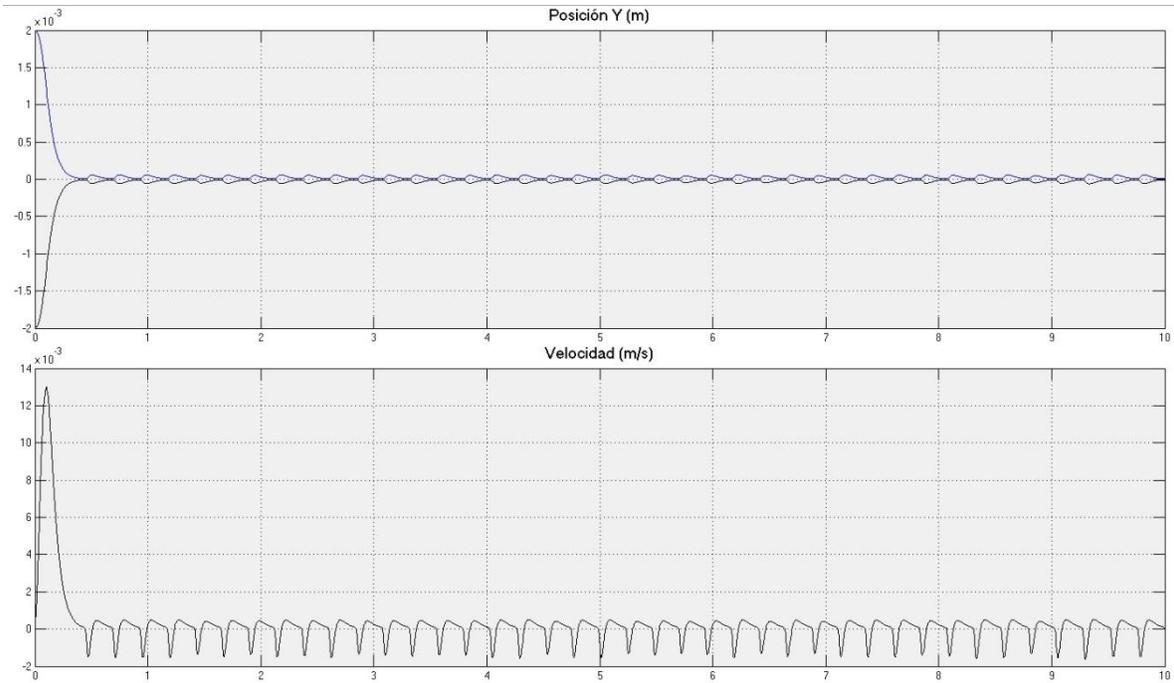


Figura 32. Trayectoria de la posición y velocidad del centro del rotor en la dirección vertical. a) Posición y error de posición. b) Velocidad del rotor

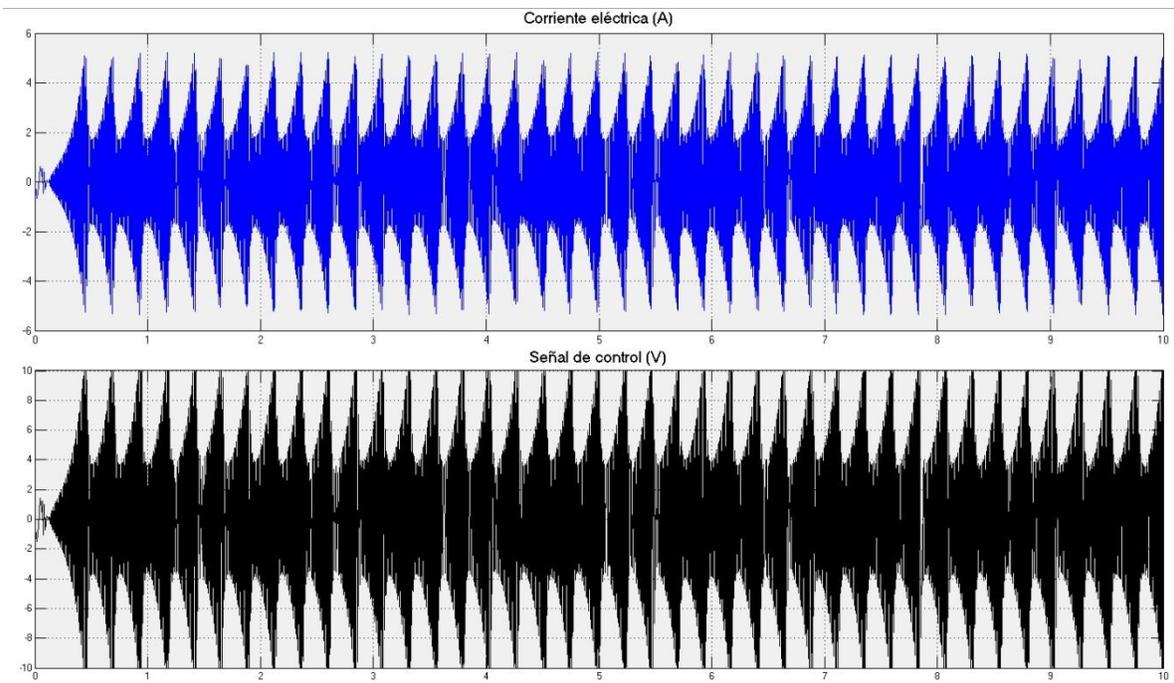


Figura 33. Trayectoria de la corriente y señal de control para el sistema en las coordenadas del error.

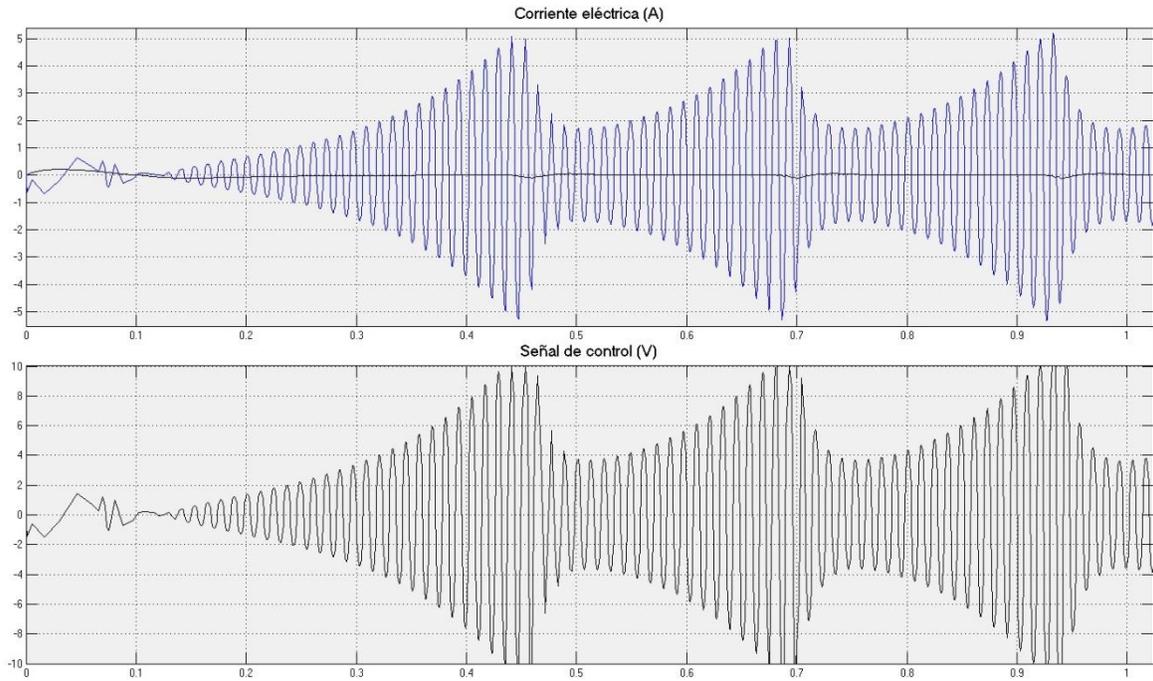


Figura 34. Ampliación de las trayectorias del control y la corriente durante el primer segundo del algoritmo ST.

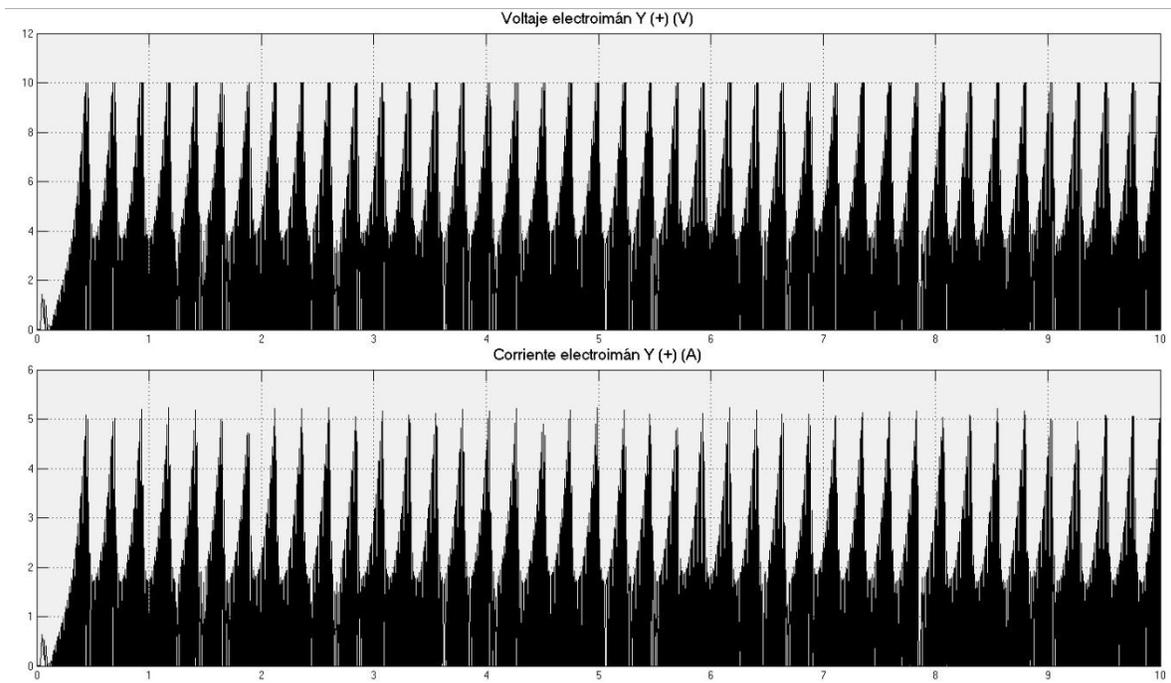


Figura 35. Voltaje aplicado en las terminales del electroimán superior y corriente eléctrica.

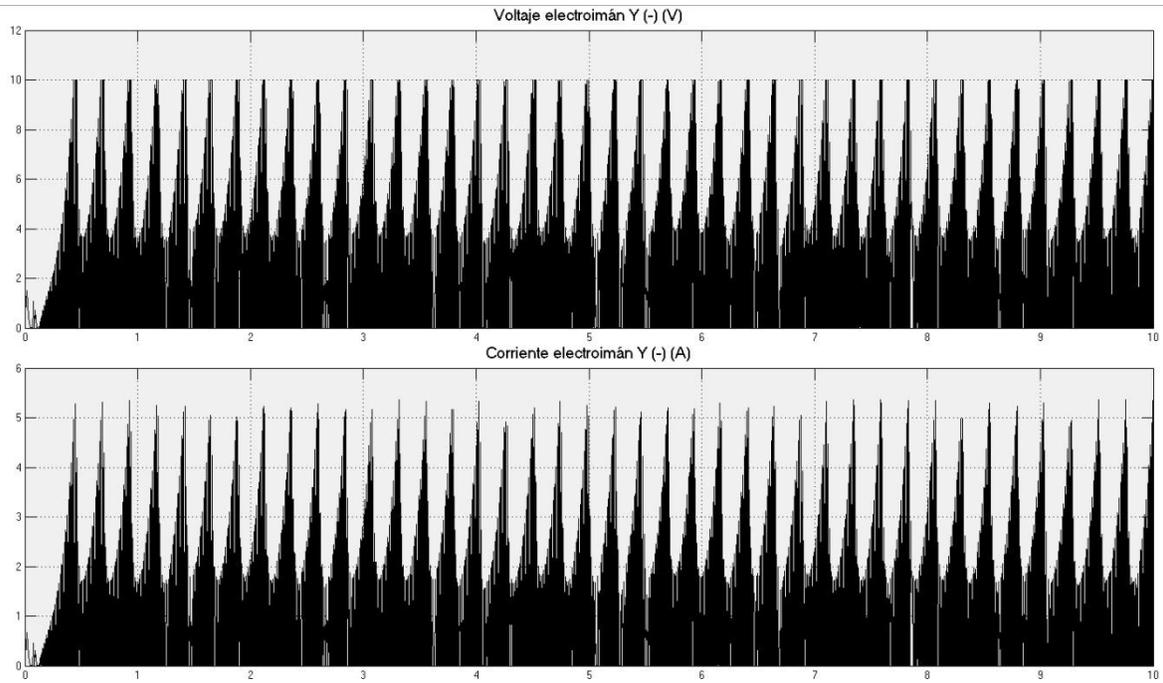


Figura 36. Voltaje aplicado en las terminales del electroimán inferior y corriente eléctrica.

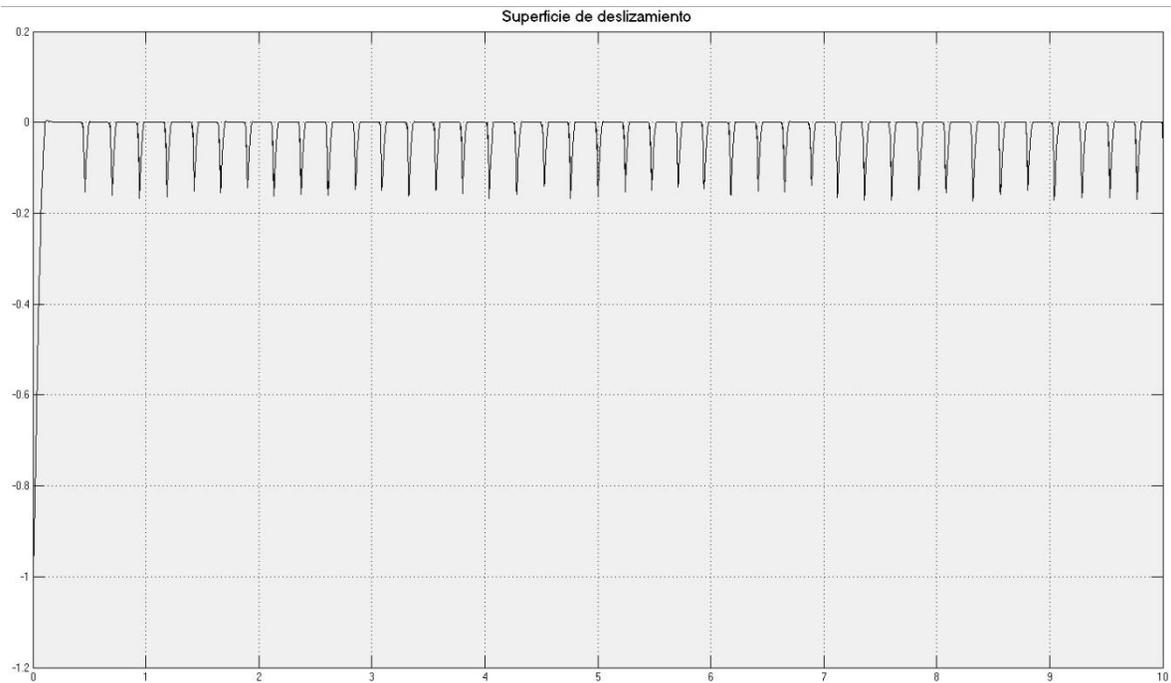


Figura 37. Superficie de deslizamiento en términos de los estados del error.

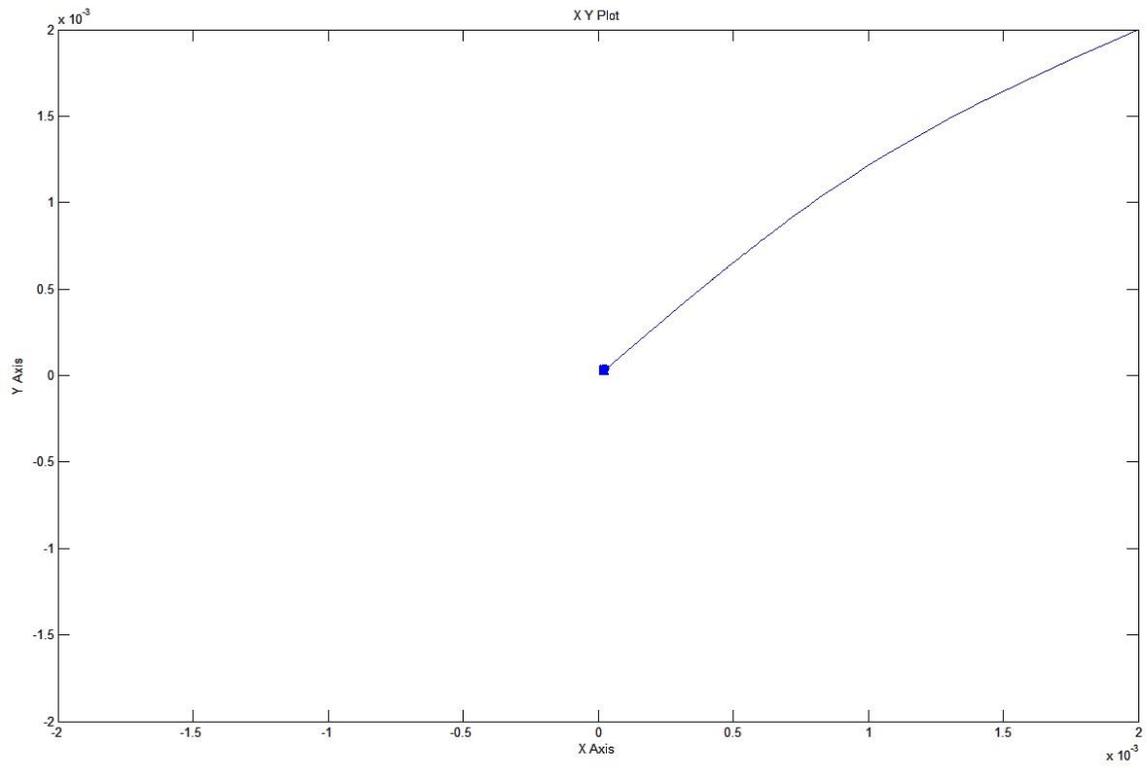


Figura 38. Trayectoria del centro del rotor bajo el dominio del control en modos deslizantes de segundo orden.

## IV.1. Conclusiones.

En este trabajo se diseñó un sistema de cojinete magnético activo para rotores horizontales y flexibles, y también, se investigó sobre la viabilidad de implementar algoritmos de control no lineales para la regulación de la levitación magnética ante perturbaciones externas.

En el diseño del CMA, las técnicas de manufactura y maquinado de los elementos que componen al aparato presentaron algunos desafíos mayores, como por ejemplo: el corte de la forma del núcleo magnético se hizo mediante la técnica de corte por chorro de agua, en donde las láminas se cortaron primeramente para formar un “emparedado” rectangular y unidos por un barniz dieléctrico, el cual significó una mala elección para unir las láminas, ya que tiene propiedad higroscópica (absorbe el agua), como consecuencia dificultó el proceso corte, como resultado se perdieron la mitad de las obleas para formar el núcleo magnético y se tuvo que trabajar con la única mitad que cumplía con las dimensiones arrojadas por el proceso de diseño. El uso de máquinas y herramientas en el laboratorio de Mecatrónica no fue un camino viable para la fabricación de los elementos de hierro, por lo que se recurrió a proveedores externos, como resultado se perdió tiempo en el avance del proyecto. Sin embargo, se tiene completo todo el material para el armado del prototipo.

En las técnicas de control no lineales se presentó el control por modos deslizantes, esta técnica tiene la virtud de repeler perturbaciones externas así como lograr una robustez ante incertidumbre paramétrica. Las simulaciones de estas técnicas de control para gobernar al sistema de cojinete magnético activo presentaron unos resultados satisfactorios para la implementación experimental, basados en que las trayectorias del sistema son coherentes con los resultados arrojados por el proceso de diseño.

El modelado matemático desarrollado en este trabajo es propuesto como una solución al problema de actuadores en exceso (es decir, existen dos

actuadores para regular un solo estado), por lo que las dinámicas eléctricas de cada electroimán se fusionaron a una sola representación, esto ayudo a diseñar sólo un esquema de control para las dos dinámicas eléctricas. Empero, este modelo tiene como hándicap la auto-perturbación de las fuerzas magnéticas, lo cual llega a producir en ciertos momentos picos de corrientes en los electroimanes, aun así, las trayectorias de los estados se ven apropiadas para su implementación experimental.

En el marco tecnológico se logra desarrollar una instrumentación de costo accesible, tales como: los sensores de corriente y los sensores de posición, estos últimos son bastante accesible en comparación con los de calidad industrial, incluso así, tiene un desempeño ideal para propósitos de control.

#### *Trabajo a futuro.*

Como trabajo a futuro quedan varios tópicos para investigar, por mencionar algunos:

- Implementación de los algoritmos.
- Control tolerante a fallas.
- Observación de perturbaciones.
- Estimación de parámetros.
- Control adaptable.
- Mejora del proceso de diseño.

## Bibliografía.

Al-Muthairi, N. F., & Zribi, M. (2004). "Sliding mode control of a magnetic levitation system". *Mathematical Problems in Engineering*, 2004(2), 93-107.

Bleuler, H. (1992). "A survey of magnetic levitation and magnetic bearing types". *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, 35(3), 335-342.

Chen, S. Y., & Lin, F. J. (2011). "Robust nonsingular terminal sliding-mode control for nonlinear magnetic bearing system". *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 19(3), 636-643.

Chiba, A., Fukao, T., Ichikawa, O., Oshima, M., Takemoto, M., & Dorrell, D. G. (2005). *Magnetic bearings and bearingless drives*. Elsevier.

Drazenovic (1969) B. Drazenovic, "The invariance condition in variable structure systems", *Automatica*, vol. 5, pp. 287–295.

Delfín-Prieto S. M., Jáuregui-Correa J. C., Silva-Navarro G. (2013). "Diseño de un cojinete magnético activo para un prototipo de rotor horizontal". 9° Congreso Internacional de Ingeniería. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro.

Delfín-Prieto S. M. y Jáuregui-Correa J. C. (2014). "Sliding mode control approach for controlling magnetic levitation system". *Engineering and Application* Vol. 1. 10° CONIIN. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro.

De Queiroz, M.S.; Dawson, D.M. (1996). "Nonlinear control of active magnetic bearings: a backstepping approach". *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol.4, no.5, pp.545,552, Sep.

Fan, Yi-Hua and Chen, Kuan-Yu and Weng, Duan-Liang and Lee, Ying-Tsun. (2008). "Design of adaptive compensator of force imbalance for a single

*active magnetic bearings suspended rotor system*". Journal of Applied Physics, 103, 07E935.

Garofalo F. and Glielmo L. Eds. (1996). Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 217, pp. 107–133, Springer–Verlag, London.

Genta G., (2005), *Dynamics of Rotating Systems*, Volume 1, Mechanical Engineering Series, Springer.

Hollis, R.L.; Salcudean, S.E.; Allan, A.P., (1991). "A six-degree-of-freedom magnetically levitated variable compliance fine-motion wrist: design, modeling, and control" Robotics and Automation, IEEE Transactions on, vol.7, no.3, pp.320, 332, Jun.

ISO Standardization for Active Magnetic Bearing Technology. [http://www.iso.org/iso/home/store/catalogue\\_tc/catalogue\\_detail.htm?csnumber=30179](http://www.iso.org/iso/home/store/catalogue_tc/catalogue_detail.htm?csnumber=30179).

Jiménez-Lizárraga, M., & Fridman, L. (2009). "Robust Nash strategies based on integral sliding mode control for a two players uncertain linear affine-quadratic game". International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 5(2), 241-251.

Lee, J. H., Allaire, P. E., Tao, G., Decker, J. A., & Zhang, X. (2003). "Experimental study of sliding mode control for a benchmark magnetic bearing system and artificial heart pump suspensión". Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 11(1), 128-138.

Levant, L. Fridman. (2007). "Higher order sliding modes as a natural phenomenon in control theory" in Robust control via variable structure and Lyapunov techniques,

Long, M. L.; Carroll, J.J.; Mukundan, R., (1996). "Adaptive control of active magnetic bearings under unknown static load change and unbalance". Control

Applications, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE International Conference, vol., no., pp.876, 881, 15-18 Sep.

Matsumura, Fumio; Namerikawa, T.; Hagiwara, K.; Fujita, M., (1996). "*Application of gain scheduled  $H^\infty$  robust controllers to a magnetic bearing*" Control Systems Technology, IEEE Transactions on , vol.4, no.5, pp.484,493, Sep.

Pisano A. *Second order sliding modes Theory and applications* (2000). PhD thesis. Università degli Studi di Cagliari.

Rundell, A.E.; Drakunov, S.V.; DeCarlo, R.A., (1996). "*A sliding mode observer and controller for stabilization of rotational motion of a vertical shaft magnetic bearing*" Control Systems Technology, IEEE Transactions, vol.4, no.5, pp.598, 608, Sep.

Seto, H.; Namerikawa, T., "*An  $H^\infty$  control system design of a magnetic bearing considering periodic disturbance*" Control Applications, 2005. CCA 2005. Proceedings of 2005 IEEE Conference on , vol., no., pp.227,232, 28-31 Aug. 2005.

Sivrioglu, S.: "*Adaptive backstepping for switching control active magnetic bearing system with vibrating base*", (2007). IET Control Theory & Applications, 1, (4), p. 1054-1059.

Slotine E. Jean-Jacque and Weiping Li (1992). *Applied nonlinear control*. Prantice-Hall.

Utkin V.I. (1992). *Sliding mode control and optimization*. Springer Verlag

Woodson, H. H., & Melcher, J. R. (1968). *Electromechanical dynamics*.

Zhang M., Yu Z., Huan H. and Zhou Y. (2008). "*The sliding mode variable structure control based on composite reaching law of active magnetic bearing*". ICIC Express Letters 2, 59-63.

## Anexo 1.

Diagrama a bloques de la simulación en Simulink MatLab. Control por modos deslizantes de primer orden.

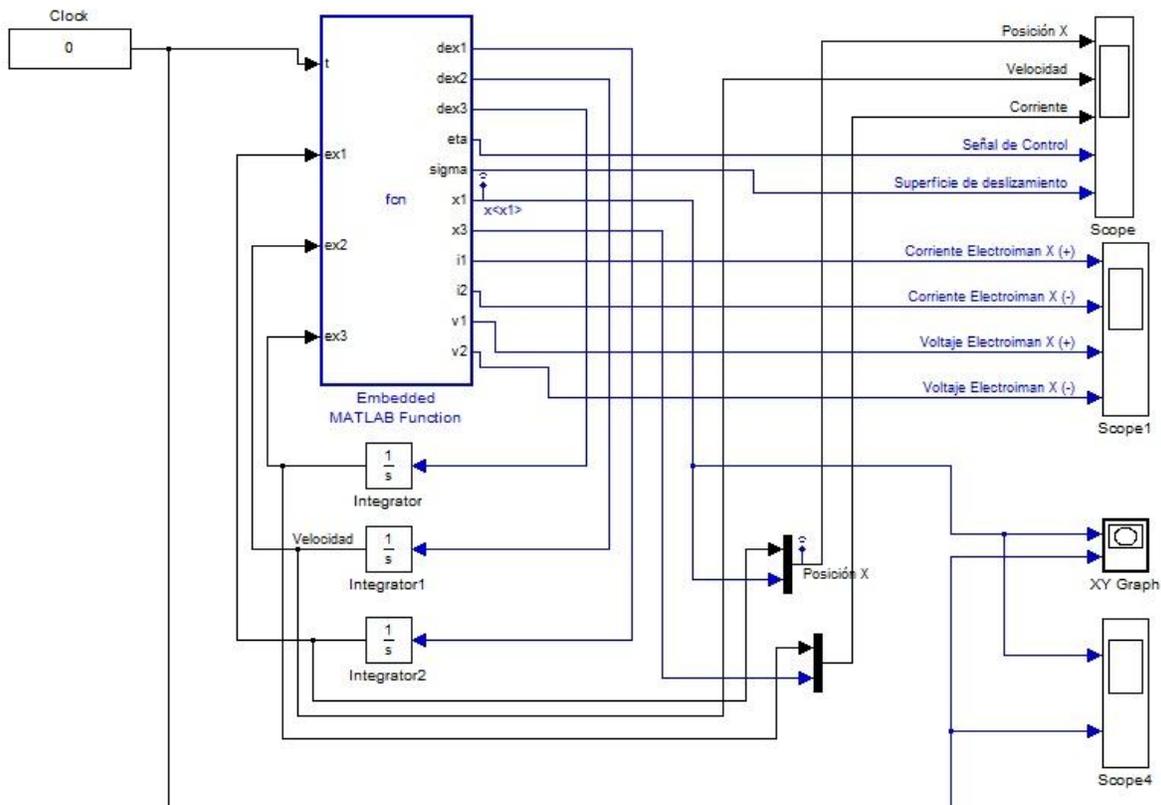


Figura 39. Diagrama Simulink. Dinámica del electroimán en dirección x. Control por modos deslizantes de primer orden.

```
function [dex1,dex2,dex3,eta,sigma,x1,x3,i1,i2,v1,v2] =
fcn(t,ex1,ex2,ex3)
% This block supports the Embedded MATLAB subset.
% See the help menu for details.
```

```
m=4; % MASA SUSPENDIDA
w=0.006242905; % ANCHO DE LA CARA DEL NUCLEO
l=0.041528982; % LONGITUD DE PROFUNDIDAD DEL NUCLEO
N=200; % NUMERO DE VUELTAS DEL EMBOBINADO
%gc=9.81; % CONSTANTE DE ACELERACIÓN GRAVITACIONAL
u0=4*pi*10^-7; % PERMEABILIDAD DEL ESPACIO LIBRE
C=(u0*N^2*w*1)/4; % CONSTANTE DEL NUCLEO
R=2.168814; % RESISTENCIA ELECTRICA DE LA BOBINA
g0=0.001; % ENTREHIERRO NOMINAL
L0=(N^2*u0*w*1)/(2*g0); % INDUCTANCIA DE LA BOBINA
Cm=C;
```

```

i0=0.001;           % CORRIENTE DE BIAS
v0=R*i0;           % VOLTAJE DE BIAS

exc = 0.001;       % EXCENRICIDAD DEL ROTOR
rpm = 5000;        % RPM's DEL MOTOR
frecang = rpm /60; % FECUENCIA DEL ROTOR
velang = 2*pi*frecang; % VELOCIDAD ANGULAR DEL ROTOR

x1d=0*0.0001*cos(20*t); % DESPLAZAMIENTO DESEADO

%CONSTANTE AUXILIAR
C0=2*Cm/m;

%ACOTACION MAXIMA DE LA PERTURBACION
J=3;

%GANACIAS DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
K1=150;
K2=50;

%PERTURBACION
Fd=-1*m*exc*velang^2*cos(velang*t);

%VARIABLES AUXILIARES EN DEPENDENCIA CON EL ERROR
Dprima = (g0 + x1d - ex1);
Eprima = (g0 - x1d + ex1);
Fprima = (2*Dprima*i0 + 2*Eprima*i0)/(Dprima - Eprima);

auxX1 = x1d - ex1;
aux0X3 = (1/(Cm*(Dprima - Eprima))) * (m*ex3-Fd) * (g0-x1d+ex1)^2 *
(g0+x1d-ex1)^2 - i0^2 + (Fprima/2)^2;
if (aux0X3 < 0)
    auxX3 = -1*sqrt(abs(aux0X3)) - (Fprima/2);
else
    auxX3 = sqrt(abs(aux0X3)) - (Fprima/2);
end;
f1 = ((i0+auxX3)^2/(g0-x1d+ex1)^3) + ((i0-auxX3)^2/(g0+x1d-ex1)^3);
f2 = ((i0+auxX3)/(g0-x1d+ex1)^2) + ((i0-auxX3)/(g0+x1d-ex1)^2);

%INDUCTANCIAS
L1=L0+((2*C)/(g0-auxX1));
L2=L0+((2*C)/(g0+auxX1));
L=L1+L2;

%FUNCIONES NO LINEALES DEL ESTADO dey3
f = C0 * (f1*ex2 + f2*(-(2*R/L)*auxX3 - (2*Cm/L)*f2*ex2));
g = C0 * f2 * (2/L);

%SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
sigma=ex3+K2*ex2+K1*ex1;
psi=-J*sign(sigma);

%CONTROL EQUIVALENTE
eta=(1/g)*(-f-K2*ex3-K1*ex2+psi);

```

```

if (eta > 80)
    eta = 80;
else if (eta < -80)
    eta = -80;
end;
end;

%DINAMICA DE LA PLANTA EN EL ESTADO DEL ERROR
dex1=ex2;
dex2=ex3;
dex3=f+g*eta;

%SALIDA DEL SISTEMA
x1=x1d-ex1;
ox3 = (1/(Cm*(Dprima - Eprima))) * (m*ex3-Fd) * (g0-x1d+ex1)^2 * (g0+x1d-
ex1)^2 - i0^2 + (Fprima/2)^2;
if (ox3 < 0)
    x3= -1*sqrt(abs(ox3)) - (Fprima/2);
else
    x3= sqrt(abs(ox3)) - (Fprima/2);
end;

%SALIDAS DE LAS CORRIENTE
if (x3 >= 0)
    auxi1 = i0 + x3;
    auxi2 = i0;
else
    auxi2 = i0 - x3;
    auxi1 = i0;
end;

%SALIDAS DE LOS VOLTAJES
if (eta >= 0)
    auxv1 = v0 + eta;
    auxv2 = v0;
else
    auxv2 = v0 - eta;
    auxv1 = v0;
end;
i1=auxi1;
i2=auxi2;
v1=auxv1;
v2=auxv2;

```

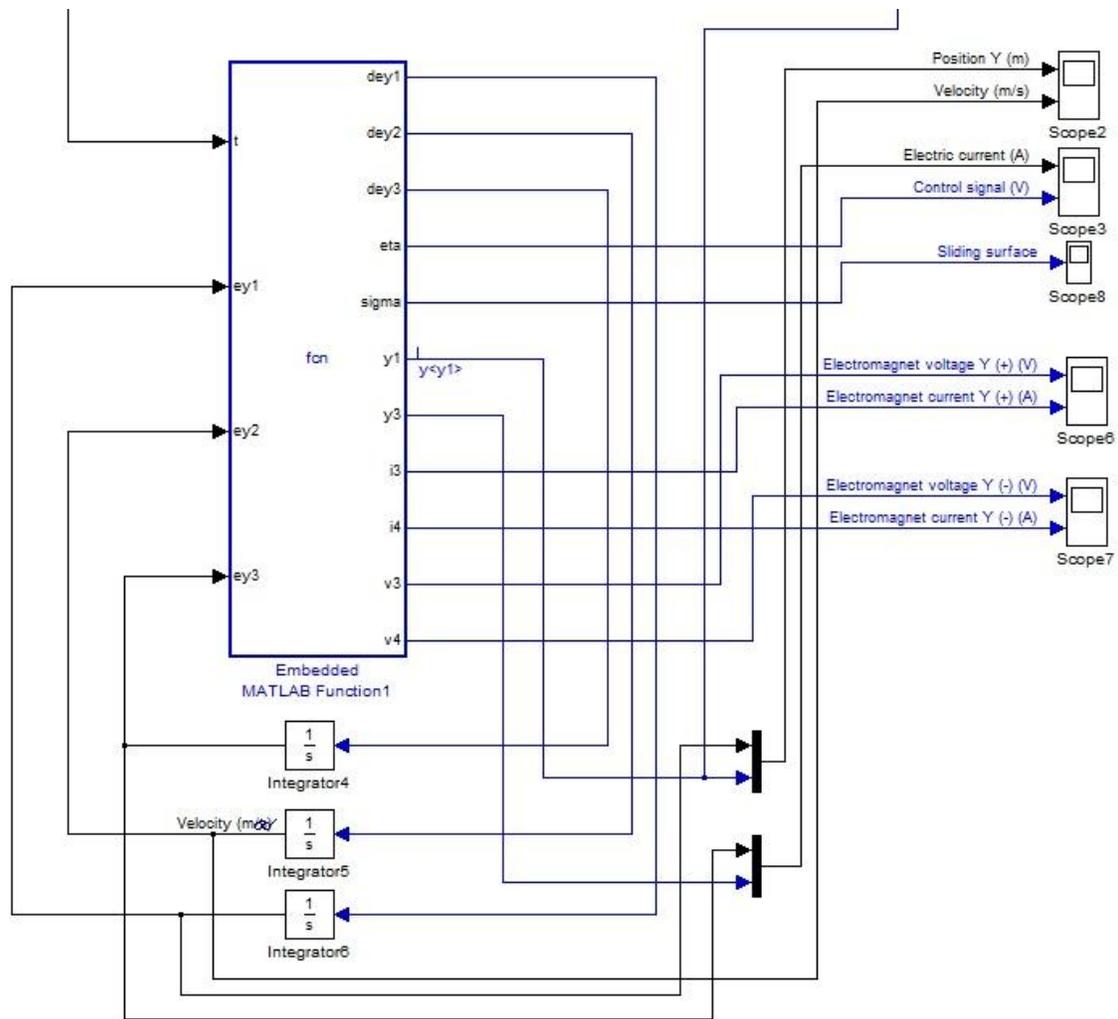


Figura 40. . Diagrama Simulink. Dinámica del electroimán en dirección y. Control por modos deslizantes de primer orden.

```
function [dey1,dey2,dey3,eta,sigma,y1,y3,i3,i4,v3,v4] =
fcn(t,ey1,ey2,ey3)
% This block supports the Embedded MATLAB subset.
% See the help menu for details.

m=4; % MASA SUSPENDIDA
w=0.006242905; % ANCHO DE LA CARA DEL NUCLEO
l=0.041528982; % LONGITUD DE PROFUNDIDAD DEL NUCLEO
N=200; % NUMERO DE VUELTAS DEL EMBOBINADO
gc=9.81; % CONSTANTE DE ACCELERACIÓN GRAVITACIONAL
u0=4*pi*10^-7; % PERMEABILIDAD DEL ESPACIO LIBRE
C=(u0*N^2*w*1)/4; % CONSTANTE DEL NUCLEO
R=2.168814; % RESISTENCIA ELECTRICA DE LA BOBINA
g0=0.001; % ENTREHIERRO NOMINAL
L0=(N^2*u0*w*1)/(2*g0); % INDUCTANCIA DE LA BOBINA
Cm=C;
```

```

i0=0.001;           % CORRIENTE DE BIAS
v0=R*i0;           % VOLTAJE DE BIAS
vp = 10;           % VOLTAJE DE LA FUENTE
exc = 0.001;       % EXCENTRICIDAD DEL ROTOR
rpm = 5000;        % RPM's DEL MOTOR
frecang = rpm /60; % FECUENCIA DEL ROTOR
velang = 2*pi*frecang; % VELOCIDAD ANGULAR DEL ROTOR

y1d=0*0.0001*sin(20*t); % DESPLAZAMIENTO DESEADO

%CONSTANTE AUXILIAR
C0=2*Cm/m;

%ACOTACION MAXIMA DE LA PERTURBACION
J=3;

%GANACIAS DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
K1=150;
K2=50;

%PERTURBACION
Fd=-1*m*exc*velang^2*sin(velang*t);

%VARIABLES AUXILIARES EN DEPENDENCIA CON EL ERROR
Aprima = (g0 + y1d - ey1);
Bprima = (g0 - y1d + ey1);
Cprima = (2*Aprima*i0 + 2*Bprima*i0)/(Aprima - Bprima);

auxY1 = y1d - ey1;
aux0Y3 = (1/(Cm*(Aprima - Bprima))) * (m*ey3+m*gc-Fd) * (g0-y1d+ey1)^2 *
(g0+y1d-ey1)^2 - i0^2 + (Cprima/2)^2;
if (aux0Y3 < 0)
    auxY3 = -1*sqrt(abs(aux0Y3)) - (Cprima/2);
else
    auxY3 = sqrt(abs(aux0Y3)) - (Cprima/2);
end;

f1 = ((i0+auxY3)^2/(g0-y1d+ey1)^3) + ((i0-auxY3)^2/(g0+y1d-ey1)^3);
f2 = ((i0+auxY3)/(g0-y1d+ey1)^2) + ((i0-auxY3)/(g0+y1d-ey1)^2);

%INDUCTANCIAS
L1=L0+((2*C)/(g0-auxY1));
L2=L0+((2*C)/(g0+auxY1));
L=L1+L2;

%FUNCIONES NO LINEALES DEL ESTADO dey3
f = C0 * (f1*ey2 + f2*(-(2*R/L)*auxY3 - (2*Cm/L)*f2*ey2));
g = C0 * f2 * (2/L);

%SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
sigma=ey3+K2*ey2+K1*ey1;
psi=-J*sign(sigma);

%CONTROL EQUIVALENTE

```

```

eta=(1/g)*(-f-K2*ey3-K1*ey2+psi);

if (eta > vp)
    eta = vp;
else if (eta < -vp)
    eta = -vp;
end;
end;

%DINAMICA DE LA PLANTA EN EL ESTADO DEL ERROR
dey1=ey2;
dey2=ey3;
dey3=f+g*eta;

%SALIDA DEL SISTEMA
y1=y1d-ey1;
oy3 = (1/(Cm*(Aprima - Bprima))) * (m*ey3+m*gc-Fd) * (g0-y1d+ey1)^2 *
(g0+y1d-ey1)^2 - i0^2 + (Cprima/2)^2;
if (oy3 < 0)
    y3= -1*sqrt(abs(oy3)) - (Cprima/2);
else
    y3= sqrt(abs(oy3)) - (Cprima/2);
end;

%SALIDAS DE LAS CORRIENTE
if (y3 >= 0)
    auxi3 = i0 + y3;
    auxi4 = i0;
else
    auxi4 = i0 - y3;
    auxi3 = i0;
end;

%SALIDAS DE LOS VOLTAJES
if (eta >= 0)
    auxv3 = v0 + eta;
    auxv4 = v0;
else
    auxv4 = v0 - eta;
    auxv3 = v0;
end;
i3=auxi3;
i4=auxi4;
v3=auxv3;
v4=auxv4;

```

## Anexo 2.

Diagrama a bloques de la simulación en Simulink MatLab. Control por modos deslizantes de segundo orden.

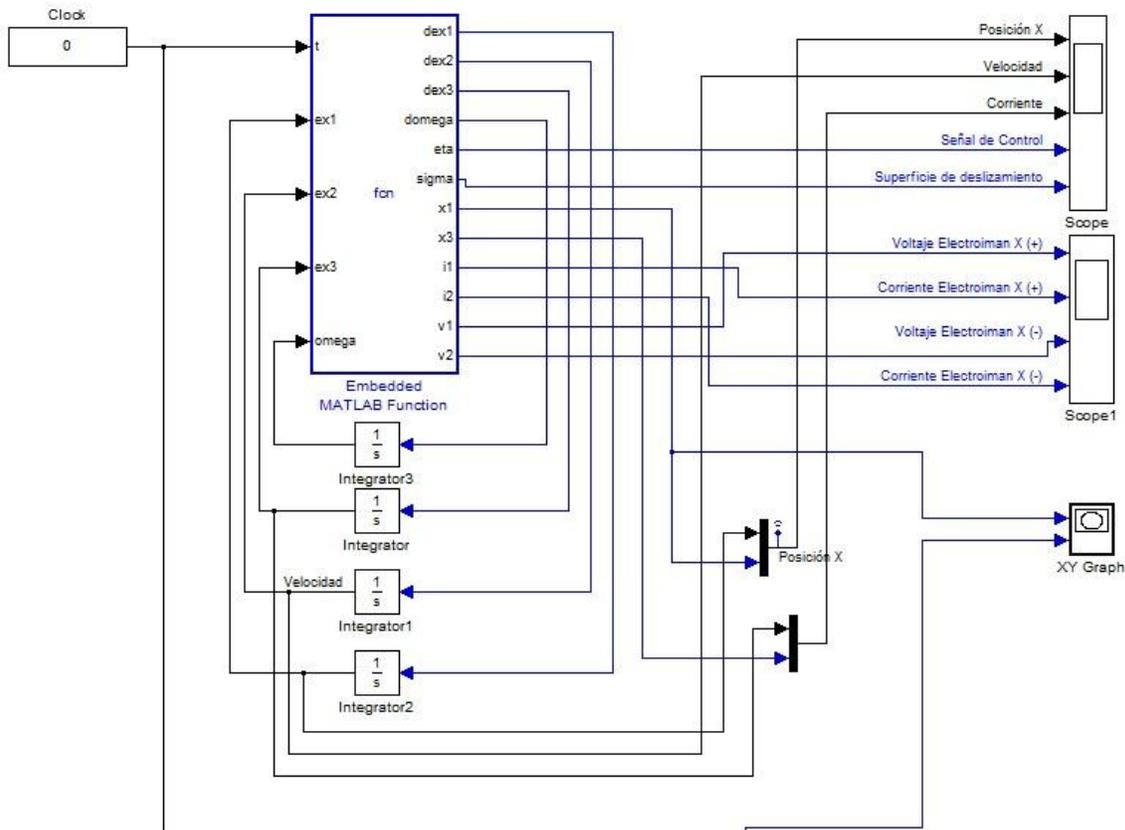


Figura 41. Diagrama Simulink. Dinámica del electroimán en dirección x. Algoritmo Super-Twisting.

```
function [dex1,dex2,dex3,domega,eta,sigma,x1,x3,i1,i2,v1,v2] =
fcn(t,ex1,ex2,ex3,omega)
% This block supports the Embedded MATLAB subset.
% See the help menu for details.

m=4; % MASA SUSPENDIDA
w=0.006242905; % ANCHO DE LA CARA DEL NUCLEO
l=0.041528982; % LONGITUD DE PROFUNDIDAD DEL NUCLEO
N=200; % NUMERO DE VUELTAS DEL EMBOBINADO
%gc=9.81; % CONSTANTE DE ACELERACIÓN GRAVITACIONAL
u0=4*pi*10^-7; % PERMEABILIDAD DEL ESPACIO LIBRE
C=(u0*N^2*w*1)/4; % CONSTANTE DEL NUCLEO
R=2.168814; % RESISTENCIA ELECTRICA DE LA BOBINA
g0=0.001; % ENTREHIERRO NOMINAL
L0=(N^2*u0*w*1)/(2*g0); % INDUCTANCIA DE LA BOBINA
Cm=C;
i0=0.001; % CORRIENTE DE BIAS
v0=R*i0; % VOLTAJE DE BIAS
vp = 10; % VOLTAJE DE LA FUENTE
```

```

exc = 0.001;           % EXCENTRICIDAD DEL ROTOR
rpm = 5000;           % RPM's DEL MOTOR
frecang = rpm /60;    % FECUENCIA DEL ROTOR
velang = 2*pi*frecang; % VELOCIDAD ANGULAR DEL ROTOR

x1d=0*0.000099*cos(20*t); % DESPLAZAMIENTO DESEADO

%CONSTANTE AUXILIAR
C0=2*Cm/m;

%ACOTACION MAXIMA DE LA PERTURBACION
J=3;

%GANACIAS DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
K1=550;
K2=50;

%GANACIAS DEL SUPERTWISTING
k2=J*4.5;
k1=(2*sqrt(k2))*3.5;

%PERTURBACION
Fd=1*m*exc*velang^2*cos(velang*t);

%VARIABLES AUXILIARES EN DEPENDENCIA CON EL ERROR
Dprima = (g0 + x1d - ex1);%Dprima = (g0 + x1d - ex1)^2;
Eprima = (g0 - x1d + ex1);%Eprima = (g0 - x1d + ex1)^2;
Fprima = (2*Dprima*i0 + 2*Eprima*i0)/(Dprima - Eprima);

auxX1 = x1d - ex1;
%auxX3 = sqrt(abs((1/(Cm*(Dprima - Eprima))) * (m*ex3-Fd) * (g0-
x1d+ex1)^2 * (g0+x1d-ex1)^2 - i0^2 + (Fprima/2)^2)) - (Fprima/2);
aux0X3 = (1/(Cm*(Dprima - Eprima))) * (m*ex3-Fd) * (g0-x1d+ex1)^2 *
(g0+x1d-ex1)^2 - i0^2 + (Fprima/2)^2;
if (aux0X3 < 0)
    auxX3 = -1*sqrt(abs(aux0X3)) - (Fprima/2);
else
    auxX3 = sqrt(abs(aux0X3)) - (Fprima/2);
end;
f1 = ((i0+auxX3)^2/(g0-x1d+ex1)^3) + ((i0-auxX3)^2/(g0+x1d-ex1)^3);
f2 = ((i0+auxX3)/(g0-x1d+ex1)^2) + ((i0-auxX3)/(g0+x1d-ex1)^2);

%INDUCTANCIAS
L1=L0+((2*C)/(g0-auxX1));
L2=L0+((2*C)/(g0+auxX1));
L=L1+L2;

%FUNCIONES NO LINEALES DEL ESTADO dey3
f = C0 * (f1*ex2 + f2*(-(2*R/L)*auxX3 - (2*Cm/L)*f2*ex2));
g = C0 * f2 * (2/L);

%SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
sigma=ex3+K2*ex2+K1*ex1;

```

```

%ALGORITMO SUPERTWISTING
psi=-k1*sqrt(abs(sigma))*sign(sigma)+omega;

%CONTROL EQUIVALENTE
eta=(1/g)*(-f-K2*ex3-K1*ex2+psi);

%PARTE DEL ALGORITMO SUPERTWISTING
domega=-k2*sign(sigma);

if (eta > vp)
    eta = vp;
else if (eta < -vp)
    eta = -vp;
end;
end;

%DINAMICA DE LA PLANTA EN EL ESTADO DEL ERROR
dex1=ex2;
dex2=ex3;
dex3=f+g*eta;

%SALIDA DEL SISTEMA
x1=x1d-ex1;
ox3 = (1/(Cm*(Dprima - Eprima))) * (m*ex3-Fd) * (g0-x1d+ex1)^2 * (g0+x1d-
ex1)^2 - i0^2 + (Fprima/2)^2;
if (ox3 < 0)
    x3= -1*sqrt(abs(ox3)) - (Fprima/2);
else
    x3= sqrt(abs(ox3)) - (Fprima/2);
end;

%SALIDAS DE LAS CORRIENTE
if (x3 >= 0)
    auxi1 = i0 + x3;
    auxi2 = i0;
else
    auxi2 = i0 - x3;
    auxi1 = i0;
end;

%SALIDAS DE LOS VOLTAJES
if (eta >= 0)
    auxv1 = v0 + eta;
    auxv2 = v0;
else
    auxv2 = v0 - eta;
    auxv1 = v0;
end;
i1=auxi1;
i2=auxi2;
v1=auxv1;
v2=auxv2;

```

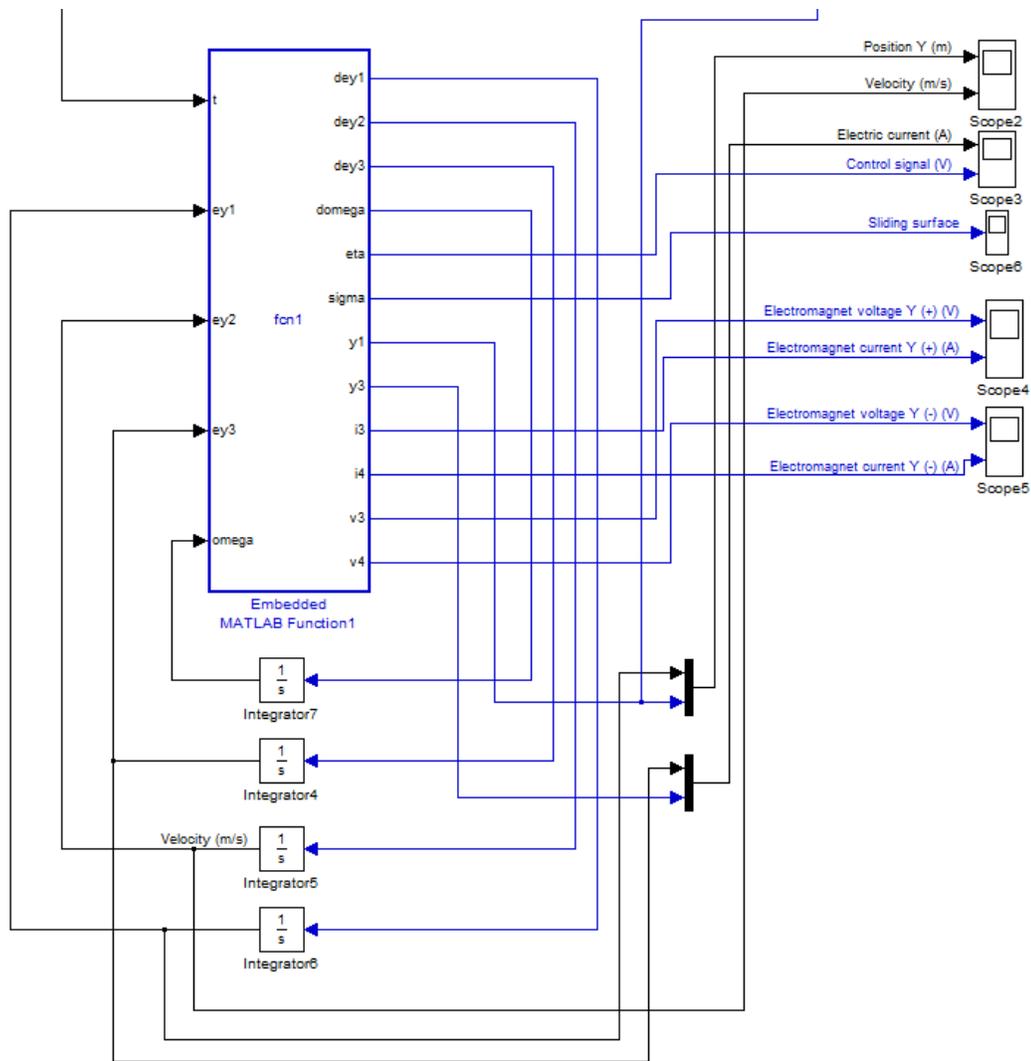


Figura 42. Diagrama Simulink. Dinámica del electroimán en dirección y. Algoritmo Super-Twisting.

```
function [dey1,dey2,dey3,domega,eta,sigma,y1,y3,i3,i4,v3,v4] =
fcn1(t,ey1,ey2,ey3,omega)
% This block supports the Embedded MATLAB subset.
% See the help menu for details.

m=4; % MASA SUSPENDIDA
w=0.006242905; % ANCHO DE LA CARA DEL NUCLEO
l=0.041528982; % LONGITUD DE PROFUNDIDAD DEL NUCLEO
N=200; % NUMERO DE VUELTAS DEL EMBOBINADO
gc=9.81; % CONSTANTE DE ACELERACIÓN GRAVITACIONAL
u0=4*pi*10^-7; % PERMEABILIDAD DEL ESPACIO LIBRE
C=(u0*N^2*w*1)/4; % CONSTANTE DEL NUCLEO
R=2.168814; % RESISTENCIA ELECTRICA DE LA BOBINA
g0=0.001; % ENTREHIERRO NOMINAL
L0=(N^2*u0*w*1)/(2*g0); % INDUCTANCIA DE LA BOBINA
Cm=C;
i0=0.001; % CORRIENTE DE BIAS
```

```

v0=R*i0; % VOLTAJE DE BIAS
vp = 10; % VOLTAJE DE LA FUENTE
exc = 0.001; % EXCENTRICIDAD DEL ROTOR
rpm = 5000; % RPM's DEL MOTOR
frecang = rpm /60; % FECUENCIA DEL ROTOR
velang = 2*pi*frecang; % VELOCIDAD ANGULAR DEL ROTOR

y1d=0*0.000099*sin(20*t); % DESPLAZAMIENTO DESEADO

%CONSTANTE AUXILIAR
C0=2*Cm/m;

%ACOTACION MAXIMA DE LA PERTURBACION
J=3;

%GANACIAS DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO

K1=550;
K2=50;

%GANACIAS DEL SUPERTWISTING
k2=J*3.5;
k1=(2*sqrt(k2))*2.5;

%PERTURBACION
Fd=1*m*exc*velang^2*sin(velang*t);

%VARIABLES AUXILIARES EN DEPENDENCIA CON EL ERROR
Aprima = (g0 + y1d - ey1);%Aprima = (g0 + y1d - ey1)^2;
Bprima = (g0 - y1d + ey1);%Bprima = (g0 - y1d + ey1)^2;
Cprima = (2*Aprima*i0 + 2*Bprima*i0)/(Aprima - Bprima);

auxY1 = y1d - ey1;
aux0Y3 = (1/(Cm*(Aprima - Bprima))) * (m*ey3+m*gc-Fd) * (g0-y1d+ey1)^2 *
(g0+y1d-ey1)^2 - i0^2 + (Cprima/2)^2;
if (aux0Y3 < 0)
    auxY3 = -1*sqrt(abs(aux0Y3)) - (Cprima/2);
else
    auxY3 = sqrt(abs(aux0Y3)) - (Cprima/2);
end;
f1 = ((i0+auxY3)^2/(g0-y1d+ey1)^3) + ((i0-auxY3)^2/(g0+y1d-ey1)^3);
f2 = ((i0+auxY3)/(g0-y1d+ey1)^2) + ((i0-auxY3)/(g0+y1d-ey1)^2);

%INDUCTANCIAS
L1=L0+((2*C)/(g0-auxY1));
L2=L0+((2*C)/(g0+auxY1));
L=L1+L2;

%FUNCIONES NO LINEALES DEL ESTADO dey3
f = C0 * (f1*ey2 + f2*(-(2*R/L)*auxY3 - (2*Cm/L)*f2*ey2));
g = C0 * f2 * (2/L);

%SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO
sigma=ey3+K2*ey2+K1*ey1;

```

```

%ALGORITMO SUPERTWISTING
psi=-k1*sqrt(abs(sigma))*sign(sigma)+omega;

%CONTROL EQUIVALENTE
eta=(1/g)*(-f-K2*ey3-K1*ey2+psi);

%PARTE DEL ALGORITMO SUPERTWISTING
domega=-k2*sign(sigma);

if (eta > vp)
    eta = vp;
else if (eta < -vp)
    eta = -vp;
end;
end;

%DINAMICA DE LA PLANTA EN EL ESTADO DEL ERROR
dey1=ey2;
dey2=ey3;
dey3=f+g*eta;

%SALIDA DEL SISTEMA
y1=y1d-ey1;
oy3 = (1/(Cm*(Aprima - Bprima))) * (m*ey3+m*gc-Fd) * (g0-y1d+ey1)^2 *
(g0+y1d-ey1)^2 - i0^2 + (Cprima/2)^2;
if (oy3 < 0)
    y3= -1*sqrt(abs(oy3)) - (Cprima/2);
else
    y3= sqrt(abs(oy3)) - (Cprima/2);
end;

%SALIDAS DE LAS CORRIENTE
if (y3 >= 0)
    auxi3 = i0 + y3;
    auxi4 = i0;
else
    auxi4 = i0 - y3;
    auxi3 = i0;
end;

%SALIDAS DE LOS VOLTAJES
if (eta >= 0)
    auxv3 = v0 + eta;
    auxv4 = v0;
else
    auxv4 = v0 - eta;
    auxv3 = v0;
end;
i3=auxi3;
i4=auxi4;
v3=auxv3;
v4=auxv4;

```