

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

GUÍA DEL MAESTRO

“CONTROL DE CALIDAD”

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

INGENIERO CIVIL

PRESENTA

ALFONSO ELIU SNYDER ARREOLA

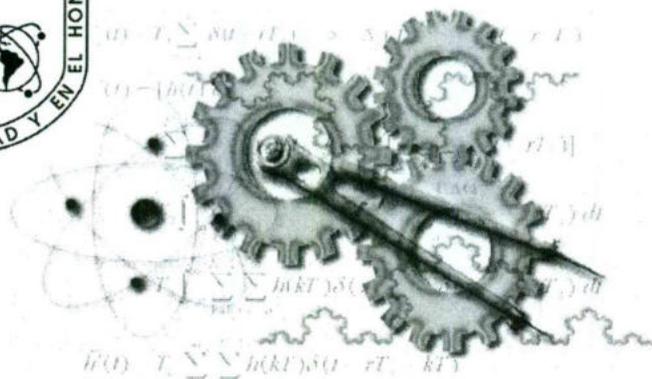
M. EN C. CRISÓGONO DE SANTIAGO GUERRERO

MAESTRO ASESOR

SANTIAGO DE QUERÉTARO, QRO. MAYO DE 2005

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA



“GUÍA DEL MAESTRO”

ASIGNATURA CONTROL DE CALIDAD

ALFONSO ELIU SNYDER ARREOLA

INDICE GENERAL

CONTENIDO	4
1. INTRODUCCIÓN.....	5
1.1. FUNDAMENTOS DE CALIDAD	6
1.2. SIGNIFICADO DE CALIDAD.....	8
1.3. MÉTODOS DE ASEGURAMIENTO DE LA CALIDAD	11
1.4. LOS GRANDES PENSADORES DE LA CALIDAD.....	15
1.4.1. Walter Shewhart.....	15
1.4.2. W. Edward Deming.....	19
1.4.3. Joseph M. Juran.....	22
1.4.4. Armand V. Feigenbaum.....	24
1.4.5. Kaoru Ishikawa	25
2. MÉTODOS ESTADÍSTICOS.....	26
2.1. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS E HISTOGRAMA.....	26
2.2. RESUMEN NUMÉRICO DE DATOS.....	31
2.3. DISTRIBUCIONES DISCRETAS	33

2.3.1.	Distribución de probabilidad binomial.	34
2.3.2.	Distribución de probabilidad hipergeométrica.....	36
2.3.3.	Distribución de probabilidad de Poisson	37
2.3.4.	Distribución de probabilidad geométrica.....	38
2.3.5.	Distribución de probabilidad binomial negativa.....	41
2.4.	DISTRIBUCIONES CONTINUAS.....	42
2.4.1.	Distribución de probabilidad normal	42
2.4.2.	Distribución de probabilidad exponencial	45
2.4.3.	Distribución de probabilidad gamma.....	50
2.5.	INFERENCIAS ACERCA DE LA CALIDAD.....	53
2.5.1.	Estimación de parámetros de proceso.....	53
2.5.2.	Pruebas de hipótesis sobre parámetros de proceso	64
3.	CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD.....	78
3.1.	DIAGRAMA DE CONTROL PARA ATRIBUTOS	86
3.2.	DIAGRAMA DE CONTROL DE VARIABLES.....	103
	REFERENCIAS	112

BIBLIOGRAFIA..... 113

APENDICE A. Control de Calidad en edificación 114

APENDICE B .- Las cartas de control en la Ingeniería de costos. 124

APENDICE C .- Manejo de Excel para elaboración de Histogramas 126

APENDICE D .- Distribución acumulativa normal estándar 128

APENDICE E .- Factores para construir diagramas de control de variables.. 129

CONTENIDO

En el presente documento fue creado con la finalidad de dar a conocer y difundir la importancia que tiene en nuestros días la CALIDAD, la cual debemos aprender a considerarla no solo en el análisis de datos sino en nuestro actuar diario como base de mejora continua en nuestra persona.

En el capítulo numero 1 se exponen los conceptos básicos de control de calidad, así como la biografía de los principales personajes de la historia que han sido los pioneros modificando un paradigma en cuanto a calidad se refiere.

En el capítulo 2 se dan a conocer las principales herramientas estadísticas, como distribución de frecuencias, distribuciones continuas y distribuciones discretas, con las cuales el lector tendrá una gran cantidad de recursos matemáticos incrementando su habilidad para el análisis exploratorio de datos y manipulación de los mismos.

Los diagramas de control para atributos y diagramas de control de variables se exponen en el capítulo numero 3, denominado “Control Estadístico de Calidad” en el cual se da a conocer el manejo de las cartas de control y su importancia para determinar las posibles causas de error de un proceso, teniendo como consecuencia que el producto se encuentre dentro de los parámetros de especificación.

1. INTRODUCCIÓN

En vista de la situación económica actual, tanto en el ámbito nacional como en el internacional, el hombre de negocios debe estar consiente de la necesidad de que en su empresa se generen bienes y/o servicios de calidad, para que pueda satisfacer las necesidades de sus clientes, estar en nivel competitivo, crecer en su mercado, y lograr así la productividad requerida.

La base inicial de toda empresa para contar con estructura de calidad, es establecer una organización que determine sus objetivos de trabajo, las características necesarias de la actuación de su directivo de mayor jerarquía para constituir un liderazgo de calidad, las políticas, los procedimientos, la integración de su personal y el ambiente en el que éste desarrollará sus actividades para poder alcanzar la excelencia.¹

Objetivo general.- Crear conciencia de la gran importancia que tiene la aplicación del Control de Calidad en bienes y servicios de cualquier índole, tomando en cuenta como objetivo primordial el de satisfacer las diversas necesidades de los consumidores, nacionales y extranjeros. Trabajando en todo momento en conformidad con las especificaciones y tener ausencia de deficiencias.



Objetivo particular.- Que el alumno adquiera los recursos necesarios de control estadístico de calidad, para que en el futuro, tenga la capacidad de aplicar, de manera eficiente, estas herramientas en su vida como profesionista.

¹ Comisión de calidad y productividad empresarial . *Cultura de Calidad*. Boletín 3, Instituto Mexicano de Contadores Públicos. A.C. 1ra edición México 1990.

1.1. FUNDAMENTOS DE CALIDAD

PRODUCTO. Es toda salida de un proceso. Consiste fundamentalmente en mercancías, software y servicios.²

Característica de un producto. Es una propiedad que posee un producto y con la que se espera satisfacer las necesidades de ciertos clientes, pueden ser de naturaleza técnica; por ejemplo, la gasolina que consume un vehículo, las dimensiones de un componente mecánico, la viscosidad de un producto químico, la uniformidad en el voltaje de un suministro de energía eléctrica. Las características de un producto pueden tomar también otras formas por ejemplo, rapidez en la entrega, facilidad de mantenimiento, cortesía en el servicio.

CLIENTE. Un cliente es alguien quien ha sido impactado por un producto. Los clientes pueden ser internos o externos.²

CONFORMIDAD CON LAS ESPECIFICACIONES. Algunas personas consideran que la calidad consiste en la conformidad con algunas normas; por ejemplo, conformidad con las especificaciones, con los procedimientos o con las exigencias. Tales definiciones pueden ser útiles para aclarar las responsabilidades que, con respecto a la calidad, tienen los operarios y los supervisores. En estos niveles, el personal puede tener falta de conocimiento de lo que son las necesidades de los numerosos clientes. Sin embargo, deben tener claras cuáles son sus responsabilidades con respecto a la calidad. Y esto puede conseguirse fijándolas en términos de conformidad. Pero, ninguna de esas definiciones identifica adecuadamente las responsabilidades de la empresa en cuanto a la calidad. Para ésta, la definición debe establecerse en términos de (1) satisfacción de las necesidades de los clientes, y (2) ausencia de deficiencias.²

² J.M Juran, Frank M Gryna , *Manual de Control de Calidad Volumen I* , McGrawHill

Deficiencias del producto. Las deficiencias del producto pueden tomar la forma de entregas con retraso, fallos en la utilización, errores en las facturas, desperdicios o reelaboración en la factoría, o cambios en el diseño. Cada uno de estos acontecimientos es el resultado de alguna deficiencia del producto o del proceso. Y todos ocasionan disgustos a los clientes.³

El Control Estadístico de la Calidad consiste en la aplicación de un conjunto de procedimientos estadísticos, en su mayoría comprendidos dentro del análisis exploratorio de datos y de la inferencia estadística, con el propósito de garantizar que un producto o servicio cumple ciertos requisitos de calidad.

³ J.M Juran, Frank M Gryna , *Manual de Control de Calidad Volumen I* , McGrawHill

1.2. SIGNIFICADO DE CALIDAD

El anteproyecto de la norma A3-1987 de la ANSI/ASQC reconoce que el término calidad tiene múltiples significados. El adoptado en la norma dice que es "la totalidad de las características de un producto o servicio que conducen con su *aptitud* a satisfacer necesidades expresas o implícitas".

El glosario de la organización Europea para el Control de Calidad (1981) dice que la calidad que "es la totalidad de características de un producto o servicio que, con su *aptitud*, permiten satisfacer una necesidad dada.. En los productos industriales la calidad queda fundamentalmente por la calidad del diseño y la calidad de fabricación.

La Enciclopedia Soviética dice que "la calidad de un producto es el conjunto de propiedades que determinan su aptitud para satisfacer las necesidades para las que fue fabricado."³

La calidad debe definirse, no como excelencia, sino como cumplir con los requisitos.⁴

Para fines de este texto la definición de Calidad es aptitud para el uso y esto implica la posibilidad de procesar materia prima a bajo costo y con un mínimo de rechazo y retrabajo.

Aspectos generales { Calidad de diseño
Calidad de conformidad

⁴ Philip B. Crosby, *Calidad sin lagrimas, El arte de administrar sin problemas*, editorial CECSA.

Calidad de diseño. Las diferencias en el diseño incluyen los tipos de *materiales* usados en la construcción, las *tolerancias* de producción, la *confiabilidad* obtenida, mediante el *desarrollo tecnológico* de moldes.⁵

Calidad de conformidad.- Indica qué tan bien cumple el producto las especificaciones y tolerancias requeridas por el diseño.⁵

Factores que influyen en la calidad de conformidad	{	<ul style="list-style-type: none">• Tipo de proceso de manufactura• Adiestramiento y supervisión de los trabajos• Control de proceso
--	---	--

Con frecuencia al incorporar la calidad en un producto da como resultado un mayor costo de producción, sin embargo tales incrementos en los costos son en realidad costos preventivos, los cuales tratan de prevenir problemas de calidad que pudieran surgir durante la vida útil del producto.

El secreto de la prevención estriba en observar el proceso y determinar las posibles causas de error. Estas causas pueden ser controladas. Cada producto o servicio está formado por un gran número de componentes, cada uno de los cuales debe tratarse por separado, con el fin de eliminar las causas de los problemas.⁶

La calidad de conformación puede incrementarse al cambiar algunos aspectos:

- Aseguramiento de la calidad

⁵ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

⁶ Philip B. Crosby, *Calidad sin lagrimas, El arte de administrar sin problemas*, editorial CECSA.

- Uso de métodos estadísticos de control de proceso.
- Cambio de procedimientos de inspección.

Características de la calidad:

1. **Físicas** : Longitud, peso, voltaje, viscosidad, etc.
2. **Sensoriales**: Sabor, presentación, color, etc.
3. **Dependientes del tiempo**: Confiabilidad, conservación, reparabilidad, etc.

1.3. MÉTODOS DE ASEGURAMIENTO DE LA CALIDAD

La calidad se está convirtiendo en un factor básico de la decisión del consumidor para muchos productos y servicios. Éste es un fenómeno general, no importa si el consumidor es una persona, una empresa o industria, un programa de defensa militar, o bien una tienda de comercio al por menor. Por consiguiente, la calidad es un factor clave que lleva al éxito en los negocios, al crecimiento, y a una mejor posición competitiva.

En la figura 1-1 se expone la manufactura de un producto propuesta por Juran, en la que en un tiempo inicial se tiene la mayor cantidad de rechazos y una gran variabilidad en el sistema, al tomar medidas y al hacer una mejora en la calidad reduce considerablemente el porcentaje de defectos hasta que finalmente el proceso se encuentra a un nuevo nivel de control de la calidad.



Figura 1-1 Trilogía de Juran.⁷

La estadística es el arte de tomar decisiones de un proceso o una población con base a un análisis de la información contenida en una muestra tomada de tal población.

⁷ J.M Juran, Frank M Gryna, *Manual de Control de Calidad Volumen I*, McGrawHill

Los métodos estadísticos desempeñan un cometido vital en el aseguramiento de la calidad. Constituyen los medios principales para muestrear, probar y evaluar un producto, y para usar la información contenida en esos datos a fin de controlar y mejorar el proceso de fabricación. El objetivo de estas herramientas se ilustra en la figura 1-2, que representa un proceso de producción como un sistema con un conjunto de entradas y salidas. Las entradas x_1, x_2, \dots, x_p son factores controlables, como temperaturas, presiones, velocidades de avance y otras variables del proceso. Las entradas z_1, z_2, \dots, z_r son incontrolables, por ejemplo factores ambientales, o la calidad de la materia prima suministrada por el proveedor. El resultado de estas entradas es un producto terminado que tiene varios parámetros, los cuales describen su calidad o su aptitud para el uso. La variable de salida y es una medida de la calidad del proceso.

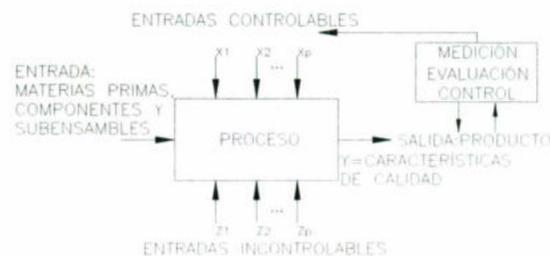


Figura 1-2. Entradas y salidas de un proceso de producción.⁸

Los experimentos diseñados son extremadamente útiles para descubrir las variables clave que influyen en las características de calidad. Un experimento diseñado es un procedimiento en el que se varían sistemáticamente los factores controlables de entrada, y se estudia el efecto que tienen dichos factores en los parámetros de salida del producto. Los experimentos diseñados estadísticamente son esenciales para reducir la variabilidad en las características de calidad, y determinar los niveles de las variables controlables que optimizan el rendimiento del proceso.

⁸ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Preguntas:

1. ¿Que entradas afectan al parámetro de salida y ?
2. ¿Cuál es la relación entre las entradas importantes y el parámetro de salida y ?
3. ¿Cómo se puede controlar y ?

Una vez determinada una lista de variables importantes que afectan la salida del proceso, suele ser necesario, moldear la relación entre las variables de entrada actuantes y las características de calidad de salida.

Cuando se han determinado las variables importantes, y la naturaleza de la relación entre estas variables y el modelo de salida del proceso, es posible aplicar técnicas como los diagramas de control para regular y vigilar el proceso, es decir, determinar cuando se necesitan cambios en las entradas para devolver dicho proceso a un estado bajo control.



Figura 1-3. Diagrama de fases del uso de los métodos de aseguramiento de la calidad.⁹

⁹ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

El objetivo principal del control estadístico es la *reducción sistemática* de la variabilidad en las características de calidad clave del producto.



Figura 1-4. Aplicación de las técnicas de aseguramiento de calidad y la reducción sistemática de la variabilidad del proceso.¹⁰

¹⁰ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

1.4. LOS GRANDES PENSADORES DE LA CALIDAD

1.4.1. Walter Shewhart



Fotografía 1-1 Walter Shewhart ¹¹

Walter Shewhart es considerado por muchos como el verdadero padre de la calidad, aunque algunos le nombran más bien "el abuelito", ya que fue maestro de los otros dos "padres": Deming y Juran.

Nació en New Canton, Illinois, USA el 18 de marzo de 1891 y estudió en las universidades de Illinois y de California en Berkeley hasta obtener la maestría y el doctorado en física en 1917.

Fue catedrático en control de calidad y estadísticas aplicadas en la Universidad de Londres, en el Instituto tecnológico Stevens, el Colegio de Graduados del Departamento de Agricultura de los EEUU, y en la India. Además de miembro del Comité Visitante del Departamento de Relaciones Sociales de Harvard, profesor honorario en Rutgers y miembro del comité consultivo de Princeton en el departamento de matemáticas.

¹¹ <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Shewhart.html>

En 1918, Shewhart entró a trabajar en la Western Electric Company, empresa que manufacturaba los teléfonos para la Bell Telephone. Los ingenieros de la Bell Telephone habían estado trabajando para mejorar la confiabilidad de sus sistemas de transmisión. Debido a que los amplificadores y otro equipos habían sido enterrados bajo tierra, existía una necesidad de reducir la frecuencia de las fallas y reparaciones. Bell Telephone se había dado cuenta de la importancia de reducir la variación en un proceso de manufactura, la base de toda producción delgada. Más aún, se habían percatado que el continuo ajuste de los procesos como reacción a las no conformidades en realidad incrementaba la variación y reducía la calidad.

Shewhart es el creador de los famosos gráficos de control estadístico de procesos (CEP), paso inicial hacia lo que él denominó la formulación de una base científica para asegurar el control económico, plasmada en su obra "Economic Control of Quality of Manufactured Products" (Control Económico de la Calidad de Productos Manufacturados), publicado en 1931.

Trabajó en la Western Electric hasta 1924, y en los laboratorios Bell Telephone como miembro del staff técnico de 1925 a 1956 cuando se retiró.

En 1924, Shewhart estructuró el problema en términos de "causas asignables" y "causas comunes" de variación e introdujo el "el gráfico de control" como una herramienta para distinguir y separar ambos tipos. Shewhart enfatizó que el poner un proceso productivo dentro de "control estadístico", donde solamente hubiera "causas comunes" de variación, y después mantenerlo en ese estado, es necesario para predecir el comportamiento futuro y administrar el proceso de forma económica. Shewhart trabajó en Bell Telephone Laboratories desde su fundación en 1925 hasta su retiro en 1956, y publicó una serie de artículos en el Bell System Technical Journal.

Durante los años 30, el trabajo de Shewhart lo llevó a establecer fundamentos científicos e incluso filosóficos, particularmente aquellos concernientes al trato que se debía dar a los trabajadores.

Los gráficos de control de Shewhart fueron adoptados por la Sociedad Americana para Prueba de Materiales (ASTM) en 1933 y sirvieron como herramienta principal para mejorar la producción durante la segunda guerra mundial a través de las normas American War Standards Z1.1-1941, Z1.2-1941 and Z1.3-1942. Fue durante este periodo que W. Edwards Deming empezó a desarrollar su modelo de administración consistente en el estudio sistemático de los datos, y basado en las ideas de Shewhart. Después de la guerra, Deming difundió las herramientas creadas por Shewhart, cuando trabajó como consultor para grandes corporaciones, primero japonesas y después norteamericanas, desde 1950 hasta 1990. El modelo de Deming para la mejora continua ha sido señalada como la responsable del dramático incremento de la productividad en el Japón durante la segunda mitad del siglo XX.

Como consultor, sirvió al Departamento de Guerra de los EEUU, a la ONU, y el gobierno de la India. Era miembro activo del Consejo Nacional de Investigación y del Instituto Internacional de Estadísticas. Miembro Honorario de la Sociedad Real de Estadística de Inglaterra y de la Asociación de Estadísticas de la India. Miembro y oficial de del Instituto de Estadísticas Matemáticas, la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, y la Asociación Americana de Estadística; y miembro de la Sociedad de Econometría, el Instituto Internacional de Estadística y la Academia de Ciencias de Nueva York. Fue el primer presidente de la Sociedad Americana de Calidad (ASQ).

Además de "Economic Control of Quality of Manufactured Products", Shewhart escribió "Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control" (Método Estadístico desde el Punto de Vista del Control de Calidad) en 1939, y numerosos artículos en publicaciones profesionales. Aún se conservan muchos de los documentos que escribió internamente cuando trabajaba en Bell, como el famoso memo de 1924 en el que propone a sus superiores los gráficos de control.

Shewhart recibió muchos reconocimientos incluyendo la medalla de honor por parte de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos así como el grado de Miembro

Honorario de la Real Sociedad de Estadística de Inglaterra y de la Asociación Americana de la Calidad.

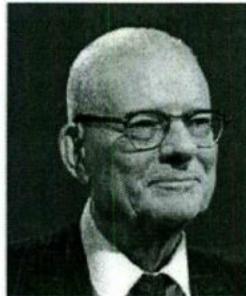
Murió en Troy Hills, New Jersey, Estados Unidos el 11 de marzo de 1967.

Durante los años 90 la genialidad de Shewhart fue "redescubierta" por una tercera generación de administradores, llamándola la metodología Six Sigma.

Frase célebre de Shewhart: "Tanto la ciencia pura como la aplicada han necesitado de niveles cada vez más altos de precisión y exactitud. Sin embargo, la ciencia aplicada, particularmente en la producción masiva de bienes, es incluso más exacta que la ciencia pura en ciertos aspectos de precisión y exactitud."¹²

¹² <http://www.calidad.com.mx/gurus.html>

1.4.2. W. Edward Deming



Fotografía 1-2 W. Edward Deming ¹³

Un pionero y profeta de la Calidad Total (TQM - Total Quality Management).

En 1950, lo que Japón quería, lo tenía Estados Unidos; simultáneamente, ¿Qué tenía los Estados Unidos pero no quería? La respuesta, W. Edward Deming, un estadista, profesor y fundador de la Calidad Total. Ignorado por las corporaciones americanas, Deming fue a Japón en 1950 a la edad de 49 y enseñó a los administradores, ingenieros y científicos Japoneses como producir calidad.

Treinta años después, luego de ver un documental en televisión en la cadena NBC, titulado, “Si Japón puede, porque nosotros no” corporaciones como Ford, General Motors y Dow Chemical, por nombrar algunas se dieron cuenta y buscaron la asesoría de Deming.

La vida de Deming se tornó un torbellino de consultas y conferencias.

¹³ <http://www.geocities.com/maag111063/calidad2.html>

Ampliamente solicitado luego que Deming compartió sus ahora famosos “14 puntos” y “7 pecados mortales” con algunas de las corporaciones más grandes de América. Sus estándares de calidad se convirtieron en sitios comunes en los libros de administración, y el premio Deming, otorgado por primera vez en Japón pero ahora reconocido internacionalmente, es ahora buscado por algunas de las corporaciones más grandes del mundo.

La temprana vida de Deming fue caracterizada por la pobreza y el trabajo duro. Nació el 14 de Octubre de 1900, en Sioux City, Iowa. Su padre, un abogado luchador, perdió una demanda judicial en Powell, Wyoming, lo cual hizo mudar a la familia a dicha ciudad cuando Deming tenía siete años. Vivieron en una casa humilde donde el preocuparse por que sería su próxima comida era parte de su régimen diario. Deming salió a trabajar cuando tenía ocho a un hotel local. Con sus ahorros en mano, Deming se fue de Powell a la edad de 17 hacia Laraman, a la Universidad de Wyoming donde estudio ingeniería. Recibió un Ph.D en Físicas Matemáticas en la Universidad de Yale en 1927 donde fue empleado como profesor. Deming recibió muchas ofertas en la industria privada y agarró un empleo trabajando para el Departamento de Agricultura en Washington, D.C. Fue acá donde Deming conoció a su esposa, Lola Sharpe, con quien se caso en 1932, y fue presentado con su guía, Walter Shewhart, un estadístico para Laboratorios Bell y sus escritos impactaron su vida y se convirtieron en la base de sus enseñanzas.

Durante la Segunda Guerra Mundial, Deming enseñó a los técnicos e ingenieros americanos estadísticas que pudieran mejorar la calidad de los materiales de guerra. Fue este trabajo el que atrajo la atención de los Japoneses. Después de la guerra, la Unión Japonesa de Científicos e Ingenieros buscó a Deming. En Julio de 1950, Deming se reunió con la Unión quien lo presentó con los administradores principales de las compañías japonesas. Durante los próximos treinta años, Deming dedicaría su tiempo y esfuerzo a la enseñanza de los Japoneses y “transformo su reputación en la producción de un motivo de risa a un motivo de admiración y elogio”.

¿Por que fue Deming un éxito en Japón y desconocido en América? Deming fue invitado a Japón cuando su industria y economía se encontraba en crisis. Ellos escucharon. Ellos cambiaron su forma de pensar, su estilo de administrar, su trato a los empleados y tomaron su tiempo. Al seguir la filosofía de Deming, los Japoneses giraron su economía y productividad por completo para convertirse en los líderes del mercado mundial. Tan impresionados por este cambio , el Emperador Horohito condecoró a Deming con la Medalla del Tesoro Sagrado de Japón en su Segundo Grado. La mención decía “El pueblo de Japón atribuyen el renacimiento de la industria Japonesa y su éxito mundial a Ed Deming”.

No fue sino hasta la transmisión de un documental por NBC en Junio de 1980 detallando el éxito industrial de Japón que las corporaciones Americanas prestaron atención. Enfrentados a una producción decadente y costos incrementados, los Presidentes de las corporaciones comenzaron a consultar con Deming acerca de negocios. Encontraron que las soluciones rápidas y fáciles típicas de las corporaciones Americanas no funcionaban. Los principios de Deming establecían que mediante el uso de mediciones estadísticas, una compañía ebria ser capaz de graficar como un sistema en particular estaba funcionando para luego desarrollar maneras para mejorar dicho sistema. A través de un proceso de transformación en avance, y siguiendo los Catorce Puntos y Siete Pecados Mortales, las compañías estarían en posición de mantenerse a la par con los constantes cambios del entorno económico. Obviamente, esto era mucho mas largo, incluía mas procesos de los que estaban acostumbrados las corporaciones Americanas; de aquí, la resistencia a las ideas de Deming.¹⁴

Deming se hizo disponible a la América corporativa en términos de consulta y a individuales a través de sus escritos y tours de seminarios por los próximos trece años de su vida. Aunque murió en 1993, su trabajo aun vive. Slogans de misión, tales como el de

¹⁴ <http://members.tripod.com/~alfjr7/EdDeming.html>

Ford “Calidad es el primer trabajo”, son reconocidos en la industria; cursos empresariales son dictados usando sus principios como partes integrales del curriculum; y la abreviación TQM (Total Quality Management) es ampliamente conocido y comúnmente utilizado a través de la América corporativa. ¿Es el mundo un mejor lugar gracias a Deming? Corporaciones e industrias quienes sus productos mejoran las vidas de las personas han encontrado que lo siguiente es cierto: si los principios de Deming están en su sitio y funcionan con su negocio, “la calidad aumenta, los costos bajan y los ahorros se le pueden pasar al consumidor”. Los clientes obtienen productos de calidad, las compañías obtienen mayores ingresos y la economía crece. En un plano material, económico, el mundo es ciertamente un mejor lugar gracias a las ideas y enseñanzas de Ed Deming.¹⁵

1.4.3. Joseph M. Juran



Fotografía 1-3 Joseph M. Juran¹⁶

Nació en 1904, en la ciudad de Braila, en la actual Rumania. Emigró a los Estados Unidos con su familia a los 5 años de edad, estableciéndose en Minesota en 1909. En su infancia trabajó como vendedor de zapatos, lustrabotas, vendedor de comestibles y tenedor de libros para un local comercial.

¹⁵ <http://members.tripod.com/~alfjr7/TQM.html>

¹⁶ <http://www.geocities.com/maag111063/calidad2.html>

En 1924 se graduó en B.S. en Ingeniería Eléctrica y pronto ingresó a trabajar en el departamento de Inspección en la planta Hawthorne de la Western Electric en Chicago. En 1926 es uno de los dos ingenieros asignados al recién creado Departamento de Inspección Estadística, donde son entrenados por un equipo de la Bell Laboratories compuestos por el célebre Walter Shewhart entre otros.

En 1928 publica su primer trabajo referido a la calidad, denominado “Métodos Estadísticos aplicado a problemas industriales”, logrando que se imprimieran en el célebre Manual de Control Estadístico de Calidad de la AT & T. En 1939, Juran es elegido Director de Ingeniería Industrial de la Western Electric, con sede en la casa central en Nueva York. En este período, se vuelve un tipo de consultor interno, visita e intercambia muchas ideas con personeros de muchas empresas americanas. Por ese entonces crea los Diagramas de Pareto, muy utilizados actualmente en las empresas. En 1941, temporalmente deja la Western Electric para servir en Washington como administrador asistente en plena campaña de Estados Unidos en la guerra. En 1945 deja las actividades del gobierno y también a la Western Electric para dedicarse de lleno a la Gestión de la Calidad.

En 1951 publica en conjunto con Frank Gryna su tan famoso Manual de Calidad que lo convierten en toda una autoridad de la materia y su reputación recorre todo el mundo. En 1954, el JUSE le hace una invitación al Japón para dictar una serie de conferencias y seminarios que lleva a cabo. Sus aportes junto a los de Deming son cruciales en el desarrollo del Control de Calidad en ese país, y es así que treinta años más tarde, el emperador Hirohito lo premia con la Orden del Tesoro Sagrado. En 1964 publica “Managerial Breakthrough” y en 1979 funda el Instituto Juran Inc. En 1986 publica “La Trilogía de Juran” y ayuda a la creación del Premio Nacional Malcolm Baldrige. En 1987 abandona su vida laboral para dedicarse de lleno a descansar, dictando conferencias en forma esporádica.

1.4.4. Armand V. Feigenbaum



Fotografía 1-4 Armand V. Feigenbaum ¹⁷

Nació en 1920. Fue Gerente de manufactura y Control de Calidad a nivel mundial de General Electric por más de 10 años, Presidente de General System Company en Massachusetts y Director fundador de la Academia Internacional de Calidad donde participa la Organización europea para el Control de Calidad, el JUSE y la ASQC. Se le reconocen a Feigenbaum tres grandes aportes; el concepto de “calidad total” que los japoneses recogieron como “TQC”, la promoción internacional de la ética de la calidad y la clasificación de los costos de la calidad. En 1951 publica el libro “Control de Calidad: Principios, práctica y Administración”

¹⁷ <http://www.geocities.com/maag111063/calidad2.html>

1.4.5. Kaoru Ishikawa



Fotografía 1-5 Kaoru Ishikawa ¹⁸

Nació en 1915 en Japón y se graduó en 1939 en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Tokyo. En 1947 era profesor asistente de la misma universidad y en 1960 obtuvo el doctorado en Ingeniería con lo cual fue promovido a profesor. En su larga carrera obtuvo el Premio Deming, el Nihon Keizai de la prensa, el de la Normalización Industrial y el gran premio de la ASQC por su programa de educación en el Control de Calidad.

Ishikawa fue líder indiscutido del movimiento de la calidad japonés. Introdujo el concepto de “Control de Calidad en toda la Compañía”, el proceso de auditoría para determinar si una empresa era apta para recibir el Premio Deming, los círculos de Control de Calidad y los Diagramas de Causa y Efecto. Fallece en abril de 1989.

¹⁸ <http://www.geocities.com/maag111063/calidad2.html>

2. MÉTODOS ESTADÍSTICOS

Objetivo particular: El alumno conocerá las principales técnicas estadísticas las cuales le permitirán desarrollar las bases para resolver un problema de control de un proceso

2.1. *DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS E HISTOGRAMA.*

No hay dos unidades de un producto, fabricadas por determinado proceso de manufactura que sean idénticas. Alguna variación es inevitable.

La estadística es la ciencia del análisis de datos y la deducción de conclusiones a partir de aquél, tomando en cuenta las variaciones en los datos.

Es necesario detectar cualquier patrón en la variabilidad o estructura de datos por lo que se necesita elaborar una distribución de frecuencias que es un ordenamiento de los datos según su magnitud.

El histograma es una representación gráfica de la distribución de un conjunto de medidas. Un histograma es un tipo especial de gráfica de barras que despliega la variabilidad dentro de un proceso, toma datos variables tales como: alturas, pesos, densidades tiempo, temperaturas, etc. y despliega su distribución. Los patrones inusuales pueden ser un indicativo de que un proceso necesita investigación para determinar su grado de estabilidad.

El histograma se utiliza cuando se quiere comprender mejor el sistema, específicamente al hacer seguimiento del desempeño actual del proceso, seleccionar el siguiente producto o servicio a mejorar, probar y evaluar las revisiones de procesos para mejorar.

En la tabla 2-1 se presentan 125 de observaciones del diámetro interior de anillos forjados para los pistones que se usan en los motores de automóvil.¹⁹

Tabla 2-1 Observaciones del diámetro interior de anillos para los pistones.

Numero de la muestra	Observaciones				
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002
4	74.002	73.996	73.993	75.015	74.009
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003
21	73.988	74.001	74.009	74.005	73.996
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013

A partir de las observaciones 2-1 se obtiene la tabla de distribución de frecuencias, que para el caso del ejemplo se ilustra en la tabla 2-2.

¹⁹ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Tabla 2-2 Tabla de distribución de frecuencias.

DIAMETRO DEL ANILLO (mm)	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
73.967 a 73.971	1.000	1	0.80%	0.80%
73.972 a 73.976	0.000	1	0.00%	0.80%
73.977 a 73.981	0.000	1	0.00%	0.80%
73.982 a 73.986	8.000	9	6.40%	7.20%
73.987 a 73.991	10.000	19	8.00%	15.20%
73.992 a 73.996	19.000	38	15.20%	30.40%
73.997 a 74.001	23.000	61	18.40%	48.80%
74.002 a 74.006	22.000	83	17.60%	66.40%
74.007 a 74.011	22.000	105	17.60%	84.00%
74.012 a 74.016	13.000	118	10.40%	94.40%
74.017 a 74.021	4.000	122	3.20%	97.60%
74.022 a 74.026	2.000	124	1.60%	99.20%
74.027 a 74.031	1	125	0.80%	100.00%

El histograma es la representación visual los datos, en el que pueden observarse más fácilmente tres propiedades:

1. Forma
2. Acumulación o tendencia central.
3. Dispersión o variabilidad.

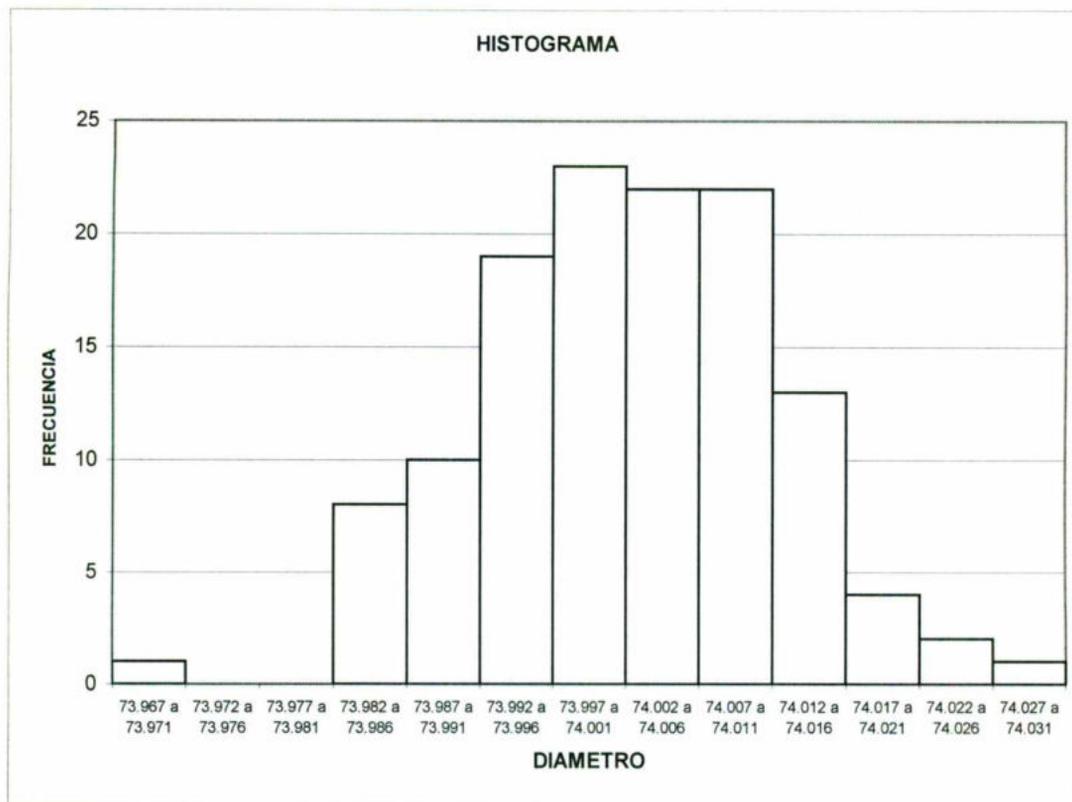


Figura 2-1 Histograma de los datos de diámetro de los anillos de pistón.²⁰

Un histograma en términos generales debe considerar:

- a) De 4 a 20 grupos (o celdas); a menudo es conveniente elegir un número total de celdas aproximadamente igual a la raíz cuadrada del tamaño de la muestra.
- b) Las celdas deben tener amplitud uniforme

²⁰ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

- c) Se empieza con un límite inferior de la primera celda sólo un poco menor que el valor más pequeño de los datos.

El agrupamiento de los datos en celdas condensa los datos originales, lo que da como resultado una pérdida de algo de detalle.

2.2. RESUMEN NUMÉRICO DE DATOS

Media muestral

Sean X_1, X_2, \dots, X_n observaciones en una muestra. La medida más importante para la tendencia central en la muestra es la *media muestral*.

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad \text{Media Muestral (2-1)}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \quad \text{Media Muestral (2-2)}$$

La media muestral es exactamente el promedio aritmético de n observaciones. En un histograma la media muestral es el punto de equilibrio y representa el centro de masa de los datos muestrales.²¹

Variación muestral

La dispersión o variabilidad de los datos muestrales se mide con la varianza muestral.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{Variación (2-3)}$$

²¹ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Observe que la varianza de muestra es exactamente la suma de los cuadrados de las desviaciones o diferencias de las observaciones respecto a la media muestral \bar{x} , dividida entre el tamaño de la muestra menos uno.

Si no hay variabilidad de la muestra, entonces para cada observación muestral $X_i = \bar{x}$ y la varianza muestral $S^2 = 0$.

Cuanto más grande sea la varianza, más grande será la dispersión de los datos.

Desviación estándar

La desviación estándar muestral S , es la medida de dispersión más fácil de interpretar ya que se expresa en la unidad original de las mediciones.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{Desviación estándar (2-4)}$$

<i>Muestral</i>	<i>Muestra2</i>	<i>Muestra3</i>
$x_1 = 1$	$x_1 = 1$	$x_1 = 101$
$x_2 = 3$	$x_2 = 5$	$x_2 = 103$
$x_3 = 5$	$x_3 = 9$	$x_3 = 105$
$\bar{x} = 3$	$\bar{x} = 5$	$\bar{x} = 103$
$S = 2$	$S = 4$	$S = 2$

Importante: La desviación estándar NO refleja la magnitud de los datos muestrales, sino solamente su dispersión alrededor de la media.

2.3. DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Una distribución de probabilidad es un modelo matemático que relaciona el valor de la variable con la probabilidad de la ocurrencia de este valor en la población.

Es posible visualizar una medición como una variable aleatoria, porque toma valores diferentes en la población, conforme a un mecanismo fortuito.²²

Hay dos tipos de distribuciones de probabilidad:

1. Distribuciones continuas. Cuando la variable que se mide se expresa en una escala continua.
2. Distribuciones discretas. Cuando el parámetro que se mide solamente puede tomar ciertos valores como los números enteros.

La media poblacional μ es un parámetro de tendencia central en una distribución de probabilidad.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \text{Media poblacional (2-5)}$$

La dispersión o variabilidad poblacional en una distribución se expresa como la varianza (o variación). σ^2

²² Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N}$$

varianza poblacional (2-6)

N = Corresponde al número de artículos dentro de la población.

La desviación estándar es una medida de la disgregación o dispersión de los datos de la población, expresada en la unidad original.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N}}$$

desviación estándar (2-7)

2.3.1. Distribución de probabilidad binomial.

Considérese un proceso que consiste en una sucesión de n pruebas independientes, donde el resultado de cada una es un “éxito” o un “fracaso”. Tales pruebas se llaman pruebas de Bernoulli. Si la probabilidad de un “éxito” en cualquier prueba, digamos p , es constante, entonces el número de “éxitos” x en n pruebas de Bernoulli tendrá la distribución binomial²³:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

distribución binomial (2-8)

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

²³ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Los parámetros de la distribución binomial son n y p , donde n es un número entero positivo, $0 < p < 1$. La media y la varianza de la distribución binomial son:

$$\mu = np \quad (2-9)$$

$$\sigma^2 = np(1-p) \quad (2-10)$$

Este modelo de probabilidad es apropiado para muestrear una población infinitamente grande donde p representa la fracción o proporción de artículos defectuosos en la población y x representa el número de artículos disconformes encontrados en una muestra aleatoria de tamaño n . Por ejemplo, considérese una población de 15 artículos con una proporción de artículos defectuosos del 10% (Tabla 2-3), entonces la probabilidad de obtener x artículos disconformes se calcula a partir de (2.8) como:

Tabla 2-3 Población de 15 artículos con una proporción de artículos defectuosos del 10%

x	$p(x)$
0	0.2059
1	0.3432
2	0.2669
3	0.1285
4	0.0428
5	0.0105
6	0.0019
7	0.0003
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
11	0.0000
12	0.0000
13	0.0000
14	0.0000
15	0.0000

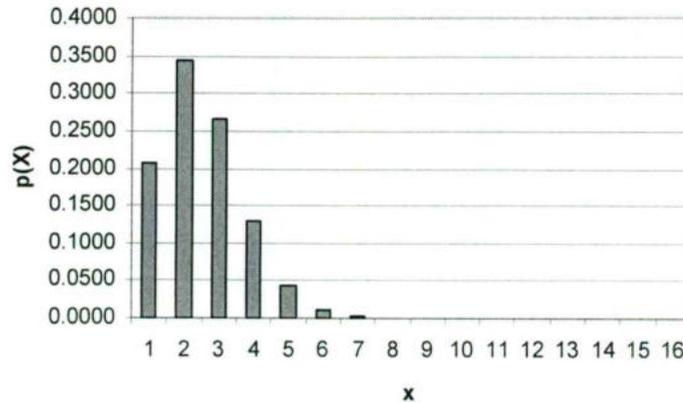


Figura 2-2 Distribución binomial con $p = 0.10$ y $n = 15$

2.3.2. Distribución de probabilidad hipergeométrica

Supóngase que tenemos una población finita con N artículos. Algunos de éstos digamos D (donde $D \leq N$). Se selecciona una muestra aleatoria de n artículos de la población sin reposición, y se observa el número de artículos en la muestra que quedan en la muestra de interés, digamos x . Entonces x es una variable aleatoria hipergeométrica, con la distribución de probabilidad²⁴

$$p(x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Distribución hipergeométrica (2-11)

²⁴ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

$$x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, D)$$

$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ es el número de combinaciones de a elementos tomados b cada

vez. La media y la varianza de la distribución hipergeométrica son:

$$\mu = \frac{nD}{N} \quad (2-12)$$

$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad (2-13)$$

La distribución hipergeométrica es el modelo probabilístico apropiado para seleccionar una muestra aleatoria de n artículos, sin reposición, de un lote de N de ellos, de los cuales D son disconformes o defectuosos. En estas aplicaciones, x representa el número de artículos disconformes encontrados en la muestra.

2.3.3. Distribución de probabilidad de Poisson

Una distribución discreta útil en el control estadístico de calidad es la distribución Poisson,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{Distribución Poisson,} \quad (2-14)$$

$$x=0,1,\dots$$

donde el parámetro $\lambda > 0$. La media y la varianza de la distribución de Poisson son:

$$\mu = \lambda \quad (2-15)$$

y

$$\sigma^2 = \lambda \quad (2-16)$$

respectivamente. Es decir, la media y la varianza de la distribución de Poisson son ambas iguales al parámetro λ .

Una aplicación clásica de la distribución de Poisson en el control de calidad es como un modelo del número de defectos o disconformidades que ocurren en una unidad del producto. En realidad cualquier fenómeno aleatorio que ocurre "por unidad" (de área, de volumen, de tiempo, etc.) muchas veces se puede aproximar bien por la distribución de Poisson.²⁵

2.3.4. Distribución de probabilidad geométrica

Se inicia la observación en cualquier punto del proceso (lo que puede implicar aleatoriedad) pero preferentemente después del ensayo N , sea n el número de ensayos a la ocurrencia del evento

²⁵ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

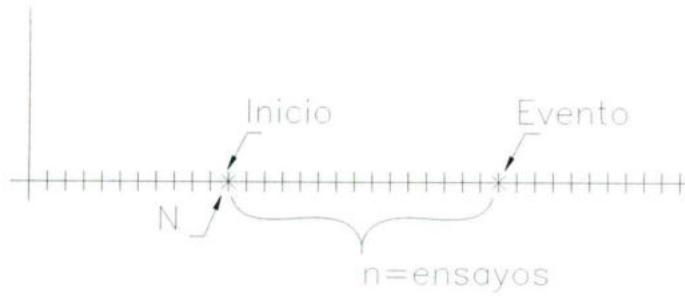


Figura 2-3 Representación gráfica de un proceso con distribución de probabilidad geométrica

$$g(n) = q^{n-1} p \quad (2-17)$$

$$G = (n)1 - q^n \quad (2-18)$$

$$\mu = \frac{1}{p} \quad (2-19)$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} \quad (2-20)$$

$$\tau(n) = q^n \quad (2-21)$$

$n=1,2,3,\dots$

Ejemplo: Si $p=0.2$ y $n= 1,2,3,4,5$. Hacer el patrón de recurrencia

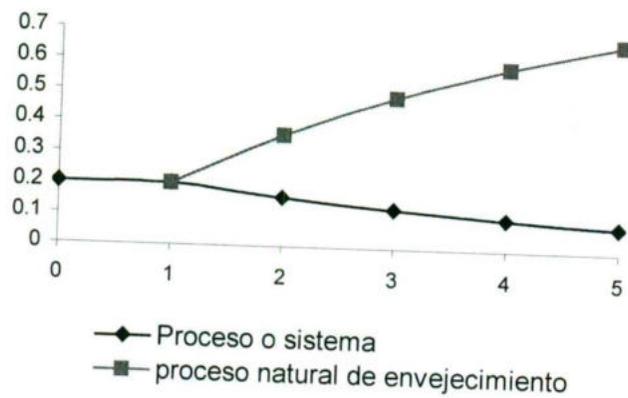
$$q(1)=0.8^0(0.2)=0.2$$

$$q(2)=0.8^1(0.2)=0.16$$

$$q(3)=0.8^2(0.2)=0.128$$

$$q(4)=0.8^3(0.2)=0.1024$$

$$q(5)=0.8^4(0.2)=0.08192$$



Gráfica 2-1 Representación gráfica de la distribución geométrica

2.3.5. Distribución de probabilidad binomial negativa

Considérese una sucesión de pruebas independientes, cada una con una probabilidad de éxito p y sea x en el que se representa el r -ésimo éxito. La distribución de probabilidad para una variable aleatoria binomial negativa está dada por:

$$p(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad \text{D. binomial negativa} \quad (2-22)$$

La media y la varianza de una variable aleatoria binomial negativa son, respectivamente:

$$\mu = \frac{r}{p} \quad (2-23)$$

$$\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad (2-24)$$

$$x=r, r+1, r+2, \dots$$

$$r \geq 1$$

2.4. DISTRIBUCIONES CONTINUAS

2.4.1. Distribución de probabilidad normal

Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

La importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal

- *Caracteres morfológicos* de individuos (personas, animales, plantas,...) de una especie, p.ejm. tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros,...
- *Caracteres fisiológicos*, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- *Caracteres sociológicos*, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.
- *Caracteres psicológicos*, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio,...
- *Errores* cometidos al medir ciertas magnitudes.
- *Valores estadísticos* muestrales, por ejemplo : la media.
- *Otras distribuciones* como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales, ...

Distribución de probabilidad Normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2-25)$$

Los parámetros de la distribución normal son la media μ ($-\infty < \mu < \infty$) y la varianza $\sigma^2 > 0$. A menudo se sigue una notación especial $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, para implicar que x tiene una distribución normal, con media μ y varianza σ^2 . El aspecto de una distribución normal es el de una curva simétrica (unimodal) con perfil acampanado (figura 2-4).²⁶

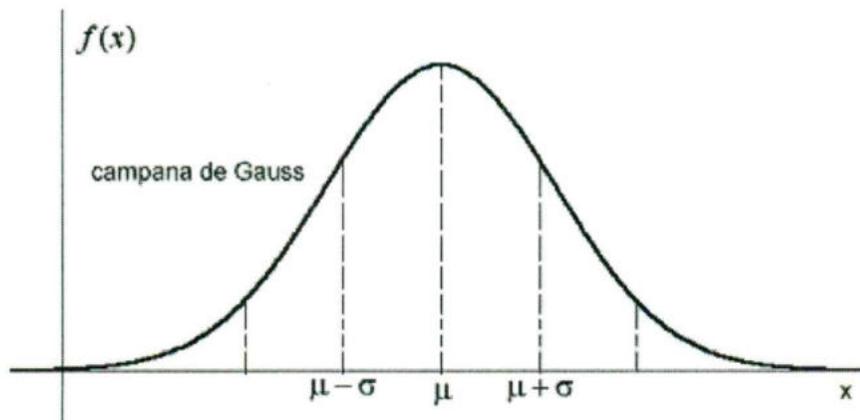


Figura 2-4 Distribución normal ²⁷

Hay una interpretación sencilla de la desviación estándar σ de una distribución normal lo que se ilustra en la figura 2-5. Obsérvese que 68.26% de los valores poblacionales se hallan entre los límites definidos por la media más y menos una desviación estándar ($\mu \pm \sigma$), 95.46% de los valores están entre los límites definidos por la

²⁶ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

²⁷ <http://personal5.iddeo.es/ztt/>

media mas y menos dos desviaciones estándares ($\sigma \pm 2\sigma$), y 99.73% de los valores de la población caen entre los límites definidos por la media más y menos tres desviaciones estándares ($\sigma \pm 3\sigma$), así , la desviación estándar mide la distancia en la escala horizontal, asociada a los límites de contención de 68.26%, 95.46% y 99.73%.

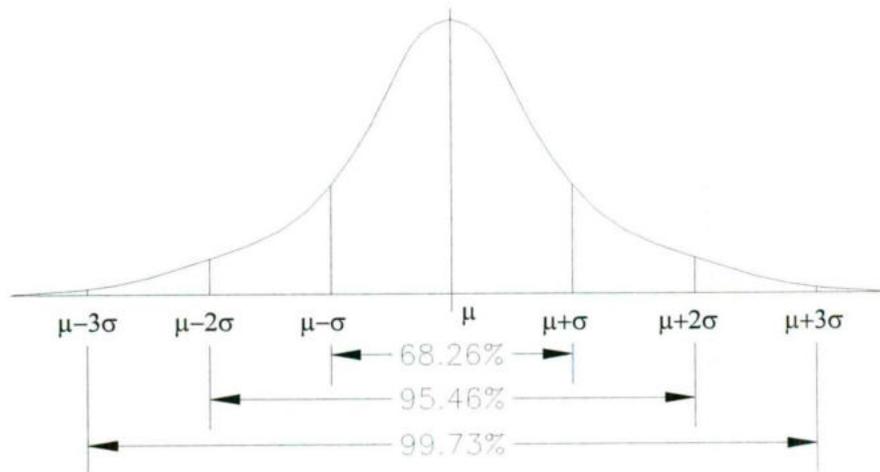


Figura 2-5 Áreas bajo la curva de distribución normal.²⁸

La distribución normal acumulativa se define como:

²⁸ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

$$P\{x \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2-26)$$

No es posible evaluar esta integral en forma cerrada. Sin embargo, utilizando el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2-27)$$

la evaluación puede hacerse independiente de μ y de σ^2 . Esto es:

$$P\{x \leq a\} = P\left\{z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right\} \equiv \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar (media = 0, desviación estándar = 1)

2.4.2. Distribución de probabilidad exponencial

La distribución de probabilidad de variable aleatoria es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Distribución exponencial (2-28)

$$x \geq 0$$

donde $\lambda > 0$ es una constante. La media y la varianza de la distribución exponencial son:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (2-29)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2-30)$$

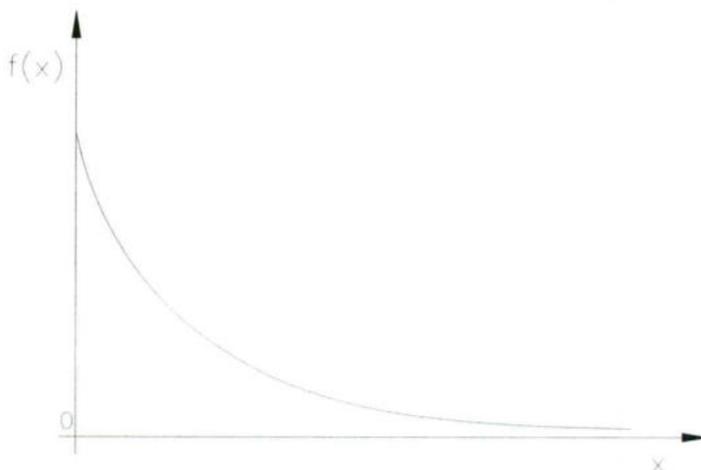


Figura 2-6 Distribución exponencial.²⁹

El efecto de la falla del sistema va desapareciendo en función del tiempo sin embargo no desaparece ya que nada es perfecto.

La distribución de probabilidad acumulativa es:

²⁹ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

$$F(a) = P\{x \leq a\}$$

$$F(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$F(a) = 1 - e^{-\lambda a} \quad (2-31)$$

$$a \geq 0$$



Figura 2-7 Función de distribución exponencial acumulativa.

La distribución de probabilidad se utiliza ampliamente en el campo de la ingeniería de confiabilidad como un modelo para el tiempo hasta la falla de un componente o de un sistema. En estas aplicaciones el parámetro λ se llama *índice de falla* del sistema, y la media de la distribución $1/\lambda$ se denomina *tiempo medio hasta la falla* (falla preventiva en función de la vida útil).

El parámetro μ es equivalente al número de ciclos por unidad de tiempo (frecuencia):

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Ejemplo un tanque estacionario de gas tiene una vida útil de 20 años (tiempo a la falla preventiva) calcule la probabilidad para 5, 10, 15, 20, 25 y 30 años.

Solución:

$$\text{Si } 20 \text{ años} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20} = 0.05$$

de 2-28 se obtienen los valores de la distribución exponencial:

$$f(0) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 0)} = 0.0500$$

$$f(5) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 5)} = 0.0389$$

$$f(10) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 10)} = 0.0303$$

$$f(15) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 15)} = 0.0236$$

$$f(20) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 20)} = 0.0184$$

$$f(25) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 25)} = 0.0143$$

$$f(30) = 0.05 e^{-(0.05 \cdot 30)} = 0.0112$$

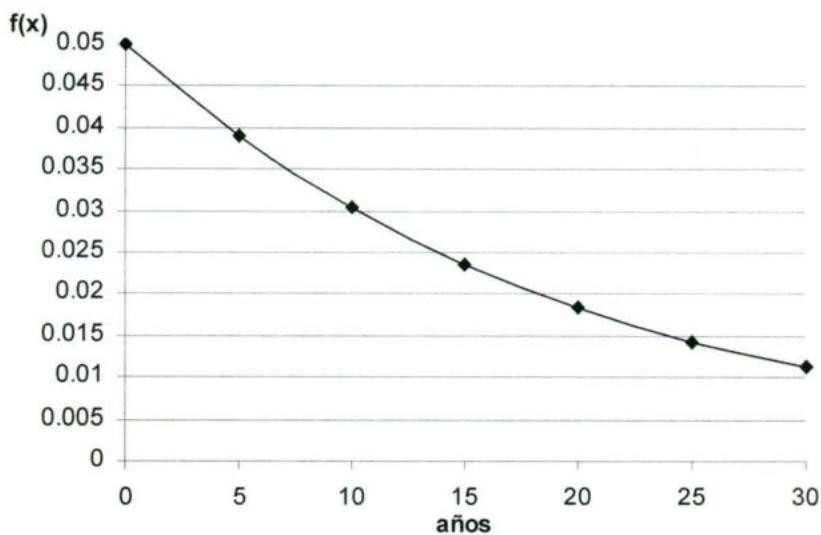


Figura 2-8 Representación gráfica de la distribución exponencial del ejemplo

de 2-31 se obtienen los valores de la distribución exponencial acumulativa:

$$F(0) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 0)} = 0.0000$$

$$F(5) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 5)} = 0.2212$$

$$F(10) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 10)} = 0.3935$$

$$F(15) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 15)} = 0.5276$$

$$F(20) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 20)} = 0.6321$$

$$F(25) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 25)} = 0.7135$$

$$F(30) = 1 - e^{-(0.05 \cdot 30)} = 0.7769$$

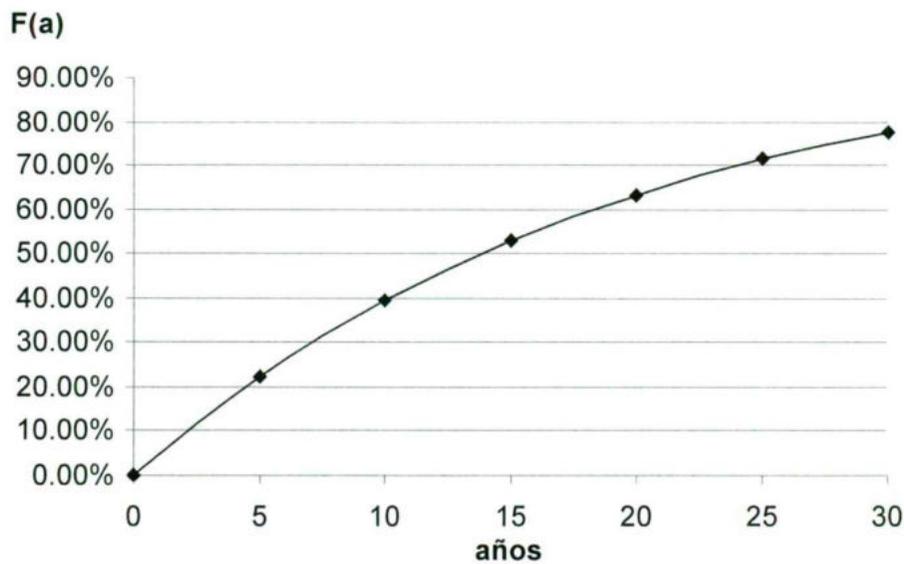


Figura 2-9 Representación gráfica de la distribución exponencial acumulativa del ejemplo

Nótese que la probabilidad de que el tanque de gas falle antes de que alcance el tiempo medio a la falla, es decir 20 años, es de 0.63212. Esto sucede ya que la distribución no es simétrica.

2.4.3. Distribución de probabilidad gamma

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria gamma es:

$$f(X) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad \text{Distribución gamma (2-32)}$$

$$x \geq 0$$

donde los parámetros son $\lambda > 0$ y $r > 0$. Normalmente, r se llama parámetro *de forma*, y λ se denomina parámetro *de escala*. La media y la varianza de la distribución gamma son:

$$\mu = \frac{r}{\lambda} \quad (2-33)$$

$$\sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2} \quad (2-34)$$

Si $r = 1$ la distribución gamma se convierte en la distribución exponencial con parámetro λ . La distribución gamma puede tomar muchas formas, dependiendo de los valores escogidos para r y λ . Esto la hace útil como un modelo para una gran variedad de variables aleatorias continuas.

Si el parámetro r es un número entero, entonces la distribución gamma es la suma de r distribuciones exponenciales, distribuidas independiente e idénticamente, cada una

con parámetro λ . Esto es, si x_1, x_2, \dots, x_r son exponenciales con parámetro λ e independientes, entonces

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_r$$

Se distribuye en la forma gamma con parámetros r y λ existe un gran número de aplicaciones importantes de este resultado.

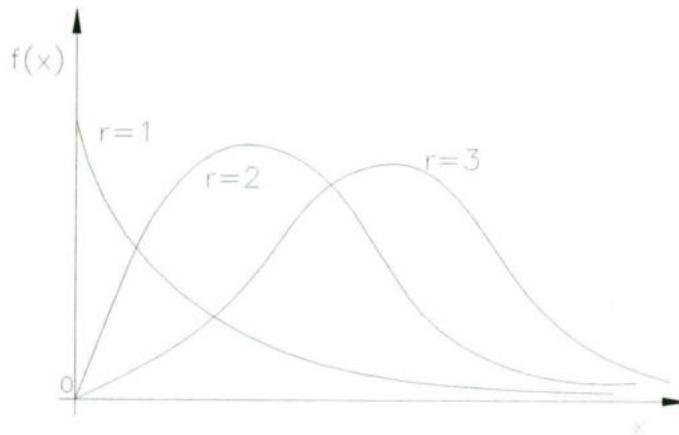
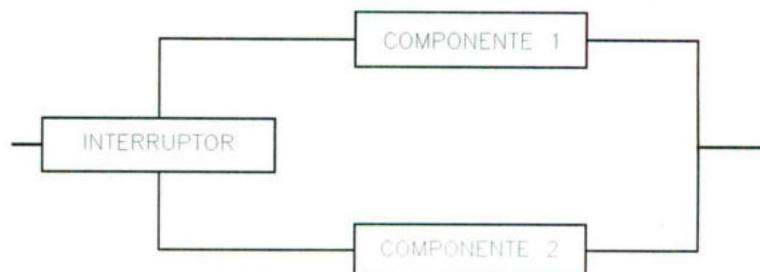


Figura 2-10 Distribución gamma para diversos valores de r y λ constante.

Considere un sistema de *reserva redundante*, cuando el componente 1 funciona, el componente 2 se encuentra inactivo, y cuando el 1 falla, el interruptor activa automáticamente el 2.



Si cada componente tiene duración (o vida) descrita por una distribución exponencial con $\lambda = 10^{-4}$ h, por ejemplo, entonces la duración del sistema tiene distribución gamma con parámetros $r = 2$ y $\lambda = 10^{-4}$. De esta manera, el tiempo medio hasta la falla es $\mu = r/\lambda = 2/10^{-4} = 2 \times 10^4$ h.

La distribución acumulativa gamma es:

$$F(a) = 1 - \int_a^{\infty} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t} dt \quad (2-35)$$

2.5. INFERENCIAS ACERCA DE LA CALIDAD

2.5.1. Estimación de parámetros de proceso

Una variable aleatoria se caracteriza o describe mediante su distribución de probabilidad, y la distribución es descrita a su vez por sus parámetros:

Parámetros de la distribución normal $\rightarrow \mu$ (media), σ^2 (variancia)

Parámetro de la distribución Poisson $\rightarrow \lambda$

En control estadístico de calidad se usa la distribución de probabilidad para describir o modelar alguna característica de calidad, como la dimensión crítica de un producto, o la fracción de defectuosa en un proceso de manufactura.

Como por lo regular se desconocen los parámetros, es necesario disponer de procedimientos para estimar a partir de datos muestrales.

Es posible de finar el estimador de un parámetro desconocido como un estadístico que corresponde al parámetro. Un valor numérico particular de un estimador, calculado a partir de datos muestrales, se llama *estimación*. Un estimador puntual es una estadística que produce un solo valor numérico como estimación del parámetro desconocido. Un estimador por intervalo es un intervalo aleatorio que incluye el valor real del del parámetro, con cierto nivel de probabilidad. Estos intervalos aleatorios se denominan normalmente intervalos de confianza.

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Considérese la variable aleatoria x con distribución de probabilidad $f(x)$. Supongamos que se desconocen la media μ y la variancia σ^2 de esta distribución. Si se

toma una muestra aleatoria de n observaciones entonces la media muestral \bar{x} y la variancia S^2 son estimadores puntuales de la media poblacional μ y la variancia poblacional, respectivamente σ^2

La media y la variancia de una distribución no son necesariamente los parámetros de la distribución. Por ejemplo, el parámetro de la distribución Poisson es λ , mientras que su media y su variancia son $\mu = \lambda$ y σ^2 (ambas, la media y la variancia, son iguales a λ) y los parámetros de la distribución binomial son n y p , mientras que su media y su variancia son $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$, respectivamente. Podemos demostrar que un estimador puntual adecuado del parámetro λ de una distribución Poisson es

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

y que un buen estimador puntual del parámetro p de una distribución binomial es

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

para un valor fijo de n . En la distribución binomial, las observaciones $\{x_i\}$ en la muestra aleatoria son 0 o 1, correspondiente a un “éxito” o un “fracaso”, respectivamente.

Los estimadores puntuales adecuados requieren cierto número de propiedades importantes:

1. El estimador puntual debe carecer de sesgo; es decir, el valor esperado del estimador puntual debe ser igual al parámetro estimado.
2. El estimador debe tener variancia mínima. Cualquier estimador puntual es una variable aleatoria. Por lo tanto, un estimador puntual de

variancia mínima tendrá una menor variancia que cualquier otro estimador puntual del parámetro.

ESTIMACIÓN POR INTERVALO

Una estimación por intervalo de un parámetro es el intervalo limitado por dos estadísticas, de manera que incluya el verdadero valor del parámetro con cierta probabilidad. Por ejemplo, para elaborar un estimador por intervalo (bilateral) para la media μ , es necesario encontrar dos estadísticas L y U , tales que

$$P\{L \leq \mu \leq U\} = 1 - \alpha \quad (2-36)$$

El intervalo resultante

$$L \leq \mu \leq U \quad (2-37)$$

se denomina intervalo de confianza al $100(1-\alpha)\%$ para la media desconocida μ , $1-\alpha$ se denomina coeficiente de confianza. L y U son los límites inferior y superior de confianza.

A veces, en algunas aplicaciones de control estadístico de calidad, es más apropiado utilizar un intervalo de confianza unilateral. Un intervalo de confianza unilateral inferior al $100(1-\alpha)\%$ para μ estaría dado por

$$L \leq \mu \quad (2-38)$$

donde L , el límite inferior de confianza, se escoge de manera que

$$P\{L \leq \mu\} = 1 - \alpha \quad (2-39)$$

Un intervalo de confianza unilateral superior al $100(1-\alpha)\%$ para μ correspondería al intervalo

$$\mu \leq U \quad (2-40)$$

donde U, el límite superior de confianza, se escoge de manera que

$$P\{\mu \leq U\} = 1 - \alpha \quad (2-41)$$

Intervalo de Confianza para la Media con Variancia Conocida.

Considérese la variable aleatoria "X", con media desconocida μ y la variancia conocida σ^2

Supóngase que se toma una muestra aleatoria de "n" observaciones, digamos X_1, X_2, \dots, X_n y se calcula \bar{x} .

El intervalo de confianza bilateral al $100(1-\alpha)\%$ para μ es:

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2-42)$$

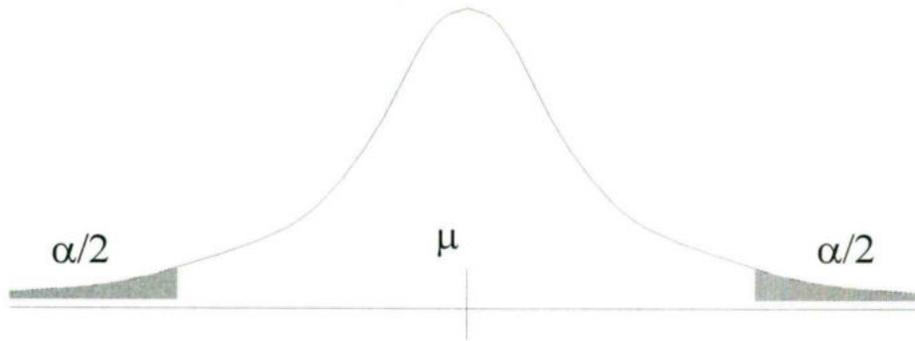


Figura 2-11 Representación gráfica del intervalo de confianza bilateral al 100 (1- α)% para μ

Un intervalo de confianza superior al 100 (1- α)% para μ es:

$$\mu \leq x + Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2-43)$$

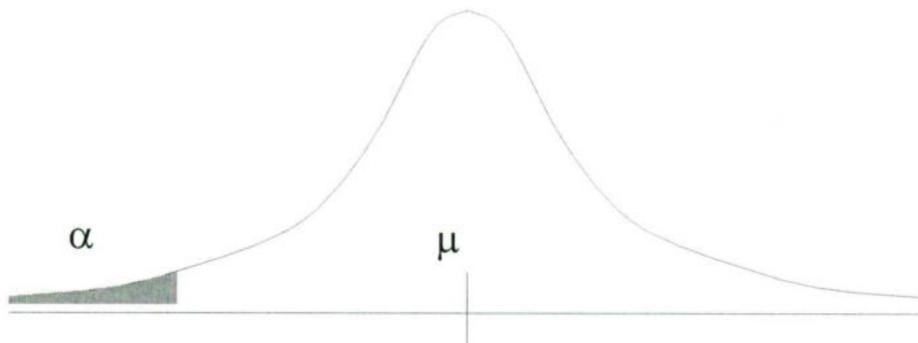


Figura 2-12 Representación gráfica del intervalo de confianza superior al 100 (1- α)% para μ

Un intervalo de confianza inferior al 100 (1- α)% para μ es:

$$x - Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \quad (2-44)$$

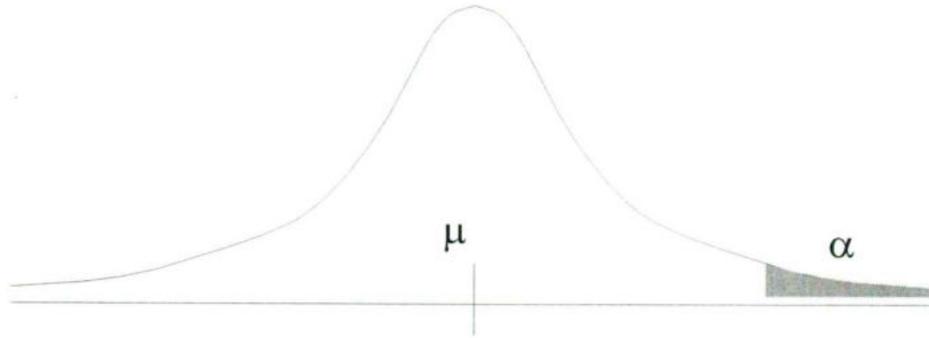


Figura 2-13 Representación gráfica del intervalo de confianza inferior al 100 (1- α)% para μ

Intervalo de confianza para la media de una distribución normal con varianza desconocida.

Supongamos que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 ambas desconocidas. A partir de una muestra aleatoria de “ n ” observaciones se calcula la media muestral \bar{x} y la varianza muestral S^2 , entonces:

El intervalo de confianza bilateral al 100 (1- α)% para la media verdadera poblacional es:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2-45)$$

Para cuando se tienen menos de 27 datos, se debe de aplicar la distribución t

Si son 30 datos o más, aplicar la distribución normal.

El intervalo de confianza superior al 100 (1- α)% para la media verdadera poblacional es:

$$\mu \leq x + t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2-46)$$

El intervalo de confianza inferior al 100 (1- α)% para la media verdadera poblacional es:

$$x - t_{\alpha, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \quad (2-47)$$

Ejercicio, La resistencia media a la compresión de un concreto $f'c=200 \text{ kg/cm}^2$, debe ser estimada con un intervalo de confianza al 95%. El fabricante supone con base a la experiencia que la resistencia está distribuida aproximadamente en forma normal, sin embargo se desconoce la resistencia media a la compresión y su distribución estándar, por lo que se toman 16 especímenes de muestra.

Intervalo de confianza para una Distribución Normal.

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 ambas desconocidas. La varianza muestral S^2 se calcula a partir de una muestra de "n" observaciones. Entonces el intervalo de confianza bilateral al 100 (1- α)% para la varianza es:

$$\frac{(n-1)S^2}{X_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \quad (2-48)$$

donde $X_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$ y $X_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$ es el punto porcentual de la distribución J_i cuadrada

$$P\left\{X_{n-1}^2 \geq X_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right\}$$

El intervalo de confianza unilateral superior al 100 (1- α)% para la varianza es:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X_{1-\alpha, n-1}^2} \quad (2-49)$$

El intervalo de confianza unilateral inferior al 100 (1- α)% para la varianza es:

$$\frac{(n-1)S^2}{X_{\alpha, n-1}^2} \leq \sigma^2 \quad (2-50)$$

Intervalo de confianza para la diferencia de dos medias con varianzas conocidas.

Considérese las dos variables aleatorias X_1, μ_1, σ_1 y X_2, μ_2, σ_2 , suponiendo que se desconoce μ_1 y μ_2 y se conocen σ_1 y σ_2 , se busca un intervalo de confianza al 100 (1- α)%, para la diferencia real entre estas medias, digamos $\mu_1 - \mu_2$. Sea $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}$ una muestra aleatoria de "n₁" observaciones de la población denotada por x_1 y sea $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}$, una muestra aleatoria de "n₂" observaciones de la población denotada por x_2 , sea \bar{x}_1 y \bar{x}_2 las medias muestrales, entonces el intervalo de confianza bilateral al 100 (1- α)% para la diferencia de medias es:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (2-51)$$

donde Z es calculada de una distribución normal.

El intervalo de confianza superior al 100 $(1-\alpha)\%$ para la diferencia de medias es:

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (2-52)$$

El intervalo de confianza inferior al 100 $(1-\alpha)\%$ para la diferencia de medias es:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \quad (2-53)$$

Intervalo de confianza para la diferencia de las medias de dos distribuciones normales con varianzas desconocidas.

Supongamos que hay dos variables aleatorias normales, digamos que:

$$x_1 \sim N(\mu_1, \mu_1^2)$$

$$x_2 \sim N(\mu_2, \mu_2^2)$$

Se desconocen las medias μ_1 y μ_2 , y las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 , sin embargo es razonable suponer que las dos varianzas son iguales; es decir $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Se desea encontrar un intervalo de confianza al 100 $(1-\alpha)\%$ para la diferencia entre las medias $\mu_1 - \mu_2$.

Supóngase que se tomaran dos muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2 de las poblaciones 1 y 2, respectivamente, y se calcularan las medias muestrales x_1 y x_2 y las varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 .

Una estimación combinada de la varianza común es:

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2-54)$$

El intervalo de confianza bilateral al 100 $(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es:

$$x_1 - x_2 - t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2} Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq x_1 - x_2 + t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2} Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad (2-55)$$

El intervalo de confianza superior al 100 $(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es:

$$\mu_1 - \mu_2 \leq x_1 - x_2 + t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2} Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad (2-56)$$

El intervalo de confianza inferior al 100 $(1-\alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es:

$$x_1 - x_2 - t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2} Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \quad (2-57)$$

Intervalo de confianza para el cociente de las varianzas de dos distribuciones normales.

Supóngase que $x_1 \sim N(\mu_1, \mu_1^2)$ y $x_2 \sim N(\mu_2, \mu_2^2)$ en donde se desconocen $\mu_1, \sigma_{12}, \mu_2, \sigma_{22}$ y se desea determinar un intervalo de confianza al 100 (1- α)% para σ_1^2 / σ_2^2 , siendo S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales calculadas a partir de muestras calculadas a partir de muestras aleatorias de n_1 y n_2 observaciones, respectivamente, entonces el intervalo de confianza bilateral al 100 (1- α)% es:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \quad (2-58)$$

El intervalo de confianza superior al 100 (1- α)% es:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \quad (2-59)$$

El intervalo de confianza inferior al 100 (1- α)% es:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad (2-60)$$

2.5.2. Pruebas de hipótesis sobre parámetros de proceso

Una hipótesis estadística es un enunciado sobre los valores de los parámetros de una distribución de probabilidad.

Ejemplo.

$H_0 : \mu = 1500$ Hipótesis inicial.

$H_1 : \mu \neq 1500$ Hipótesis alterna.

Una parte importante de cualquier problema de pruebas de hipótesis es determinar los valores paramétricos especificados en la hipótesis nula y alterna. Existen tres formas posibles de hacerlo.

- Los valores pueden resultar de pruebas o conocimientos anteriores. Esto sucede con frecuencia en control estadístico de calidad, donde se usa información anterior para especificar los valores de un parámetro correspondiente a un estado de control, y después se prueba periódicamente la hipótesis de que el valor no ha cambiado.
- Los valores pueden ser el resultado de alguna teoría o modelo del proceso.
- valores escogidos para el parámetro resultado de especificaciones contractuales o de diseño.

Este último caso se presenta más frecuentemente y se utiliza para verificar la conformidad de los parámetros del proceso con sus valores especificados, que precisamente es nuestro caso, o para ayudar a modificar un proceso hasta obtener los valores requeridos.

Para probar una hipótesis se toma una muestra aleatoria de población observada, se calcula un estadístico de prueba apropiada y después se rechaza o no la hipótesis nula H_0 . El conjunto de valores del estadístico de prueba que lleva al rechazo H_0 , se llama región crítica o región de rechazo de la prueba.

Pueden cometerse dos tipo de errores al probar una hipótesis.

- Si se rechaza la hipótesis nula cuando esta es verdadera, se cometerá un error tipo 1.

$$\alpha = P \{ \text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ sea verdadera} \}$$

En control de calidad, α se llama riesgo de proveedor o del fabricante, ya que denota la probabilidad de que sea rechazada por funcionar insatisfactoriamente un proceso que produce valores aceptables de una característica de calidad en particular.

- Si no se rechaza la hipótesis nula cuando es falsa, entonces se cometerá un error tipo 2.

$$\beta = P \{ \text{No rechazar } H_0 / H_0 \text{ es falso} \}$$

β se denomina riesgo del comprador o cliente, ya que denota la probabilidad de aceptar un lote de calidad deficiente o la probabilidad de que se deje seguir operando un proceso que trabaja insatisfactoriamente respecto a alguna característica de calidad.

El procedimiento general para una prueba de hipótesis es especificar un valor de la probabilidad de cometer un error tipo 1 y después diseñar un procedimiento de prueba para obtener un valor pequeño de la probabilidad de cometer el error tipo 2. Así, se habla de controlar y escoger directamente el riesgo α . El riesgo β es por lo regular una función del tamaño muestral y se controla indirectamente (mayor tamaño de la muestra, menor riesgo de β).

PRUEBAS DE HIPOTESIS QUE SE ENCUENTRAN MAS FRECUENTEMENTE EN APLICACIONES DE CONTROL DE CALIDAD.

Prueba de medias con varianzas conocidas

Supóngase que "X" es una variable aleatoria con media desconocida μ y varianza conocida σ^2 . Se desea probar la hipótesis de que la media es igual a un valor estándar, μ_0 .

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Obtener una muestra aleatoria de "n" observaciones de la variable aleatoria "X", calcular:

$$Z_0 = \frac{x - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (2-61)$$

Rechazar H_0 si $|Z_0| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$, donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el punto porcentual de la distribución normal estándar.

Si la hipótesis alterna unilateral es $H_1 : \mu > \mu_0$, se rechaza $H_0 : \mu = \mu_0$ solo si $Z_0 > Z_\alpha$.

Si la hipótesis alterna unilateral es $H_1 : \mu < \mu_0$, se rechaza $H_0 : \mu = \mu_0$ solo si $Z_0 < -Z_\alpha$.

Supóngase que hay 2 poblaciones con medias desconocidas, digamos μ_1 y μ_2 pero varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2 .

Se desea probar la hipótesis de que las dos medias son iguales.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Se toma una muestra aleatoria de n_1 observaciones de la población 1, y otra n_2 observaciones de la población 2, calcular:

$$Z_0 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (2-62)$$

Donde n_1 y n_2 pueden ser diferentes.

Se rechaza H_0 si $|Z_0| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Si la hipótesis alterna $\mu_1 > \mu_2$ entonces se rechaza $Z_0 > Z_\alpha$.

Si la hipótesis alterna $\mu_1 < \mu_2$ entonces se rechaza $Z_0 < -Z_\alpha$.

En la tabla 2.4 se muestra un resumen de los tipos de pruebas de hipótesis de medias con varianzas conocidas, con sus respectivos estimadores y criterios de rechazo.

Tabla 2-4. Pruebas de medias, con variancia conocida.³⁰

HIPÓTESIS	EST. DE PRUEBA	CRITERIO DE RECHAZO	
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z_0 = \frac{x - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$ Z_0 > Z_{\frac{\alpha}{2}}$	
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$Z_0 < -Z_\alpha$	
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$Z_0 > Z_\alpha$	
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$		$Z_0 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$ Z_0 > Z_{\frac{\alpha}{2}}$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$			$Z_0 < -Z_\alpha$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$Z_0 > Z_\alpha$		

Se necesita suponer la normalidad para desarrollar formalmente la prueba estadística, pero desviaciones moderadas respecto de la normalidad no afectaran seriamente los resultados.

³⁰ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Pruebas de las Medias de Distribuciones Normales, con Variancias Desconocidas.

Al desconocer σ^2 , es posible estimarla con S^2 , reemplazando σ por S , se obtiene el estadístico de prueba.

$$t_0 = \frac{x - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \quad (2-63)$$

Se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ si $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, donde $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ denota el punto porcentual superior $\alpha/2$ de la distribución "t" con n-1 grados de libertad.

Suponiendo que hay dos poblaciones normales con medias desconocidas $\mu_1 = \mu_2$ y varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 se desea probar la hipótesis de igualdad entre las dos medias, es decir:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

El procedimiento de prueba depende si, el caso en el que la suposición es razonable.

Se toman dos muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2 de las poblaciones 1 y 2, respectivamente, y se obtiene una estimación "Combinada" para la varianza común como sigue.

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2-64)$$

En donde si S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales individuales.

$$t_0 = \frac{x_1 - x_2}{Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Se calcula el estadístico de prueba

(2-65)

Se rechaza $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ si el valor absoluto de $t_0 > t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2}$

Cuando no es razonable suponer que $\mu_1^2 = \mu_2^2$, entonces se aplica el siguiente estadístico de prueba

$$t_0 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad (2-66)$$

y el número de grados de libertad para t

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 + 1}} - 2 \quad t_{\alpha, v}, \quad (2-67)$$

Cuando: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad (2-68)$$

Cuando: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2}; t_{\alpha, v} \quad (2-69)$$

Este procedimiento se llama frecuentemente prueba t "combinada", porque se combinan las dos muestras para estimar la variancia común. Las hipótesis alternativas unilaterales se resumen en la tabla 2-5.

Tabla 2-5 Pruebas de medias de distribuciones normales, con variancia desconocida.³¹

HIPÓTESIS	EST. DE PRUEBA	CRITERIO DE RECHAZO
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$ t_0 > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_0 < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_0 > t_{\alpha, n-1}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $v = n_1 + n_2 - 2$ <p>o bien</p> $t_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$ t_0 > t_{\frac{\alpha}{2}, v}$ $t_0 < -t_{\frac{\alpha}{2}, v}$

³¹ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 + 1}} - 2$	$t_0 > t_{\alpha, v}$
---	--	-----------------------

Pruebas de varianza de distribuciones normales.

Las pruebas para las medias son relativamente insensibles respecto a la suposición de normalidad, los procesos de prueba no lo son.

Supóngase que se desea probar la hipótesis de que la varianza de una distribución normal es igual a una constante, digamos σ_0^2 .

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

El estadístico de prueba es:
$$\chi_0^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \quad (2-70)$$

En la tabla 2.6 se presenta la pruebas de hipótesis, sus estimadores y criterios de rechazo, para pruebas con varianzas de distribuciones normales.

Tabla 2-6 Pruebas de variancias de distribuciones normales.³²

HIPÓTESIS	EST. DE PRUEBA	CRITERIO DE RECHAZO
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$X_0^2 > \lambda^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $X_0^2 < \lambda^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$		$X_0^2 < \lambda^2_{1-\alpha, n-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$		$X_0^2 > \lambda^2_{\alpha, n-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$ $F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\alpha, n_2-1, n_1-1}$
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

³² Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

En donde S^2 es una varianza muestral calculada a partir de una muestra aleatoria de "n" observaciones.

Considérese una variable aleatoria normal, con media μ y varianza σ^2 , si la $\sigma^2 \leq$ a cierto valor de σ_0^2 , entonces la dispersión natural propia del proceso, estará dentro de los requisitos del diseño y, por consiguiente, casi toda la producción (lote) cumplirá las especificaciones.

Sin embargo si σ^2 excede a σ_0^2 entonces la dispersión natural del proceso, excederá los límites de especificación, lo que genera un alto porcentaje de productos disconformes ó de rechazo. En otras palabras, la capacidad del proceso se relaciona directamente con su variabilidad y pueden utilizarse las siguientes suposiciones:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \quad (2-71)$$

Considérese la prueba de la igualdad de las varianzas de las poblaciones normales, se toman muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2 de las poblaciones 1 y 2, entonces la prueba será:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (2-72)$$

Es posible utilizar la aproximación normal para obtener la hipótesis de que dos parámetros binomiales son iguales; o sea,

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

Se toma una muestra aleatoria de n_1 observaciones de la población 1, y otra de n_2 observaciones de la población 2. Supóngase que x_1 y x_2 elementos pertenecen a la clase correspondiente a p en las dos muestras, respectivamente. Entonces $\hat{p}_1 = x_1 / n_1 = \hat{p}_2 = x_2 / n_2$ son los estimadores de los parámetros que se obtienen a partir de las dos muestras.

Si la hipótesis nula es verdadera, entonces $p_1 = p_2 = p$, y se pueden combinar las dos estadísticas muestrales en un solo estimador

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \quad (2-73)$$

La estadística para H_0 es

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad (2-74)$$

Se rechaza H_0 cuando $|Z_0| > Z_{\alpha/2}$

Por otro lado, para conocer el grado de dispersión de los datos y determinar así que características deben observarse con mayor detenimiento, se utilizale coeficiente de variación, entre más cercanos estén los valores de cero, la variable aleatoria tiene muy baja dispersión o una ata certidumbre de encontrarse cerca de la media; el coeficiente de variación se calcula como sigue: .

$$Cv = \frac{\sigma_i}{\mu_i} \quad (2-75)$$

donde σ_i es la desviación estándar.

μ_i es la media de la población.

3. CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD

La calidad medida en el producto fabricado está sujeta a un cierto grado de variación debido al azar. Cualquier esquema de producción e inspección lleva implícito algún "sistema estable de causas debidas al azar". La variación de éste patrón fijo es inevitable. Las razones por las que esa variación rebasa los límites de dicho patrón deben descubrirse y corregirse.³³

Los tres usos fundamentales de un diagrama d control son:

1. Rastreo y vigilancia del proceso.
2. Reducción de la variabilidad del proceso.
3. Estimación de los parámetros de producto o de proceso.

CAUSAS FORTUITAS Y CAUSAS ATRIBUIBLES DE LA VARIACION DE LA CALIDAD ³⁴

En cualquier proceso de fabricación, sin importar su buen diseño o mantenimiento cuidadoso, siempre existirá cierto grado de variabilidad inherente o natural. Esta variabilidad natural o "ruido de fondo" es el efecto acumulativo de muchas pequeñas causas, esencialmente incontrolables. Cuando el ruido de fondo de un proceso es relativamente pequeño, suele considerarse un nivel aceptable del funcionamiento del proceso. En el marco de control estadístico de calidad, esta variabilidad natural se llama a

³³ Eugene L. Grant , Richard S. Leavenworth. , *Control Estadístico de Calidad*. Editorial CECSA

³⁴ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

menudo "sistema estable de causas fortuitas". Un proceso que funciona con sólo causas fortuitas de variabilidad se considera bajo control estadístico.

Otros tipos de variabilidad pueden estar presentes ocasionalmente en el resultado de un proceso. Esta variabilidad en características claves de calidad surge por lo común de tres fuentes: ajuste incorrecto de máquinas, errores de operario o defectos en las materias primas (o alguna combinación de estos factores). Esta variabilidad es en general mayor que el ruido de fondo, y normalmente representa un nivel inaceptable del funcionamiento del proceso. Estas fuentes de variabilidad que no forman parte del esquema de las causas fortuitas se denominan "causas atribuibles". Un proceso que funciona en presencia de causas atribuibles se considera fuera de control.

Es muy común que los procesos de fabricación funcionen en un estado bajo control, generando productos aceptables durante periodos relativamente largos. En ocasiones, sin embargo, se presentan causas atribuibles, aparentemente al azar, que provocan un "cambio" hacia un estado fuera de control, en el que una mayor proporción de la salida del proceso no cumple los requisitos. Uno de los objetivos más importantes del control estadístico de procesos es detectar rápidamente la ocurrencia de causas atribuibles o cambios en el proceso, a fin de que se pueda la investigar y tomar acciones correctivas antes de la producción de muchas piezas no conformes. El diagrama de control es una técnica de control de procesos en línea, que se utiliza ampliamente con este propósito. Se pueden usar también tales diagramas con el fin de evaluar los parámetros de un proceso de producción, y a partir de esta información, determinar la capacidad del proceso. Finalmente, recuérdese que la meta final del control estadístico de procesos es la eliminación de la variabilidad de proceso. Puede que sea imposible eliminarla completamente, pero el diagrama de control es una herramienta efectiva para reducirla al mínimo posible.

Principios Básicos

Un diagrama de control típico es una representación gráfica de una característica de calidad, medida o calculada a partir de una muestra, en función del número de la muestra o el tiempo. La gráfica tiene una línea central que representa el valor medio de la característica de calidad, correspondiente al estado bajo control (es decir, solamente hay causas fortuitas). En la gráfica se muestran también otras dos líneas horizontales, llamadas límite superior de control (LSC) y límite inferior de control (LIC). Se escogen estos límites de manera que si el proceso está bajo control, casi la totalidad de los puntos muestrales se halle entre ellos. Mientras los puntos se encuentran entre los límites, se considera que el proceso está bajo control y no es necesario tomar ninguna acción. Sin embargo, un punto que se encuentra fuera de los límites de control, se interpreta como una evidencia de que el proceso está fuera de control, y son necesarias acciones de investigación y corrección, a fin de encontrar y eliminar la o las causas atribuibles a este comportamiento. Se acostumbra unir los puntos muestrales en el diagrama de control mediante segmentos rectilíneos, con objeto de visualizar mejor la evolución de la secuencia de los puntos en el tiempo.

Incluso si todos los puntos se hallan entre los límites de control, pero se comportan de manera sistemática o no aleatoria, esto indica que el proceso está fuera de control. Por ejemplo, si 18 de los últimos 20 puntos se encuentran por arriba de la línea central pero por abajo del límite superior de control, y solamente dos de estos puntos están por debajo de la línea central, aunque por encima del límite inferior de control, se conjetura que algo anda mal. Si el proceso está bajo control, todos los puntos deben tener un esquema esencialmente aleatorio. Se pueden aplicar métodos para encontrar secuencias o patrones no aleatorios en los diagramas de control a fin de ayudar a detectar condiciones fuera de control. Por lo regular hay una causa por la que aparece cierto patrón no aleatorio en un diagrama de control, y si se puede encontrarla y eliminarla, es posible mejorar el funcionamiento del proceso.

Existe una relación estrecha entre los diagramas de control y la prueba de hipótesis. Esencialmente, dicha gráfica es una prueba de la hipótesis de que el proceso está bajo control estadístico. Uno punto que se ubica entre los límites de control es

equivalente a no poder rechazar la hipótesis del control estadístico y otro que se encuentre fuera de los límites equivale al rechazo de la hipótesis del control estadístico. Como una prueba de hipótesis puede considerarse la probabilidad del error tipo I del diagrama de control (concluir que el proceso está fuera de control cuando en realidad no lo está) y la probabilidad del error tipo II de dicho diagrama (concluir que el proceso está bajo control cuando en realidad no es así). Ocasionalmente es útil usar la curva característica de operación de un diagrama para representar su probabilidad de error tipo II. Esto indicaría la aptitud del diagrama de control para detectar cambios de diferente magnitud en el proceso.

Puede considerarse un modelo general para un diagrama de control. Sea w una estadística muestral que mide alguna característica de calidad de interés, y supóngase que la media de w es μ_w , y su desviación estándar, es σ_w . Entonces la línea central, y los límites superior e inferior son:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_w + k\sigma_w \\ \text{Línea central} &= \mu_w \\ LIC &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \qquad \text{Límites de control (3-1)}$$

Donde k es la “distancia” entre los límites de control y la línea central, expresada en desviaciones estándares. El Dr. Walter A. Shewhart propuso esta teoría general de los diagramas de control por primera vez, y dichas gráficas, desarrollados según estos principios, se llaman frecuentemente *diagramas de Shewhart*.

El diagrama de control es un dispositivo para describir de manera precisa lo que significa exactamente un control estadístico; como tal, es posible utilizarlo de varias maneras. En la mayoría de las aplicaciones se utiliza para la vigilancia del proceso en línea. Es decir, se obtienen datos muestrales y éstos se usan para elaborar un diagrama de control; si los valores muestrales de \bar{x} se hallan entre los límites de control y no muestran ningún patrón sistemático, se dice que el proceso está bajo control al nivel indicado por la gráfica. Nótese que interesa aquí determinar al mismo tiempo si los datos

anteriores provienen de un proceso que estaba bajo control, y si futuros subgrupos de este proceso indican control estadístico.

El diagrama de control puede utilizarse también como una herramienta administrativa de control, que permite alcanzar ciertas metas con respecto a la calidad del proceso. La línea central y, los límites de control pueden ser valores estándares, escogidos por la administración, de manera, que el proceso esté bajo control a cierto nivel de calidad. Pueden representarse los datos muestrales en la gráfica, y si se investigan y corrigen las desviaciones respecto al estado bajo control, es posible recuperar el control a los valores objetivos o estándares. La conservación del diagrama de control en el futuro detectará desviaciones subsecuentes de tal estado bajo control.

También es posible usar los diagramas de control como medios de estimación. Es decir, es posible estimar ciertos parámetros del proceso, como media, desviación estándar, fracción de disconformes o de rechazo etc., a partir del diagrama de control que muestra un control estadístico. Se pueden utilizar después tales estimaciones con el fin de determinar la capacidad del proceso de generar productos aceptables. Tales estudios de capacidad tiene una repercusión considerable en muchos problemas de decisiones administrativas que se presenten durante el ciclo de producción, los cuales incluyen decisiones de fabricar o comprar, mejoras en la planta y en el proceso para reducir la variabilidad, y acuerdos contractuales con los consumidores o vendedores respecto a la calidad del producto.

Los diagramas de control pueden clasificarse en dos tipos generales. Si es posible medir la característica de calidad y expresarla como un número, se la llama una variable. En estos casos, conviene describir la característica de calidad mediante una medida de tendencia central y una medida de variabilidad. Los diagramas de control para la tendencia central y la variabilidad se denominan diagramas de control de variables. El diagrama de \bar{x} es el que más se usa para controlar la tendencia central, mientras que las gráficas basadas en la amplitud muestral o en la desviación estándar muestral sirven para controlar la variabilidad del proceso. Muchas características de control no se miden en

una escala cuantitativa. En estos casos, puede clasificarse cada unidad del producto como conforme o disconforme, según posea o no ciertos atributos, o se puede contar el número de disconformidades (defectos) que aparecen en una unidad del producto. Los diagramas de control para estas características de calidad se llaman diagramas de control de atributos.

Un factor importante en el uso de los diagramas de control es el diseño de tal gráfica. Esto incluye la selección del tamaño de la muestra, los límites de control y la frecuencia de muestreo.

En la mayoría de los problemas de control de calidad, se acostumbra diseñar el diagrama de control utilizando primordialmente consideraciones estadísticas. Por ejemplo, se sabe que aumentar al tamaño muestral reduce la probabilidad del error tipo II, lo que mejora la capacidad de la gráfica para detectar un estado fuera de control. El uso de criterios estadísticos como éstos, junto con la experiencia industrial, ha permitido establecer pautas y procedimientos generales para diseñar diagramas de control. Estos procedimientos consideran normalmente el factor costo sólo de manera implícita. En época reciente, sin embargo, se ha empezado a examinar el diseño de los diagramas de control desde un punto de vista económico, considerando explícitamente los costos de muestreo, las pérdidas debidas a la producción de una cantidad excesiva de productos defectuosos, y los costos de investigar señales que indican un estado de fuera de control y que realmente son "falsas alarmas".

Objetivos de los diagramas de control

1. Los diagramas de control son una técnica probada para mejorar la productividad.
2. Los diagramas de control son eficientes para evitar defectos
3. Los diagramas de control evitan ajustes innecesarios al proceso

4. Los diagramas de control proporcionan información para el análisis, que permite implementar un cambio en el proceso que mejore su rendimiento.
5. Los diagramas de control proporcionan información acerca de la capacidad del proceso.

Selección de los Límites de Control

La especificación de los límites de control es una de las decisiones críticas que hay que tomar al diseñar un diagrama de control. Alejando dichos límites de la línea central se reduce el riesgo de un error tipo I – es decir, el riesgo de que un punto caiga fuera de los límites de control, lo que indica una condición fuera de control cuando no existe una causa atribuible-. Sin embargo, separando los límites de control se eleva también el riesgo de un error tipo II – o sea, el riesgo de que un punto caiga entre dichos límites cuando el proceso está en realidad fuera de control-.

Por lo general, se justifica el uso de límites de control de tres sigmas porque dan buenos resultados en la práctica. En muchos casos no se conoce la verdadera distribución de la característica de calidad lo suficientemente bien para calcular los límites probabilísticos exactos. Si la distribución de la característica de calidad puede ser aproximada razonablemente bien por la distribución normal, entonces habrá poca diferencia entre los límites de tres sigma y los probabilísticos de 0.001. Aunque límites de tres sigma que se utilizan ampliamente en la práctica, las consideraciones económicas tendrán que determinar la selección del múltiplo de sigma. Por ejemplo, si las pérdidas provocadas por un proceso que sigue funcionando en un estado fuera de control son relativamente grandes respecto a los costos de investigación y la posible corrección de causas atribuibles, entonces un múltiplo menor a de sigma, como 2 o 2.5, podría ser adecuado.

Variables y atributos

En el lenguaje técnico estadístico, es preciso distinguir entre *variables* y *atributos*. Cuando se registra la media real de una característica de calidad, tal como una dimensión, se dice que la calidad viene expresada mediante variables. Cuando sólo se anotan el número de artículos que cumplen, y el número de los que no cumplen, ciertas condiciones específicas, se dice que se lleva un control por atributos.

Todos los productos fabricados deben cumplir con ciertas condiciones, explícitas o implícitas, muchas de las cuales pueden definirse como variables

Análisis de patrones en diagramas de control

Un diagrama de control puede indicar una condición fuera de control cuando uno o más puntos se hallan fuera de los límites, o bien cuando los puntos localizados exhiben algún patrón de comportamiento no aleatorio.

3.1. DIAGRAMA DE CONTROL PARA ATRIBUTOS

La fracción (o proporción) de disconformes, o fracción disconforme, se define como el cociente del número de artículos en una población entre el número total de artículos que contiene ésta última. Los artículos pueden tener varias características de calidad que el inspector examina simultáneamente. Si no está conforme con el estándar de una o más de tales características, se clasificará como disconforme.

La probabilidad de que cualquier artículo no esté conforme a las especificaciones es p , y que los artículos producidos sucesivamente son independientes. Entonces cada artículo producido es una variable aleatoria de Bernoulli, con parámetro p . Si se selecciona una muestra aleatoria de n artículos del producto, y si D representa el número de artículos no conformes, entonces D tiene una distribución binomial con parámetros n y p

$$p(D = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (3-2)$$

$$\mu = np \quad (3-3)$$

$$\sigma^2 = np(1-p) \quad (3-4)$$

La fracción disconforme muestral se define como el cociente del número de artículos disconformes D en la muestra de tamaño n :

$$\hat{p} = \frac{D}{n} \quad (3-5)$$

$$\mu = p \quad (3-6)$$

$$\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (3-7)$$

Debido a que la gráfica controla la fracción disconforme p del proceso, se denomina también diagrama de p .

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_w + k\sigma_w \\ \text{Línea central} &= \mu_w \\ LIC &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \quad (3-8)$$

k = distancia entre los límites de control y la línea central, expresada en múltiplos de desviación estándar de w . Se acostumbra a escoger $k=3$.

W = es una estadística que mide alguna característica de calidad.

$$\begin{aligned} LSC &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ \text{Línea central} &= p \\ LIC &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned} \quad (3-9)$$

El manejo real de este diagrama consistirá en tomar muestras subsecuentes de n unidades, calcular la fracción muestral disconforme \hat{p} , y graficar la estadística \hat{p} en el diagrama. Mientras \hat{p} quede entre los límites recontrol y la sucesión de puntos ubicados no exhiba un patrón sistemático, se concluye que el proceso está bajo control, al nivel p . Si un punto queda fuera de los límites de control, o si se observa un patrón no aleatorio entre los puntos, habrá que concluir que la fracción de disconformes del proceso cambió hacia un nuevo nivel y que el proceso está fuera de control.

Cuando se desconoce la fracción no conforme p del proceso, hay que estimarla a partir de los datos observados. Primeramente habrá que tomar m muestras preliminares cada una de tamaño n . Como regla general m tendrá que ser igual a 20 o 25. Entonces si

hay D_i artículos no conformes en la muestra i , se calcula la fracción disconforme en la i -ésima muestra como:

$$\hat{p} = \frac{D}{n} \quad (3-10)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, m$$

La media de éstas fracciones disconformes maestras individuales es:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} \quad (3-11)$$

La estadística p estima la fracción disconforme p desconocida. La línea central y los límites de control del diagrama de control de la fracción disconforme se calculan entonces de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ \text{Línea central} &= \bar{p} \\ LIC &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{aligned} \quad (3-12)$$

Ejemplo

Se envasa jugo de naranja concentrado y congelado en botes de cartón de 6oz . Estos envases los produce una máquina formando un tubo a partir de una pieza de cartón y aplicando un fondo metálico. Al inspeccionar un bote puede determinarse al llenado si goteará por la junta lateral o la del fondo. Tal bote disconforme tiene un sellado inadecuado en la junta lateral o del fondo. Se desea elaborar un diagrama de control para vigilar la fracción de envases disconformes producidos por ésta máquina.

Para establecer el diagrama de control, se seleccionaron 30 muestras de $n=50$ botes cada media hora durante un periodo de tres turnos, en los cuales la máquina operó continuamente. (tabla 3-1)

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{347}{(30)(50)} = 0.2313$$

Tabla 3-1 Selección de 30 muestras de $n=50$ ³⁵

Numero de muestras	Numero de disconformidades	Fracción disconforme muestral
1	12	0.24
2	15	0.30
3	8	0.16
4	10	0.20
5	4	0.08
6	7	0.14
7	16	0.32
8	9	0.18
9	14	0.28
10	10	0.20
11	5	0.10
12	6	0.12
13	17	0.34
14	12	0.24
15	22	0.44
16	8	0.16
17	10	0.20
18	5	0.10
19	13	0.26
20	11	0.22
21	20	0.40
22	18	0.36
23	24	0.48
24	15	0.30
25	9	0.18

³⁵ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

26	12	0.24
27	7	0.14
28	13	0.26
29	9	0.18
30	6	0.12
	347	$\bar{p} = 0.2313$

$$\begin{aligned} & \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ &= 0.2313 \pm 3\sqrt{\frac{0.2313(0.7687)}{50}} \\ &= 0.2313 \pm 3(0.0596) \\ &= 0.2313 \pm 0.1789 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.2313 + 0.1789 = 0.4102$$

$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.2313 - 0.1789 = 0.0524$$

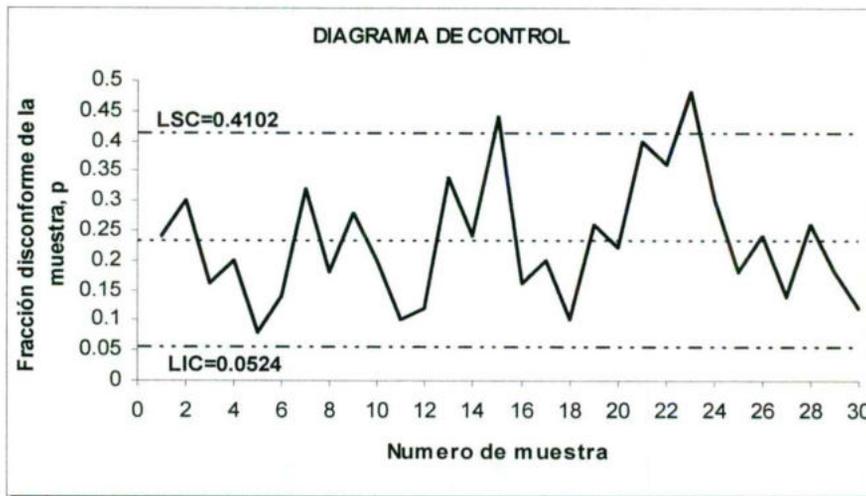


Figura 3-1 Diagrama de control correspondiente a la tabla 3-1

En la figura 3-1 obsérvese que dos puntos correspondientes a las muestras 15 y 23, se encuentran por arriba del límite superior de control y , por lo tanto, el proceso no está bajo control.

El análisis de datos de la muestra 15 indica que se utilizó una nueva remesa de materia prima de cartón en la producción durante este lapso de media hora. El uso de nueva remesa de materia prima provoca, a veces, una producción irregular, y es razonable pensar que esto sucedió aquí. Durante el periodo de media hora en el que se obtuvo la muestra 23, se había asignado a esta máquina un operador con relativamente poca experiencia, y ello podría explicar la alta fracción disconforme de dicha muestra. Por consiguiente se eliminan las muestras 15 y 23, y se determina la nueva línea central y los límites de control revisados.

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{301}{(28)(50)} = 0.2150$$

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.2150 + 3\sqrt{\frac{(0.2150)(0.7850)}{50}} = 0.3893$$

$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.2150 - 3\sqrt{\frac{(0.2150)(0.7850)}{50}} = 0.0407$$



Figura 3-2 Diagrama de control eliminando las muestras 15 y 23 de la tabla 3-1

Observemos que ahora la fracción disconforme de la muestra 21 es mayor que el límite superior de control. Sin embargo, el análisis de los datos no revela una causa atribuible razonable o lógica, y se decide conservar el punto.

Antes de concluir que el proceso está bajo control a este nivel, tenemos que examinar las 28 muestras restantes para detectar corridas u otros patrones no aleatorios. La mas larga es de longitud cinco, por arriba de la línea central, y parece no haber patrones evidentes en los datos. No existe fuerte evidencia de otra cosa que no sea un patrón aleatorio de variación respecto a la línea central.

Concluimos que el proceso está bajo control al nivel de $p = 0.2150$, y que deben adoptar los límites de control revisados para verificar la producción actual. Sin embargo, se observa que la fracción disconforme es demasiado grande, aunque el proceso está bajo control. Es decir, el proceso funciona de manera estable, y no hay problemas anormales que no pueda controlar el operario. Ahora el personal de ingeniería analiza el proceso para mejorar su rendimiento y el estudio indica que es posible realizar varios ajustes a la máquina los cuales deberán mejorar su funcionamiento.

Durante los tres turnos que siguen a los ajustes de la máquina, se obtienen 24 muestras de $n = 50$ observaciones cada una. En la tabla (3-2) aparecen los datos y las fracciones muestrales no conformes se indican en el diagrama de control (3-3).

Tabla 3-2 Observaciones maquina ajustada

Numero de muestras	Numero de disconformidades	Fracción disconforme muestral
1	9	0.18
2	6	0.12
3	12	0.24
4	5	0.10
5	6	0.12
6	4	0.08
7	5	0.10
8	3	0.06
9	7	0.14
10	6	0.12
11	2	0.04
12	4	0.08
13	3	0.06
14	6	0.12
15	5	0.10
16	4	0.08
17	8	0.16
18	5	0.10
19	6	0.12
20	7	0.14
21	5	0.10
22	6	0.12
23	3	0.06
24	6	0.12
	133	0.1108

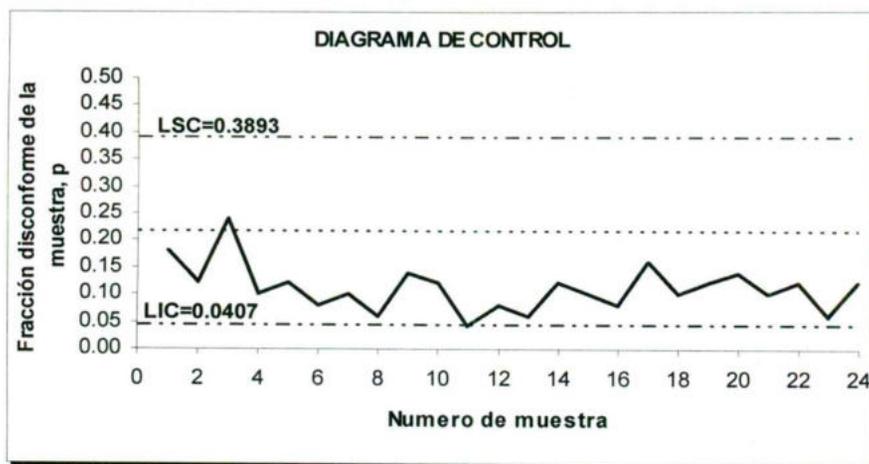


Figura 3-3 Diagrama de Control, Maquina ajustada

Podemos probar la hipótesis de que la fracción disconforme del proceso durante el periodo actual de tres turnos difiere de la fracción disconforme de los datos preliminares. Las hipótesis son

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

Donde p_1 es la fracción disconforme del proceso tomada de los datos preliminares y p_2 es la fracción disconforme del periodo actual. Podemos estimar p_1 por $\hat{p}_1 = 0.2150$ y p_2 por

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{133}{(24)(50)} = 0.1108$$

La estadística de prueba para la hipótesis mencionada es, a partir de las ecuaciones 2-73 y 2-74

$$Z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

donde

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

En nuestro ejemplo tenemos

$$\hat{p} = \frac{(1400)(0.2150) + (1200)(0.1108)}{1400 + 1200} = 0.1669$$

y

$$Z_0 = \frac{0.2150 - 0.1108}{\sqrt{(0.1669)(0.8331)\left(\frac{1}{1400} + \frac{1}{1200}\right)}} = 7.22$$

Comparando esto con el punto 0.05 superior de la distribución normal estándar, se encuentra que $Z_0 = 7.22 > Z_{0.05} = 1.645$. Por consiguiente se rechaza H_0 y concluimos que hubo una disminución significativa de fallas en el proceso.

El diagrama de control de la fracción disconforme tiene tres parámetros que hay que especificar:

1. El tamaño muestral.
2. La frecuencia de muestreo.
3. La amplitud de los límites de control.

Se tiene que escoger estos parámetros conforme algunos criterios económicos. El uso de subgrupos racionales también puede ser importante en la determinación de la frecuencia de muestreo. Ejemplo, si existen tres turnos y se sospecha que los turnos

difieren respecto a su nivel general de calidad, entonces habrá que usar la salida de cada turno como un subgrupo, en vez de juntar las salidas de los tres turnos para obtener una fracción defectuosa diaria.

Para seleccionar una muestra del rendimiento del proceso, tendremos que escoger el tamaño muestral n . Si p es muy pequeño habrá que elegir n lo suficientemente grande para tener una alta probabilidad de encontrar por lo menos una unidad disconforme de la muestra. De otro modo, los límites de control podrían ser tales que la presencia de una sola unidad no conforme indicaría una condición fuera de control. Por ejemplo si $p = 0.01$ y $n = 8$, obtendremos como límite superior de control

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.01 + 3\sqrt{\frac{(0.01)(0.99)}{8}} = 0.1155$$

Si hay un artículo disconforme en la muestra entonces $p = 1/8 = 0.1250$, y se concluye que el proceso está fuera de control. Como para cualquier $p > 0$ existe una probabilidad positiva de producir algunos artículos defectuosos, no es razonable concluir, en muchos casos, que el proceso está fuera de control con base en la observación de un solo artículo disconforme.

Duncan (1974) sugiere que el tamaño debe ser suficientemente grande para tener una probabilidad aproximada de 50% de detectar un cambio de alguna cantidad especificada en el proceso. Por ejemplo, supóngase que $p = 0.01$, y que se desea una probabilidad de 0.50 para detectar un cambio hacia $p = 0.05$. Al suponer que se puede aplicar la aproximación normal a la binomial, habrá que elegir n de manera que el límite superior de control coincida exactamente con la fracción no conforme en el estado fuera de control. Si δ es la magnitud del cambio en el proceso, entonces n tendrá que satisfacer

$$\delta = k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (3-13)$$

Por lo tanto

$$n = \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 p(1-p) \quad (3-14)$$

En nuestro ejemplo $p=0.01$, $\delta = 0.05 - 0.01 = 0.04$, y si se usan los límites de tres sigmas, a partir de (3-14) se tiene

$$n = \left(\frac{3}{0.04} \right)^2 (0.01)(0.99) = 56$$

Diagrama de control de disconformidades

Un artículo disconforme o no conforme es un producto que no satisface una o más de las especificaciones para tal producto. Cada punto específico en el que no satisface una especificación resulta ser un defecto o disconformidad. Ejemplo: la cantidad de soldaduras defectuosas en 100m de oleoducto, el número de remaches rotos durante el montaje de una estructura. La unidad de inspección tiene que ser la misma para cada muestra. Supongamos que los defectos o disconformidades ocurren en esta unidad de inspección según una distribución de Poisson; es decir

$$p(x) = \frac{e^{-c} c^x}{x!} \quad (3-15)$$

donde x representa el número de disconformidades y $c > 0$ es el parámetro de distribución de Poisson. Un diagrama de control de no conformidades se caracteriza por

$$\begin{aligned} LSC &= c + 3\sqrt{c} \\ \text{Linea_central} &= c \\ LIC &= c - 3\sqrt{c} \end{aligned} \quad (3-16)$$

suponiendo que se dispone un valor estándar para c . Si estos cálculos dan un valor negativo para el LIC, entonces tómesese $LIC=0$.

Si no se da un valor estándar, se podrá estimar c como la media observada del número de disconformidades en una muestra preliminar de unidades de inspección. En este caso, el diagrama de control tendrá los parámetros

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ \text{Linea_central} &= \bar{c} \\ LIC &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{aligned} \quad (3-17)$$

En la tabla se presentan el número de disconformidades observadas en 26 lotes sucesivos,

$$\bar{c} = \frac{516}{26} = 19.85$$

Por lo tanto los límites de control de prueba son

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.85 + 3\sqrt{19.85} = 33.22 \\ \text{Linea_central} &= \bar{c} = 19.85 \\ LIC &= \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 19.85 - 3\sqrt{19.85} = 6.48 \end{aligned}$$

Tabla 3-3 Numero de disconformidades de 26 lotes.³⁶

Numero de muestra	Numero de disconformidades
1	21
2	24
3	16
4	12
5	15
6	5
7	28
8	20
9	31
10	25
11	20
12	24
13	16
14	19
15	10
16	17
17	13
18	22
19	18
20	39
21	30
22	24
23	16
24	19
25	17
26	15
	516

³⁶ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.



Figura 3-4 Diagrama de control de disconformidades de la tabla 3-3

Obsérvese que dos puntos caen fuera de los límites de control, las muestras 6 y 20. La investigación de la muestra 6 reveló que un inspector nuevo no reconoció varios tipos de disconformidades, en la muestra 20 se debió a un problema de temperatura con la maquinaria, el cual se resolvió inmediatamente. Se excluyen las dos muestras y se revisan los límites de control de prueba.

$$\bar{c} = \frac{472}{24} = 19.67$$

Por lo tanto los límites de control de prueba son

$$LSC = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 19.67 + 3\sqrt{19.67} = 32.97$$

$$\text{Linea_central} = \bar{c} = 19.67$$

$$LIC = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 19.67 - 3\sqrt{19.67} = 6.37$$

Estos valores estándares serán para verificar la producción del próximo periodo. Se anotan el numero de disconformidades y se registran en la tabla

Tabla 3-4 Datos adicionales para el diagrama de control de disconformidades³⁷

Numero de muestra	Numero de disconformidades
1	16
2	18
3	12
4	15
5	24
6	21
7	28
8	20
9	25
10	19
11	18
12	21
13	16
14	22
15	19
16	12
17	14
18	9
19	16
20	21

³⁷ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.



Figura 3-5 Diagrama de control de disconformidades de la tabla 3-4

No se indica falta de control; sin embargo, el número de no conformidades es todavía demasiado grande. Se necesitan acciones administrativas para mejorar el proceso.

3.2. **DIAGRAMA DE CONTROL DE VARIABLES**

Una característica de calidad medible, como dimensión peso o volumen, se llama variable, de ésta se pretende controlar su valor medio de la característica de calidad y su variabilidad.

Es posible controlar la variabilidad o dispersión del proceso mediante un diagrama de control de la desviación estándar, llamado diagrama de S , o con un diagrama de control de la amplitud, llamado diagrama de R . Este último es el mas usado.

Diagrama de control \bar{x} y R

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (3-18)$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} \quad (3-19)$$

La amplitud R de la muestra es la diferencia entre la mayor y la menor observación.

$$R = x_{MAX} - x_{MIN} \quad (3-20)$$

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (3-21)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (3-22)$$

Existe una relación ente la amplitud de una muestra proveniente de una distribución normal y la desviación estándar de dicha distribución.

La variable aleatoria $W = \frac{R}{\sigma}$ se llama amplitud relativa.

Los parámetros de la distribución W son funciones del tamaño muestral de n . La media de W es d_2 . Para $n = 4, 5, 6$ es satisfactorio, para valores moderados de $n \geq 10$ la amplitud pierde rápidamente su eficiencia pues no toma en cuenta toda la información de la muestra.

Si se utiliza \bar{x} como un estimador de μ , y \bar{R} / d_2 como un estimador de σ los parámetros del diagrama de \bar{x} son

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ LIC &= \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \end{aligned} \quad (3-23)$$

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \quad (3-24)$$

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \\ \text{Línea central} &= \bar{\bar{x}} \\ LIC &= \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \end{aligned} \quad (3-25)$$

La constante A_2 se encuentra en el apéndice para distintos tamaños muestrales.

Suponiendo que la característica de calidad está distribuida normalmente, puede encontrarse σ_R a partir de la distribución de la amplitud relativa $W = \frac{R}{\sigma}$. La distribución estándar de W , digamos d_3 , es una función conocida de n puesto que $R = W\sigma$ la desviación estándar de R es $\sigma_R = d_3\sigma$ como se desconoce σ , es posible estimar σ_R con

$$\hat{\sigma}_R = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (3-26)$$

Por lo tanto, los parámetros del diagrama de R , con los límites de control de tres sigmas habituales, son

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \\ \text{Linea_central} &= \bar{R} \\ LIC &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned} \quad (3-27)$$

Si se toma

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$$

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$$

pueden definirse los parámetros de la gráfica de R como

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{R}D_4 \\ \text{Linea_central} &= \bar{R} \\ LIC &= \bar{R}D_3 \end{aligned} \quad (3-28)$$

Tabla 3-5 Datos de los anillos de piston forjados³⁸

Numero de muestra	Observaciones					\bar{x}_i	R_i
1	74.030	74.002	74.019	73.992	74.008	74.010	0.038
2	73.995	73.992	74.001	74.011	74.004	74.001	0.019
3	73.988	74.024	74.021	74.005	74.002	74.008	0.036
4	74.002	73.996	73.993	74.015	74.009	74.003	0.022
5	73.992	74.007	74.015	73.989	74.014	74.003	0.026
6	74.009	73.994	73.997	73.985	73.993	73.996	0.024
7	73.995	74.006	73.994	74.000	74.005	74.000	0.012
8	73.985	74.003	73.993	74.015	73.988	73.997	0.030
9	74.008	73.995	74.009	74.005	74.004	74.004	0.014
10	73.998	74.000	73.990	74.007	73.995	73.998	0.017
11	73.994	73.998	73.994	73.995	73.990	73.994	0.008
12	74.004	74.000	74.007	74.000	73.996	74.001	0.011
13	73.983	74.002	73.998	73.997	74.012	73.998	0.029
14	74.006	73.967	73.994	74.000	73.984	73.990	0.039
15	74.012	74.014	73.998	73.999	74.007	74.006	0.016
16	74.000	73.984	74.005	73.998	73.996	73.997	0.021
17	73.994	74.012	73.986	74.005	74.007	74.001	0.026
18	74.006	74.010	74.018	74.003	74.000	74.007	0.018
19	73.984	74.002	74.003	74.005	73.997	73.998	0.021
20	74.000	74.010	74.013	74.020	74.003	74.009	0.020
21	73.988	74.001	74.009	74.005	73.996	74.000	0.021
22	74.004	73.999	73.990	74.006	74.009	74.002	0.019
23	74.010	73.989	73.990	74.009	74.014	74.002	0.025
24	74.015	74.008	73.993	74.000	74.010	74.005	0.022
25	73.982	73.984	73.995	74.017	74.013	73.998	0.035

$$\sum \bar{x}_i = 1850.029$$

$$\sum R_i = 0.5690$$

$$\bar{\bar{x}} = 74.001$$

$$\bar{\bar{R}} = 0.0228$$

³⁸ Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Se recomienda, que primeramente la variabilidad del proceso se encuentre bajo control, por lo que inicialmente se debe hacer un análisis del diagrama de *R*. A partir de los datos de la Tabla 3-3 la línea central para la gráfica de *R* es

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_i}{25} = \frac{0.5690}{25} = 0.0228$$

A partir de la tabla del Apéndice E, para una muestra de $n=5$, $D_3=0$ y $D_4=2.115$. Por lo tanto los límites de control para la gráfica de *R* son

$$LSC = \bar{R}D_4 = 0.023(2.115) = 0.049$$

$$LIC = \bar{R}D_3 = 0.023(0) = 0$$

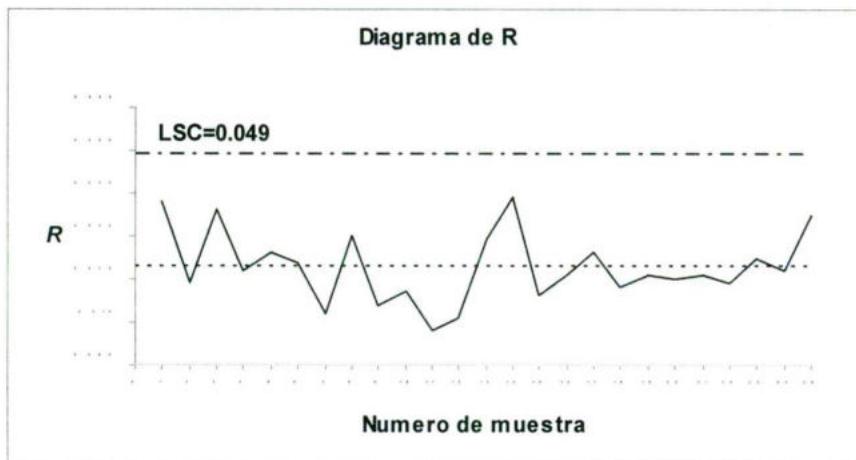


Figura 3-6 Diagrama de *R* de la tabla 3-5

En este diagrama no hay indicios de una condición fuera de control. Como el diagrama de *R* indica que la variabilidad del proceso está bajo control, puede trazarse ahora el diagrama de \bar{x} . La línea central es

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_i}{25} = \frac{1850.029}{25} = 74.001$$

A partir de la tabla del Apéndice E, para una muestra de $n=5$, $A_2=0.577$. Por lo tanto los límites de control para la gráfica de \bar{x} son

$$LSC = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 74.001 + (0.577)(0.023) = 74.014$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 74.001 - (0.577)(0.023) = 73.988$$

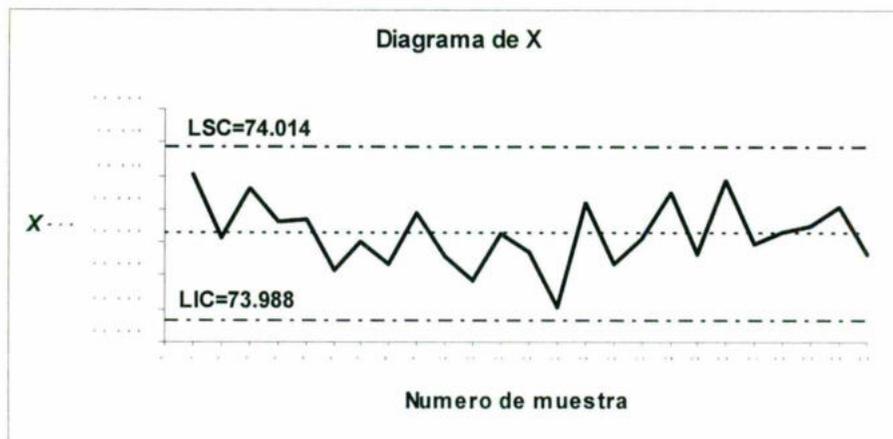


Figura 3-7 Diagrama de \bar{X} de la tabla 3-5

En el diagrama de \bar{x} , no se observa indicio alguno de una condición fuera de control cuando se grafican las medias muestrales preliminares en este diagrama. Por consiguiente se concluye que el proceso está controlado a los niveles establecidos, ya que ambos diagramas indican, y se adoptan los límites de control de prueba para utilizarlos en el control en línea del proceso.

La desviación estándar del proceso se determina mediante la ecuación (3-22), el valor de d_2 para muestras de tamaño cinco se muestra en la tabla del Apéndice E

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{0.023}{2.326} = 0.0099$$

Los límites de especificación para éste tipo de anillos son 74.000 ± 0.03 mm. Es posible usar la gráfica de control para describir la capacidad del proceso, con el fin de producir anillos de pistón conforme a estas especificaciones. Puede estimarse la fracción de anillos disconformes producidos suponiendo que el diámetro es una variable aleatoria normal, con media 74.001 y desviación estándar 0.0099, de manera siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= p\{x < 73.970\} + p\{x > 74.030\} \\ \hat{p} &= \Phi\left(\frac{73.970 - 74.001}{0.0099}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{74.030 - 74.001}{0.0099}\right) \\ \hat{p} &= \Phi(-3.13) + 1 - \Phi(2.93) \\ \hat{p} &= 0.00087 + 1 - 0.99831 \\ \hat{p} &= 0.00256\end{aligned}$$

Es decir, aproximadamente 0.256% de los anillos producidos estarían fuera de las especificaciones.

Otra manera de expresar la capacidad del proceso es en términos de la *relación de capacidad del proceso* (RCP), que se define para una característica de calidad con los límites inferior y superior de especificación, como

$$RCP = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \quad (3-29)$$

Para una relación de capacidad del proceso mayor a la unidad ($RCP > 1$), los límites de especificación quedan fuera de los límites superior e inferior de tolerancia natural ($LSTN = \mu + 3\sigma$, $LITN = \mu - 3\sigma$). Por consiguiente no se producirán virtualmente unidades disconformes.

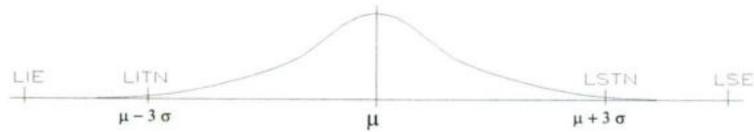


Figura 3-8 RCP > 1

Una relación de capacidad del proceso igual a la unidad (RCP=1) Para una distribución normal, implica alrededor de 27 artículos disconformes de alrededor de 10,000 producidos.

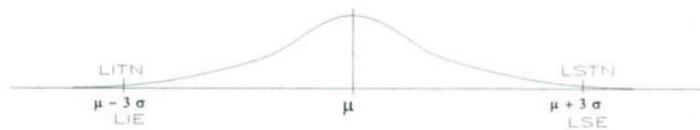


Figura 3-9 RCP=1

Si una relación de capacidad del proceso menor a la unidad (RCP<1), entonces las tolerancias naturales caen fuera de las especificaciones, el proceso es muy sensible a la producción o rendimiento, y se genera un gran número de artículos con disconformidad.

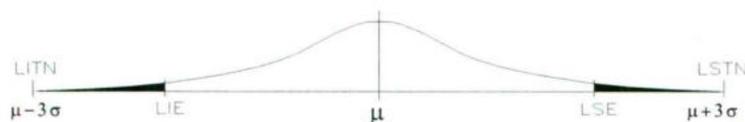


Figura 3-10 RCP < 1

Para el caso de especificaciones unilaterales, la Relación de Capacidad del proceso se define como

$$RCP = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \text{ (Sólo la especificación superior) } \quad (3-30)$$

$$RCP = \frac{\mu - LSE}{3\sigma} \text{ (Sólo la especificación inferior) } \quad (3-31)$$

La relación de capacidad del proceso es una medida de su aptitud para fabricar productos que satisfagan las especificaciones. En la Tabla (3-6) se muestran varios valores de la RCP, junto con los valores correspondientes del rechazo del proceso, expresado en piezas defectuosas o disconformes por millón (ppm). Se calcularon estos rechazos del proceso suponiendo una distribución normal para la característica de calidad, y en el caso de especificaciones bilaterales, considerando una media del proceso centrada entre los límites superior e inferior de especificación. A fin de ilustrar el uso de la tabla, obsérvese que una RCP igual a la unidad implica una tasa de rechazo de 2,700 ppm para especificaciones bilaterales, mientras que una RCP de 1.50 implica una tasa de rechazo de 3.4 ppm para especificaciones unilaterales.

Tabla 3-6 Valores de relación de capacidad de proceso (RCP) y rechazo de proceso correspondiente para un proceso distribuido normalmente (en ppm de defectuosos)

RCP	Rechazo del proceso (en ppm de defectuosos)	
	Especificaciones unilaterales	Especificaciones bilaterales
0.50	66800	133600
0.75	12200	24400
1.00	1350	2700
1.10	483	966
1.20	159	318
1.30	48	96
1.40	12	26
1.50	3.40	6.80
1.60	0.80	1.60
1.70	0.17	0.34
1.80	0.03	0.06
2.00	0.0009	0.0018

REFERENCIAS

Montgomery Douglas C., *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo editorial Iberoamérica.

Comisión de calidad y productividad empresarial . *Cultura de Calidad*. Boletín 3, Instituto Mexicano de Contadores Públicos. A.C. 1ra edición México 1990.

J.M Juran, Frank M Gryna , *Manual de Control de Calidad Volumen I* , McGrawHill

Philip B. Crosby, *Calidad sin lagrimas, El arte de administrar sin problemas*, editorial CECSA.

Eugene L. Grant , Richard S. Leavenworth. , *Control Estadístico de Calidad*. Editorial CECSA

BIBLIOGRAFIA

Philil B. Crosby *la calidad y yo, una experiencia de vida*. Prentice may

Kaoru Ishikawa. *Introducción al control de calidad*. Ediciones Días de Santos ,S.A.

Maurizio Garbin, Gregorio Invrea, *el control de calidad* BIBLIOTECA DEUSTO DE DIRECCION Y ORGANIZACIÓN , Capitulo II.- Producción. Parte 6.- Control de calidad, Ediciones Deusto S.A

J.M Juran, Frank M Gryna , *Manual de Control de Calidad Volumen II* , McGrawHill

APENDICE A. Control de Calidad en edificación

Se deberán de reportar las pruebas de con objeto de llevar el control de calidad del trabajo, especialmente en aquellas laboratorio estructuras en las cuales se especifiquen características fundamentales del proyecto, como son : compactación de terracerías en la formación de bordos de un camino de una presa, ensayos de agregados y resistencia a la ruptura de concreto, etc.

Procedimientos para garantizar los requisitos de calidad en la construcción estipulados tanto en las normas como en las especificaciones de diseño y planos de construcción.

Una de las primeras técnicas para el aseguramiento de calidad es el llamado control de procesos o vigilancia de que los procedimientos constructivos pactados en las etapas de planeación y programación, se cumplan cabalmente y llevar un registro estadístico de estas actividades para compararlas con la idealización para obtener el comportamiento real de la ejecución del proyecto.

El análisis estadístico, en el control de procesos es la base del control dado y de ahí es posible contar con todos los elementos para la toma de decisiones, recordando que, las características de una acertada decisión, es que sea adecuada y oportuna, las obras de construcción tienen la particularidad que generalmente son procesos relativamente largos a comparación de otras industrias donde los procesos de producción en ocasiones son instantáneos, y el ámbito de elaboración está muy controlado y por lo tanto es muy predecible su comportamiento, no así la industria de la construcción donde se depende de gran cantidad de insumos que en la mayoría de los casos no se fabrican en el lugar de la obra y que frecuentemente son elaborados a mano, o sea, en forma casi artesanal.

A continuación se muestra una lista de muestreo, donde se describen las pruebas de control de calidad para materiales de construcción tanto de campo como de laboratorio:

Guía para muestreo de Suelos y Rocas

Investigación y Muestreo por perforación con barrenos helicoidales

Métodos para la reducción de muestras de campo a tamaños de muestras de ensayo.

Conservación y Transporte de muestras de suelos

Obtención en laboratorio de muestras representativas (Cuarteo)

Preparación en seco de muestras para el análisis granulométrico y determinación de constantes del Suelo

Análisis Granulométrico de suelos por tamizado

Método de Ensayo para determinar el contenido de humedad de un suelo

Análisis Granulométrico por medio del Hidrómetro

Determinación del Límite Líquido de los Suelos.

Determinación del Límite Plástico (L.P.) e Índice de Plasticidad (I.P.).

Determinación de los Factores de Contracción de los Suelos

Gravedad Específica (Picnómetro) de los suelos

Equivalente de Arena, Suelos y Agregados Finos.

Relaciones Humedad Densidad (Proctor Modificado)

Peso Unitario - Humedad en los suelos, peso del martillo: 2.5 Kg; caída: 305 mm (Próctor Estándar)"

Densidad en el sitio (Método del Cono).

Materia orgánica en suelos (Pérdida por ignición)

Ensayo de penetración (SPT).

Muestreo con tubos de paredes delgadas.

Compresión no confinada en muestras de Suelos

Corte en Suelos cohesivos (Veleta).

Corte directo (consolidado drenado).	AGREGADOS
Densidad en el sitio - Método Nuclear a profundidad reducida	Muestreo para materiales de Construcción
Humedad del Suelo en el terreno. Método Nuclear (Profundidad Reducida).	Cantidad de material Fino que pasa por el Tamiz N° 200.
Contenido de Humedad en Suelos. Método del Carburo de Calcio	Peso Unitario y Vacíos de los Agregados.
Muestreo de suelos inalterados (superficiales).	Análisis Granulométrico de Agregados Grueso y Fino.
Módulo resiliente de suelos de subrasantes	Gravedad Específica y Absorción del Agregados Finos .
pH de los Suelos.	Gravedad Específica y Absorción del Agregados Gruesos .
Mediciones de la presión de poros	Abrasión Los Ángeles (L.A.).
Determinación de parámetros de resistencia al corte mediante Compresión Triaxial	Índice de Forma y Textura de Agregados
CBR de suelos (laboratorio).	Durabilidad al Sulfato de Sodio y Sulfato de Magnesio
CBR "in situ".	Porcentaje de caras fracturadas en los agregados.
Determinación de materia orgánica en suelos por oxidación y vía húmeda	Partículas livianas en los agregados

Arcilla en terrones y partículas desmenuzables.

Impurezas Orgánicas en el Agregado Fino (para uso en el concreto).
Índice de Durabilidad de agregados.

Método normal de ensayo para la determinación de Carbón y Lignito en Arena

Análisis Granulométrico del Relleno Mineral.

Determinación de la reactividad agregado / alcalí (Método Químico).

Determinación cuantitativa de los compuestos de azufre en los agregados.
Sales solubles en agregados de pavimentos flexibles.

Adhesividad de los ligantes bituminosos a los áridos finos (Procedimiento Riedel - Weber)

Índice de aplanamiento y de alargamiento de los agregados para carreteras.

Angularidad del Agregado Fino.

EMULSIONES

Destilación de emulsiones asfálticas

Agua en emulsiones asfálticas.

Viscosidad Saybolt de Emulsiones Asfálticas.

Sedimentación de emulsiones asfálticas.

Tamizado de las Emulsiones Asfálticas.

Demulsibilidad de las Emulsiones Asfálticas.

Carga de las partículas de las Emulsiones Asfálticas.

pH de las Emulsiones Asfálticas.

Cubrimiento y resistencia al desplazamiento por el agua de las emulsiones Asfálticas

Estabilidad de las Emulsiones Asfálticas (mezcla con cemento).

Residuo por evaporación de las Emulsiones Asfálticas a 163°C.

Cubrimiento de agregados con Emulsiones Asfálticas.	Análisis mecánico de los agregados extraídos de las mezclas.
Miscibilidad con agua de las Emulsiones Asfálticas.	Resistencia de mezclas bituminosas empleando el Aparato Marshall
Adhesividad-Cohesividad con Emulsiones Asfálticas utilizando la Placa Vialit	Porcentaje de vacíos de aire en mezclas asfálticas compactadas densas y abiertas.
Coefficiente de Emulsibilidad del relleno mineral.	Gravedad Específica Aparente y Peso Unitario de Mezclas Asfálticas compactadas empleando especímenes parafinados.
Consistencia con el cono de las lechadas asfálticas.	Espesor o altura de especímenes compactadas de mezclas asfálticas.
Abrasión en pista húmeda.	Peso específico teórico máximo de mezclas asfálticas para pavimentos.
Exudación y deformación de lechadas asfálticas con máquina de rueda cargada (LWT).	Determinación del grado de compactación de una mezcla bituminosa
Método de Ensayo para clasificar las lechadas bituminosas por medida del par de torsión, en el cohesiómetro.	Peso Unitario del concreto asfáltico en el terreno (método nuclear).
Toma de muestras de mezclas asfálticas para pavimentos.	Cálculo del % de asfalto que absorbe un agregado.
Extracción cuantitativa de asfalto en mezclas para pavimentos.	Humedad o Destilados Volátiles en Mezclas Asfálticas para pavimentos.

Resistencia a compresión simple de mezclas asfálticas.

Peso Específico Aparente y Peso Unitario de mezclas asfálticas compactadas empleando especímenes saturados con superficie seca.

Caracterización de las mezclas bituminosas abiertas por medio del Ensayo Cantabro de pérdida por desgaste.

Permeabilidad IN SITU de Pavimentos drenantes con el permeámetro LCS Cubrimiento de los agregados con materiales asfálticos (en agua).

Efecto del agua sobre la cohesión de las mezclas asfálticas compactadas (inmersión - compresión).

Adherencia del Bitumen - Agregado (mezcla bituminosa).

Adherencia en bandeja.

Ensayo para Evaluar el efecto del agua sobre agregados con recubrimientos Bituminosos usando Agua hervida.

CEMENTOS Y AGLOMERADOS

Muestreo y aceptación del cemento hidráulico.

Análisis Químico del Cemento Hidráulico (Portland)

Expansión del cemento en la autoclave.

Finura del cemento por medio de la malla N° 200.

Consistencia Normal del Cemento.

Tiempo de Fraguado. Método de Vicat. Fragua del Cemento. Agujas de Gillmore.

Finura del Cemento Portland (Turbidímetro)

Compresión de morteros de cemento hidráulico (Cubos de 50.8 mm.)

Peso específico del cemento hidráulico (Frasco de Le Chatelier).

Mezcla Mecánica de Pastas de Cemento y Morteros de consistencia plástica

Contenido de aire en morteros de cemento.

Finura del cemento Pórtland. Método del aparato de Blaine (Permeabilidad)

Fraguado falso del cemento.
Resistencia a la tensión de morteros de cemento.

Estabilidad de volumen sobre agua hirviendo (método de la galleta)

Fluidez de morteros de cemento hidráulico (mesa de flujo).

Resistencia a la flexión de morteros de cemento hidráulico.

CONCRETO

Toma de muestras de concreto fresco.

Elaboración y curado de testigos en el laboratorio de muestras de concreto para Ensayos de Laboratorio.

Refrentado de testigos de concreto (CAPPING).

Resistencia a la compresión testigos cilíndricos.

Asentamiento del Concreto (Slump).

Contenido de aire en el concreto fresco.
Método de presión.

Toma de núcleos y vigas en concretos endurecidos.

Tracción indirecta de cilindros standard de concreto.

Resistencia a la flexión del concreto.

Método de la Viga Simple cargada en el tercio de la luz.

Resistencia a la compresión usando porciones de vigas quebradas del ensayo a la flexión.

Resistencia a la flexión (viga simple cargada punto central)

Medida de la longitud de núcleos de concreto (Testigos extraídos con Brocas)

Exudación del concreto.

Peso Unitario de Producción (rendimiento) y contenido de aire (Gravimétrico).

Flujo Plástico del concreto a la compresión.

Calidad de agua para concretos.

Contenido de cemento Pórtland en el concreto endurecido.

METÁLICOS

Ensayos de tensión de material metálico (barras y alambres).

Ensayo de tensión en torones para cables.

Ensayo de doblamiento.

Ensayo de dureza Brinell.

DRENAJE

Resistencia a la rotura en tubos de concreto y gres por el Método de los tres apoyos

Ensayo de absorción para tubos de concreto y gres

Ensayo de infiltración en tuberías.

Ensayo de permeabilidad en tuberías.

Determinación de la rigidez en tuberías de PVC.

MISCELÁNEOS

Medida de la regularidad superficial de un pavimento mediante la regla de 3 metros.

Medida de la deflexión y radio de la curvatura (Viga Benkelman).

Fricción sobre superficies pavimentadas (MU METER).

Coefficiente de resistencia al deslizamiento con el péndulo TRRL

Textura Superficial Método del Círculo de Arena.

ESTABILIZACIONES

Preparación de probetas de Suelo-Cemento (Laboratorio).

Relaciones Humedad-Densidad (Suelo-Cemento).

Resistencia a la compresión de probetas de Suelo-Cemento.

Humedecimiento y Secado de Mezclas de Suelo-Cemento.

Determinación por titulación contenido de cal en suelos

Preparación en el Laboratorio de mezclas de suelo-cal empleando una mezcladora mecánica

Contenido de cal de mezclas suelo-cal no curadas

Resistencia de mezclas de suelo-cal.

PINTURAS

Determinación de la Consistencia de Pinturas con el Viscosímetro Stormer

Determinación del Ensayo Estándar de Viscosidad de Pinturas, Barnices y Lacas usando la Copa Ford

Determinación de la Densidad de Pinturas con el Picnómetro

Determinación de la Finura de Dispersión de Pinturas con el Grindómetro

Determinación del Ensayo de Caída de una Masa

Determinación del Ensayo de Flexibilidad de Pinturas con el Mandril Cónico

Determinación del Contenido de Pigmento y Vehículo

Determinación del Brillo Especular

Determinación del Tiempo de Secado

Determinación de la Dureza de la Película por Ensayo del Lápiz

Determinación de la Resistencia a la Inmersión

Resistencia a la Niebla Salina

Determinación de la Adherencia de Recubrimientos Orgánicos por El Método de la Cinta Adhesiva

Determinación de la Relación de Contraste de la Película Seca de Pinturas y Esmaltes

Determinación de la Resistencia al Sangrado

Determinación de la Resistencia a la Abrasión Taber

Toma de Muestras de Pinturas
Extensión de Películas de Pintura de Espesor Uniforme

Determinación del Porcentaje de Plomo

Determinación del Dióxido de Titanio

Determinación de la Retrorreflexión de las Marcas Viales Reflexivas

Determinación del Vehículo Fijo en Pinturas Utilizadas en la Señalización Horizontal de Carreteras

Determinación de la Corrosión en Superficies de Acero

Determinación de las Propiedades de Almacenamiento Acelerado de las Pinturas de Tráfico

Determinación del Porcentaje de Cromo en Pinturas

Determinación de la Prueba de Impacto

Determinación del Grado de Deterioro de los Materiales Aplicados en la Señalización Horizontal de Carreteras

Determinación del Ensayo de Adherencia

Determinación de Bario

MICROESFERAS DE VIDRIO

Determinación del Análisis Granulométrico de las Microesferas de Vidrio

Determinación del Índice de Refracción de las Microesferas de Vidrio

Determinación de la Resistencia a los Agentes Químicos de las Microesferas de Vidrio

Ensayos Estándares de Microesferas de Vidrio Para Pinturas de Tráfico

REFLECTANCIA

Determinación de las Medidas de Reflectancia de las Señales Vertica

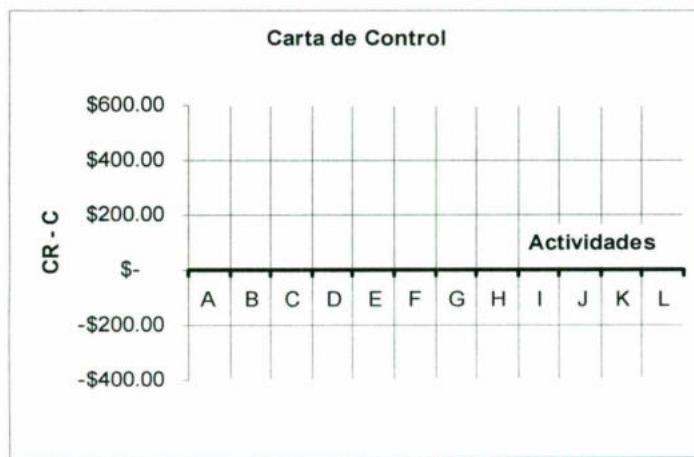
APENDICE B .- Las cartas de control en la Ingeniería de costos.

Elementos de Ingeniería de Costos Dr. Diego Arturo López de Ortigosa

El diagrama de control en la ingeniería de costos se utiliza para llevar un control del costo individualizado de cada una de las actividades que conforman el proyecto; es decir se trata de observaciones únicas, por lo tanto no tiene sentido hablar de media, desviación estándar, ni de límites de control.

Las cartas de control se utilizan en la ingeniería de costos como un medio gráfico de control para los costos de los paquetes de trabajo. Aún más, es de mayor interés para ésta área de la ingeniería la diferencia entre el costo real de una actividad y su costo presupuestado que el solo costo real del paquete.

De esta manera, aun cuando las observaciones no se realizan en tiempos equidistantes, el eje de las abscisas se utiliza para las actividades y el de las ordenadas para la diferencia $CR_i - C_i$ en donde CR_i es el costo real de la actividad i y C_i es su costo presupuestado . Figura 4.1.



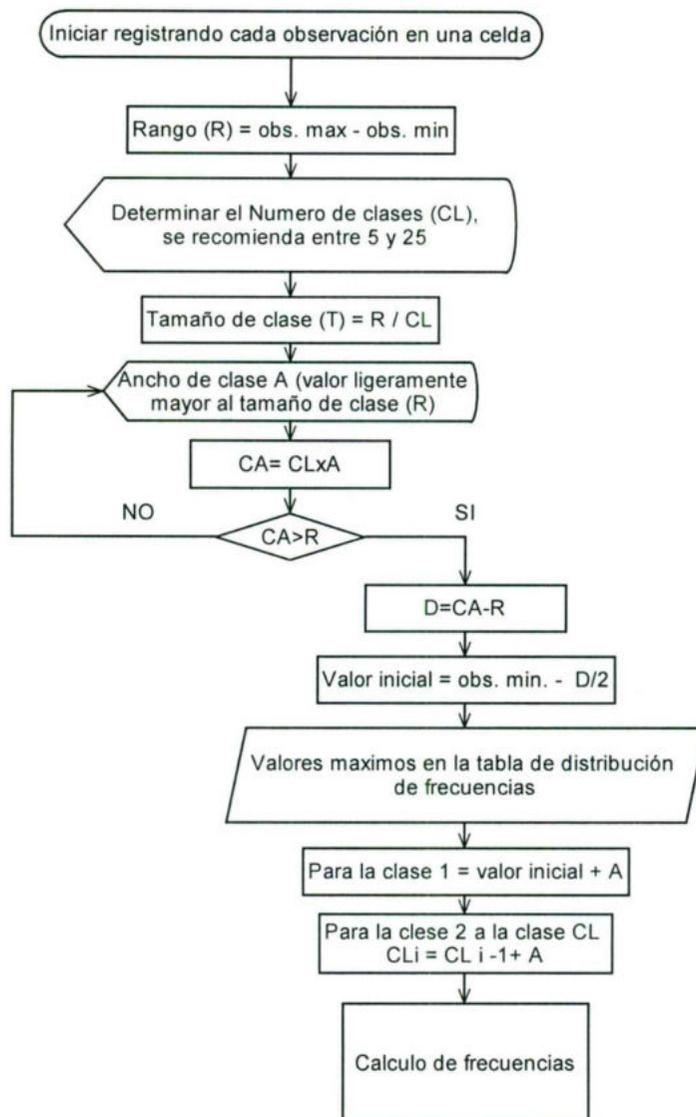
Carta de control en ingeniería de costos



Ejemplo de carta de control

APENDICE C .- Manejo de Excel para elaboración de Histogramas

La computadora es una herramienta que nos es de gran utilidad para manipular la información, con la ayuda de programas de computo como Excel



Calculo de frecuencias. En el menú insertar función, en la categoría de estadística, encontramos la función de frecuencia la cual solicita como argumentos de entrada dos matrices la primera es la de datos, en la cual se deberá seleccionar toda la serie de

observaciones, la segunda es la matriz de grupos, en la cual se deberá seleccionar toda la serie de las clases correspondientes a los valores máximos, el resultado mostrará el valor de frecuencia correspondiente a la primera clase, para ver los demás valores habrá que seleccionar el rango de resultados, oprimir la tecla F2 y posteriormente las teclas CONTROL-SHIFT-ENTER. A partir de esta tabla se puede obtener la tabla de la frecuencia acumulada, frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada.

Para la elaboración del gráfico simplemente se selecciona la columna de las clases y la columna de las frecuencias, y se ejecuta la función para insertar gráficas de barras horizontales. Para que cumpla los requisitos de un histograma, en opciones dentro de las propiedades del gráfico, el ancho del rango deberá ser cero, esto hará que no existan espacios entre las barras de la gráfica.

APENDICE D .- Distribución acumulativa normal estándar



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

APENDICE E .- Factores para construir diagramas de control de variables

Observaciones en la muestra n	Diagrama para medias				Diagrama para desviaciones estándares						Diagrama para amplitudes					
	Factores para límites de control		Factores para línea central		Factores para límites de control			Factores para línea central			Factores para límites de control			Factores para línea central		
	A	A ₂	A ₃	C ₄	1/C ₄	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	d ₂	1/d ₂	d ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8665	0.853	0	3.866	0	3.269
3	1.732	1.023	1.954	0.8662	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.124	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.284	1.716
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.308	1.692
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.609
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.414	1.586
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.460	1.540

Para n>25

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}}, A_3 = \frac{3}{C_4 \sqrt{n}}, C_4 = \frac{4(n-1)}{4n-3},$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{C_4 \sqrt{2(n-1)}}, B_4 = 1 + \frac{3}{C_4 \sqrt{2(n-1)}},$$

$$B_5 = C_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}, B_6 = C_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$