Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

El pensamiento reflexivo como marco para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en un sistema por competencias

Opción de titulación
Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Adriana Avilés Flores

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	Firma
Dra. Teresa Guzmán Flores Secretario	Firma
M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López Vocal	Firma
M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán Suplente	Firma
M.D.M. Noraísa González González Suplente	Firma

Dr. Aurelio Domínguez González Director de la Facultad	Dr. Irineo Torres Pacheco Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Septiembre de 2014
México

RESUMEN

El enfoque por resolución de problemas, introducido en los planes y programas de estudio de las Matemáticas en la Reforma Curricular de 1993 y profundizado en la Reforma de Secundaria de 2006, así como la Reforma Integral para la Educación Media Superior, plantea que el aprendizaje de las Matemáticas debe permitir a los alumnos desarrollar una forma de pensamiento que les permita resolver problemas que se presentan en diversos contextos, *las evaluaciones ponen de manifiesto el predominio de una enseñanza memorística,* en la que la aplicación mecánica de las fórmulas o algoritmos parece un fin en sí mismo. La enseñanza de la Geometría, en particular, es una de las áreas de las Matemáticas en las que hay más puntos de desencuentro entre matemáticos y educadores, no sólo en relación con sus propósitos y contenidos sino también con la manera de enseñarla. Como docente es importante no perder de vista que el estudio de la Geometría permite al alumno estar en interacción con relaciones que ya no son del espacio físico sino un espacio conceptualizado y, por lo tanto, en determinado momento, la validez de las conjeturas que haga sobre las figuras geométricas ya no se comprobarán empíricamente sino que tendrán que apoyarse en razonamientos que obedecen a las reglas de argumentación en matemáticas, en particular, la deducción de nuevas propiedades a partir de las que ya conocen, para esto es necesario desarrollar una forma de pensamiento superior, el pensamiento reflexivo. Para la OCDE, el pensamiento reflexivo es la base fundamental para el desarrollo de la competencia matemática debido a su función de articular los diferentes razonamientos, procesos, conocimientos y habilidades involucrados en toda actividad matemática, de aquí que proponemos el aprendizaje de la Geometría Euclidiana mediante el uso del pensamiento reflexivo en un ambiente de Geometría Dinámica.

(**Palabras clave**: Pensamiento reflexivo, Geometría Euclidiana, actividades de aprendizaje, modelos geométricos, Geometría Dinámica)

SUMMARY

The problem-solving approach, introduced in the plans and programs of study of the mathematics Curriculum Reform in 1993 and deepened in the 2006 School Reform, as well as the Integrational Reform for High School Education argues that learning mathematics should enable students to develop a way of thinking, allowing them to solve problems that arise in various contexts, the assessments show the dominance of memoristic learning, in which the mechanical application of formulas or algorithms seems an end in itself. The teaching of geometry, in particular, is one of the areas of mathematics in which there are more points of disagreement between mathematicians and educators, not only in relation to their purpose and content but also how to teach it. As a teacher it is important not to lose from sight that the study of geometry allows the student to be in interaction with relationships that are not from physical space but from a space conceptualization and therefore, at some point, the validity of the assumptions made from geometric shapes will not be tested empirically but will have to rely on arguments that obey the rules of argumentation in mathematics, in particular, the deduction for new properties from those already known, so it is necessary to develop a form of higher thinking, reflective thinking. For the OECD, reflective thinking is the foundation for the development of mathematical competence because of its role of coordinating the various arguments, processes, knowledge and skills involved in any mathematical activity, hence we propose learning Euclidean Geometry by the use of reflective thinking in a Dynamic Geometry environment.

(**Key words**: Reflective thinking, Euclidean Geometry, learning activities, geometrical models, Dynamic Geometry)

A todos los que disfrutan de enseñar y aprender.

A todos los que se identifican con alguna de las siguientes frases:

Aprender sin reflexionar es malgastar la energía.
Confucio

Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo.
Benjamin Franklin

Yo no enseño a mis alumnos, solo les proporciono las condiciones en las que puedan aprender.
Albert *Einstein*

El secreto de la educación es enseñar a la gente de tal manera que no se den cuenta de que están aprendiendo hasta que es demasiado tarde.
Harold E. Edgerton

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por otorgarme el apoyo financiero para la realización de los estudios de Maestría, a través de la beca número 270266.

De igual manera, agradezco a la Universidad Autónoma de Querétaro por brindarme el apoyo financiero para cubrir los créditos de la Maestría.

A mi tutor, el Dr. Víctor Larios Osorio, por acercarme al tema del pensamiento reflexivo, por orientarme, aconsejarme y acompañarme en este importante proceso.

A mis profesores que estimularon en mí, el interés y motivación por la investigación; de manera especial al profesor Arturo Corona Pegueros por adentrarme en el mundo fascinante de la didáctica de la enseñanza de la Matemática, por las orientaciones y herramientas que entregó desde su cátedra y que constituyen el soporte de ésta tesis.

A mi amado esposo e hijos que han sido mi motivación y apoyo incondicional durante estos años vividos.

A mis padres quienes con su ejemplo y entrega me han enseñado el valor de la vida.

A mis compañeros y amigos por todos los momentos compartidos.

TABLA DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, la evaluación en la Educación Media Básica (EMB) y Educación Media Superior (EMS) en nuestro país se realiza a través de instrumentos estandarizados, cuatro de los más importantes son: Exani[1], PISA[2], Excale[3] y Enlace[4]; cada uno fue diseñado para proyectar diferente información.

Los resultados recientes de PISA[5] son los que se han tomado de referencia para sustentar la justificación de la propuesta que se ofrece con este trabajo, las razones para esta consideración son dos: la primera es porque PISA "se centra en la capacidad de los estudiantes para usar sus conocimientos y habilidades, y no hasta que punto dominan un plan de estudios o currículo escolar. Por ello, no mide qué tanto los estudiantes pueden reproducir lo que han aprendido, sino que se indaga en lo que PISA denomina *competencia*[6] (*literacy*), es decir, la capacidad de extrapolar lo que se ha aprendido a lo largo de la vida, su aplicación en situaciones del mundo reales, así como la capacidad de analizar, razonar y comunicar con eficacia los planteamientos, las interpretaciones y la resolución de problemas en una amplia variedad de situaciones" (INEE, 2013, p. 11), por lo que PISA es la prueba que tiene el propósito fundamental de ofrecer una visión general, de cómo México educa y capacita a los jóvenes que están por ingresar a la vida productiva; la otra razón es que, "representa la primera *medición confiable* del desempeño del sistema educativo mexicano" (Vidal, 2009, p. 11) que se traduce en la efectividad de las escuelas.

PISA tiene una periodicidad definida: se aplica cada tres años y en cada ciclo se enfatiza un área o competencia diferente. En 2000 el énfasis fue Lectura, en 2003 Matemáticas, en

---

[1] Examen Nacional de Ingreso (Exani). Instrumento para ayudar a tomar las decisiones de admisión a la educación media y superior. Diseñado por el Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (Ceneval) en 1994.

[2] Program for International Student Assessment (PISA). Prueba internacional desarrollada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en 1998 y aplicada desde el año 2000 a todos los miembros de esta organización. Su propósito principal es determinar en qué medida los estudiantes de 15 años, que están por concluir o han concluido su educación obligatoria, han adquirido los conocimientos y las habilidades relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad actual.

[3] Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (Excale). Instrumento desarrollado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) y destinado a evaluar al sistema educativo nacional en 2003.

[4] Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (Enlace). Instrumento que proporciona información a estudiantes, docentes y padres de familia acerca del nivel de cada alumno de educación básica, diseñado en 2006. En el caso particular para la EMS se aplica desde 2008 y evalúa los dominios de habilidad lectora y matemática de los jóvenes que están por egresar del bachillerato.

[5] En México, la aplicación de PISA está a cargo del INEE y se hace con una muestra ampliada que permite el análisis por entidad.

[6] La adquisición de competencias es un proceso que dura toda la vida y no sólo se obtiene a través de la escuela o el aprendizaje formal, sino mediante la interacción con los compañeros, los pares y la sociedad.

2006 Ciencias, en 2009 nuevamente Lectura y en 2012 se centra nuevamente en el área de Matemáticas. Por esta razón ahora es posible realizar un comparativo entre ambos resultados e identificar los cambios que han ocurrido en nueve años en el sistema educativo nacional en cuanto a la competencia matemática.

En Pisa 2003, México obtuvo en promedio 385 puntos en la competencia matemática situándolo en el nivel[7] uno, en 2012 obtuvo 413 puntos en esta misma competencia. Cabe destacar que el avance de 28 puntos entre 2003 y 2012 fue uno de los más importantes entre los paises de la OCDE. Sin embargo, en PISA 2012 el 55% de los estudiantes mexicanos no alcanzó el nivel de competencias básicas en matemáticas (OCDE, 2013). Esto quiere decir que actualmente existe una gran proporción de estudiantes que sólo son capaces de contestar a reactivos que impliquen contextos familiares, preguntas claramente definidas y resolver instrucciones directas en situaciones explícitas, llevar a cabo acciones que sean obvias.

En otras palabras, de los tres *procesos* que deben activarse para conectar los fenómenos observados con las Matemáticas y resolver los problemas correspondientes, el 55% de los escolares mexicanos sólo puede realizar el proceso más sencillo en grado de dificultad, la *reproducción*, sin lograr alcanzar los procesos de *conexión y reflexión* que son de mayor grado de complejidad. El proceso de conexión involucra ideas y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios, pero que aún incluyen escenarios familiares. Además, involucra la elaboración de modelos para la solución de problemas. El proceso de reflexión implica la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original. Para ello, los estudiantes deben matematizar o conceptualizar las situaciones. Las Matemáticas, además de ser un asunto del ámbito escolar y profesional, forman parte de la vida cotidiana de jóvenes y adultos. Su dominio les permite hacer frente a las necesidades prácticas de su vida diaria. En este sentido, no alcanzar la competencia básica en matemáticas se traduce en un obstáculo para acceder a estudios superiores y desarrollar las actividades matemáticas

---

[7] Los resultados que reporta PISA se presentan en una escala global (para cada una de las tres áreas) y por subescalas (sólo para el área principal de estudio en cada ciclo). Tanto para la escala global como para las subescalas existen niveles de desempeño diferenciados por un rango de puntaje. Al estar asociados a reactivos de dificultad creciente, los niveles permiten catalogar el desempeño de los estudiantes al describir lo que son capaces de hacer.

que exige la vida en la sociedad del conocimiento.

La realidad que refleja la evaluación PISA tiene que ver directamente con la falta del desarrollo del pensamiento reflexivo en los estudiantes mexicanos, esto está sustentado por lo que establece la OCDE (2005, p. 4): “la necesidad de que los individuos piensen y actúen reflexivamente es fundamental en este marco de competencias. La reflexión involucra no sólo la habilidad de aplicar de forma rutinaria una fórmula o método para confrontar una situación, también la capacidad de adaptarse al cambio, aprender de las experiencias y pensar y actuar con actitud crítica. […] El pensamiento reflexivo es considerado el corazón de las competencias”, en el sentido que articula los conocimientos, habilidades y actitudes para lograr formas de pensamiento avanzado.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 ¿Qué nos tiene en la situación actual?

Aún cuando el enfoque por resolución de problemas, introducido en los planes y programas de estudio de las Matemáticas en la Reforma Curricular de 1993 y profundizado en la Reforma de Secundaria de 2006, así como la Reforma Integral de la Educación Media Superior, plantea que el aprendizaje de las Matemáticas debe permitir a los alumnos desarrollar formas de pensamiento que les permita resolver problemas que se presentan en diversos contextos, *las evaluaciones ponen de manifiesto el predominio de una enseñanza-aprendizaje fundamentada en la memorización,* en la que la aplicación mecánica de las fórmulas o algoritmos parece un fin en sí mismo (García & López, 2008). En el proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional, generalmente los estudiantes están jugando un papel muy pasivo en el que se limitan a recibir información sin procesarla, analizarla, ni aplicarla en contexto; los educandos memorizan conceptos sin ser capaces de solucionar situaciones problema con reflexión y criticidad.

García y López (2008), plantean que la enseñanza de la Geometría, en particular, es una de las áreas de las Matemáticas en las que hay más puntos de desencuentro entre matemáticos y educadores, no sólo en relación con sus propósitos y contenidos, sino también con la manera de enseñarla.

Muchos profesores identifican a la Geometría, principalmente, con temas como perímetros, superficies y volúmenes, limitándola sólo a las cuestiones métricas; para otros docentes, la principal preocupación es dar a conocer a los alumnos las figuras o relaciones geométricas con dibujos, su nombre y su definición, reduciendo las clases a una especie de glosario geométrico ilustrado, en ambos casos se opera con una transposición didáctica claramente reduccionista, generadora de efectos ligados al contrato didáctico. Los estudiantes, por su parte, asocian esta visión con el estudio de la Geometría, basando su aprendizaje en la memorización de fórmulas y propiedades, donde el factor "profesor o profesora" son componentes que influyen considerablemente en el proceso de enseñanza aprendizaje (Gamboa & Ballesteros, 2010). Si a todo lo anterior le sumamos la ausencia carencial o intencionada de materiales didácticos específicos para la construcción de los conceptos geométricos, se convierte en una fuente inagotable de obstáculos didácticos que convierten el aprendizaje de esta materia en algo falto de consistencia y rigor.

2.2 ¿Cómo lograr niveles avanzados en el desempeño de competencias matemáticas?

En un entorno real, los ciudadanos enfrentan una serie de situaciones, por ejemplo, al ir de compras, viajar, ocuparse de su economía doméstica, cocinar, juzgar información de periódicos sobre estadísticas de población u otras, en las que el empleo de razonamientos cuantitativos, espaciales u otras capacidades matemáticas contribuyen a aclarar, formular o resolver los problemas que se les plantean. Estos usos de las Matemáticas se basan en habilidades, actitudes y conocimientos que fueron adquiridos y practicados en el medio escolar, pero exigen también la capacidad de aplicar esas habilidades a contextos menos estructurados, que carecen de instrucciones precisas y en los que se debe decidir cuál será el conocimiento más adecuado y cuál la forma más útil de aplicarlo.

Todo lo anterior conduce a desarrollar formas de pensamiento complejo como el pensamiento reflexivo, que por su naturaleza permite la integración de los procesos involucrados en el desarrollo de las diferentes competencias necesarias por los estudiantes para hacer frente a las situaciones cambiantes en el ámbito de la Matemática personal, escolar, profesional y social.

Este panorama nos muestra que el aspecto formativo de la enseñanza de la Matemática es tan relevante como el aspecto informativo, es decir, los procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan con un adecuado tratamiento de la Matemática en clase son tan importantes como el aprendizaje de los contenidos.

De tal manera que, como docentes debemos cambiar la visión del proceso enseñanza-aprendizaje por un enfoque dinámico de aprendizaje que incluya el desarrollo y uso del pensamiento reflexivo, y en el que los nuevos conocimientos, habilidades y actitudes necesarios para adaptarse con éxito a un mundo cambiante se obtienen continuamente a lo largo de la vida. Correlacionando este enfoque a la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, que es el área de las Matemáticas que nos ocupa en este documento, es fundamental ofrecer una didáctica que incluya una Geometría Dinámica, interfigural e intrafigural; fundada en procesos de persepción, de representación, de justificación, de construcción, de visualización y de designación de los entes geométricos considerados en cada caso, que permitan al estudiantado construir su propio conocimiento y valorar esta disciplina no como un “producto” ya acabado, sino como un campo de descubrimiento y una herramienta para comprender el mundo circundante. Para completar lo anterior, es deseable considerar “aquello que sea útil[8] en el futuro de los educandos y pueda motivarse desde la actualidad: razonar correctamente (deductivamente e inductivamente), representar, abstraer, relacionar, clasificar y resolver, son verbos claves en el abanico de lo deseable” (Alsina, Fortuny, & Pérez, 1997, p. 29).

[8] Para Claudi Alsina, el concepto de enseñanza está ligado necesariamente al concepto de futuro, puesto que se forman ciudadanos del mañana y profesionistas del futuro a lo largo de un proceso cada vez más amplio en el tiempo.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El pensamiento reflexivo no es algo nuevo, John Dewey, filósofo norteamericano, ya lo refiere en sus trabajos en 1910: "How we Think", donde considera el pensamiento reflexivo como función principal de la inteligencia y como instrumento usado por los hombres en la superación de los problemas prácticos de la vida en todas sus dimensiones, también afirma que *el pensamiento reflexivo consiste en darle vueltas a un tema en la cabeza y tomárselo en serio con todas sus consecuencias.*

Para Dewey (1989, p. 20 y ss.), el pensamiento reflexivo (acción reflexiva) es una corriente de ideas que surgen unas de otras y se apoyan mutuamente, de modo que acaba produciéndose un movimiento sostenido y dirigido hacia un fin común. Este fin común es una conclusión válida o sólida, una meta que se debe conseguir, y esta meta impone una tarea que controle la secuencia de ideas.

De tal manera que, "lo que constituye el pensamiento reflexivo es el examen activo, persistente y cuidadoso de toda creencia o supuesta forma de conocimiento a la luz de los fundamentos que la sostienen y a las conclusiones a las que tiende" (Dewey, 1989, p. 24). Así pues, el pensamiento reflexivo *es lógico* en la medida en que el proceso real de pensar es verdaderamente reflexivo, está alerta, es cuidadoso, riguroso, definido y preciso y sigue un curso ordenado.

Dewey (1989, p. 26) determina que la reflexión surge cuando comenzamos a preguntarnos por la veracidad, por el valor de una indicación cualquiera; cuando tratamos de probar su autenticidad y de ver qué garantías hay de que los datos existentes señalen *realmente* la idea sugerida, de modo tal que justifique la aceptación de esta última, y precisa que el factor capital de todo pensamiento reflexivo es la función de significar.

En consecuencia, este autor sistematiza en *cinco fases* el proceso de reflexión (Dewey, 1989, p. 117 y ss.) o *aspectos del pensamiento reflexivo*:

1. Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.
2. Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.

3. Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.

4. La elaboración racional de la idea o suposición.

5. Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.

Aún cuando Dewey sistematiza el proceso reflexivo en cinco fases, es necesario aclarar que la reflexión no consiste en una serie de pasos o procedimientos que serán utilizados en la acción reflexiva siguiendo ese orden estricta e irrevesiblemente, es más bien una forma holística de atender y responder a las situaciones.

3.1 Relación del pensamiento reflexivo y el aprendizaje de la Geometría

En su experiencia, Soriano (1996) establece que existe un paralelismo entre las fases del pensamiento reflexivo de Dewey con las fases que considera necesarias para pensar reflexivamente desde las Matemáticas. Así mismo, converge con Dewey en que el proceso de pensar consiste en formar una serie de criterios relacionados entre sí de tal modo que se sostienen mutuamente y conducen a una conclusión, este procedimiento coincide con el que se debe llevar a cabo en las Matemáticas para adquirir conocimiento de forma significativa, en otras palabras *aprender de manera reflexiva*.

El aprendizaje intelectual incluye la reunión y retención de información. Dewey (1989, p. 91) afirma que la información es una carga indigesta a menos que se entienda. Es conocimiento sólo si se comprende el material que la constituye. Y por comprensión se entiende la captación de diversas partes de la información adquirida en sus relaciones recíprocas, resultado que únicamente se logra cuando la adquisición va acompañada de una constante reflexión sobre el significado de lo que se estudia, en resumen la comprensión es fundamental en el proceso de cualquier aprendizaje. En este mismo sentido, Van Hiele en su modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, puntualiza que para que un estudiante alcance niveles superiores de razonamiento es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabularios, etc.) con los que tendrán que trabajar para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos (Jaime & Gutiérrez, 1990).

Por lo tanto, la tarea de todos es formar estudiantes reflexivos desarrollando en ellos la capacidad reflexiva, para esto, Flores (2007) sostiene que parte importante de un pensamiento crítico y reflexivo se puede fomentar mediante el desarrollo de un razonamiento deductivo, el cual, a su vez, está en la base de la demostración matemática. Gamboa y Ballesteros (2010) coinciden con lo anterior, señalando que la Geometría es un *instrumento reflexivo*. Desde la perspectiva de Castiblanco (citado en Gamboa & Ballesteros, 2010), *probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos. (...) no hay mejor lugar que la Geometría para dilucidar el papel de la prueba y la demostración matemática.* En este mismo sentido, Guzmán (1993) apunta que la Geometría Euclidiana es un campo muy fértil para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo, de la deducción formal a partir de axiomas por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto, lo cotidiano y lo académico (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Para algunos investigadores, en el aprendizaje de la Geometría es fundamental considerar el vínculo entre la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico y la argumentación (Ojeda, Medina, & Peralta, 2003; Abrate, Delgado, & Pochulu, 2006). Por su naturaleza, el pensamiento reflexivo proporciona éste vínculo.

3.2 Relación del pensamiento reflexivo y el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD)

Flores (2007) y otros autores concretan que el uso de paquetes computacionales de Geometría Dinámica es una herramienta para la formación de estudiantes críticos y reflexivo, pues según algunos estudios, este tipo de software ayuda al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión, propiciando el desarrollo de un razonamiento deductivo y un mejor acercamiento a la demostración matemática como vehículo del entendimiento.

Varias investigaciones señalan que el uso de tecnologías digitales posibilitan crear un puente entre lo perceptivo y lo teórico (Sandoval, 2011), vinculando las representaciones con la teoría, así mismo, fomentan un tipo de relación entre el aprendiz y la Geometría que explota la intuición, la visualización, la exploración, la formulación de hipótesis y la verificación computacional (Falsetti, Rodríguez, Carnelli, & Formica, 2007). Éstas herramientas generan una interacción instantánea y la comunicación es bidireccional, existe un diálogo personalizado entre el alumno y la máquina permitiendo la retroalimentación inmediata a las acciones realizadas, lo que posibilita la reflexión sobre las representaciones obtenidas, la construcción y la validación de conjeturas, así como la construcción de argumentos que apoyan o refutan dichas conjeturas (Gutiérrez, 2005).

Por otro lado, el uso de SGD (GeoGebra, Cabri, etc.) permite el aprendizaje de la Geometría desde una perspectiva activa y desarrolladora, basada en la búsqueda, la experimentación, la exploración, la construcción de representaciones, de tal manera que un cambio de visión en el tratamiento de la Geometría de una forma estática a una en la que las figuras adquieran dinamismo, donde estas se transformen a partir del movimiento de sus puntos o lados, permite una participación más activa y productiva en el planteo de conjeturas para la resolución de situaciones problemáticas, la formulación de hipótesis y la comprobación experimental, todo lo cual tiene una incidencia en el desarrollo del pensamiento reflexivo, crítico y valorativo (Falsetti, Rodríguez, Carnelli, & Formica, 2007; León, 2008; Guerrero, 2010; Díaz, 2011).

La principal ventaja del uso de SGD sobre los materiales didácticos tradicionales (tanto estáticos, como dinámicos) es la facilidad y rapidez con que los estudiantes pueden transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran, utilizando las funciones de arrastre y de animación proporcionadas por la herramienta informática (Larios & González, 2010). Esto da a los estudiantes elementos para la actividad reflexiva, es decir, les da la posibilidad de realizar experimentaciones que les permitan plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado (Guzmán, 1993).

Otra ventaja, no menos importante, es que los SGD producen representaciones diferentes:

representaciones ejecutables[9]. Las representaciones ejecutables hacen ciertas acciones[10] por el sujeto y, por tanto, éste adquiere un nuevo papel, el de explorar, investigar, interpretar lo que visualiza y manipula en la pantalla y así, puede establecer conjeturas para luego validarlas mediante el proceso de reflexión (Sandoval, 2011). La representación sólo toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones conforme a los objetivos de aprendizaje. En éste sentido, Larios (2006a) apunta que después de un momento de observación y exploración el sujeto deberá separarse de la herramienta y enfocar sus esfuerzos cognitivos en considerar la información que le fue presentada por la herramienta y sistematizarla para producir los argumentos deductivos necesarios.

3.3 Uso de modelos geométricos en el marco del pensamiento reflexivo para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría

Gagatsis y Patronis (1990) han realizado investigaciones sobre cómo los modelos geométricos pueden ser usado por los estudiantes y los profesores en un proceso de pensamiento reflexivo para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Afirman que la intuición juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento reflexivo en la actividad matemática de los estudiantes, porque el pensamiento intuitivo precede necesariamente al pensamiento reflexivo y puede ayudar en su evolución, siendo los modelos geométricos de mucha ayuda en esta dirección cuando son usados como modelos de acción[11].

Por otra parte, llegaron a la conclusión de que existen analogías en el trabajo que se realiza frente a situaciones matemáticas por parte de los estudiantes, educadores y matemáticos; con esto logaron establecer las etapas principales de un proceso de pensamiento reflexivo en la actividad matemática:

1. Primeras ideas, intuiciones primarias y concepciones sobre el problema o tema a resolver; se inicia el trabajo con sucesos “locales” o fallas; se comienza a trabajar con imágenes “fragmentadas” y confusas; se hacen observaciones “al

[9] En las *representaciones ejecutables* se exterioriza no sólo la memoria sino diversas capacidades cognitivas, por ejemplo, graficar, hacer operaciones con números, corregir ortografía, gramática (Sandoval, 2011).

[10] Procesan las representaciones (Santillán, 2002, citado por Sandoval, 2011).

[11] Siguiendo la terminología de Brousseau. La construcción de modelos es considerada en el contexto de tres procesos distintos: acción, formulación y validación.

azar".

2. Se reflexiona sobre el tema tratando de entenderlo, así mismo se organiza la nueva experiencia dentro de las estructuras intuitivas que existen previamente; se clasifican las observaciones, analizando el todo en partes, reflexionando en ello, recordando otros ejemplos similares, buscando contrajemplos, cuestionando creencias y concepciones propias.

3. Descubrir y (parcialmente) entender, hallando y/o justificando una regla; descubriendo una explicación para algunos errores, recombinando partes de un todo descompuesto en nuevas partes, interpretando y (parcialmente) reorganizando los nuevos hechos de acuerdo a estructuras previas, "completar" imágenes mentales y derivar un plan de solución o de la prueba; sentir intuitivamente la certeza para el éxito del plan.

4. Introspección; tratar de ver de qué se trata todo esto, así mismo reflexionar sobre el proceso de solución, la lógica de la prueba y sobre las propias estructuras y procesos mentales; revisando los resultados (o conclusiones) dentro de otros problemas o áreas; examinando analogías y estableciendo nuevas cuestiones; analizando toda la situación nuevamente, pero a un nivel más alto; cuestionando nuevamente; cuestionando "cuestionando"; teniendo una disputa epistemológica.

5. Conciencia total; entendiendo el trasfondo lógico involucrado; siendo concientes de las propias estructuras y procesos mentales; expandiendo las viejas estructuras, transformándolas o rechazándolas; reorganización radical de las ideas, posiblemente en nuevos fundamentos; haciendo generalizaciones sensatas y extensiones; construyendo y formulando nuevas teorías.

Así mismo, enfatizan el carácter recursivo de estas etapas: cada una depende fuertemente de todas las etapas anteriores.

De acuerdo a sus experimentos, apuntan que su modelo teórico hace posible distinguir entre "reflexionar" implicando operaciones mentales e "intuiciones primarias". De igual manera, que el pensamiento reflexivo produce un cambio en las estrategias seguidas por el sujeto, habiendo un cambio en el proceso externo de enseñanza-aprendizaje; en contraparte, cuando se opera sin reflexión no existen cambios en ambos.

También concluyen que un modelo geométrico será adecuado para usar en el salón de clases, si primero es usado por los estudiantes como modelo de acción, y aún cuando ellos no incluyen el aspecto socio-cognitivo del proceso de aprendizaje, reconocen su importancia, debido a que es donde los modelos de formulación y validación tienen lugar.

4. OBJETIVOS

En esta propuesta se han fijado dos objetivos, el primero es la estructuración de un modelo del pensamiento reflexivo enfocado en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.

El segundo, es presentar una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Euclidiana a nivel Bachillerato, fundamentada en el uso del pensamiento reflexivo, con actividades diseñadas de tal manera, que los estudiantes son llevados a integrar y movilizar conocimientos, habilidades y actitudes, es decir, son llevados a formar competencias usando como pretexto el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en un ambiente de Geometría Dinámica.

5. METODOLOGÍA

5.1 Sistematización del pensamiento reflexivo enfocado al aprendizaje de la Geometría Euclidiana.

Para establecer las etapas del proceso del pensamiento reflexivo para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana se tomaron como base las etapas del pensamiento reflexivo en general, después se consideraron la fases del proceso de reflexión en la actividad matemática pero orientadas a los procesos o actividades llevados a cabo en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana. Como resultado se llegó al siguiente método:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación*[12] *de las condiciones presentes y experiencia previa.* Esta fase, enfocada al aprendizaje de la Geometría tiene que ver con la visualización interna (percibir con comprensión) y externa (lenguaje geométrico), estas implican leer, comprender e interpretar las representaciones visuales y los diferentes lenguajes geométricos (palabras, símbolos, signos, fórmulas, expresiones, figuras o gráficos), identificar las figuras y sus propiedades por asociación con conocimientos previos.

2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.* Esta fase involucra una interiorización propia del problema al que ha sido enfrentado, comprendiendo y relacionando el significado[13] de los objetos de estudio conocidos con los nuevos, analizando el todo en partes, recordando ejemplos similares.

3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.* Junto con el conocimiento de las condiciones que constituyen los hechos u objetos con los que hay que enfrentarse, surgen las sugerencias[14], conjeturas de posibles modos de acción (usando métodos y técnicas de solución), para lo cual, esta fase

---

[12] En la enseñanza de la Matemática la observación libre debe ir acompañada de la observación provocada. Ya sea con preguntas orales, o con fichas escritas, deben orientarse las observaciones hacia aspectos que no siendo obvios o aparentes pueden tener gran interés, ya que son las observaciones las que motivarán o actuarán de referencia para las posteriores abstracciones de conceptos y análisis de propiedades (Alsina, Fortuny, & Pérez, 1997)

[13] En el sentido que da Dewey a la palabra significar: cuando se conoce con autenticidad los datos existentes y éstos realmente corresponden a la idea sugerida.

[14] La cantidad de ideas o sugerencias que genere el estudiante dependerá mucho de las experiencias con que cuenten, es decir, se dispondrá de mayor número de sugerencias entre más experiencias con los objetos de estudio haya tenido previamente.

implica principalmente manipular, explorar, inferir, seleccionar, deducir, abstraer, simplificar y comparar los objetos geométricos involucrados en la situación, a fin de observar relaciones (no explícitas) entre ellos a partir de sus definiciones y propiedades, reconociendo lo que hay de común o de diferente, hallando y/o justificando una regla, determinando el campo de validez de una propiedad, viendo las variantes bajo las cuales el resultado sigue siendo cierto; para todo esto se hace uso del análisis y síntesis de los datos con el objetivo de establecer un camino a la solución, sintiendo intuitivamente la certeza para el éxito de la solución.

4. *La elaboración racional de la idea o suposición.* Para llegar a una hipótesis, es necesario una secuencialidad, continuidad u ordenamiento de las sugerencias o ideas con coherencia lógica (dimensión lógica del pensamiento reflexivo). En esta fase se da el encadenamiento de ideas, propio del pensamiento reflexivo, donde no se trata de una secuencia sino de una consecuencia de ideas, se trata de desarrollar una relación de ideas entre sí, donde una idea sustenta y está sustentada en otra, partiendo de definiciones y concepciones simples hasta llegar a estructurar un argumento lógico que aclare la situación problemática respondiendo a las condiciones iniciales.

5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.* La fase final es la comprobación por la acción manifiesta para dar una corroboración experimental o teórica a la idea conjetural. En esta fase, se comprueba que los resultados experimentales (basados en el uso del software de Geometría Dinámica) coincidan con los resultados teóricos para poder establecer una conclusión, dependiendo del rigor[15] que se solicite.

---

[15] Haciendo referencia a diferentes niveles de validación matemática llevadas a cabo en una institución de los enseñantes de la Matemática: argumentación, demostración u otras formas de prueba. Para profundizar más en éste tema, se sugiere consultar la obra de Larios (2006b), *"Demostrar es un problema o el problema es demostrar. Reflexiones y propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica",* Querétaro, México: Escuela de Bachilleres, Universidad Autónoma de Querétaro. También, Larios y González (2010), "Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime),* 13(4-I):147-160. Así mismo Chermello & Crippa (2011), "Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?" En M. Agrasar, G. Chemello, Y. Chevallard, A. Crippa, A. Díaz, A. Novembre, y otros, *Enseñanzar matemáticas en la escuela media* (1ª ed., págs. 55-77). Buenos Aires, Argentina: Biblos.

5.2 Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica consta de 17 actividades, cada una se presenta con una hoja de trabajo para el profesor y otra que va llevando al alumno desde la intuición y percepción geométrica hasta el conocimiento matemático siguiendo las fases del modelo de pensamiento reflexivo propuesto en éste documento. Así mismo, para cada actividad se incluye un modelo dinámico que representa una situación problemática diferente que involucra contenidos específicos, estos modelos geométricos están realizados en el software de Geometría Dinámica llamado GeoGebra[16]. Los temas incluidos en las 17 actividades cubren todos los contenidos de matemáticas pertenecientes al curso de Geometría Euclidiana para el nivel Bachillerato en México y están diseñadas para ser utilizadas tanto en la pizarra digital como en los ordenadores de los alumnos, siempre y cuando tengan instalado el software de Geometría Dinámica GeoGebra.

5.3 Los Modelos dinámicos

Los modelos dinámicos son fundamentales para realizar las actividades que se plantean en la secuencia didáctica propuesta, pues éstos ayudan al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión.

El diseño de cada uno de los modelos dinámicos corresponde a una construcción geométrica particular que involucra diferentes objetos geométricos dependiendo de los propósitos propios de cada actividad. La característica de éstos modelos es que son manipulables directamente con el ratón (o algún otro periférico señalador) para modificar su forma durante la exploración, pero no pierden las propiedades geométricas de los objetos matemáticos incluidos. Estas propiedades o relaciones son las que se pretende descubran los estudiantes (esto se retomará más delante, en el diseño de las hojas de trabajo).

Para ejemplificar lo anterior:

La Figura 1, ilustra el modelo dinámico correspondiente a la actividad denominada "Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo", que tomaremos como

[16] El software es de licencia libre y puede ser descargado del sitio web: http://www.geogebra.org/cms/es/download/. La guía de uso se puede obtener del sitio web: http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf.

actividad muestra. Como su nombre lo indica, en la actividad se pretende llegar a la demostración de las bisectrices del triángulo, para lo cual es necesario disponer de un construcción que contenga los elementos involucrados en los conceptos que se van a trabajar. Entonces, el modelo consiste en un triángulo cualquiera donde se representan: las bisectrices, el incentro, los puntos de intersección de las bisectrices con sus correspondientes lados del triángulo, los ángulos que forman las bisectrices con los lados del triángulo y la magnitud correspondiente al ángulo, las magnitudes de los lados del triángulo, las magnitudes de los segmentos resultantes, la circunferencia inscrita en el triángulo; el segmento trazado desde el incentro y perpendicular con cada uno de los lados del triángulo, junto con la magnitud de éste segmento. Cada uno de los objetos representados ha sido identificado debidamente usando lenguaje geométrico.

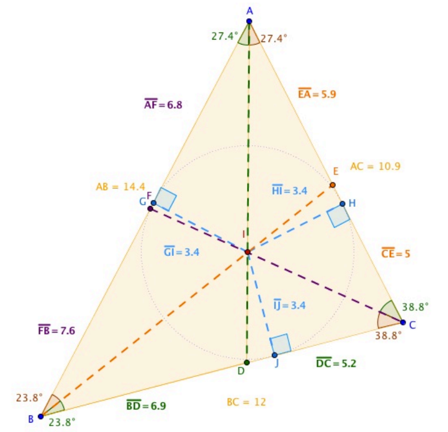


Figura 1: Un triángulo cualquiera y sus bisectrices

El modelo se puede manipular arrastrando cualquiera de los vértices del triángulo para transformar el triángulo manteniendo las propiedades implícitas (ver *Figura 2*), debido a la naturaleza del software.

Si bien, las actividades planteadas en ésta propuesta tienen que desarrollarse usando la tecnología para manipular y explorar los modelos dinámicos, es necesario que los alumnos contesten por escrito las preguntas que se formulan en la hoja de trabajo correspondiente al modelo dinámico.

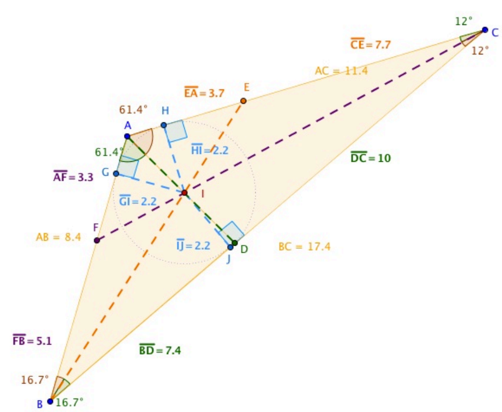


Figura 2: Transformación de un triángulo cualquiera y sus bisectrices (después del arrastre)

5.4 Las hojas de trabajo para el alumno

Las actividades y los modelos dinámicos se complementan entre sí, esto quiere decir que para llevar a cabo una actividad es indispensable que el alumno disponga de ambos.

Como ya se mencionó, las hojas de trabajo van llevando al alumno desde la intuición y percepción geométrica hasta el conocimiento matemático siguiendo las fases del modelo de pensamiento reflexivo[17] propuesto en éste documento.

De manera que, en cada una de las hojas de trabajo se dan algunas sugerencias para que el alumno comience a explorar las situaciones presentadas en el modelo dinámico correspondiente, también se induce una observación orientada hacia aspectos que no siendo obvios o aparentes pueden tener gran interés, ya que éstas observaciones son las que motivan al estudiante o las que usará de referencia para la abstracción de conceptos y análisis de propiedades.

Así mismo, se considera en cada una de ellas una etapa de actuación por parte de los alumnos, es decir, a la observación inicial añaden acciones personales de manipulación, relación entre conocimientos anteriores con los objetos presentados, inferencia, selección, abstracción, comparación y un largo etcétera de acciones que se llevan a cabo en la actividad matemática. Estas acciones los llevarán a conjeturar, interrogarse, descubrir propiedades, deducir, formular hipótesis, etc.

Por añadidura, la actuación que demanda las actividades contribuye tanto al desarrollo de las competencias[18] disciplinares como a las genéricas (que definen el perfil de egreso[19] de los bachilleres), cuando se conduce al estudiante a conocerse y valorarse a sí mismo al enfrentar las dificultades que se le presentan al resolver las actividades planteadas; al ser llevado a tomar decisiones de acuerdo al resultado obtenido; al moverlo para expresar sus ideas utilizando las distintas representaciones geométricas con las que cuenta, cuando se le instiga para que elija el lenguaje adecuado para esto; cuando el alumno es llevado a reflexionar, construyendo hipótesis; cuando es empujado a trabajar de forma colaborativa al aportar sus puntos de vista, sus ideas, sus soluciones para resolver una situación determinada.

---

[17] En adelante, se usará PR como abreviación de Pensamiento Reflexivo.

[18] Para conocer más acerca de las competencias genéricas y disciplinares, consultar "*Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato"* (DOF, 2008)*, también "Las competencias genéricas en el estudiante del bachillerato general* (SEP, 2013).

[19] Para conocer los detalles del perfil de egreso del bachiller consultar *"Documento base del bachillerato general"* (SEP-SEMS, 2011: págs. 30 a 35), también *"Acuerdo 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad"* (DOF, 2008).

Para todo esto, en las hojas de trabajo se dan indicaciones y se formulan preguntas que serán contestadas por escrito por cada uno de los estudiantes.

Para ejemplificar el discurso anterior retomaremos la actividad denominada "Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo" que utilizamos en el apartado 5.3:

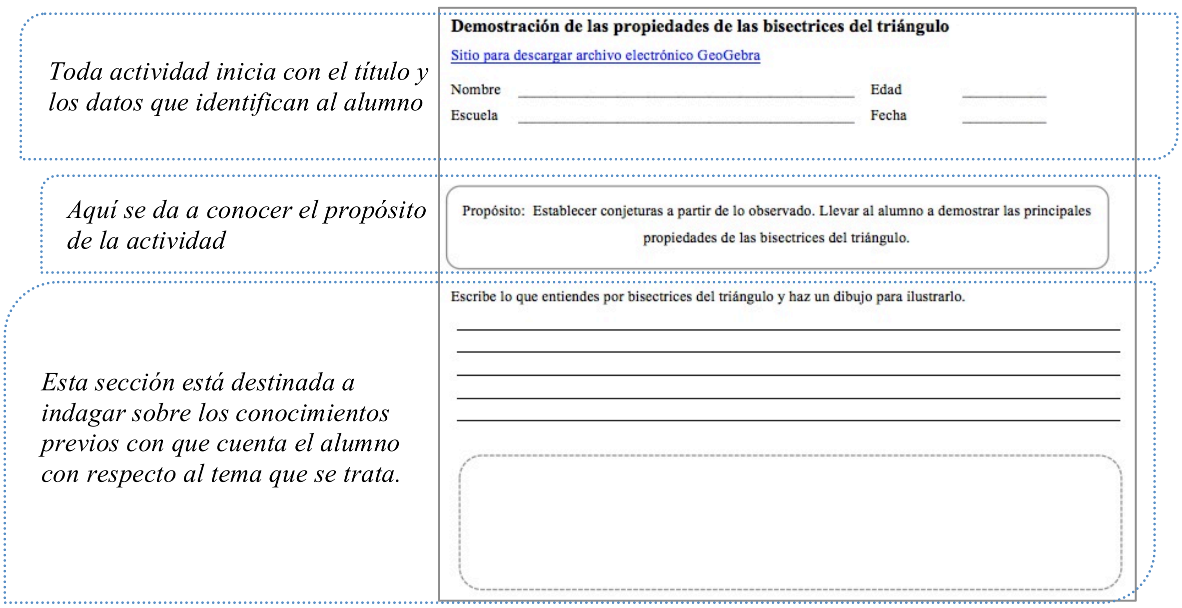


Figura 3: Título e identificación de la actividad muestra

1ª Fase del PR

Tentativa de interpretación a través de la observación guiada: interpretar y comprender la representación visual y el lenguaje geométrico.

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico en GeoGebra que se te proporcionó. Se trata de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$.

Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Bisectriz	Lados adyacentes a la bisectriz	Segmentos del lado opuesto	Triángulos formados por la bisectriz

3ª Fase del PR

Surgimiento de sugerencias: manipular, reconocer, inferir, conjeturar, justificar.

¿Cuál es el atributo o cualidad de la bisectriz de un ángulo? Manipula los puntos A, B o C del modelo dinámico para verificar tu respuesta en diferentes casos.

____

En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de los lados opuestos a cada bisectriz y la razones de los segmentos en que cada bisectriz corta el lado opuesto, observa cómo son éstas razones y escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

____

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: iguales, diferentes o proporcionales.

"La bisectriz divide al lado opuesto en partes ____________________ a los lados adyacentes a ella".

4ª y 5ª Fases del PR

Elaboración racional de la idea y Comprobación de la hipótesis: ordenamiento de ideas con coherencia lógica y demostración.

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad se cumple en todos los casos. Como sugerencia toma una bisectriz, sus lados adyacentes y los segmentos en los que es dividido el lado opuesto por la bisectriz en cuestión. Trabaja con los dos triángulos correspondientes. Observa y determina el área de cada triángulo desde diferentes perspectivas, de tal manera que establezcas una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

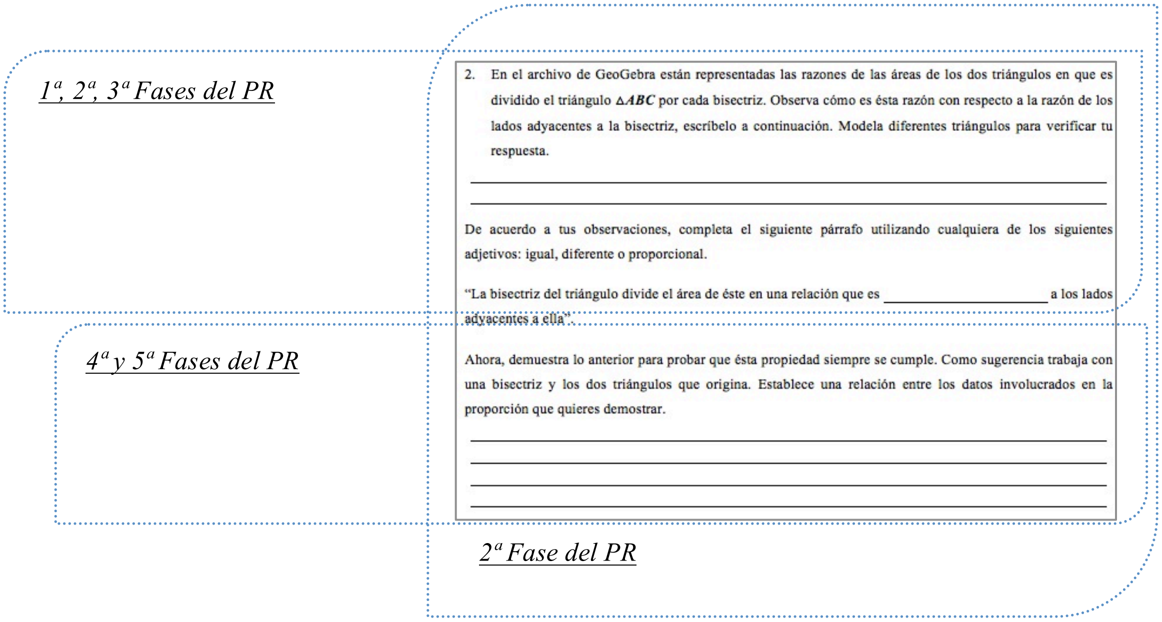
____

2ª Fase del PR

Intelectualización de la situación problemática: interiorización propia del problema, comprendiendo y relacionando el significado de los objetos de estudio conocidos con los nuevos, analizando el todo en partes, recordando ejemplos similares.

Figura 4: Fases del PR en la tarea 1 de la actividad muestra

Cabe recordar aquí, el carácter holístico del pensamiento reflexivo al enfrentar las situaciones problemáticas, por lo que las fases no necesariamente siguen un orden estricto.



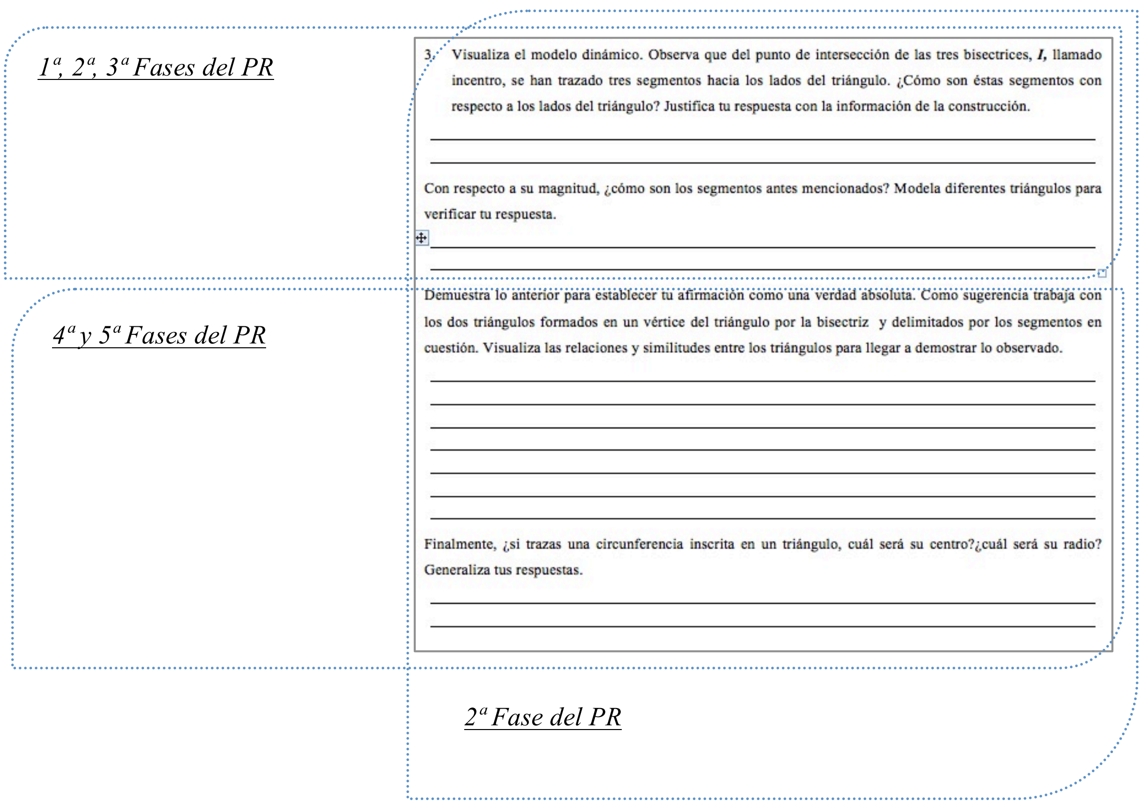
2. En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de las áreas de los dos triángulos en que es dividido el triángulo ΔABC por cada bisectriz. Observa cómo es ésta razón con respecto a la razón de los lados adyacentes a la bisectriz, escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: igual, diferente o proporcional.

"La bisectriz del triángulo divide el área de éste en una relación que es ______ a los lados adyacentes a ella".

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad siempre se cumple. Como sugerencia trabaja con una bisectriz y los dos triángulos que origina. Establece una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

Figura 5: Fases del PR de la terea 2 de la actividad muestra



3. Visualiza el modelo dinámico. Observa que del punto de intersección de las tres bisectrices, I, llamado incentro, se han trazado tres segmentos hacia los lados del triángulo. ¿Cómo son éstas segmentos con respecto a los lados del triángulo? Justifica tu respuesta con la información de la construcción.

Con respecto a su magnitud, ¿cómo son los segmentos antes mencionados? Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Demuestra lo anterior para establecer tu afirmación como una verdad absoluta. Como sugerencia trabaja con los dos triángulos formados en un vértice del triángulo por la bisectriz y delimitados por los segmentos en cuestión. Visualiza las relaciones y similitudes entre los triángulos para llegar a demostrar lo observado.

Finalmente, ¿si trazas una circunferencia inscrita en un triángulo, cuál será su centro?¿cuál será su radio? Generaliza tus respuestas.

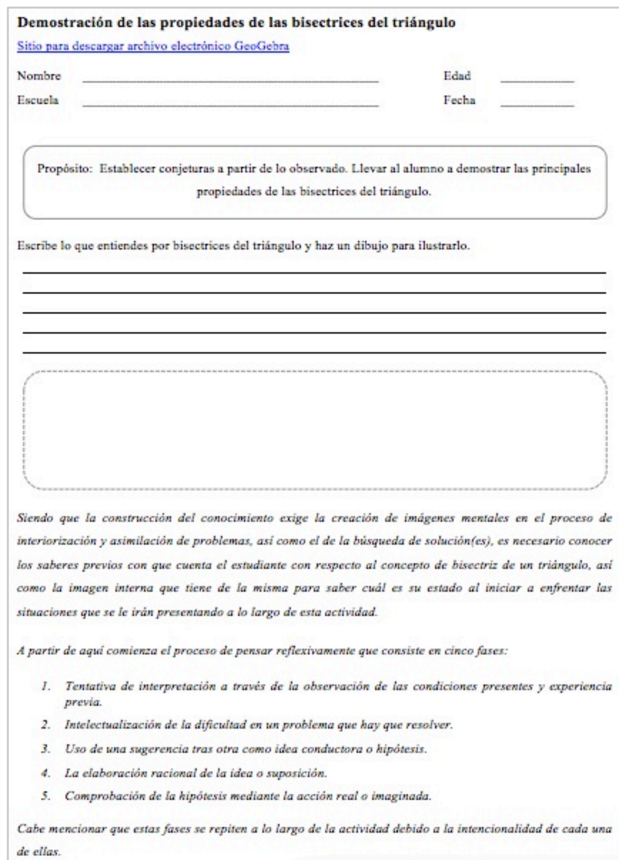
Figura 6: Fases del PR de la terea 3 de la actividad muestra

5.5 Las hojas de trabajo del profesor

Las hojas de trabajo del profesor son, en esencia, las mismas que las de los alumnos. La única diferencia radica en que a éstas se les han agregado comentarios y/o sugerencias dirigidas al profesor que le advierten del propósito o intención de la tarea a desarrollar. Con la finalidad de identificar los comentarios y/o sugerencias mencionadas, se les ha dado formato con fuente cursiva.

Para ejemplificar lo anterior, retomaremos nuevamente la actividad designada "Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo" que utilizamos en los apartados 5.3 y 5.4:

Al inicio de todas las actividades se mencionan, brevemente, las fases del PR a manera de recordatorio para el docente (ver Figura 7), ya que desde su perspectiva, la principal intención de las actividades es el aprendizaje de la Geometría, más allá de profundizar en cómo se va desarrollando o usando el PR en cada tarea de la actividad. Si el profesor quiere escudriñar el desarrollo del PR se le refiere a éste documento.



Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo

Sitio para descargar archivo electrónico GeoGebra

Nombre ______________________ Edad ________

Escuela ______________________ Fecha ________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a demostrar las principales propiedades de las bisectrices del triángulo.

Escribe lo que entiendes por bisectrices del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto al concepto de bisectriz de un triángulo, así como la imagen interna que tiene de la misma para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

Figura 7: Comentarios de PR a docentes en actividad muestra

En cada una de las tareas se da a conocer la intención de la misma (ver Figura 8*,* Figura 10 *y* Figura 9) así mismo, en algunos apartados se muestra una respuesta, esto no quiere decir que es exáctamente como deba presentarla el alumno, solamente es una idea para el profesor, ya que en algunos casos la respuesta no será única.

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico en GeoGebra que se te proporcionó. Se trata de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$.

Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Bisectriz	Lados adyacentes a la bisectriz	Segmentos del lado opuesto	Triángulos formados por la bisectriz

Lo que se pretende es la identificación, comprensión y uso del lenguaje geométrico por parte del alumno.

¿Cuál es el atributo o cualidad de la bisectriz de un ángulo? Manipula los puntos ***A, B*** o ***C*** del modelo dinámico para verificar tu respuesta en diferentes casos.

Que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Figura 8: Comentarios y respuestas de la tarea 1 de la actividad muestra

2. En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de los lados opuestos a cada bisectriz y la razones de los segmentos en que cada bisectriz corta el lado opuesto, observa cómo son éstas razones y escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Las razones son iguales.

El propósito es llevar al alumno a verificar la propiedad implícita.

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: iguales, diferentes o proporcionales.

"La bisectriz divide al lado opuesto en partes *proporcionales* a los lados adyacentes a ella".

La intención es que el alumno utilice un adjetivo que defina exactamente la relación, con conocimiento de causa de acuerdo a lo que ha observado.

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad se cumple en todos los casos. Como sugerencia toma una bisectriz, sus lados adyacentes y los segmentos en los que es dividido el lado opuesto por la bisectriz en cuestión. Trabaja con los dos triángulos correspondientes. Observa y determina el área de cada triángulo desde diferentes perspectivas, de tal manera que establezcas una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

área $\triangle ABD = (\overline{BD} * \overline{AD})/2 = (\overline{AB} * \overline{AD})/2$, *esto implica que* $\overline{AB}/\overline{BD} = 2\overline{AD}/2\overline{AD} = 1$. *área*$\triangle AD = (\overline{DC} * \overline{AD})/2 = (\overline{AC} * \overline{AD})/2$, *esto implica* $\overline{AC}/\overline{DC} = 2\overline{AD}/2\overline{AD} = 1$. *De aquí que* $\overline{AB}/\overline{BD} = \overline{AC}/\overline{DC}$ ∎.

Figura 9: Comentarios y respuestas de la tarea 2 de la actividad muestra

3. Visualiza el modelo dinámico. Observa que del punto de intersección de las tres bisectrices, ***I***, llamado incentro, se han trazado tres segmentos hacia los lados del triángulo. ¿Cómo son éstas segmentos con respecto a los lados del triángulo? Justifica tu respuesta con la información de la construcción.

Son perpendiculares porque su pie forma un ángulo recto con el lado del triángulo que interseca.

Con respecto a su magnitud, ¿cómo son los segmentos antes mencionados? Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Son de igual magnitud.

Demuestra lo anterior para establecer tu afirmación como una verdad absoluta. Como sugerencia trabaja con los dos triángulos formados en un vértice del triángulo por la bisectriz y delimitados por los segmentos en cuestión. Visualiza las relaciones y similitudes entre los triángulos para llegar a demostrar lo observado.

Considerando los triángulos $\triangle AIG$ *y* $\triangle AIH$, *tenemos que* $\angle GAI = \angle IAH$ *por ser* $\overline{AI}$ *bisectriz del* $\angle GAH$. *Se sabe que* $\angle IGA$ *es recto, ya que* $\overline{IG} \perp \overline{AB}$, *de manera homóloga* ⊾$IHA$, *por lo tanto* ⊾$IGA$ = ⊾IHA. *Como* $\overline{AI}$ *es lado común a los dos triángulos* $\triangle AIG$ *y* $\triangle AIH$, *se concluye que se trata de triángulos congruentes por el criterio ALA. Por esta congruencia se demuestra que* $\overline{IG} = \overline{IH}$ ∎.

Finalmente, ¿si trazas una circunferencia inscrita en un triángulo, cuál será su centro?¿cuál será su radio? Generaliza tus respuestas.

El centro de la circunferencia inscrita en el triángulo será el punto de intersección de las bisectrices, su radio será la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las bisectrices hasta cualquiera de los lados del triángulo.

Se hace hincapié en la abstracción para que se deje de lado la particularización de los conceptos.

Figura 10: Comentarios y respuestas de la tarea 3 de la actividad muestra

6. ACTIVIDADES

6.1 Temas que se exploran

En la tabla 1, se presenta la relación entre las actividades que se proponen con el currículo del nivel bachillerato. Aún cuando las actividades están numeradas, no implica que deben realizarse en este orden. El profesor puede organizarlas como mejor convenga al plan de trabajo que quiera desarrollar con los alumnos.

Tabla 1: Relación entre las actividades propuestas y el currículo del nivel bachillerato

Contenidos curriculares[20]	Actividades propuestas
Trazos geométricos	
1. Punto y segmento. 2. Rayo (semirrecta) y recta. 3. Mediatriz de un segmento. 4. Definición de ángulo y triángulo. 5. Clasificación de ángulos. 6. Suma de los ángulos interiores de un triángulo. 7. Bisectriz de un ángulo. 8. Paralelas. 9. División de un segmento en partes iguales. 10. Perpendicular de una recta.	1. Explorando el punto medio de un segmento. 2. Clasificación de ángulos. 3. Definición de ángulo. 4. Explorando segmentos iguales y proporcionales. 5. Explorando rectas paralelas. 6. Teorema de perpendiculares.
Triángulo	
11. Bisectriz, altura, mediana y mediatriz de un triángulo cualquiera. 12. Altura del triángulo. 13. Concepto de congruencia. 14. Congruencia de triángulos. Postulados. 15. Demostraciones. 16. Razones y proporciones. 17. Concepto de semejanza. 18. Semejanza de triángulos. Postulados.	7. Clasificación de triángulos. 8. Definición de triángulo. 9. Relación entre lados y ángulos del triángulo. 10. Demostración de las propiedades de las bisectrices de un triángulo. 11. Demostración de las propiedades de las medianas de un triángulo. 12. Explorando las alturas del triángulo. 13. Semejanza de triángulos.
Polígonos	
19. Clasificación de polígonos. 20. Teoremas acerca de polígonos.	14. Cuadriláteros.
El círculo	
21. Circunferencia: radio, diámetro, tangente, rectas secantes. 22. Tipos de ángulos dentro de la circunferencia. 23. Teoremas en la circunferencia.	15. Cuerdas y arcos de la circunferencia. 16. Circunferencia, tangentes y secantes. 17. Ángulos en la circunferencia.

[20] Plan curricular para nivel bachillerato de la Escuela de Bachilleres de la UAQ. Para más detalles consultar el *Programa de Matemáticas III. Plan de Estudios PRE09, (UAQ, 2010).*

6.2 Listado de Modelos dinámicos y hojas de trabajo

1. Explorando el punto medio de un segmento.
2. Clasificación de ángulos.
3. Definición de ángulo.
4. Explorando segmentos iguales y proporcionales.
5. Explorando rectas paralelas.
6. Teoremas de perpendiculares.
7. Clasificación de triángulos.
8. Definición de triángulo.
9. Relación entre lados y ángulos del triángulo.
10. Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo.
11. Demostración de las propiedades de las medianas del triángulo.
12. Explorando las alturas del triángulo.
13. Semejanza entre triángulos.
14. Cuadriláteros.
15. Cuerdas y arcos en la circunferencia.
16. Circunferencia, tangentes y secantes.
17. Ángulos en la circunferencia.

Explorando el punto medio de un segmento

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a comprender los objetos necesarios en la construcción del punto medio de un segmento. Conducir al alumno en la demostración del punto medio de un segmento.

Escribe lo que entiendes por punto medio de un segmento y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que lo conforman: recta $\boldsymbol{a}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ perteneciente a la recta $\boldsymbol{a}$, circunferencia $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ con centros en los puntos $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ respectivamente, puntos de intersección de las dos circunferencias, $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$; segmento $\overline{\boldsymbol{IJ}}$ que intersecta al segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ en el punto $\boldsymbol{K}$, y segmento $\overline{\boldsymbol{GH}}$ que representa el diámetro de las circunferencias $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$.

Manipula el segmento $\overline{\boldsymbol{GH}}$. Observa lo que sucede. ¿Por qué las circunferencias de apoyo en la construcción del punto medio de un segmento deben ser de igual diámetro?

¿A qué es equivalente la distancia del centro de cada circunferencia al punto de intersección de ambas circunferencias?

Mueve el punto $\boldsymbol{G}$ o $\boldsymbol{H}$ para ajustar el diámetro de las circunferencias de tal manera que la circunferencia $\boldsymbol{c}$

pase por el punto $\boldsymbol{D}$ y la circunferencia $\boldsymbol{d}$ pase por el punto $\boldsymbol{C}$. Observa el triángulo que forman los puntos ***I, C y D.*** ¿Cómo son sus tres lados?¿De qué tipo de triángulo se trata?

____

____

Si $\overline{\boldsymbol{IK}}$ es la altura del triángulo $\triangle\boldsymbol{ICD}$, es decir es la perpendicular al lado $\overline{\boldsymbol{CD}}$ que pasa por el vértice $\boldsymbol{I}$ del triángulo $\triangle\boldsymbol{ICD}$. ¿Cómo son los ángulos $\angle\boldsymbol{IKC}$ y $\angle\boldsymbol{IKD}$? ¿A cuánto equivale cada ángulo? Con esta información, ¿qué tipo de triángulos son los triángulos $\triangle\boldsymbol{ICK}$ y $\triangle\boldsymbol{IKD}$?

____

____

Ahora, de acuerdo a la información que tienes de los dos triángulos $\triangle\boldsymbol{ICK}$ y $\triangle\boldsymbol{IKD}$, escribe un argumento para deducir que $\overline{\boldsymbol{CK}}$ es igual a $\overline{\boldsymbol{KD}}$.

____

____

____

____

____

Resume las deducciones que se hicieron para demostrar que $\boldsymbol{K}$ es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$, partiendo de lo que claramente conoces. Asegúrate de seguir una secuencia coherente en los argumentos, donde una idea te lleve a la otra con claridad.

Sea el triángulo $\triangle\boldsymbol{ICD}$ *un triángulo …*____

____

____

____

____

____

____

____

____

… por lo tanto $\boldsymbol{K}$ *es el punto medio del segmento* $\overline{\boldsymbol{CD}}$. ■

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando el PM de un segmento_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Explorando el punto medio de un segmento

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a comprender los objetos necesarios en la construcción del punto medio de un segmento. Conducir al alumno en la demostración del punto medio de un segmento.

Escribe lo que entiendes por punto medio de un segmento y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

La idea de esta primera consigna es conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante, con el propósito de determinar que tan sólido tiene el concepto de punto medio, así como el uso que tiene del lenguaje geométrico.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que lo conforman: recta $\boldsymbol{a}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ perteneciente a la recta $\boldsymbol{a}$, circunferencia $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ con centros en los puntos $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ respectivamente, puntos de intersección de las dos circunferencias, $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$; segmento $\overline{\boldsymbol{IJ}}$ que intersecta al segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$ en el punto $\boldsymbol{K}$, y segmento $\overline{\boldsymbol{GH}}$

que representa el diámetro de las circunferencias $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$.

Lo que se pretende en este apartado es ayudar a desarrollar la habilidad de visualización y de análisis de la construcción en el estudiante.

Manipula el segmento $\overline{\boldsymbol{GH}}$. Observa lo que sucede. ¿Por qué las circunferencias de apoyo en la construcción del punto medio de un segmento deben ser de igual diámetro?

¿A qué es equivalente la distancia del centro de cada circunferencia al punto de intersección de ambas circunferencias?

Aquí la intención es conducir al alumno a generalizar magnitudes haciendo uso de los radios de las circunferencias.

Mueve el punto $\boldsymbol{G}$ o $\boldsymbol{H}$ para ajustar el diámetro de las circunferencias de tal manera que la circunferencia $\boldsymbol{c}$ pase por el punto $\boldsymbol{D}$ y la circunferencia $\boldsymbol{d}$ pase por el punto $\boldsymbol{C}$. Observa el triángulo que forman los puntos ***I, C y D.*** ¿Cómo son sus tres lados?¿De qué tipo de triángulo se trata?

Se trata de llevar al alumno a establecer conjeturas a partir de lo que se conoce para llegar a la demostración del punto medio de un segmento. Se procede de esta manera con la intención de que los estudiantes desarrollen su pensamiento deductivo.

Si $\overline{\boldsymbol{IK}}$ es la altura del triángulo $\triangle \boldsymbol{ICD}$, es decir es la perpendicular al lado $\overline{\boldsymbol{CD}}$ que pasa por el vértice $\boldsymbol{I}$ del triángulo $\triangle \boldsymbol{ICD}$. ¿Cómo son los ángulos $\angle \boldsymbol{IKC}$ y $\angle \boldsymbol{IKD}$? ¿A cuánto equivale cada ángulo? Con esta información, ¿qué tipo de triángulos son los triángulos $\triangle \boldsymbol{ICK}$ y $\triangle \boldsymbol{IKD}$?

Ahora, de acuerdo a la información que tienes de los dos triángulos $\triangle \boldsymbol{ICK}$ y $\triangle \boldsymbol{IKD}$, escribe un argumento para deducir que $\overline{\boldsymbol{CK}}$ es igual a $\overline{\boldsymbol{KD}}$.

Aquí se invita al alumno a usar razonamientos deductivos con inferencias lógicas.

Resume las deducciones que se hicieron para demostrar que $\boldsymbol{K}$ es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$, partiendo de lo que claramente conoces. Asegúrate de seguir una secuencia coherente en los argumentos, donde una idea te lleve a la otra con claridad.

Sea el triángulo $\triangle \boldsymbol{ICD}$ un triángulo ...

... por lo tanto $\boldsymbol{K}$ es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$. ■

Se pide a los estudiantes que escriban la secuencia de argumentos que llevaron a demostrar que $\boldsymbol{K}$ es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{CD}}$, con la finalidad de que examinen el camino seguido y reconozcan cómo van surgiendo los razonamientos con inferencias lógicas hacia la demostración que se persigue. Se recomienda aprovechar este ejercicio para insistir en la importancia del uso adecuado del lenguaje geométrico, ya que esto permite claridad en la comunicación.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando el PM de un segmento_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

*Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo: **Explorando el PM de un segmento_##.ggb**, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.*

Clasificación de ángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: A través de la manipulación de un modelo dinámico, inducir al alumno a comprender la generación de las diferentes clases de ángulos, así como la suma y resta entre ángulos.

De acuerdo a lo que sabes en este momento, escribe de qué depende la magnitud de los ángulos. Haz un dibujo de dos ángulos, uno mayor que el otro, identifícalos como tales.

____

____

____

____

1. La clasificación de los ángulos es como sigue:

    - **Recto:** ángulo cuya magnitud es igual a 90º.
    - **Agudo:** ángulo menor que un ángulo recto.
    - **Obtuso:** ángulo mayor que un recto pero menor que dos.
    - **De lados colineales o Llano:** ángulo donde uno de sus lados es una prolongación del otro y están por lo tanto en línea recta.

2. Visualiza la construcción que se te proporcionó en el archivo electrónico. Ahora, *gira* la recta $\boldsymbol{r}$ sobre el punto $\boldsymbol{O}$ de la posición $\boldsymbol{AO}$ a la posición $\boldsymbol{OB}$ en sentido antihorario. En este movimiento $\boldsymbol{r}$ describe o engendra el ángulo agudo $\angle \boldsymbol{AOB}$, cuya magnitud es mayor o menor según sea mayor o menor la *rotación* necesaria para engendrarlo.

Sabiendo lo anterior y de acuerdo a la clasificación de los ángulos, completa la siguiente tabla. La posición final de cada caso se consigue haciendo el giro en sentido antihorario.

Posición inicial de r	Posición final de r	Ángulo engendrado	Clase de ángulo engendrado	Magnitud relacionada con el Recto
OA	***OB***	***∠AOB***	***Agudo***	***< Recto***
	OC			
	OD			
	OE			
	OF			
	OG			

Discute con tus compañeros todos los valores que puede tomar los ángulos agudos y obtusos.

3. Si el ángulo ***∠AOD*** se considera engendrado por la rotación de ***OR*** alrededor del punto ***O*** desde la posición ***OA*** hasta la posición ***OD***, movimiento en que los ángulos ***∠AOB, ∠BOC, ∠COD*** son sucesivamente engendrados por la misma recta, decimos que el ángulo ***∠AOD*** es la suma de los ángulos ***∠AOB y ∠BOC***;

   esto es, ***∠AOC = ∠AOB + ∠BOC***
   de donde, ***∠AOC – ∠BOC = ∠AOB***

Ahora, siguiendo este mismo razonamiento, completa la siguiente tabla dando tres opciones para formar el ángulo solicitado, ya sea sumando o restando ángulos.

Ángulo Solicitado	Maneras diferentes de obtener el ángulo solicitado		
	1	***2***	***3***
∠AOB			
∠AOD			
∠AOF			
∠BOF			

Compara tus respuestas con las respuestas de tus compañeros.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Clasificación de ángulos_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Clasificación de ángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: A través de la manipulación de un modelo dinámico, inducir al alumno a comprender la generación de las diferentes clases de ángulos, así como la suma y resta entre ángulos.

De acuerdo a lo que sabes en este momento, escribe de qué depende la magnitud de los ángulos. Haz un dibujo de dos ángulos, uno mayor que el otro, identifícalos como tales.

____

____

____

____

La idea de esta primera consigna es conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto a lo que determina la magnitud de los ángulos así como la imagen interna que posee de la representación de un par de ángulos.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. La clasificación de los ángulos es como sigue:

- **Recto:** ángulo cuya magnitud es igual a 90º.
- **Agudo:** ángulo menor que un ángulo recto.
- **Obtuso:** ángulo mayor que un recto pero menor que dos.
- **De lados colineales o Llano:** ángulo donde uno de sus lados es una prolongación del otro y están por lo tanto en línea recta.

Se comienza esta actividad proporcionando a los estudiantes la clasificación de los ángulos, sin embargo sería conveniente aprovechar y pedir a los alumnos que investiguen tal clasificación antes de iniciar con la actividad.

2. Visualiza la construcción que se te proporcionó en el archivo electrónico. Ahora, *gira* la recta ***r*** sobre el punto ***O*** de la posición ***AO*** a la posición ***OB*** en sentido antihorario. En este movimiento ***r*** describe o engendra el ángulo agudo $\angle AOB$, cuya magnitud es mayor o menor según sea mayor o menor la *rotación* necesaria para engendrarlo.

Con esta práctica se pretende que el estudiante sea consciente de lo que determina la magnitud de un ángulo: la amplitud de los rayos que lo delimitan.

Sabiendo lo anterior y de acuerdo a la clasificación de los ángulos, completa la siguiente tabla. La posición final de cada caso se consigue haciendo el giro en sentido antihorario.

Posición inicial de r	Posición final de r	Ángulo engendrado	Clase de ángulo engendrado	Magnitud relacionada con el Recto
OA	***OB***	$\angle AOB$	***Agudo***	***< Recto***
	OC			
	OD			
	OE			
	OF			
	OG			

La idea con esta tarea es, que el estudiante relacione la magnitud el ángulo recto con el resto de los ángulos.

Discute con tus compañeros todos los valores que puede tomar los ángulos agudos y obtusos.

Se recomienda aprovechar esta dinámica para acercar al estudiante al concepto de límite.

3. Si el ángulo $\angle AOD$ se considera engendrado por la rotación de ***OR*** alrededor del punto ***O*** desde la posición ***OA*** hasta la posición ***OD***, movimiento en que los ángulos $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ son sucesivamente engendrados por la misma recta, decimos que el ángulo $\angle AOD$ es la suma de los ángulos $\angle AOB$ ***y*** $\angle BOC$;

   esto es, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
   de donde, $\angle AOC - \angle BOC = \angle AOB$

Ahora, siguiendo este mismo razonamiento, completa la siguiente tabla dando tres opciones para formar el ángulo solicitado, ya sea sumando o restando ángulos.

Ángulo Solicitado	Maneras diferentes de obtener el ángulo solicitado		
	1	***2***	***3***
∠AOB			
∠AOD			
∠AOF			
∠BOF			

Compara tus respuestas con las respuestas de tus compañeros.

La finalidad de esta actividad es darle al estudiante libertad para que use su creatividad al obtener el ángulo solicitado. Se pide la comparación entre pares con el objetivo de que el alumno se percate que hay infinidad de combinaciones para obtener el mismo resultado, al menos en este caso.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Clasificación de ángulos_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo: ***Clasificación de ángulos_##.ggb****, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.*

Definición de ángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los elementos que definen un ángulo. Elaborar una definición de ángulo individual y colectiva.

Escribe lo que entiendes por ángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. Observa la construcción del archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica y escribe los objetos representados:

Puntos:

Rayos:

Segmentos:

Ángulos

¿Cuáles son los lados del ángulo?

¿Cuál es le vértice del ángulo?

Manipula la construcción arrastrando cada punto. Observa lo que cambia y lo que permanece invariante al arrastrar cada punto, contesta lo siguiente:

¿Qué se afecta al arrastrar los puntos ***a*** y ***b***?

¿Qué se afecta al arrastrar los puntos ***A*** y ***B***?

Generaliza lo que determina la magnitud de cualquier ángulo.

¿Existe alguna diferencia entre el ángulo $\angle \boldsymbol{aOb}$ y el $\angle \boldsymbol{AOB}$? ¿Por qué?

¿Cuáles son los elementos esenciales para formar un ángulo?

Tomando en cuenta los objetos esenciales para formar un ángulo, escribe una definición de ángulo en tus propias palabras.

Ahora, junto con el resto del grupo se redactará una definición en la que todos estén de acuerdo. Anótala en las siguientes líneas para compararla con tu propia definición.

Finalmente guarda tu archivo electrónico de GeoGebra en la computadora. Nómbralo de la siguiente manera: **Definición de ángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Definición de ángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ________________________________ Edad __________

Escuela ________________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los elementos que definen un ángulo. Elaborar una definición de ángulo individual y colectiva.

Escribe lo que entiendes por ángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

La idea de esta primera consigna es conocer la noción de ángulo con que cuenta el estudiante previo a esta actividad, lo que será interesante contrastar con el concepto que construirá al finalizar la actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Observa la construcción del archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica y escribe los objetos representados:

Puntos: ________________________________

Rayos: ________________________________

Segmentos:

Ángulos

¿Cuáles son los lados del ángulo?

¿Cuál es le vértice del ángulo?

La intención de proponer esta observación guiada es para que el alumno vaya desarrollando su habilidad de visualización.

Manipula la construcción arrastrando cada punto. Observa lo que cambia y lo que permanece invariante al arrastrar cada punto, contesta lo siguiente:

¿Qué se afecta al arrastrar los puntos ***a*** y ***b***?

¿Qué se afecta al arrastrar los puntos ***A*** y ***B***?

Generaliza lo que determina la magnitud de cualquier ángulo.

¿Existe alguna diferencia entre el ángulo $\angle \boldsymbol{aOb}$ y el $\angle \boldsymbol{AOB}$? ¿Por qué?

¿Cuáles son los elementos esenciales para formar un ángulo?

La secuencia de preguntas hasta este punto tienen la finalidad de llevar al alumno a ganar precisión en su definición.

Tomando en cuenta los objetos esenciales para formar un ángulo, escribe una definición de ángulo en tus propias palabras.

Ahora, junto con el resto del grupo se redactará una definición en la que todos estén de acuerdo. Anótala en las siguientes líneas para compararla con tu propia definición.

Aquí se recomienda señalar la importancia que tiene la validación de los conceptos ante otros individuos, ya que da al conocimiento un estatus mayor.

Finalmente guarda tu archivo electrónico de GeoGebra en la computadora. Nómbralo de la siguiente manera: **Definición de ángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo: Definición de ángulo_##.ggb, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.

Explorando segmentos iguales y proporcionales

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Acercar al alumno a los teoremas sobre segmentos iguales y sobre segmentos proporcionales.

Escribe lo que entiendes por segmentos iguales y segmentos proporcionales. Haz un dibujo que los represente.

____

____

____

____

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que lo conforman, escríbelo a continuación:

Puntos: ____

Segmentos: ____

Rayos: ____

Ángulos: ____

Las rectas ***a, b, c*** y ***d*** son paralelas que cortan a las rectas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r_1}$. Se han trazado en una de ellas segmentos iguales, cuya magnitud se puede variar arrastrando el punto ***S*** o ***T*** del segmento $\overline{\boldsymbol{ST}}$ (verifícalo). Las rectas ***a, b, c*** y ***d*** cortan a la segunda recta en segmentos $\overline{\boldsymbol{A_1B_1}}$, $\overline{\boldsymbol{B_1C_1}}$, $\overline{\boldsymbol{C_1D_1}}$. ¿Cómo son éstos segmentos entre sí?

____

Arrastra cualquiera de los puntos $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O_1}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{A}$. Explora tantos casos como puedas. Ahora arrastra o traslada el punto $\boldsymbol{O_1}$ hasta hacerlo coincidir con el punto $\boldsymbol{O}$, a continuación manipula el punto $\boldsymbol{A_1}$. ¿Se mantiene la afirmación que hiciste anteriormente en todos los casos?

____

Completa el siguiente párrafo con tus conjeturas.

Si en una recta trazamos varios segmentos ________________________ y a través de sus extremos trazamos rectas ________________________ que intersecan la segunda recta, entonces ellas cortarán en la segunda recta segmentos________________________.

2. Como puedes apreciar, al coincidir el punto $\boldsymbol{O}$ con el $\boldsymbol{O_1}$ se han formado varios triángulos. ¿Cómo son los triángulos entre sí? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____

Ahora, calcula la proporción de un segmento de $\boldsymbol{r}$ con su correspondiente de $\boldsymbol{r_1}$, así como la proporción entre dos paralelas consecutivas.

Triángulo	Segmentos correspondientes	Razón o proporción
$\triangle \boldsymbol{O_1AA_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1A}}/\overline{\boldsymbol{O_1A_1}}$	
$\triangle \boldsymbol{O_1BB_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1B}}/\overline{\boldsymbol{O_1B_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AA_1}}/\overline{\boldsymbol{BB_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{A_1B_1}}$	
$\triangle \boldsymbol{O_1CC_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1C}}/\overline{\boldsymbol{O_1C_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{BB_1}}/\overline{\boldsymbol{CC_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{A_1C_1}}$	

Completa el siguiente párrafo con tus conjeturas.

Las rectas ________________________ que intersecan los lados del ángulo cortan en ellos segmentos ________________________.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando segmentos iguales y proporcionales_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Explorando segmentos iguales y proporcionales

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Acercar al alumno a los teoremas sobre segmentos iguales y sobre segmentos proporcionales.

Escribe lo que entiendes por segmentos iguales y segmentos proporcionales. Haz un dibujo que los represente.

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto a los conceptos de segmentos iguales y segmentos proporcionales así como la imagen interna que tiene de los mismos para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que lo conforman, escríbelo a continuación:

Puntos: ____

Segmentos: ____

Rayos: ____

Ángulos: ____

El propósito de este listado es atraer la atención del estudiante en los diferentes objetos que componen el modelo geométrico, a fin de que se apropie de la situación, trate de entenderla y analice las partes del todo.

Las rectas ***a, b, c*** y ***d*** son paralelas que cortan a las rectas ***r*** y r_1. Se han trazado en una de ellas segmentos iguales, cuya magnitud se puede variar arrastrando el punto ***S*** o ***T*** del segmento $\overline{ST}$ (verifícalo). Las rectas ***a, b, c*** y ***d*** cortan a la segunda recta en segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$. ¿Cómo son éstos segmentos entre sí?

____

Se inicia determinando los elementos fundamentales e inamovibles de esta situación, es decir se fija el punto de partida y las reglas de la situación.

Arrastra cualquiera de los puntos O, O_1, P, P_1, A. Explora tantos casos como puedas. Ahora arrastra o traslada el punto O_1 hasta hacerlo coincidir con el punto O, a continuación manipula el punto A_1. ¿Se mantiene la afirmación que hiciste anteriormente en todos los casos?

____

Se pretende que a través de la generación de diferentes casos y de la observación el alumno identifique las regularidades que se mantienen en los objetos involucrados en la situación.

Completa el siguiente párrafo con tus conjeturas.

Si en una recta trazamos varios segmentos ________________________ y a través de sus extremos trazamos rectas ________________________ que intersecan la segunda recta, entonces ellas cortarán en la segunda recta segmentos________________________.

La idea es que el estudiante complete con sus conjeturas un párrafo integrador de las actuaciones que ha llevado a cabo, pero con conocimiento de causa.

2. Como puedes apreciar, al coincidir el punto O con el O_1 se han formado varios triángulos. ¿Cómo son los triángulos entre sí? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

____

La intención es conducir la atención del alumno hacia la semejanza de los triángulos y conocer qué argumentos usará en la justificación de su respuesta.

Ahora, calcula la proporción de un segmento de ***r*** con su correspondiente de $\boldsymbol{r_1}$, así como la proporción entre dos paralelas consecutivas.

Triángulo	Segmentos correspondientes	Razón o proporción
$\triangle \boldsymbol{O_1AA_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1A}}/\overline{\boldsymbol{O_1A_1}}$	
$\triangle \boldsymbol{O_1BB_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1B}}/\overline{\boldsymbol{O_1B_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AA_1}}/\overline{\boldsymbol{BB_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{A_1B_1}}$	
$\triangle \boldsymbol{O_1CC_1}$	$\overline{\boldsymbol{O_1C}}/\overline{\boldsymbol{O_1C_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{BB_1}}/\overline{\boldsymbol{CC_1}}$	
	$\overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{A_1C_1}}$	

Aquí, el objetivo es que el estudiante descubra la proporcionalidad de los segmentos relacionados uno a uno, tal descubrimiento no es más que la antesala al teorema de Tales.

Completa el siguiente párrafo con tus conjeturas.

Las rectas _________________________ que intersecan los lados del ángulo cortan en ellos segmentos _________________________.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando segmentos iguales y proporcionales_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se solicita al estudiante guardar su archivo electrónico en la computadora con el nombre ***Explorando segmentos iguales y proporcionales_##.ggb****, donde ## sustituye el número de lista correspondiente.*

Explorando rectas paralelas

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________________ Edad __________

Escuela ______________________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir las propiedades de las paralelas. Llevar al alumno a comprender las relaciones entre los ángulos resultados de la intersección de dos paralelas por una tercer recta. Conducir al alumno a descubrir los criterios de paralelismo de las rectas.

Escribe lo que entiendes por rectas paralelas y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que la conforman: recta ***a***, ***b***, ***c*** y ***d***; puntos ***A***, ***B*** y ***C*** y puntos de intersección de la recta ***d*** con las rectas ***a*** y ***b***; ángulos α, β, γ, δ, ε, ζ, η, y θ.

2. Descubre las propiedades de las paralelas, para ello arrastra o traslada el punto ***B*** y hazlo coincidir con el punto ***A***. Escribe lo que sucede con las rectas ***a*** y ***b***.

____

____

____

Si la recta ***a*** es paralela a la recta ***b***, ¿cómo es la recta ***b*** con respecto a la recta ***a***?

____

Se trata de la propiedad de simetría de las paralelas.

Ahora arrastra o traslada el punto ***C*** y hazlo coincidir con el punto de intersección de la recta ***b*** y ***d***. Escribe lo que sucede con las rectas ***b*** y ***c***.

____

____

____

____

Si la recta ***a*** es paralela a la recta ***b*** y la recta ***b*** es paralela a la recta ***c***, ¿cómo es la recta ***a*** con respecto a la recta ***c***?

____

Se trata de la propiedad transitiva de las paralelas.

3. Los ocho ángulos resultados de la intersección de dos paralelas por una tercer recta se identifican de la siguiente manera:

- Ángulos **correspondientes**: son los pares de ángulos $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\zeta}$; $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}$; $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}$
- Ángulos **alternos internos:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\zeta}$
- Ángulos **alternos externos:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}$; $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}$
- Ángulos **adyacentes:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\zeta}$

Arrastra el punto de intersección de la recta ***d*** con la recta ***a*** o ***b***, observa cómo se modifican cada uno de los ángulos. Con estas observaciones y la información anterior contesta lo siguiente:

¿Cómo son los pares de ángulos correspondientes entre sí? ____________________

¿Cómo son los pares de ángulos alternos internos entre sí? ____________________

¿Cómo son los pares de ángulos externos entre sí? ____________________

¿Cuánto suman los pares de ángulos adyacentes? ¿por qué haces tal afirmación?

____

____

____

____

Con lo anterior, estás en condiciones de identificar los criterios de paralelismo de las rectas, es decir, los criterios que deben cumplir dos rectas para asegurar paralelismo entre ellas. Discútelo con tus compañeros.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando rectas paralelas_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Explorando rectas paralelas

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir las propiedades de las paralelas. Llevar al alumno a comprender las relaciones entre los ángulos resultados de la intersección de dos paralelas por una tercer recta. Conducir al alumno a descubrir los criterios de paralelismo de las rectas.

Escribe lo que entiendes por rectas paralelas y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto al concepto de rectas paralelas así como la imagen interna que tiene de las mismas para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los elementos que la conforman: recta ***a***, ***b, c*** y ***d***; puntos ***A, B*** y ***C*** y puntos de intersección de la recta ***d***

con las rectas ***a*** y ***b***; ángulos ***α, β, γ, δ, ε, ζ, η,*** y ***θ.***

En este caso la visualización va acompañada de una observación provocada con el objetivo de incrementar el grado de ésta habilidad en el alumno. Esto también le ayudará a apropiarse del tema y tratar de entenderlo, analizando el todo en partes.

2. Descubre las propiedades de las paralelas, para ello arrastra o traslada el punto ***B*** y hazlo coincidir con el punto ***A.*** Escribe lo que sucede con las rectas ***a*** y ***b***.

___

___

___

*La idea es llevar al alumno a descubrir y parcialmente entender que el hecho de hacer coincidir los dos puntos, se traduce en la traslación de la recta **b** a la posición de la recta **a**, con esto se estará representando una recta que ocupa ese determinado espacio, cumpliéndose en ella la propiedad reflexiva: una paralela se considera paralela a sí misma.*

Si la recta ***a*** es paralela a la recta ***b***, ¿cómo es la recta ***b*** con respecto a la recta ***a***?

___

Se trata de la propiedad de simetría de las paralelas.

La idea es que el alumno reorganice este nuevo hecho con la estructura previa, donde la intuición lo lleve a deducir con éxito la propiedad de simetría.

Ahora arrastra o traslada el punto ***C*** y hazlo coincidir con el punto de intersección de la recta ***b*** y ***d***. Escribe lo que sucede con las rectas ***b*** y ***c.***

___

___

___

___

Si la recta ***a*** es paralela a la recta ***b*** y la recta ***b*** es paralela a la recta ***c***, ¿cómo es la recta ***a*** con respecto a la recta ***c***?

___

Se trata de la propiedad transitiva de las paralelas.

Nuevamente, la idea es que interprete y reestructure los nuevos hechos e intuya con certeza la respuesta.

3. Los ocho ángulos resultados de la intersección de dos paralelas por una tercer recta se identifican de la siguiente manera:

- Ángulos **correspondientes**: son los pares de ángulos $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\zeta}$; $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}$; $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}$
- Ángulos **alternos internos:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\zeta}$
- Ángulos **alternos externos:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}$; $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}$
- Ángulos **adyacentes:** son los pares de ángulos $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}$; $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\zeta}$

En esta actividad se les proporciona directamente la teoría de los ángulos resultados de la intersección de dos paralelas por una tercer recta, sin embargo otra opción es solicitar a los estudiantes investiguen sobre éstos ángulos antes de iniciar la actividad.

Arrastra el punto de intersección de la recta ***d*** con la recta ***a*** o ***b***, observa cómo se modifican cada uno de los ángulos. Con estas observaciones y la información anterior contesta lo siguiente:

¿Cómo son los pares de ángulos correspondientes entre sí? ______________________________

¿Cómo son los pares de ángulos alternos internos entre sí? ______________________________

¿Cómo son los pares de ángulos externos entre sí? ______________________________

¿Cuánto suman los pares de ángulos adyacentes? ¿por qué haces tal afirmación?

____

____

____

____

Llegados aquí, se espera que el alumno visualice el tema completo, es decir, las relaciones y propiedades que se guardan entre las rectas involucradas. Además, logre establecer un vínculo con sus conocimientos previos de ángulos opuestos por el vértice, concepto de ángulo llano y ángulo adyacente para que haga las justificaciones correspondientes.

Con lo anterior, estás en condiciones de identificar los criterios de paralelismo de las rectas, es decir, los criterios que deben cumplir dos rectas para asegurar paralelismo entre ellas. Discútelo con tus compañeros.

Para cerrar esta actividad se siguiere tener una discusión grupal para identificar los criterios de paralelismo en las rectas y si es suficiente con que se cumpla uno de éstos o se deben cumplir todos para asegurar el paralelismo:

1) *Si al intersecarse dos rectas* ***a*** *y* ***b*** *por una tercera los ángulos correspondientes son iguales, entonces las rectas* ***a*** *y* ***b*** *son paralelas.*
2) *Si al intersecarse dos rectas* ***a*** *y* ***b*** *por una tercera los ángulos alternos internos (o externos) son iguales, entonces las rectas* ***a*** *y* ***b*** *son paralelas.*
3) *Si al intersecarse dos rectas* ***a*** *y* ***b*** *por una tercera los ángulos adyacentes suman 180º o forman un ángulo llano, entonces las rectas* ***a*** *y* ***b*** *son paralelas.*

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando rectas paralelas_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se recuerda a los estudiantes guardar su archivo electrónico en la computadora.

Teoremas de perpendiculares

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad __________

Escuela ______________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los teoremas de perpendiculares. Persuadir al alumno a hacer uso de sentencias deductivas que prueben las conjeturas realizadas. Trabajar de manera grupal para demostrar dos de los teoremas aquí vistos.

Escribe lo que entiendes por perpendiculares y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. Visualiza la construcción en GeoGebra. ¿Cuántas rectas perpendiculares a la recta $\overline{\boldsymbol{AB}}$ puedes bajar del punto $\boldsymbol{C}$?¿Por qué no puede ser diferente tu conjetura?

2. Las rectas $\overline{\boldsymbol{CE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CE'}}$ son dos oblicuas tales que las distancias de sus pies con respecto al pie de la perpendicular son iguales.

¿Cómo son las oblicuas entre sí con respecto a su longitud? Identifica los ángulos que forman las oblicuas con la perpendicular, anótalos. ¿Cómo son éstos ángulos entre sí?

Arrastra el punto $\boldsymbol{E}$ y describe lo que ocurre con los objetos geométricos involucrados.

Ahora, justifica tu respuesta haciendo uso de una cadena de argumentos convincentes, válidos y coherentes (p. e. Teorema de Pitágoras o congruencia de triángulos).

3. Visualiza las oblicuas $\overline{\boldsymbol{CF}}$ y $\overline{\boldsymbol{CE}}$. Arrastra el punto $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{F}$. Observa la relación que se guarda entre la longitud de cada oblicua y la distancia de su pie al pie de la perpendicular. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones? Generaliza tu respuesta.

4. Observa las rectas que están trazadas desde la recta $\overline{\boldsymbol{AB}}$ al punto $\boldsymbol{C}$ fuera de ella. ¿Cuál es la más corta? Justifica tu respuesta con argumentos convincentes, válidos y coherentes.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Teorema de perpendiculares_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Teoremas de perpendiculares

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los teoremas de perpendiculares. Persuadir al alumno a hacer uso de sentencias deductivas que prueben las conjeturas realizadas. Trabajar de manera grupal para demostrar dos de los teoremas aquí vistos.

Escribe lo que entiendes por perpendiculares y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto a la perpendicularidad, así como la imagen interna que tiene del mismo para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción en GeoGebra. ¿Cuántas rectas perpendiculares a la recta $\overline{\boldsymbol{AB}}$ puedes bajar del punto $\boldsymbol{C}$?¿Por qué no puede ser diferente tu conjetura?

Aquí se espera que el alumno descubra el teorema "De un punto exterior a una recta no puede bajarse a esa recta más de una perpendicular".

2. Las rectas $\overline{\boldsymbol{CE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CE'}}$ son dos oblicuas tales que las distancias de sus pies con respecto al pie de la perpendicular son iguales.

¿Cómo son las oblicuas entre sí con respecto a su longitud? Identifica los ángulos que forman las oblicuas con la perpendicular, anótalos. ¿Cómo son éstos ángulos entre sí?

Arrastra el punto $\boldsymbol{E}$ y describe lo que ocurre con los objetos geométricos involucrados.

En este segundo punto se espera que el alumno se acerque al teorema "Si de un punto de una perpendicular a una recta se trazan a la recta dos oblicuas cuyos pies estén a igual distancia del pie de la perpendicular, esas dos oblicuas son iguales y forman ángulos iguales con la perpendicular".

Ahora, justifica tu respuesta haciendo uso de una cadena de argumentos convincentes, válidos y coherentes (p. e. Teorema de Pitágoras o congruencia de triángulos).

Se recomienda que las argumentaciones se trabajen individualmente en un primer momento, en un segundo momento se involucra todo el grupo para validar y/o rechazar los argumentos individuales con la finalidad de lograr un acercamiento deductivo del teorema que tendrá la validez de una demostración con el rigor que se pretende en esta propuesta.

3. Visualiza las oblicuas $\overline{CF}$ y $\overline{CE}$. Arrastra el punto E o F. Observa la relación que se guarda entre la longitud de cada oblicua y la distancia de su pie al pie de la perpendicular. ¿Qué puedes concluir de tus observaciones? Generaliza tu respuesta.

____
____
____
____
____
____

Se espera que el alumno descubra el teorema "Si de un punto de una perpendicular a una recta se trazan a esa recta dos oblicuas cuyos pies no equidistan del de la perpendicular, la oblicua cuyo pie dista más es mayor que la otra".

4. Observa las rectas que están trazadas desde la recta $\overline{AB}$ al punto C fuera de ella. ¿Cuál es la más corta? Justifica tu respuesta con argumentos convincentes, válidos y coherentes.

____
____
____
____
____
____
____

La intención aquí es que el estudiante se acerque al teorema "La perpendicular es la más corta de las rectas que pueden trazarse a una recta de un punto situado fuera de ella". Al igual que en el punto dos, la sugerencia es que en un primer momento se trabaje individualmente en la justificación de la respuesta, después se integre todo el grupo para concluir una demostración.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Teorema de perpendiculares_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo: ***Teorema de perpendiculares_##.ggb****, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.*

Clasificación de triángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________________ Edad __________

Escuela ______________________________________ Fecha __________

Propósito: A partir de la exploración y observación del modelo dinámico establecer regularidades. Descubrir las características de los triángulos equiláteros, isósceles y escaleno. Reflexionar sobre los ángulos contenidos en los triángulos.

Escribe los nombres de los ángulos que existen de acuerdo a la abertura de sus lados, haz un dibujo para representarlos.

____

____

____

____

1. Visualiza la construcción que se te proporcionó en el archivo electrónico de GeoGebra. Como podrás apreciar consiste de tres triángulos: equilátero, isósceles y escaleno. Manipula cada triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que sucede con sus elementos principales. Identifica las regularidades en cada clase de triángulo. Toma nota de la suma de los ángulos internos de los diferentes triángulos.

De acuerdo a tus observaciones: ¿Cuáles son las características del triángulo equilátero?

____

____

¿Cuáles son las características del triángulo isósceles?

____

____

Si los triángulos escalenos son diferentes a los equiláteros y a los isósceles. ¿Cuáles son las características de los triángulos escalenos?

____

____

2. La clasificación de los triángulos según sus ángulos es como sigue:

- **Rectángulo** cuando tiene un ángulo recto.
- **Obtusángulo** cuando tiene un ángulo obtuso.
- **Acutángulo** cuando sus tres lados son agudos.
- **Equiángulo** cuando sus tres ángulos son iguales.

Modifica el triángulo escaleno hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo escaleno puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

Modifica el triángulo isósceles hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo isósceles puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

Modifica el triángulo equilátero hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo equilátero puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

¿Un triángulo puede tener más de un ángulo recto? Justifica tu respuesta.

¿Un triángulo puede tener más de un ángulo obtuso? Justifica tu respuesta.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Clasificación de triángulos_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Clasificación de triángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: A partir de la exploración y observación del modelo dinámico establecer regularidades. Descubrir las características de los triángulos equiláteros, isósceles y escaleno. Reflexionar sobre los ángulos contenidos en los triángulos.

Escribe los nombres de los ángulos que existen de acuerdo a la abertura de sus lados, haz un dibujo para representarlos.

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer la imagen interna que tiene de los diferentes ángulos para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción que se te proporcionó en el archivo electrónico de GeoGebra. Como podrás apreciar consiste de tres triángulos: equilátero, isósceles y escaleno. Manipula cada triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que sucede con sus elementos principales. Identifica las regularidades en cada clase de triángulo. Toma nota de la suma de los ángulos internos de los diferentes triángulos.

De acuerdo a tus observaciones: ¿Cuáles son las características del triángulo equilátero?

____

____

¿Cuáles son las características del triángulo isósceles?

____

____

Si los triángulos escalenos son diferentes a los equiláteros y a los isósceles. ¿Cuáles son las características de los triángulos escalenos?

____

____

La idea es que a través de la exploración y la observación el alumno descubra las características que distinguen a los triángulos equiláteros, isósceles y escalenos.

2. La clasificación de los triángulos según sus ángulos es como sigue:

- **Rectángulo** cuando tiene un ángulo recto.
- **Obtusángulo** cuando tiene un ángulo obtuso.
- **Acutángulo** cuando sus tres lados son agudos.
- **Equiángulo** cuando sus tres ángulos son iguales.

Modifica el triángulo escaleno hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo escaleno puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

Para contestar las cuestiones que se presentan a partir de aquí, el alumno deberá hacer uso de la exploración, observación, análisis y comparación entre los diferentes triángulos que genere con el modelo dinámico correspondiente. Por lo tanto, esta actuación abonará en el desarrollo de la habilidad de visualización que le permitirá elaborar conjeturas correctas.

Modifica el triángulo isósceles hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo isósceles puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

Modifica el triángulo equilátero hasta obtener los diferentes triángulos de la clasificación según sus ángulos. Escribe a continuación si un triángulo equilátero puede ser a la vez rectángulo, obtusángulo, acutángulo y/o equiángulo. Justifica tu respuesta.

¿Un triángulo puede tener más de un ángulo recto? Justifica tu respuesta.

¿Un triángulo puede tener más de un ángulo obtuso? Justifica tu respuesta.

Se recomienda cerrar la actividad comparando las diferentes respuestas en grupo con la intención de detectar algún error que de pie a una retroalimentación, de esta manera se estará construyendo el conocimiento socialmente.

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Clasificación de triángulos_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

*Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo**: Clasificación de triángulos_##.ggb**, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.*

Definición de triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los elementos que definen un triángulo. Elaborar una definición de triángulo.

Escribe lo que entiendes por triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes varios segmentos: ***a, b, c, d*** y ***e***; como puedes apreciar son de magnitud diferente. Arrastra los segmentos con el punto ***P*** y dales dirección con el punto ***Q***, para formar dos triángulos, el primero con los segmentos ***a, b*** y ***d***; el segundo con los segmentos ***b, c*** y ***e***. Escribe tu hallazgo en las siguientes líneas.

Sean ***a, b, c, d*** y ***e*** segmentos de rectas, donde se cumple que $a < b < c < d < e$. Manipula los segmentos correspondientes para representar y explorar cada una de las situaciones mencionadas en la *tabla 1*, lo que te llevará a elaborar conjeturas con las que podrás completar la *tabla 1*.

Tabla 1

La unión de dos segmentos …	Indica la desigualdad que cumple (< , >)	Respecto al tercer segmento	Determina si existe o no un triángulo con los segmentos dados.
a + b		***d***	
a + b		***c***	
b + c		***e***	
c + d		***e***	
b + c		***d***	
a + c		***d***	

¿Qué desigualdad se debe cumplir para la existencia de un triángulo? Generaliza tu conclusión.

____
____
____
____

¿Puedes formar un triángulos con dos segmentos que al unirlos, la magnitud resultante sea igual a la de un tercer segmento? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____

2. ¿Cuáles consideras que son los elementos principales para formar triángulos?

____
____
____
____

Formula una definición de triángulo. Contrástala con las definiciones de tus compañeros.

____
____
____
____
____
____

Finalmente guarda tu archivo electrónico de GeoGebra en la computadora. Nómbralo de la siguiente manera: **Definición de triángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Definición de triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los elementos que definen un triángulo. Elaborar una definición de triángulo.

Escribe lo que entiendes por triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

La idea de esta primera consigna es conocer la noción de triángulo con que cuenta el estudiante, previo a esta actividad, lo que será interesante contrastar con el concepto que construirá al finalizar la actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes varios segmentos: ***a, b, c, d*** y ***e***; como puedes apreciar son de magnitud diferente. Arrastra los segmentos con el punto ***P*** y dales dirección con el punto ***Q***, para formar dos

triángulos, el primero con los segmentos ***a, b*** y ***d***; el segundo con los segmentos ***b, c*** y ***e***. Escribe tu hallazgo en las siguientes líneas.

Esta actividad presenta un conflicto al alumno, ya que se le han dado segmentos con los que no podrá representar un triángulo. La intención es llevar al alumno a comprender que los segmentos que forman un triángulo deberán tener **ciertas características**.

Sean ***a, b, c, d*** y ***e*** segmentos de rectas, donde se cumple que $a < b < c < d < e$. Manipula los segmentos correspondientes para representar y explorar cada una de las situaciones mencionadas en la *tabla 1*, lo que te llevará a elaborar conjeturas con las que podrás completar la *tabla 1*.

Tabla 1

La unión de dos segmentos …	Indica la desigualdad que cumple (< , >)	Respecto al tercer segmento	Determina si existe o no un triángulo con los segmentos dados.
$a + b$		d	
$a + b$		c	
$b + c$		e	
$c + d$		e	
$b + c$		d	
$a + c$		d	

Con la exploración y comparación de las situaciones presentadas en la tabla 1 se pretende que el alumno llegue a una generalización de las características que deben tener las magnitudes de los segmentos que forman un triángulo cualquiera.

¿Qué desigualdad se debe cumplir para la existencia de un triángulo? Generaliza tu conclusión.

¿Puedes formar un triángulos con dos segmentos que al unirlos, la magnitud resultante sea igual a la de un tercer segmento? Justifica tu respuesta.

Hasta aquí se ha llevado al alumno a inducir que para la existencia de un triángulo son necesarios tres segmentos y tres ángulos.

2. ¿Cuáles consideras que son los elementos principales para formar triángulos?

Formula una definición de triángulo. Contrástala con las definiciones de tus compañeros.

En este punto se le debe hacer hincapié al alumno que en matemáticas, una definición es una convención que ***aclara*** *el* ***significado preciso*** *que debe atribuirse a una palabra, expresión o símbolo.*

Finalmente guarda tu archivo electrónico de GeoGebra en la computadora. Nómbralo de la siguiente manera: **Definición de triángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Por último se pide a los alumnos grabar el archivo con el que trabajó cada uno, asignándole el mismo nombre y agregando el correspondiente número de lista, por ejemplo: ***Definición de triángulo_##.ggb****, donde ## será sustituido por el número de lista correspondiente a cada alumno. Esto se pide con el propósito de conservar la evidencia del trabajo tanto para el profesor como para el mismo alumno.*

Relación entre lados y ángulos del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad __________

Escuela ______________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado, manipulando y haciendo uso de comparaciones. Inducir al alumno a descubrir las relaciones existentes entre los lados y los ángulos del triángulo. Llevarlo al concepto de congruencia.

Escribe cuantos grados resultan de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes el triángulo $\triangle ABC$, el cuál puedes modificar arrastrando el punto P o cualquiera de sus vértices A, B o C.

Arrastra cada uno de los vértices A, B o C, observa los objetos que varían y los que permanecen invariantes. Describe lo que ocurre.

Arrastra el punto P, observa los objetos del triángulo que varían y los que permanecen invariantes. Describe lo que ocurre.

Continúa explorando la construcción, mantén invariantes los objetos que se indican en cada caso de la siguiente tabla para que puedas elaborar las conjeturas necesarias y completarla.

Objetos invariantes del triángulo	Número de triángulos diferentes que puedes formar
La magnitud de uno de sus lados y de un ángulo	
La magnitud de sus tres lados	
La magnitud de un lado y dos ángulos	
La magnitud de dos lados y el ángulo entre ellos	
La magnitud de sus tres ángulos	

Si mantienes invariantes dos ángulos de un triángulo, ¿cómo resulta el tercer ángulo, variante o invariante? Escríbelo a continuación. Justifica en qué te basas para hacer tal afirmación.

____

____

____

____

____

____

2. Con las observaciones que haz llevado a cabo hasta el momento, infiere cómo son dos triángulos entre sí que cumplen con las siguientes características:

    - Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro.

    - Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo.

____

____

____

    - Si tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

____

____

____

3. Modifica el triángulo y visualiza la relación de los ángulos con sus lados opuestos. Con estas observaciones y utilizando los calificativos de ***igua*l, *menor*** o ***mayor***, completa las siguientes afirmaciones:

a. Frente al lado mayor se encuentra el ángulo … ________________________________

b. Frente al ángulo menor se encuentra el lado … ________________________________

c. Frente a los lados iguales se encuentran ángulos … ________________________________

Relación entre lados y ángulos del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________________ Edad __________

Escuela ______________________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado, manipulando y haciendo uso de comparaciones. Inducir al alumno a descubrir las relaciones existentes entre los lados y los ángulos del triángulo. Llevarlo al concepto de congruencia.

Escribe cuantos grados resultan de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

____

____

La idea de esta primera consigna es conocer si el alumno cuenta con la noción del teorema referente a la suma de los ángulos internos de un triángulo.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes el triángulo $\triangle \boldsymbol{ABC}$, el cuál puedes modificar arrastrando el punto ***P*** o cualquiera de sus vértices ***A***, ***B*** o ***C***.

Arrastra cada uno de los vértices ***A***, ***B*** o ***C***, observa los objetos que varían y los que permanecen invariantes. Describe lo que ocurre.

____

____

____

____

____

En esta sección se induce al alumno a modificar el triángulo a partir de sus vértices, donde a través de la observación reconozca los objetos geométricos que permaneces variantes o invariantes. Con esto estará en disposición de elaborar las conjeturas necesarias. Por otro lado, al pedirles que describan lo que ocurre, nos dará cuenta de cómo van desarrollando la habilidad de visualización a lo largo del curso.

Arrastra el punto ***P***, observa los objetos del triángulo que varían y los que permanecen invariantes. Describe lo que ocurre.

Continúa explorando la construcción, mantén invariantes los objetos que se indican en cada caso de la siguiente tabla para que puedas elaborar las conjeturas necesarias y completarla.

Objetos invariantes del triángulo	Número de triángulos diferentes que puedes formar
La magnitud de uno de sus lados y de un ángulo	
La magnitud de sus tres lados	
La magnitud de un lado y dos ángulos	
La magnitud de dos lados y el ángulo entre ellos	
La magnitud de sus tres ángulos	

Si mantienes invariantes dos ángulos de un triángulo, ¿cómo resulta el tercer ángulo, variante o invariante? Escríbelo a continuación. Justifica en qué te basas para hacer tal afirmación.

Aquí será interesante conocer cómo, el estudiante, deduce éste hecho, es decir, si hace uso del teorema de los ángulos internos de un triángulo o usa el modelo dinámico. De esta manera conoceremos si utilizó la intuición o la deducción para establecer su hipótesis.

2. Con las observaciones que haz llevado a cabo hasta el momento, infiere cómo son dos triángulos entre sí que cumplen con las siguientes características:

- Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro.

- Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo.

____

____

____

- Si tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

____

____

____

Llegado éste momento, se sugiere institucionalizar los criterios de congruencia de los triángulos.

3. Modifica el triángulo y visualiza la relación de los ángulos con sus lados opuestos. Con estas observaciones y utilizando los calificativos de ***igual*****,** ***menor*** o ***mayor***, completa las siguientes afirmaciones:

a. Frente al lado mayor se encuentra el ángulo … ____________________

b. Frente al ángulo menor se encuentra el lado … ____________________

c. Frente a los lados iguales se encuentran ángulos … ____________________

Por la sensibilidad del software puede ocurrir que el alumno no logre igualar dos ángulos y a la vez la magnitud de dos lados del triángulo, es decir, puede haber una pequeña diferencia de decimales entre los valores de los dos ángulos. Éste hecho debe explotarse para hacer énfasis en la importancia de la demostración matemática.

Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad __________

Escuela ______________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a demostrar las principales propiedades de las bisectrices del triángulo.

Escribe lo que entiendes por bisectrices del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico en GeoGebra que se te proporcionó. Se trata de un triángulo cualquiera $\triangle \boldsymbol{ABC}$.

Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Bisectriz	Lados adyacentes a la bisectriz	Segmentos del lado opuesto	Triángulos formados por la bisectriz

¿Cuál es el atributo o cualidad de la bisectriz de un ángulo? Manipula los puntos ***A, B*** o ***C*** del modelo dinámico para verificar tu respuesta en diferentes casos.

____

____

____

En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de los lados opuestos a cada bisectriz y la razones de los segmentos en que cada bisectriz corta el lado opuesto, observa cómo son éstas razones y escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

____
____
____

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: iguales, diferentes o proporcionales.

"La bisectriz divide al lado opuesto en partes ______________________ a los lados adyacentes a ella".

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad se cumple en todos los casos. Como sugerencia toma una bisectriz, sus lados adyacentes y los segmentos en los que es dividido el lado opuesto por la bisectriz en cuestión. Trabaja con los dos triángulos correspondientes. Observa y determina el área de cada triángulo desde diferentes perspectivas, de tal manera que establezcas una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

____
____
____
____
____

2. En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de las áreas de los dos triángulos en que es dividido el triángulo $\triangle \boldsymbol{ABC}$ por cada bisectriz. Observa cómo es ésta razón con respecto a la razón de los lados adyacentes a la bisectriz, escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

____
____

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: igual, diferente o proporcional.

"La bisectriz del triángulo divide el área de éste en una relación que es ______________________ a los lados adyacentes a ella".

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad siempre se cumple. Como sugerencia trabaja con una bisectriz y los dos triángulos que origina. Establece una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

____
____
____
____

3. Visualiza el modelo dinámico. Observa que del punto de intersección de las tres bisectrices, ***I,*** llamado

incentro, se han trazado tres segmentos hacia los lados del triángulo. ¿Cómo son éstos segmentos con respecto a los lados del triángulo? Justifica tu respuesta con la información de la construcción.

Con respecto a su magnitud, ¿cómo son los segmentos antes mencionados? Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Demuestra lo anterior para establecer tu afirmación como una verdad absoluta. Como sugerencia trabaja con los dos triángulos formados en un vértice del triángulo por la bisectriz y delimitados por los segmentos en cuestión. Visualiza las relaciones y similitudes entre los triángulos para llegar a demostrar lo observado.

Finalmente, ¿si trazas una circunferencia inscrita en un triángulo, cuál será su centro?¿cuál será su radio? Generaliza tus respuestas.

Demostración de las propiedades de las bisectrices del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a demostrar las principales propiedades de las bisectrices del triángulo.

Escribe lo que entiendes por bisectrices del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto al concepto de bisectriz de un triángulo, así como la imagen interna que tiene de la misma para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico en GeoGebra que se te proporcionó. Se trata de un triángulo cualquiera $\triangle \boldsymbol{ABC}$.

Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Bisectriz	Lados adyacentes a la bisectriz	Segmentos del lado opuesto	Triángulos formados por la bisectriz

Lo que se pretende es la identificación, comprensión y uso del lenguaje geométrico por parte del alumno.

¿Cuál es el atributo o cualidad de la bisectriz de un ángulo? Manipula los puntos ***A, B*** o ***C*** del modelo dinámico para verificar tu respuesta en diferentes casos.

Que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

2. En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de los lados opuestos a cada bisectriz y la razones de los segmentos en que cada bisectriz corta el lado opuesto, observa cómo son éstas razones y escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Las razones son iguales.

El propósito es llevar al alumno a verificar la propiedad implícita.

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: iguales, diferentes o proporcionales.

“La bisectriz divide al lado opuesto en partes *proporcionales* a los lados adyacentes a ella”.

La intención es que el alumno utilice un adjetivo que defina exactamente la relación, con conocimiento de causa de acuerdo a lo que ha observado.

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad se cumple en todos los casos. Como sugerencia toma una bisectriz, sus lados adyacentes y los segmentos en los que es dividido el lado opuesto por la bisectriz en cuestión. Trabaja con los dos triángulos correspondientes. Observa y determina el área de cada triángulo desde diferentes perspectivas, de tal manera que establezcas una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

área $\triangle\ \boldsymbol{ABD}\ =\ (\overline{\boldsymbol{BD}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2\ =\ (\overline{\boldsymbol{AB}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2$, *esto implica que*
$\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{BD}}\ =\ 2\overline{\boldsymbol{AD}}/2\overline{\boldsymbol{AD}}\ =\ 1$. *área*$\triangle\ \boldsymbol{AD}\ =\ (\overline{\boldsymbol{DC}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2\ =\ (\overline{\boldsymbol{AC}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2$, *esto implica*
$\overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{DC}}\ =\ 2\overline{\boldsymbol{AD}}/2\overline{\boldsymbol{AD}}\ =\ 1$. *De aquí que* $\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{BD}}\ =\ \overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{DC}}$ ■.

Con las sugerencias dadas, se pretende iluminar el camino a la demostración a sabiendas de que los alumnos recién comienzan éste quehacer. Reconociendo también que en el futuro, con la práctica les será más fácil identificar un camino por sí mismos.

En el archivo de GeoGebra están representadas las razones de las áreas de los dos triángulos en que es dividido el triángulo $\triangle\boldsymbol{ABC}$ por cada bisectriz. Observa cómo es ésta razón con respecto a la razón de los lados adyacentes a la bisectriz, escríbelo a continuación. Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Las razones son iguales.

De acuerdo a tus observaciones, completa el siguiente párrafo utilizando cualquiera de los siguientes adjetivos: igual, diferente o proporcional.

"La bisectriz del triángulo divide el área de éste en una relación que es ________*proporcional*______a los lados adyacentes a ella".

Ahora, demuestra lo anterior para probar que ésta propiedad siempre se cumple. Como sugerencia trabaja con una bisectriz y los dos triángulos que origina. Establece una relación entre los datos involucrados en la proporción que quieres demostrar.

área$\triangle\ \boldsymbol{ABD}\ =\ (\overline{\boldsymbol{AB}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2$, *área*$\triangle\ \boldsymbol{ADC}\ =\ (\overline{\boldsymbol{AC}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2$, *entonces,*
área $\triangle\boldsymbol{ABD}$/*área* $\triangle\boldsymbol{ADC}$= $((\overline{\boldsymbol{AB}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2)/((\overline{\boldsymbol{AC}} * \overline{\boldsymbol{AD}})/2)$, *por lo tanto,*
área $\triangle\boldsymbol{ABD}$/*área* $\triangle\boldsymbol{ADC} = \overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{AC}}$ ■.

3. Visualiza el modelo dinámico. Observa que del punto de intersección de las tres bisectrices, ***I,*** llamado incentro, se han trazado tres segmentos hacia los lados del triángulo. ¿Cómo son éstos segmentos con respecto a los lados del triángulo? Justifica tu respuesta con la información de la construcción.

Son perpendiculares porque su pie forma un ángulo recto con el lado del triángulo que interseca.

Con respecto a su magnitud, ¿cómo son los segmentos antes mencionados? Modela diferentes triángulos para verificar tu respuesta.

Son de igual magnitud.

Demuestra lo anterior para establecer tu afirmación como una verdad absoluta. Como sugerencia trabaja con los dos triángulos formados en un vértice del triángulo por la bisectriz y delimitados por los segmentos en cuestión. Visualiza las relaciones y similitudes entre los triángulos para llegar a demostrar lo observado.

Considerando los triángulos $\triangle \boldsymbol{AIG}$ y $\triangle \boldsymbol{AIH}$, tenemos que $\angle \boldsymbol{GAI} = \angle \boldsymbol{IAH}$ por ser $\overline{\boldsymbol{AI}}$ bisectriz del $\angle \boldsymbol{GAH}$. Se sabe que $\angle \boldsymbol{IGA}$ es recto, ya que $\overline{\boldsymbol{IG}} \perp \overline{\boldsymbol{AB}}$, de manera homóloga $⊾\boldsymbol{IHA}$, por lo tanto $⊾\boldsymbol{IGA} = ⊾\boldsymbol{IHA}$. Como $\overline{\boldsymbol{AI}}$ es lado común a los dos triángulos $\triangle \boldsymbol{AIG}$ y $\triangle \boldsymbol{AIH}$, se concluye que se trata de triángulos congruentes por el criterio ALA. Por esta congruencia se demuestra que $\overline{\boldsymbol{IG}} = \overline{\boldsymbol{IH}}$ ■.

Finalmente, ¿si trazas una circunferencia inscrita en un triángulo, cuál será su centro?¿cuál será su radio? Generaliza tus respuestas.

El centro de la circunferencia inscrita en el triángulo será el punto de intersección de las bisectrices, su radio será la perpendicular trazada desde el punto de intersección de las bisectrices hasta cualquiera de los lados del triángulo.

Se hace hincapié en la abstracción para que se deje de lado la particularización de los conceptos.

Demostración de las propiedades de las medianas del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a demostrar las principales propiedades de las medianas del triángulo.

Escribe lo que entiendes por medianas del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Se trata de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, donde los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ representan las medianas. Las tres medianas coinciden, se intersecan o cortan en el punto $\boldsymbol{G}$ de manera proporcional, como descubrirás. Las razones $\overline{BG}/\overline{GE}$ y $\overline{GC}/\overline{FG}$ representan dicha proporción en las medianas que pasan por los puntos $\boldsymbol{B}$ *y* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}$ *y* $\boldsymbol{F}$; respectivamente. El segmento $\overline{FE}$ es paralelo al lado $\overline{BC}$ y une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. El punto donde se intersecan las tres medianas, $\boldsymbol{G}$, se llama baricentro.

Ahora, modifica el triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que cambia y lo que permanece invariante. Genera tantos casos como puedas poniendo especial atención en el punto de intersección de las medianas y la relación en la que se cortan. Escribe tus conjeturas a partir de tus observaciones.

¿Dónde permanece el punto de intersección de las medianas, dentro o fuera del triángulo?

¿La razón de corte del punto de intersección de las medianas cambia o permanece invariante en todos los casos? Si permanece invariante menciona en qué proporción.

2. Para asignarle el estatus de verdad a tus conjeturas, es necesario que lo demuestres con una cadena de deducciones, partiendo de los conceptos que se proporcionan inicialmente. Para esto requieres analizar los componentes, identificar nuevas formas que contengan lo que quieres conocer; encontrar las relaciones entre éstas formas y las relaciones guardadas entre los diferentes objetos que las componen.

¿Qué es lo que demostrarás?

____

____

Como puedes visualizar las medianas que pasan por los puntos ***B**, **E** y **C**, **F***, junto con el lado $\overline{\boldsymbol{BC}}$ y la paralela a éste, $\overline{\boldsymbol{FE}}$, forman dos triángulos, $\triangle \boldsymbol{FGE}$ y $\triangle \boldsymbol{CGB}$. Analiza los ángulos de los dos triángulos para encontrar regularidades. Recuerda las características de los ángulos alternos internos de dos rectas paralelas que son cortadas por una tercera, así como la característica de los ángulos opuestos por el vértice. Reelabora los conocimientos anteriores y demuestra que los triángulos $\triangle \boldsymbol{FGE}$ y $\triangle \boldsymbol{CGB}$ son semejantes.

____

____

____

____

____

Recuerda que si dos triángulos son semejantes, también sus lados correspondientes, además éstos guardan una razón de semejanza.

Representa la razón de semejanza de lados correspondientes de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FGE}$ y $\triangle \boldsymbol{CGB}$.

____

____

Representa la razón en que se cortan las medianas que pasan por los puntos ***B**, **E*** y ***C**, **F***. Compáralas con las razones de semejanza de la sentencia anterior y anota tus conclusiones.

____

____

____

Pon atención nuevamente en la construcción, esta vez identifica el triángulo $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y el triángulo $\triangle \boldsymbol{BAC}$, observa las relaciones que existen entre ellos. Recuerda que $\overline{\boldsymbol{FE}}$ es paralela con $\overline{\boldsymbol{BC}}$. Demuestra que son triángulos semejantes.

____

____

____

____

____

____

Representa la razón de semejanza de lados correspondientes de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$.

Sabiendo que $\boldsymbol{F}$ es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, es decir, divide en dos partes iguales el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, deduce la razón de semejanza entre los lados correspondientes $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AF}}$ de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$.

Por último relaciona la razón de semejanza de la sentencia anterior con la razón en que se dividen las medianas del triángulo en el punto de intersección $\boldsymbol{G}$. De aquí, concluye que las medianas del triángulo se dividen por el punto de su intersección en relación 2:1 (contando desde los vértices del triángulo).

3. Visualiza la construcción. Observa que las medianas dividen al triángulo en dos triángulos. Modifica el triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que sucede con las áreas de los triángulos producto de la división por las medianas.

Demuestra lo observado: que la mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes. (Dos triángulos son equivalentes, si sus áreas son iguales.)

¿Qué objetos geométricos usarás para demostrar que la mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes?

¿Cómo calculas el área de un triángulo?

Antes de iniciar la demostración selecciona dos triángulos con los que vas a trabajarla.

Finalmente, estructura la demostración.

Demostración de las propiedades de las medianas del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a demostrar las principales propiedades de las medianas del triángulo.

Escribe lo que entiendes por medianas del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto al concepto de mediana de un triángulo, así como la imagen interna que tiene de la misma para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza la construcción que está contenida en el archivo electrónico que se te proporcionó. Se trata de

un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, donde los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ representan las medianas. Las tres medianas coinciden, se intersecan o cortan en el punto G de manera proporcional, como descubrirás. Las razones $\overline{BG}/\overline{GE}$ y $\overline{GC}/\overline{FG}$ representan dicha proporción en las medianas que pasan por los puntos ***B** y **E***, ***C** y **F**;* respectivamente. El segmento $\overline{FE}$ es paralelo al lado $\overline{BC}$ y une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. El punto donde se intersecan las tres medianas, G, se llama baricentro.

El párrafo anterior tiene el objetivo de fijar el punto de partida y las reglas de la situación.

Ahora, modifica el triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que cambia y lo que permanece invariante. Genera tantos casos como puedas poniendo especial atención en el punto de intersección de las medianas y la relación en la que se cortan. Escribe tus conjeturas a partir de tus observaciones.

¿Dónde permanece el punto de intersección de las medianas, dentro o fuera del triángulo?

____

____

____

Se pretende que a través de la generación de diferentes casos y de la observación el alumno identifique las regularidades que se mantienen.

¿La razón de corte del punto de intersección de las medianas cambia o permanece invariante en todos los casos? Si permanece invariante menciona en qué proporción.

____

____

____

La intención de las dos preguntas anteriores es guiar al estudiante para que conjeture que las medianas del triángulo se dividen por el punto de su intersección en relación 2:1.

2. Para asignarle el estatus de verdad a tus conjeturas, es necesario que lo demuestres con una cadena de deducciones, partiendo de los conceptos que se proporcionan inicialmente. Para esto requieres analizar los componentes, identificar nuevas formas que contengan lo que quieres conocer; encontrar las relaciones entre éstas formas y las relaciones guardadas entre los diferentes objetos que las componen.

La finalidad de la segunda sección de ésta actividad es llevar al alumno a progresar desde la intuición hasta el conocimiento matemático. Es oportuno resaltar a los estudiantes que en cuanto una afirmación (o una negación) queda demostrada, alcanza un valor universal que la hace pasar al nivel de lo verdadero.

¿Qué es lo que demostrarás?

Que las medianas del triángulo se cortan en punto en proporción 2:1

____

La idea a partir de aquí es desarrollar una demostración guiada para iniciar el proceso de pensamiento en demostraciones, partiendo de lo que se conoce e identificando lo que se debe buscar.

Como puedes visualizar las medianas que pasan por los puntos ***B**, **E** y **C**, **F***, junto con el lado $\overline{BC}$ y la paralela a éste, $\overline{FE}$, forman dos triángulos, $\triangle FGE$ y $\triangle CGB$. Analiza los ángulos de los dos triángulos para encontrar regularidades. Recuerda las características de los ángulos alternos internos de dos rectas paralelas que son cortadas por una tercera, así como la característica de los ángulos opuestos por el vértice. Reelabora los conocimientos anteriores y demuestra que los triángulos $\triangle FGE$ y $\triangle CGB$ son semejantes.

Como se puede apreciar, se han señalado las proposiciones dadas en relación a unas anteriores y las reglas de inferencia que conducen a nuevas proposiciones de salida. De tal manera que la actuación del alumno sea similar a:

De acuerdo a los criterios del paralelismo de las rectas que se intersectan por una tercera, se tiene que $\angle\alpha = \angle\beta$ por ser ángulos alternos internos, de manera homóloga $\angle\gamma = \angle\delta$. También $\angle\varepsilon = \angle\zeta$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Dado que los ángulos internos de los $\triangle FGE$ y $\triangle CGB$ son iguales, esto implica que los dos triángulos son semejantes ■.

Recuerda que si dos triángulos son semejantes, también sus lados correspondientes, además éstos guardan una razón de semejanza.

Se les hace éste recordatorio ya que lo importante aquí es que utilicen de manera correcta el concepto de semejanza y la propiedad de proporcionalidad.

Representa la razón de semejanza de lados correspondientes de los triángulos $\triangle FGE$ y $\triangle CGB$.

$\overline{CG}/\overline{FG}, \overline{BG}/\overline{EG}$ ***y*** $\overline{BC}/\overline{FE}$

El propósito es atraer la atención del alumno sobre las diferentes razones de semejanza que lo conducirán a establecer las relaciones necesarias para conocer nuevas proposiciones.

Representa la razón en que se cortan las medianas que pasan por los puntos ***B**, **E*** y ***C**, **F***. Compáralas con las razones de semejanza de la sentencia anterior y anota tus conclusiones.

$\overline{BG}/\overline{GE}$ y $\overline{CG}/\overline{FG}$. Se concluye que coinciden con las razones de semejanza de los lados correspondientes de los triángulos $\triangle FGE$ y $\triangle CGB$.

Pon atención nuevamente en la construcción, esta vez identifica el triángulo $\triangle FAE$ y el triángulo $\triangle BAC$, observa las relaciones que existen entre ellos. Recuerda que $\overline{FE}$ es paralela con $\overline{BC}$. Demuestra que son triángulos semejantes.

El $\angle \boldsymbol{FAE}$ es común en los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$. Dado que $\overline{\boldsymbol{FE}} \parallel \overline{\boldsymbol{BC}}$ cortadas por
***AB**, $\angle \boldsymbol{AFE} = \angle \boldsymbol{ABC}$ por ser ángulos correspondientes, de manera homóloga $\angle \boldsymbol{AEF} = \angle \boldsymbol{ACB}$.*
De manera que si los ángulos internos de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$ son iguales,
entonces los triángulos son semejantes ■.

Representa la razón de semejanza de lados correspondientes de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$.

$\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{AF}}, \overline{\boldsymbol{BC}}/\overline{\boldsymbol{FE}}, \overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{AE}}$

Sabiendo que ***F*** es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, es decir, divide en dos partes iguales el segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, deduce la razón de semejanza entre los lados correspondientes $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AF}}$ de los triángulos $\triangle \boldsymbol{FAE}$ y $\triangle \boldsymbol{BAC}$.

*Como **F** es el punto medio del segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, quiere decir que $\overline{\boldsymbol{AF}} = \overline{\boldsymbol{FB}}$, de aquí $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{2}\overline{\boldsymbol{AF}}$,*
entonces $\overline{\boldsymbol{AB}}/\overline{\boldsymbol{AF}} = \boldsymbol{2}$. Y por tratarse de ángulos semejantes también $\overline{\boldsymbol{AC}}/\overline{\boldsymbol{AE}} = \overline{\boldsymbol{BC}}/\overline{\boldsymbol{FE}} = \boldsymbol{2}$

Por último relaciona la razón de semejanza de la sentencia anterior con la razón en que se dividen las medianas del triángulo en el punto de intersección ***G***. De aquí, concluye que las medianas del triángulo se dividen por el punto de su intersección en relación 2:1 (contando desde los vértices del triángulo).

*Siendo los triángulo s $\triangle \boldsymbol{FGE}$ y $\triangle \boldsymbol{CGB}$ triángulos semejantes y **BC/FE** = 2 como se*
comprobó anteriormente; entonces $\overline{\boldsymbol{BG}}/\overline{\boldsymbol{GE}} = \overline{\boldsymbol{CG}}/\overline{\boldsymbol{GF}} = \boldsymbol{2}$. Es decir, las medianas del
triángulo se dividen por el punto de su intersección en relación 2:1 ■.

Se aconseja mencionar a los estudiantes que no existe un camino real en las demostraciones, se requiere de práctica, incluso de un factor de suerte para encontrarlo, pero en cualquier caso, conviene partir de lo que se conoce y explicitar claramente lo que se debe buscar, ya que una buena formulación y comprensión del problema es parte esencial para su resolución.

A continuación se ha incluido la demostración de la segunda propiedad de las medianas del triángulo: la mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes.

La siguiente sección puede seguirse trabajando en clase, o bien asignarla a los alumnos como trabajo extra clase considerando que es una demostración más corta y sencilla que la anterior.

3. Visualiza la construcción. Observa que las medianas dividen al triángulo en dos triángulos. Modifica el triángulo arrastrando cualquiera de sus vértices. Observa lo que sucede con las áreas de los triángulos producto de la división por las medianas.

Demuestra lo observado: que la mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes. (Dos triángulos son equivalentes, si sus áreas son iguales.)

¿Qué objetos geométricos usarás para demostrar que la mediana divide al triángulo en dos triángulos equivalentes?

¿Cómo calculas el área de un triángulo?

Antes de iniciar la demostración selecciona dos triángulos con los que vas a trabajarla.

Finalmente, estructura la demostración.

Explorando las alturas del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad __________

Escuela ______________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a relacionar los tipos de triángulos con la ubicación del ortocentro y las regularidades de sus alturas.

Escribe lo que entiendes por altura del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. Visualiza el triángulo $\triangle \boldsymbol{ABC}$ que está representado en el archivo electrónico de GeoGebra que se te proporcionó. Los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{BE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CF}}$ son las alturas del $\triangle \boldsymbol{ABC}$. El punto $\boldsymbol{H}$ es la intersección de las tres rectas que contienen las alturas del triángulo, se le llama ortocentro.

Manipula el $\triangle \boldsymbol{ABC}$ arrastrando cualquiera de sus vértices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ o $\boldsymbol{C}$ para obtener el triángulo que se pide, observa lo que sucede con las alturas y la ubicación del ortocentro en cada caso. Notifica tus observaciones.

Triángulo rectángulo:

Triángulo obtusángulo:

Triángulo acutángulo:

Triángulo isósceles:

Triángulo equilátero:

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando las alturas del triángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Explorando las alturas del triángulo

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____________________________________ Edad __________

Escuela ____________________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Llevar al alumno a relacionar los tipos de triángulos con la ubicación del ortocentro y las regularidades de sus alturas.

Escribe lo que entiendes por altura del triángulo y haz un dibujo para ilustrarlo.

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto al concepto de altura del triángulo así como la imagen interna que tiene de la misma para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza el triángulo $\triangle \boldsymbol{ABC}$ que está representado en el archivo electrónico de GeoGebra que se te proporcionó. Los segmentos $\overline{\boldsymbol{AD}}$, $\overline{\boldsymbol{BE}}$ y $\overline{\boldsymbol{CF}}$ son las alturas del $\triangle \boldsymbol{ABC}$. El punto $\boldsymbol{H}$ es la intersección de las tres rectas que contienen las alturas del triángulo, se le llama ortocentro.

Manipula el $\triangle \boldsymbol{ABC}$ arrastrando cualquiera de sus vértices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ o $\boldsymbol{C}$ para obtener el triángulo que se pide, observa lo que sucede con las alturas y la ubicación del ortocentro en cada caso. Notifica tus observaciones.

La idea es que a través de la exploración del modelo dinámico el estudiante descubra las relaciones existentes entre los diferentes tipos de triángulos con la ubicación del ortocentro y las regularidades de sus alturas. De manera simple se pide que escriba lo que observa para darle la libertad de comunicarlo, de esta manera nos daremos cuenta del tipo de lenguaje que utiliza y el grado de visualización con que cuenta para establecer relaciones.

Triángulo rectángulo:

Triángulo obtusángulo:

Triángulo acutángulo:

Triángulo isósceles:

Triángulo equilátero:

Finalmente guarda tu archivo electrónico en la computadora de la siguiente manera: **Explorando las alturas del triángulo_##.ggb**, sustituye ## por tu número de lista.

Semejanza entre triángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los criterios de semejanza de los triángulo.

Escribe lo que entiendes por semejanza y haz un dibujo para ilustrarlo.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes diferentes figuras geométricas. Compáralas para encontrar similitudes. Arrastra el punto ***A'''*** para hacer lo coincidir con el punto ***A***, así mismo haz coincidir el punto ***B'''*** con el punto ***B*** y el punto ***C''*** con el punto ***C***; con esto podrás comparar la magnitud de los ángulos. Ahora describe las características que encuentras en común entre las figuras.

Arrastra los puntos ***A***, ***B*** o ***C***. ¿Se siguen manteniendo las mismas características?

2. Manipula los puntos ***A***, ***B*** o ***C*** para modelar tres situaciones diferentes. Toma nota de las magnitudes de los ángulos y segmentos necesarios para completar la siguiente tabla. Representa las proporciones y su resultado.

Tabla

Regularidades	Regularidades	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Tres lados de un triángulos son proporcionales a los tres lados de otro triángulo.	$\frac{\lvert\overline{AB}\rvert}{\lvert\overline{A''B''}\rvert} =$			
	$\frac{\lvert\overline{BC}\rvert}{\lvert\overline{B''C''}\rvert} =$			
	$\frac{\lvert\overline{AC}\rvert}{\lvert\overline{A''C''}\rvert} =$			
Dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo.	$\angle A =$			
	$\angle A'' =$			
	$\angle B =$			
	$\angle B'' =$			
Dos lados cualesquiera de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos entre estos lados son iguales.	$\frac{\lvert\overline{AB}\rvert}{\lvert\overline{A''B''}\rvert} =$			
	$\frac{\lvert\overline{BC}\rvert}{\lvert\overline{B''C''}\rvert} =$			
	$\angle B =$			
	$\angle B'' =$			

Las tres regularidades mencionadas en la *tabla* son los tres criterios de semejanza de los triángulo.

3. Discute con tus compañeros si para asegurar la semejanza entre dos triángulos de tipo especial (rectangulares, isósceles, equiláteros) es necesario cumplir las mismas o menos condiciones que para los triángulos arbitrarios. Anota las conclusiones a las que llegaron.

Semejanza entre triángulos

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir los criterios de semejanza de los triángulo.

Escribe lo que entiendes por semejanza y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer las nociones que tiene del concepto de semejanza, así como la imagen interna que tiene del mismo para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. En tu archivo de GeoGebra tienes diferentes figuras geométricas. Compáralas para encontrar similitudes. Arrastra el punto ***A'''*** para hacer lo coincidir con el punto ***A***, así mismo haz coincidir el punto ***B'''*** con el punto ***B*** y el punto ***C''*** con el punto ***C***; con esto podrás comparar la magnitud de los ángulos. Ahora describe las características que encuentras en común entre las figuras.

Se sugiere recordar que "dos ángulos son iguales cuando el uno puede colocarse sobre el otro de manera que los vértices coincidan y los lados del uno queden sobre los del otro". El arrastre que se les pide tiene como fin hacer esta comparación. La descripción que escriba el alumno dará cuenta de la profundidad de visualización con que cuenta.

Arrastra los puntos ***A***, ***B*** o ***C***. ¿Se siguen manteniendo las mismas características?

Se pretende que a través de la generación de diferentes casos y de la observación el alumno identifique las regularidades que se mantienen.

2. Manipula los puntos ***A***, ***B*** o ***C*** para modelar tres situaciones diferentes. Toma nota de las magnitudes de los ángulos y segmentos necesarios para completar la siguiente tabla. Representa las proporciones y su resultado.

Tabla

Regularidades	Regularidades	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Tres lados de un triángulos son proporcionales a los tres lados de otro triángulo.	$\frac{\lvert\overline{AB}\rvert}{\lvert\overline{A''B''}\rvert} =$			
	$\frac{\lvert\overline{BC}\rvert}{\lvert\overline{B''C''}\rvert} =$			
	$\frac{\lvert\overline{AC}\rvert}{\lvert\overline{A''C''}\rvert} =$			
Dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo.	$\angle A =$			
	$\angle A'' =$			
	$\angle B =$			
	$\angle B'' =$			

Regularidades	Regularidades	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Dos lados cualesquiera de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos entre estos lados son iguales.	$\frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{A''B''}\|} =$			
	$\frac{\|\overline{BC}\|}{\|\overline{B''C''}\|} =$			
	$\angle B =$			
	$\angle B'' =$			

Con la exploración y comparación de las situaciones presentadas en la tabla se pretende que el alumno descubra o confirme los criterios que deben cumplir los triángulos semejantes.

Las tres regularidades mencionadas en la *tabla* son los tres criterios de semejanza de los triángulo.

3. Discute con tus compañeros si para asegurar la semejanza entre dos triángulos de tipo especial (rectangulares, isósceles, equiláteros) es necesario cumplir las mismas o menos condiciones que para los triángulos arbitrarios. Anota las conclusiones a las que llegaron.

Los triángulos rectangulares son semejantes si: a) la hipotenusa y el cateto de un triángulo son proporcionales a la hipotenusa y al cateto de otro triángulos, y b) si el ángulo agudo de un triángulo es igual al ángulo agudo de otro.

Todos los triángulos equiláteros son semejantes

Los triángulos isósceles son semejantes si: a) el ángulo comprendido entre los lados iguales de uno es igual al ángulo comprendido entre los lados iguales del otro, y b) si los lados adyacentes de uno de los dos ángulos iguales de uno son iguales a los lados adyacentes de los dos ángulos iguales del otro

Para cerrar esta actividad se siguiere analizar los casos de triángulos de tipo especial a través de una discusión grupal, de ésta manera se estará construyendo el conocimiento socialmente y a la vez reforzando el conocimiento individual.

Cuadriláteros

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad __________

Escuela ______________________________ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a clasificar ciertos cuadriláteros de acuerdo a sus propiedades.

Escribe lo que entiendes por cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio.

1. Observa las diferentes figuras geométricas contenidas en tu archivo electrónico de GeoGebra. Analízalas para identificar sus componentes y los elementos que se muestran en cada una de ellas. Arrastra los vértices de cada figura para modificarlas, observa los elementos que varían y los que permanecen invariantes en cada caso. La tabla anexa contiene un listado de propiedades que pueden o no cumplir con cada una de las figuras geométricas que has estado explorando, así como el número de1 1 al 6 que corresponden a dichas figuras. De acuerdo a tus exploraciones y observaciones, relaciona el número de figura correspondiente con la propiedad que cumple, para esto rellena el recuadro apropiado en la tabla.

Después que hayas completado la tabla, identifica las figuras:

Figura 1: ______________________________

Figura 2: ______________________________

Figura 3: ______________________________

Figura 4: ______________________________

Figura 5. ______________________________

Figura 6: ______________________________

Tabla anexa

	Propiedades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cuadrilátero	Tiene cuatro lados						
Paralelogramo	Lados opuestos iguales por pares.						
	Lados opuesto iguales y paralelos.						
	El punto medio de su diagonal es su centro de simetría.						
	Los lados opuestos son iguales.						
	Los ángulos opuestos son iguales.						
	Cada diagonal lo divide en dos triángulos iguales.						
	Las diagonales se dividen por el punto de intersección por la mitad.						
	La suma de los cuadrados de las diagonales son iguales a dos veces la suma de los cuadrados de todos sus lados: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$						
Rombo	Todos sus lados son iguales.						
	La recta que contiene la diagonal es su eje de simetría.						
	Sus diagonales son perpendiculares entre sí.						
	Sus diagonales son bisectrices de sus ángulos interiores.						
Rectángulo	Todos sus ángulos son rectos.						
	La perpendicular que pasa por los puntos medios de los lados es su eje de simetría.						
	Tiene dos ejes de simetría.						
	Sus diagonales son iguales.						
Cuadrado	Sus lados son iguales y sus ángulos rectos.						
Trapecio Isósceles	Sólo dos de sus lados son paralelos.						
	Lados laterales son iguales.						
	Los ángulos de la base son iguales por pares.						

Cuadriláteros

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad __________

Escuela ____ Fecha __________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a clasificar ciertos cuadriláteros de acuerdo a sus propiedades.

Escribe lo que entiendes por cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio.

Es importante conocer las definiciones que tiene el estudiante del concepto de cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio; producto de su aprendizaje previo a ésta situación de aprendizaje. Al final de ésta actividad será interesante comparar los elementos que utiliza para identificar las figuras contrastándolos con los de sus definiciones iniciales.

1. Observa las diferentes figuras geométricas contenidas en tu archivo electrónico de GeoGebra. Analízalas para identificar sus componentes y los elementos que se muestran en cada una de ellas. Arrastra los vértices de cada figura para modificarlas, observa los elementos que varían y los que permanecen invariantes en cada caso. La tabla anexa contiene un listado de propiedades que pueden o no cumplir con cada una de las figuras geométricas que has estado explorando, así como el número de1 1 al 6 que corresponden a dichas figuras. De acuerdo a tus exploraciones y observaciones, relaciona el número de figura correspondiente con la propiedad que cumple, para esto rellena el recuadro apropiado en la tabla.

Para relacionar las propiedades con las figuras geométricas, el alumno deberá hacer uso de la exploración, observación, análisis y comparación entre las diferentes figuras geométricas que genere con el modelo dinámico correspondiente, poniendo especial atención en los elementos que permanecen invariantes. Esta actuación abonará en el desarrollo de la habilidad de visualización que le permitirá elaborar conjeturas correctas para posteriormente identificar las diferentes figuras.

Es recomendable que se discuta en grupo las propiedades que se identificaron para asegurar que todos lo estudiantes lleguen al conocimiento que se pretende.

Después que hayas completado la tabla, identifica las figuras:

Figura 1: ______________________________

Figura 2: ______________________________

Figura 3: ______________________________

Figura 4: ______________________________

Figura 5. ______________________________

Figura 6: ______________________________

Aún cuando no es una tarea que se solicita en la actividad, sería altamente recomendable elaborar definiciones de cada una de las figuras geométricas que obviamente tendrán implícitas las propiedades de cada una de ellas. Ésta tarea puede ser individual o grupal, aunque será más enriquecedora la discusión grupal.

Tabla anexa

	Propiedades	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cuadrilátero	Tiene cuatro lados	•	•	•	•	•	•
Paralelogramo	Lados opuestos iguales por pares.		•	•	•	•	
	Lados opuesto iguales y paralelos.		•	•	•	•	
	El punto medio de su diagonal es su centro de simetría.			•	•	•	
	Los lados opuestos son iguales.		•	•	•	•	
	Los ángulos opuestos son iguales.		•	•	•	•	
	Cada diagonal lo divide en dos triángulos iguales.		•	•	•	•	
	Las diagonales se dividen por el punto de intersección por la mitad.		•	•	•	•	
	La suma de los cuadrados de las diagonales son iguales a dos veces la suma de los cuadrados de todos sus lados: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$		•	•	•	•	
Rombo	Todos sus lados son iguales.				•	•	
	La recta que contiene la diagonal es su eje de simetría.				•	•	
	Sus diagonales son perpendiculares entre sí.				•	•	
	Sus diagonales son bisectrices de sus ángulos interiores.				•	•	
Rectángulo	Todos sus ángulos son rectos.			•	•		
	La perpendicular que pasa por los puntos medios de los lados es su eje de simetría.			•	•		
	Tiene dos ejes de simetría.			•	•		
	Sus diagonales son iguales.			•	•		•
Cuadrado	Sus lados son iguales y sus ángulos rectos.				•		
Trapecio Isósceles	Sólo dos de sus lados son paralelos.						•
	Lados laterales son iguales.		•	•	•	•	•
	Los ángulos de la base son iguales por pares.			•	•		•

Cuerdas y arcos en la circunferencia

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Hacer inferencias. Llevar al alumno a demostrar un teorema referente a cuerdas y arcos de un círculo y su recíproco.

Escribe lo que entiendes por cuerda y arco de la circunferencia y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

____

____

____

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Cuerda	Arco subtendido por ésta cuerda	Distancia de la cuerda al centro de la circunferencia	Ángulo del arco respectivo
$\overline{AB}$			
$\overline{CD}$			

Manipula el punto ***P*** para modificar el tamaño del círculo y de la circunferencia, los puntos ***A, B***, ***C*** o ***D*** para variar la magnitud y posición de las cuerdas, observa que al hacer esto la distancia de las cuerdas al centro de la circunferencia también se modifica, identifica las regularidades para responder las siguientes cuestiones:

a. En una circunferencia, ¿cómo son entre sí dos cuerdas que se encuentran a la misma distancia del centro de la circunferencia? __________________________.

b. De dos cuerdas no iguales de la circunferencia ¿la cuerda mayor es la que se encuentra más cerca o más lejos del centro de la circunferencia? ______________________.

c. ¿Siempre se conserva la perpendicularidad entre el diámetro que divide la cuerda por la mitad y ésta cuerda? __________________.

d. ¿Cómo son los arcos que están unidos por cuerdas iguales? ______________________.

e. ¿Cómo son las cuerdas que unen arcos iguales? ______________________.

f. ¿En qué proporción es dividido un arco por el diámetro que es perpendicular a la cuerda que lo une? _________________________.

2. Relaciona las inferencias de los incisos anteriores con los siguientes teoremas:

Teorema	**incisos**
La perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda biseca la cuerda y los arcos subtendidos.	
En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y la mayor de dos cuerdas desiguales subtienden el mayor arco.	
En un mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro, y recíprocamente, las cuerdas equidistantes del centro son iguales.	
Si dos cuerdas de un mismo círculo o de círculos iguales no equidistan del centro, la que menos dista es mayor que la otra.	
En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y el mayor de dos arcos desiguales es subtendido por mayor cuerda.	

3. Sean $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{CD}}$ dos cuerdas iguales del círculo $\boldsymbol{ACDB}$. Demostrar que $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$ equidistan del centro $\boldsymbol{O}$.

Sugerencia: Trácese $\overline{\boldsymbol{OE}} \perp$ a $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{OF}} \perp$ a $\overline{\boldsymbol{CD}}$, y $\overline{\boldsymbol{OA}}, \overline{\boldsymbol{OC}}$.

4. Supóngase que $\overline{\boldsymbol{OE}}$ y $\overline{\boldsymbol{OF}}$ son perpendiculares iguales trazadas del centro a las cuerdas $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{CD}}$. Demostrar que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$.

Cuerdas y arcos en la circunferencia

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Hacer inferencias. Llevar al alumno a demostrar un teorema referente a cuerdas y arcos de un círculo y su recíproco.

Escribe lo que entiendes por cuerda y arco de la circunferencia y haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto a los conceptos de cuerda y arco de una circunferencia, así como la imagen interna que tiene de los mismos para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Visualiza el modelo dinámico contenido en el archivo electrónico que se te proporcionó. Identifica los objetos geométricos de la construcción y completa la siguiente tabla.

Cuerda	Arco subtendido por ésta cuerda	Distancia de la cuerda al centro de la circunferencia	Ángulo del arco respectivo
$\overline{AB}$	$\overset{\frown}{ALB}$	$\overline{EO}$	$\widehat{AOB}$
$\overline{CD}$	$\overset{\frown}{CKD}$	$\overline{FO}$	$\widehat{COD}$

El alumno hará uso del lenguaje simbólico para señalar los diferentes objetos que se solicitan.

Manipula el punto ***P*** para modificar el tamaño del círculo y de la circunferencia, los puntos ***A, B***, ***C*** o ***D*** para variar la magnitud y posición de las cuerdas, observa que al hacer esto la distancia de las cuerdas al centro de la circunferencia también se modifica, identifica las regularidades para responder las siguientes cuestiones:

a. En una circunferencia, ¿cómo son entre sí dos cuerdas que se encuentran a la misma distancia del centro de la circunferencia? ___________*iguales*___________.

b. De dos cuerdas no iguales de la circunferencia ¿la cuerda mayor es la que se encuentra más cerca o más lejos del centro de la circunferencia? _____*cerca*______.

c. ¿Siempre se conserva la perpendicularidad entre el diámetro que divide la cuerda por la mitad y ésta cuerda? _____*sí*__________.

d. ¿Cómo son los arcos que están unidos por cuerdas iguales? ______*iguales*______.

e. ¿Cómo son las cuerdas que unen arcos iguales? ____*iguales*_________.

f. ¿En qué proporción es dividido un arco por el diámetro que es perpendicular a la cuerda que lo une? _____*por la mitad*_____.

A través de la manipulación y la interpretación del modelo dinámico, así como de la observación el alumno estará en condiciones de inferir las respuestas para completar los párrafos anteriores. De ésta manera el alumno se acerca intuitivamente a los teoremas referentes a cuerdas y arcos en la circunferencia.

En seguida se le pide que establezca una relación entre lo que sabe de manera intuitiva con los teoremas correspondientes.

2. Relaciona las inferencias de los incisos anteriores con los siguientes teoremas:

Teorema	**incisos**
La perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda biseca la cuerda y los arcos subtendidos.	c, f
En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y la mayor de dos cuerdas desiguales subtienden el mayor arco.	d, e
En un mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro, y recíprocamente, las cuerdas equidistantes del centro son iguales.	a
Si dos cuerdas de un mismo círculo o de círculos iguales no equidistan del centro, la que menos dista es mayor que la otra.	b
En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y el mayor de dos arcos desiguales es subtendido por mayor cuerda.	d, e

Es recomendable comentar la importancia de la demostración para elevar el estatus de lo que se conoce intuitivamente hacia el verdadero conocimiento matemático.

3. Sean $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{CD}}$ dos cuerdas iguales del círculo $\boldsymbol{ACDB}$. Demostrar que $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{CD}}$ equidistan del centro $\boldsymbol{O}$.

Sugerencia: Trácese $\overline{\boldsymbol{OE}} \perp$ a $\overline{\boldsymbol{AB}}$, $\overline{\boldsymbol{OF}} \perp$ a $\overline{\boldsymbol{CD}}$, y $\overline{\boldsymbol{OA}}, \overline{\boldsymbol{OC}}$.

Ahora bien, $\overline{\boldsymbol{AE}} = \overline{\boldsymbol{EB}}$, $\overline{\boldsymbol{CF}} = \overline{\boldsymbol{FD}}$ *porque la perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda biseca la cuerda y los arcos subtendidos. Puesto que* $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$, *entonces* $\overline{\boldsymbol{AE}} = \overline{\boldsymbol{CF}}$ *y también que* $\overline{\boldsymbol{OA}} = \overline{\boldsymbol{OC}}$ *porque son los radios del mismo círculo.*

Ahora los $\triangle \boldsymbol{OEA}$, $\triangle \boldsymbol{OFC}$ *son iguales porque tienen iguales la hipotenusa y uno de los catetos,*

$\therefore \overline{\boldsymbol{OE}} = \overline{\boldsymbol{OF}}$. $\therefore$ $\overline{\boldsymbol{AB}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{CD}}$ *equidistan de* $\boldsymbol{O}$ ■

Se aconseja mencionar a los estudiantes que no existe un camino real en las demostraciones, se requiere de práctica, incluso de un factor de suerte para encontrarlo, pero en cualquier caso, conviene partir de lo que se conoce y explicitar claramente lo que se debe buscar, ya que una buena formulación y comprensión del problema es parte esencial para su resolución.

4. Supóngase que $\overline{\boldsymbol{OE}}$ y $\overline{\boldsymbol{OF}}$ son perpendiculares iguales trazadas del centro a las cuerdas $\overline{\boldsymbol{AB}}, \overline{\boldsymbol{CD}}$. Demostrar que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$.

Puesto que $\overline{\boldsymbol{OA}} = \overline{\boldsymbol{OC}}$ *por ser radios del mismo círculo, y también* $\overline{\boldsymbol{OE}} = \overline{\boldsymbol{OF}}$ *por hipót.*

entonces los $\triangle \boldsymbol{OEA}$ y $\triangle \boldsymbol{OFC}$ *son iguales,* $\therefore$ $\overline{\boldsymbol{AE}} = \overline{\boldsymbol{FC}}$, $\therefore$ $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$ ■

Circunferencia, tangentes y secantes

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ____ Edad ___________

Escuela ____ Fecha ___________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir uno de los teorema de tangentes, así como algunos corolarios derivados del mismo.

Escribe lo que entiendes por círculo, circunferencia, tangentes y secante; haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

____

____

____

1. Observa el modelo geométrico que se te proporcionó, en él están representadas rectas tangentes y secantes que tienen puntos en común con la circunferencia y pertenecen al plano de la circunferencia. Manipula el modelo arrastrando los puntos ***A***, ***C***, ***D***, ***P*** y ***O***. Identifica las regularidades en diferentes casos para responder las siguientes cuestiones:

   a. ¿Cuántos puntos tiene en común una circunferencia con una recta tangente a la misma, en otras palabras, cuántos puntos de contacto existen entre ellas? ______________________________

   b. ¿Cuántos puntos en común tiene una circunferencia con una recta secante de la misma, o lo que es lo mismo, cuántos puntos de contacto existen entre ellas? ___________________________

   c. ¿Cuántas tangentes a un circulo puedes trazar a través de un punto ***A*** que se encuentra fuera de éste círculo? ____

d. ¿Cuántas secantes de un círculo puedes trazar a través de un punto $\boldsymbol{A}$ que se encuentra fuera de éste círculo? ____

e. ¿Qué condición debe cumplir una recta tangente al círculo con respecto al radio de éste círculo? ____

f. ¿En qué ocasiones la perpendicular a una tangente en el punto de contacto pasa por el centro del círculo?____

g. ¿En qué ocasiones la perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto? ____

h. ¿Cómo son entre sí las magnitudes de las tangentes a un círculo trazadas desde un punto fuera del círculo?____

Discute con tus compañeros las respuestas anteriores.

2. Manipula los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ o $\boldsymbol{D}$ para modelar situaciones diferentes. Observa cómo varía la magnitud de la tangente y su cuadrado, así mismo la variación de los segmentos de cada secante y el producto de éstos. Ahora escribe simbólicamente la relación existente entre los segmentos de la tangente y de la secante.

____
____
____

3. Siendo $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB'}}$ dos tangentes trazadas de $\boldsymbol{A}$ al círculo $\boldsymbol{O}$. Demuestra que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{AB'}}$, y ∠ **BAO** = ∠ **OAB'.**

____
____
____
____
____
____
____

Compara tu demostración con algunos de tus compañeros.

Circunferencia, tangentes y secantes

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad ________

Escuela ______________________________ Fecha ________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir uno de los teorema de tangentes, así como algunos corolarios derivados del mismo.

Escribe lo que entiendes por círculo, circunferencia, tangentes y secante; haz un dibujo para ilustrarlo.

____

____

____

____

____

____

____

Siendo que la construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de problemas, así como el de la búsqueda de solución(es), es necesario conocer los saberes previos con que cuenta el estudiante con respecto a los conceptos de circunferencia, círculo, tangente y secante, así como la imagen interna que tiene de los mismos para saber cuál es su estado al iniciar a enfrentar las situaciones que se le irán presentando a lo largo de esta actividad.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*

4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Observa el modelo geométrico que se te proporcionó, en él están representadas rectas tangentes y secantes que tienen puntos en común con la circunferencia y pertenecen al plano de la circunferencia. Manipula el modelo arrastrando los puntos ***A***, ***C***, ***D***, ***P*** y ***O***. Identifica las regularidades en diferentes casos para responder las siguientes cuestiones:

   i. ¿Cuántos puntos tiene en común una circunferencia con una recta tangente a la misma, en otras palabras, cuántos puntos de contacto existen entre ellas? ________*uno*____________

   j. ¿Cuántos puntos en común tiene una circunferencia con una recta secante de la misma, o lo que es lo mismo, cuántos puntos de contacto existen entre ellas? ______*dos*__________________

   k. ¿Cuántas tangentes a un circulo puedes trazar a través de un punto ***A*** que se encuentra fuera de éste círculo? ________*dos*____

   l. ¿Cuántas secantes de un círculo puedes trazar a través de un punto ***A*** que se encuentra fuera de éste círculo? __________*infinitas*____

   m. ¿Qué condición debe cumplir una recta tangente al círculo con respecto al radio de éste círculo? *debe ser perpendicular al extremo del radio*_______________________________________

   n. ¿En qué ocasiones la perpendicular a una tangente en el punto de contacto pasa por el centro del círculo?_________*siempre*____

   o. ¿En qué ocasiones la perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto? ______*siempre*____

   p. ¿Cómo son entre sí las magnitudes de las tangentes a un círculo trazadas desde un punto fuera del círculo?_________________*iguales*____

Discute con tus compañeros las respuestas anteriores.

La intención es que a través de la observación e intuiciones primarias, la exploración y generación de diferentes situaciones, el alumno descubra las regularidades que lo llevarán a conjeturar y dar respuesta a las preguntas seleccionadas para acercarlo a los teoremas de las tangentes y sus corolarios.

Se debe estar alerta a la discusión que se lleve a cabo para explotar cualquier situación que pueda enriquecer el conocimiento pretendido.

2. Manipula los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ o $\boldsymbol{D}$ para modelar situaciones diferentes. Observa cómo varía la magnitud de la tangente y su cuadrado, así mismo la variación de los segmentos de cada secante y el producto de éstos. Ahora escribe simbólicamente la relación existente entre los segmentos de la tangente y de la secante.

$\overline{\boldsymbol{AB^2}} = \overline{\boldsymbol{AC}} * \overline{\boldsymbol{AC'}} = \overline{\boldsymbol{AD}} * \overline{\boldsymbol{AD'}}$

La idea es que comunique, en lenguaje simbólico, las relaciones de las regularidades que observa.

3. Siendo $\overline{\boldsymbol{AB}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB'}}$ dos tangentes trazadas de $\boldsymbol{A}$ al círculo $\boldsymbol{O}$. Demuestra que $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{AB'}}$, y $\angle$ **BAO** = $\angle$ **OAB'.**

$\overline{\boldsymbol{AB}}$ *es* $\perp$ *a* $\overline{\boldsymbol{OB}}$*, y* $\overline{\boldsymbol{AB'}}$ *es* $\perp$ *a* $\overline{\boldsymbol{OB'}}$ *por ser la recta bajada del punto de contacto al centro del círculo, entonces* $\triangle\boldsymbol{ABO}$ *y* $\triangle\boldsymbol{AB'O}$ *son rectángulos.* $\overline{\boldsymbol{BO}} = \overline{\boldsymbol{OB'}}$ *por ser radios,* $\overline{\boldsymbol{AO}}$ *es común para los dos triángulos* $\therefore \triangle\, \boldsymbol{ABO} = \triangle\, \boldsymbol{AB'O}$ *por criterio de LAL.* $\therefore \overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{AB'}}$*, y* $\angle\boldsymbol{BAO} = \angle\boldsymbol{B'AO}$ ■

Compara tu demostración con algunos de tus compañeros.

Después de inducir al alumno a descubrir teoremas relacionados con tangentes, es importante que preste atención a la importancia de la deducción que lo llevará a demostrar las certezas previamente enunciadas. Se deberá hacer énfasis en que lo que se sabe por intuición solo puede ser elevado a conocimiento matemático a través de la demostración.

Ángulos en la circunferencia

Disponible en: https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre	______________________________	Edad	__________
Escuela	______________________________	Fecha	__________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir las relaciones existentes entre los diferentes ángulos en la circunferencia con los arcos comprendidos entre sus lados.

1. Observa el modelo geométrico que se te proporcionó, en él están representadas varias circunferencias, $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ y ζ_5; las cuales son intersecadas por rectas tangentes o secantes formando diferentes ángulos entre ellas; éstos ángulos guardan una relación con los arcos comprendidos entre sus lados. Para conocer ésta relación deberás manipular cada una de las circunferencias con los puntos que contienen, ***P***, ***A***, ***B*** o ***C***. En la siguiente tabla registra los datos (valores angulares) de dos situaciones diferentes para cada circunferencia: ζ, ζ_1, ζ_2 y ζ_3 ; observa cómo se comportan éstos datos e infiere la relación guardada entre el ángulo y los arcos comprendidos entre sus lados, escribe ésta relación en forma simbólica en el recuadro que corresponde.

<table>
<tr><td rowspan="4">ζ</td><td colspan="4">$\angle ACB$ es un ángulo inscrito en ζ</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{ALB}$</td><td>$\angle ACB$</td><td colspan="2">$\angle ACB$ en función del arco</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">$\angle ACB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ALB}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_1</td><td colspan="4">$\angle A_1C_1B_1$ es un ángulo circunscrito en ζ_1</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{A_1L_1B_1}$</td><td>$\overset{\frown}{A_1D_1B_1}$</td><td>$\angle A_1C_1B_1$</td><td>$\angle A_1C_1B_1$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_1L_1B_1} - \overset{\frown}{A_1D_1B_1}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_2</td><td colspan="4">$\angle A_2C_2B_2$ es un ángulo formado por dos secantes que tienen un punto en común, el cual se encuentra fuera de ζ_2</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{A_2L_2B_2}$</td><td>$\overset{\frown}{A'_2D_2B'_2}$</td><td>$\angle A_2C_2B_2$</td><td>$\angle A_2C_2B_2$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_2C_2B_2 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_2D_2B_2} - \overset{\frown}{A_2L_2B_2}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_3</td><td colspan="4">$\angle A_3C_3B_3$ es un ángulo formado por dos secantes que tienen un punto en común situado en el interior de ζ_3</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{A_3L_3B_3}$</td><td>$\overset{\frown}{A'_3D_3B'_3}$</td><td>$\angle A_3C_3B_3$</td><td>$\angle A_3C_3B_3$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_3C_3B_3 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_3D_3B_3} + \overset{\frown}{A_3L_3B_3}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Ahora, centra tu atención en ζ_4 y ζ_5. Manipula los puntos ***A***, ***B*** y ***C*** para variar los ángulos inscritos formados por las rectas secantes, identifica las regularidades de los ángulos en cada circunferencia para responder las siguientes cuestiones:

   a. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un semicírculo? Justifica tu respuesta.

   b. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un arco mayor que un semicírculo? Justifica tu respuesta.

   c. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un arco menor que un semicírculo? Justifica tu respuesta.

   d. En la $\boldsymbol{\zeta_5}$ arrastra uno de los ángulos de tal manera que los dos ángulos estén en el mismo arco. ¿Cómo son todos los ángulos inscritos en un mismo arco o en arcos iguales? Justifica tu respuesta.

Ángulos en la circunferencia

https://sites.google.com/site/optativadidactica3mdm/aprendizaje-de-la-geometria-euclidiana

Nombre ______________________________ Edad ________

Escuela ______________________________ Fecha ________

Propósito: Establecer conjeturas a partir de lo observado. Inducir al alumno a descubrir las relaciones existentes entre los diferentes ángulos en la circunferencia con los arcos comprendidos entre sus lados.

A partir de aquí comienza el proceso de pensar reflexivamente que consiste en cinco fases:

1. *Tentativa de interpretación a través de la observación de las condiciones presentes y experiencia previa.*
2. *Intelectualización de la dificultad en un problema que hay que resolver.*
3. *Uso de una sugerencia tras otra como idea conductora o hipótesis.*
4. *La elaboración racional de la idea o suposición.*
5. *Comprobación de la hipótesis mediante la acción real o imaginada.*

Cabe mencionar que estas fases se repiten a lo largo de la actividad debido a la intencionalidad de cada una de ellas.

1. Observa el modelo geométrico que se te proporcionó, en él están representadas varias circunferencias, $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta_1}, \boldsymbol{\zeta_2}, \boldsymbol{\zeta_3}, \boldsymbol{\zeta_4}$ y $\boldsymbol{\zeta_5}$; las cuales son intersecadas por rectas tangentes o secantes formando diferentes ángulos entre ellas; éstos ángulos guardan una relación con los arcos comprendidos entre sus lados. Para conocer ésta relación deberás manipular cada una de las circunferencias con los puntos que contienen, ***P***, ***A***, ***B*** o ***C***. En la siguiente tabla registra los datos (valores angulares) de dos situaciones diferentes para cada circunferencia: $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta_1}, \boldsymbol{\zeta_2}$ y $\boldsymbol{\zeta_3}$; observa cómo se comportan éstos datos e infiere la relación guardada entre el ángulo y los arcos comprendidos entre sus lados, escribe ésta relación en forma simbólica en el recuadro que corresponde.

La idea es que al registrar datos de diferentes situaciones en un mismo caso de circunferencia, el alumno infiera de manera directa la relación existente entre el ángulo y el, o los arcos comprendidos entre sus lados, de lo contrario se le invita a persistir en la búsqueda de tal relación observando la variación del ángulo y los arcos implicados.

<table>
<tr><td rowspan="4">ζ</td><td colspan="4">$\angle ACB$ es un ángulo inscrito en ζ</td></tr>
<tr><td>$\overset{\frown}{ALB}$</td><td>$\angle ACB$</td><td colspan="2">$\angle ACB$ $en\ función\ del\ arco$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">$\angle ACB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ALB}\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_1</td><td colspan="4">$\angle A_1C_1B_1$ es un ángulo circunscrito en ζ_1</td></tr>
<tr><td>$A_1\overset{\frown}{L_1}B_1$</td><td>$A_1\overset{\frown}{D_1}B_1$</td><td>$\angle A_1C_1B_1$</td><td>$\angle A_1C_1B_1$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}\left(A_1\overset{\frown}{L_1}B_1 - A_1\overset{\frown}{D_1}B_1\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_2</td><td colspan="4">$\angle A_2C_2B_2$ es un ángulo formado por dos secantes que tienen un punto en común, el cual se encuentra fuera de ζ_2</td></tr>
<tr><td>$A_2\overset{\frown}{L_2}B_2$</td><td>$A'_2\overset{\frown}{D_2}B'_2$</td><td>$\angle A_2C_2B_2$</td><td>$\angle A_2C_2B_2$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_2C_2B_2 = \frac{1}{2}\left(A_2\overset{\frown}{D_2}B_2 - A_2\overset{\frown}{L_2}B_2\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">ζ_3</td><td colspan="4">$\angle A_3C_3B_3$ es un ángulo formado por dos secantes que tienen un punto en común situado en el interior de ζ_3</td></tr>
<tr><td>$A_3\overset{\frown}{L_3}B_3$</td><td>$A'_3\overset{\frown}{D_3}B'_3$</td><td>$\angle A_3C_3B_3$</td><td>$\angle A_3C_3B_3$ en función de los arcos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\angle A_3C_3B_3 = \frac{1}{2}\left(A_3\overset{\frown}{D_3}B_3 + A_3\overset{\frown}{L_3}B_3\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Una vez establecidas las relaciones se invita a los alumnos a comprobarlas con diferentes valores de arcos en el modelo geométrico correspondiente.

Aún cuando en esta actividad no se trabaje la demostración, se puede insistir en la importancia de la demostración en la actividad matemática.

2. Ahora, centra tu atención en ζ_4 y ζ_5. Manipula los puntos A, B y C para variar los ángulos inscritos formados por las rectas secantes, identifica las regularidades de los ángulos en cada circunferencia para responder las siguientes cuestiones:

La idea es que el alumno haga inferencias para establecer conjeturas que responderán a las siguientes cuestiones.

a. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un semicírculo? Justifica tu respuesta.

Recto, pues tal ángulo es la mitad de un arco de 180º que es la magnitud de un semicírculo.

b. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un arco mayor que un semicírculo? Justifica tu respuesta.

Agudos, porque tales ángulos serán la mitad de un arco menor de 180º, es decir un ángulo menor a 90º.

c. ¿De qué clase son todos los ángulos inscritos en un arco menor que un semicírculo? Justifica tu respuesta.

Obtusos, porque tales ángulos serán la mitad de un arco mayor de 180º, es decir un ángulo mayor a 90º.

d. En la $\boldsymbol{\zeta_5}$ arrastra uno de los ángulos de tal manera que los dos ángulos estén en el mismo arco. ¿Cómo son todos los ángulos inscritos en un mismo arco o en arcos iguales? Justifica tu respuesta.

Iguales, ya que la magnitud del ángulo depende del arco en el que está inscrito, por lo tanto si los ángulos están inscritos en el mismo arco, los ángulos serán iguales.

7. COMENTARIOS FINALES A MANERA DE CONCLUSIÓN

El modelo para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana que se porpone en este trabajo no pretende ser la panacea en la solución de todos los problemas involucrados en el aprendizaje de la Geometría, como tampoco que los alumnos comprendan y aprendan Geometría Euclidiana sin ningún esfuerzo. Lo que pretende ser es un método que proporcione mejores resultados que otras formas de trabajo, ofreciendo una alternativa donde los alumnos son llevados a razonar lo que están haciendo, a comprender el significado de la Geometría Euclidiana y que lleguen a ser capaces de resolver problemas diferentes de los ya conocidos, dejando a un lado la memorización estéril.

Con la combinación de tecnología y hojas de trabajo de ésta propuesta, el papel del profesor cambia radicalmente, las intervenciones del profesor son enfocadas a que los alumnos reflexionen y encuentren por sí mismos una solución aceptable. Desde el inicio de cada una de las actividades, el propósito siempre deberá ser ayudar a los alumnos a que se involucren en la actividad, pongan en juego su saber matemático anterior y lleguen a desarrollar correctamente las ideas matemáticas a partir de sus propias experiencias derivadas de la manipulación, exploración de los modelos dinámicos y de la retroalimentación que les provee el software. Por lo tanto, el profesor deberá asumir el papel de organizador del trabajo, de guía y de asesor.

En este mismo sentido, las actividades propuestas colocan al alumno en situación de participar activamente en la construcción de sus propios conceptos, de los diferentes objetos matemáticos relacionados con la Geometría Euclidiana; fomentando una actividad matemática viva, variada, dinámica, exploratoria, de tal manera que el estudiante sienta el placer de ir descubriendo por sí mismo las relaciones geométricas que existen entre diferentes objetos geométricos.

Finalmente, en necesario señalar que hasta el momento no ha sido posible aplicar una prueba piloto que nos ofrezca resultados acerca de la propuesta, sin embargo, existe la confianza de que funciona porque ha sido sustentada en diferentes investigaciones que particularmente tienen resultados positivos en el uso del pensamiento reflexivo, SGD y uso de modelos dinámicos para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.

8. REFERENCIAS

Abrate, R., Delgado, G., & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39 (1), 1-9. Disponible en http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Alsina, C., Fortuny, J. M., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid, Madrid, España: Síntesis, S. A.

Chermello, G., & Crippa, A. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En M. Agrasar, G. Chemello, Y. Chevallard, A. Crippa, A. Díaz, A. Novembre, y otros, *Enseñanzar matemáticas en la escuela media* (1ª ed., págs. 55-77). Buenos Aires, Argentina: Biblos.

Dewey, J. (1989). *Cómo Pensamos. La relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. (M. A. Galmarini, Trad.) Barcelona, España: Paidós Ibérica, S. A.

Díaz, A. L. (2011). Representaciones en geometría. En M. Agrasar, G. Chemello, Y. Chevallard, A. Crippa, A. Díaz, A. Novembre, y otros, *Enseñar matemáticas en la escuela media* (1ª ed., pág. 103-130). Buenos Aires, Argentina: Biblos.

DOF. (2008). *Acuerdo 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad.* Secretaría de Gobernación, Secretaría de Educación Pública, México, D.F. Disponible en http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5061936&fecha=26/09/2008

DOF. (2008). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* Secretaría de Gobernación, Secretaría de Educación Pública, México, D.F. Disponible en http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5064951&fecha=21/10/2008

Falsetti, M., Rodríguez, M., Carnelli, G., & Formica, F. (2007). Perspectiva integrada de la Educación y el Aprendizaje de la Matemática: una mirada a la Educación Matemática. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (9), 165-186. Disponible en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2218708

Flores, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19 (001), 63-98. Disponible en http://www.redalyc.org/pdf/405/40516671002.pdf

Gagatsis, A., & Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. (K. A. Publisher, Ed.) *Educational Studies in Mathematics*, 21 (1), 29-54.

Gamboa, R., & Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica EDUCARE*, 14 (2), 125-142. Disponible en http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/issue/view/157

García , S., & López, O. (2008). *La Enseñanza de la Geometría.* (INEE, Ed.) México, D.F.: INEE. Disponible en: http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

Guerrero, L. (2010). Desarrollo de software para promover el aprendizaje de la demostración en geometría. En R. Pantoja, & E. Añorve (Edits.), *Uso de Tecnología en Educación Matemática: Investigaciones y propuestas 2010* (1ª ed., págs. 17-28). México: Instituto tecnológico de Ciudad Guzmán.

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre el aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Edits.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* (págs. 27-44). Córdoba, España. Disponible en http://www.uv.es/gutierre/textos.html

Guzmán, M. d. (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. En Enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Tendencias e Innovaciones*. OEI. Disponible en http://www.oei.es/edumat.htm

INEE. (2013). *México en PISA 2012* (1ª ed.). DF, México. Disponible en http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/C/I125/P1CI125.pdf

Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En M. V. Sánchez, M. V. Sánchez, & S. Linares (Edits.), *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla: Alfar. Disponible en http://www.uv.es/gutierre/textos.html

Larios, V. (2006a). La influencia de la computadora como mediadora semiótica entre el conocimiento y el alumno: El caso de la Geomtería. En S. M. Nacional, *Memorias del XXII Simposio Internacional de Computación en la Educación* (págs. 1-10). D.F., México: Sociedad Mexicana de Computación en la Educación e Instituto Politécnico Nacional. Disponible en http://www.te.ipn.mx/somece2006memorias/autor/files/2_LariosOsorioVictor.pdf

Larios, V. (2006b). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar. Reflexiones y propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica* (1ª ed.). Querétaro, México: Escuela de Bachilleres, Universidad Autónoma de Querétaro. Disponible en http://www.redalyc.org/pdf/335/33590303.pdf

Larios, V., & González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), 13* (4-I), 147-160. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime/201009d.pdf

León, T. (2008). *Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria*. Tesis doctoral, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana. Disponible en http://revistas.mes.edu.cu/greenstone/collect/repo/import/repo/20080814/9789591607751.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Enlace Editores Ltda. Bogotá. Disponible es http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

OCDE. (2005). *La Definición y Selección de Competencias Clave: Resumen Ejecutivo.* Paris, Francia. Disponible en http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

OCDE. (2013). *Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) PISA 2012 - Resultados.* Resultados, OCDE, Educación. Disponible en http://www.oecd.org/centrodemexico/medios/Mexico%20Country%20Note_SPANISH_final%20GR1_EGcomments_02_12_2013%20final.pdf

Ojeda, B., Medina, B., & Peralta, D. (2003). Cómo justificar en matemáticas. *Xictli de la Unidad UPN 094* (52). Disponible en http://www.unidad094.upn.mx/revista/52/06.html

Sandoval, I. T. (2011). Las tecnologías digitales y las representaciones en la clase de las matemáticas. En C. d. México (Ed.), *Cuadernos México Núm. 3* (págs. 55-73). México, D.F. Disponible en http://www.educacion.gob.es/exterior/mx/es/File/CuadernosMexico3.pdf

SEP. (2013). *Las competencias genéricas en el estudiante del bachillerato general.* Dirección General de Bachillerato, Dirección de Coordinación Académica, México, D.F. Disponible en http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/00-otros/cg-e-bg.pdf

SEP-SEMS. (2011). *Documento base del bachillerato general.* Dirección General de Bachillerato, Dirección de Coordinación Académica, México, D.F. Disponible en http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/documentobase/doc_base_032012_rev01.pdf

Soriano, E. (1996). Enseñar a pensar al alumnado del primer ciclo de primaria a través de la matemática. *SUMA 23*, 7-20. Disponible en http://revistasuma.es/IMG/pdf/23/007-020.pdf

UAQ. (2010). *Programa de Matemáticas III. Plan de Estudios PRE09.* Escuela de Bachilleres, Universidad Autónoma de Querétaro. Quéretaro: Universidad Autónoma de Querétaro.

Vidal, R. (2009). *¿Enlace, Exani, Excale o PISA?* Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior A. C. (Ceneval), México, D.F. Disponible en http://www.educacionyculturaaz.com/wp-content/uploads/2013/01/Enlace_Exani_Excali_Pisa.pdf

9. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Daros, W. R. (2009). *Teoría del Aprendizaje Reflexivo.* Recuperado el 22 de agosto de 2012 de http://www.ucel.edu.ar/upload/libros/Teoria_del_aprendizaje_reflexivo.pdf

Goñi Zabala, J. (2008). *7 Ideas clave: El desarrollo de la competencia matemática* (1ª ed.). España: GRAÓ.

Gutiérrez, Á. (2004). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría euclidiana en secundaria. *Yupana* (01), 11-26. Disponible en http://www.uv.es/gutierre/textos.html

Perrenoud, P. (2008). *Construir competencias desde la escuela.* (J.C.SÁEZ, Ed., & M. Lorca, Trad.) Chile: Comuniaciones y Ediciones Noreste Ltda.

Tobón, S., Pimienta, J., & Gracía Fraile, J. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias.* Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

Tsipkin, A. (1985). *Manual de matemáticas para la enseñanza media.* (T. Shapovalova, Trad.) Moscú, URSS: Mir Moscú.

Wentworth, J., & Smith, D. (1915). *Geometría plana y del espacio*. EUA: Ginn y compañía.

Zubieta, G., Martínez, A., Rojano, T., & Ursini, S. (2000). *Geometría dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología.* (1ª ed.). México, D.F., México: SEP, ILCE. Disponible en http://efit-emat.dgme.sep.gob.mx/emat/ematlibros.htm