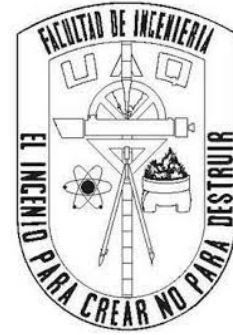


Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Ingeniería física



CONSTRICCIONES DE ENERGÍA OSCURA CON ENFOQUE EN PARAMETRIZACIONES FENOMENOLÓGICAS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Ingeniero físico

Presenta:

Mónica Noelia Castillo Santos

Dirigido por:

Dr. Alberto Hernández Almada

SINODALES

Alberto Hernández Almada
Presidente

Firma

Josué de Jesús Trejo Alonso
Secretario

Firma

Aldrin Melitón Cervantes Contreras
Vocal

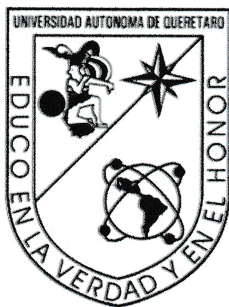
Firma

Octavio Cornejo Pérez
Suplente

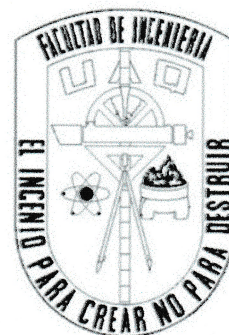
Firma

José Alonso López Miranda
Suplente

Firma



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Ingeniería física



CONSTRICCIONES DE ENERGÍA OSCURA CON ENFOQUE EN PARAMETRIZACIONES FENOMENOLÓGICAS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Ingeniero físico

Presenta:

Mónica Noelia Castillo Santos

Dirigido por:

Dr. Alberto Hernández Almada

SINODALES

Alberto Hernández Almada
Presidente

Josué de Jesús Trejo Alonso
Secretario

Aldrin Melitón Cervantes Contreras
Vocal

Octavio Cornejo Pérez
Suplente

José Alonso López Miranda
Suplente

Firma

Firma

Firma

Octavio Cornejo Pérez

Firma

Firma

A mi padres y mis abuelos.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Mónica y Noé, por ser los principales promotores de mis sueños, por enseñarme a no tener miedo y a luchar por lo que quiero.

A mi abuelita Margarita, por siempre creer en mi, motivarme a ser mejor y a nunca rendirme.

A mi asesor, Dr. Alberto Hernández Almada, por el apoyo en la realización de esta tesis, por la oportunidad de adquirir conocimiento durante 3 años y por ser mi guía en la investigación científica.

A mis sinodales el Dr. Josue Trejo, Dr. Aldrin Cervantes, Dr. Octavio Cornejo y Dr. Alonso López, por sus valiosos comentarios en esta tesis y su participación en mi formación académica.

Al Laboratorio Nacional de Supercomputo del Sureste de México y al Dr. Manuel Zamora por permitirme hacer uso de los clusters para la obtención de datos.

Resumen

En el presente trabajo se estudia la dinámica del Universo mediante los modelos cosmológicos ω CDM, CPL y de Gong-Zhang, los cuales contemplan que la ecuación de estado de la energía oscura es dinámica. A través del Método de Monte Carlo basado en Cadenas de Markov se realiza una inferencia estadística de los parámetros libres de los modelos usando las mediciones más recientes de supernovas tipo Ia y de las observaciones directas del parámetro de Hubble. Con la finalidad de comparar geoméricamente estos modelos con el modelo estándar de la cosmología (Λ CDM, por sus siglas en inglés), se realiza la reconstrucción de los parámetros cosmográficos, los diagnósticos de estado y se calcula la edad del Universo. Se encontró que ω CDM y CPL son consistentes con Λ CDM. La principal diferencia entre estas cosmologías se encuentra en ordenes superiores de la cosmografía. Con respecto a los diagnósticos, existe la misma discrepancia, pues estos son construidos a partir de la cosmografía. Para la edad del Universo de estas cosmologías son mayores que la edad de los clusters globulares. Finalmente basados en el diagnóstico $H\Omega$, el modelo de Gong-Zhang es un interesante candidato para suavizar la tensión de H_0 .

Índice general

Agradecimientos	5
Resumen	7
Índice general	10
Índice de figuras	11
Índice de tablas	12
1. Introducción	13
1.1. Motivación	13
1.2. Descripción del problema	14
1.3. Justificación	14
1.4. Hipótesis	15
1.5. Objetivos	15
1.5.1. Objetivo General	15
1.5.2. Objetivos Particulares	15
1.6. Estructura de la tesis	15
2. Cosmología	16
2.1. Energía oscura	17
2.2. Materia oscura	17
2.3. Observaciones cosmológicas	18
2.3.1. Supernovas tipo Ia	18
2.3.2. Radiación de fondo de microondas	18
Misión Planck	19
2.3.3. Oscilaciones acústicas de bariones	20
2.4. Ecuación de Friedmann	20
2.5. Ley de Hubble	21
2.5.1. Constante de Hubble	22

2.6. Corrimiento al rojo	22
2.7. Parámetros cosmográficos	23
2.7.1. Parámetros cosmográficos en la época actual	23
2.8. Edad del Universo	24
2.9. Statefinder	24
2.10. $E(z)^2$ vs $(1+z)^3$	25
2.11. Diagnóstico H_0	25
3. Modelos cosmológicos	27
3.1. Λ CDM	27
3.2. Modelo ω CDM	28
3.3. Parametrización CPL	28
3.4. Parametrización Gong-Zhang	29
4. Observaciones cosmológicas	30
4.1. Observaciones al parámetro de Hubble	30
4.2. Supernovas Tipo Ia	31
4.3. Observaciones en conjunto	32
5. Estadística	33
5.1. Prueba χ^2	33
5.2. Cadenas de Markov	34
5.2.1. Matriz de transición	34
5.3. Método de Montecarlo	34
5.4. Método de Montecarlo con cadenas de Markov	35
5.5. Algoritmo Metrópolis-Hastings	36
5.5.1. Muestreo de Gibbs	37
6. Resultados	38
6.1. Ajuste modelos cosmológicos	38
6.2. Ecuación de estado $\omega(z)$	40
6.3. Cosmografía	41
6.4. $E(z)^2$ vs $(1+z)^3$	42
6.5. Statefinder	43
6.6. Diagnóstico H_0	44
6.7. Edad del Universo	45
7. CONCLUSIONES	46

Índice de figuras

2.1. Historia del Universo	16
2.2. Supernovas tipo Ia	18
2.3. Fondo Cósmico de Microondas	19
2.4. Corrimiento al rojo	22
2.5. Statefinder	25
4.1. Parámetro de Hubble	30
4.2. Supernovas tipo <i>Ia</i>	32
5.1. Valor de π	35
6.1. Mejor ajuste	38
6.2. Regiones de confianza	39
6.3. Ecuación de estado	40
6.4. Parámetros cosmográficos	42
6.5. Diagnóstico $E(z)^2$ vs $(1+z)^3$	43
6.6. Statefinder	43
6.7. Diagnóstico H_0	44
6.8. Edad del Universo	45

Índice de tablas

4.1. Datos Observacionales parámetro de Hubble	31
6.1. Valores de parámetros libres	40
6.2. Parámetros cosmográficos en la actualidad	41
6.3. Edad del Universo	45

1

Introducción

1.1. Motivación

Λ CDM es el modelo cosmológico más aceptado en la última década, pues brinda una manera sencilla de conocer el origen, evolución y expansión acelerada del Universo, además da una explicación a las observaciones cósmicas de la radiación de fondo de microondas, a la estructura a gran escala del Universo y las observaciones realizadas a supernovas tipo Ia[1]. Asume también que la relatividad general explica la gravedad a escalas cósmicas. [1]

Aunque el modelo parece tener buenos resultados a grandes escalas, carece de teorías físicas que expliquen el origen o propiedades de la energía y materia oscura, además presenta fallas a pequeñas escalas, como son el problema del satélite perdido (MSP), que es un exceso de subestructuras predichas por el modelo en comparación con el número de galaxias satélite observadas[1], el problema demasiado grande para fallar (TBTF), por el que existe una diferencia entre las densidades medidas en los radios efectivos de las galaxias enanas locales más brillantes y las densidades de los subhalos más masivos en las simulaciones hechas con Λ CDM [2]; el problema de vacío de vacíos, el cual muestra la disimilitud entre la función de velocidad de las galaxias en el estudio ALFALFA comparado con las simulaciones de este mismo modelo en un volumen equivalente [3]. Para solucionar dichos problemas se requiere modificar las ecuaciones de campo de Einstein, y, por lo tanto, la ecuación de Friedmann, es por eso que buscamos modelos alternativos que expliquen la energía oscura. Dentro estos modelos, surgen las parametrizaciones fenomenológicas, cuya principal ventaja es el comportamiento de un corrimiento al rojo infinito, lo que permite estudiar la evolución del Universo en un intervalo de tiempo más amplio y además tiene una interpretación física sencilla. Los modelos actuales que estudian la energía oscura se basan en la parametrización de su ecuación de estado ω , tal es el caso de Chevallier-Polarski-Linder (CPL), este modelo supone que $\omega = \omega(z)$, es decir, como una función que depende del corrimiento al rojo, adicionalmente, los dos parámetros de ω_0 y ω_a , son números reales y representan el valor actual de la ecuación de estado y su evolución temporal, respectivamente[4]. Un caso particular de CPL es ω CDM [23], este modelo contempla a ω como la constante de parametrización, la cual es una constante diferente de -1 , aunque ω CDM no corresponde a la situación física real puede

describir la energía oscura dinámica de la forma más sencilla.

Para el tercer modelo, Gong-Zhang [37], nombrado así en honor a sus autores, es otra parametrización fenomenológica que nos permite estudiar el Universo en un rango amplio de valores del redshift tanto al pasado como al futuro, al igual que con CPL, la ecuación de estado ω evoluciona con el tiempo, aunque en este caso el modelo cuenta con 3 parámetros libres, que hace que el Universo tenga una evolución diferente a CPL.

Es por eso que en este proyecto se estudiarán las parametrizaciones CPL, ω CDM y Gong-Zhang a través de contrastes con datos observacionales al parámetro de Hubble y Supernovas tipo Ia. Además, se hará una reconstrucción de los parámetros cosmológicos para así explorar el origen, evolución y posible desenlace del Universo utilizando estos modelos. [5]

Como parte del programa de ingeniería física, la principal motivación es hacer uso de la física computacional y el análisis de datos, los cuales son frecuentemente usados tanto en la investigación teórica como en la industria, lo cual hace que el presente trabajo tenga aplicaciones multidisciplinarias.

1.2. Descripción del problema

Observaciones actuales indican que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada, y el modelo Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM) parece tener buenos resultados a escalas cosmológicas, aunque a escalas galácticas presenta problemas, ya que el modelo agrega más subestructura de la que ha sido observada, además de que existe una discrepancia de la velocidad de las galaxias comparado con las simulaciones del modelo en un volumen y condiciones equivalentes [22].

1.3. Justificación

El modelo Λ CDM considera que el Universo está compuesto por materia bariónica, radiación, energía oscura y materia oscura, aunque este modelo explica con éxito la evolución del Universo a grandes escalas, presenta problemas a escalas galácticas como lo son el problema de satélite perdido y demasiado grande para fallar, los cuales se pueden solucionar si agregamos una ecuación ω dinámica, es decir, que varíe conforme al tiempo. Es por esto que, en este trabajo se estudia la evolución del Universo con modelos de parametrizaciones fenomenológicos, tal como CPL y Gong-Zhang los cuales consideran que la ecuación de estado ω depende del corrimiento al rojo (z), es decir, $\omega = \omega(z)$. Adicionalmente el modelo ω CDM, es un caso especial de CPL, donde ω es una constante $\omega \neq -1$.

1.4. Hipótesis

Si se considera que el Universo evoluciona de acuerdo con los modelos CPL, ω CDM y Gong-Zhang, los ajustes con datos de Supernovas tipo Ia (SNIa) y Observational Hubble Data (OHD) son semejantes a los obtenidos con el modelo Λ CDM. La principal diferencia será en el parámetro cosmográfico *jerk*, pues está directamente relacionado con la ecuación de estado de la energía oscura. Además, en el diagnóstico *statefinder*, el cual muestra la evolución del Universo, se espera que Λ CDM sea un punto en el espacio, mientras que para los otros modelos se obtengan diferentes trayectorias. Adicionalmente, se espera que en los tres modelos, el Universo entre en una fase de aceleración y que su aceleración continúe hasta el final del Universo.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Estudiar la evolución del Universo usando datos de Supernovas tipo *Ia* y observaciones al parámetro de Hubble con los modelos CPL, ω CDM y Gong-Zhang, realizando el ajuste de sus parámetros, por medio de dos métodos y usando los datos de las muestras mencionadas en la sección anterior, para después realizar los parámetros cosmográficos y finalmente hacer una comparación estadística con el modelo Λ CDM.

1.5.2. Objetivos Particulares

- Estudiar la evolución del Universo usando el modelo ω CDM, el cual es un caso particular de CPL, obtener sus parámetros libres, cosmografía y compararlo geoméricamente con Λ CDM.
- Estudiar la evolución del Universo usando el modelo Gong-Zhang, obtener sus parámetros libres, cosmografía y hacer una comparación geométrica con Λ CDM.

1.6. Estructura de la tesis

En el segundo capítulo se hace una breve recopilación de los principales conceptos de la cosmología, los principales pruebas de la expansión acelerada del Universo, los parámetros cosmográficos y diagnósticos de estado. Luego en el capítulo tres se muestran los modelos a trabajar y las características de cada uno de ellos, en el siguiente capítulo se presentan los datos a usar y el tratamiento de los mismos, después se hace una revisión de la estadística que se usó y finalmente se exponen los resultados obtenidos y las conclusiones del trabajo.

2

Cosmología

En esta sección se muestra la terminología elemental para el desarrollo del proyecto. Se exponen nociones acerca del problema de materia y energía oscura, así como generalidades de los datos utilizados para las restricciones de los parámetros de los modelos bajo análisis. Finalmente, se hace una breve revisión de los modelos a utilizar, en los cuales se considera que el Universo tiene geometría plana ($\Omega_k = 0$).

La cosmología es una rama de la física que estudia las leyes generales del origen y evolución del Universo, desde el Big-Bang hasta el día de hoy y su posible desenlace. Las observaciones actuales a las Supernovas Tipo Ia (SNIa), el fondo cósmico de microondas (CMB), las oscilaciones acústicas de bariones (BAO), y las mediciones directas al Parámetro de Hubble (OHD), indican, en conjunto, que el Universo se encuentra en una expansión acelerada, además la velocidad de rotación de las galaxias apunta a un excedente de materia que aún no ha sido detectado, estos fenómenos se denominan energía oscura y materia oscura, respectivamente.

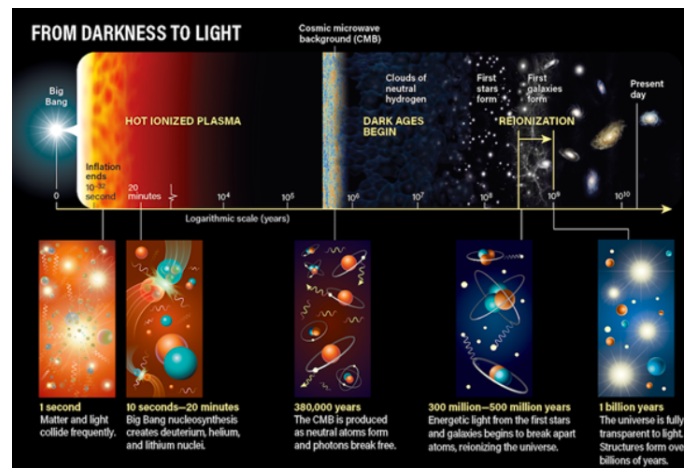


Figura 2.1: Línea del tiempo de la historia del Universo. (Roen, 2021)

La Figura 2.1 muestra la evolución del Universo desde los primeros segundos del Universo hasta la época actual, marca también la época en la que la energía oscura apareció en el Universo y cuando se inició la formación de estructura. Dentro de esta

imagen podemos observar los fenómenos que hacen que notemos que el Universo se encuentra en expansión acelerada, es por eso que es de suma importancia saber como es que ha evolucionado para poder hacer una comparación con los diferentes modelos cosmológicos.

2.1. Energía oscura

La energía oscura es una fuerza de naturaleza desconocida causante de la expansión acelerada del Universo [11]. En los primeros años del siglo XX, Einstein predijo la existencia de una constante cosmológica Λ que representaba la energía del vacío y además mantenía al Universo estático. Años más tarde, basados en las observaciones cosmológicas realizadas por Edwin Hubble, se comprobó que el Universo se encontraba en expansión, por lo cual, Einstein eliminó la constante cosmológica de sus ecuaciones, sin embargo, la energía oscura tiene un comportamiento similar a la constante cosmológica, pues no solo equilibra la gravedad, sino que tiene una presión negativa que es lo que hace que el Universo se acelere. [11]

El término energía oscura fue propuesto en 1998 por Michael Turner, cuando los cosmólogos anunciaron la existencia de un elemento adicional en el Universo, proveniente de las observaciones a supernovas tipo Ia realizadas por Adam Riess [6] y confirmadas más tarde por Saul Perlmutter.

Estudios realizados por Hubble Space Telescope, aseguran que la energía oscura ha estado presente en el Universo por al menos 9000 millones de años. Aunque la energía oscura aún no ha sido detectada, ya que no interactúa con la materia bariónica, con luz o con cualquier otro tipo de radiación electromagnética, se estima que cerca del 70% de lo que compone al Universo es este tipo de energía desconocida [7,8,9].

2.2. Materia oscura

La materia oscura es un tipo de materia no interactuante con materia bariónica, ni con radiación electromagnética que compone alrededor del 25% del Universo y que se conoce de su existencia gracias a los efectos gravitacionales que provoca. El descubrimiento de la materia oscura se dio en 1933 por Fritz Zwicky [38], cuando se encontró evidencia de una masa no visible, que provocaba una discrepancia entre las velocidades de rotación medidas y las predichas por la mecánica clásica, ya que, asumiendo un disco rígido, se espera que entre más alejado se encuentre del centro de la galaxia su velocidad de rotación iría disminuyendo.

Hasta ahora se desconoce qué tipo de partículas componen la materia oscura, la cual debe ser materia oscura fría, para que así se permitiera la formación de estructura, algunos candidatos son los axiones y WIMPs, que son partículas de interacción débil incluyendo neutrinos, aunque estos han sido descartados ya que viajan a velocidades relativistas [7,9].

2.3. Observaciones cosmológicas

2.3.1. Supernovas tipo Ia

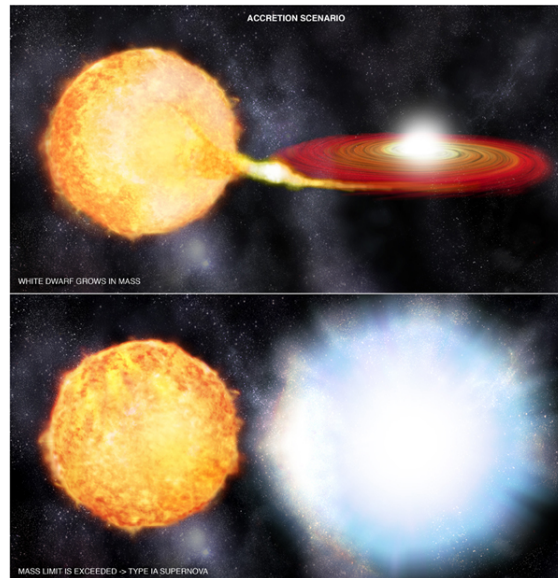


Figura 2.2: Supernovas tipo Ia (IAA-CSOC, 2014)

Las supernovas tipo Ia, son consideradas candelas estándar, como se muestra en la Figura 2.2, se cree que se originan cuando en un sistema binario, una estrella densa y compacta llamada enana blanca, atrae masa de su compañera, y al alcanzar una masa crítica, conocido como límite de Chandrasekhar, origina una explosión, emitiendo un brillo característico, que puede llegar a ser 10 mil millones de veces la intensidad del Sol[10].

El pico de luminosidad de esta clase de supernovas está asociado con la velocidad de decaimiento de su brillo, el cual, ha hecho que las supernovas tipo Ia sean las candidatas perfectas para medir distancias en el Universo, aunque por desgracia las supernovas no son un evento común en el Universo, pues se estima que en nuestra galaxia existen cerca de 2 explosiones por siglo [10].

2.3.2. Radiación de fondo de microondas

En los años cuarenta el físico George Gamow, argumentó que de haber existido el *Big - Bang*, deberíamos ser capaces de detectar una radiación proveniente de la gran explosión. Inicialmente su trabajo no tuvo un gran impacto, hasta que, en 1965, Robert Wilson y Arnold Penzias, dos ingenieros pertenecientes a los Laboratorios Bell Telephone, trabajaban en diseñar una antena para emitir ondas de radio de baja frecuencia, pero en todas estas frecuencias aparecía un ruido desconocido, mismo que relacionaron con palomas que habían construido su nido en las antenas, sin embargo, al ahuyentar a las palomas el ruido persistió. Lo más curioso era que dicho ruido no

tenía una dirección preferencial, es decir, era el mismo en cualquier dirección. James Peebles y Robert Dicke, astrofísicos del Centro de estudios avanzados de la Universidad de Princeton, explicaron que el ruido captado por las antenas era la radiación proveniente del *Big – Bang*, lo cual haría a Wilson y Penzias acreedores al Premio Nobel meses después[11]. En la Figura 2.3, obtenida por la sonda Planck, podemos observar un mapa donde se observan pequeñas fluctuaciones, las cuales son de aproximadamente 2.7 Kelvin, en la temperatura que se corresponden con zonas que presentaban una densidad ligeramente distinta en la etapa más temprana del Universo.

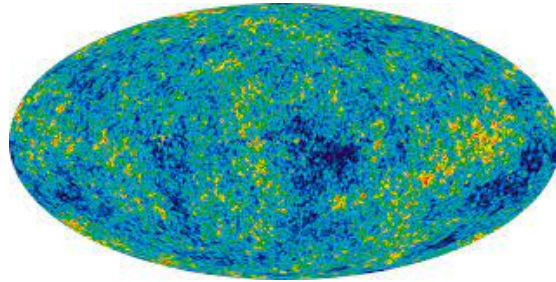


Figura 2.3: Perturbaciones de temperatura Fondo Cósmico de Microondas. (Planck,2018)

El fondo cósmico de microondas junto al corrimiento al rojo son una de las pruebas más fuertes sobre teoría del *Big – Bang* [12].

Misión Planck

Al inicio de sus operaciones el satélite fue llamado COBRAS/SAMBA, por sus siglas en inglés (Cosmic Background Radiation Anisotropy Satellite/ Satellite for Measurement of Background Anisotropies), aunque al principio de su operación en 1996 fue renombrado en honor al científico Max Planck. El objetivo principal de este satélite es hacer un mapa de la radiación de fondo producida en el *Big – Bang* con una alta resolución para probar teorías del inicio y la evolución del Universo.

Planck puede ser considerado una máquina del tiempo, pues observa lo que ocurrió hace aproximadamente 13,700 millones de años, es decir, muy cerca del *Big – Bang*, y analiza con gran precisión los residuos de radiación provenientes de la gran explosión. Estos resultados ayudan a la comunidad científica a crear y descartar modelos acerca del origen y la evolución del Universo.

Lo que diferencía a Planck de misiones previas, es que mide con mayor precisión la temperatura de la radiación de CMB, lo cual permite tener imágenes de mayor calidad de la radiación remanente del *Big – Bang*. La alta sensibilidad de Planck dará como consecuencia el mejor mapa de aquellas anisotropías presentes en el CMB, permitiendo a los científicos aprender más sobre la evolución de la composición del Universo.

Para terminar estas medidas de alta exactitud, Planck observa en 9 bandas del espectro electromagnético, a partir de un centímetro a un tercio de milímetro, lo correspondiente al rango de la longitud de onda que va de las microondas al infrarrojo

bastante lejano. Los detectores de Planck se enfrían a temperaturas cercanas al cero absoluto debido a que, de otro modo, su propia emisión de calor alteraría las medidas [20,21].

2.3.3. Oscilaciones acústicas de bariones

En épocas tempranas del Universo, la materia estaba distribuida de manera casi uniforme y con una alta temperatura que permitía ionizar el gas, lo que resultaba en un acoplamiento estrecho entre los electrones, bariones y fotones. La presión de radiación de los fotones era tan grande comparado con la fuerza gravitacional existente en las perturbaciones, que desencadenaba en que en fluido barión-fotón oscilara como ondas de sonido. Estas ondas acústicas se propagaron hasta la época de recombinación, donde se enfrió lo suficiente para que los bariones y fotones se desacoplaran, haciendo que las ondas acústicas se congelaran centradas en la perturbación original y formando en estas galaxias y grandes concentraciones de materia.[13].

Las oscilaciones acústicas de bariones son consideradas reglas estándar para medir escalas de longitud a niveles cosmológicos, además de que ayuda a entender la naturaleza de la energía oscura, ya que restringe los parámetros cosmológicos [14].

2.4. Ecuación de Friedmann

La ecuación de Friedmann [13] describe la expansión del Universo. Para obtener la ecuación de Friedmann es necesario obtener la energía cinética y potencial de una partícula de prueba. Se considera un medio uniforme en expansión, con densidad ρ , la partícula de prueba se encuentra a una distancia r de la masa m , entonces la masa total es

$$M = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \quad (2.1)$$

y la fuerza es

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (2.2)$$

donde G es la constante de gravitación Universal sustituyendo la ecuación 2.1 en 2.2

$$F = \frac{4\pi G\rho r m}{3} \quad (2.3)$$

del cual podemos escribir el potencial como

$$V = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad (2.4)$$

para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \quad (2.5)$$

ahora sumando la energía potencial y la energía cinética

$$h = T + V \quad (2.6)$$

donde sabemos que h es una constante, sustituyendo 2.4 y 2.5

$$h = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3} \quad (2.7)$$

Como sabemos, el Universo es homogéneo, por lo cual la ecuación 2.7 aplica a dos partículas cualesquiera y así poder cambiar a coordenadas comóviles, que es un sistema de referencia que se mueve junto con una partícula, y nos permiten trabajar con el Universo en expansión, ya que la expansión es homogénea y la distancia \vec{r} es una distancia comóvil, la cual puede ser escrita como sigue

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (2.8)$$

donde a es el factor de escala, es decir, mide la tasa de expansión del Universo. Poniendo la ecuación 2.7 en términos del factor de escala

$$h = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi G\rho a^2 x^2 m}{3} \quad (2.9)$$

multiplicando ambos lados por $2/m\dot{a}^2 x^2$ y acomodando nos queda que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.10)$$

donde $kc^2 = \frac{-2h}{mx^2}$. A esta se le conoce como la ecuación de Friedmann en su forma estándar y la importancia de esta ecuación es que para obtener nuevos modelos cosmológicos es necesario modificarla.

2.5. Ley de Hubble

En el siglo XX, Edwin Hubble descubrió que el Universo se encontraba en expansión, por medio de observaciones de galaxias, las cuales se alejaban unas de otras y parecían apartarse con mayor velocidad mientras más separadas se encontraban, es decir, las galaxias se alejan unas de otras a una velocidad proporcional a la distancia que las separa. Hubble al haber descubierto este fenómeno probó que la velocidad de recesión esta dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.11)$$

la cual se encuentra en la dirección \vec{r} , entonces podemos reescribirla como

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} \quad (2.12)$$

por último tenemos la ecuación 2.8 y sabemos que por definición \vec{x} es un vector, por lo que el parámetro de Hubble queda definido como

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.13)$$

donde $a = a(t)$ es el factor de escala definido como $a(t) = \frac{1}{1+z}$, el cual es una cifra adimensional que la relación entre la distancia que separa dos puntos en el Universo en un instante respecto a la distancia que separa a los mismos puntos en otro instante, y \dot{a} es su derivada temporal.

2.5.1. Constante de Hubble

La Ley de Hubble nos dice que para cada época del Universo existe una proporcionalidad entre el corrimiento al rojo y la distancia a la que se encuentran los objetos, en otras palabras, nos dice si la expansión del Universo se frena, se acelera o es constante. Existe una gran controversia sobre el valor de la constante de Hubble, y se dice que su valor ronda los 71 km/s/Mpc[39]. Aunque es incorrecto llamarla constante de Hubble, pues se ha demostrado que esta constante varía en el tiempo, por lo que podríamos decir que el valor de 71km/s/Mpc, es el valor del parámetro de Hubble en la época actual. Es importante mencionar que el valor de la constante de Hubble varía dependiendo del modelo cosmológico a trabajar, pues cada modelo contempla una distribución diferente de los componentes del Universo y puede variar también dependiendo de los datos a utilizar en el ajuste de los parámetros libres del modelo [15].

2.6. Corrimiento al rojo

Como ya se mencionó en la sección 2.5, el Universo parece estar apartando y cuanto más distante se encuentre el cuerpo/objeto, más rápido parece alejarse, dichas velocidades son medidas por el corrimiento al rojo (z), el cual es un efecto Doppler, pero aplicado a ondas de luz. Se sabe que el Universo está en expansión, ya que si las galaxias se estuvieran acercando la longitud de onda se reduce, haciendo que su frecuencia aumente, y por lo tanto que la luz se corra al azul, en el caso contrario, si las galaxias se alejan la longitud de onda aumenta y como consecuencia la frecuencia disminuye, lo que deriva en que la luz se corra al rojo, como se muestra en la Figura 2.4.

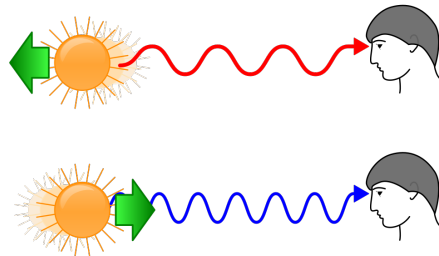


Figura 2.4: Corrimiento al rojo. (Tosovsky,2006)

Las observaciones muestran que las galaxias se están alejando de nosotros, por lo que el corrimiento al rojo está definido por

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \quad (2.14)$$

donde λ_{obs} es la longitud de onda observada y λ_{em} es la longitud de onda emitida.

2.7. Parámetros cosmográficos

Los parámetros cosmográficos son expansiones al parámetro de Hubble a través de serie de Taylor, tomando en cuenta la hipótesis de homogeneidad e isotropía, la cual nos dice que el Universo es homogéneo en toda su extensión. A continuación se enlistan estos parámetros [19] :

- **Parámetro de Hubble**

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.15)$$

el cual conecta los modelos cosmológicos con los datos observacionales.

- **Parámetro de desaceleración**

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{a} [H(t)]^{-2} \quad (2.16)$$

representa la aceleración o desaceleración de la expansión del Universo.

- **Parámetro jerk**

$$j(t) = \frac{\dddot{a}}{a} [H(t)]^{-3} \quad (2.17)$$

nos dice si la ecuación de estado de la energía oscura ω es dinámica.

- **Parámetro snap**

$$s(t) = \frac{d^4 a}{dt^4} [H(t)]^{-4} \quad (2.18)$$

- **Parámetro lent**

$$l(t) = \frac{d^5 a}{dt^5} [H(t)]^{-5} \quad (2.19)$$

Aunque los dos últimos parámetros carecen de interpretación física, se utilizan como diagnósticos geométricos de energía oscura.

2.7.1. Parámetros cosmográficos en la época actual

Para conocer los valores en la actualidad es necesario realizar las derivadas de las ecuaciones anteriores y reacomodar algebraicamente para obtener

$$q(z) = \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH(z)}{dz} - 1 \quad (2.20)$$

$$j(z) = q(z) + 2q^2(z) + (1+z) \frac{dq(z)}{dz} \quad (2.21)$$

$$s(z) = j(z) - 3j(z)(1+q(z)) - (1+z) \frac{dj(z)}{dz} \quad (2.22)$$

$$l(z) = s(z) - 4s(z)(1 + q(z)) - (1 + z) \frac{ds(z)}{dz} \quad (2.23)$$

y ahora evaluaremos las funciones (2.20), (2.21), (2.22), (2.233) en $z = 0$, entonces los valores cosmográficos en la época actual se representan por

$$q_0 = q(0) \quad (2.24)$$

$$j_0 = j(0) \quad (2.25)$$

$$s_0 = s(0) \quad (2.26)$$

$$l_0 = l(0) \quad (2.27)$$

2.8. Edad del Universo

El primer cálculo de la edad del Universo se dio en 1929, cuando Edwin Hubble dio a conocer que las galaxias se están alejando en proporción a la distancia que las separa de la nuestra, para explicar este fenómeno Hubble escribió la relación $v = H_0 d$ donde v es la velocidad, d es la distancia y H_0 es la constante de Hubble, la cual fue calculada obteniendo el valor de $H_0 = 500 \text{ km/s/Mpc}$ y se sabía que la edad del Universo estaba dada por $1/H_0$, entonces, según los datos obtenidos, el Universo tenía aproximadamente 2 mil millones de años, lo cual era incongruente, pues el Universo tendría una edad menor a la edad del Sol y de la Tierra. Aunque esta estimación era incorrecta, se sabía que era la forma correcta de estimar la edad de Universo. En 2001, cuando se obtuvieron datos más precisos del telescopio Hubble, se dio a conocer que el valor de la constante de Hubble era de $H_0 = 73.52 \text{ km/s/Mpc}$, por lo que la edad del Universo calculada fue de 13.6 mil millones de años, con lo cual la edad del Universo es mayor que la de cualquier estrella o planeta conocido. [24]

En la actualidad se sabe que la edad del Universo puede ser calculada en términos del corrimiento al rojo, la cual viene dada por la siguiente ecuación

$$t = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)H(z)} \quad (2.28)$$

donde H_0 es la constante de Hubble y $H(z)$ es el modelo cosmológico a calcular.

2.9. Statefinder

Statefinder es un diagnóstico geométrico de la energía oscura, que relaciona los parámetros de desaceleración ($q(z)$) y jerk ($j(z)$), el cual nos permite caracterizar las propiedades de la energía oscura sin importar el modelo a utilizar, ya que es adimensional y está construido a partir del factor de escala, el cual depende únicamente del

tiempo. Además, este diagnóstico esta realcionado con la ecucación de estado de la energía oscura, ω , y su primera derivada, $\dot{\omega}$, y puede diferenciar entre las diferentes formas de la energía oscura, ya que para el modelo Λ CDM es un punto en las coordenadas (1,0). [25]

La ecuación para el statefinder esta dada por

$$s = \frac{j(z) - 1}{3q(z) - 1/2} \quad (2.29)$$

2.10. $E(z)^2$ vs $(1 + z)^3$

En este diagnóstico se presenta una manera de comparar modelos de energía oscura con Λ CDM sin involucrar sus ecuaciones de estado y en el cual se puede obtener información de la densidad de masa de cada uno de los modelos, ya que se grafica la pendiente de Ω_{m0} , adicionalmente determina si los modelos son de quintaesencia, para $\omega > -1$, o fantasma, para $\omega < -1$, como se muestra en la Figura 2.5. [26]

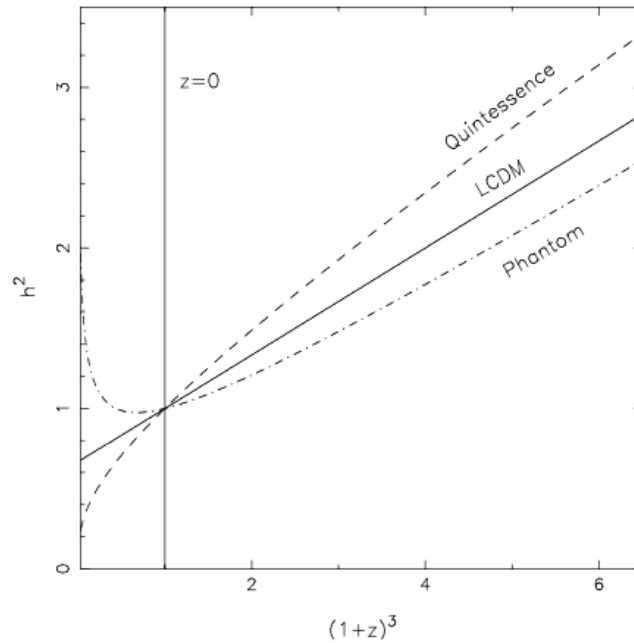


Figura 2.5: Λ CDM $\omega = -1$ línea sólida, quintaesencia $\omega > -1$, línea rayada, zona fantasma $\omega < -1$, línea punteada. (Sahani, 2008)

2.11. Diagnóstico H_0

Para este diagnóstico se considera que el Universo es plano, por lo que se puede usar para posibles desviaciones de los modelos con respecto a Λ CDM, el cual se logra

mediante H_0 , con la siguiente ecuación:

$$\mathbb{H}0 = \frac{H(z)}{\sqrt{1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(1+z)^3}} \quad (2.30)$$

donde $H(z)$ es el modelo a usar. [27]

3

Modelos cosmológicos

En este capítulo se muestran los modelos cosmológicos a estudiar, primero, se hace una revisión del modelo Λ CDM, el cual es considerado el modelo estándar de la cosmología, luego se presenta el primer modelo es ω CDM, que es un caso particular en donde la ecuación de estado del Universo es una constan diferente de -1 , después las parametrización fenomenológica, CPL , y finalmente la parametrización Gong-Zhang, este modelo es una parametrización fenomenológica como CPL, pero esta cuenta con un parámetro libre menos.

Es importante mencionar que las parametrizaciones CPL y Gong-Zhang solo nos dan información de la energía oscura, para obtener información de todos los componentes del Universo, es necesario hacer uso de modelos *Cold Dark Matter*, que agregan los términos de radiación y materia.

3.1. Λ CDM

Λ CDM es el modelo cosmológico más simple, representa el modelo de concordancia del *Big-Bang* que explica las observaciones cósmicas de la radiación de fondo de microondas, así como la estructura a gran escala del Universo y las observaciones realizadas de supernovas, este toma en cuenta tres componentes, Λ , una constante cosmológica asociada con la energía oscura, materia oscura fría, la cual indica que la velocidad de sus partículas es mucho menor que la velocidad de la luz, lo que permite la creación de estructura, por último materia bariónica, es decir, la materia que compone todo lo que podemos observar. En este modelo se estima que el 68.4% de lo que compone al Universo es energía oscura, el 26.4% es materia oscura y el 5% restante pertenece a la materia bariónica. Además, considera el valor del parámetro de Hubble alrededor de 73.23 km/s/Mpc [2].

La ecuación que modela la dinámica del Universo es la ecuación de Friedmann, y se expresa en términos del corrimiento al rojo z . Para el modelo, la ecuación de Friedmann está dada por:

$$E^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda} \quad (3.1)$$

donde $\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \frac{\dot{a}}{a}$, a es el factor de escala (Sección 2.5) y $\dot{a} = \frac{da}{dt}$, H_0 está relacionado con el parámetro de Hubble de la siguiente manera $H_0 = 100h$, en el que h es un parámetro libre del modelo, Ω_{r0} es la radiación en la época actual y es del orden de 10^{-5} , mientras que el parámetro Ω_{m0} representa la materia bariónica y oscura y Ω_Λ representa la materia oscura [16].

Aunque el modelo describe de manera satisfactoria varias de las observaciones como lo son Supernovas tipo Ia y las observaciones al parámetro de Hubble y parece tener buenos resultados a grandes escalas, Λ CDM no explica la naturaleza de la energía oscura, presenta una discrepancia de 43 ordenes de magnitud en la energía de vacío, además del problema de la tensión del parámetro H_0 . Es por eso que los cosmólogos han propuesto a lo largo del tiempo diferentes soluciones como agregar grados de libertad a la energía oscura, modelos que interaccionen con el sector oscuro (energía y materia oscura), modelos con especies extra relativistas, modelos de viscosidad, modelos de gravedad modificada y modelos de parametrizaciones fenomenológicas. [33] Entre los mejores candidatos se encuentran las parametrizaciones fenomenológicas, los cuales contemplan una ecuación de estado dependiente del tiempo y se clasifican como sigue [34]

1. Constante cosmológica ($\omega = -1$).
2. Energía oscura con $\omega = cte \neq -1$
3. Energía oscura dinámica ($\omega = \omega(z)$)
4. Energía oscura con $\omega(z) < -1$

3.2. Modelo ω CDM

En este modelo, supone que la ecuación de estado de la energía oscura es $\omega = \text{constante}$. Este es el caso más simple para una energía oscura dinámica. Este modelo no corresponde a la situación física real, pero puede describir la energía oscura dinámica de una manera sencilla, además de darnos una comparación del comportamiento de la energía oscura a modelos diferentes a Λ CDM.

La ecuación que modela la dinámica del Universo es

$$E^2(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0})(1+z)^{3(1+\omega)} \quad (3.2)$$

donde Ω_{m0} es la materia bariónica y oscura, Ω_{r0} es la radiación y ω es la constante de parametrización[23].

Es importante mencionar que el modelo ω CDM es un caso particular del modelo CPL, en donde la ecuación de estado es una constante diferente a -1 .

3.3. Parametrización CPL

Para solucionar los problemas de Λ CDM se requieren modificaciones en la dinámica de la energía oscura en el Universo tardío, lo cual modifica a la ecuación de estado

de la energía oscura y varía en términos del corrimiento al rojo, que segun estudios recientes para solucionar los problemas del modelo estandar se requiere que $\omega(z) < -1$, ya que se ha probado que para valores en $\omega(z) > -1$ la tensión de H_0 empeora.

Uno de los principales intereses en este modelo es que contiene la posible transición en la ecuación de estado de la energía oscura dinámica durante su evolución, que tienen muchos modelos de energía oscura fantasma y quintaesencia. [36]

El modelo CPL es un modelo de parametrización fenomenológica, para el cual

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_a \frac{z}{1+z} \quad (3.3)$$

donde ω_0 es la ecuación de estado en la época actual, es decir, $z = 0$ y ω_a es su evolución con el tiempo y está relacionada con la derivada logarítmica de ω . La ecuación que modela la dinámica del Universo es

$$E^2(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{-\frac{3\omega_a}{1+z}z} \quad (3.4)$$

donde Ω_{m0} es la materia bariónica y oscura, Ω_{r0} es la radiación [17,18]. El modelo CPL tiene muchas ventajas, entre las cuales destacan [55]:

1. Una interpretación física sencilla
2. Su espacio fase es bidimensional
3. No se indetermina con altos o bajos corrimientos al rojo
4. Buen ajuste con los datos observacionales

3.4. Parametrización Gong-Zhang

El principal objetivo de este modelo es encontrar propiedades de la energía oscura haciendo uso de los datos observacionales, y al tener la parametrización un solo parámetro libre, hace que el análisis de este sea más sencillo. Con este modelo se asume que la energía oscura ha evolucionado en el tiempo y no tiene comportamiento como el de la constante cosmológica. [37]

Para este modelo la parametrización fenomenológica es de la forma

$$\omega(z) = \frac{\omega_0}{1+z} e^{z/(1+z)} \quad (3.5)$$

donde ω_0 es la ecuación de estado en la época actual es decir en $z = 0$. La ecuación que modela la dinámica del Universo es

$$E^2(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0})(1+z)^3 \text{Exp} [3\omega_0 e^{z/(1+z)} - 3\omega_0] \quad (3.6)$$

donde Ω_{m0} es la materia bariónica y oscura, Ω_{r0} es la radiación. [37]

4

Observaciones cosmológicas

En este capítulo se describen las observaciones a utilizar en el análisis de los modelos, en este caso son Observaciones al parámetro de Hubble (*OHD*) y Supernovas tipo *Ia* (*SNIa*) y como es que se tratan estadísticamente estos datos para el uso en cada uno de los modelos.

4.1. Observaciones al parámetro de Hubble

El parámetro de Hubble nos permite medir la tasa de expansión del Universo con el corrimiento al rojo, comparada a las edades de las galaxias elípticas. Esta muestra consta de 51 puntos de parámetros de Hubble en función del tiempo. Usando esta muestra obtenemos los valores de los parámetros libres minimizando la función χ^2

$$\chi_{OHD}^2 = \sum_i^{51} \left(\frac{H(z_i) - H_{obs}}{\sigma_{obs}^i} \right)^2 \quad (4.1)$$

donde H_{obs} y σ_{obs}^i son dados por la muestra OHD. Los datos usados se muestran en la Tabla 4.1, se componen de 51 puntos, en donde la primera columna es el valor del corrimiento al rojo, z , la segunda columna es el valor observacional de la función $H(z)$ y la tercera columna es el error de las mediciones, y en la Figura 4.1 podemos observar los datos graficados con sus respectivas barras de error.

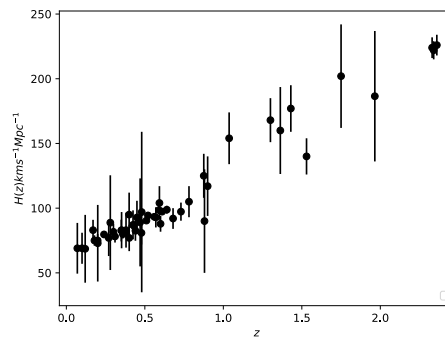


Figura 4.1: Datos observacionales del parámetro de Hubble con sus barras de error

z	H_{obs}	σ_{obs}
0.07	69	19.6
0.1	69	12
0.12	68.6	26.2
0.17	83	8
0.1791	75	4
0.1993	75	5
0.2	72.9	29.6
0.24	79.69	2.65
0.27	77	14
0.28	88.8	36.6
0.3	81.7	6.22
0.31	78.17	4.74
0.35	82.7	8.4
0.3519	83	14
0.36	79.93	3.39
0.38	81.5	1.9
0.3802	83	13.5
0.4	95	17
0.4004	77	10.2
0.4247	87.1	11.2
0.43	86.45	3.68
0.44	82.6	7.8
0.4497	92.8	12.9
0.47	89	34
0.4783	80.9	9
0.48	97	62

z	H_{obs}	σ_{obs}
0.51	90.4	1.9
0.52	94.35	2.65
0.56	93.33	2.32
0.57	92.9	7.8
0.59	98.48	3.19
0.5929	104	13
0.6	87.9	6.1
0.61	97.3	2.1
0.64	98.82	2.99
0.6797	92	8
0.73	97.3	7
0.7812	105	12
0.8754	125	17
0.88	90	40
0.9	117	23
1.037	154	20
1.3	168	17
1.363	160	33.6
1.43	177	18
1.53	140	14
1.75	202	40
1.965	186.5	50.4
2.33	224	8
2.34	222	7
2.36	226	8

Tabla 4.1: Datos observacionales de *OHD*, primera columna valor de z , segunda columna valor observacional de H y tercera columna error observacional σ

4.2. Supernovas Tipo Ia

Las supernovas tipo Ia son explosiones de enanas blancas ubicadas en sistemas binarios, la acreción de materia que ocurre desde la estrella compañera hace que la enana blanca alcance el límite superior de masa y explote. Cuando la correlación entre la velocidad y la luminosidad de la supernova están relacionadas, medimos distancias extragalácticas. La muestra SNIa consta de 40 mediciones a un módulo de distancia definida como sigue

$$\mu(z) = \mathcal{M} + 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{10 \text{ pc}} \right) \quad (4.2)$$

donde \mathcal{M} es un parámetro libre y d_L es la distancia de luminosidad dada por:

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (4.3)$$

donde c es la velocidad de la luz. Entonces la función a minimizar es

$$\chi_{SNIa}^2 = \sum_i^{40} \left(\frac{\mu(z_i) - \mu_{obs}}{\sigma_{obs}^i} \right)^2 \quad (4.4)$$

donde $\mu(z_i)$ viene dado por la ecuación 4.2 y μ_{obs} son los datos de SNIa.

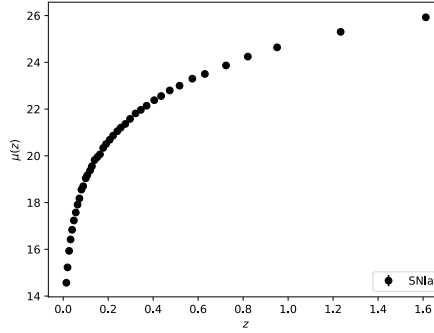


Figura 4.2: Datos observacionales Supernovas tipo *Ia* con sus barras de error

En la Figura 4.2 podemos observar los datos de Supernovas tipo *Ia* de la muestra pantheon, la muestra cuenta como 40 datos, de los cuales la primera columna es la estrella de donde proviene la información, la segunda columna es el valor de z , la tercera columna es el valor observacional de μ y la cuarta columna es el valor de error observado σ , para este caso las barras de error son tan pequeñas que no sobresalen del valor central de la medición.

4.3. Observaciones en conjunto

Para tener una mayor precisión en la obtención de los parámetros libres del modelo, es conveniente hacer una suma de las funciones a minimizar de cada uno de los tipos de datos que se usen, entonces la función total a minimizar queda como sigue

$$\chi_{joint}^2 = \chi_{OHD}^2 + \chi_{SNIa}^2 \quad (4.5)$$

donde χ_{OHD}^2 es la función a minimizar con los datos del parámetro de Hubble y χ_{SNIa}^2 es la función a minimizar para los datos de Supernovas Tipo *Ia*.

5

En este capítulo se muestra un breve resumen de la estadística usada para la obtención de los parámetros libres de los modelos, y pruebas que nos ayudan a saber si los modelos presentan una descripción estadísticamente significativa de los datos observacionales.

5.1. Prueba χ^2

La distribución χ^2 , es una prueba de hipótesis que compara la distribución observada de los datos con una distribución esperada de los datos, se usa principalmente para la prueba de hipótesis y para intervalos de confianza de la varianza cuando la distribución es normal. A diferencia de las distribuciones normal y exponencial, esta prueba no se aplica en el modelado de fenómenos naturales. El principal beneficio de esta prueba es la relación con la distribución normal y la obtención de k parámetros libres, teniendo estos un intervalo en el cual se obtiene su valor, la distribución χ^2 esta dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2} \quad (5.1)$$

donde $y(x_i, \theta)$ es el modelo evaluado en cada z_i , \bar{y}_i el valor observado y σ_i el error. Para el caso de Supernovas Tipo *Ia* tenemos que la conveniente a usar para calcular χ^2 es

$$\chi_{SN Ia}^2 = a \log \left(\frac{e}{2\pi} - \frac{b^2}{e} \right) \quad (5.2)$$

donde

$$a = \Delta \tilde{\mu}^T \cdot Cov_p^{-1} \cdot \Delta \tilde{\mu}$$

$$b = \Delta \tilde{\mu}^T \cdot Cov_p^{-1} \cdot \Delta 1 \quad (5.3)$$

$$e = \Delta 1^T \cdot Cov_p^{-1} \cdot \Delta \tilde{1}$$

5.2. Cadenas de Markov

Este método fue inventado por Markov en 1907 y tiene diversas aplicaciones, como la mecánica estadística, metrología, economía, finanzas, genética, entre otros. En las cadenas de Markov la probabilidad de que ocurra un evento depende directamente del evento anterior pero no de ninguno previo, a esto se le conoce como propiedad de Markov y se define como: [28]

$$P(X_t \in A | X_0, X_1, \dots, X_{t-1}) = P(X_t \in A | X_{t-1}) \quad (5.4)$$

5.2.1. Matriz de transición

Una matriz de transición para una cadena de Markov de n estado es una matriz de $n \times n$ con todos los componentes positivos y con la propiedad de que la suma de los componentes de cada columna o fila es 1. Un ejemplo de matriz de transición es:

$$\begin{pmatrix} 0.80 & 0.20 & 0.0 \\ 0.18 & 0.75 & 0.16 \\ 0.02 & 0.05 & 0.84 \end{pmatrix}$$

La matriz de transición tiene las siguientes propiedades:

1. La suma de las probabilidades de los estados debe ser igual a 1.
2. La matriz de transición debe ser cuadrada.
3. Las probabilidades de transición deben estar entre 0 y 1. [29]

5.3. Método de Montecarlo

El método de Montecarlo es una técnica que permite obtener soluciones a problemas físicos o matemáticos a través de la creación de variables aleatorias. Una variable aleatoria x puede tomar los valores de $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con probabilidades $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Un ejemplo del uso del método de Monte Carlo es la obtención de π , para este ejemplo consideraremos un círculo unitario inscrito un cuadrado de lado 1. Usaremos el cociente de sus áreas para así obtener valor de π puede aproximarse usando Montecarlo de acuerdo al siguiente método:

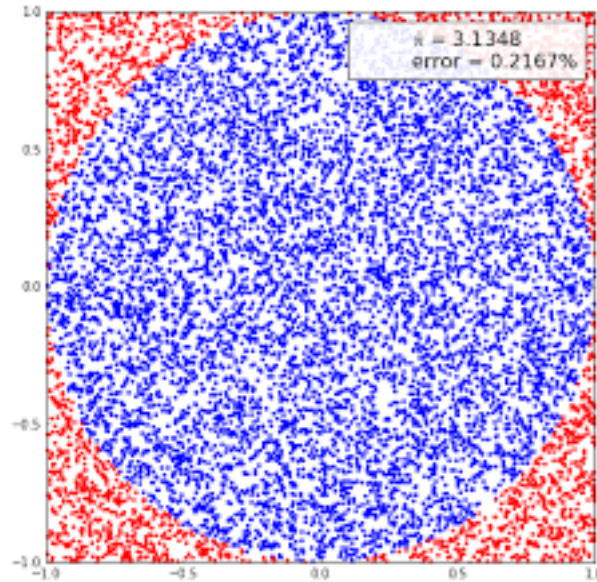


Figura 5.1: Cálculo valor de π con método de Montecarlo

- El círculo unitario se coloca en el centro del cuadrado.
- Se colocan n puntos aleatorios dentro del cuadrado
- Se cuenta el número de puntos dentro del círculo.
- Ahora se hace lo siguiente:

$$\frac{A_{\text{circulo}}}{A_{\text{cuadrado}}} = \frac{P_{\text{circulo}}}{P_{\text{totales}}}$$

$$\text{Pero } A_{\text{circulo}} = \pi r^2$$

Entonces

$$\pi = \frac{P_{\text{circulo}} \cdot A_{\text{cuadrado}}}{P_{\text{totales}}}$$

El método de Monte Carlo está generalmente asociado a la simulación de procesos caóticos o estocásticos, sin embargo, también se pueden utilizar para hallar aproximaciones numéricas de problemas determinísticos. Por ejemplo, se puede utilizar para hallar aproximaciones a integrales que no se pueden resolver analíticamente. [30]

5.4. Método de Montecarlo con cadenas de Markov

El Método de Monte Carlo usando cadenas de Markov (MCMC, por sus siglas en inglés), se utiliza para la optimización, cálculo de volúmenes complejos, minimización de costes, etc. Es un método que puede encontrar la distribución posterior de nuestro parámetro de interés. Específicamente, este tipo de algoritmo genera simulaciones de

Monte Carlo de una manera que se basa en la propiedad de Markov (ecuación 5.2). Es un método para generar muestras $x(i)$ mientras se explora el espacio de estado X utilizando un mecanismo de cadena de Markov. Este mecanismo está construido para que la cadena pase más tiempo en las regiones más importantes. En particular, se construye de manera que las muestras $x(i)$ imiten las muestras extraídas de la distribución objetivo $p(x)$.

Es intuitivo introducir cadenas de Markov en espacios de estados finitos, donde $x(i)$ solo puede tomar valores discretos $x(i) \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$. [31]

5.5. Algoritmo Metrópolis-Hastings

Es un método de tipo MCMC porque realiza un muestreo aleatorio sobre un espacio de estados y basado en Cadena de Markov debido a que la convergencia se hace recorriendo distintos estados a partir de una probabilidad de transición. Mediante este algoritmo, siguiendo lo expuesto en el apartado anterior, se puede probar que la probabilidad converge a la función de distribución deseada a partir de la definición de probabilidad de transición de la cadena de Markov.

El algoritmo de Metrópolis-Hastings funciona de la siguiente manera: tenemos una cadena de Markov en un estado X_t y queremos actualizar al valor X_{t+1} . Para ello utilizamos una distribución candidata $q(\cdot|X_t)$, que genera un valor aleatorio propuesto y . Es importante notar que esta distribución puede depender del estado actual de la cadena.

Con estas condiciones, y se acepta con probabilidad $\alpha(X_t, Y)$, donde este último término es:

$$\alpha(X_t, Y) = \min\left(1, \frac{\pi(y)q(x|y)}{\pi(x)q(y|x)}\right) \quad (5.6)$$

Si se acepta este valor, y pasa a ser el siguiente estado de la cadena X_{t+1} . En caso contrario, $X_{t+1} = X_t$.

La distribución $q(\cdot)$ puede tener cualquier forma y la cadena del algoritmo convergerá a la distribución estacionaria $\pi(x)$. Si esta condición es suficiente, la distribución propuesta debe tener la misma dimensión, y ser capaz de generar valores que se acepten. Si no, la cadena puede estar mucho tiempo en un mismo estado. Cuando X_t pertenezca a la distribución estacionaria, todos los valores siguientes $X_t, X_{t+1}, X_{t+2} \dots$ pertenecerán a la misma distribución.

El algoritmo Metropolis-Hastings es el siguiente:

1. Escoger un estado inicial X_0
2. Para $t = 0, \dots, T - 1$
 - a) Considerando el estado actual de la cadena $x_t = x$, genera un estado $z \sim q(z|x)$, z es el estado propuesto.
 - b) Calcular el radio

$$r(x, z) = \frac{\pi(z)q(x|z)}{\pi(x)q(z|x)} \quad (5.7)$$

y el nuevo estado de la cadena será $x_{t+1} = z$, con la probabilidad $\alpha(X_t, Y) = \min(1, r(x, z))$. [32]

5.5.1. Muestreo de Gibbs

El muestreo de Gibbs es un caso particular del algoritmo de Metrópolis-Hastings, pero con la diferencia de que para el muestreador de Gibbs no necesita de una distribución propuesta. Para este método se necesita generar muestras de la distribución posterior condicional a cada uno de los parámetros, permite generar muestras de la posterior:

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p | x) \quad (5.8)$$

siempre y cuando podamos generar valores de todas las distribuciones condicionales:

$$p(\theta_k | \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_p, x) \quad (5.9)$$

El proceso del muestreador de Gibbs es proceso aleatorio a en el espacio de parámetros. El proceso comienza en un punto arbitrario y en cada tiempo el siguiente paso depende únicamente de la posición actual. Por lo que el muestreador de Gibbs es un proceso MCMC. La diferencia entre Gibbs y Metrópolis se encuentra en cómo se deciden los pasos. Los pasos para el muestreo de Gibbs son los siguiente:

- Se selecciona el parámetro θ_k , entonces se obtiene un nuevo valor para el parámetro generando una simulación de la distribución condicional

$$p(\theta_k | \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_p, x) \quad (5.10)$$

- El nuevo valor θ_k en conjunto con los nuevos valores que se han mantenido constantes $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_p$ conforma la nueva posición en el proceso aleatorio.
- Se selecciona un nuevo componente (θ_{k+1}) y se repite el paso 1.

El muestreo de Gibbs es útil cuando no se puede determinar de manera analítica la distribución conjunta y no se puede simular directamente, pero si podemos determinar todas las distribuciones condicionales y simularlas. [32]

6

Resultados

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de los modelos CPL, ω CDM y Gong-Zhang, y se comparan geoméricamente con el modelo Λ CDM. Primero se muestran los valores obtenidos de los parámetros libres de cada uno de los modelos, para después hacer una reconstrucción de los parámetros cosmográficos, se obtienen también diferentes diagnósticos de energía oscura como H_0 y *Statefinder* y finalmente se calcula la edad del Universo. Para todo lo anterior se hizo uso de las ecuaciones 3.1-3.6, las cuales nos muestran la dinámica del Universo para cada uno de los modelos cosmológicos.

6.1. Ajuste modelos cosmológicos

Con el ajuste de los datos se tienen las semillas para los valores iniciales de los parámetros libres para su uso posterior en el método MCMC, para cada uno de los modelos mediante los datos observacionales de *OHD* y *SNIa*, como se muestra en la Figura 6.1. En la Figura 6.2, se muestran las regiones de confianza para ω CDM, CPL y Gong-Zhang, respectivamente a σ y 2σ , además, en la Tabla 6.1 se muestran los valores de los parámetros libres obtenidos con el método MCMC, usando los datos de *SNIa*, *OHD* y Joint.

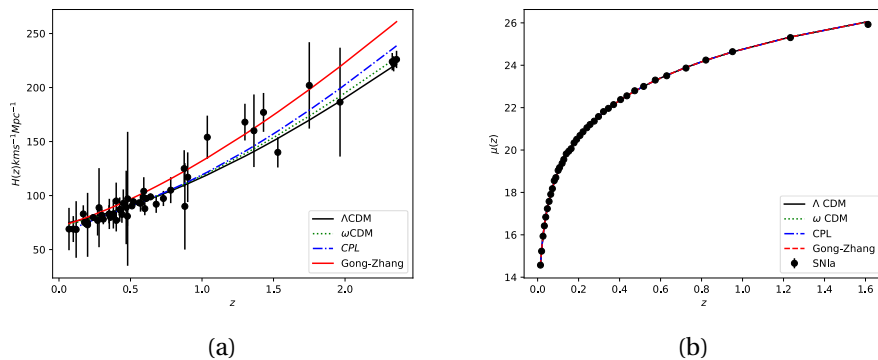


Figura 6.1: (a) Mejor ajuste con datos de OHD (b) Mejor ajuste para datos de SNIa. Λ CDM (línea sólida negra), ω CDM (línea punteada verde) y CPL (línea sólida azul)

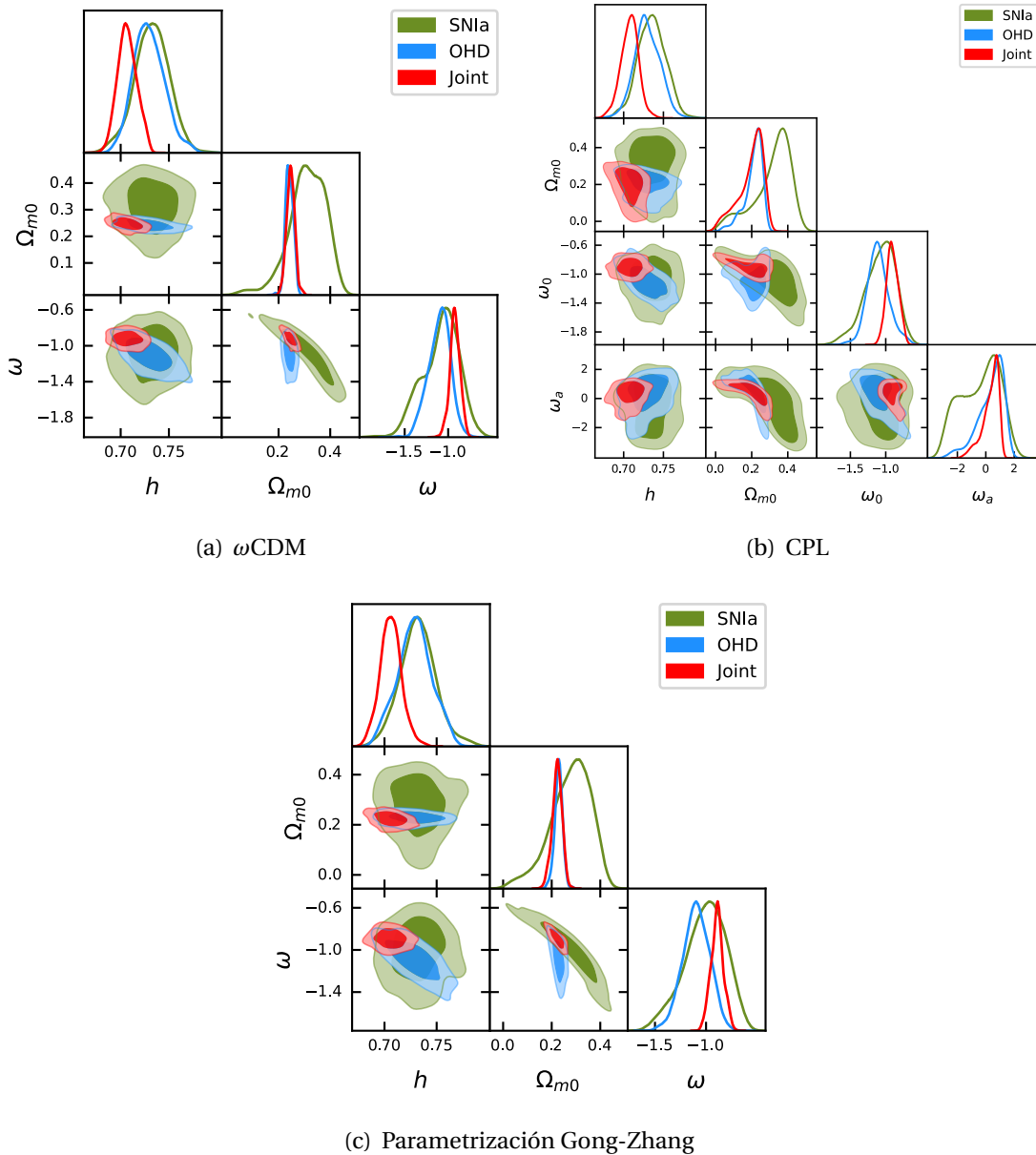


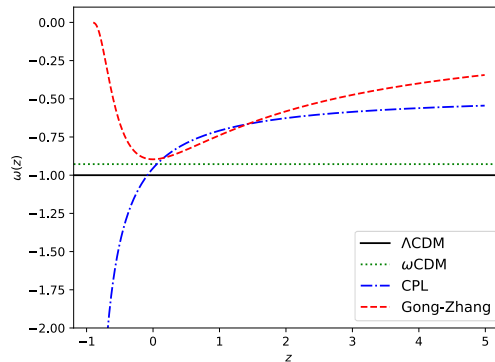
Figura 6.2: Regiones de confianza a 1σ y 2σ para (a) modelo ω CDM , (b) modelo CPL y (c) Parametrización Gong-Zhang

En la tabla 6.1, podemos observar los valores de los parámetros libres de cada uno de los modelos, donde el valor de χ^2 de ser del orden de los datos. El valor de los parámetros libres varía para cada una de las muestras de datos, pero el valor usado para la cosmografía y los diagnósticos es el valor de joint, ya que nos da un valor más preciso.

Λ CDM					
Datos	χ^2	Ω_{m0}	h	ω_0	ω_a
<i>SNIa</i>	48.39	$0.296 \pm_{0.021}^{0.022}$	$0.736 \pm_{0.017}^{0.017}$	-	-
<i>OHD</i>	17.84	$0.268 \pm_{0.014}^{0.014}$	$0.719 \pm_{0.012}^{0.012}$	-	-
<i>SNIa + OHD</i>	70.84	$0.326 \pm_{0.017}^{0.021}$	$0.727 \pm_{0.014}^{0.014}$	-	-
ω CDM					
Datos	χ^2	Ω_{m0}	h	ω_0	ω_a
<i>SNIa</i>	48.30	$0.320 \pm_{0.079}^{0.064}$	$0.732 \pm_{0.017}^{0.017}$	$-1.070 \pm_{0.232}^{0.198}$	-
<i>OHD</i>	17.15	$0.242 \pm_{0.014}^{0.014}$	$0.728 \pm_{0.016}^{0.016}$	$-1.101 \pm_{0.124}^{0.119}$	-
<i>SNIa + OHD</i>	69.27	$0.248 \pm_{0.056}^{0.016}$	$0.706 \pm_{0.010}^{0.011}$	$-0.927 \pm_{0.059}^{0.056}$	-
CPL					
Datos	χ^2	Ω_{m0}	h	ω_0	ω_a
<i>SNIa</i>	48.66	$0.337 \pm_{0.144}^{0.070}$	$0.732 \pm_{0.017}^{0.017}$	$-1.055 \pm_{0.236}^{0.195}$	$-0.170 \pm_{1.710}^{1.279}$
<i>OHD</i>	17.69	$0.228 \pm_{0.068}^{0.029}$	$0.730 \pm_{0.016}^{0.016}$	$-1.098 \pm_{0.168}^{0.174}$	$0.569 \pm_{1.370}^{0.679}$
<i>SNIa + OHD</i>	71.01	$0.219 \pm_{0.098}^{0.049}$	$0.706 \pm_{0.011}^{0.010}$	$-0.905 \pm_{0.080}^{0.089}$	$0.491 \pm_{0.827}^{0.400}$
Parametrización Gong-Zhang					
Datos	χ^2	Ω_{m0}	h	ω_0	ω_a
<i>SNIa</i>	48.34	$0.301 \pm_{0.093}^{0.071}$	$0.732 \pm_{0.017}^{0.017}$	$-1.034 \pm_{0.241}^{0.205}$	-
<i>OHD</i>	16.94	$0.228 \pm_{0.017}^{0.016}$	$0.728 \pm_{0.016}^{0.016}$	$-1.089 \pm_{0.131}^{0.129}$	-
<i>SNIa + OHD</i>	69.12	$0.223 \pm_{0.020}^{0.020}$	$0.706 \pm_{0.010}^{0.010}$	$-0.896 \pm_{0.061}^{0.640}$	-

Tabla 6.1: Valores de los parámetros libres para Λ CDM, ω CDM, CPL y Parametrización Gong-Zhang, usando el Método de Montecarlo con Cademas de Markov, usando datos de *OHD* y *SNIa*

6.2. Ecuación de estado $\omega(z)$



(a)

Figura 6.3: Ecuación de estado para los cuatro modelos cosmológicos, para Λ CDM, es una recta en -1 , para ω CDM es una recta en -0.9054 y para CPL y Parametrización Gong-Zhang es una función que varía en el tiempo.

En la figura 6.3 podemos observar que como se vió en la sección 3, para los modelos Λ CDM y ω CDM, su ecuación de estado es una constante, para Λ CDM, en -1 y para ω CDM es una recta en -0.9054 , en cambio para CPL y para la Parametrización Gong-Zhang la ecuación de estado depende de z , es decir varía con el tiempo

6.3. Cosmografía

Usando los valores de los parámetros libres obtenidos, usando $-1 < z < 5$, siendo $z > -1$ valores en el futuro y $z < 5$ valores en el pasado, se obtienen los cuatro gráficos de la Figura 6.4, en donde en la Figura 6.4(a) podemos encontrar el parámetro de desaceleración, $q(z)$, el cual nos indica cuando es que el Universo comenzó su fase de aceleración, los valores por debajo de la línea punteada en color gris nos indican que el Universo se está expandiendo aceleradamente. *Jerk* ($j(z)$), Figura 6.4(b), es el parámetro relacionado con la ecuación de estado de la energía oscura, que para Λ CDM se observa que es una línea recta en 1, y para CPL, ω CDM y Gong-Zhang, esta oscila, lo cual nos dice que la ecuación de estado varía en el tiempo, mientras que para Λ CDM, esta se mantiene en un valor constante durante la evolución del Universo.

En cada una de las Figuras, se observan los puntos en $z = 0$ de cada uno de los modelos, el cual nos indica el valor de los parámetros cosmográficos en la actualidad, mostrando así en qué fase se encuentra el Universo hoy en día, en la Tabla 6.2, podemos ver el valor de cada uno de estos puntos para cada modelo. Para el modelo Gong-Zhang, línea roja punteada, tenemos un comportamiento diferente en la Figura 6.4-(a), en donde vemos que para valores de $z < 0$, es decir en el futuro, el Universo deja su fase de expansión acelerada y vuelve a frenarse, aunque no sabemos si el Universo se contraerá, pues el modelo no permite valores para $z < -1$.

Modelo	q_0	j_0	s_0	l_0
Λ CDM	$-0.583 \pm_{0.009}^{0.010}$	$1 \pm_{0.005}^{0.008}$	$-0.249 \pm_{0.009}^{0.009}$	$2.875 \pm_{0.001}^{0.001}$
ω CDM	$-0.5448 \pm_{0.010}^{0.011}$	$0.887 \pm_{0.010}^{0.010}$	$-0.415 \pm_{0.011}^{0.009}$	$2.724 \pm_{0.001}^{0.001}$
CPL	$-0.576 \pm_{0.012}^{0.010}$	$0.960 \pm_{0.010}^{0.010}$	$-0.262 \pm_{0.010}^{0.015}$	$2.817 \pm_{0.009}^{0.001}$
Gong-Zhang	$-0.790 \pm_{0.001}^{0.001}$	$1.782 \pm_{0.006}^{0.009}$	$0.218 \pm_{0.009}^{0.009}$	$-3.705 \pm_{0.004}^{0.001}$

Tabla 6.2: Valores en la actualidad de los parámetros cosmográficos para Λ CDM, ω CDM, CPL y Gong-Zhang

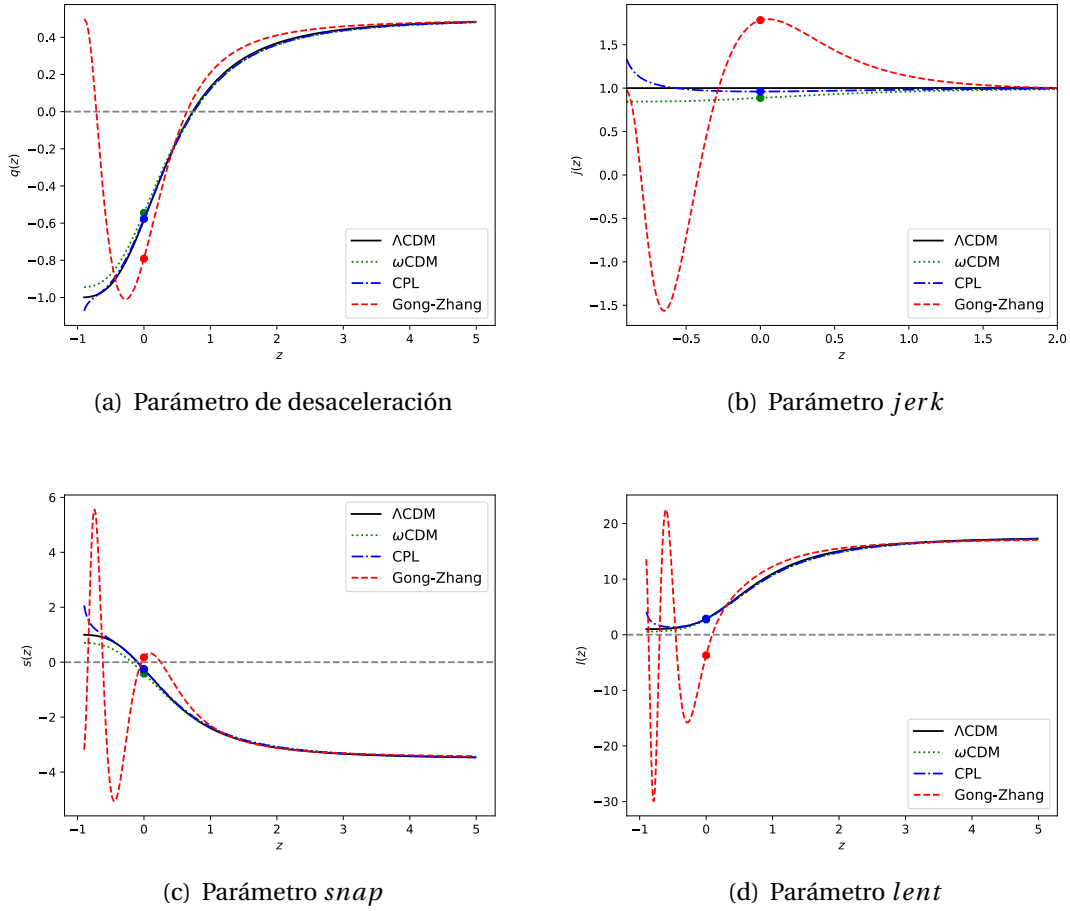


Figura 6.4: Parámetros cosmográficos de Λ CDM, línea negra, ω CDM, línea verde, y CPL, línea azul, (a) parámetro de desaceleración (q), (b) $jerk$ (j), (c) $snap$ (s), (d) $lenth$ (l).

Los últimos dos parámetros cosmográficos, $snap$ (c) y $lenth$ (d), carecen de una interpretación física, aunque se usan como diagnósticos de energía oscura y se usan para comparar los modelos cosmológicos de manera geométrica.

6.4. $E(z)^2$ vs $(1+z)^3$

Con este diagnóstico podemos tener información de la la densidad de masa de cada uno de los modelos, ya que no involucra de ninguna manera su ecuación de estado. Para analizar la Figura 6.5 se toma como referencia Λ CDM, la cual divide en dos zonas, por encima de ella se encuentra la zona quintaesencia, para los modelos en esta zona su ecuación de estado se encuentra entre $-1 < \omega < \frac{1}{3}$, mientras que para los modelos en la zona fantasma, es decir los que se encuentran por debajo de Λ CDM la ecuación de estado es $\omega < -1$, en este caso ambos modelos se encuentran por encima de Λ CDM lo que los convierte en modelos quintaesencia.

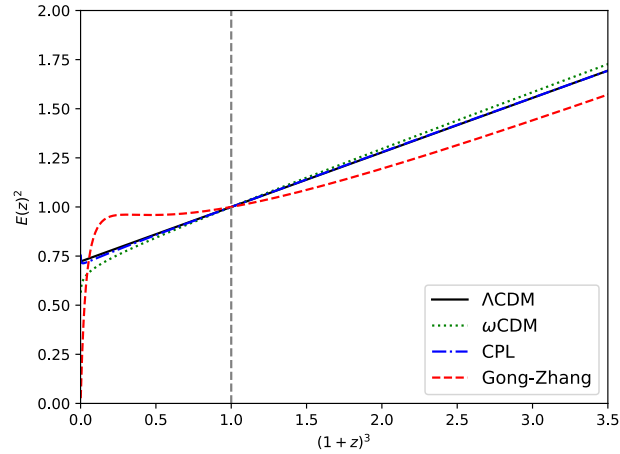


Figura 6.5: Diagnóstico $E(z)^2$ vs $(1+z)^3$, el cual divide a los modelos en quintaesencia, por encima de Λ CDM, y zona fantasma, por debajo de Λ CDM

6.5. Statefinder

El statefinder es un espacio fase en donde se muestra la evolución de los modelos cosmológicos respecto al tiempo, para Λ CDM es un punto en $(0, 1)$, y para ω CDM, CPL y Gong-Zhang es una trayectoria, esto debido a que el statefinder está relacionado directamente con *jerk*, el cual tiene que ver con la ecuación de estado de la energía oscura, y para ω CDM, CPL y Gong-Zhang su ecuación de estado es dinámica.

En la Figura 6.6 podemos observar que la trayectoria del modelo Gong-Zhang tiene una trayectoria más grande, y todos los modelos pasan por el punto que representa a Λ CDM.

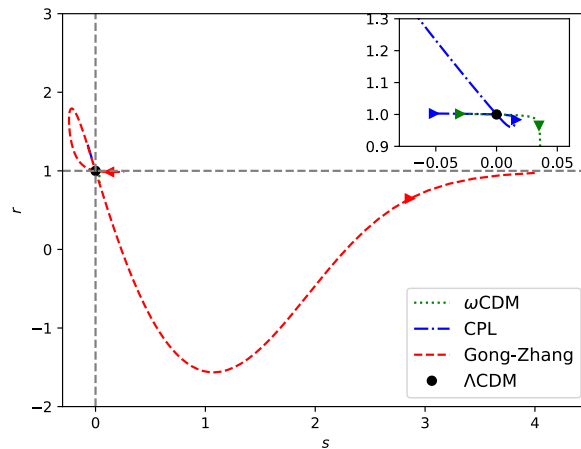


Figura 6.6: (a) Evolución del Universo. Para Λ CDM, es un punto en las coordenadas $(0, 1)$, mientras que los otros dos modelos siguen una trayectoria que evoluciona en el tiempo, las flechas muestran la dirección en la que la trayectoria va evolucionando

6.6. Diagnóstico H_0

El diagnóstico H_0 , nos dice cual es la desviación que existe en los modelos, considerando que la curvatura del Universo es $k = 0$, este diagnóstico nos da información de la etapa tardía de Universo y del valor de la constante de Hubble. En la Figura 6.7, podemos observar la línea amarilla la cual nos indica el valor actual de H_0 según Planck, el cual nos dice el valor de la constante de Hubble basado en *CMB*, y el área amarilla representa el error de H_0 . Para este diagnóstico lo que importante es obtener información sobre el parámetro de Hubble, tratando de desprejar los demás parámetros libres del modelo. En la Figura 6.7 se puede observar el modelo ω CDM con tres valores de la ecuación de estado, la línea sólida es con el valor obtenido en el ajuste de los datos, para la línea punteada se le da un valor de $\omega = -0.8$, que corresponde a modelos de quintaesencia y para la línea rayada tiene un valor de $\omega = -1.2$ corresponde a modelos de zona fantasma. Se espera que en el pasado los modelos tiendan al valor de Planck, y en el futuro se alejen de el, pues como se mencionó en la sección 2. 3.2, estos datos nos dan información de los inicios del Universo.

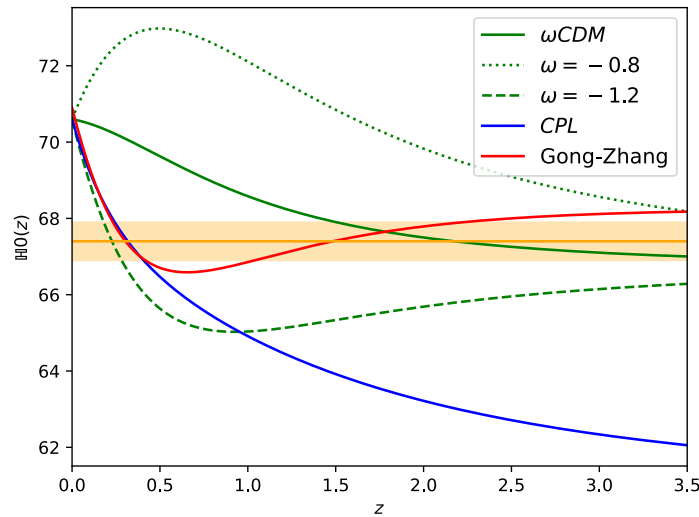


Figura 6.7: Diagnóstico H_0 , el cual nos muestra la desviación entre modelos. Línea amarilla valor calculado por sonda planck, $H_0 = 67.4$ a 1σ .

En la Figura 6.7, podemos observar que el modelo CPL para valores de z en el pasado se aleja del valor Planck, esto nos dice que este modelo tiene problemas al hacer el estudio del espectro de potencias de materia, el cual explica como se agrupa la materia, y concluye que hay una saturación de cúmulos de materia bariónica y oscura, además presenta problemas a nivel de perturbaciones, es decir, en la época temprana del Universo. Por el contrario en modelo Gong-Zhang es un buen candidato para resolver la tensión de H_0 y sabemos que su ecuación de estado es variable en el tiempo, que a diferencia del modelo ω CDM, resuelve también la tensión de H_0 , pero su ecuación de estado es constante en el tiempo.

6.7. Edad del Universo

En la Figura 6.8 se muestra la edad del Universo para cada uno de los modelos cosmológicos comparado con cúmulos globulares, que son considerados los objetos más antiguos del Universo, lo cual quiere decir que ningún modelo puede ser más joven, pues el Universo se creó antes que cualquier otro objeto.

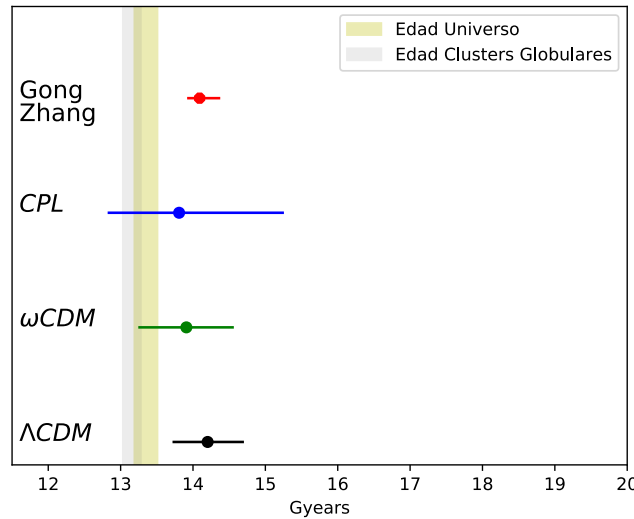


Figura 6.8: Edad del Universo a 1σ , comparado con clusters globulares

Modelo	Edad de Universo (Gyrs)
Λ CDM	$14.00 \pm \begin{matrix} 0.4835 \\ 0.4675 \end{matrix}$
ω CDM	$13.83 \pm \begin{matrix} 0.6381 \\ 0.6464 \end{matrix}$
CPL	$13.85 \pm \begin{matrix} 1.4304 \\ 0.9696 \end{matrix}$
Gong-Zhang	$14.0914 \pm \begin{matrix} 0.1545 \\ 0.2673 \end{matrix}$

Tabla 6.3: Edad del universo para Λ CDM, ω CDM, CPL y Gong-Zhang.

Otra forma de calcular la edad del Universo es calculando el valor inverso de la constante de Hubble

$$t = \frac{1}{H_0} \quad (6.1)$$

en donde tomaremos el valor $H_0 = 73.52 \text{ Km/s/Mpc}$, calculado por Adam Riess en 2018[6], entonces el valor de la edad del Universo es $t = 13.60 \text{ Gy}$ y tomando el valor calculado por el satélite planck $H_0 = 67.40 \text{ Km/s/Mpc}$ tenemos que la edad del Universo es $t = 14.83 \text{ Gy}$, por lo cual los valores obtenidos mediante la ecuación 2.28 entran en el rango calculado mediante observaciones.

7

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió la dinámica del Universo mediante los modelos cosmológicos ω CDM, CPL y Gong-Zhang, teniendo en cuenta que para el primero la ecuación de estado de la energía oscura es una constante distinta de -1 y para los dos restantes una función que depende del tiempo. Estas tres cosmologías ajustaron de manera satisfactoria con los datos de *OHD* y *SNIa* de acuerdo con la prueba χ^2 .

Con los resultados de los ajustes de los modelos, se obtuvo la cosmografía donde se recaba información de la época de aceleración del Universo, de la ecuación de estado y de sus valores en la actualidad. En cuanto al parámetro de desaceleración, observamos que los modelos ω CDM y CPL son consistentes con el modelo Λ CDM, principalmente la transición de desaceleración a aceleración ocurren de manera más temprana que con el modelo de Gong-Zhang. Por otro lado, mientras los modelos Λ CDM, ω CDM y CPL se predice una expansión acelerada en el futuro, para el modelo Gong-Zhang se predice que el Universo se frenará. Con relación al parámetro jerk, el modelo que más se diferencia de Λ CDM es el de Gong-Zhang con un comportamiento oscilatorio en la región de $z < 1$. Esta misma situación se observa también en los parámetros de orden superior *snap* y *lent*.

Del diagnóstico $E(z)$ vs $(1+z)^3$, podemos inferir que los modelos ω CDM y Gong-Zhang tienen comportamiento de quintaesencia, para los cuales el Universo termina en *Big Crunch*, mientras que CPL se encuentra en los modelos tipo fantasma que permanecerán en una fase de expansión acelerada y tendrá un desenlace denominado *Big Rip*. Finalmente basados en la edad del Universo, concluimos que todos los valores obtenidos se encuentran dentro del rango esperado, ya que todas son mayores a la edad de los clusters globulares. Con excepción en CPL, debido a que su número de grados de libertad hace que la barra de error cruce este límite.

En el statefinder Λ CDM es un punto en este espacio fase, mientras que los tres modelos restantes representan una trayectoria, siendo Gong-Zhang la más grande debido a que la escala en jerk es mayor, teniendo como consecuencia una diferencia numérica superior con Λ CDM. Las tres cosmologías en algún punto de su evolución cruzan el punto del modelo estándar, lo cual es de suma importancia para descartar modelos.

Finalmente, en el diagnóstico $H\Omega$, se observa que para los modelos ω CDM y Gong-Zhang, el valor de H_0 en $z = 0$ se acerca al valor obtenido por colaboración

SHOES, mientras que para valores de z en el pasado los modelos tienden al valor calculado por la colaboración Planck. Para CPL se tiene valores muy bajos de H_0 para valores de z en el pasado. De este diagnóstico podemos concluir que Gong-Zhang es un interesante candidato para resolver la tensión de H_0 , lo cual motiva estudiarlo a nivel perturbativo.

En conclusión, recientes estudios indican que la energía oscura está descrita con una ecuación de estado variable, lo cual descarta al modelo ω CDM, sin embargo es un buen punto de partida para iniciar estudios cosmológicos. CPL tiene buenos resultados en algunos de los diagnósticos, aunque para el diagnóstico $H\text{O}$, nos da valores lejanos a los esperados en el pasado, además de que al contar con más parámetros libres, se necesita más tiempo de cómputo y los errores obtenidos son mayores. Gong-Zhang parece tener mejores resultados en los diagnósticos a los que fueron sometidos los modelos. Como parte del trabajo a futuro se requiere estudiar la cosmología Gong-Zhang a nivel de perturbaciones.

REFERENCIAS

- [1] Walker, M. G., & Loeb, A. (2014). Is the universe simpler than Λ CDM? *Contemporary Physics*, 55(3), 198–211. <https://doi.org/10.1080/00107514.2014.919741>
- [2] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra, “The Cosmological constant and dark energy,” *Rev. Mod. Phys.* 75, 559–606 (2003), [,592(2002)], arXiv:astro-ph/0207347 [astro-ph].
- [3] Bullock, J. S., & Boylan-Kolchin, M. (2017). Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 55(1), 343–387. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-091916-055313>
- [4] Ó Colgáin, E., Sheikh-Jabbari, M., & Yin, L. (2021). Can dark energy be dynamical? *Physical Review D*, 104(2). <https://doi.org/10.1103/physrevd.104.023510>
- [5] Martínez, V. (2005). *Astronomía Fundamental*. España: UNIVERSITAT DE VALÈNCIA. SERVEI DE PUBLICACIONS
- [6] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [7] NASA. (2018). Dark Energy, Dark Matter. 06/09/2021, de NASA Sitio web: <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>
- [8] Li, M., Li, X. D., Wang, S., & Wang, Y. (2011). Dark Energy. *Communications in Theoretical Physics*, 56(3), 525–604. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/56/3/24>
- [9] Comelli, D., Pietroni, M., & Riotto, A. (2003). Dark energy and dark matter. *Physics Letters B*, 571(3–4), 115–120. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.05.006>.
- [10] Dodelson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, Elsevier Science.
- [11] Tonatiuh Matos. (2004). *¿De qué está hecho el Universo?*. México: Fondo de cultura económica.
- [12] Shirasaki, M. (2015). *Introduction to Observational Cosmology*. Springer Theses, 1 – 13. *doi* : 10.1007/978 – 981 – 287 – 796 – 3_1.
- [13] *An introduction to modern cosmology*. Andrew R. Liddle(. Imperial Coll., London.) 1998.
- [14] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2016). *Fundamental astronomy*. (6ta ed.) Springer.
- [15] van den Bergh, S. (1992). The Hubble parameter. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 104, 861. <https://doi.org/10.1086/133070>
- [16] Motta, V., García-Aspeitia, M. A., Hernández-Almada, A., Magaña, J., & Ver-
-

dugo, T. (2021). Taxonomy of Dark Energy Models.

Universe, 7(6), 163–202. <https://doi.org/10.3390/universe7060163>.

[17] David Benisty, Denitsa Staicova. (2021). A preference for Dynamical Dark Energy?. 06/09/2021, de arXiv:2107.14129 [astro-ph.CO]

[18]] De Cruz, J. (2021). Implications of Dynamical Dark Energy in the expansion of the Universe and the Structure Formation. 06/09/2021, de 2105.14800 [astro-ph.CO]

[19] Wang, F. Y., Dai, Z. G., & Qi, S. (2009). Probing the cosmographic parameters to distinguish between dark energy and modified gravity models. *Astronomy & Astrophysics*, 507(1), 53–59. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200911998>

[20] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, et al., “Planck2015 results,” *Astronomy Astrophysics*, vol. 594, p. A13, Sep 2016.

[21] European Space Agency. (2013). Planck: Resumen de la misión. 06/09/21, de European Space Agency. Sitio web: https://www.esa.int/Space_in_Member_States/Spain/Planck_Resumen_de_la_mision.

[22] Bull, P., Akrami, Y., Adamek, J., Baker, T., Bellini, E., Beltrán Jiménez, J., Benti-vegna, E., Camera, S., Clesse, S., Davis, J. H., di Dio, E., Enander, J., Heavens, A., Heisenberg, L., Hu, B., Llinares, C., Maartens, R., Mörtzell, E., Nadathur, S., . . . Winther, H. A. (2016). Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, 12, 56–99. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2016.02.001>

[23] Comelli, D., Pietroni, M., & Riotto, A. (2003). Dark energy and dark matter. *Physics Letters B*, 571(3–4), 115–120. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2003.05.006>

[24] B.B.C.N. (2012, 25 abril). BBC News | SCI/TECH | Age of Universe confirmed. BBC News. Recuperado 4 de marzo de 2022, de <http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/1950403.stm>

[25] Sahni, V. (2002, 30 enero). Statefinder – a new geometrical diagnostic of dark energy. arXiv.Org. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0201498>

[26] Two new diagnostics of dark energy Varun Sahni, Arman Shafieloo, and Alexei A. Starobinsky *Phys. Rev. D* 78, 103502 – Published 3 November 2008

[27] Krishnan, Chethan & Colgain, Eoin & Sheikh-Jabbari, Shahin & Yang, Tao. (2020). Running Hubble Tension and a H0 Diagnostic.

[28] Van Ravenzwaaij, D., Cassey, P. and Brown, S.D. A simple introduction to Markov Chain Monte-Carlo sampling. *Psychon Bull Rev* 25, 143–154 (2018). <https://doi.org/10.3758/s13423-016-1015-8>

[29] ANDRIEU C. UK 2003. An Introduction to MCMC for Machine Learning. Kluwer Academic Publishers.

[30] Ausín C. Madrid 2012. Métodos de cadenas de Markov Monte Carlo. Universidad Carlos III de Madrid.

[31] Bauista P. Guanajuato 2007. Experimentación con un algoritmo de MCMC multi-escala y autoajustable. CIMAT.

[32] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A.H. Teller, and E. Teller, *J. Chem. Phys.* 21, 1087 (1953); H. Müller-Krumbhaar and K. Binder, *J. Stat. Phys.* 8, 1 (1973)

[33] Sharov, G. S. (2022, 27 marzo). Modified Equations of State for Dark Energy and

-
- Observational Limitations. MDPI. <https://www.mdpi.com/2218-1997/8/4/201>
- [34] M. Chevallier and D. Polarski, *Int. J. Mod. Phys. D* 10, 213 (2001).
- [35] Linder, E. V. (2003). Exploring the Expansion History of the Universe. *Physical Review Letters*, 90(9). doi:10.1103/physrevlett.90.091
- [36] Yang, W., di Valentino, E., Pan, S., & Mena, O. (2021). Emergent Dark Energy, neutrinos and cosmological tensions. *Physics of the Dark Universe*, 31, 100762. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2020.100762>
- [37] Gong, Y., & Zhang, Y. Z. (2005). Probing the curvature and dark energy. *Physical Review D*, 72(4). <https://doi.org/10.1103/physrevd.72.043518>
- [38] Zwicky, F. (2008). Republication of: The redshift of extragalactic nebulae. *General Relativity and Gravitation*, 41(1), 207–224. <https://doi.org/10.1007/s10714-008-0707-4>
- [39] Exploring the Hubble tension –. (2021, 9 julio). CERN Courier. <https://cerncourier.com/a/exploring-the-hubble-tension/>