



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias Mecatrónica

**ANÁLISIS DEL DESGASTE EN ENGRANES APLICANDO
EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Mecatrónica

Presenta:

Juan José Saucedo Dorantes

Dirigido por:

Dr. Juan Primo Benítez Rangel

San Juan del Río, Querétaro, Mayo de 2014



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias Mecatrónica

ANÁLISIS DEL DESGASTE EN ENGRANES APLICANDO EL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Mecatrónica

Presenta:

Juan José Saucedo Dorantes

Dirigido por:

Dr. Juan Primo Benítez Rangel

SINODALES

Dr. Juan Primo Benítez Rangel

Presidente

Dr. Roque Alfredo Osornio Rios

Secretario

Dr. Luis Morales Velásquez

Vocal

Dr. Miguel Trejo Hernández

Suplente

Dr. Daniel Moríñigo Sotelo

Suplente

Dr. Aurelio Domínguez Gonzales

Director de la facultad

Firma

Firma

Firma

Firma

Firma

Dr. Irineo Torres Pacheco

Director de investigación y posgrado

Centro Universitario.
Querétaro, Qro.
Mayo de 2014.
México

RESUMEN

Procesos industriales se ven involucrados con la utilización de maquinaria especializada, en algunos procesos este tipo de equipos utilizan cajas de engranajes para transformar giros, reducir o incrementar la velocidad de giro, la pérdida de eficiencia en máquinas puede ser ocasionado por la aparición de fallas en sus componentes mecánicos. En este trabajo se presenta el análisis del desgaste en engranes empleando el Método de Elementos Finitos (Finite Element Method, FEM), demostrando que el cambio de masa ocasionado por desgaste afecta la frecuencia natural y la de operación dentro de una caja de engranes. Para realizar el análisis se propuso un modelo del perfil de diente de un engrane con diferentes niveles de desgaste, un modelo sano con 0% de desgaste y tres modelos dañados con 25%, 50% y 75% de desgaste; la geometría de los modelos se obtuvo del desarrollo y descripción de código en MATLAB®. Para emplear el FEM se describieron funciones desarrolladas en MATLAB® para realizar el pre-procesamiento, procesamiento y post-procesamiento del método, al integrar las diferentes geometrías de los perfiles a las herramientas FEM de un análisis estático se obtuvieron esfuerzos y deformaciones del diente al aplicar una carga, de una análisis dinámico se obtuvieron las frecuencias naturales. Para dar validez a este trabajo se diseñó y construyó un banco experimental de fallas mecánicas, formado básicamente por un motor, una caja reductora de engranes y una carga, de acuerdo con los modelos de desgaste propuestos en uno de los engranes de la caja se indujo de manera controlada la falla de desgaste, mediante la medición de vibraciones y un análisis espectral, se determinaron los efectos que genera el desgaste en engranes sobre la operación del proceso. Investigaciones aplicadas en el estudio de engranes tienen como objetivo mejorar algún aspecto, o bien tratar de pronosticar posibles fallas, con una buena metodología de implementación para el FEM se logró comprender de mejor manera su fundamentación y las ventajas que ofrece, encontrando que la frecuencia natural es afectada por el cambio de masa en el engrane, con la medición de vibraciones es posible detectar fallas tempranas en sistemas mecánicos como como lo es la aparición del desgaste en engranes.

(Palabras clave: desgaste, FEM, frecuencia natural, vibraciones)

ABSTRACT

Industrial processes are involved with the use of specialized machinery, in some processes this kind of equipment uses gearboxes to transform turns, reduce or increase the speed turn. Loss of efficiency in machines can be caused by the occurrence of mechanical failures in their components. In this project the analysis of gear wearing applying the *Finite Element Method-FEM* is presented, demonstrating that the change in mass caused by wear affects the natural frequency and the operation inside a gearbox. In order to carry out the analysis a model of the tooth profile of a gear with different levels of wear is proposed, a healthy model with 0% of wear and three damaged models with 25%, 50% and 75% of wear are proposed; geometry of the models was obtained from the development and description of code in MATLAB ®. To employ the FEM, it was necessary to describe functions developed in MATLAB ® which are to calculate the pre-processing, processing and post-processing of the method. To integrate the different geometries of the profiles to the FEM tools with a static analysis, stresses and strains of the tooth were obtained by applying a load, though a dynamic analysis the natural frequencies were obtained. To validate this work an experimental bench of mechanical failures was designed and built, basically consisting of a motor, a reduction gearbox and a load, according to the wear patterns proposed in one of the box gear's the wear failure was induced in a controllably way. By measuring vibration and spectrum analysis, the effects generated by the wear in gears in the process operation were determined. The aim of this research is to improve some aspects or try to predict possible failures. With a good methodology of implementation for the FEM a better understand its functionality and advantages was achieved, finding that the natural frequency is affected by the change in mass of the gear, with the measurement of vibration is possible to detected early failures in mechanical systems such as is the occurrence of wear in gears.

(Keywords: wear, FEM, natural frequency, vibration)

DEDICATORIA

A mi familia, especialmente a mis padres con mucho cariño, de quienes he recibido su apoyo incondicional y he contado con ellos toda la vida.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por haber confiado en mí y apoyarme a lo largo de mi preparación académica que con este trabajo culmina una etapa muy importante. A mi asesor Dr. Juan Primo Benítez Rangel por todo su apoyo y consejos que compartidos a lo largo de este trabajo, al resto de los colaboradores Dr. Roque A. Osornio Rios, Dr. Luis Morales Velázquez, Dr. Miguel Trejo Hernández y Daniel Moríñigo Sotelo que fueron constantes y estuvieron pendientes del trabajo. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por otorgarme una beca (Beca No. 278033) para realizar los estudios de posgrado en una de las mejores instituciones como lo es la Universidad Autónoma de Querétaro. A mis amigos, compañeros, profesores y personal de la Universidad que hicieron amena la estancia en esta institución y de quienes puedo presumir una bonita amistad.

Gracias

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	vii
ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE LISTADOS	x
1 Introducción.....	1
1.1 Antecedentes	2
1.2 Objetivos e hipótesis	5
1.2.1 Objetivos.....	5
1.2.2 Hipótesis	5
1.3 Justificación	6
1.4 Planteamiento general	7
2 Revisión de literatura.....	9
2.1 Estado del arte.....	9
2.2 Engranés y sus formas comunes	10
2.3 Nomenclatura de engranes.....	11
2.4 Curva involuta y engranes acoplados	12
2.4.1 Formulación del perfil involuta en engranes	13
2.5 Fallas en engranes	16
2.6 Las vibraciones mecánicas.....	17
2.6.1 Análisis espectral.....	18
2.6.2 Causas y efectos de la vibración.....	19
2.7 Generalidades del método de elementos finitos.....	21
2.8 Discretización de elementos	22
2.8.1 Formas básicas de los elementos	22
2.9 Software usado en el estudio de elementos finitos	33
3 Metodología.....	35

3.1	Análisis y construcción del perfil involuta	36
3.1.1	Perfiles de dientes desgastados.....	38
3.2	Formulación e implementación FEM	40
3.2.1	Preprocesamiento.....	42
3.2.2	Procesamiento.....	44
3.2.3	Posprocesamiento	46
3.2.4	Programación manual del FEM.....	46
3.3	Banco experimental de fallas mecánicas	56
3.3.1	Descripción e instalación de componentes mecánicos y eléctricos.....	57
3.3.2	Fabricación de engranes desgastados	58
3.3.3	Instrumentación y sistema de adquisición de datos.....	60
4	Resultados y discusión	62
4.1	Perfil de diente de engrane de caja reductora 1:4	62
4.1.1	Discretización de los perfiles de diente	64
4.2	Análisis estático en perfiles de diente de engrane empleando el FEM.....	66
4.3	Análisis dinámico en perfiles de diente de engrane empleando el FEM	71
4.4	Pruebas en banco experimental de fallas mecánicas.....	72
4.4.1	Análisis espectral de pruebas con el variador a 20 Hz	73
4.4.2	Análisis espectral de pruebas con el Variador a 65 Hz	75
4.4.3	Análisis espectral de pruebas con el arrancador.....	79
5	Conclusiones y prospectivas.....	82
5.1	Conclusiones	82
5.2	Prospectivas	83
	REFERENCIAS	84
A.	Programa y funciones para la construcción de perfiles involuta de engrane.....	86
B.	Programas desarrollados empleando el FEM.....	90
C.	Funciones desarrolladas para el FEM.....	96
D.	Artículos publicados	100

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura

1.1 Diagrama general del proyecto.....	7
2.1 Nomenclatura de los dientes de engranes rectos (Shigley y Mischke, 2002).....	12
2.2 Trazo de la envolvente (Shigley y Mischke, 2002).....	13
2.3 Generación de la involuta.....	14
2.4 Generación de la involuta ampliada.....	15
2.5 Vibración típica en engrane dañado (Lozano y Jáuregui, 2013).....	21
2.6 Principales elementos para discretizar sistemas (Rao, 1999).....	23
2.7 Elemento barra (Rao, 1999).....	24
2.8 Elemento triangular (Rao, 1999).....	27
3.1 Metodología del proyecto.....	36
3.2 Técnica usada para la construcción del perfil involuta.....	37
3.3 Perfil generado con: (a) 3 puntos, (b) 10 puntos.....	38
3.4 Superficie de contacto en engranes.....	39
3.5 Perfil de diente con desgaste.....	40
3.6 Forma general de emplear FEM.....	42
3.7 Cálculo y ensamble de los elementos.....	43
3.8 Problema 14.79, Hibbeler (2006).....	47
3.9 Deformaciones amplificadas problema 14.79, Hibbeler (2006).....	51
3.10 Deflexión de la viga en cantiléver.....	55
3.11 Primeros dos modos de vibración de la viga en cantiléver.....	56
3.12 Banco experimental de fallas mecánicas.....	57
3.13 Juego de engranes y sus vistas.....	59
3.14 Engrane a) sano, b) 25%, c) 50% y d) 75% de desgaste.....	59
3.15 Ubicación de a) encoder y b) acelerómetro.....	60
3.16 Tarjeta de control PLCUAQ8x16.....	61
4.1 Perfil diente de engrane de caja reductora 1:4.....	63
4.2 Perfiles diente de engrane con desgaste de caja reductora 1:4.....	64
4.3 Modelo discreto de perfil 0% desgastado a) sin refinar, b) refinado.....	65
4.4 Modelo discreto de perfil 25% desgastado a) sin refinar, b) refinado.....	65

4.5 Modelo discreto de perfil 50% desgastado a) sin refinar, b) refinado.....	66
4.6 Modelo discreto de perfil 75% desgastado a) sin refinar, b) refinado.....	66
4.7 Viga en voladizo sometida a una carga uniforme.....	67
4.8 Esfuerzo máximo en diente de engrane.....	67
4.9 Deformaciones del diente con a) 0%, b) 75% de desgaste.....	68
4.10 Concentración de esfuerzos en perfil con 0% de desgaste.....	69
4.11 Concentración de esfuerzos en perfil con 25% de desgaste.....	69
4.12 Concentración de esfuerzos en perfil con 50% de desgaste.....	70
4.13 Concentración de esfuerzos en perfil con 75% de desgaste.....	70
4.14 Efectos del desgaste en la frecuencia natural.....	72
4.15 Búsqueda en espectro de frecuencias en vibraciones para FE a 20Hz.....	74
4.16 Búsqueda en espectro de frecuencias en vibraciones para 2FE a 20Hz.....	75
4.17 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 0%-65Hz.....	76
4.18 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 25%-65Hz.....	77
4.19 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 50%-65Hz.....	78
4.20 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 75%-65Hz.....	78
4.21 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 0%-60Hz.....	80
4.22 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 25%-60Hz.....	80
4.23 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 50%-60Hz.....	81
4.24 Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 75%-60Hz.....	81

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla

3.1	Coordenadas nodales problema 14.79.....	47
3.2	Conexiones nodales problema 14.79.....	47
3.3	Desplazamientos nodales problema 14.79.....	51
3.4	Deformaciones y esfuerzos problema 14.79.....	51
3.5	Frecuencias naturales de la viga en cantiléver.....	56
4.1	Características del engrane de 72 dientes.....	62
4.2	Dimensiones obtenidas del modelo de perfil.....	63
4.3	Espesor de la cresta del diente de engrane de 72 dientes.....	64
4.4	Deformación máxima del diente de engrane de 72 dientes.....	69
4.5	Esfuerzo máximo del diente de engrane de 72 dientes.....	70
4.6	Frecuencias naturales para el engrane con 0% de desgaste.....	71
4.7	Frecuencias naturales para el engrane con 25% de desgaste.....	71
4.8	Frecuencias naturales para el engrane con 50% de desgaste.....	71
4.9	Frecuencias naturales para el engrane con 75% de desgaste.....	71
4.10	Frecuencias de operación con variador a 20Hz.....	73
4.11	Frecuencias de operación con variador a 65Hz.....	75
4.12	Frecuencias de operación con arrancador.....	79

ÍNDICE DE LISTADOS

Listado

3.1	Primer parte de la entrada de datos.....	47
3.2	Segunda parte de la entrada de datos.....	49
3.3	Ciclo de ensamble de los elementos.....	49
3.4	Incorporacion de condiciones frontera y solucion del sistema.....	50
3.5	Cálculo de esfuerzos y deformaciones en elementos.....	50
3.6	Discretización de elementos de una viga en cantiléver.....	52
3.7	Ensamble de elementos para una viga en cantiléver.....	53
3.8	Integración de restricciones para viga en cantiléver.....	54
3.9	Cálculo de las frecuencias naturales y modos de vibración.....	55
A.1	Programa principal para generar perfiles de engranes.....	86
A.2	Función involuta.....	87
A.3	Función cresta.....	88
A.4	Función dibujo del diente.....	88
B.1	Programa para análisis estático del diente de engrane.....	90
B.2	Programa para análisis dinámico del diente de engrane.....	93
C.1	Función matriz de rigidez triangular.....	96
C.2	Función matriz de masas triangular.....	96
C.3	Función ensamble.....	97
C.4	Función posición.....	97
C.5	Función condiciones 1.....	98
C.6	Función condiciones 2.....	98
C.7	Función desplazamientos.....	99

Capítulo I

1 Introducción

Hoy la industria y otros campos de aplicación requieren maquinaria de mayor eficiencia, éste es uno de los requisitos para poder ser una empresa competitiva y lograr una buena producción, actualmente existen una gran diversidad de maquinaria especializada y perfeccionada en procesos específicos, esto ha podido realizarse gracias a innovaciones tecnológicas, dueños de plantas productivas quisieran no detener sus procesos, desafortunadamente sabemos que las fallas eléctricas como mecánicas pueden aparecer en cualquier momento, en consecuencia se generan costos económicos al reparar este tipo de daños y la gran mayoría de las veces se puede llegar a detener todo un proceso. Dentro de los componentes mecánicos que conforman una máquina se encuentran las cajas de engranajes, usualmente utilizadas para la transformación de movimientos (cambio de giros, reductores de velocidad), algunas de las principales fallas que se pudieran generar dentro de una caja de engranajes es la fractura de dientes en engranes, falla que cuando se encuentra presente es auditivamente perceptible, este es el peor de los casos, no debemos de olvidar que con el uso y debido al contacto entre dientes es generado un desgaste, normalmente despreciable por no saberse cuantificar, por tal motivo que en este trabajo se presenta el análisis del desgaste en engranes, con el fin de demostrar como la pérdida de masa en engranes afecta la frecuencia

de operación dentro de una caja de engranajes, además de ocasionar daños al resto de los componentes que se le encuentren acoplados.

El contenido de éste trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos, en los cuales queda descrito el desarrollo del proyecto, el capítulo uno contiene una introducción, en la que se exponen algunas de las necesidades para la realización del presente trabajo, también se presentan una serie de antecedentes, hipótesis, objetivos de alcance, justificación, y un planteamiento general para dar una orientación del contenido de la tesis. En el capítulo dos se presenta una revisión de la literatura, detallando como surge y ha evolucionado hasta el momento el tema tratado, mostrando también la información necesaria para poder analizar fallas en engranes. En el capítulo tres se desarrolla la metodología, donde se describe el procedimiento y los métodos utilizados en el análisis de la pérdida de masa en engranajes. Definiendo algunas pruebas realizadas, los resultados obtenidos junto con discusiones elaboradas son descritos en el capítulo cuatro. En un último capítulo se incluyen conclusiones de las pruebas realizadas, dando algunas perspectivas para el proyecto realizado. Finalmente encontraremos una sección en la cual se exponen referencias bibliográficas consultadas y un apéndice.

1.1 Antecedentes

Actualmente gran cantidad de procesos industriales están relacionados con la utilización de maquinaria especializada, empleadas en la realización de tareas específicas, estas máquinas principalmente compuestas por elementos eléctricos y mecánicos involucran el uso de engranajes, para generar movimientos o giros, ejemplo de ello son las máquinas herramienta, como el torno y la fresa, que utilizan cajas de engranes para variar sus velocidades de operación. Con los continuos avances realizados en el diseño de instrumentos, controles automáticos, y equipos automatizados, el estudio de los mecanismos ha tomado un nuevo significado, la ventaja de estos mecanismos es que pueden lograr tanto pares prismáticos como rotacionales.

Los engranes son elementos mecánicos dentados que rotan alrededor de un eje, llevar a cabo la implementación de estos elementos como parte de un mecanismo, para la transmisión de potencia o movimientos rotatorios, no es resultado de un desarrollo aislado;

sino que se tuvieron que haber realizado estudios que permitieran concretizar algunas aplicaciones y diseños. Ya que los engranes constituyen uno de los mejores medios disponibles para transmitir este movimiento, y debido al contacto continuo que presentan sus dientes, estos sufren desgaste a determinado tiempo (Shigley y Uicker, 1997).

En consecuencia, se han desarrollado trabajos con el fin de que éstos tengan un mejor desempeño, así cualquier nuevo diseño o mejora, considerando las primeras contribuciones, impone nuevas demandas sobre materiales, manufactura, lubricantes e incluso aspectos de vida esperada. Para este efecto, se han propuesto distintas geometrías para el diente de engrane con el fin de lograr tanto una relación de velocidad constante como la mayor resistencia posible, es en el año de 1892 cuando Wilfred Lewis introduce el sistema de involuta para el diseño del diente, siendo esta la forma geométrica de uso generalizado en el mundo, y de esta forma las transmisiones con engranes se han desarrollado ininterrumpidamente y sus aplicaciones se han ampliado considerablemente.

Debido a fallas mecánicas que presentan los engranajes, centros de investigación e instituciones de educación se han dado a la tarea de realizar análisis en fallas de engranes usando ciertos métodos o algoritmos específicos, ya es de tiempo que se han publicado algunos resultados, en el ámbito internacional se pueden encontrar diversos antecedentes, tal como el trabajo de Ramamurti y Ananda (1988), quienes realizaron una propuesta para el análisis de esfuerzos en dientes de engranes usando el método de elementos finitos (*FEM-Finite Element Method*) y simetría cíclica, omitiendo las condiciones frontera entre dientes adyacentes con un método de iteraciones simultaneas efectuaron un análisis de frecuencias, las cuales compararon con las obtenidas de modelar un diente de engrane como una viga en cantiléver.

Durante décadas la mayoría de estudios sobre engranes tuvieron un solo enfoque, algunos ejemplos son el caso de Celika (1999) quien calculó deflexiones y esfuerzos en dos modelos diferentes de engranes, en su modelo consideró deformaciones de contacto y efectos de fricción, sus resultados los comparó con experimentos análogos en donde uso strain gage, Gonzales et al. (2002) contrastó los esfuerzos obtenidos usando solamente mediante el análisis de un diente de engrane en diferentes plataformas de hardware dirigidas a la aplicación del FEM, donde comparó la capacidad de carga de engranes cilíndricos con

normas vigentes ISO 6336 (ISO 6336-3:1996), deduciendo que el FEM es una buena alternativa para el estudio en el cálculo de engranes.

Desarrollos en software generaron nuevas plataformas de simulación con las cuales se pueden realizar buenas aproximaciones, estas plataformas han sido usadas en investigaciones nacionales, tal es el caso de Sandoval (2004) realizó el análisis sobre la resistencia a la flexión en un diente de engrane recto, utilizando el método experimental de la fotoelasticidad y el método numérico FEM desarrollado en ANSYS, obteniendo gran similitud entre los resultados por ambos métodos, por otro parte, Rodríguez (2006) determinó los esfuerzos mediante la aplicación de una carga puntual en los dientes de una rueda tipo catarina, comparando resultados del método fotoelástico con los obtenidos del modelado en ANSYS, y aunque obtuvieron buenas aproximaciones mediante FEM los resultados mostrados por este tipo de software son muy limitados.

Los trabajos anteriores han establecido las bases para que las investigaciones en cuanto al análisis de engranes sigan desarrollándose y han dado pie a nuevas propuestas, tal es el caso de la realizada por Gonzáles y Brindis (2008) quienes realizaron un análisis del estado tensional en el contacto de dientes de engranes cilíndricos sometidos a un endurecimiento sobre-estructural, reportando que el FEM permite modelar contornos para desplazamientos normales y tangenciales. Ali et al. (2008) analizaron un diente de engrane para diferentes velocidades de operación, utilizando el método de superposición encontraron componentes de desplazamiento verticales y horizontales, además de usar ANSYS para el análisis por FEM encontraron sus frecuencias naturales, desplazamientos y esfuerzos, comparando resultados teóricos con el análisis por FEM. Camacho et al. (2009) diseñaron y modelaron una caja de reducción y transmisión usando ANSYS, su análisis de resistencia y esfuerzos en los materiales fue bueno, pero los resultados reportados para la fabricación de engranes fueron ideales.

Las investigaciones aplicadas al estudio de engranes tienen como objetivo mejorar algún aspecto, o bien tratar de pronosticar posibles fallas, una de estas y la más estudiada es la fractura de dientes en engranes, apoyando el análisis en falla de engranes, en este proyecto de investigación se propone analizar la pérdida de masa en engranes, debido al desgaste presentado por larga vida útil o carga excesiva, utilizando el FEM para modelar las etapas de

desgaste de un diente de engrane y determinar que el cambio de masa de un engrane modifica la frecuencia de operación del mismo.

1.2 Objetivos e hipótesis

1.2.1 Objetivos

1.2.1.1 Objetivo general

Analizar la pérdida de masa en engranes con el método de elementos finitos, para demostrar que el cambio de masa, debido al desgaste, afecta su frecuencia natural y la operación del mismo dentro de una caja de engranes.

1.2.1.2 Objetivos particulares

Generar el perfil del diente de un engrane mediante la programación de código en MATLAB®, para obtener las características de los elementos en forma detallada.

Modelar un diente de engrane con el método de elementos finitos, para obtener sus frecuencias naturales y su relación con la pérdida de masa.

Modelar las etapas del desgaste de un diente de engrane con el método de elementos finitos, para cuantificar el grado del desgaste.

Verificar los resultados de acuerdo a algún criterio, para su comparativa con métodos reportados o mediciones realizadas.

1.2.2 Hipótesis

Es posible mediante el análisis con el método de elementos finitos determinar que el cambio de masa en engranes, generado por desgaste, modifica su frecuencia natural.

1.3 Justificación

Como se presentó en los antecedentes, los trabajos realizados abordan el análisis estructural en dientes de engrane, pero en su mayoría el diente de engrane es modelado y analizado sin falla alguna, dejando fuera del análisis consideraciones importantes, que pudieran generar variaciones en los resultados, es por eso que en este trabajo se realizará un análisis teórico del desgaste en engranes, modelando un diente de engrane como viga en cantiléver, siendo éste una buena aproximación, de la cual podremos extraer con facilidad su frecuencia natural, misma que depende de la masa, dando una buena caracterización del modelo de viga en función del desgaste se obtendrán esfuerzos y desplazamientos para su cuantificación.

La mayoría de investigaciones realizadas utilizaron software basado en FEM (ANSYS), para poder dar validez de sus resultados, sin poder acceder en forma detallada a la estructura de cada uno de los elementos (matrices de rigidez y de masas), puesto que en general el software de simulación solo despliega resultados, como desplazamientos y esfuerzos, en este trabajo se realizará el análisis del perfil del diente de un engrane, considerando falla de desgaste, desarrollando las herramientas necesarias para el estudio de FEM usando el lenguaje de programación de MATLAB®, dará la opción de realizar simulaciones, además de que mediante la programación manual para el FEM permitirá estudiar el comportamiento de cada uno de los elementos, accediendo en forma independiente a cada una de sus matrices de masas y de rigidez, esto conducirá a encontrar respuestas más aproximadas a la realidad, y poder observar cuales son los principales efectos generados por este tipo de falla.

Estudios realizados, han sido la base para continuar mejorado la calidad en engranes, aun así las fallas seguirán presentándose y generando daños no solamente sobre los engranes, sino que además pudiesen generar daños que repercuten económicamente a los procesos, por ejemplo: mayor consumo de energía, daño tanto motores como en la carga, debido la pérdida de eficiencia, efectuando una buena inspección en el mantenimiento de sistemas mecánicos, empleados en procesos industriales, puede ayudar a evitar una inversión de recursos financieros innecesaria, esto puede realizarse si se tuviera una base de datos en la que se describieran los efectos que generan tempranas fallas como el desgaste en engranes,

de aquí la necesidad de continuar con el aporte en el análisis de fallas en engranes y generar nuevos enfoques.

Generalmente cuando se detecta mal funcionamiento en sistemas mecánicos, es porque la falla presente puede ser visual o auditivamente perceptible, esto lleva a la pérdida de recursos tanto económicos como productivos, y que para dar solución al problema, además de detener la maquinaria se debe hacer una inversión financiera para el mantenimiento del equipo, al realizar el análisis del desgaste en engranes, se podrá determinar cómo es que se afecta la frecuencia de operación en una caja de engranes, más aun como esto puede afectar elementos que a su vez se encuentren ligados al engrane de falla.

1.4 Planteamiento general

La elaboración de este trabajo consta de varias etapas, ya que para llevar a cabo el análisis del desgaste en engranes se tendrá que seguir una metodología, en la Figura (1.1) se muestra el diagrama general del proyecto.

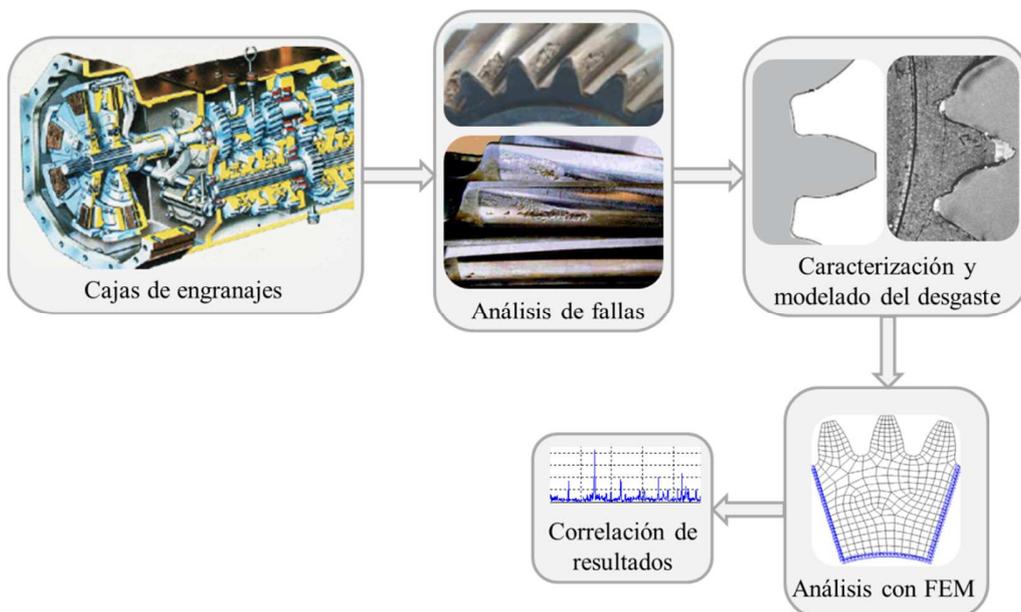


Figura (1.1) Diagrama general del proyecto.

Al analizar las posibles fallas que pueda tener una caja de engranajes se enfocara principalmente en el desgaste de dientes de engranes, de las diferentes formas de desgaste se

realizará una caracterización pudiendo diferencial entre poco desgaste y un desgaste excesivo, las diferentes formas de desgaste se modelaran usando FEM mediante de la programación de código en MATLAB®, buscando correlacionar los resultados obtenidos con los de algún otro método reportado. En forma general el propósito del proyecto es poder analizar y demostrar que la pérdida de masa en engranes puede conducir a un mal funcionamiento entre ellos, llegando a afectar a los elementos que se le encuentren ligados, con este estudio se podrá cuantificar el nivel de desgaste existente y que tan afectada se puede ver la operación entre engranes, por otra parte se pretende iniciar cubrir nuevas líneas de investigación dentro de la facultad.

Capítulo II

2 Revisión de literatura

2.1 Estado del arte

Desarrollos e investigaciones tecnológicas han sido las bases para mejorar la eficiencia en máquinas de producción, ya sea obteniendo tiempos de fabricación más cortos como mayor precisión, los elementos mecánicos que conforman una máquina juegan un papel muy importante ya que a través de ellos es como se puede transmitir movimientos lineales o rotacionales, es de tiempo que estos elementos son objeto de estudio, podemos remontarnos años atrás cuando Wilfred Lewis introduce el sistema involuta para el diseño de dientes de engranes, siendo esta la forma más común en dientes de engranes. Por décadas los estudios realizados a engranes tomaron objetivos específicos, enfocándose principalmente en el cálculo de esfuerzos y deformaciones, después los objetivos de estudio tomaron otra perspectiva dando inicio al análisis de fallas estancándose por largo tiempo en la fractura de dientes, recientemente se han iniciado otro tipo de análisis surgiendo la necesidad de estudiar una falla casi imperceptible como lo es el desgaste, lo que se pretende realizar con este proyecto es determinar que la falla de desgaste en engranes puede ocasionar cambios en la frecuencia de operación del mismo.

2.2 Engranés y sus formas comunes

Los engranes se estudian porque la transmisión del movimiento rotatorio de un eje a otro se presenta prácticamente en todas las máquinas imaginables (Shigley y Uicker, 1997). De acuerdo con Norton (2008), los engranes son fabricados en muchas configuraciones para aplicaciones específicas, las formas más comunes de tipos de engranes son las siguientes:

Engranés rectos: son engranes cilíndricos que tienen sus dientes paralelos al eje de rotación del engrane, siendo esta la forma más simple y económica de fabricar engranes, por ser el más sencillo se usan para transmitir movimiento de un eje a otro eje paralelo y generar relaciones cinemáticas primarias.

Engranés helicoidales: son engranes cilíndricos que cuentan con dientes inclinados o no paralelos al eje de rotación del engrane, el ángulo de inclinación puede ser diseñado en base a alguna aplicación, el uso para este tipo de engranes pueden ser el mismo que para engranes rectos y, cuando se utilizan en esta forma, no son tan ruidosos debido a su acoplamiento gradual, además de que puede desarrollar cargas de empuje axial y pares flexionantes, que no están presentes en engranes los rectos, estos pueden ser utilizados para transmitir movimientos entre ejes paralelos y no paralelos.

Engranés cónicos: presentan dientes formados en superficies cónicas, este tipo de engranes se emplean en la transmisión de movimiento de ejes que se intersecan, si los dientes de los engranes son rectos; los engranes cónicos en espiral se cortan de manera que el diente no sea recto, sino que formen un arco circular.

Engrane de gusano (sinfín-corona): si el ángulo del diente es muy grande el resultado es un tornillo de gusano, el sentido de rotación de la corona depende del sentido de rotación del sinfín, los engranes de tornillo sinfín se construyen también de modo que los dientes de uno de los dos elementos envuelva parcialmente al otro, este tipo de engranes son empleados cuando la relación de velocidades de los ejes son muy altas.

2.3 Nomenclatura de engranes

De entre los diferentes tipos de engranes existentes son los cilíndricos los más usuales, los cuales se caracterizan por ser ruedas dentadas, en la Figura (2.1) se ilustra la terminología de los dientes de engranes rectos, de donde se describirá su nomenclatura.

El *círculo de paso* es un círculo teórico en el que por lo general se basan todos los cálculos, su diámetro es el *diámetro de paso*. Los círculos de paso de un par de engranes acoplados son tangentes entre sí.

El *piñón* es el menor de dos engranes acoplados; el mayor se llama rueda o engrane.

El *paso circular p* es la distancia, en pulgadas, medida sobre el círculo de paso, desde un punto en el diente a un punto correspondiente en un diente adyacente. De esta manera, el paso circular es igual a la suma del *espesor del diente* y del *ancho del espacio*.

El *módulo m* representa la relación del diámetro de paso con el número de dientes.

El *paso diametral Pd* está dado por la relación del número de dientes en el engrane al diámetro de paso. En consecuencia es el recíproco del módulo.

La *cabeza o addendum a* se determina por la distancia radial entre la cresta y el círculo de paso.

La *raíz o dedendum b* equivale a la distancia radial desde el fondo hasta el círculo de paso. La *altura total h_t* es la suma de la cabeza y la raíz.

El *círculo de tolerancia* es el círculo tangente al círculo de la raíz del engrane acoplado. La *tolerancia c* está dada por la cantidad por la que la raíz en un engrane dado excede la cabeza de su engrane acoplado. La *holgura* se determina mediante la cantidad por la cual el ancho de espacio de un diente excede el espesor del diente de acoplamiento medido en los círculos de paso (Shigley y Mischke, 2002).

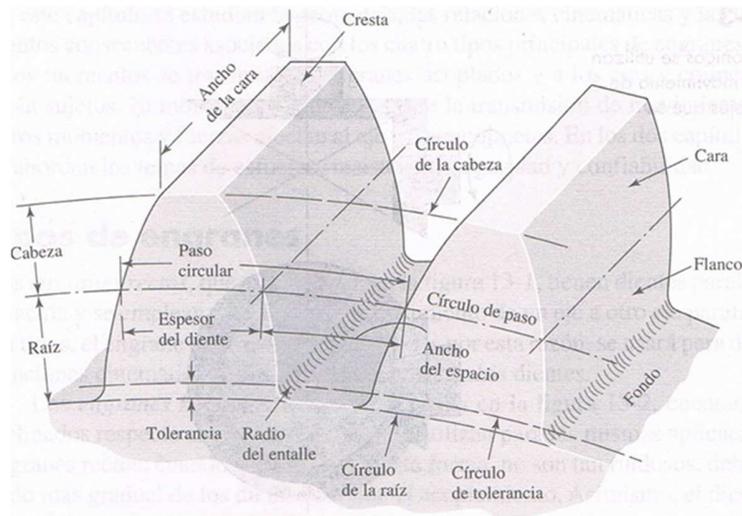


Figura (2.1) Nomenclatura de los dientes de engranes rectos (Shigley y Mischke, 2002).

2.4 Curva involuta y engranes acoplados

A menudo, es necesario combinar varios engranes y obtener lo que es conocido como trenes de engranes o cajas de engranes. Dada una velocidad angular de entrada a un tren de engranes, es importante poder determinar fácilmente la velocidad angular de salida y el sentido de rotación. La razón de la velocidad angular de entrada con la velocidad angular de salida es expresada como el cociente de la velocidad angular de entrada sobre la velocidad angular de salida (Mabie y Reinholtz, 1987).

El perfil es la sección obtenida al intersecar un diente en forma perpendicular al eje de rotación del engrane, generalmente los perfiles de dientes acoplados tienen la forma de curvas involutas, y ya que están en contacto directo, deben satisfacer las condiciones de ser tangentes y mantener una relación de velocidad angular constante. La curva involuta (envolvente) es la trayectoria generada por un punto, en una recta generatriz que se mantiene tangente y sin deslizar sobre una circunferencia base durante el movimiento de desarrollo (Mabie y Reinholtz, 1987).

Es necesario saber cómo trazar una envolvente, como se muestra en la Figura (2.2), se divide la circunferencia de base en partes iguales y se trazan líneas radiales OA_0 , OA_1 , OA_2 , etc. Principiando en A_1 , se trazan las perpendiculares A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , etc., a los radios.

Luego, sobre A_1B_1 se marca la distancia A_1A_0 ; sobre A_2B_2 la distancia A_2A_0 , igual al doble de la distancia A_1A_0 , etc. Así se obtienen los puntos por los que pasa la envolvente (Shigley y Mischke, 2002).

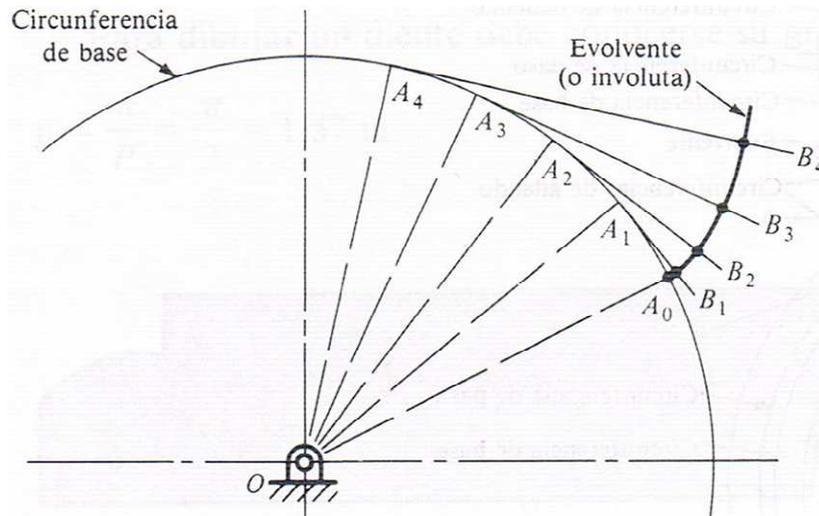


Figura (2.2) Trazo de la envolvente (Shigley y Mischke, 2002).

2.4.1 Formulación del perfil involuta en engranes

Contar con una formulación matemática para generar involutas de engranes es de gran importancia, ya que al tener una serie de ecuaciones que modelen un perfil de engrane con facilidad se podrá realizar la programación en código que de manera automática genere este tipo de perfiles.

Considerando la involuta como la forma de dientes en engranes, es necesario calcular ciertas propiedades sobre ella, en la Figura (2.3) se muestra una involuta generada a partir de una circunferencia base de radio R_b . Sobre la involuta se muestran dos puntos A y B con sus radios correspondientes R_A y R_B y ángulos de presión Φ_A y Φ_B , es fácil establecer una relación para los factores anteriores ya que el radio del círculo base es constante sin importar el punto que se considere.

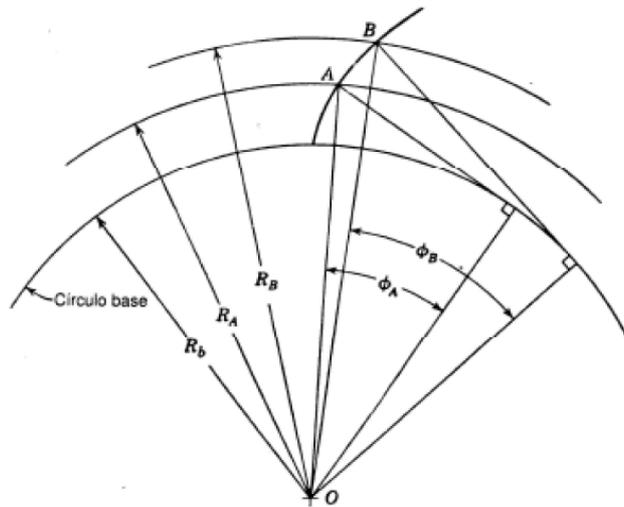


Figura (2.3) Generación de la involuta.

Por lo tanto

$$R_b = R_A \cos \phi_A \quad (2.1)$$

o

$$R_b = R_B \cos \phi_B \quad (2.2)$$

y

$$\cos \phi_B = \frac{R_A}{R_B} \cos \phi_A \quad (2.3)$$

A partir de la ecuación (2.3) es posible determinar el ángulo de presión de la involuta en cualquier punto de radio conocido en la involuta, la Figura (2.4) muestra una ampliación de la Figura (2.3) incluyendo todo el diete de engrane, de esta ilustración es posible desarrollar una ecuación para calcular el espesor del diente en cualquier punto B , dado el espesor en el punto A .

Referenciando nuevamente la Figura (2.4)

$$\begin{aligned}\angle DOE &= \angle DOB + \frac{1}{2} \frac{t_B}{R_B} \\ \angle DOE &= \text{inv}\phi_B + \frac{t_B}{2R_B}\end{aligned}\tag{2.8}$$

También

$$\begin{aligned}\angle DOE &= \angle DOA + \frac{1}{2} \frac{t_A}{R_A} \\ \angle DOE &= \text{inv}\phi_A + \frac{t_A}{2R_A}\end{aligned}\tag{2.9}$$

De las relaciones anteriores

$$t_B = 2R_B \left[\frac{t_A}{2R_A} + \text{inv}\phi_A - \text{inv}\phi_B \right]\tag{2.10}$$

De esta manera es posible con la ecuación (2.10) calcular el espesor del diente en cualquier punto de la involuta, si se conoce cualquier otro punto, una aplicación interesante de esta ecuación es determinar el radio en el que el diente toma forma de pico.

2.5 Fallas en engranes

El análisis de fallas de componentes debe ser uno de los elementos más importantes de cualquier estrategia de mantenimiento predictivo de maquinaria. Los componentes eventualmente fallarán, por lo una de las cosas más importantes es entender porque lo hacen, así, los engranes pueden fallar en diversas formas, las fallas en engranes se han agrupado en cuatro clases generales: fractura, fatiga superficial (picado), flujo plástico y desgaste (Hernández y Espejo, 2002).

Falla por fractura: la fractura de un diente de un engrane es causada por el esfuerzo de flexión impuesto en él por el torque transmitido. La fractura puede ser por sobrecarga, frecuentemente de impacto, en cuyo caso se tiene una fractura de apariencia fibrosa y/o granular.

Falla por fatiga superficial: al producirse el engranaje entre dientes de un par de engranes, conductor-conducido, se inducen en los flancos de contacto un estado complejo de esfuerzos de fatiga de tracción, compresión y corte, por la acción simultánea de fuerzas de contacto y movimiento combinado de deslizamiento y rodadura. Cuando estos esfuerzos repetitivos superan la resistencia a la fatiga por contacto, se inducen grietas superficiales y/o subsuperficiales, las cuales al unirse y propagarse provocan desprendimiento de partículas de materia en la superficie de los flancos de contacto, ocurre así la falla conocida como picado.

Falla por flujo plástico: consiste en una deformación plástica excesiva de los flancos de contacto. Por lo general, este tipo de falla está asociada a cargas muy elevadas o temperaturas altas.

Falla por desgaste abrasivo: se puede presentar en engranajes cuando se encuentran presentes partículas abrasivas entre las superficies de los flancos de contacto. Por lo general este tipo de desgaste es originado por contaminación del lubricante con partículas extrañadas de alta dureza. Cuando se tiene un picado severo las partículas desprendidas pueden provocar abrasión. Se puede producir desgaste adhesivo severo cuando la película de lubricante entre los flancos activos del engrane no es lo suficientemente efectiva, para evitar el contacto metal-metal. Este tipo de desgaste puede ser tan intenso que produzca escoriaciones e intenso rayado en la dirección de deslizamiento, conduciendo a un deterioro rápido de los engranajes.

2.6 Las vibraciones mecánicas

En el análisis de maquinaria, una parte fundamental para el conocimiento de las causas y efectos de su operación la constituye el estudio de los movimientos oscilatorios de sus diferentes componentes. A estos movimientos oscilatorios, en el contexto del diseño y análisis de maquinaria, se les conoce como vibraciones mecánicas, más genéricamente, vibraciones (Lozano y Jáuregui, 2013).

Tradicionalmente, el estudio de las vibraciones mecánicas ha sido considerado una labor tediosa y sin aplicación inmediata en la práctica de la ingeniería en la industria. Nada más alejado de la realidad. El fenómeno vibratorio está presente, prácticamente, en la

operación de todas las máquinas y sistemas mecánicos de cualquier tipo de instalaciones industriales. No puede ser de otra manera, variaciones en la homogeneidad de los materiales, imperfecciones en los procesos de maquinado y en la manufactura de piezas, variaciones en las tolerancias de fabricación y en el ensamble de las máquinas son causa de vibración en los sistemas mecánicos. Una máquina vibrará si opera sobrecargada, o si está trabajando por debajo de su valor de diseño, por falta de mantenimiento, o por cuidado excesivo, Así, a lo que se tiende en la práctica es a mantener los niveles de vibración en las máquinas dentro de valores aceptables. Además, con una adecuada interpretación, esas vibraciones pueden proporcionar un cúmulo de información sobre las condiciones de operación de los equipos y sistemas mecánicos.

El desarrollo de la electrónica y la computación proporcionan gran capacidad de almacenamiento y procesamiento de información, que posibilitan la aplicación del análisis de vibraciones en un ambiente industrial. Sin embargo, la relativa facilidad de capturar información que proporcionan las oscilaciones en una máquina es lo que hace imprescindible un conocimiento sólido de los principios de funcionamiento de los equipos empleados para registrar la información, de los fundamentos teóricos de las vibraciones y de las herramientas matemáticas para su análisis y, así, explotar con todo su potencial la información obtenida. De lo contrario, se puede caer fácilmente en ser usuario de una “caja negra”, sin poder interpretar las causas y los efectos que tienen las vibraciones mecánicas en los diferentes sistemas mecánicos.

Por su parte, en el mantenimiento predictivo de maquinaria, el estudio de vibraciones presentes en su operación constituye el método más importante para el desarrollo de programas de verificación del estado de máquinas

2.6.1 Análisis espectral

En general, las vibraciones de una maquina producen señales complejas que no tienen forma senoidal única, sino que están compuestas de varias señales correlacionadas entre sí, de diferente frecuencia, amplitud y fase. Aún más, se presentan vibraciones cuya forma de onda no tienen ningún orden aparente. Es esta correlación entre las señales la que hace necesario su análisis por medio de manipulaciones matemáticas que permitan su manejo

de manera sistemática. La herramienta principal para la aplicación del análisis de vibraciones al mantenimiento predictivo, es el llamado análisis espectral, basado en la separación de las componentes armónicas de la señal vibratoria, de tal manera que esta separación permite identificar las causas y los efectos de las vibraciones presentes en la operación de la máquina (Lozano y Jáuregui, 2013). El análisis espectral está basado en las series de Fourier y la llamada transformada rápida de Fourier (*FFT-Fast Fourier Transform*). En la práctica industrial, este análisis se lleva a cabo con la aplicación de instrumentos electrónicos y equipo de cómputo especializado. Para emplear adecuadamente y con todo su potencial este equipo e instrumentos, es indispensable fundamentos de análisis espectral.

2.6.2 Causas y efectos de la vibración

Uno de los requisitos fundamentales para lograr el mantenimiento predictivo óptimo es identificar los métodos menos costosos para monitorear los parámetros críticos de los equipos, maquinaria y sistemas, que pongan de manifiesto posibles fallas futuras. En general, los sistemas mecánicos se componen de unidades motrices, acoplamientos y actuadores finales. Todos tienen partes en movimiento, tales como ejes, mecanismos recíprocos, levas, engranes, poleas y bandas. Como ejemplo, de unidades motrices se tienen motores eléctricos, turbinas de gas, turbinas de vapor y motores de combustión interna, Como elementos acopladores hay coples, cajas de engranes, bandas, cadenas, baleros y chumaceras. Actuadores finales son bombas, ventiladores, transportadores, molinos y equipos de proceso. Las principales fuentes de excitación de estos sistemas mecánicos provienen de las fuerzas dinámicas, generadas por los elementos en movimiento, de los campos eléctricos o magnéticos, o de las inducidas por fluidos (Lozano y Jáuregui, 2013).

Debido a la unión mecánica entre todos los elementos de una máquina, las fuerzas de excitación se transmiten a los demás componentes de la misma, con lo que se pueden identificar las causas de la vibración, algunas de las posibles causas que generen vibraciones pueden ser el desbalanceo, la deflexión entre ejes, el desalineamiento.

Desde el punto de vista experimental, en mantenimiento predictivo, normalmente se procede a resolver el problema más simple e ir observando los cambios en el espectro de frecuencias, enfocando el estudio a sistemas mecánicos con engranes se tiene que las

vibraciones en los sistemas de engranes son inherentes a su operación, ya que al entrar los dientes en contacto se inducen las fuerzas de excitación que producen la vibración. Esto sucede por el juego o backlash, que se tiene entre los dientes en contacto. Entre mayor sea el juego, mayor será la amplitud de vibración presente en el engranaje. Cada vez que dos dientes entran en contacto producen un impacto que genera la vibración. La frecuencia de este impacto se conoce como frecuencia de engranaje (FE) y es igual al número de dientes por la velocidad angular del rotor, o sea, $FE = Nx$, donde N es el número de dientes y x la frecuencia de rotación del eje que se está analizando.

Cuando los dientes están en buen estado y el engrane está concéntrico, la frecuencia de engranaje es de baja amplitud. Si los dientes se desgastan, la envolvente que genera la superficie de contacto entre los engranes se distorsiona y la forma de onda vibratoria deja de ser armónica; esta deformación del perfil excita la segunda y tercera armónicas de la frecuencia de engranaje ($2FE$ y $3FE$), por lo que el monitoreo de estas frecuencias es buen indicador del avance del desgaste en los dientes. Cuando el engrane está excéntrico o el defecto de los engranes se encuentra en unos cuantos dientes, la frecuencia de engranaje se modula, como se indica en la Figura (2.5), el espaciado de las bandas laterales es igual a la frecuencia de rotación del eje que tiene el engrane dañado. De los espectro de frecuencias también se puede identificar cual es el eje que produce mayor vibración, ya que el pico de mayor amplitud se presentará a la frecuencia de giro del eje con el engrane dañado.

Un espectro de frecuencias considerado normal debe presentar picos a las frecuencias de rotación de ambos ejes del tren de engranes y a la frecuencia de engranaje (FE) de cada uno de los pares de engranes que formen el tren. Desde el punto de vista de mantenimiento predictivo, el análisis de vibraciones de baja frecuencia es más útil que las de alta frecuencia, ya que éstas están relacionadas con errores de manufactura, como son el error de paso del diente y los errores de perfil o flexibilidad de los dientes, que básicamente generan ruido.

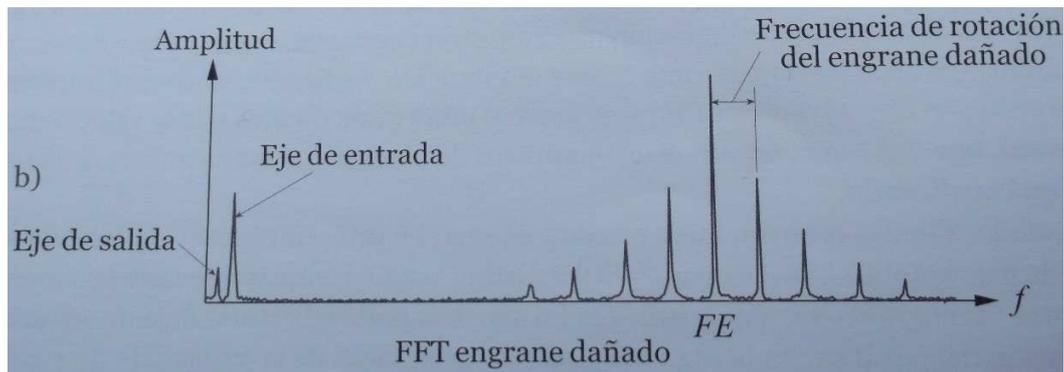


Figura (2.5) Vibración típica en engrane dañado (Lozano y Jáuregui, 2013).

2.7 Generalidades del método de elementos finitos

El FEM algunas veces es referido al análisis de elemento finito (*FEA-Finite Element Analysis*), que es una técnica computacional usada para obtener soluciones aproximadas a problemas en ingeniería con valores en fronteras. Un problema con valores en frontera es un problema matemático en el que una o más variables dependientes deben satisfacer una ecuación diferencial (Hutton, 2004).

El método de elementos finitos es un procedimiento numérico, para obtener la solución a muchos de los problemas encontrados en el análisis en ingeniería. La principal utilidad es la discretización de elementos para obtener el conjunto de desplazamientos y fuerzas de una estructura de trabajo. Una segunda utilización debida al uso de elementos continuos, para obtener soluciones aproximadas en problemas de transferencia de calor, mecánica de fluidos y mecánica de sólidos. El método de elementos finitos combina varios conceptos matemáticos para generar un sistema de ecuaciones lineales o no lineales, generalmente el número de ecuaciones es muy extenso (Seegerlind, 1984).

Hay varios procedimientos para obtener una solución numérica a ecuaciones diferenciales, algunas formulaciones para el FEM pueden ser las siguientes: formulación débil, método de pesos residuales, método de Galerkin y el método de Rayleigh-Ritz, (Kwon y Bang, 1997) dichos métodos son procedimientos puramente teóricos con bases matemáticas.

2.8 Discretización de elementos

En la mayoría de los problemas de ingeniería, se requiere hallar los valores en un campo variable, tales como desplazamientos, esfuerzos, temperatura, presión y velocidad como una función de las coordenadas espaciales (x, y, z) . Asimismo, en el caso de los problemas de estado transitorio, el campo variable tiene que ser hallado en funciones tanto de coordenadas (x, y, z) como del tiempo t . Para realizar un análisis mediante FEM, es necesario comenzar con la discretización del dominio de estudio, de este modo se idealiza la región física de interés (Rao, 1999).

Una variedad de procedimientos pueden ser usados para modelar un dominio mediante el uso de elementos finitos. Diferentes métodos de división del dominio manual involucran experiencia, conocimiento y tiempo en la parte de análisis, algunos programas han sido desarrollados para un mallado automático los cuales demandan cortos tiempos de procesamiento

2.8.1 Formas básicas de los elementos

Las formas, tamaños, números y configuraciones de los elementos tienen que ser escogidos cuidadosamente, ya que deben de ser lo más semejantes al cuerpo o dominio analizado, para no incrementar el esfuerzo computacional necesitado en encontrar la solución. La mayoría de las selecciones del tipo de elemento es dictaminada por la geometría del cuerpo y por el número de coordenadas independientes necesarias para describir el sistema.

Así por ejemplo, una estructura puede idealizarse empleando elementos axiales, mientras que las regiones planas pueden ser discretizadas con elementos en forma de polígonos, como es el triángulo, y los sólidos por elementos poliédricos, como el tetraedro. Si la geometría, propiedades del material y campo variable del problema pueden ser descritas en términos de una sola coordenada espacial, se pueden utilizar elementos lineales o unidimensionales que tienen una sección transversal determinada, pero por lo general se presentan esquemáticamente y son analizados como un segmento lineal, para un análisis

simple a este tipo de elementos se le colocan dos nodos, uno en cada extremo, con el correspondiente valor de campo variable escogido como incógnita.

Cuando la configuración y otros detalles del problema puedan ser descritos en términos de dos coordenadas espaciales independientes, se pueden usar elementos bidimensionales, los elementos bidimensionales empleados con mayor frecuencia son el triángulo y el cuadrilátero, la capacidad de modelar fronteras curvas se obtiene agregando nodos intermedios en los lados de los elementos. Si la geometría, propiedades del material y otros parámetros del cuerpo pueden ser descritos en tres coordenadas espaciales independientes, la región puede modelarse mediante elementos tridimensionales, los más comunes de estos elementos son los tetraedros y paralelepípedos (Rao, 1999), en la Figura (2.6) se muestran algunos de los elementos mencionados, ya que el estudio de este proyecto será aplicado a perfiles de dientes de engranes con el análisis en un plano en dos dimensiones bastara para alcanzar los objetivos propuestos.

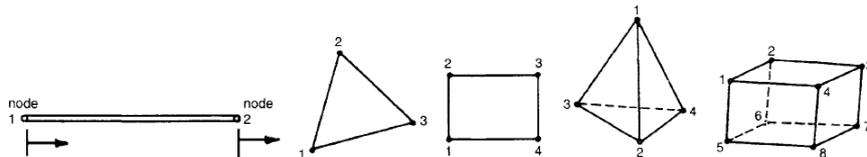


Figura (2.6) Principales elementos para discretizar sistemas (Rao, 1999).

2.8.1.1 Elemento finito lineal

En general, en un problema a analizar por el método de los elementos finitos, conoceremos las fuerzas exteriores aplicadas en algunos de sus nodos y los valores de los desplazamientos en otros. La clave del método está en que, tras su aplicación, obtendremos una expresión del tipo:

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad (2.11)$$

En la que, $\{F\}$ es un vector columna, conocido como vector de cargas, en el que están todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el modelo; el vector $\{u\}$, denominado vector de desplazamientos nodales, que representa, de manera ordenada, todos los desplazamientos que experimentan los nodos del modelo, y la matriz $[K]$, que se conoce

como matriz de rigidez del sistema. Un paso previo, para comprender este método, es analizar el significado físico de la matriz $[K]$, para lo que es conveniente estudiar el comportamiento de una barra.

Considerando el elemento barra de la Figura (2.7) que se encuentra definido por sus nodos 1 y 2, se encuentra sometido a la acción de fuerzas en su dirección actuando sobre los nodos. Posee una longitud L y una área de su sección transversal de valor A . Definamos en él un sistema de referencia cartesiano cuyo eje x coincide con el de la barra de manera que la coordenadas de sus nodos son x_1 y x_2 .

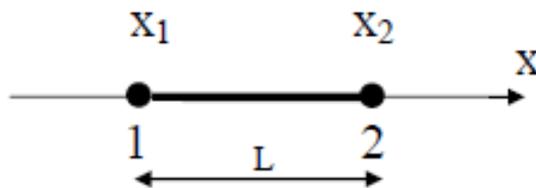


Figura (2.7) Elemento barra (Rao, 1999).

Denominemos u_1 y u_2 a los desplazamientos, según el eje x , que experimentan sus nodos y admitamos que el campo de desplazamientos, en el interior del elemento, lo aproximamos como:

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (2.12)$$

Donde las dos constantes a_0 y a_1 son desconocidas aunque las podríamos obtener diciendo que cuando $x=x_1$, $u(x_1)=u_1$ y que cuando $x=x_2$, $u(x_2)=u_2$ es decir:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [a_0 \quad a_1] \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Del sistema de ecuaciones (2.13) la solución para los coeficientes a_0 y a_1 es:

$$a_0 = \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{x_2 - x_1} \quad (2.14)$$

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1 = [a_0 \quad a_1] \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

El campo de deformaciones dentro del elemento lo podremos obtener a partir del campo de desplazamientos como:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Que, como se observa, es constante a lo largo de todo el elemento. La tensión dentro del mismo se podría obtener a partir de la deformación utilizando la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Supongamos que, sobre los nodos 1 y 2 actúan, respectivamente, las fuerzas F_1 y F_2 y suponiendo que la barra sufre unos desplazamientos virtuales que denotaremos por $u^\delta(x)$ de manera que $u^\delta(x_1) = u_1^\delta$, $u^\delta(x_2) = u_2^\delta$. El campo de desplazamientos en el interior del elemento cumplirá que:

$$u^\delta(x) = \frac{u_2^\delta - u_1^\delta}{L}x + u_1^\delta \quad (2.18)$$

Este campo de desplazamientos virtuales proporciona el siguiente campo de deformaciones virtuales:

$$\varepsilon^\delta = \frac{\partial u^\delta}{\partial x} = \frac{u_2^\delta - u_1^\delta}{L} = \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Las tensiones reales que aparecen en la barra, no se generan de aplican los desplazamientos virtuales sino consecuencia de los desplazamientos verdaderos que sufren sus nodos u_1 y u_2 como consecuencia de las fuerzas que actúan sobre la barra, y se pueden obtener de la ecuación (2.17).

Del principio de los trabajos virtuales, cuya formulación se estudia en elasticidad, establece que el trabajo realizado por las cargas reales existentes una vez que sus puntos de aplicación experimentan los desplazamientos virtuales impuestos:

$$F_1 u_1^\delta + F_2 u_2^\delta = [F]^T \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Tiene que ser igual al trabajo que realizan las tensiones que, verdaderamente, se producen en la barra, cuando ésta experimenta las deformaciones virtuales consecuencia de los desplazamientos virtuales impuestos, y que sería:

$$\int \sigma \varepsilon^\delta dV = \int_{x-x_1}^{x-x_2} [u_1 \quad u_2] \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{E}{L} \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} A dx \quad (2.21)$$

Ya que ninguna de las magnitudes del integrando dependen de x se tiene que:

$$\int \sigma \varepsilon^\delta dV = [u_1 \quad u_2] \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{E}{L} \frac{1}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} AL \quad (2.22)$$

Puesto que:

$$\int_{x-x_1}^{x-x_2} dx = L \quad (2.23)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \sigma \varepsilon^\delta dV &= [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \\ &= [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Igualando el trabajo de las fuerzas exteriores con el realizado por las fuerzas internas, se obtiene que:

$$[F_1 \quad F_2] \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\delta \\ u_2^\delta \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Como esta igualdad debe cumplirse independientemente de los desplazamientos virtuales impuestos, se tendrá que cumplir que:

$$[F_1 \quad F_2] = [u_1 \quad u_2] \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Que podemos expresar, transponiendo los dos miembros de la ecuación (2.26) como:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Lo que nos conduce a afirmar que la matriz de rigidez del elemento lineal de dos nodos es:

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.8.1.2 Elemento finito triangular de deformación constante

Suponiendo que el elemento triangular de la Figura (2.8) que trabaja nos ayudara a resolver el problema de solidos bidimensionales.

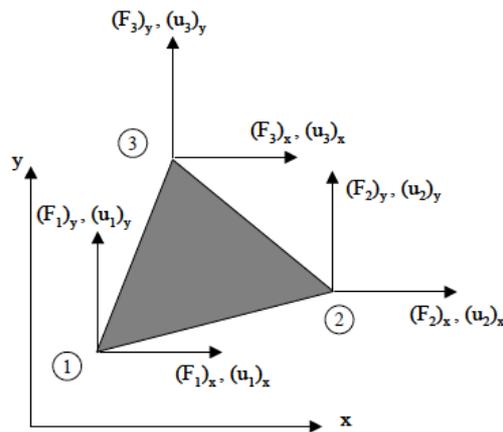


Figura (2.8) Elemento triangular (Rao, 1999).

El sistema de referencias del elemento esta formado por los ejes x y y de la Figura (2.8) mostrada, para este elemento se han numerado los nodos en un sentido anti horario, mostrando para cada uno ellos las componentes de fuerzas y desplazamientos, sabiendo que los puntos del interior del elemento se pueden aproximar mediante funciones lineales de sus coordenadas se dice que:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aproximando de esta forma el campo de desplazamientos en el interior del elemento, las deformaciones en su interior podrían determinarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_6 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_5 + \alpha_3
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Como se observa, el haber supuesto un campo de desplazamientos lineal en x e y nos ha conducido a que, el campo de deformaciones en el interior del elemento sea constante e independiente. Este elemento finito que estamos describiendo recibe el nombre de elemento triangular de deformación constante (*Constant Strain Triangle-CST*) o, también, elemento triangular lineal puesto que las funciones de interpolación de los desplazamientos en el interior del elemento son funciones lineales de las coordenadas del punto que estemos considerando. Utilizando las ecuaciones constitutivas del material puede deducirse el campo tensional en el interior del elemento:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2}(\alpha_2 + \nu\alpha_6) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2}(\alpha_6 + \nu\alpha_2) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1-\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu)}(\alpha_5 + \alpha_3)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Que como se observa corresponde a un estado de tensión constante dentro del elemento, particularizando las coordenadas x e y para cada nodo se establece en forma matricial los desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

Llamando a:

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} & (2.33) \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \\
 \{\alpha\} &= \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones (2.32) en la forma:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u\} \quad (2.34)$$

Donde la matriz $[C]^{-1}$ sería:

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los coeficientes:

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad (2.35)$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

$$2A = a_1 + a_2 + a_3$$

Las deformaciones de la ecuación (2.31) pueden expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Llamando a:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

La ecuación (2.36) puede escribirse como:

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\alpha\} \quad (2.38)$$

Considerando las ecuaciones (2.34) y (2.38) se obtiene:

$$\{\varepsilon\} = [H][C]^{-1}\{u\} = [B]\{u\} \quad (2.39)$$

En donde la matriz [B] está dada por:

$$[B] = [H][C]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Los términos de la matriz [B] solo dependen de las coordenadas de los nodos del elemento, esta matriz describe la geometría del elemento.

Las tensiones en el interior del elemento si trabaja en tensión plana pueden escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

Y si el elemento trabaja en deformación plana las tensiones serian:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

En todo caso considerando que el elemento trabaja en tensión plana llamamos:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} & (2.43) \\ D &= \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \\ \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Usando la ecuación(2.39) junto con (2.41) puede escribirse en forma compacta una ecuación para los esfuerzos:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{u\} \quad (2.44)$$

Para esta última ecuación conviene señalar que $\{\sigma\}$ se denomina el vector de tensiones en el elemento, $\{u\}$ es el vector de desplazamientos nodales, $[D]$ es un matriz que depende de las propiedades elásticas del material y de si trabaja en condiciones de tensión o deformación plana y $[B]$ es una matriz cuyos elementos depende de las coordenadas cartesianas de los nodos.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, podemos establecer que, para unos desplazamientos virtuales de los nodos del elemento $\{u^\delta\}$, el trabajo realizado por las fuerzas reales que actúan en los nudos del elemento, $\{F\}$, debe ser igual al trabajo realizado por las tensiones internas $\{\sigma\}$ reales que actúan dentro del elemento teniendo en cuenta el campo de deformaciones virtuales $\{\varepsilon^\delta\}$ que aparecería en el interior del elemento.

Es decir si:

$$[F]^T \{u^\delta\} = \text{trabajo de las fuerzas nodales} \quad (2.45)$$

Se puede escribir entonces que:

$$[F]^T \{u^\delta\} = \int \{\sigma\}^T \{\varepsilon^\delta\} dV \quad (2.46)$$

Donde $\{\varepsilon^\delta\} = [B]\{u^\delta\}$ representa el campo de deformaciones inducido por los desplazamientos virtuales $\{u^\delta\}$, el vector $\{\sigma\}$ representa el vector de tensiones reales producidos en el elemento consecuencia de las fuerza $\{F\}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} [F]^T \{u^\delta\} &= \int (\{u\}^T [B]^T [D]^T) ([B]\{u^\delta\}) dV \\ &= \int \{u\}^T [B]^T [D]^T [B] \{u^\delta\} dV \end{aligned} \quad (2.47)$$

Esta última ecuación debe cumplirse para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales que se impongan sobre el elemento, por lo que se tendrá que verificar que:

$$[F]^T = \{u\}^T \left(\int [B]^T [D]^T [B] dV \right) \quad (2.48)$$

Transponiendo la ecuación (2.48) se obtiene que:

$$[F] = \left(\int [B]^T [D]^T [B] dV \right) \{u\} \quad (2.49)$$

Como en este caso los elementos de las matrices $[B]$ y $[D]$ son constantes, la ecuación (2.49) puede describirse como:

$$[F] = ([B]^T [D]^T [B] \text{Volumen}) \{u\} \quad (2.50)$$

Donde “Volumen” se refiere al volumen del elemento, la matriz de rigidez $[K^e]$ del elemento sería:

$$[K^e] = [B]^T [D]^T [B] \text{Volumen} \quad (2.51)$$

Si el “*Volumen*” del elemento se obtiene como el producto del área A y su espesor t , la matriz de rigidez podría expresarse también como:

$$[K^e] = tA[B]^T [D]^T [B] \quad (2.52)$$

2.9 Software usado en el estudio de elementos finitos

El FEM es un procedimiento numérico que puede ser aplicado para obtener la solución de problemas en ingeniería. La aparición de computadoras ha revolucionado a la ingeniería, actualmente el análisis de cualquier problema, por simple que sea, viene acompañado de un programa computacional que tal vez no muestre todos los cálculos o procedimientos que realiza pero despliega los resultados del análisis en forma gráfica. Generalmente es una interfaz la que permite interactuar entre el usuario y softwares o programas de este tipo, lo que implica que los usuarios deben de tener conocimientos básicos acerca del software que utiliza además de conocer procedimientos de análisis en el problema de estudio para darse una idea de que es lo está realizando. En lo que respecta al FEM hay una variedad de software comercial aplicado en su estudio, uno de ellos y de los que más destaca es el ANSYS que además de elementos finitos cubre otros campos de estudio, Abaqus es otra plataforma de menor relevancia pero que puede ser utilizado por su flexibilidad, HyperWorks y LISA son software completamente gratuito enfocado al análisis estático y dinámico de estructuras (Moaveni, 1999).

ANSYS es el nombre original para los productos comerciales: ANSYS Mechanical o ANSYS Multiphysics, ambos de propósito general para el análisis por elemento finito y para ingeniería asistida por computadora (*CAE-Computer aided engineering*). Actualmente la compañía tiene un completo desarrollo de productos CAE, ANSYS Inc tiene versiones no comerciales para usuarios académicos, los cuales pueden ser usados con fines de investigación. En otra perspectiva, ANSYS es un paquete computacional de propósito general enfocado al modelado de elemento finito, el cual numéricamente resuelve una amplia variedad de problemas mecánicos que incluyen análisis estáticos y dinámicos tanto lineales como no lineales, además soluciona problemas de transferencia de calor y fluido así como

también problemas electromagnéticos. En cuanto al tipo de análisis que realiza cuenta con el estático, modal, armónico, transitorio, espectro de respuesta y subestructura (Nakasone y Yoshimoto, 2006).

Pueden existir otras formas de implementación del FEM en las cuales se puede tener un balance entre la teoría, la formulación matemática, la programación y la implementación del método, usar nuevas herramientas de programación como MATLAB® es una buena opción de implementación, el lenguaje que usa MATLAB® es considerado de alto nivel especialmente diseñado para trabajar con matrices haciéndolo apropiado para la programación del FEM. Con la programación manual se puede obtener una buena interpretación y entendimiento del FEM, con solo saber los fundamentos teóricos y principios en los cuales está basado este método. Además de que la solución de ecuaciones en derivadas parciales sencillas, en geometrías complicadas raramente pueden expresarse en términos de funciones elementales. La interfaz gráfica de MATLAB® *pdetool*, parte de la “PDE toolbox”, proporciona una de las herramientas de fácil manejo para la descripción de geometrías complicadas, generación de mallas, resolución de ecuaciones de discretización y representación de resultados, en la cual está fundamentado el FEM (Khennane, 2013).

Capítulo III

3 Metodología

En este capítulo se presenta el proceso de desarrollo de este trabajo, en la Figura (3.1) se muestra un diagrama bloques que describe la metodología a seguir, el proyecto surge de la necesidad de analizar los efectos que pueden generarse ante la presencia de fallas mecánicas, como el desgaste en engranes. Cumpliendo con los objetivos propuestos el proyecto se desarrollará en dos partes, una de ellas basado en un modelo teórico y la otra parte desarrollada en un modelo experimental, comparando los resultados obtenidos por ambos métodos.

En la parte teórica será necesario hacer un análisis en la formulación del perfil involuta en engranes, una vez realizado el análisis sobre este tipo de perfil se desarrollará una descripción de código bajo MATLAB® que genere de manera automática perfiles de engranes a partir de algunos parámetros de diseño. Así mismo se revisará la formulación y los pasos a seguir de manera general para emplear FEM, también serán desarrolladas aquellas herramientas necesarias para aplicar el análisis FEM de manera computacional, y realizando la descripción de funciones en código bajo MATLAB® se calcularán los sistemas de matrices y vectores locales y generales, al integrar los perfiles de engranes en las herramientas FEM se calcularan esfuerzos, deformaciones y frecuencias naturales.

Para el modelo experimental se trabajó en el desarrollo y construcción de un banco de pruebas, en el que se instaló una caja de engranes. El desgaste en engranes se tuvo que inducir en diferentes grados, la caja de engranes se instrumentó con un acelerómetro para poder realizar la medición de vibraciones, después del procesamiento de señales se realiza una comparativa con los resultados obtenidos del modelo teórico.

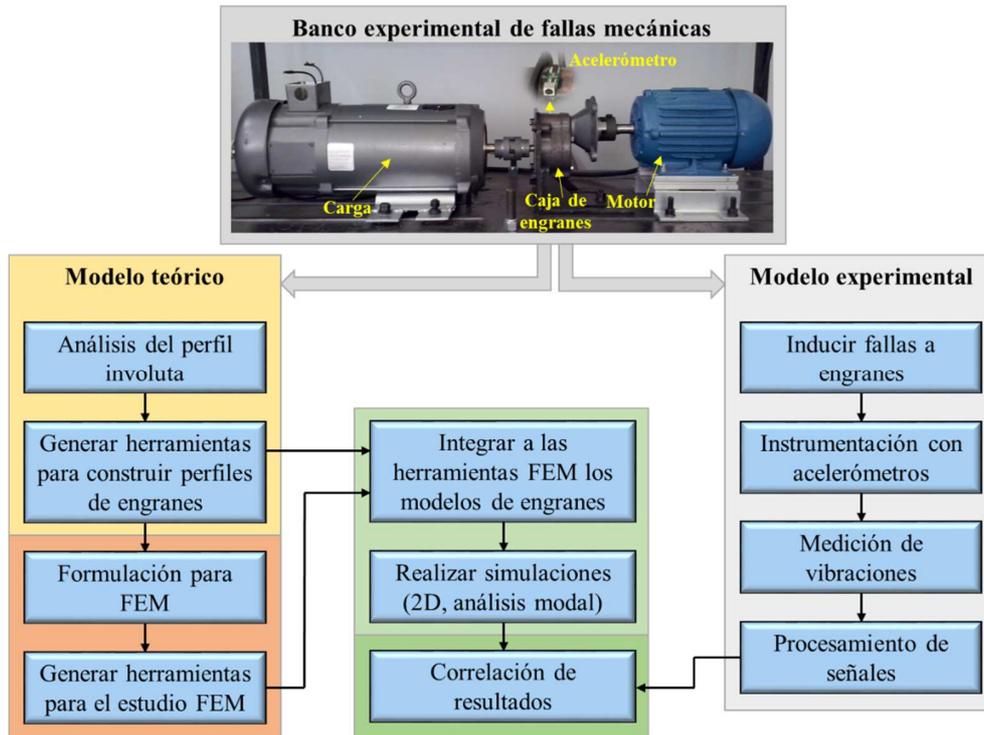


Figura (3.1) Metodología del proyecto.

3.1 Análisis y construcción del perfil involuta

Pareciera que dibujar una curva involuta no es de gran dificultad, de acuerdo con lo visto en la sección 2.4 y con las sofisticadas herramientas existentes dedicadas al diseño asistido por computadora (*CAD*) una curva involuta bien podría ser dibujada utilizando un método geométrico basado en líneas y arcos, y aunque buenas aproximaciones pudieran obtenerse utilizando esta técnica resultaría muy tedioso dibujar perfiles de dientes completos utilizando solo segmentos de líneas y arcos, debido a la gran cantidad de movimientos que se deben de realizar y más que nada conocer las habilidades que se deben de tener en el manejo

de herramientas basadas en CAD. Un método analítico pudiera simplificar el proceso de dibujo de perfiles de engranes, usando técnicas de programación y de acuerdo con la literatura citada y formulación desarrollada en la sección 2.4.1 se propone una técnica que ayude a generar perfiles de dientes de engranes, en la Figura (3.2) se muestra un diagrama que describe de manera general los pasos a seguir para la construcción de perfiles.

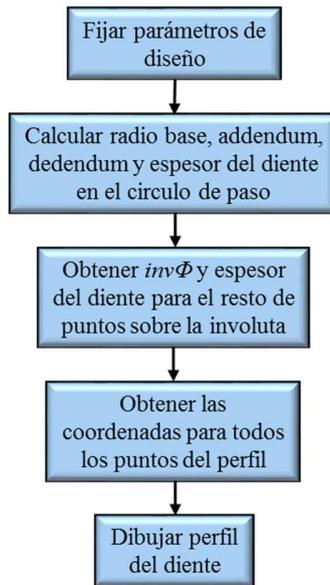


Figura (3.2) Técnica usada para la construcción del perfil involuta.

La técnica propuesta en el diagrama de la Figura (3.2) se utilizó para la descripción del código de programa basado en MATLAB®, para lo que es necesario fijar algunos parámetros de entrada como el número de dientes del engrane N , paso diametral Pd y ángulo de presión, siendo estos datos los requeridos en la fabricación de engranajes, para esta técnica programada también deben definirse un número de puntos sobre la involuta y la cresta con los cuales se quiere que se reproduzca el perfil del diente; con estos datos de diseño especificados se puede determinar el radio del círculo base, addendum, dedendum y el espesor del diente sobre el círculo de paso, con estos nuevos parámetros obtenidos y debido a que el espesor del diente y el ángulo de presión sobre el círculo de paso son conocidos y además constantes es posible con las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) determinar el espesor y la función $inv\Phi$ en cualquier otro punto de la involuta, para todos valores de radios mayores que el radio base y menores al radio de addendum. Con los valores del espesor y la función $inv\Phi$ obtenidos para n puntos en la involuta, se usó un poco de geometría para obtener cada

una de las coordenadas de los puntos en un plano X-Y, finalmente un perfil diente de engrane puede ser dibujado con las herramientas visuales que ofrece MATLAB®.

Los códigos y funciones generados para la construcción del perfil involuta se muestran en el apéndice, con esta herramienta para generar perfiles es más sencillo dibujar dientes de engranes, en la Figura (3.3) se muestran un perfil para un engrane de 22 dientes con paso diametral de 2 dientes por pulgada y diferentes número de puntos sobre la involuta.

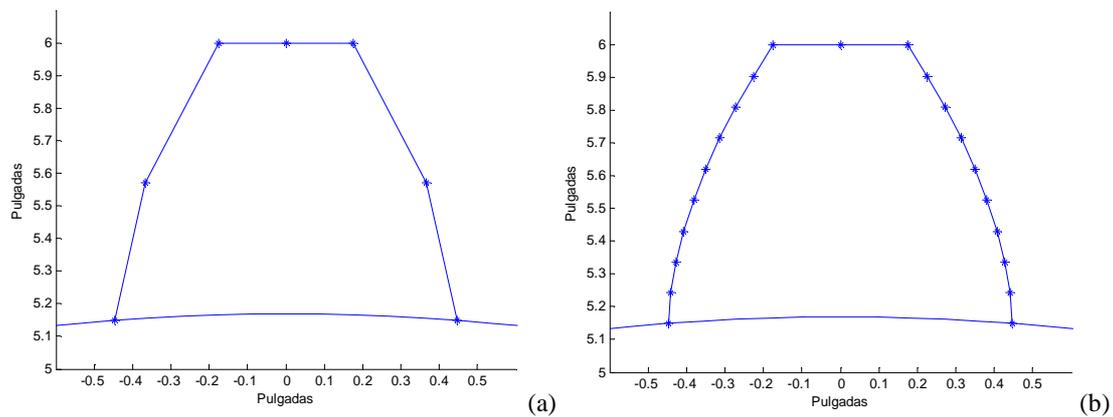


Figura (3.3) Perfil generado con: (a) 3 puntos, (b) 10 puntos.

Como se puede observar en el perfil de la Figura (3.3) mostrado, cuando se utilizan muy pocos puntos de aproximación la curva no tiene una buena apariencia, sin embargo si se incrementa el número de puntos se pueden obtener perfiles bien definidos, siendo el número de puntos un factor importante que puede afectarla geometría del perfil, en esta técnica de dibujo de perfiles de engranes se pueden utilizar tantos puntos a como se requiera realizar la aproximación. Con las coordenadas de los puntos obtenidos que definen el perfil del diente solo bastaría realizar una transformación para obtener las nuevas coordenadas que definan el perfil del resto de los dientes de un engrane completo, y de esta forma dibujarse si fuese necesario.

3.1.1 Perfiles de dientes desgastados

Desgaste es un término general que describe la pérdida de material en la superficie de contacto de un engrane. Existen varios grados de desgaste, estos pueden ser medidos en términos de milésimas de pulgada, por cada millón o 10 millones de ciclos de contacto,

apareciendo el desgaste desde ligero hasta moderado o excesivo, en la Figura (3.4) se muestra una imagen que ejemplifica el contacto entre dientes de engranes, se puede decir que el desgaste producido por el contacto solo aparece en un solo lado del perfil.

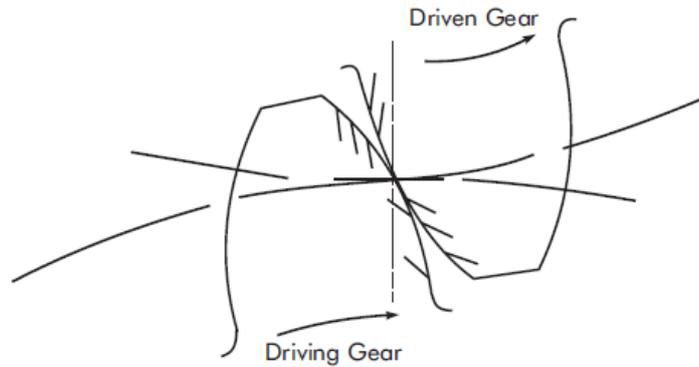


Figura (3.4) Superficie de contacto en engranes.

La pérdida pausada del material en el desgaste ligero de alguna manera afecta el rendimiento en engranes respecto a la vida útil, este tipo de desgaste puede ser generado por el contacto abrasivo o adhesivo dentro del mecanismo debido a que la película lubricante de aceite es muy delgada de aceite o por la selección incorrecta de lubricantes para aplicaciones de baja velocidad. El desgaste moderado puede ser ocasionado por la existencia de contaminantes en el sistema de lubricación que provoque un desgaste abrasivo o corrosivo, por la naturaleza de la carga, por superficies rugosas o de alta dureza, limitaciones en el uso de aceite de buena viscosidad y requerimientos en la velocidad para ciertas aplicaciones frecuentemente imponen a que los engranes trabajen en contacto metal a metal, cuando esto ocurre este desgaste aparece. La destrucción de la superficie de contacto es generado por el desgaste excesivo, haciendo cambiar la forma del diente, la vida del engrane puede ser relativamente corta y puede aparecer la aparición de ruido; si un par de engranes continúan operando en estas condiciones la probabilidad a la fractura de dientes es muy alta, este desgaste puede ser ocasionado por carga excesiva, aparición de contaminantes en el aceite o el uso de lubricantes de baja calidad, este tipo de desgaste puede ser muy perjudicial para un sistema de engranajes reduciendo su periodo de operación.

Una vez que se puede dibujar cualquier perfil de diente de engrane y habiendo explicado un poco de cómo aparece el desgaste en engranes se debe de pensar cómo se podrían dibujar perfiles de dientes con cierto grado de desgaste, así, modificando un poco la

ecuación (2.8) o (2.9) se puede obtener un perfil con desgaste, como si el diente del engrane se fuera haciendo cada vez más delgado. Esto se logra reduciendo el espesor del diente para cualquiera de sus dos mitades, aquí es conveniente definir cuáles son los grados de desgaste que se analizaran para determinar en qué porcentaje se reducirá el espesor del diente, en la Figura (3.5) se muestra el perfil del diente con desgastes del 25% (magenta), 50% (cyan) y 75% (rojo), el desgaste es medido respecto al espesor en la cresta del perfil, los perfiles de diente de engrane con desgaste se dibujaron sobre un perfil sin desgaste (azul) para poder observar el cambio que se va generando entre un desgaste y otro, claro se observa que la geometría del diente se modifica viéndose afectada principalmente el área total del perfil. Estos porcentajes de desgaste fueron seleccionados porque para el desarrollo experimental del proyecto se maquinaron engranes con estas cantidades de desgaste.

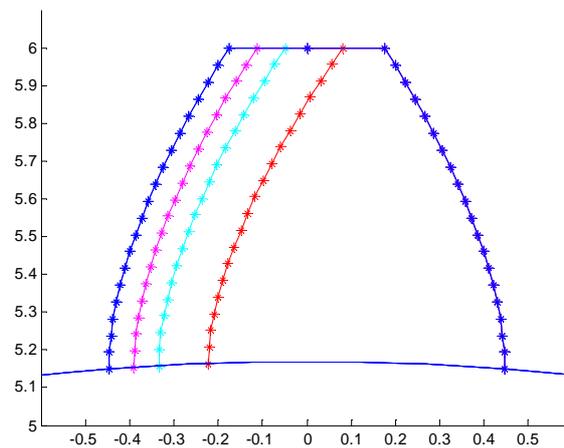


Figura (3.5) Perfil de diente con desgaste.

3.2 Formulación e implementación FEM

Como ya se había mencionado el FEM es un método numérico en el cual varios conceptos matemáticos son combinados, este método está asociado a la programación de algoritmos y una de sus ventajas radica en la iteración de los cálculos sobre una gran cantidad de elementos, existe software que a partir de una geometría o un modelo puede generar soluciones sin conocer el proceso, a pesar de esto existe un procedimiento general en el cual el estudio FEM está basado y se divide en tres etapas: preprocesamiento, procesamiento y posprocesamiento.

El preprocesamiento es la preparación de datos donde se define el dominio geométrico del problema, el tipo de elemento a utilizar junto con sus propiedades geométricas y materiales, se realiza también el mallado del que se obtienen las coordenadas nodales y conectividad, asimismo deben ser definidas las condiciones frontera y de carga. El preproceso que en general es la definición del modelo es un paso crítico puesto que las soluciones obtenidas dependerán de que la geometría de análisis y condiciones sean lo más cercanos a la realidad, lo que implica la realización de un buen modelado. La etapa del procesamiento está relacionada con la solución de ecuaciones que resultan de la evaluación de las variables nodales, así cantidades como esfuerzos, desplazamientos, gradientes pueden evaluarse en esta etapa. El posprocesamiento se refiere a la evaluación y representación de resultados en forma tabulada o gráfica, donde se puede apreciar las deformaciones en elementos, sus formas modales, la distribución de temperatura y/o esfuerzos.

La preparación de datos y su procesamiento necesitan de un esfuerzo considerable si todos los datos van a ser manejados manualmente, debido al tedioso del manejo de los datos hay la posibilidad de incurrir en errores al incrementar el número de elementos, debido a esto comúnmente se utiliza software especializado para facilitar el trabajo, el problema de algunos de los softwares comerciales empleados en FEM es que el equipo de cómputo debe de ser de muy buenas características debido al gran consumo en recursos computacionales.

En este trabajo se propondrán algunos pasos los cuales de manera general se deben de seguir para un análisis mediante FEM. En la Figura (3.6) se muestra un diagrama en el que se describe la forma general para emplear FEM en una forma de programación manual, haciendo uso de nuevas herramientas de programación y por el fácil manejo de datos que ofrece, en MATLAB® se programaran las herramientas que ayuden al proyecto en el análisis por FEM. De acuerdo las etapas en las que se divide el FEM cualquier código de programa que se genere debe de seguir esta metodología presentada, dentro de este código de programa se declararan las variables necesarias y se mandaran llamar funciones que ayuden a obtener la solución por FEM.

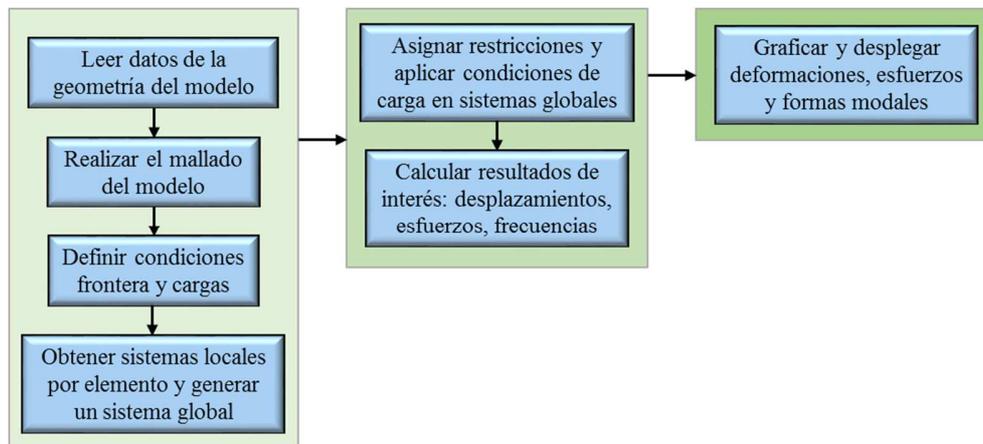


Figura (3.6) Forma general de emplear FEM.

3.2.1 Preprocesamiento

3.2.1.1 Datos de entrada

En primera instancia como datos de entrada se debe contar con la geometría de algún modelo de estudio, por ejemplo: estructuras de edificios o un diseño de un modelo físico; con un modelo geométrico definido se procede a realizar una discretización o mallado del dominio de estudio, esta discretización puede realizarse manualmente o bien se pueden utilizar herramientas empleadas para generar el mallado de contornos de geometrías complejas.

Con la discretización realizada se obtienen los valores de las coordenadas de cada nodo *Ncoord* por lo que además es necesario delimitar el número total de nodos *nmod* y elementos del sistema *nel*, para evaluar los sistemas locales y poder realizar el ensamble en un sistema global se define la conectividad nodal *connect* que describe la interconexión entre nodos, también debe ser definido el tipo de elemento utilizado que especifica el número de nodos por elemento y número de grados de libertad por nodo *ndof*, información de las restricciones que hace referencia a las condiciones frontera *bcdof* y fuerzas externas que afecten al sistema también debe ser proporcionada, finalmente coeficientes constantes que detallan las propiedades mecánicas de los materiales como el módulo de elasticidad *E*, densidad de masa ρ , y el poisson ratio ν también deben de incluirse en la programación del FEM.

3.2.1.2 Cálculo y ensamble de los elementos

Independientemente de que el proceso de mallado se realice de manera automática o manual, al contar con los datos de entrada del modelo discretizado el siguiente paso es calcular para cada elemento un sistema local que lo caracterice (matriz de rigidez y masas), con muchos sistemas pequeños o sub-sistemas se debe de poder ensamblar un sistema general o global que describa cómo se comportan todos estos sub-sistemas interconectados. En la Figura (3.7) se presenta un diagrama de flujo que explica cómo se debe realizar el proceso de ensamble de sistemas locales dentro un sistema global.

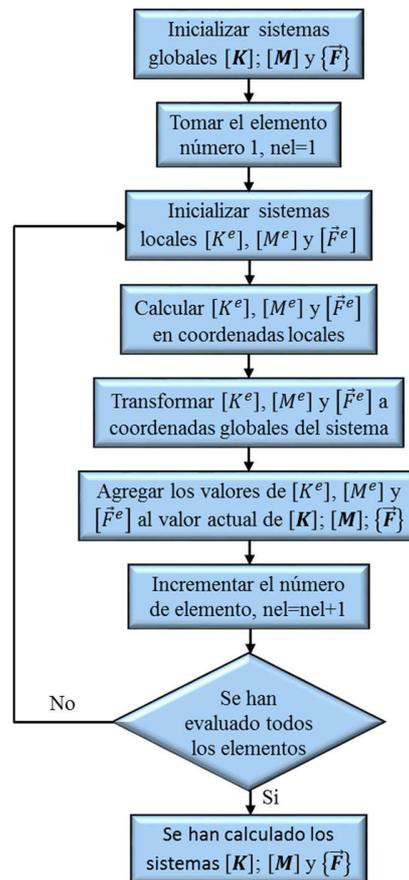


Figura (3.7) Cálculo y ensamble de los elementos.

Siguiendo la metodología de ensamble de elementos mostrada y aplicándola en un código de programa se deben de inicializar los sistemas de rigidez $[K]$ y masas $[M]$ globales del sistemas junto con el vector de fuerzas $\{F\}$ al que será sometido, el tamaño de las matrices

$[K]$ y $[M]$ está definido por el número total de grados de libertad del sistema $sdof$, el tamaño del vector $\{F\}$ también lo define $sdof$. Dentro de un ciclo desde $i=1$ hasta $i=nel$ se obtienen los sistemas locales $[K^e]$ y $[M^e]$ que caracterizan al elemento y el vector de fuerzas $\{F\}$ que actúan sobre el elemento, el tamaño de las matrices $[K^e]$ y $[M^e]$ está definido del producto de $nnel$ por $ndof$, con los sistemas locales obtenidos y dependiendo de los grado de libertad que se analicen para el elemento i se realiza una transformación a los sistemas locales para actualizar los valores de $[K]$, $[M]$ y $\{F\}$ de los sistemas globales, este proceso se realiza para todos los elementos del sistema y una vez finalizado el proceso de ensamble han sido calculados los sistemas globales que caracterizan la discretización del modelo.

3.2.2 Procesamiento

En esta fase se resuelven un sistema de ecuaciones algebraicas ya sean lineales o no lineales, con la finalidad de obtener resultados nodales, estos resultados pueden representar desplazamientos, esfuerzos, frecuencias naturales y modos de vibración en problemas estáticos y dinámicos de mecánica o quizás obtener gradientes y valores de temperatura en la solución de problemas de transferencia de calor.

Después de realizar el ensamble de los sistemas locales y haber obtenido los sistemas globales del dominio de estudio, para los fines del FEA y propósitos de este proyecto de acuerdo con Rao (2010) un sistema con múltiples grados de libertad puede ser descrito por la ecuación de movimiento de Lagrange (3.1).

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\} \quad (3.1)$$

Para la deducción de la ecuación de movimiento previamente mostrada no fueron considerados uniones fijas, por lo que esta ecuación no podría ser resulta para u ya que la matriz $[K]$ es singular, por lo tanto su inversa no existe debido a que su determinante es cero, el significado físico de esto para problemas de mecánica de solidos significa que la estructura sometida a cargas está libre de sufrir desplazamientos o deformaciones ya que no ha sido definidas restricción en los soportes, y ante la presencia de cargas sería imposible mantener el cuerpo de la estructura en equilibrio si no existen estas restricciones. En problemas diferentes a los de estructuras en donde no existen soportes para su restricción es necesario

definir condiciones iniciales, especificando al menos uno o más valores de los valores nodales que se supone son conocidos, ejemplo de esto podría ser la temperatura ambiente de una superficie.

Un método simple para incorporar restricción de desplazamiento en los nodos es eliminado el renglón y la columna de los sistemas de matrices $[K]$, $[M]$ y $\{F\}$ correspondientes al grado de libertad de los nodos restringidos. Con las restricciones aplicadas el problema de desplazamientos en una estructura bajo carga puede ser resuelto matemáticamente usando el método de inversión de matrices obteniendo la ecuación (3.2).

$$\{\bar{u}\} = [K]^{-1}\{\bar{F}\} \quad (3.2)$$

Una vez encontrado el vector de desplazamientos nodales $\{u\}$, se pueden obtener las reacciones en los soportes con la ecuación (3.3), las deformaciones y esfuerzos de cada elemento también pueden ser calculados, para elementos lineales con la ecuación (3.4) se obtiene la deformación y usando la ley de Hooke los esfuerzos se obtienen con (3.5).

$$\{\bar{F}_R\} = [K]\{\bar{u}\} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{L} \quad (3.4)$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.5)$$

Obtener los desplazamientos nodales, deformaciones y esfuerzos formaría parte de un análisis estático, siendo este análisis uno de los más utilizados pero no el más importante en problemas de diseño en mecánica de sólidos, un análisis dinámico también puede ser realizado resolviendo la ecuación característica del sistema (3.1), donde una solución no trivial es igualando su determinante con cero, de esta manera se obtiene la ecuación (3.6).

$$\det([K] - \omega_i^2[M]) = 0 \quad (3.6)$$

De esta ecuación cada solución de ω_i^2 es conocido como eigenvalor, y para cada eigenvalor corresponde un eigenvector correspondiente a la forma modal de vibración, la frecuencia natural más pequeña es conocida como frecuencia fundamental y su correspondiente forma modal conocido como modo fundamental de vibración.

3.2.3 Posprocesamiento

Dependiendo del tipo de análisis que se realice ya sea estático o dinámico para esta parte del FEA se evaluarán los resultados obtenidos de las etapas anteriormente realizadas, utilizando las herramientas visuales con las que cuenta MATLAB® se mostrarán gráficamente los desplazamientos, para problemas donde lo requieran se graficarán las distribuciones de esfuerzos usando mapas de color para de manera visual y respecto a una escala observar la concentración de esfuerzos en puntos críticos, cuando se analicen las frecuencias naturales se mostrarán las formas modales de vibración para dar una idea de cómo pudiera ser las vibraciones que presente el modelo en estudio.

3.2.4 Programación manual del FEM

Para tener un mejor entendimiento de la programación manual del FEM en MATLAB® se desarrollarán algunos ejemplos que ilustrarán de mejor manera el manejo de las herramientas desarrolladas para el estudio FEM, al mismo tiempo se irá explicando el propósito de las funciones que se desarrollaron y utilizaron.

Del libro de Hibbeler (2006) se seleccionó un problema estructural para realizar la programación del FEM, la Figura (3.8) muestra una estructura de acero A-36 sometida a fuerzas externas, el área de la sección transversal de todos sus miembros es $A=1.5 \text{ in}^2$, para este problema hay que determinar los desplazamientos nodales y los esfuerzos en cada uno de sus componentes. Ya que se cuenta con un modelo de estudio es riguroso hacer la numeración de los nodos y de los elementos, este paso es básicamente la discretización del modelo, en la Tabla 3.1 se muestra la numeración de los nodos que forman la estructura junto con sus coordenadas, en la Tabla 3.2 muestra la numeración de los elementos dada por la conexión nodal que existe entre dos nodos, con la información obtenida al discretizar el modelo se puede comenzar con la programación del código del FEM, el Listado 3.1 muestra la primer parte del código generado en MATLAB® donde se realiza la entrada de datos del modelo discretizado.

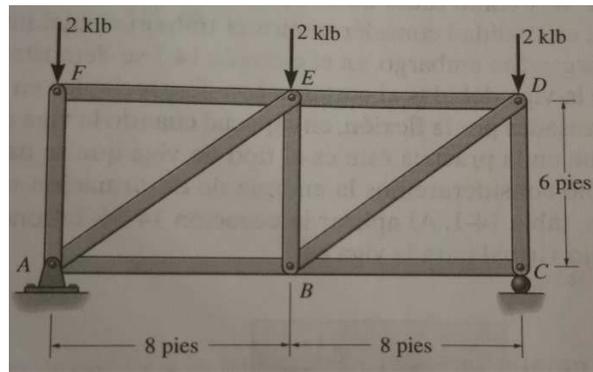


Figura (3.8) Problema 14.79, Hibbeler (2006).

Nodo	Coordenada X (in)	Coordenada Y (in)
1	0	0
2	96	0
3	192	0
4	192	72
5	96	72
6	0	72

Tabla 3.1 Coordenadas nodales problema 14.79.

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	1
7	1	5
8	2	5
9	2	4

Tabla 3.2 Conexiones nodales problema 14.79.

Listado 3.1 Primer parte de la entrada de datos.

```

%número de elementos
nel=9;
%número de nodos
nnod=6;
%número de nodos por elemento
nnel=2;
%número de grados de libertad por elemento
ndof=2;
%total de grados de libertad
sdof=nnod*ndof;

```

```

%coordenadas de los nodos (in)
%      X      Y
Ncoord=[ 0 , 0 ; ... %Node 1
         96 , 0 ; ... %Node 2
        192 , 0 ; ... %Node 3
        192 , 72 ; ... %Node 4
         96 , 72 ; ... %Node 5
         0 , 72 ]; %Node 6

%matriz de conectividad
conect=[1,2; ... % Elemento 1
        2,3; ... % Elemento 2
        3,4; ... % Elemento 3
        4,5; ... % Elemento 4
        5,6; ... % Elemento 5
        6,1; ... % Elemento 6
        1,5; ... % Elemento 7
        2,5; ... % Elemento 8
        2,4]; % Elemento 9

```

Como se observa en el Listado 3.1 se definen las variables $nel=9$ (número de elementos), $nnod=6$ (número de nodos), $nnel=2$ (número de nodos por elemento), $ndof=2$ (grados de libertad por elemento), con lo que se obtiene $sdof=12$ (grados de libertad en el sistema), $Ncoord$ es una matriz donde la primera y segunda columna contiene las coordenadas x e y de cada uno de los nodos y $conect$ contiene los números de los nodos que forman cada elemento.

La segunda parte de la entrada de datos se muestra en el Listado 3.2, en esta parte del código se definen las propiedades del material del modelo, como el área de su sección transversal que es $1.5in^2$ y el módulo de elasticidad $E=29000klb/in^2$. Ya que el objetivo del problema es encontrar desplazamientos y esfuerzos en la estructura se inicializa el sistema global $[KK]$ y local $[K]$ de rigidez junto con el vector de fuerzas $\{F\}$, un vector que ayudara a realizar el ensamble de elementos $\{index\}$ también se inicializa. Una parte interesante es la definición de las restricciones contenidas en el vector $\{bcdof\}$, el tamaño de este vector depende del total de restricciones que se tienen en el sistema y en él se almacenan el número de grado de libertad al cual corresponda la restricción, en el problema que se está resolviendo el nodo 1 que corresponde al 1° y 2° grado de libertad está completamente restringido, en el nodo 3 solo existe restricción de movimiento en la dirección horizontal que es 6° grado de libertad. Puesto que ya se contaba con un vector de fuerzas $\{F\}$ inicializado para definir las cargas hay que rescribir los valores de carga en el lugar que corresponda al grado de libertad en donde existe la carga, para el mismo problema existen cargas externas en los nodos 4, 5 y

6 en la dirección vertical que corresponden al 8°, 9° y 10° grado de libertad, el signo de la carga asignada indicaría el sentido de aplicación.

Listado 3.2 Segunda parte de la entrada de datos.

```

%vector de áreas sección transversal (in^2)
A=1.5*ones(1,nel);

%módulo de elasticidad (lb/in^2)
E=29e6*ones(1,nel);

%inicialización de matriz de rigidez global
KK=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de matriz de rigidez local
K=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización vector fuerza
F=zeros(sdof,1);

%inicialización del vector de posición
index=zeros(nnel*ndof,1);

%definición de condiciones frontera
bcdof(1)=1; %1st dof (u1)
bcdof(2)=2; %2nd dof (v1)
bcdof(3)=6; %6th dof (v3)

%definición de fuerzas (lb)
F(8)=-2e3;%8th dof (v4)
F(10)=-2e3;%10th dof (v5)
F(12)=-2e3;%11st dof (v6)

```

El proceso de ensamble de los elementos se muestra en el Listado 3.3, dentro de un ciclo con la función *truss* se calcula matriz de rigidez $[K]$ de cada elemento, por medio la función *position* en el vector $\{index\}$ se determina el número de grado de libertad al que corresponden los nodos de cada elemento, con estos valores obtenidos se manda llamar la función *assemble* que se encarga de generar el sistema global $[KK]$, la descripción de estas funciones que se utilizan para el ensamble del sistema se encuentran en el apéndice.

Listado 3.3 Ciclo de ensamble de los elementos.

```

%ensamble de elementos en Sistema global
for i=1:nel
    %nd=vector de nodos evaluados respect a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);

    %index=vector de posicion asociado con el grado de libertad
    index=position(nd,nnel,ndof);

    %cálculo de sistema local
    [K]=truss(E(i),A(i),Ncoord(conect(i,1),:),Ncoord(conect(i,2),:));

    %ensamble de matrices

```

```
KK=assemble(K, KK, index);
End
```

Ya que se cuenta con el sistema global $[KK]$ ensamblado y las cargas externas en el vector $\{F\}$ se aplican las condiciones frontera ya definidas, con la función *boundary1* se eliminan los renglones y columnas de $[KK]$ correspondientes a los grados de libertad con restricción establecida, y la función *boundary2* se encarga de eliminar los renglones del vector de fuerzas en donde existen las restricciones, la descripción de estas dos funciones se encuentra en el apéndice. Al aplicar las restricciones se pueden encontrar los desplazamientos invirtiendo el sistema restringido $[KKc]$ y multiplicándolo por el vector de fuerzas restringido $\{Fc\}$, ecuación (3.2), el Listado 3.4 muestra la descripción del código en el que se incorporan las condiciones frontera y se resuelve el sistema para los desplazamientos nodales.

Listado 3.4 Incorporación de condiciones frontera y solución del sistema.

```
%aplicar condiciones frontera
[KKc]=boundary1(KK,bcdof);
[Fc]=boundary2(F,bcdof);

%solución para el desplazamiento
U=KKc\Fc;
```

Con los desplazamientos nodales obtenidos se calculan las deformaciones y esfuerzos que sufre cada uno de los elementos usando (3.4) y (3.5), en el Listado 3.5 se muestra el código que complementa el análisis estático de la estructura seleccionada, y en el cual usando la función *strain_stress2D* se obtuvieron las deformaciones y esfuerzos de los miembros de la estructura.

Listado 3.5 Cálculo de esfuerzos y deformaciones en elementos.

```
%cálculo de esfuerzos en elementos
for i=1:nel
    %nd= vector de nodos evaluados respecto a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);

    %esfuerzos y deformaciones
    [epsilon(i,1),sigma(i,1)]=strain_stress2D(Ncoord(conect(i,1),:),...
    Ncoord(conect(i,2),:),...
    Ncoord(conect(i,1),:)+[U(conect(i,1)*2-1) U(conect(i,1)*2)],...
    Ncoord(conect(i,2),:)+[U(conect(i,2)*2-1) U(conect(i,2)*2)],E(i));
end
```

Para concluir el análisis estático de la estructura en la Tabla 3.3 se muestran solución que se obtuvo para los desplazamientos que sufrieron los nodos, la Tabla 3.4 muestra las deformaciones unitarias y esfuerzos de cada uno de los elementos, y en la Figura (3.9) se muestran gráficamente la estructura original junto con la estructura deformada

después de haber aplicado las cargas, los desplazamientos fueron amplificados 1000 veces para poder observar las deformaciones.

Nodo	Desplazamiento X (in)	Desplazamiento Y (in)
1	0	0
2	0.0029	-0.0132
3	0.0029	0
4	0.0025	-0.005
5	0.0054	-0.0149
6	0.0054	-0.0033

Tabla 3.3 Desplazamientos nodales problema 14.79.

Elemento	Deformación	Esfuerzo (kPa)
1	0.3066	0.8892
2	0.0001	0.0003
3	-0.6897	-2
4	-0.3065	-0.8887
5	0.0001	0.0002
6	-0.4597	-1.3333
7	-0.3831	-1.1109
8	-0.2299	-0.6666
9	0.3832	1.1112

Tabla 3.4 Deformaciones y esfuerzos problema 14.79.

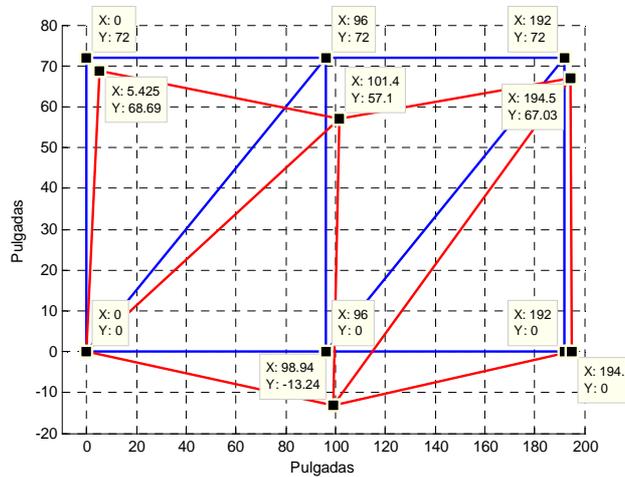


Figura (3.9) Deformaciones amplificadas problema 14.79, Hibbeler (2006).

Ahora se resolverá un problema dinámico en el que se determine las frecuencias naturales y modos de vibración, se plantea el problema de una viga en cantiléver (aluminio 7075) de 0.5m de longitud, 0.0508m de ancho, 0.00635m de espesor, módulo de elasticidad de 72GPa y densidad de masa 2810 kg/m³, para este problema se automatiza la discretización

del dominio ya que las coordenadas en el eje y para los nodos de la viga son cero, las coordenadas de los nodos sobre el eje x pueden dependerán de la longitud de la viga y del número de elementos que se utilicen para discretizarla, el Listado 3.6 muestra la descripción del código en donde se realiza la definición de las características de viga, la discretización del dominio, la inicialización de los sistemas tanto globales como locales y se definen de restricciones y cargas.

Listado 3.6 Discretización de elementos de una viga en cantiléver.

```

%longitud de la viga (m)
blength=0.5;

%ancho de la viga (m)
b=2*2.54/100;

%espesor de la viga (m)
h=0.25*2.54/100;

%número de lementos
nel=50;

%número de nodos
nnod=nel+1;

%número de nodos por elemento
nnel=2;

%número de grados de libertad por elemento
ndof=2;

%total de grados de libertad
sdof=nnod*ndof;

%área sección transversal (m^2)
C1=b*h;

%momento de inercia (m^4)
C2=b*(h^3)/12;

%coordenadas de los nodos (m)
for i=1:nnod
    Ncoord(i,1)=(i-1)*(blength/nel);
    Ncoord(i,2)=0;
end

%matriz de conectividad
for i=1:nel
    conect(i,1)=i;
    conect(i,2)=i+1;
end

%vector de áreas sección transversal (m^2)
A=C1*ones(1,nel);

%vector de módulos de elasticidad (N/m^2)
E=72e9*ones(1,nel);

```

```

%vector de momentos de inercia (m^4)
I=C2*ones(1,nel);

%vector de densidades de masa (kg/m^3)
rho=2800*ones(1,nel);

%inicialización de matriz de rigidez global
KK=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de matriz de rigidez local
K=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización de matriz de masas global
MM=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de matriz de masas local
M=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización del vector fuerza
F=zeros(sdof,1);

%inicialización del vector de posición
index=zeros(nnel*ndof,1);

%definición de condiciones frontera
bcdof(1)=1; %1st dof (v1)
bcdof(2)=2; %2nd dof (th1)

%definición de fuerzas (N)
F(sdof-1)=2*9.81;

```

Siguiendo la metodología de programación para el FEM se debe continuar con el ensamble de los elementos en un sistema global, hay que resaltar que como se requiere resolver un problema dinámico es necesario tener dos sistemas globales, uno de rigidez $[KK]$ y uno de masas $[MM]$, la función *beam* permite obtener los sistemas locales $[K]$ y $[M]$ de cada uno de los elementos, la derivación de la matriz de masas y rigidez para un elemento viga se encuentran la mayoría de textos dedicados al estudio FEM, en este caso las podemos encontrar en Segerlind (1984), Rao (1999), Hutton(2004) y Graham(2012). El Listado 3.7 muestra el código de programa que realiza el cálculo y ensamble de los sistemas globales, como se observa tiene la misma estructura que el Listado 3.3 de análisis estático.

Listado 3.7 Ensamble de elementos para una viga en cantiléver.

```

%ensamble de elementos en Sistema global
for i=1:nel
    %nd=vector de nodos evaluados respecto a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);

    %index=vector de posición asociado al grado de libertad
    index=position(nd,nnel,ndof);

    %cálculo de matrices de rigidez y masas local
    [K,M]=beam(E(i),I(i),A(i),rho(i),Ncoord(conect(i,1),:)),...

```

```

Ncoord(conect(i,2),:),1);

%ensamble de matrices
KK=assembl(K, KK, index);
MM=assembl(M, MM, index);
end

```

Para resolver el problema de desplazamientos o deflexión en la viga se aplican las condiciones frontera a los sistemas globales que describen la dinámica del sistema y aplicando (3.2) se encuentra la deflexión máxima en la viga, en el Listado 3.8 se muestra la continuación del código en donde se restringe los sistemas y se calcula la deflexión máxima del extremo libre de la viga.

Listado 3.8 Integración de restricciones para viga en cantiléver.

```

%aplicar condiciones frontera
[KKc]=boundary1(KK,bcdof);
[MMc]=boundary1(MM,bcdof);
[Fc]=boundary2(F,bcdof);

%solución para el desplazamiento
U=KKc\Fc;

%imprimir valores del desplazamiento
[U]=displacements(U,bcdof,sdof);

```

Existe bibliografía en el campo de la mecánica de materiales que ya ha determinado teóricamente la formulación para encontrar la deflexión máxima en vigas, para una viga en voladizo esta deformación está dada por (3.7), Hibbeler (2006). Con los datos dados del problema se puede calcular la deflexión en la viga de $-0.0105m$ después de haber aplicado una masa de 2 Kg en su extremo libre, mientras que con el FEM se pudo determinar una deflexión de -0.01047 , en la Figura (3.10) se muestra gráficamente la viga en cantiléver cuando se encuentra sin carga en su extremo libre y también se muestra la viga flexionada después de haber sido una fuerza.

$$\delta_{max} = \frac{FL^3}{3EI} = -0.0105m \quad (3.7)$$

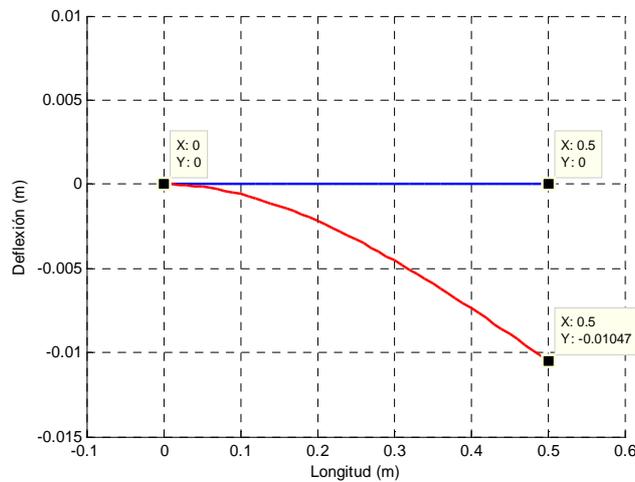


Figura (3.10) Deflexión de la viga en cantiléver.

Para encontrar las frecuencias naturales de la viga en cantiléver hay que resolver el problema de eigenvalores descrito por (3.6), con MATLAB® resulta sencillo encontrar la solución gracias a las funciones predefinidas que contiene, con los sistemas globales restringidos $[KKc]$ y $[MMc]$ se encuentran los eigenvalores que corresponden a las frecuencias naturales de la viga, a cada eigenvalor le corresponde un eigenvalor que viene siendo el modo natural de vibración, en el Listado 3.9 se muestra la parte final del código en donde se calculan las frecuencias naturales y con la función *plotmodeshapes* se grafican los modos de vibración normalizados. Mostrando en la Tabla 3.5 las primeras cinco frecuencias naturales de la viga obtenidas con la programación del FEM y en la Figura (3.11) se muestran los primeros dos modos de vibración que corresponden a las dos primeras frecuencias naturales, la descripción del código de la viga y las funciones utilizadas se encuentran en el apéndice.

Listado 3.9 Cálculo de las frecuencias naturales y modos de vibración.

```

%solución de eigen-valores (frecuencia natural)
[V,D]=eig(KKc,MMc);%D eigen-valores, V eigen-vectores

for i=1 : length(D)
    wn(i)=sqrt(D(i,i));%rad/sec
end
freqHz=wn/(2*pi);%Hz

%graficar modos de vibración
fig=figure;
set(fig,'name','Mode Shapes of Beam in rad/s','numbertitle','off')
subplot(2,1,1),plotmodeshapes(D,V,nmod,bcdof,sdof,blength,1),grid;
subplot(2,1,2),plotmodeshapes(D,V,nmod,bcdof,sdof,blength,2),grid;

```

n	$\omega_n(\text{rad/s})$	$f_n(\text{Hz})$
1	130.498	20.769
2	817.822	130.160
3	2289.928	364.453
4	4487.352	714.184
5	7417.933	1180.6

Tabla 3.5 Frecuencias naturales de la viga en cantiléver.

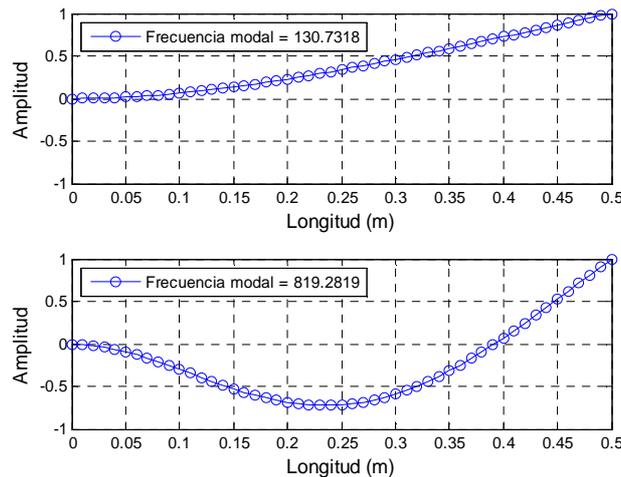


Figura (3.11) Primeros dos modos de vibración de la viga en cantiléver.

Con la solución de estos dos problemas presentados se introduce un poco al manejo y programación del FEM, así, la metodología que se siguió para el desarrollo de problemas estáticos y dinámicos será empleada para el análisis de los perfiles de engranes, presentando parte del análisis y resultados en el capítulo IV.

3.3 Banco experimental de fallas mecánicas

Para realizar la experimentación con fallas de desgaste en engranes se diseñó y construyó un banco experimental con la finalidad de reproducir, controlar y analizar fallas mecánicas, las fallas inducidas estarán de alguna manera controladas y en este caso se conocen el porcentaje de desgaste que existe en los engranes. De manera general este banco de fallas mecánicas está compuesto por un motor de corriente alterna, una caja de engranes, un generador de corriente directa, un arrancador, un variador, un encoder y un acelerómetro, en la Figura (3.12) se muestra una imagen del banco experimental con todos sus componentes instalados.

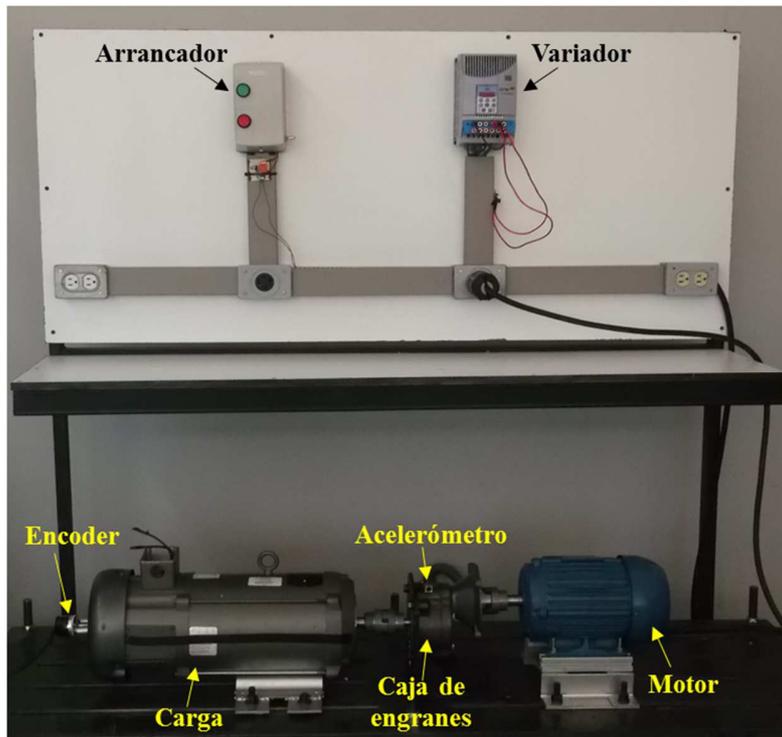


Figura (3.12) Banco experimental de fallas mecánicas.

3.3.1 Descripción e instalación de componentes mecánicos y eléctricos

Como ya se mencionó el banco de fallas cuenta con un motor de corriente alterna el cual tiene una potencia de 2 HP, su alimentación es trifásica a 220 V, la frecuencia nominal de operación es de 60 Hz, de acuerdo con su placa de datos si se usa esta alimentación y frecuencia puede operar hasta las 3600 rpm. La caja de engranes es de la marca Baldor y es una caja reductora de velocidad, su relación de reducción es de 4:1 e internamente cuenta un piñón y engrane con 18 y 72 dientes respectivamente, una flecha impulsora transmite el giro al piñón y este a su vez transmite el movimiento al engrane que está montado sobre otra flecha en la que se presenta la reducción de velocidad. El generador de corriente directa es de la misma marca Baldor, puede generar hasta 180 V a 15 Amp a una velocidad de operación de 1750 rpm, este generador es usado como una carga para el motor y la caja reductora. Eléctricamente se utilizó un arrancador que opera a 220V trifásico, es de la marca SIEMENS e internamente cuenta con sus contactores y un protector contra sobre corriente, el arrancador fue instalado para operar al motor a plena tensión. Un variador de la marca WAG-CFW

también fue utilizado en la alimentación de motor, con la finalidad de reducir la frecuencia de nominal de operación y consecuentemente reducir la .velocidad.

En la instalación de estos componentes en primera lugar se colocó una bancada bastante robusta sobre la cual se fijó el motor, caja de engranes y generador, para poder fijar de manera segura estos elementos fue necesario construir algunos soportes que también ayudaron con la alineación de las flechas, y así por medio de coples mecánicos el giro del motor es transmitido a la caja de engranes que se encarga de reducir la velocidad y trasmitirla al generador o carga. La instalación eléctrica, el arrancador y variador se montaron sobre un tablero que de igual forma fue construido para soportar los contactos y las canaletas, además este tablero cuenta con suficiente espacio para cuando fuese necesario colocar otros materiales de trabajo sobre él.

3.3.2 Fabricación de engranes desgastados

Las características generales de la caja de engranes ya fueron dadas, como ya se mencionó la falla del desgaste será controlada y ya que la caja de engranes cuenta con un piñón y un engrane se optó por reproducir la falla en el engrane de 72 dientes, que es el que transmite el movimiento a la carga, esperando ver los efectos que este tipo de falla puede provocar variaciones en la transmisión de movimientos, así como perjudicar a todo el sistema mecánico acoplado. Con la finalidad de reproducir las fallas fue necesario desarmar la caja de engranes para poder adquirir las dimensiones del engrane sobre el cual se indujo la falla, de acuerdo con la propuesta de desgastes fueron maquinados engranes con el 25%, 50% y 75% de desgaste, en la Figura (3.13a) se muestra una imagen del conjunto de engranes, en esta misma Figura (3.13) se muestran algunas de sus vistas del engrane montado en su flecha, para la fabricación de los engranes se usó un acero AISI 1020 que uno de los materiales más comunes empleado en la fabricación de engranajes.

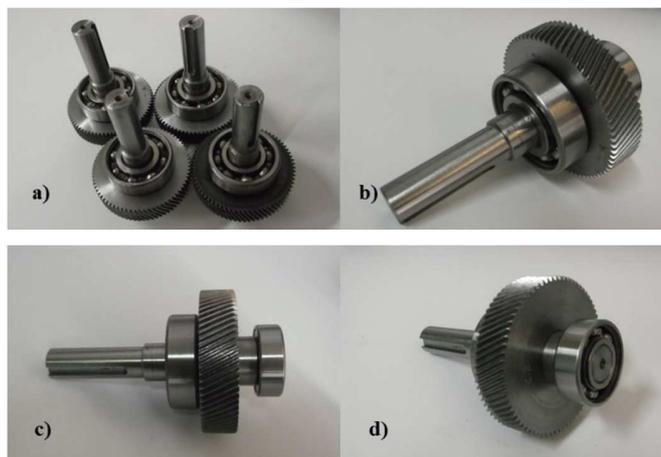


Figura (3.13) Juego de engranes y sus vistas.

Cuando se hizo el análisis del perfil involuta de dientes de engrane en la sección 3.1 se mencionó que el desgaste solo aparece en un solo lado del perfil del engrane debido a que el movimiento y contacto que experimenta siempre es en el mismo sentido, en la fabricación de los engranes con desgaste la falla fue inducida en uno de los lados del perfil, la Figura (3.14) se muestra más a detalle una imagen del engrane sano (a), con 25% (b), 50% (c) y 75% (d) de desgaste.

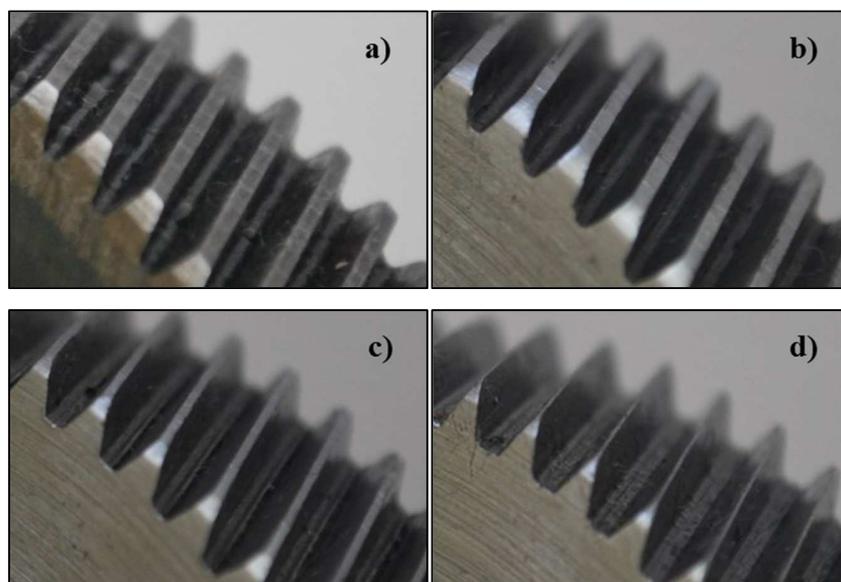


Figura (3.14) Engrane a) sano, b) 25%, c) 50% y d) 75% de desgaste.

3.3.3 Instrumentación y sistema de adquisición de datos

En la descripción general del banco de fallas mecánicas se mencionó la presencia de un encoder y un acelerómetro, y es que de alguna manera si se pretende analizar los efectos que pueden producir fallas mecánicas como el desgaste debe de existir instrumentos que ayuden al monitoreo en la operación del proceso, el encoder tipo incremental de 5000 cuentas fue usado para medir la velocidad angular de operación, para su instalación se fabricaron algunos coples y soportes para poder ser acoplado en la parte trasera del generador, de esta forma la velocidad angular que se estaría monitoreando es la reduce y transmite la caja de engranes. Una tarjeta desarrollada por el grupo de investigación HSPdigital se utilizó para el monitoreo de vibraciones, esta mini tarjeta fue instalada en la parte superior de la caja de engranes, el acelerómetro que usa es del modelo LIS3L02AS4 y alcanza a medir rangos de vibraciones de $\pm 16g$, para la sujeción del acelerómetro se ocupó hacer dos barrenos sobre la carcasa de la caja de engranes y esta ubicación fue seleccionado porque dentro de la caja de engranes se encuentran los elementos con falla mecánica, la Figura (3.15) muestra una imagen más clara de la ubicación del encoder y acelerómetro.

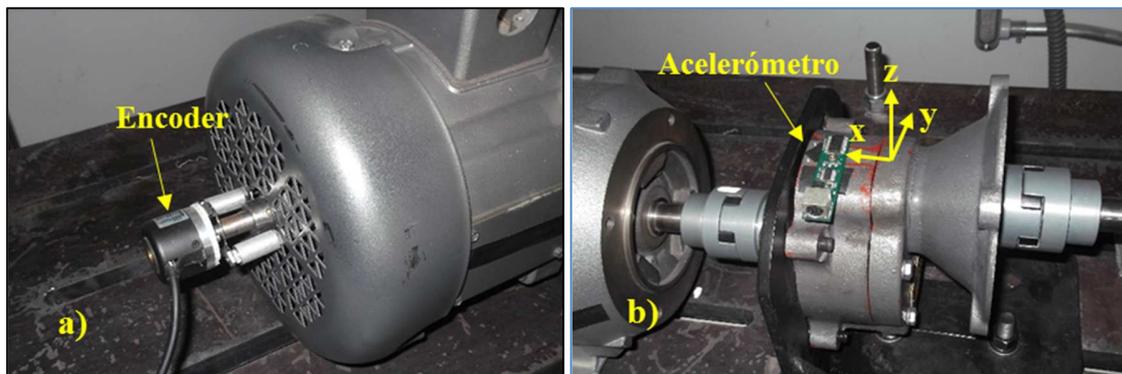


Figura (3.15) Ubicación de a) encoder y b) acelerómetro.

Al contar con una instrumentación para el monitoreo de procesos debe de existir un computador o controlador que se encarde de administrar las señales adquiridas por los elementos de medida, para este efecto y gracias a desarrollos propios que se han realizado en la universidad se cuenta con una tarjeta de control PLCUAQ8x16 mostrada en la Figura (3.16), esta tarjeta controladora está basada en un FPGA de bajo costo y alta capacidad, cuenta con 8 entradas y salidas analógicas, 16 entradas y salidas TTL, puerto RS-232 y USB,

y para el almacenamiento de datos usa una memoria estática y dinámica., después de realizar la adquisición de señales de vibración y velocidad de operación, se utilizara un procesamiento de señales que ayude a determinar si existe forma alguna de determinar la presencia de desgaste en engranes.



Figura (3.16) Tarjeta de control PLCUAQ8x16.

Capítulo IV

4 Resultados y discusión

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos del análisis del desgaste en engranes aplicando el FEM, de la misma manera como se presentó la metodología serán presentados los resultados obtenidos, comenzando con el modelado de perfiles del diente del engrane utilizado para inducir la falla, posteriormente de los perfiles obtenidos se realizara la discretización del dominio para poder realizar un análisis estático y dinámico empleado el FEM, finalizando con el análisis espectral de las señales obtenidas experimentalmente.

4.1 Perfil de diente de engrane de caja reductora 1:4

Ya que la caja reductora de velocidad fue desarmada para maquinar los engranes con desgaste, del engrane de 72 dientes original de la caja se adquirieron las características para poder construir el modelo del perfil de sus dientes, las características que se obtuvieron del engrane fueron suficientes para reproducir con exactitud el perfil de sus dientes o el engrane completo, la Tabla 4.1 muestra las características del engrane.

<i>No. dientes (N)</i>	72
<i>Paso diametral (Pd)</i>	9
<i>Angulo de presión (ϕ)</i>	20°

Tabla 4.1 Características del engrane de 72 dientes.

El programa y las funciones desarrolladas en MATLAB® para la construcción de perfiles involuta de engranes se encuentra en el apéndice, al ingresar los datos de la Tabla 4.1 dentro del programa se genera el perfil involuta, y como el programa permite definir el número de puntos en la involuta y la cresta se obtienen modelos bien definidos de buena aproximación, en la Figura (4.1) se muestra modelo obtenido del perfil de diente del engrane y como se observa de acuerdo con las dimensiones de la escala se trata de un perfil de diente muy fino, de este mismo programa se puede obtener el resto de las dimensiones importantes para la formulación de perfiles, la Tabla 4.2 muestra el complemento de las dimensiones del engrane de 72 dientes de la caja reductora, estas dimensiones obtenidas fueron comparadas con las dimensiones reales del engrane mostrando gran concordancia.

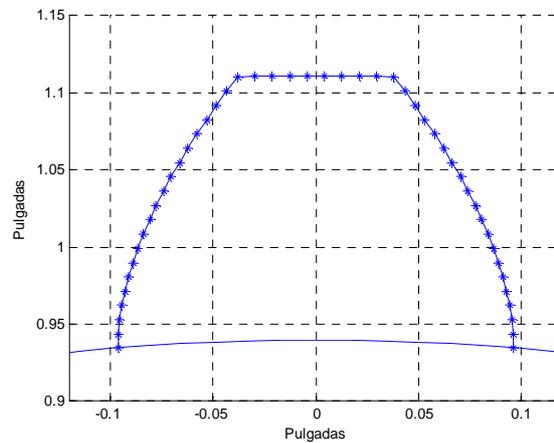


Figura (4.1) Perfil diente de engrane de caja reductora 1:4.

<i>Diámetro de paso (in)</i>	8
<i>Modulo (mm)</i>	2.822
<i>Círculo de paso (in)</i>	2
<i>Addendum (in)</i>	0.111
<i>Dedendum (in)</i>	0.138

Tabla 4.2 Dimensiones obtenidas del modelo de perfil.

Con esta herramienta de programación de manera sencilla y eficaz se puede generar el modelo de perfiles de diente de cualquier engrane, como uno de los objetivos del proyecto fue desarrollar las herramientas de programación que modelaran el desgaste en engranes, dentro del mismo código de programa existe una variable donde se define el porcentaje del desgaste que se desea obtener en el modelo del perfil, además de poder seleccionar sobre qué

lado del perfil se desea aplicar el desgaste, con las mismas características del engrane de 72 dientes se obtuvieron los modelos de perfil con el 25%, 50% y 75% de desgaste, en Figura (4.2) se muestran los modelos obtenidos.

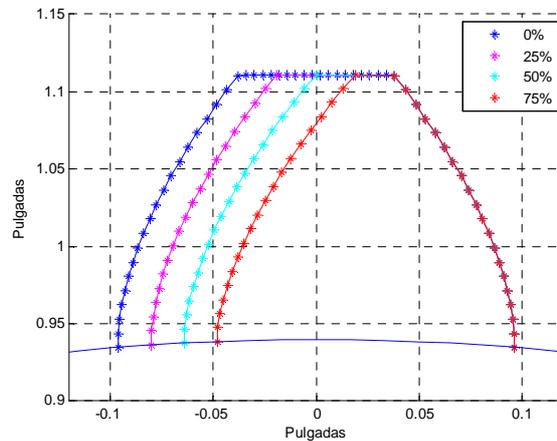


Figura (4.2) Perfiles diente de engrane con desgaste de caja reductora 1:4.

Una forma de asegurar que los modelos de perfil de engrane desgastado son correctos es midiendo el espesor de la cresta del diente de los engranes fabricados para compararla con el espesor de la cresta de los modelos obtenidos, la Tabla 4.3 muestra la comparativa de espesores de la cresta del diente, los resultados muestran una buena aproximación.

<i>% de desgaste</i>	<i>Espesor real(in)</i>	<i>Espesor modelo(in)</i>
0	0.0748	0.0757
25	0.0561	0.0568
50	0.0374	0.0379
75	0.0187	0.0189

Tabla 4.3 Espesor de la cresta del diente de engrane de 72 dientes.

4.1.1 Discretización de los perfiles de diente

Para facilitar el trabajo de la discretización del dominio y poder emplear el FEM de los modelos de perfil obtenidos se extraen sus coordenadas X e Y de cada uno de ellos, en el mismo MATLAB® se utiliza la función *pdepoly[X,Y]* que básicamente abre la interfaz *PDE Toolbox* y sobre la interfaz se grafica el modelo del perfil, esta interfaz es utilizada para diseño y mallado de geometrías complejas, en este caso solo se realiza el proceso de mallado.

Para cada modelo de perfil obtenido se discretizó la geometría usando esta interfaz, una de las ventajas que ofrece la interfaz es poder importar las coordenadas y conexiones nodales, estos valores de coordenadas y conectividad se almacenaron en un archivo de texto para después al aplicar el análisis con FEM, la misma interfaz puede refinar el mallado pero al aumentar el número de elementos la carga computacional se puede ver comprometida, sin embargo para cada modelo de perfil se obtuvo una discretización sin refinar y otra refinada, la Figura (4.3) muestra el modelo discreto del perfil sin daño, la Figura (4.4) el modelo discreto del perfil con 25% de desgaste, la Figura (4.5) el modelo discreto para desgaste de 50% y en la Figura (4.6) el modelo discreto para 75% de desgaste sobre el perfil.

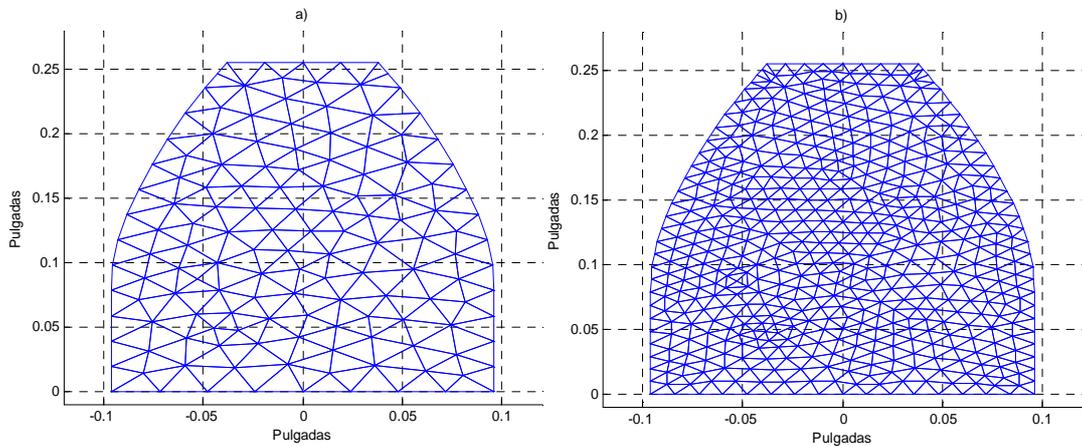


Figura (4.3) Modelo discreto de perfil 0% desgastado a) sin refinar, b) refinado.

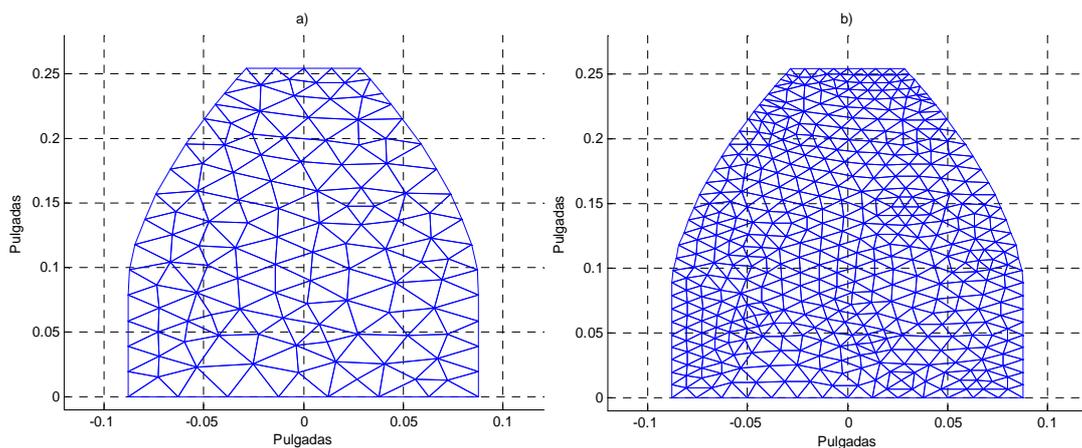


Figura (4.4) Modelo discreto de perfil 25% desgastado a) sin refinar, b) refinado.

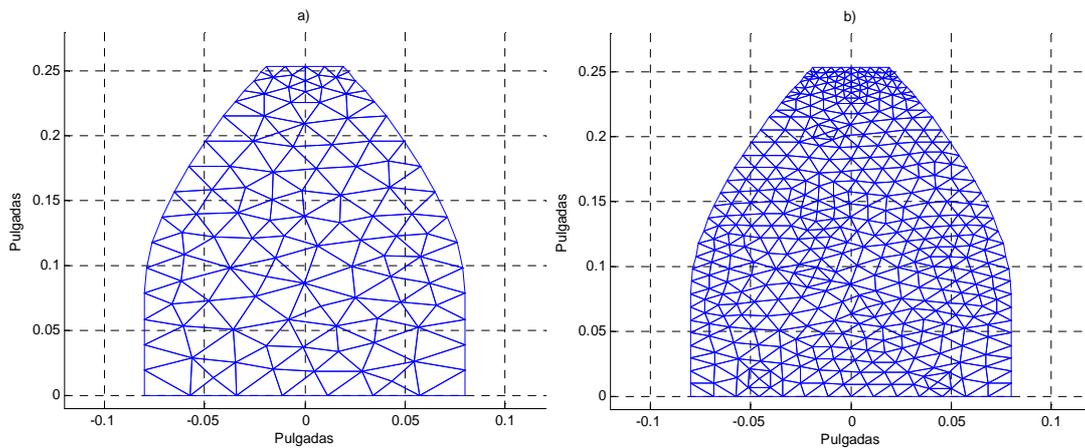


Figura (4.5) Modelo discreto de perfil 50% desgastado a) sin refinar, b) refinado.

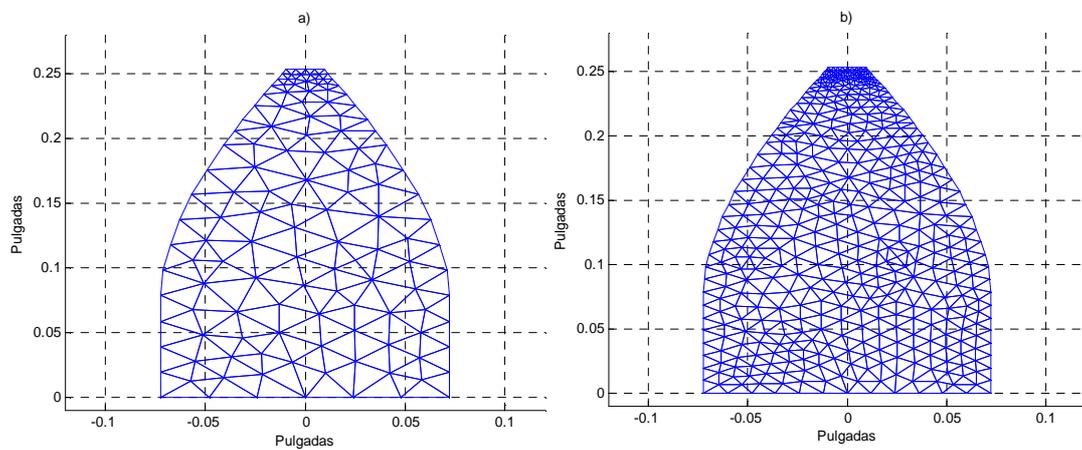


Figura (4.6) Modelo discreto de perfil 75% desgastado a) sin refinar, b) refinado.

La discretización sin refinar y refinada realizada para cada modelo de perfil de diente se utilizó para el análisis estático y dinámico aplicando el FEM, esto para observar la variación de resultados ocasionados por la discretización refinada de sistemas.

4.2 Análisis estático en perfiles de diente de engrane empleando el FEM

Para un primer análisis estático de los modelos de perfil discretos se debe de contar con un punto de comparación, en este análisis se determinarán las deformaciones y esfuerzos que sufre el diente de engrane, si se considera el diente de engrane como una viga en voladizo la deflexión máxima puede obtenerse usando la ecuación (3.7) o bien puede obtenerse usando el código de programa FEM de la viga mostrado en la sección 3.2.4 ajustando las dimensiones

de la viga con las del diente de engrane, y para la determinación de esfuerzos de acuerdo con Shigley (2002) Lewis fue uno de los primeros en presentar una fórmula para el cálculo de esfuerzos en dientes de engranes, para deducir la ecuación considera el modelo de la viga en voladizo de la Figura (4.6) donde el esfuerzo por flexión al aplicar una carga concentrada está dado por (4.1).

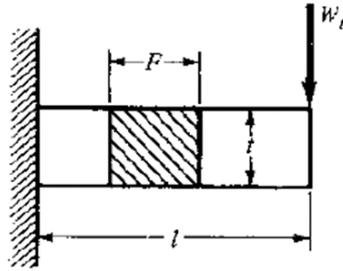


Figura (4.7) Viga en voladizo sometida a una carga uniforme.

$$\sigma_f = \frac{6W_t l}{Ft^2} \quad (4.1)$$

Si se usa la representación de la Figura (4.8) para encontrar la concentración de esfuerzos se tiene que en el punto *a* existe una concentración máxima, después de buscar una relación con la geometría del diente se obtuvo la ecuación (4.2) donde *P_c* es el paso circular e *y* se le llama factor de Lewis y puede obtenerse de la representación gráfica del diente de engrane.

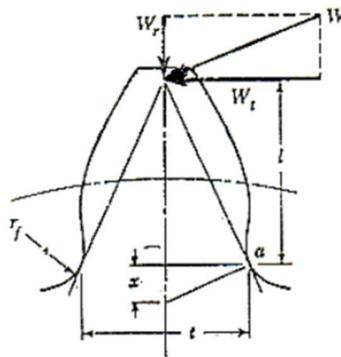


Figura (4.8) Esfuerzo máximo en diente de engrane.

$$\sigma = \frac{W_t}{FP_c y} \quad (4.2)$$

Contar con la formulación teórica la determinación de esfuerzo máximo en dientes de engranes será útil para realizar una comparativa con los resultados que se obtengan del análisis con FEM, ya que para la discretización del dominio se utilizaron elementos triangulares parte de las herramientas de programación del FEM están basadas en el desarrollo matemático de la sección 2.8.1.2, el código de programa descrito para el análisis estático de dientes de engrane se encuentra en el apéndice, este código sirvió para determinar la deformación y esfuerzos de los cuatro modelos de perfil de diente mostrando de manera gráfica las soluciones, la Figura (4.9) muestra las deformaciones del modelo no refinado del diente con 0% y 75% de desgaste, se aplicó una carga puntual de 50 lb sobre la parte superior derecha del diente, para graficar las deformaciones se usó un factor de amplificación de 1000 para poder observar la variación.

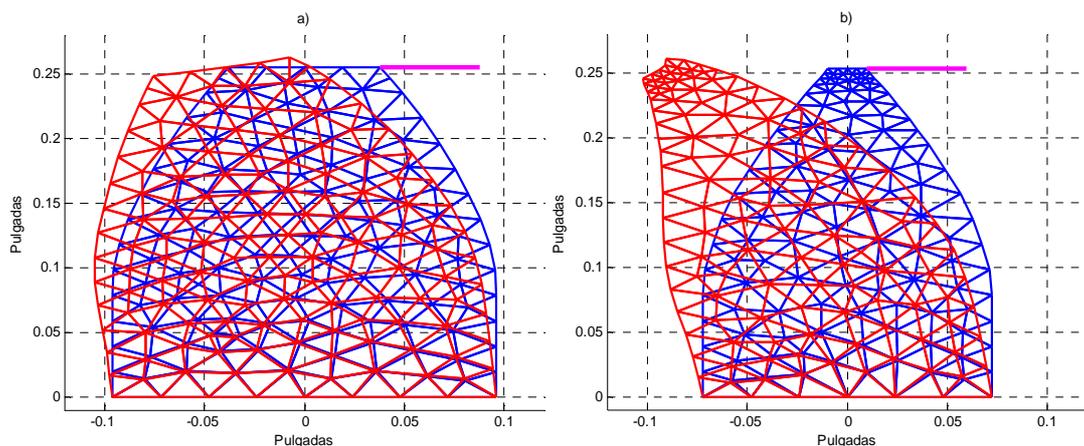


Figura (4.9) Deformaciones del diente con a) 0%, b) 75% de desgaste.

La Tabla 4.4 muestra una síntesis de las deformaciones que presenta cada uno de los modelos de diente, además con las dimensiones y características de cada uno de los dientes de engrane se hizo una aproximación para modelar el diente como una viga en cantiléver y usando el código de programa de la sección 3.2.4 con que se determinó la flexión máxima en la viga, como era de esperarse en los resultados al reducir el espesor del diente las deformaciones presentadas son mayores, lo que quiere decir que entre mayor desgaste exista en el diente de engrane se incrementa la probabilidad de que se flexione o fracture con mayor facilidad.

<i>% de desgaste</i>	<i>FEM sin refinar (in)</i>	<i>FEM refinado (in)</i>	<i>Viga FEM (in)</i>
0	0.00003928	0.00003968	0.0000261
25	0.00004977	0.00005052	0.0000335
50	0.00006539	0.00006588	0.0000441
75	0.00009386	0.00009503	0.0000601

Tabla 4.4 Deformación máxima del diente de engrane de 72 dientes.

Bajo la misma carga puntual se obtuvo la representación gráfica de concentración de esfuerzo de cada uno de los modelos, la Figura (4.10) muestra las concentraciones obtenidas para los modelos del diente con 0% de desgaste, la Figura (4.11) para los modelos con el 25%, la Figura (4.12) para los modelos con el 50% y en Figura (4.13) para los modelos con el 75% de desgaste.

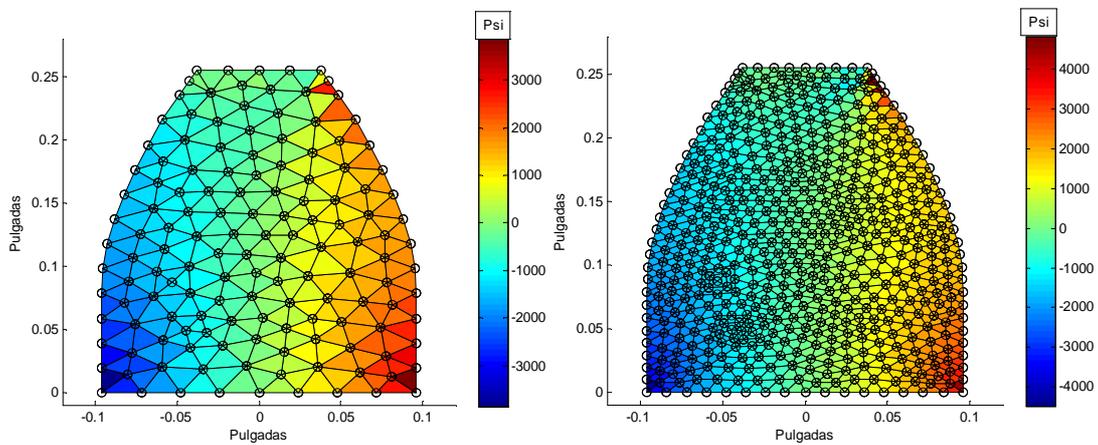


Figura (4.10) Concentración de esfuerzos en perfil con 0% de desgaste.

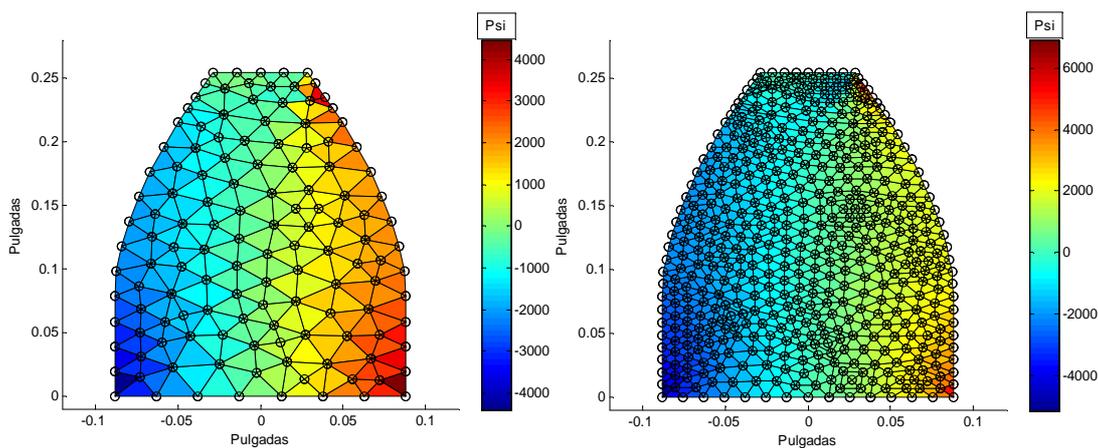


Figura (4.11) Concentración de esfuerzos en perfil con 25% de desgaste.

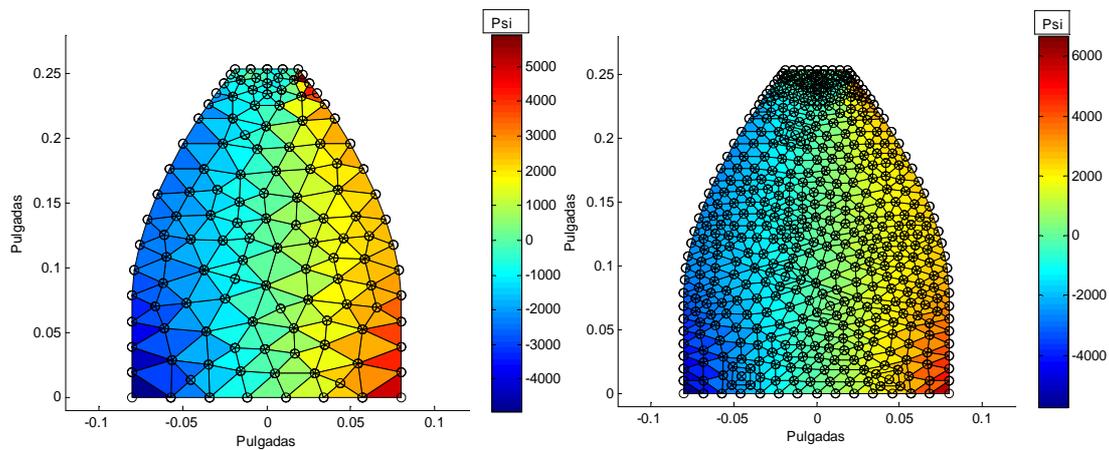


Figura (4.12) Concentración de esfuerzos en perfil con 50% de desgaste.

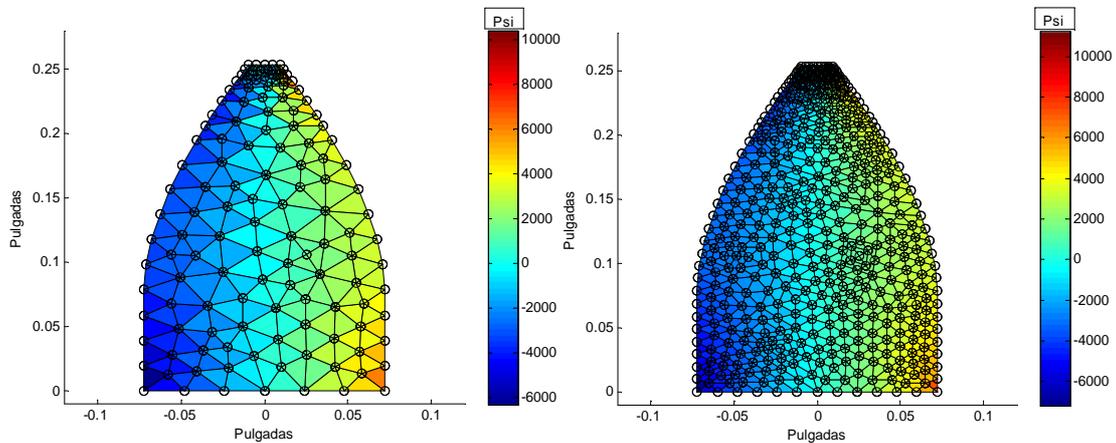


Figura (4.13) Concentración de esfuerzos en perfil con 75% de desgaste.

La Tabla 4.5 muestra una síntesis de los esfuerzos máximos que sufre cada uno de los modelos, también se muestra el cálculo del esfuerzo máximo para dientes de engrane obtenido de la formulación de Lewis, los resultados mostrados tienen gran congruencia debido a que en las representaciones gráficas sobre la misma región aparece la máxima concentración de esfuerzos, ocasionados por la tensión ejercida de la carga, y además la concentración de esfuerzos incrementa en forma gradual.

<i>% de desgaste</i>	<i>FEM sin refinar (psi)</i>	<i>FEM refinado (psi)</i>	<i>Ecuación de Lewis (psi)</i>
0	3873.7	4825.7	5020.6
25	4474.6	5426.8	6659.6
50	5921.2	6927.1	9106.3
75	10425	11186	12931

Tabla 4.5 Esfuerzo máximo del diente de engrane de 72 dientes.

4.3 Análisis dinámico en perfiles de diente de engrane empleando el FEM

Para el análisis dinámico de cada uno de los modelos de perfil se obtuvieron las tres primeras frecuencias naturales, también se calcularon las frecuencias de modelar el diente como viga en cantiléver y la metodología para la implementación del código de programa es la misma que se empleó para el análisis de la viga descrito en la sección 3.2.4, la descripción completa del código de análisis dinámico para perfiles se encuentra en el apéndice. Así, en la Tabla 4.6 se enlistan las frecuencias naturales correspondientes al modelo de perfil con 0% de desgaste, en la Tabla 4.7 las frecuencias para el 25%, en la Tabla 4.8 para el 50% y en la Tabla 4.9 para el modelo con 75% de desgaste. Los valores de frecuencias mostrados en las tablas son muy altos porque las dimensiones de los perfiles son muy pequeñas y también por las propiedades mecánicas del material.

<i>n</i>	<i>FEM sin refinar(Hz)</i>	<i>FEM refinado(Hz)</i>	<i>Viga FEM(Hz)</i>
1	6280.4	6234.6	4800
2	15959	15936	30087
3	18331	18158	84243

Tabla 4.6 Frecuencias naturales para el engrane con 0% de desgaste.

<i>n</i>	<i>FEM sin refinar(Hz)</i>	<i>FEM refinado(Hz)</i>	<i>Viga FEM(Hz)</i>
1	6194.8	6140.3	4400
2	16340	16316	27749
3	18412	18207	77698

Tabla 4.7 Frecuencias naturales para el engrane con 25% de desgaste.

<i>n</i>	<i>FEM sin refinar(Hz)</i>	<i>FEM refinado(Hz)</i>	<i>Viga FEM(Hz)</i>
1	6162.4	6059.9	4052
2	16836	16805	25397
3	18525	18258	71113

Tabla 4.8 Frecuencias naturales para el engrane con 50% de desgaste.

<i>n</i>	<i>FEM sin refinar(Hz)</i>	<i>FEM refinado(Hz)</i>	<i>Viga FEM(Hz)</i>
1	6056.9	5988.2	3667
2	17468	17440	22981
3	18583	18296	64398

Tabla 4.9 Frecuencias naturales para el engrane con 75% de desgaste.

En la Figura (4.14) se muestra un gráfico de la primera frecuencia natural para los diferentes niveles de desgaste en el diente de engrane, podemos observar que cuando los porcentajes de desgaste aumentan la magnitud de la frecuencia disminuye, esto tiene lógica ya que entre más se reduzca el área del perfil será más fácil hacerlo vibrar.

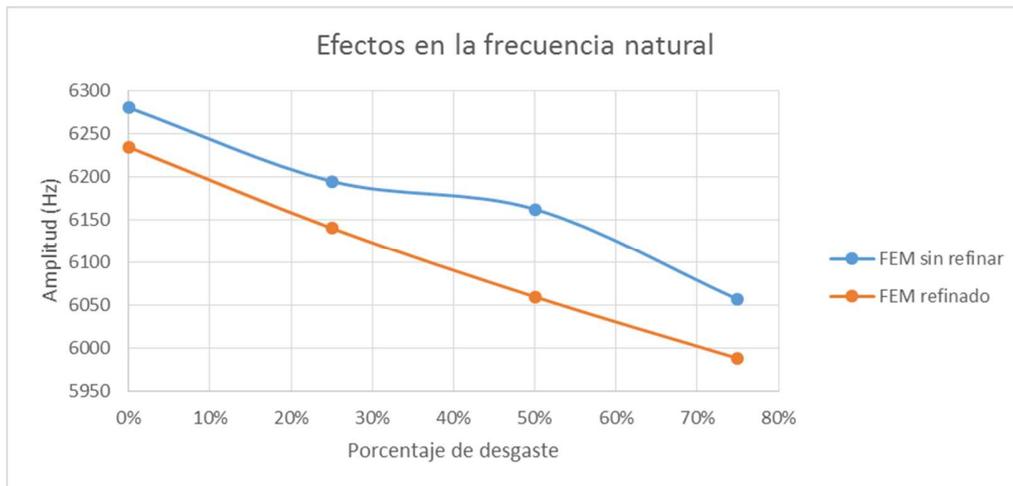


Figura (4.14) Efectos del desgaste en la frecuencia natural.

4.4 Pruebas en banco experimental de fallas mecánicas

Para realizar pruebas experimentales en el banco se instaló cada uno de los engranes fabricados con diferente porcentaje de desgaste, se realizaron diferentes tipos de pruebas debido a que el motor fue alimentado con el arrancador y variador.

Para las pruebas realizadas con el arrancador se adquirieron datos de vibración y velocidad durante 20 segundos, utilizando frecuencias de muestreo de 3 kHz y 6kHz respectivamente, para cada uno de los engranes se realizaron 5 pruebas con el propósito de observar la repetitividad en el muestreo de datos, gracias al uso de la tarjeta de control PLCUAQ las pruebas y almacenamiento de datos en archivos de texto se realizaron de forma automatizada.

Con el variador se realizaron dos tipos de pruebas diferentes para cada uno de los engranes usando frecuencias de operación del motor a 20 Hz y 65 Hz, para cada una de las pruebas a diferentes frecuencias de operación del motor se realizó la adquisición de datos durante 20 segundos con las mismas frecuencias de muestreo empleadas en las pruebas del

arrancador, de igual manera se repitió la prueba 5 veces para cada una de las fallas, y ya que el variador permite ajustar parámetros de arranque se programó una rampa de aceleración de 10 segundos que va de 0 Hz hasta la frecuencia programada, al llegar a la frecuencia establecida se mantiene 10 segundos en estado estable con esto complementa los 20 segundos de cada prueba, el control y administración de las señales lo realizó de manera autónoma la tarjeta PLCUAQ.

Con la información adquirida de vibraciones y velocidad posteriormente se hizo un análisis espectral, buscando en los espectros aquellas componentes de frecuencia que demuestren el buen o mal funcionamiento que puede existir en el banco de fallas mecánicas, este análisis espectral servirá para dar explicaciones y concluir como el desgaste en engranes afecta la frecuencia de operación del proceso.

4.4.1 Análisis espectral de pruebas con el variador a 20 Hz

Para un análisis espectral de frecuencias primero debemos de conocimiento las componentes frecuencias de interés, ya que las señales adquiridas contenían demasiada información para cada una se tomó una muestra de 4096 puntos, esto porque la FFT analiza señales potencia de dos, la muestra adquirida de cada señal corresponde al estado estable de operación del motor, así se determinó la velocidad angular ω_M a la que giraba el motor, la frecuencia de operación del piñón f_P , la frecuencia de operación del engrane f_E y la frecuencia de engranaje FE , en la Tabla 4.10 se muestran las frecuencias de operación obtenida para la caja de engranes.

<i>% desgaste</i>	$\omega_M(rpm)$	$f_P(Hz)$	$f_E(Hz)$	$FE(Hz)$
0	1177	19.62	4.99	353.23
25	1183	19.72	4.93	355.05
50	1179	19.65	4.91	353.81
75	1167	19.45	4.86	350.19

Tabla 4.10 Frecuencias de operación con variador a 20Hz.

Al obtener la FFT de las señales de vibraciones se analizó por partes las componentes de espectros haciendo énfasis en las regiones en donde se pudieran encontrar las frecuencias de interés, después de una buena búsqueda se encontró para vibraciones que en bajas frecuencias de operación el desgaste en engranes ocasiona una distorsión en las

componentes de frecuencia de FE , la medición de vibraciones sobre el eje Z del acelerómetro fue donde se presentaron mayores cambios, en la Figura (4.15) se muestra el espectro de frecuencias obtenido de las pruebas para los diferentes grados del desgaste del engrane, el espectro está centrado sobre FE , si observamos detenidamente se aprecia como incrementa la amplitud de la componente de frecuencia FE , además de que el no corresponde al valor esperado obtenido en la Tabla 4.10, este ligero desfase en frecuencia puede ser ocasionado por la excentricidad del engrane, desbalance o desalineamiento en el sistema mecánico. Otro aspecto importante a destacar en este espectro es que las componentes de frecuencia FE van acompañadas de unas bandas laterales, y si se realiza la diferencia entre FE y sus bandas laterales se obtiene la frecuencia a la cual gira el engrane dañado.

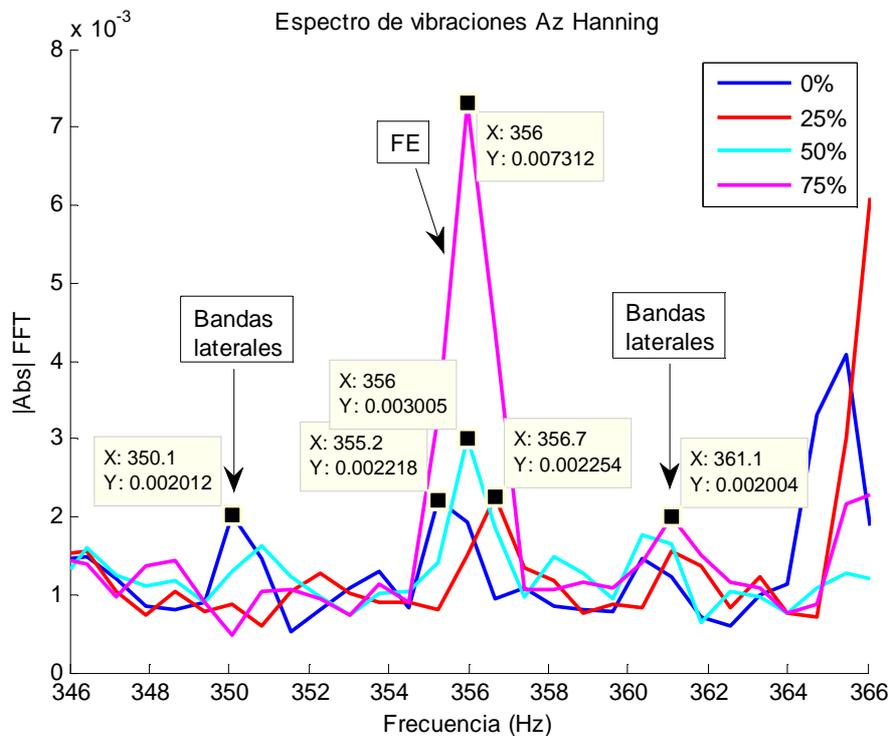


Figura (4.15) Búsqueda en espectro de frecuencias en vibraciones para FE a 20Hz.

Una búsqueda sobre el segundo armónico $2FE$ se realizó encontrando más pronunciadas las amplitudes de frecuencia, la Figura (4.16) muestra el espectro obtenido, de la misma manera las componentes de $2FE$ se encuentran acompañadas de sus bandas laterales y su amplitud va incrementando en la medida en que la falla del desgaste aparece, para el engrane con el 75% del desgaste la amplitud de $2FE$ muestra un gran cambio en

amplitud, debido a que el juego entre dientes de engrane es excesivo existiendo la posibilidad de fracturarse se sufriera una sobrecarga.

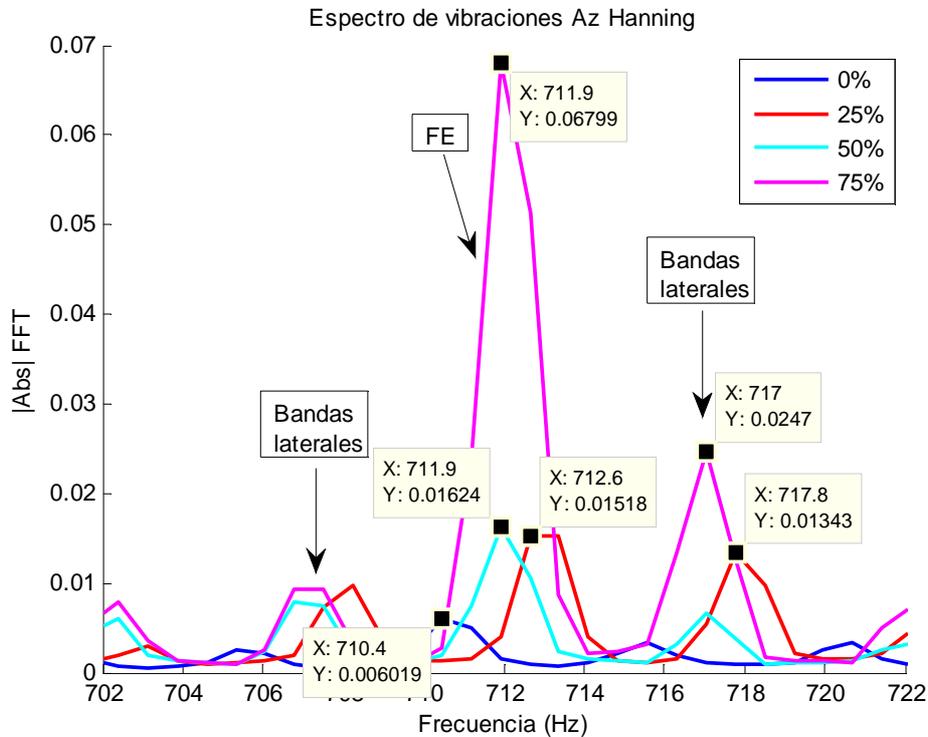


Figura (4.16) Búsqueda en espectro de frecuencias en vibraciones para 2FE a 20Hz.

4.4.2 Análisis espectral de pruebas con el Variador a 65 Hz

Para este análisis se obtuvieron también algunas frecuencias de interés relacionadas con la velocidad de giro del motor y la caja de engranes, la Tabla 4.11 muestra las frecuencias de operación del sistema mecánico cuando opero con el variador a 65 Hz.

% desgaste	$\omega_M(\text{rpm})$	$f_P(\text{Hz})$	$f_E(\text{Hz})$	$FE(\text{Hz})$
0	3843	64.05	16.01	1152.92
25	3857	64.29	16.07	1157.24
50	3849	64.16	16.04	1154.97
75	3795	63.25	15.81	1138.59

Tabla 4.11 Frecuencias de operación con variador a 65Hz.

En estas pruebas el análisis se vio limitado por la frecuencia de muestreo del acelerómetro con lo que deja fuera del alcance el análisis del segundo y tercer armónico de la frecuencia de engranaje, aun así se encontró la frecuencia de engranaje para los diferentes

niveles de daño de desgaste, en Figura (4.17) se muestra un espectro de frecuencias en el cual aparece la componente **FE** acompañado de sus bandas laterales, que exactamente la diferencia de frecuencias corresponde a la frecuencia de giro del engrane, como se observa la **FE** ya no es la esperada por sufrir un desfase, esto como ya se comento es ocasionado por la excentricidad del engrane, desbalance y desalineamiento generado del acoplamiento mecánico; de este espectro se toma como referencia la amplitud de la **FE** para comparar con la amplitud de los diferentes niveles de falla.

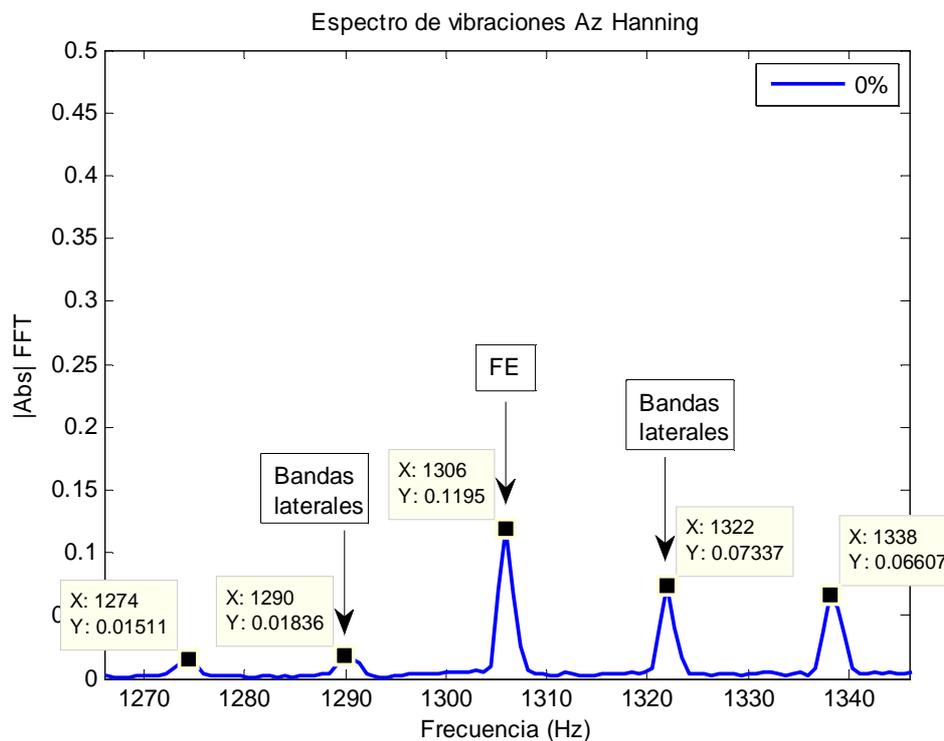


Figura (4.17) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 0%-65Hz.

De las pruebas con el engrane al 25% de desgaste se obtuvo el espectro de frecuencias mostrado en la Figura (4.18), donde la **FE** va acompañada de sus bandas laterales y el incremento en amplitud respecto con el del 0% es muy grande, esto porque cuando el engrane fue construido una de las flechas se flexiono, este fenómeno solo se observó en altas frecuencia de operación del motor, y lo que genera en los espectros de frecuencia es la amplificación en amplitud, cuando se presentes los espectros para los engranes del 50% y 75% de desgaste se observara esta diferencia.

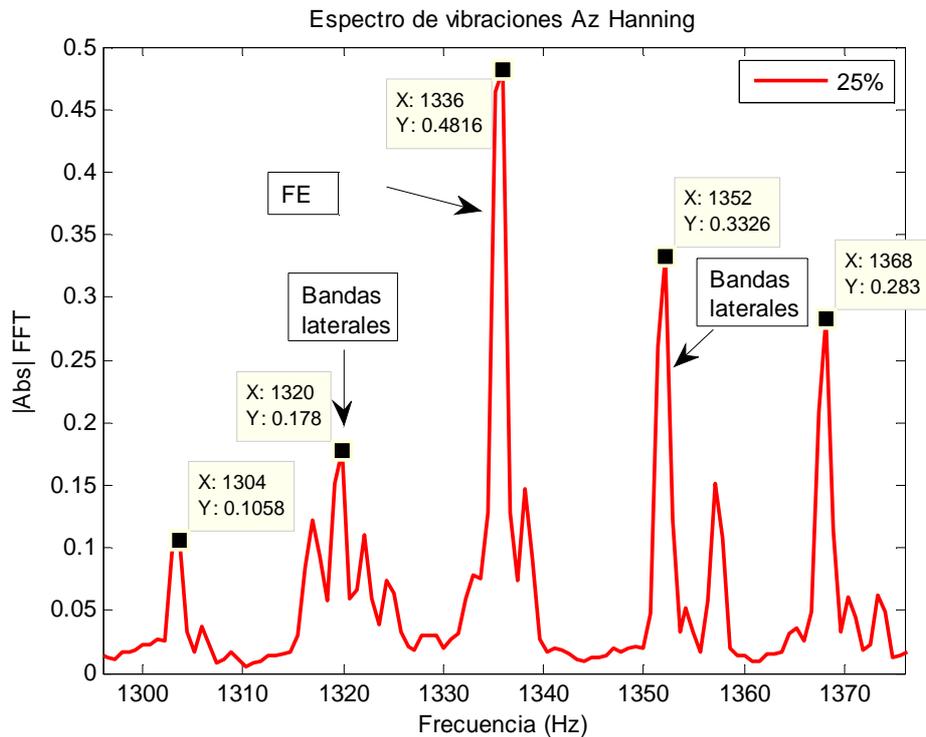


Figura (4.18) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 25%-65Hz.

En la Figura (4.19) se muestra el espectro de frecuencias para las pruebas del engrane con 50% de desgaste y en la Figura (4.20) para el 75% del desgaste, en cada una de ellas se pueden observar diferentes *FE* acompañados de sus bandas laterales como se ha visto en el resto de los espectros, considerando como referencia la amplitud de *FE* del engrane sano estos dos espectros se observa un incremento gradual en la amplitud de *FE*, estos resultados muestran gran congruencia, y si el engrane del 25% de desgaste no hubiera presentado la falla de excentricidad los resultados de incremento en amplitud serían los esperados.

De la prueba a 65 Hz se puede decir que es más difícil tratar de pronosticar la falla del desgaste, debido a que si existen otras fallas como el desbalance o desalineamiento modifican en amplitud y frecuencia a la *FE*, para un análisis más profundo en altas frecuencias de operación del motor se deben adquirir conocimientos de cómo fallas de desbalance y desalineamiento afectan a la *FE*.

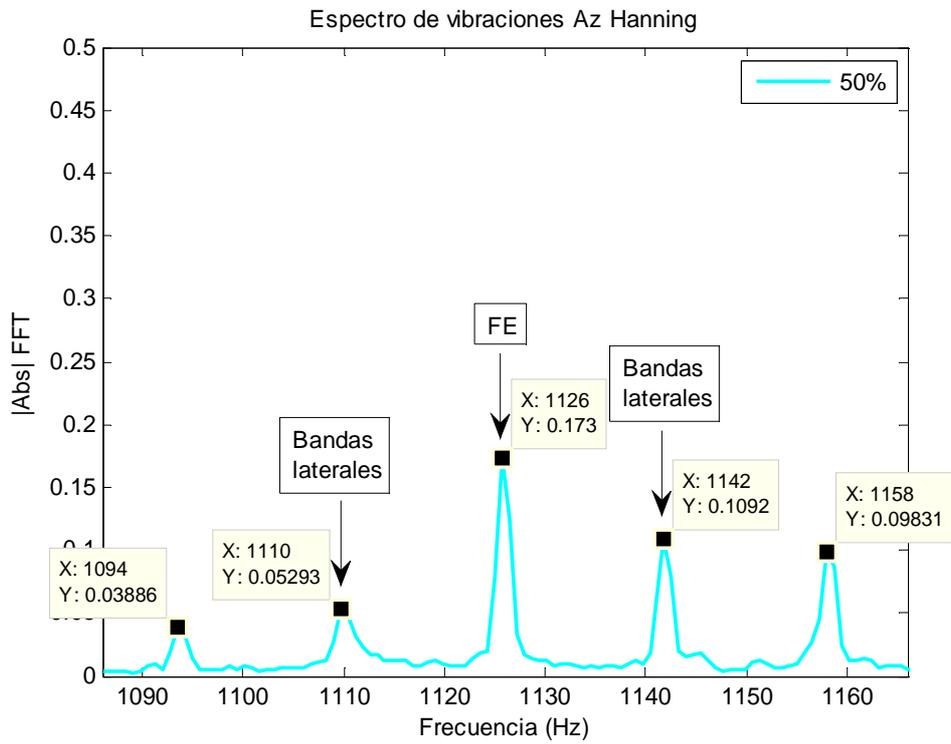


Figura (4.19) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 50%-65Hz.

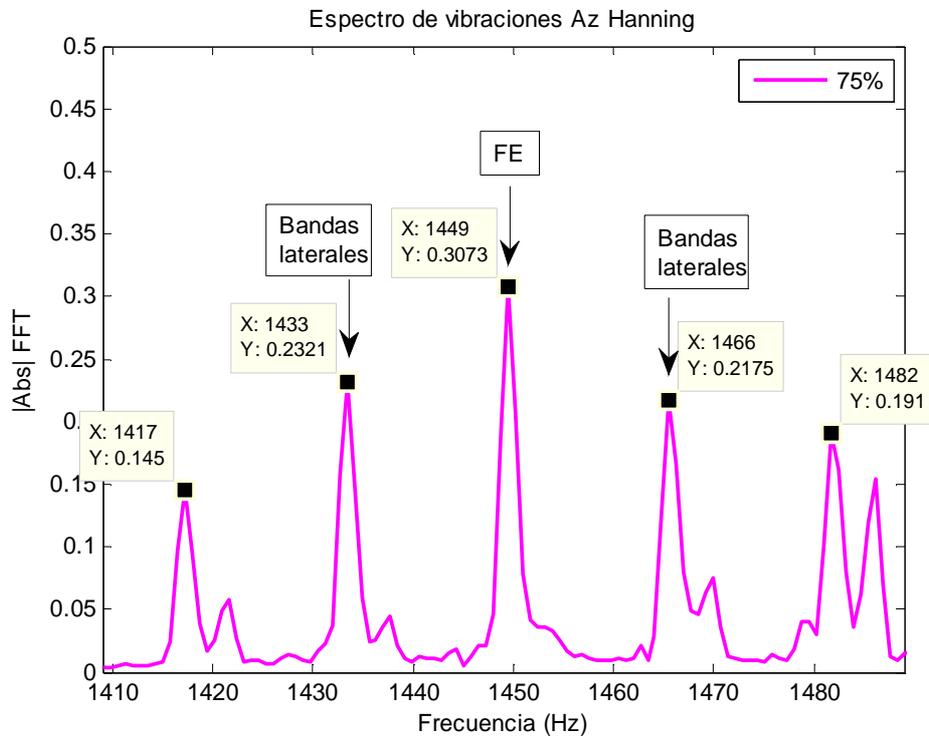


Figura (4.20) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 75%-65Hz.

4.4.3 Análisis espectral de pruebas con el arrancador

En el análisis de señales para las pruebas realizadas con el arrancador se encontraron las frecuencias de operación de la Tabla 4.12, no se pudieron observar las componentes de frecuencia de engranaje del segundo y tercer armónico, se encontraron algunas variaciones de un análisis de vibraciones sobre la frecuencia de operación del motor que es la frecuencia de la línea (60 Hz).

<i>% desgaste</i>	$\omega_M(\text{rpm})$	$f_P(\text{Hz})$	$f_E(\text{Hz})$	$FE(\text{Hz})$
0	3553	59.22	14.80	1066.00
25	3565	59.42	14.85	1069.69
50	3561	59.36	14.84	1068.54
75	3523	58.73	14.68	1057.19

Tabla 4.12 Frecuencias de operación con arrancador.

En la Figura (4.21) se muestra el espectro de frecuencias en vibraciones con el 0% de descuento, la Figura (4.22) para el 25%, la Figura (4.23) para el 50% y la Figura (4.24) para el 75% de descuento, en cada una de las figuras se identifica la **FE** y sus bandas laterales, como se observa ninguna de las **FE** concuerda con los valores esperados, estos espectros son similares a los obtenidos de las pruebas a 65 Hz, si se toma como referencia la amplitud de la **FE** del engrane con 0% de desgaste y se compara con las del 50% y 75% el incremento es gradual y para el espectro del 25% de desgaste el incremento de la amplitud fue mayor por lo ya mencionado de la excentricidad de este engrane.

Después de haber realizado el análisis de las componentes de frecuencia se puede decir que efectivamente ante la presencia de desgaste en engranes, los sistemas mecánicos se ven afectados en su frecuencia de operación, agregando además la aparición de ruido y el incremento de vibraciones mecánicas, los resultados obtenidos de las pruebas a 60 Hz y 65 Hz son buenos pero aún son mejor los de las pruebas a 20 Hz, ya que las bajas frecuencias están relacionadas con errores de manufactura como el perfil y paso del diente o flexibilidad que básicamente generan ruido, para fines de mantenimiento preventivo es más usado el análisis en bajas frecuencias.

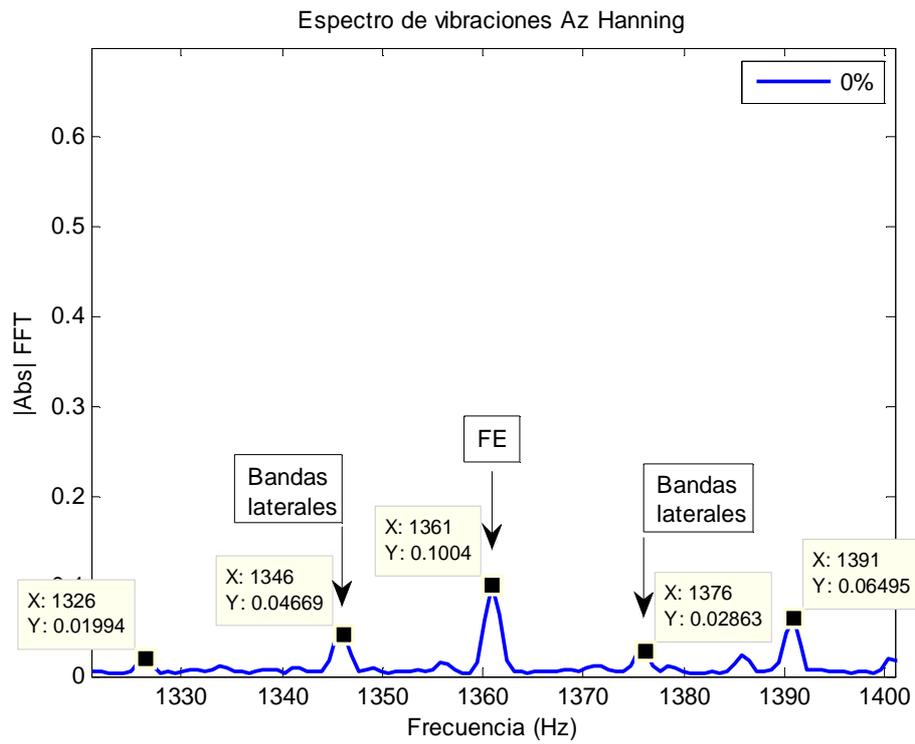


Figura (4.21) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 0%-60Hz.

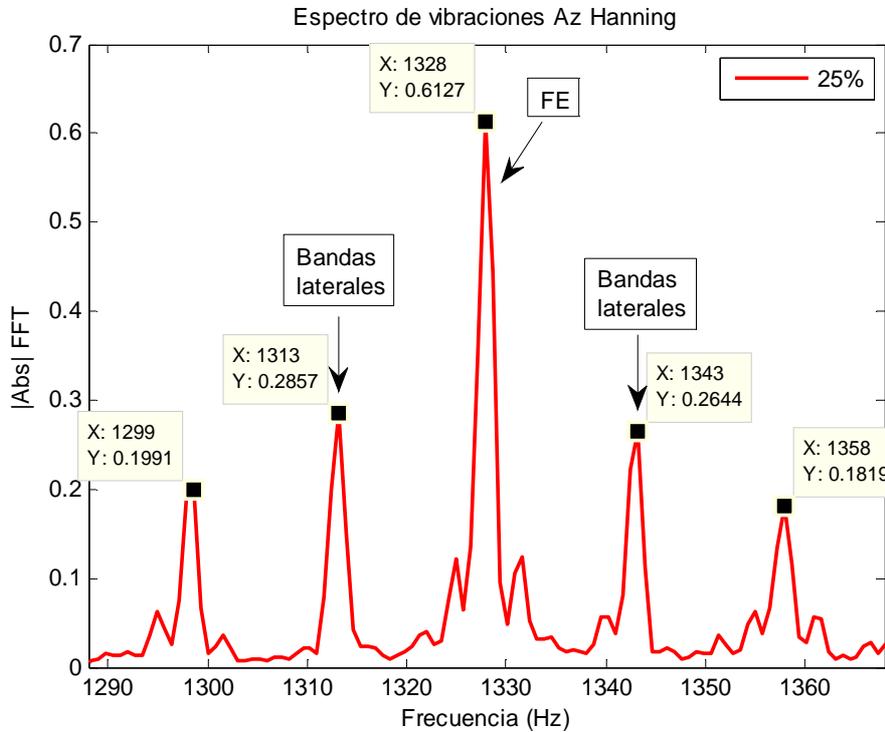


Figura (4.22) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 25%-60Hz.

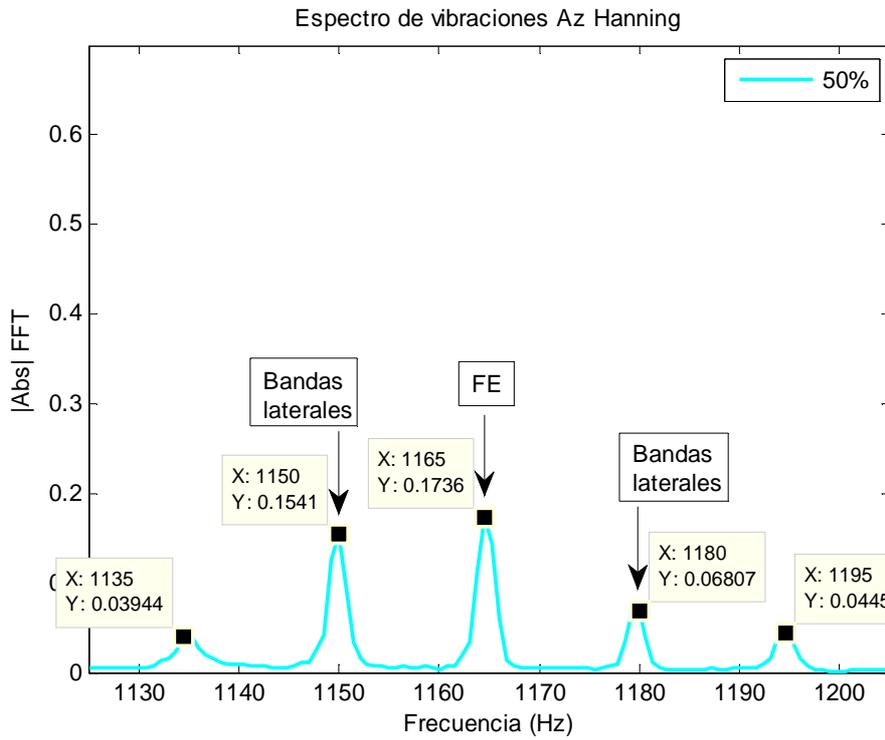


Figura (4.23) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 50%-60Hz.

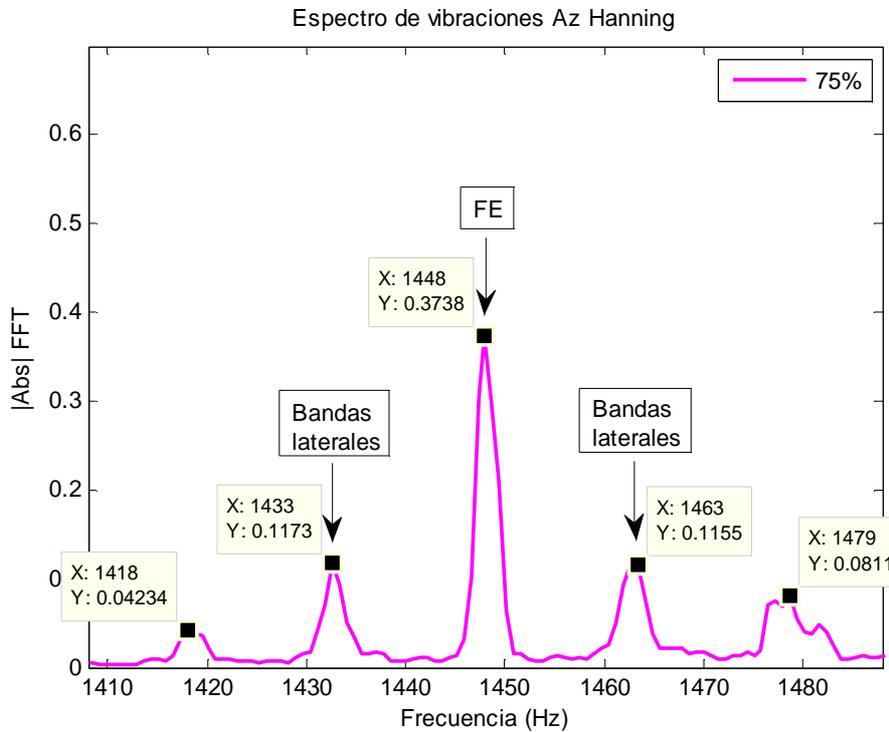


Figura (4.24) Espectro de frecuencias en vibraciones con desgaste 75%-60Hz.

Capítulo V

5 Conclusiones y perspectivas

5.1 Conclusiones

En este trabajo se presentó el análisis del desgaste engranes empleando el método de elementos finitos (FEM), con el desarrollo de códigos de programa basados en MATLAB® se logró la construcción de perfiles de diente engrane, además generar perfiles de dientes engrane en buen estado se realizó la propuesta para perfiles con diferentes grados de desgaste. Ya que la forma involuta del perfil del engrane no es tan fácil generarla de forma analítica con herramientas de programa que se generaron se puede modelar cualquier tipo de diente de engrane, y como estas herramientas describen un desarrollo analítico los perfiles generados tienen muy buena precisión.

Los modelos de perfil de diente consideraron porcentajes de desgaste del 0%, 25%, 50% y 75% respecto del espesor en la cresta del diente, para cada uno de estos modelos se obtuvieron dos mallados diferentes, uno sin refinar y otro refinado, con la programación manual del FEM se realizó un análisis estático y dinámico para cada uno de los modelos discretizados, con los resultados obtenidos se puede decir que el FEM ofrece muy buenas resultados para todos los modelos analizados, entre mayor desgaste exista en engranes se mostró el incremento gradual en los esfuerzos máximos y de igual manera para la deflexión del diente. En el análisis dinámico se encontró que la frecuencia natural se ve afectada por la

reducción del área del perfil del diente, con lo queda más que claro que anuqué el desgaste sea mínimo y por el cambio en la geometría del diente los efectos actúan sobre la frecuencia natural. En cuanto al tipo de mallado que se utilizó los modelos refinados ofrecen una respuesta más aproximada con buena linealidad.

Dentro del objetivo general también se mencionó que el desgaste en engranes dentro de un mecanismo afectaría la frecuencia de operación, del análisis espectral de las pruebas realizadas en el banco experimental se determinó ante la existencia del desgaste en engranes la frecuencia de operación se modifica, al modificarse esta frecuencia a afectar la velocidad de operación de los procesos.

Todas las herramientas programadas para la construcción de perfiles y análisis por FEM desarrolladas en este trabajo, pueden ser empleadas con gran facilidad ya que su creación fue de propósito general, el fabricar y programar las herramientas propias para análisis con FEM permitió obtener un mejor conocimiento y entendimiento de los propósitos del método.

5.2 Prospectivas

Como prospectivas para el trabajo se plantea continuar con la programación de herramientas de programación FEM, implementando otros tipos de elementos y quizás pasar del análisis en 2D a un análisis de sólidos 3D, para además de poder modelar dientes de engrane buscar implementar el análisis en otro tipo de elementos mecánicos de geometría diferente. En base a los resultados obtenidos por el método experimental se buscara implementar un plan de mantenimiento predictivo que ayude a detectar la aparición temprana del desgaste en engranes, ya que no solo los engranes pueden fallar en sistema mecánicos se integraría al plan de mantenimiento predictivo buscar otro tipo de fallas, como el desbalance, desalineamiento o problemas generados por rodamientos.

REFERENCIAS

- Ali Raad, H., Thanigaiyarasu, G. and Ramamurti, V. 2008. Effects of Natural Frequency and Rotational Speed on Dynamic Stress in Spur Gear. World Academy of Science, Engineering and Techonoly 48 2008.
- Camacho Guadalupe, J. D., Granados Hernández, E., González Velázquez, D. 2009. Análisis de la caja de reducción y transmisión para un vehículo arenero. Tesis de Licenciatura. Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
- Celika, M. 1999. Comparison of three teeth and whole models in spur gear analysis. Journal of Mechanism and Machine Theory. Vol. 34, Issue 8, November 1999, Pages 1237-1236.
- Gonzales Quintero, O., Alfonso Brindis, E. 2008. Análisis del estado tensional en el contacto de dientes de engranajes cilíndricos mediante el Método de Elementos Finitos. Revista de Ingeniería Mecánica, vol. 11, núm. 3, 2008, pp. 63-69. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.
- Gonzales Rey, G., Frechilla Fernández, P., García Martín, R. José. 2002. El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes. Ingeniería Mecánica, vol. 5, n1, pp. 55-67. 2002.
- Graham Kelly S. 2012. Mechanical vibrations: Theory and application. CENGAGE Learning. ISBN: 978-1-4390-6212-8.
- Hernández Albañil, H., Espejo Mora, E. 2002. Mecánica de fractura y análisis de falla. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Primera Edición. ISBN: 958-701-242-9.
- Hibbeler R. C. 2006. Mecánica de materiales. Sexta edición. Prentice-Hall. ISBN: 970-26-0654-3.
- Hutton David, V. 2004. Fundamentals of finite element analysis. First Edition. McGraw-Hill. ISBN: 0-07-112231-1.
- International Standards Organization (ISO) 6336. 1996. Calculation of load capacity of spur and helical gears.
- Khennane A. 2013. Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB® and Abaqus. CRC Press. ISBN: 978-1-4665-8021-3.
- Kwon Young W., Bang Hyochoong. 1997. The finite element method using MATLAB®. CRC Press. ISBN: 0-8493-9653-0.
- Lozano Guzmán, Alejandro A., Jáuregui Correa Juan Carlos A., Las vibraciones mecánicas en el mantenimiento predictivo. Primera Edición 2013. Producción FUNDAp. ISBN: 978-607-96048-8-2.

- Mabie Hamilton, H., Reinholtz, Charles F. 1987. Mechanisms and dynamics of machinery. Fourth edition. John Wiley & Sons. ISBN: 13 978-0-471-80237-2.
- Moaveni, S. 1999. Finite element analysis-Theory and applications with ANSYS. Prentice-Hall, Inc. ISBN: 0-13-785098-0.
- Nakasone, Y., Yoshimoto, S. 2006. Engineering analysis with ANSYS software. Elsevier Butterwoth-Heinemann. First published. ISBN: 0-7506-6875-X.
- Norton, Robert L. 2008. Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines. Fourth Edition. McGraw-Hill. ISBN: 978-0-07-312158-1.
- Ramamurti, V., Ananda, Rao M. 1988. Dynamic analysis of spur gear teeth. Journal of Computers & Structures. Vol. 29, Issue 5, 1988, 831-843.
- Rao, S. S. 1999. The finite element method in engineering. Butterworth-Heinemann. ISBN: 0-7506-7072-X.
- Rao, S. S. 2010. Mechanical Vibrations. Fifth Edition. Prentice-Hall. ISBN: 978-0-13-212819-3.
- Rodríguez Valdez, J. 2006. Determinación de los esfuerzos en un dientes de un rueda tipo catarina por los métodos fotoelástico y del elemento finito. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
- Sandoval Pineda, J. M. 2004. Análisis de esfuerzos en un diente de engrane recto para bomba hidráulica aplicando el método fotoelástico y el método del elemento finito. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
- Seegerlind, Larry J. 1984. Applied finite element analysis. Second Edition. John Wiley & Sons.
- Shigley, Joseph E., Mischke, Charles R. 2002. Diseño en ingeniería mecánica. Sexta Edición. Mc Graw Hill. ISBN: 970-10-3646-8.
- Shigley Edward, J., Uicker, J. J. 1997. Teoría de máquinas y mecanismos. McGraw-Hill. Primera Edición. ISBN: 0-07-056884-7.

APÉNDICE

A. Programa y funciones para la construcción de perfiles involuta de engrane

Listado A.1 Programa principal para generar perfiles de engranes.

```
clc
clear all
close all

%%% Parámetros de diseño %%%
%%% Número de dientes %%%
N=18;
%%% Paso diametral %%% (dientes por pulgada) Pd=N/D
Pd=9;
%%% Angulo de presión %%% (rad) 20°
phi=20*pi/180;
%%% Número de puntos para la curva involuta %%%
npi=10;
%%% Número de puntos para la cresta del diente %%%
npc=5;
%%% Diente largo (0) o diente corto (1) %%%
st=0;

%%% Cálculo de medidas %%%
%%% Diámetro de paso %%% (pulgadas)
D=N/Pd;
%%% Modulo %%% (milímetros) o m=25.4/Pd
m=25.4*D/N;

%%% Paso circular %%% (pulgadas)
p=pi*D/N;
if st == 0
    %%% Addendum %%% (pulgadas)
    a=1.00/Pd;
    %%% Dedendum %%% (pulgadas)
    b=1.25/Pd;
end
if st == 1
    %%% Addendum %%% (pulgadas)
    a=0.75/Pd;
    %%% Dedendum %%% (pulgadas)
    b=1.00/Pd;
end

%%% Radio del círculo de paso %%%
rp=D/2;
%%% Radio del círculo base %%%
rb=rp*cos(phi);
%%% Radio del círculo de Addendum %%%
ra=rp+a;
%%% Radio del círculo de Dedendum %%%
rd=rp-b;
%%% Espesor del diente en el círculo de paso %%%
tp=p/2;

%%% Función involuta inv(phi)=tan(phi)-phi %%%
inv_phi=tan(phi)-phi;
```

```

%      GP - vector (radio; función involuta; Angulo del espesor)
%      DOE - ángulo medio del diente
%      TAP - ángulo de posición inicial del diente

[p q]=size(GP);

for i=1:q
    %%% Coordenadas izquierdas %%%
    x1(i)=GP(1,i)*cos(-GP(2,i)+TAP+DOE);
    y1(i)=GP(1,i)*sin(-GP(2,i)+TAP+DOE);

    %%% Coordenadas derechas %%%
    x2(i)=GP(1,i)*cos(GP(2,i)+TAP-DOE);
    y2(i)=GP(1,i)*sin(GP(2,i)+TAP-DOE);
end
X(1,:)=x1;
X(2,:)=x2;
Y(1,:)=y1;
Y(2,:)=y2;

```

B. Programas desarrollados empleando el FEM

Listado B.1 Programa para análisis estático del diente de engrane.

```
clc
clear all
close all

%%% Cargar archivos %%%
dat1=load('Cgear75%1.txt');
dat2=load('Tgear75%1.txt');
dat3=load('Egear75%1.txt');

%%% datos de entrada %%%
%número de elementos
[m,n]=size(dat2);
nel=m;
%número de nodos
[m,n]=size(dat1);
nnod=m;
%número de nodos por elemento
nnel=3;
%número de grados de libertad por elemento
ndof=2;
%total de grados de libertad
sdof=nnod*ndof;

%coordenadas de los nodos (in)
Ncoord=dat1;
Ncoord(:,2)=Ncoord(:,2)-min(Ncoord(:,2));

%matriz de conectividad
conect(:,1)=dat2(:,1);
conect(:,2)=dat2(:,2);
conect(:,3)=dat2(:,3);

%nodos de los bordes
edg(:,1)=dat3(:,1);
edg(:,2)=dat3(:,2);

%espesor del diente (in)
t=5/8;

%módulo de elasticidad (lb/in^2)
E=29.0075e6;

%Poisson's ratio
v=0.285;

%inicialización de la matriz de rigidez global
KK=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de la matriz de rigidez local
K=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización del vector fuerza
F=zeros(sdof,1);

%inicialización del vector de posición
index=zeros(nnel*ndof,1);

%definición de condiciones frontera
k=1;
```

```

for i=1:nnod
    if Ncoord(i,2) == min(Ncoord(:,2))
        bcdof(k)=(i*2)-1;%x direction
        k=k+1;
        bcdof(k)=(i*2);%y direction
        k=k+1;
    end
end

%definición de fuerzas nodales (lb)
k=1;
for i=1:nnod
    if Ncoord(i,2) > max(Ncoord(:,2))-0.003
        NB(k)=i;
        k=k+1;
    end
end
n=length(NB);
for i=1:n
    NC(i,1)=NB(i);
    NC(i,2)=Ncoord(NB(i),1);
end
[m n]=max(NC(:,2));
F(NC(n,1)*2-1)=-50;%x direction

figure
title('b');
xlabel('Pulgadas')
ylabel('Pulgadas')
xlim([-0.12 0.12])
ylim([-0.01 0.28])

%ensamble de los elementos
for i=1:nel
    %dibujar cada nodo
    line([Ncoord(conect(i,1),1),Ncoord(conect(i,2),1)],...
[Ncoord(conect(i,1),2),Ncoord(conect(i,2),2)], 'Color','b', 'LineWidth',2);

    line([Ncoord(conect(i,2),1),Ncoord(conect(i,3),1)],...
[Ncoord(conect(i,2),2),Ncoord(conect(i,3),2)], 'Color','b', 'LineWidth',2);

    line([Ncoord(conect(i,3),1),Ncoord(conect(i,1),1)],...
[Ncoord(conect(i,3),2),Ncoord(conect(i,1),2)], 'Color','b', 'LineWidth',2);

    hold on

    %nd=vector de nodos evaluados respecto a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);
    nd(3)=conect(i,3);

    %index=vector de posición asociado al grado de libertad
    index=position(nd,nnel,ndof);

    %cálculo de la matriz de rigidez elemental
    xi=Ncoord(conect(i,1),1); yi=Ncoord(conect(i,1),2);
    xj=Ncoord(conect(i,2),1); yj=Ncoord(conect(i,2),2);
    xk=Ncoord(conect(i,3),1); yk=Ncoord(conect(i,3),2);

    [K,A,D,B]=triangular_stiffness(E,v,t,xi,yi,xj,yj,xk,yk,0);

```

```

    %ensamble de las matrices
    KK=assemble(K, KK, index);

end
grid

%aplicar condiciones frontera
[KK]=boundary1(KK, bcdof);
[F]=boundary2(F, bcdof);

%solución para los desplazamientos
U=KK\F;

%desplegar desplazamientos
[U]=displacements(U, bcdof, sdof);

%dibujar elementos deformados
%factor de amplificación para observar desplazamientos
a=1;
for i=1:nel
    %dibujar cada elemento
    line([Ncoord(conect(i,1),1) + a*U(conect(i,1)*2-1) , Ncoord(conect(i,2),1)
+ a*U(conect(i,2)*2-1)], ...
        [Ncoord(conect(i,1),2) + a*U(conect(i,1)*2) , Ncoord(conect(i,2),2)
+ a*U(conect(i,2)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 2);

    line([Ncoord(conect(i,2),1) + a*U(conect(i,2)*2-1) , Ncoord(conect(i,3),1)
+ a*U(conect(i,3)*2-1)], ...
        [Ncoord(conect(i,2),2) + a*U(conect(i,2)*2) , Ncoord(conect(i,3),2)
+ a*U(conect(i,3)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 2);

    line([Ncoord(conect(i,3),1) + a*U(conect(i,3)*2-1) , Ncoord(conect(i,1),1)
+ a*U(conect(i,1)*2-1)], ...
        [Ncoord(conect(i,3),2) + a*U(conect(i,3)*2) , Ncoord(conect(i,1),2)
+ a*U(conect(i,1)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 2);

    hold on
end

%cálculo de esfuerzos y deformaciones
for i=1:nel
    %nd=vector de nodos asociados a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);
    nd(3)=conect(i,3);

    %index=vector de posición asociado al grado de libertad
    index=position(nd, nnel, ndof);

    %esfuerzos
    xi=Ncoord(conect(i,1),1); yi=Ncoord(conect(i,1),2);
    xj=Ncoord(conect(i,2),1); yj=Ncoord(conect(i,2),2);
    xk=Ncoord(conect(i,3),1); yk=Ncoord(conect(i,3),2);

    [K,A,D,B]=triangular_stiffness(E,v,t,xi,yi,xj,yj,xk,yk,0);

    sigma(i,:)=D*B*[U(index(1));U(index(2));U(index(3));U(index(4));U(index(5));U(i
index(6))];

    epsilon(i,:)=B*[U(index(1));U(index(2));U(index(3));U(index(4));U(index(5));U(i
index(6))];
end

```

```

%graficar esfuerzos
figure
xlabel('Pulgadas')
ylabel('Pulgadas')
xlim([-0.12 0.12])
ylim([-0.01 0.28])
axis_stress=2;%1-sigma_xx; 2-sigma_yy; 3-tau_xy
stress=sigma(:,axis_stress);
cmin=min(stress);
cmax=max(stress);
caxis([cmin cmax])
patch('Faces',conect,'Vertices',Ncoord,'FaceVertexCData',stress,'Facecolor','flat','Marker','o')
colorbar;

```

Listado B.2 Programa para análisis dinámico del diente de engrane.

```

clc
clear all
close all

%%% Cargar archivos %%%
dat1=load('Cgear0%1.txt');
dat2=load('Tgear0%1.txt');
dat3=load('Egear0%1.txt');

%%% datos de entrada %%%
%número de elementos
[m,n]=size(dat2);
nel=m;
%número de nodos
[m,n]=size(dat1);
nnod=m;
%número de nodos por elemento
nnel=3;
%número de grados de libertad por nodo
ndof=2;
%total de grados de libertad
sdof=nnod*ndof;

%coordenadas de los nodos
Ncoord=dat1;
Ncoord(:,2)=Ncoord(:,2)-min(Ncoord(:,2));

%matriz de conectividad
conect(:,1)=dat2(:,1);
conect(:,2)=dat2(:,2);
conect(:,3)=dat2(:,3);

%nodos de los bordes
edg(:,1)=dat3(:,1);
edg(:,2)=dat3(:,2);

%espesor (in)
t=5/8;

%módulo de elasticidad (lb/in^2)
E=29.0075e6;

```

```

%densidad de masa (lb/in^3)
rho=0.2841;

%Poisson's ratio
v=0.285;

%inicialización de matriz de rigidez global
KK=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de matriz de rigidez local
K=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización de matriz de masas global
MM=zeros(sdof,sdof);

%inicialización de matriz de masas local
M=zeros(nnel*ndof,nnel*ndof);

%inicialización del vector de posición
index=zeros(nnel*ndof,1);

%definición de condiciones frontera
k=1;
for i=1:nnod
    if Ncoord(i,2) == min(Ncoord(:,2))
        bcdof(k)=(i*2)-1;%x direction
        k=k+1;
        bcdof(k)=(i*2);%y direction
        k=k+1;
    end
end

%ensamble de elementos
for i=1:nel
    %dibujar cada elemento
    line([Ncoord(conect(i,1),1),Ncoord(conect(i,2),1)],...
[Ncoord(conect(i,1),2),Ncoord(conect(i,2),2)], 'Color','b','LineWidth',2);

    line([Ncoord(conect(i,2),1),Ncoord(conect(i,3),1)],...
[Ncoord(conect(i,2),2),Ncoord(conect(i,3),2)], 'Color','b','LineWidth',2);

    line([Ncoord(conect(i,3),1),Ncoord(conect(i,1),1)],...
[Ncoord(conect(i,3),2),Ncoord(conect(i,1),2)], 'Color','b','LineWidth',2);

    hold on

    %nd=vector de nodos evaluados respecto a la conectividad
    nd(1)=conect(i,1);
    nd(2)=conect(i,2);
    nd(3)=conect(i,3);

    %index=vector de posición asociado al grado de libertad
    index=position(nd,nnel,ndof);

    %cálculo de matrices elementales
    xi=Ncoord(conect(i,1),1);    yi=Ncoord(conect(i,1),2);
    xj=Ncoord(conect(i,2),1);    yj=Ncoord(conect(i,2),2);
    xk=Ncoord(conect(i,3),1);    yk=Ncoord(conect(i,3),2);

    [K,A,D,B]=triangular_stiffness(E,v,t,xi,yi,xj,yj,xk,yk,1);

```

```

[M]=triangular_mass(rho,t,A,1);

%ensamble de matrices
KK=assemble(K, KK, index);
MM=assemble(M, MM, index);
end
grid

%aplicar condiciones frontera
[KK]=boundary1(KK,bcdof);
[MM]=boundary1(MM,bcdof);

%resolver eigen-valores (frecuencia natural)
[V,D]=eig(KK,MM);%D eigen-valores, V eigen-vectores

for i=1 : length(D)
    wn(i)=sqrt(D(i,i));%rad/sec
end
freqHz=wn/(2*pi);%Hz

%graficar modos de vibración
n_shape=1;
as=1;
for i=1:nel
    if n_shape > length(V)
        n_shape=length(V);
    end
    [Us]=displacements(V(:,n_shape),bcdof,sdof);
    %dibujar cada elemento
    line([Ncoord(conect(i,1),1) + Us(conect(i,1)*2-1) , Ncoord(conect(i,2),1) +
Us(conect(i,2)*2-1)],...
        [Ncoord(conect(i,1),2) + Us(conect(i,1)*2) , Ncoord(conect(i,2),2) +
Us(conect(i,2)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 1);

    line([Ncoord(conect(i,2),1) + Us(conect(i,2)*2-1) , Ncoord(conect(i,3),1) +
Us(conect(i,3)*2-1)],...
        [Ncoord(conect(i,2),2) + Us(conect(i,2)*2) , Ncoord(conect(i,3),2) +
Us(conect(i,3)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 1);

    line([Ncoord(conect(i,3),1) + Us(conect(i,3)*2-1) , Ncoord(conect(i,1),1) +
Us(conect(i,1)*2-1)],...
        [Ncoord(conect(i,3),2) + Us(conect(i,3)*2) , Ncoord(conect(i,1),2) +
Us(conect(i,1)*2)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 1);

    hold on
end

```

C. Funciones desarrolladas para el FEM

Listado C.1 Función matriz de rigidez triangular.

```
function [K,A,D,B]=triangular_stiffness(E,v,t,xi,yi,xj,yj,xk,yk,op)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% Propósito:
%     Calcular la matriz de rigidez para un elemento triangular
%
% Descripción de variables:
%     E - modulo de elasticidad
%     v - Poisson's ratio
%     t - espesor
%     xi,yi - coordenadas nodo 1
%     xj,yj - coordenadas nodo 2
%     xk,yk - coordenadas nodo 3
%     p - '0' esfuerzo plano
%     p - '1' deformación plana

%área del elemento
A = 0.5 * det([ 1 xi yi ;...
               1 xj yj ;...
               1 xk yk ]);

m11 = (xj*yk - xk*yj)/(2*A);
m21 = (xk*yi - xi*yk)/(2*A);
m31 = (xi*yj - yi*xj)/(2*A);

m12 = (yj - yk)/(2*A);
m22 = (yk - yi)/(2*A);
m32 = (yi - yj)/(2*A);
m13 = (xk - xj)/(2*A);
m23 = (xi - xk)/(2*A);
m33 = (xj - xi)/(2*A);

B = [ m12    0  m22    0  m32    0 ;...
      0  m13    0  m23    0  m33 ;...
      m13  m12  m23  m22  m33  m32 ];

if op == 0
    D = (E/(1-v^2)) * [ 1  v      0 ;...
                      v  1      0 ;...
                      0  0  0.5*(1-v) ];
elseif op == 1
    D = (E/((1+v)*(1-2*v))) * [1-v  v      0 ;...
                              v  1-v    0 ;...
                              0  0  0.5-v ];
end

K=t*A*B'*D*B;
```

Listado C.2 Función matriz de masas triangular.

```
function [M]=triangular_mass(rho,t,A,op)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% Propósito:
%     Calcular la matriz de masas de un element triangular
%
% Descripción de variables
%     rho - densidad de masa
```

```

%      t - espesor
%      A - area del elemento
%      p - '0' matriz de masas consistente
%      p - '1' matriz de masas concentradas

if op == 0

    M = (rho*A*t/12) * [ 2 0 1 0 1 0 ;...
                        0 2 0 1 0 1 ;...
                        1 0 2 0 1 0 ;...
                        0 1 0 2 0 1 ;...
                        1 0 1 0 2 0 ;...
                        0 1 0 1 0 2 ];

elseif op == 1
    M = (rho*A*t/3)*eye(6);
end

```

Listado C.3 Función ensamblar.

```

function [KK]=assemble(K, KK, index)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% Propósito:
%   Ensamblar matrices locales en un Sistema global
%
% Descripción de variables:
%   K - matriz elemental
%   KK - Sistema global
%   index - vector que posiciona el número de grado de libertad
%   ndof - número de grados de libertad por nodo

n=length(index);
for i=1:n
    ii=index(i);
    for j=1:n
        jj=index(j);
        KK(ii, jj)=KK(ii, jj)+K(i, j);
    end
end
end

```

Listado C.4 Función posición.

```

function [index]=position(nd, nnel, ndof)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% Propósito:
%   Calcular el grado de libertad de cada nodo
%
% Descripción de variables:
%   nd - vector de nodos asociados a la conectividad
%   nnel - número de nodos por elemento
%   ndof - número de grados de libertad por nodo

k=0;
for i=1:nnel
    st=(nd(i)-1)*ndof;
    for j=1:ndof
        k=k+1;
        index(k)=st+j;
    end
end
end

```

Listado C.5 Función condiciones 1.

```
function[KK]=boundary1(KK,bcdof)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%   Propósito:
%       Aplicar condiciones frontera a un Sistema o matriz
%
%   Descripción de variables:
%       K - matriz global
%       bcdof - vector que contiene el número de grado de libertad restringido

n=length(bcdof);
bcdofaux=bcdof;
for i=1:n
    for j=1:n-1
        if(bcdof(j) < bcdof(j+1))
            bcdofaux(j)=bcdof(j+1);
            bcdofaux(j+1)=bcdof(j);
        end
        bcdof=bcdofaux;
    end
end

for i=1:n
    KK(bcdof(i),:)=[];
    KK(:,bcdof(i))=[];
end
KK=KK;
```

Listado C.6 Función condiciones 2.

```
function[F]=boundary2(F,bcdof)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%   Propósito:
%       Aplicar condiciones frontera a un vector
%
%   Descripción de variables:
%       K - vector de fuerzas
%       bcdof - vector que contiene el número de grado de libertad restringido

n=length(bcdof);
bcdofaux=bcdof;
for i=1:n
    for j=1:n-1
        if(bcdof(j) < bcdof(j+1))
            bcdofaux(j)=bcdof(j+1);
            bcdofaux(j+1)=bcdof(j);
        end
        bcdof=bcdofaux;
    end
end

for i=1:n
    F(bcdof(i),:)=[];
end
KK=KK;
```

Listado C.7 Función desplazamientos.

```
function[U]=displacements(U,bcdof,sdof)
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%   Propósito:
%       Mostrar desplazamiento para todos los nodos
%
%   Descripción de variables:
%       U - Vector de desplazamientos con condiciones frontera
%       bcdof - vector que contiene el número de grado de libertad restringido
%       sdof - total de grados de libertad

n=length(bcdof);
Uaux=ones(sdof,1);
k=1;

for i=1:n
    Uaux(bcdof(i))=0.0;
end

for i=1:sdof
    if (Uaux(i) == 0.0)
        Uaux(i)=Uaux(i);
    else
        Uaux(i)=U(k);
        k=k+1;
    end
end
U=Uaux;
```

D. Artículos publicados



CONSTANCIA

Artículo: *“Estudio comparativo de análisis modal entre métodos Euler-Bernoulli, FEM y experimental para una viga en voladizo”*

Autores: **Juan José Saucedo Dorantes, Juan Primo Benítez Rangel, Juan Carlos Jáuregui Correa, Roque Alfredo Osornio Ríos, René De Jesús Romero Troncoso**

Id. artículo: **293**

Área: **Sistemas Computacionales**

El Comité Técnico del XI Congreso Internacional Sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET 2014, que se llevó a cabo en la ciudad de Cuernavaca, Morelos, México, del 2 al 4 de abril de 2014, hace constar que el artículo citado fue presentado de acuerdo con el programa técnico del congreso e incluido en las memorias del mismo.

La presente constancia se expide para los fines legales que a los autores convengan.

Cuernavaca, Morelos, México a 4 de Abril de 2014.

Atentamente

Dr. Jorge Guillermo Calderón Guízar
Presidente del Comité Técnico CIINDET 2014





Estudio comparativo de análisis modal entre métodos Euler-Bernoulli, FEM y experimental para una viga en voladizo

J. J. Saucedo-Dorantes, J. P. Benítez-Rangel, J. C. Jáuregui-Correa, R. A. Osornio-Rios, R. J. Romero-Troncoso.

Resumen: este trabajo presenta el desarrollo de tres métodos para calcular las frecuencias naturales en una viga en voladizo, uno completamente teórico basado en la ecuación de Euler-Bernoulli, otro basado en el método de elementos finitos (FEM-Finite Element Method) para el que se desarrollaron herramientas de programación bajo MATLAB, y un método experimental se implementó para comparar los resultados con los dos primeros métodos.

Palabras Clave: viga en voladizo, Euler-Bernoulli, FEM.

Abstract: This paper presents the development of three methods used for computing natural frequencies in a cantilever beam; one of them is completely based on the Euler-Bernoulli theory equation, and the other is based on the finite element method (FEM) for the latter, it was necessary to generate programming tools using MATLAB, and an experimental method was also implemented in order to compare the solution with the first two methods.

Keywords: cantilever beam, Euler-Bernoulli, FEM.

Introducción

Los sistemas mecánicos en general están constituidos de componentes estructurales, poseedores de elasticidad y masa distribuida, por ejemplo las barras y las vigas. El estudio de vibraciones ha adquirido gran importancia en el diseño de numerosos elementos, tanto en el ámbito industrial como fuera de éste, ya que la presencia de vibraciones puede acarrear múltiples problemas, como aparición de ruido, colapso de elementos y modificación en la frecuencia de

operación.

Las barras, vigas y otros componentes estructurales, están considerados como sistemas continuos que poseen infinitos grados de libertad; las vibraciones de estos sistemas están gobernadas por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran variables tanto del tiempo como de coordenadas espaciales [1].

El análisis modal se ha convertido en una herramienta para la invención y mejora en diseños de estructuras, la mayoría de las aplicaciones reportadas han sido en el campo de la ingeniería [2]. Algunos estudios dedicados a vigas han sido realizados con la finalidad proponer las mejores condiciones de modelado [3-5], además de que existen sistemas que pueden llegar a modelarse como una viga, por ejemplo el diente de un engrane o algunos puentes. También, ya han sido propuestas algunas técnicas en la detección de las frecuencias naturales en sistemas mecánicos [6].

El FEM es un método numérico que puede ser usado para determinar las frecuencias de sistemas bajo ciertas condiciones de carga [7], existen software aplicados a este estudio como ANSYS y Abaqus que para análisis más detallados sus soluciones están limitadas, ya que no permiten conocer el comportamiento de las matrices de masas y rigidez de los elementos. Usar herramientas de programación como MATLAB es una buena opción para desarrollar el FEM de manera rápida, ya que gran parte de la algebra del método es basada en operaciones de matrices y vectores MATLAB ofrece una manipulación sencilla, quedando la opción de acceder a la información que guarda cada elemento.

Se realiza la comparativa de tres métodos diferentes para la obtención de las frecuencias naturales en una viga, con la finalidad de comparar sus resultados y mostrar la potencialidad de cada uno de los métodos.

Juan José Saucedo Dorantes (chino_8660@hotmail.com), Juan Primo Benítez Rangel, Juan Carlos Jáuregui Correa, Roque Alfredo Osornio Rios. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Campus San Juan del Río, Río Moctezuma 249, C.P. 76807, San Juan del Río, Qro. www.uaq.mx

Rene de Jesús Romero Troncoso. División de Ingeniería - Salamanca, Universidad de Guanajuato, Carr. Salamanca - Valle de Santiago km 3.5+1.8 Com. De Palo Blanco, 36700 Salamanca Gto., México.



Modelo clásico mediante la ecuación de Euler-Bernoulli

El modelo matemático de Euler-Bernoulli de la viga en voladizo se obtiene con las consideraciones de que la viga tiene propiedades físicas y geométricas constantes, la propiedad física del material linealmente elásticas, la viga es esbelta y no se considera esfuerzo cortante ni la inercia rotacional, en la Figura 1 se muestra un esquema de una viga en voladizo con módulo de elasticidad E , área transversal A , momento de inercia I , densidad de masa ρ y longitud L .

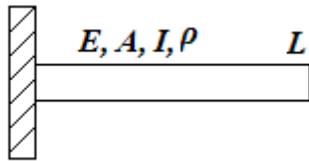


Figura 1. Viga en voladizo.

La ecuación diferencial de vibraciones laterales para la viga mostrada en la Figura 1 se define como [8]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

La solución propuesta a (1) está dada por:

$$y(x, t) = \phi_n(x) e^{j\omega_n t} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \phi_n(x)}{\partial x^4} - \beta_n^4 \phi_n(x) = 0 \tag{3}$$

Dónde:

$$\beta_n^4 = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Definiendo las condiciones iniciales para el extremo empotrado y el extremo libre como:

$$x = 0: \phi = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = 0$$

$$x = L: M = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$V = 0 \Rightarrow \frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace y resolviendo se obtiene:

$$\phi_n(x) = e^{sx}; \beta_4 = s^4 \Rightarrow s = \pm\beta, \pm j\beta \tag{4}$$

Entonces la ecuación de desplazamiento de la viga es:

$$\phi_n(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \tag{5}$$

Dónde:

$$A, B, C, D = \text{operadores constantes}$$

$$\beta = \text{velocidad angular}$$

$$\phi_n(x) = \text{deflexión lateral de } x$$

Con condiciones frontera:

$$A = -C \text{ y } B = -D$$

La ecuación (5) se transforma en:

$$\phi_n(x) = C [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] + D [\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)] \tag{6}$$

Reduciendo (6) se obtiene la expresión:

$$\cos(\lambda) \cosh(\lambda) + 1 = 0 \tag{7}$$

Dónde:

$$\lambda = \beta L$$

Los valores propios de λ que satisfacen a (7) ayudan a calcular las frecuencias naturales, usándolos en la siguiente ecuación:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} ; n = 1, 2, \dots \tag{8}$$

Modelo FEM para una viga con conexiones nodales

Típicamente las estructuras o elementos pueden ser discretizados y requerir de alguna unión mecánica para



su ensamble, para este propósito cada elemento está representado en sus coordenadas nodales como lo muestra la Figura 2, la deformación de la viga debe ser continua, para satisfacer los requerimientos de continuidad cada elemento presenta ambas deflexiones v_i y θ_i , como coordenadas nodales.

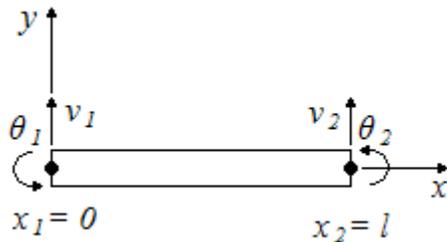


Figura 2. Elemento finito para una viga en coordenadas nodales.

Ya que hay cuatro variables nodales para cada elemento viga, se asume una función polinomial cubica para $v(x)$ [9]:

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (9)$$

De la suposición para la viga de Euler-Bernoulli, la inclinación de la viga puede ser calculada como:

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (10)$$

Evaluando a $v(x)$ y $\theta(x)$ de (9) y (10) se obtiene:

$$v(0) = c_0 = v_1 \quad (11)$$

$$\theta(0) = c_1 = \theta_1 \quad (12)$$

$$v(l) = c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 = v_2 \quad (13)$$

$$\theta(l) = c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2 = \theta_2 \quad (14)$$

Resolviendo (13) para c_i en términos de las variables nodales y sustituyendo en (9) se obtiene:

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (15)$$

Dónde:

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$H_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

Son las funciones forma que describen el desplazamiento en términos de las coordenadas nodales.

Aplicando el método de Galerkin a las funciones forma se puede encontrar la matriz de rigidez para un elemento viga, esto es:

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T EI [B] dx \quad (16)$$

Dónde:

$$[B] = [H_1'' H_2'' H_3'' H_4'']$$

Y los correspondientes grados de libertad para cada elemento son $\{d^e\} = \{v_1 \theta_1 v_2 \theta_2\}^T$. Asumiendo que la rigidez de la viga EI es constante dentro del elemento, la matriz de rigidez es:

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

De forma similar puede ser obtenida la matriz de masas para un elemento en sus coordenadas nodales:

$$[M^e] = \int_0^l \rho A [H]^T [H] dx \quad (18)$$

Dónde:

$$[H] = [H_1 H_2 H_3 H_4]$$

Siendo la matriz de masas:

$$[M^e] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & 2-3 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$



Sistemas de múltiples grados de libertad

Si se extiende el análisis a un sistema de múltiples elementos teniendo N grados de libertad, la ecuación diferencial que rige el movimiento del sistema es de la forma [1,10]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (20)$$

Donde $[M]$ y $[K]$ son las matrices de masas y rigidez del sistema respectivamente, si el sistema no tiene amortiguamiento las vibraciones libres son descritas por la solución de (20).

Una posible solución para determinar las frecuencias naturales es asumiendo la siguiente ecuación:

$$U_i(t) = A_i \sin(\omega t + \phi) \quad (21)$$

Así sustituyendo (21) en (20) se puede obtener la siguiente forma para las frecuencias naturales:

$$([K] - \omega_i^2[M]) = \{0\} \quad (22)$$

La ecuación (22) representa un problema muy importante, denominado eigen problema, una solución no trivial es igualando el determinante con cero:

$$\det([K] - \omega_i^2[M]) = 0 \quad (23)$$

Esta forma es conocida como la ecuación característica del sistema, cada solución de ω_i^2 es conocido como eigenvalor, y para cada eigenvalor corresponde un eigenvector correspondiente a la forma modal de vibración, la frecuencia natural más pequeña es conocida como frecuencia fundamental y su correspondiente forma modal conocido como modo fundamental de vibración.

Metodología y resultados

La metodología general propuesta para este trabajo es mostrada en la Figura 3, consiste en definir los parámetros de la viga, realizar la obtención de las frecuencias naturales por tres métodos diferentes y hacer una comparativa de los resultados obtenidos.

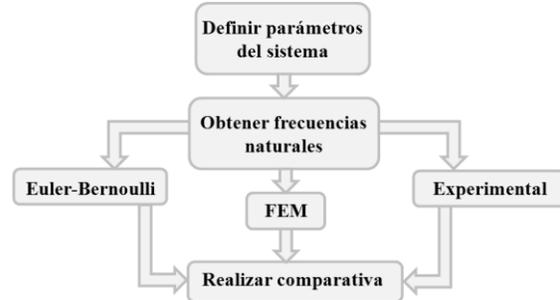


Figura 3. Diagrama flujo de metodología propuesta.

Los parámetros del sistema se definieron en base al tipo de material que se utilizó en el método experimental (aluminio 7075), la Tabla 1 muestra las características de la viga utilizada.

Tabla 1. Características de la viga en estudio

Ancho(m)	0.0508
Espesor(m)	0.00635
Longitud(m)	0.5
Elasticidad(MPa)	72000
Densidad(kg/m ³)	2810

Para obtener las frecuencias naturales utilizando el modelo clásico de Euler-Bernoulli se calculan los valores de λ_n , y poder sustituir en (8), en la Tabla 2 se muestran los valores obtenidos para λ_n y ω_n .

Tabla 2. Frecuencias naturales de la viga empleando Euler-Bernoulli

n	λ_n	$\omega_n(\text{rad/s})$	$f_n(\text{Hz})$
1	1.875	129.851	20.664
2	4.694	813.772	129.851
3	7.854	2278.601	362.650
4	10.995	4465.068	710.637
5	14.137	7381.165	1174.7490

La obtención de las frecuencias naturales empleando FEM no se realizó en ningún software comercial como ANSYS o Abaqus, por lo que se desarrollaron las herramientas necesarias bajo MATLAB (disponibles con el autor de correspondencia) para obtener el cálculo, dando la oportunidad de realizar un análisis más detallado si se requiriera, la Figura 4 muestra el diagrama bloques para el cálculo por FEM.



Figura 4. Diagrama bloques para el cálculo FEM.

Básicamente el desarrollo en MATLAB a partir de las propiedades mecánicas de cualquier sistema, en este caso la viga, inicializa las matrices de masas $[M]$ y rigidez $[K]$ del sistema con N grados de libertad definidos, enseguida calcula la matriz de masas $[M_e]$ y rigidez $[K_e]$ para cada elemento en términos de sus coordenadas locales (17) y (19), ensamblando estas matrices locales dentro de las matrices globales del sistema; al terminar de calcular las matrices locales y ensamblarlas dentro del sistema global se aplican las restricciones (empotramiento de la viga). Si el sistema no está restringido es posible que uno o más valores de las frecuencias naturales sean cero [10]. Finalmente se resuelve el problema de eigenvalores y eigenvectores correspondientes a las frecuencias naturales y los modos de vibración del sistema (22) y (23), la Tabla 3 muestra las frecuencias obtenidas de la formulación FEM y en la Figura 5 se muestran gráficamente los dos primeros modos de vibración normalizados correspondientes a las primeras dos frecuencias naturales de la viga.

Tabla 3. Frecuencias naturales de la viga empleando FEM

n	$\omega_n(rad/s)$	$f_n(Hz)$
1	130.498	20.769
2	817.822	130.160
3	2289.928	364.453
4	4487.351	714.184
5	7417.933	1180.6

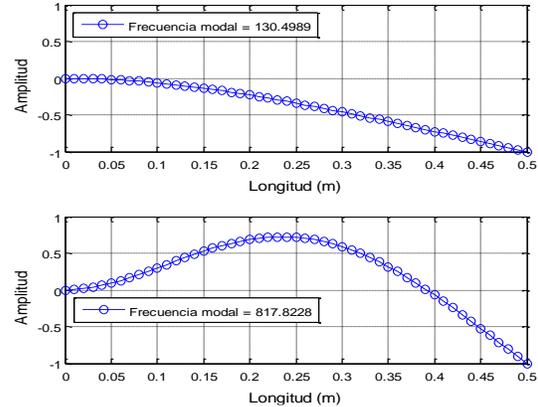


Figura 5. Primeros dos modos de vibración.

La implementación del modelo experimental consistió en empotrar un tramo de viga de aluminio con las propiedades mecánicas de la Tabla 1, en la Figura 6 se muestra el empotramiento de la viga, junto con la instrumentación de dos acelerómetros, colocados en el extremo libre y centro de la viga.



Figura 6. Modelo experimental de la viga.

Los acelerómetros utilizados para la medición de vibraciones son de bajo costo (MMA7455L), ya que son acelerómetros digitales necesitan de un control maestro para la adquisición de señales, para lo cual se utilizó un FPGA (SPARTAN-3), las vibraciones libres se generaron al aplicar una fuerza o un desplazamiento inicial en el extremo libre de la viga. La Figura 7 muestra las señales capturadas por los acelerómetros sobre el eje Z.

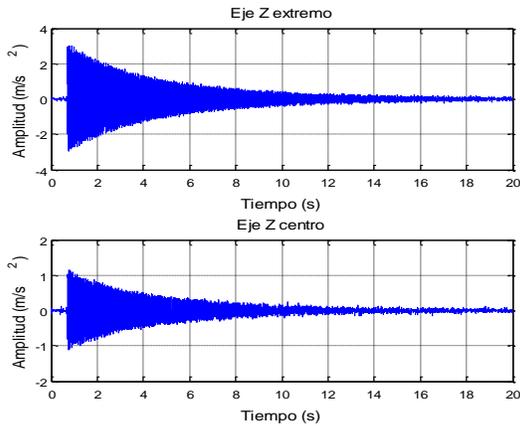


Figura 7. Aceleraciones sobre eje Z.

Las señales de aceleración de la Figura 7 muestran como la amplitud y movimiento de la viga desaparecen a lo largo del tiempo, ahora para encontrar las frecuencias naturales se realizó un análisis del espectro de Fourier, aplicando la FFT (Fast Fourier Transform) se determinan las frecuencias implícitas en el modelo experimental, la Figura 8 muestra el espectro de frecuencias, donde se puede observar que la frecuencia con mayor amplitud es la fundamental, enseguida aparecen valores muy cercanos a la segunda frecuencia, la tercer frecuencia aparece claramente, ya que las muestras se adquirieron a 1kHz, solo se puede observar el espectro de 0 a 500Hz, por el teorema de Nyquist.

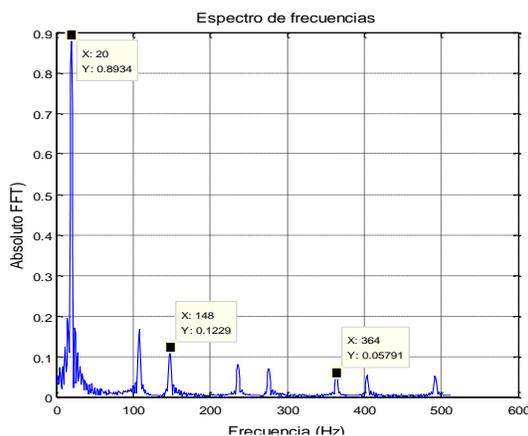


Figura 8. Espectro de frecuencias FFT.

Conclusiones

El modelo clásico mediante la ecuación de Euler-Bernoulli permite determinar aproximaciones a las

frecuencias naturales de un sistema sin amortiguamiento, ya que los valores obtenidos comparados con los otros modelos no difieren significativamente.

La programación de herramientas puede ayudar a entender el funcionamiento de ciertos métodos, ventajas y desventajas, además de experimentar el compromiso computacional que requiere cada herramienta. Asimismo se pueden obtener buenos resultados si se sigue una buena metodología en su desarrollo, como lo fue el cálculo del FEM presentado, que muestra una buena relación de resultado con el modelo Euler-Bernoulli.

Sin embargo la experimentación es fundamental, ya que a través de ella se pueden obtener las diferencias existentes entre la teoría y la práctica, en este caso además de detectar experimentalmente la frecuencia fundamental de viga se observó la aparición de otras frecuencias, que quizás aparecieron por la colocación de los sensores o tipo de empotramiento.

De los resultados obtenidos por los tres métodos presentados los dos primeros de ellos presentan una buena correlación en sus resultados, y con la implementación del tercer método se pueden determinar las primeras tres frecuencias naturales con una buena aproximación.

Referencias

- [1] S. Graham Kelly, "Fundamentals of mechanical vibrations", McGraw-Hill, 2000.
- [2] J. P. Amezquita-Sanchez, R. A. Osornio-Rios, R. J. Romero-Troncoso and A. Dominguez-Gonzales, "Hardware-Software system for simulating and analyzing earthquakes applied to civil structures", Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 12, 61-73, 2012.
- [3] D. Jiménez Villalobos, et.al., "Modelado matemático de una viga en voladizo por la ecuación de Euler-Bernoulli", SOMIM 2009.
- [4] A. Vidal Lesso, L. A. Aguilera Cortez, R. Lesso Arroyo, "Análisis modal y simulación de amortiguamiento en vigas en voladizo", SOMIM 2009.
- [5] M. A. Sanchez, et. al., "La flexibilidad de empotramientos 'rígidos' y su influencia en la determinación de la primera frecuencia natural de una viga", SOMIM 2012.
- [6] J. P. Amezquita-Sanchez, et. al, "Determination of system frequencies in mechanical systems during shutdown transient", Journal of Scientific & Industrial Research, Vol. 69, June 2010, pp. 415-421.
- [7] S. S. Rao, "Mechanical vibrations", Prentice Hall, 2010.



- [8] C. W. De Silva, "Vibration fundamentals and practice", CRC Press Inc., 2000.
- [9] Y. W. Kwon and H. Bang, "The finite element method using MATLAB", CRC Press Inc., 1997.
- [10] D. V. Hutton, "Fundamental of finite element analysis", McGraw-Hill, 2004."

Currículo corto de los autores

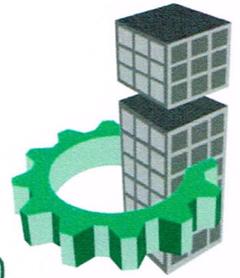
Juan José Saucedo Dorantes. Recibió el título de Ingeniero Electromecánico por la Universidad Autónoma de Querétaro, actualmente es alumno del programa de Maestría en Ciencias Mecatrónica ofrecido por la Universidad Autónoma de Querétaro.

Juan Primo Benítez Rangel. Recibió el título de Ingeniero Electromecánico, el grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en Ingeniería por la Universidad Autónoma de Querétaro.

Juan Carlos Jáuregui Correa. Recibió el título de Ingeniero Mecánico Electricista, el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica por la Universidad Nacional Autónoma de México, y el grado de Doctor en Ingeniería por la Universidad de Wisconsin-Milwaukee.

Roque Alfredo Osornio Rios. Recibió el título de Ingeniero en Electrónica por el Instituto Tecnológico de Querétaro, el grado de Maestro en Ciencias y Doctor en Ingeniería por la Universidad Autónoma de Querétaro.

Rene de Jesús Romero Troncoso. Recibió el título de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica, el grado de Maestro en Ingeniería por la Universidad de Guanajuato y el grado de Doctor en Ingeniería por la Universidad Autónoma de Querétaro.



10° CONGRESO
INTERNACIONAL DE INGENIERÍA
12-16 MAYO 2014

creando **conciencia**



La UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
a través de la FACULTAD DE INGENIERÍA,
Otorga la presente

CONSTANCIA

a:

**Saucedo-Dorantes J. J., Morales Velázquez L., Trejo-
Hernández M., Benítez-Rangel J. P., Osornio-Ríos R. A.**

Por su participación con la **presentación oral** del trabajo:

“Servomotor multi-loop control based on FPGA”

en el Congreso Internacional de Ingeniería en su décima edición
realizado del 12 al 16 de mayo de 2014
en la ciudad de Santiago de Querétaro, México



CONCYTEQ



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
QUERÉTARO

Dr. Aurelio Domínguez González
Director



Servomotor multi-loop control based on FPGA

Saucedo-Dorantes J. J.^{*1}, Morales-Velázquez L.¹, Trejo-Hernández M.¹, Benítez-Rangel J. P.¹, Osornio-Rios R. A.¹

¹ *Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Campus San Juan del Río
Río Moctezuma 249, C.P. 76807, San Juan del Río Querétaro, México.*

^{*} *e-mail corresponding author: chino_8660@hotmail.com*

Abstract—This paper presents the development and implementation of a controller based on FPGA (Field Programmable Gate Array) with multi-loop feedback applied to a servomotor position system. In this kind of application, the use of reconfigurable devices like FPGA is suitable, its open architecture is appropriate not only for this purpose but also for other applications. Besides, it possesses a remarkable advantage upon microcontrollers and DSP. The recursive least square method was used for estimating the servo system parameters, through the use of these parameters a cascade control was designed where encoder and load resistance signals are used in feedback loops. When the system reference is subjected to sudden changes, the control action increases together with the motor voltage level. With a cascade control, it is possible to reduce the spike voltage up to 40% in comparison with a simple controller, and the dynamic of the system may be better in overshoot as well. With this kind of controller the system shows a better efficiency in the output due to control of more than one variable of the model, additionally with the implementation on FPGA, execution time is improved with few resources used at a low cost.

Key Words: *servomotor, multi-loop, FPGA.*

I. INTRODUCTION

Direct current (DC) motors are important for industrial applications since these have good torque and full range control variables, such as position, velocity and torque or jerk. Classic and modern control techniques require a mathematic model of the plant [1], plant model can be obtained by a theory method or using an on-line identification method. This model is important for control systems because the parameters obtained are used for doing a controller proposal. A theoretical model plant for DC motors is obtained from the knowledge of electrical and mechanical components like capacitors, bearings, springs and gears that are interconnected in a specific way, and doing an analysis of these components a plant model is obtained. On the other hand, the on-line method assumes that the input and output in a system are related to a linear transfer function of known order [2], in this way, it is possible to estimate a plant model without knowing the plant components, one of the most popular and certain is the least square (LS) identification method and its variations.

Digital control systems have gained importance because of their advantage in cost reduction and the application of technology in embedded systems [3]. This kind of controllers are of easy reconfiguration, and in position control systems quick response can be obtained with high precision [4], furthermore, these techniques are frequently used in industry, hence digital control techniques are more popular. Despite the high number of developments in the theory of advanced control, the Proportional-Integral-Derivative (PID) controller is the

most used in position control systems for industrial applications due to appropriate response obtained, therefore digital PID controllers are replacing analogic controllers due to their generalized structure [5, 6].

Cascade control structures are commonly used in DC motors, a cascade control scheme or with multiple feedback have two feedback controllers, the output of the first modify the set point of the second; and the output of this is directly connected to the plant. The secondary feedback has an influence over the first controller and dynamic process for this feedback is faster than the primary feedback. The goal for this scheme is to eliminate effects of any disturbance and improve the control system dynamic [7].

Recently advances on the Field Programmable Gate Array (FPGA) area have provided useful techniques and tools for the development based on reconfigurable hardware applied to complex applications. Therefore FPGA technology can be widely used to develop digital circuits with better efficiency, thus fast and flexible control systems can be built in hardware level.

The main objective of this work is to show the development and implementation of a controller based on FPGA with multi-loop feedback applied to servomotor position system, showing how this designed technique improves the system response in overshoot and reduce spike voltage in motor.

II. SYSTEM IDENTIFICATION

Identification can be defined as the cluster of studies, theories and algorithms that allow the accomplishment of the structure and parameter of a mathematic model (generally dynamic) that produces, with enough accuracy for automatic control aims, the output variables of the process or real system, being the object of study before the same cluster of input variables [2], the identification system is especially useful for the modelling of systems which cannot be easily modelled according to its parameters or specifications.

A. Least-square

LS algorithm is used for executing the identification process. This algorithm converge quickly generating accurate approximations useful in control applications modelling. Getting the sampled input $u(k)$ and output $y(k)$ signals, considering the differences equation (1) and using Z transform a discrete transfer function is obtained (2), where m represents the numerator order and n the denominator order, with $n < m$.

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j u(k-j) \quad (1)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} \dots b_m z^{-m}}{1 - a_1 z^{-1} \dots a_n z^{-n}} \quad (2)$$

The majority of linear systems can be modelled with the transfer function showed in (2), according with [2] algorithm solution is given by the equations (3) and (4) that represent the input-output system vectors.

$$\hat{P} = (z \cdot z^T)^{-1} \cdot y^T = [b_0 \ a_1 \ b_1 \ \dots \ a_n \ b_n]^T \quad (3)$$

$$z^T = [u^T(k) \ y^T(k-1) \ u^T(k-1) \ \dots \ y^T(k-n) \ u^T(k-n)] \quad (4)$$

Where:

\hat{P}	Estimated coefficients	
$u(k)$	Input system vector	$k=0,1,\dots,N$
$y(k)$	Output system vector	$k=0,1,\dots,N$
a_i	Denominator coefficients	$i=0,1,\dots,n$
b_i	Numerator coefficients	$j=0,1,\dots,m$
N	Sampled number	

B. Recursive least-square

Recursive least square (RLS) is a variation of LS method, this is used in parameter identification in an on-line fashion, the coefficient estimation is done at the same time as the control is operating. Defining a covariance matrix (5).

$$C(k) = \frac{1}{\varphi^2} \left[C(k-1) - \frac{1}{\alpha^2(k)} g(k)g^T(k) \right] \quad (5)$$

RLS algorithm can be summarized like follow:

$$\hat{P}(k) = \hat{P}(k-1) + \frac{C(k-1) \cdot z(k)}{\alpha^2(k)} \cdot [y(k) - z^T(k)\hat{P}(k-1)] \quad (6)$$

$$\hat{P}(k) = \hat{P}(k-1) + \frac{\hat{e}(k)}{\alpha^2(k)} \cdot g(k) \quad (7)$$

$$g(k) = C(k-1) \cdot z(k) \quad (8)$$

$$\alpha^2(k) = \varphi^2 + z^T(k)g(k) \quad (9)$$

$$\hat{e}(k) = y(k) - z^T(k)\hat{P}(k-1) \quad (10)$$

The value φ is defined as the exponential omission coefficient, g and α are internal variables in the algorithm, \hat{e} represents the error between the estimated and measured value for the output in the system.

III. CLOSED-LOOP CONTROL SYSTEM

A system that retain a determinated relation between its output and the input reference, comparing and using the difference like control signal is called closed-loop system, on the other hand for systems in which the output signal doesn't have influence in control action are called open-loop systems [8].

Fig. 1 shows a closed-loop system scheme, the controller goal is a decrease error between $C(s)$ and $R(s)$ signals, the $C(s)$ value is measured by a sensor and compared with $R(s)$ for computing the error $E(s)$, the output signal controller $U(s)$ generally is a function of the error measured and this signal acts directly in the plant.

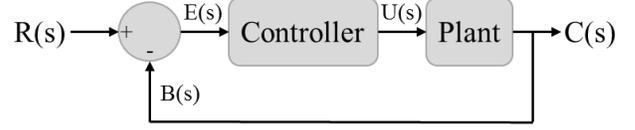


Fig. 1. Closed-Loop system.

A. PID controller

Fig. 2 shows a PID structure, also known as three-time controller, its transfer function for an input error $E(s)$ is given by equation (11).

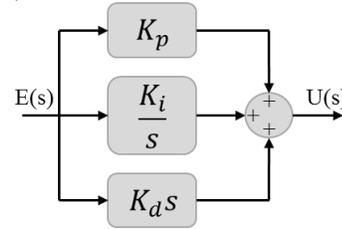


Fig. 2. PID structure.

If an integral time constant is defined as $\tau_i = K_p/K_i$ and a derivative time constant $\tau_d = K_d/K_p$ equation (11) can be rewritten as (12).

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (11)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p(\tau_i s + 1 + \tau_i \tau_d s^2)}{\tau_i s} \quad (12)$$

Equations (11) and (12) are used for continuous time domain analysis, for discrete time domain is necessary to make a transformation, then equation (11) can be expressed as (13).

$$\frac{U(z)}{E(z)} = P + \frac{I}{1-z^{-1}} + D(1-z^{-1}) \quad (13)$$

Equation (13) is reduced until a differences equation (15) is obtained.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Dz^{-1} - (P + 2D)z^{-1} + (P + I + D)}{1 - z^{-1}} \quad (14)$$

$$u(k) = a_2 e(k-2) - a_1 e(k-1) + a_0 e(k) + u(k-1) \quad (15)$$

Where:

$$\begin{aligned} a_2 &= D \\ a_1 &= P + 2D \\ a_0 &= P + I + D \end{aligned}$$

B. Cascade control structure

Knowing that a closed-loop control system delete disturbances using error signals computed. A cascade control system has more than one control loops inside the principal

control loop, Fig. 3 shows a scheme for a system with multiple feedback. The (first) loop inside the primary loop is called the secondary loop, and the controller in this loop is called the secondary controller (or slave-controller). The outer loop is called the primary loop, and the controller in this loop is called the primary controller (or master-controller). The control signal calculated by the primary controller is the set point of the secondary controller.

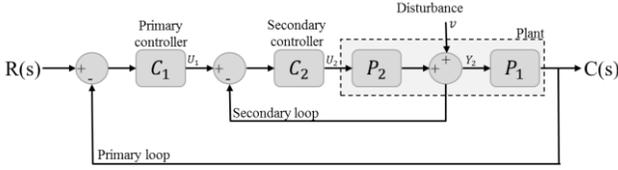


Fig. 3. Closed-loop cascade control system.

In most applications the purpose of the secondary loop is to quickly compensate the disturbance so that its response in the primary output variable of the process is small. In order to make this happens the secondary loop must register the disturbance. In addition, to achieve a better disturbance compensation, cascade control may give a more linear relation between the variables U_1 and Y_2 , than with usual single loop control. In many applications process part 2 (P_2) is the actuator. In this case the secondary loop can be regarded as a new actuator having better linearity (or proportionality).

IV. METHODOLOGY AND RESULTS

A. System description

In general the servo system uses a DC motor EMG30 that includes a gear box reduction and encoder using an L298 bridge H and a digital pulse width modulation (PWM) the motor direction rotation is manipulated and through a load resistance voltage level in the motor is measured, a Spartan-3 was used for generating control signals and for driving a data acquisition system (DAS1612). Complete servo system is showed in Fig. 4.

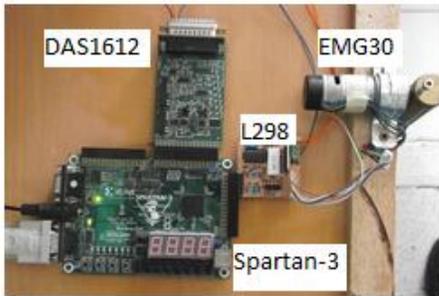


Fig. 4. Complete control system.

B. Parameter estimation

RLS algorithm was used in the system identification parameters, with the purpose of achieving this process, it was necessary to obtain an input and output system signals-sampled vector, a simple structure described in Hardware Description Language (HDL) and implemented on FPGA was used for

system stimulating, Fig. 5 shows a block descriptions of the implemented description used in the servo system identification.

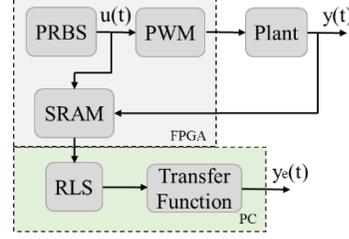


Fig. 5. System identification diagram.

In Fig. 5, the system identification consist of different blocks, the Pseudo Random Binary Sequence (PRBS) block is used for building a random signal that is used in the servomotor as excitation signal, the random signal is similar to white noise signal, this signal is the input for the PWM block and the output of this is directly connected to plant (servo system), the SRAM block is used for saving input and output signals in the static memory, these three blocks SRAM, PRBS and PWM are HDL descriptions, the plant obviously are the servomotor and the bridge H fitting-out, Fig. 6 upper part shows the random signal that was the input signal $u(k)$ in system identification, this signal is the duty cycle in the PWM, and Fig. 6 lower in blue color is plotted the system output signal $y(t)$ and in red color the estimated signal $ye(t)$ computed by RLS algorithm.

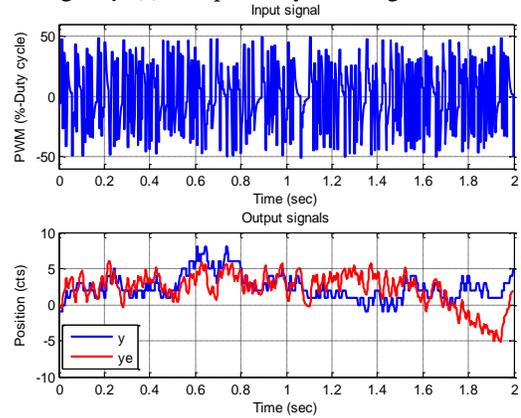


Fig. 6. Identification using RLS.

In order to get an accurate transfer function the identification process was realized more than once, the average was computed for multiple parameters gotten, obtaining a final second order transfer function equation, then servo system can be modeled mathematically like (16).

$$F(z) = \frac{-1.275 \times 10^{-5} z^2 + 3.765 \times 10^{-5} z + 0.0001055}{z^2 - 0.9513z - 0.0419} \quad (16)$$

C. Control system position using a single-loop feedback

The main objective is to build a multi-loop feedback controller but a first test was realized, a digital controller hardware structure was developed based on different control laws such as proportional (P), proportional-integral (PI), proportional-derivative (PD) and proportional-integral-derivative (PID). Digital design for cited laws is based on the

differences equation of an infinite impulse response (IIR) filter (17), where b and a are constant coefficients that can be changed according to the particular control law, $x(k)$ is the excitation and $y(k)$ is the system output.

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k - 1) + a_2x(k - 2) - b_1y(k - 1) - b_2y(k - 2) \quad (17)$$

The design consists of a digital structure development for a second-order difference equation. The design can be flexible since it can generate a reconfigurable structure in hardware to implement any equation in differences and thus, any filter or control law, this structure was used by [4, 10].

Knowing the linear servo system transfer function, a controller was tuned using the frequency response method, this method is based on two important aspects of the system response: the stability grade and the response speed. The stability of a system indicates the response nature, while the response speed indicates the system capacity to carry out small corrections without causing oscillations. The grade of stability is expressed by means of the phase margin and the response speed of the system is directly related to the crossing frequency.

With the controller designed for the servo system in Fig. 7 is showed an scheme of the control system with a single-loop feedback, using an encoder in the feedback loop the servo motor angular position is controlled, by a PC reference position is sent to control system, internally the implementation based on FPGA that contain the PID controller and the PWM compute and apply the action control.

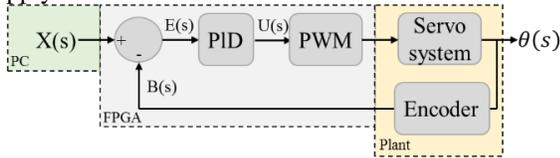


Fig. 7. Control position system with single-loop.

Different control tests were carried out for watching system response, Fig. 8 shows system response until step input, that is a common signal used in system response, as a result system response follow position reference in 0.4 seconds, system response shows 20% overshoot, this is a critical response for a machinery position system because oscillations can produce equipment damage.

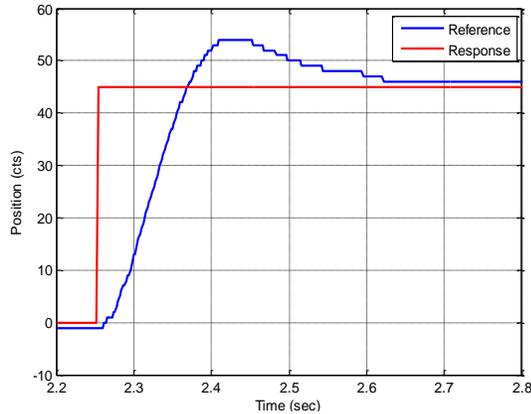


Fig. 8. Step response with single-loop.

For the same control test realized servomotor voltage level was measured in the load resistance, thus Fig. 9 shows voltage level for the control system with a single-loop feedback.

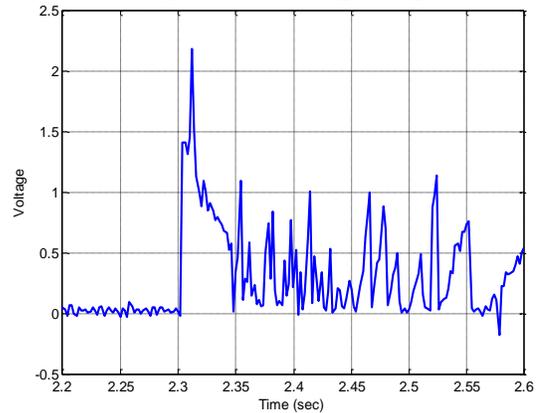


Fig. 9. Spike voltage with single-loop.

From voltage level obtained and due to step input we can say that immediately response produces high spike voltage level because of the control action computed by PID controller, 2 volts is the maximum spike voltage level, this level can produce damage in electronic parts or in the servomotor.

D. Control system position using multi-loop feedback

In agreement with the objective and knowing that if more than one variable were controlled in a system a better response can be obtained, the proposal for the servomotor position system using multi-loop feedback is showed in Fig. 10, where two controllers are implicit, the master is a PID and this is used in servomotor angular position control loop, an slave controller P adjust servomotor voltage level, in the scheme an external input of disturbance is present, this signal can modify or affect the servo system due to friction or load excess increasing control action.

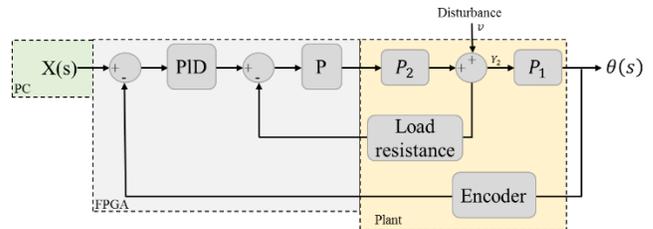


Fig. 10. Control position system with multiple-loop.

Doing an analysis on the multi-loop feedback control structure, when the system is exposed to external disturbances or high input references, the control action computed by the master controller will be strong to immediately compensate the signal error in the servo system. If the system control were a single-loop oscillation high spike voltage would appear, although high control action was computed by master controller, the slave controller attenuate this signal reducing spike voltage level in servomotor, in contrast with the single-loop feedback, the system response will be smooth due to servo motor spike voltage.

Fig. 11 shows the system response when servo system is operating under multi-loop feedback control, the same step

input was used for watching system response and differences between single and multiple feedback loops, therefore with multi-loop feedback control system response reach position reference in 0.3 seconds faster than the single-loop feedback system response, dynamic system is better because overshoot was removed, overshoot is a problem that all controller tries to delete.

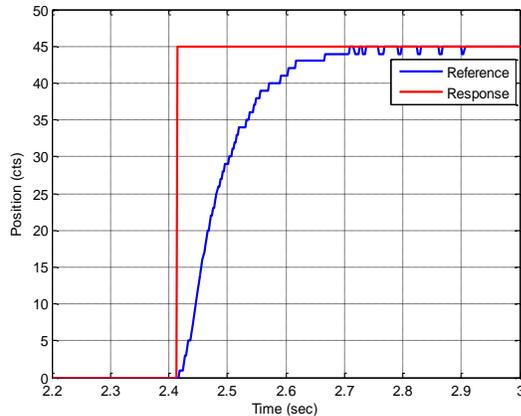


Fig. 11. Step response with multiple-loop.

With respect to the servomotor spike voltage measured in multi-loop feedback control system response Fig. 12 shows a sample measured, under the same step input spike voltage is present but amplitude is reduced, and watching spike voltage showed in Fig. 9 it holds a maximum amplitude of 2 volts and for the system with multiple feedback loops spike voltage amplitude is reduced to 1.14 volts, which is equivalent to 43% spike voltage reduction.

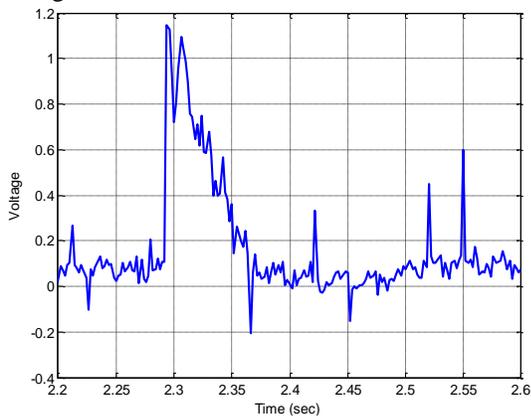


Fig. 12. Spike voltage with multiple-loop.

With servo motor spike voltage controlled is possible to extend electronic parts life that are implicit in a servomotor position system.

V. CONCLUSION

The proposed cascade control for a servomotor position system based on FPGA is designed and implemented. We have concluded that single and cascade control system gives excellent response in control position system, but the proposed cascade controller has excellent performance. Results indicate that the proposed cascade controller has a better performance in transient, overshoot and steady state response.

With more than one variable controlled in a system, dynamic response is improved, reducing spike voltage up to 43% and a faster system time response is obtained, and with this kind of controller the system shows a better efficacy in output system response.

The implementation of modular systems provides certain advantage over other devices, execution time is improved, accuracy responses are obtained and a few resources at a low cost are used. Besides, with the development of this kind of applications, these can be applied to other systems without requiring too many changes.

ACKNOWLEDGMENT

This project was partially supported by CONACyT scholarship 278033.

REFERENCES

- [1] K. Ogata, *Modern control engineering*. 3rd ed. Prentice Hall; 1996. ISBN 0-13-227307-1.
- [2] A. Aguado Behar, *Identificación y control adaptivo*. Instituto de Cibernética, Matemática Física. ISBN-84-205-3570-2.
- [3] L. Morales-Velazquez, R. J. Romero-Troncoso, R. A. Osornio-Rios, G. Herrera-Ruiz, J. J. Santiago-Perez, "Special purpose processor for parameter identification of CNC second order servo systems on a low-cost FPGA platform", *Mechatronics* 20 (2010) 265-272.
- [4] R. A. Osornio-Rios, R. J. Romero-Troncoso, G. Herrera-Ruiz, R. Castañeda-Miranda, "The application of reconfigurable logic to high speed CNC milling machines controllers", *Control Engineering Practice* 16 (2008):674-684.
- [5] Y. F. Chan, M. Moallen, W. Wang, "Design and Implementation of Modular FPGA-Based PID Controllers", *IEEE Transactions on Industrial Electronics* Vol. 54, No. 4. August 2007.
- [6] W. Zhao, B. H. Kim, A. C. Larson, R. M. Voyles, "FPGA Implementation of Closed-Loop Control System for Small-Scale Robot", *IEEE*. ISBN: 0-7803-9177-2/05.
- [7] S. Ahmed, A. Elhamid, "Cascade Control System of Direct Current Motor", *World Applied Sciences Journal* 18 (12): 1680-1688,2012.
- [8] W. Bolton, *Ingeniería de control*. 2ª Edición. Ed. Alfaomega. ISBN-8426713165.
- [9] F. Hauged. *PID control*. Tapir Academic Press. 2004. ISBN-8251919452.
- [10] R. J. Romero Troncoso, *Electrónica digital y lógica programable*. 1ª ed. Universidad de Guanajuato. ISBN:968-864-449-8.
- [11] Datasheet DAS1612-UAQ DM0001.