Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Estrategias en la solución de problemas de geometría euclidiana.

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Hugo Tadeo Rodríguez

Dirigido por:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Febrero 2014
México

Estrategias en la solución de problemas de Geometría Euclidiana

Hugo Tadeo Rodríguez

Las matemáticas no son una marcha cautelosa
a lo largo de una carretera bien despejada,
sino un viaje por un desierto desconocido
en el que los exploradores se pierden a menudo.

W. S. Anglin.

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios por permitirme estar presente en estos momentos, darme vida y salud. Por poner en mi camino personas a quienes admiro, quiero y respeto a mis padres, mis hermanos, profesores y mis amigos que día con día le dierón un sentido a lo que hasta hoy he culminado.

Un agradecimiento muy especial para mis padres Socorro y Felipe quienes han dado todo por mí, me han enseñado el valor de la vida, el luchar por cada uno de mis objetivos. Hoy les digo que lo que he logrado no hubiese sido poblé sin su apoyo lo cual les agradesco infinitamente y espero reconpensarselos en cada instante de mi vida.

A mis hermanos Rubén, Enrique, Omar y Bibiana les agradezco por sus apoyos y consejos ustedes también son parte fundamental de este logro.

A mi novia Francisca por ser una persona muy especial y de quien tengo un gran apoyo, amor y cariño.

Le doy las gracias al Doctor Jesús Jerónimo Castro por confiar en mí y compartir parte de su saber al dirigir este libro.

A todos los profesores de la licenciatura Carmen Sosa, Patricia Espindola, Herminio Blancarte, Enrique Crespo, Esperanza Trenado, Norma Angelica Rodríguez, Armando Baldenebro, Roberto Torres, Veronica Soria, etc.

A mis amigos, Aracely, Elizabeth, Jorge Alberto, Edgar, Viviana, Mary Carmen

y Esmerada, quienes contribuyeron para que ésta fuera una de las etapas más bonitas de mi vida.

A la Universidad Autónoma de Querétaro y a la Facultad de Ingeniería por ser mi casa durante cinco años.

Introducción

En muchas ocasiones el curso de geometría es tratado muy superficialmente, y por este hecho los alumnos pierden la oportunidad de desarrollar algunas habilidades en la solución de problemas matemáticos. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema geométrico su primera impresión es sentirse impotente ante éste, ya que debido a la falta de habilidades y el desconocimiento de algunos teoremas básicos, puede parecer que la solución del problema en cuestión se encuentra fuera de su alcance. La Geometría presenta la oportunidad de entender el concepto de demostración así como el asimilar el método deductivo, el cual es básico en el pensamiento científico. Además de lo antes mencionado, los estudiantes pueden adquirir algunas técnicas y estrategias de solución de problemas los cuales llegan a ser muy útiles en diversas ramas de las matemáticas. Algunas de estas estrategias en geometría consisten en realizar algunos trazos en los problemas, los cuales en muchas ocasiones pueden ser elaborados al realizar una interpretación adecuada del propio enunciado del problema.

Por otro lado, los alumnos de alto rendimiento interesados en participar en alguna competencia en matemáticas, no cuentan con un texto de geometría el cual les muestre de manera sistemática algunas estrategias útiles en la solución de problemas. Por ello, en el presente trabajo se mostrarán algunas técnicas y métodos que resultan útiles a estos estudiantes para lograr una mejor preparación.

Generalmente es casi imposible resolver un problema sin hacer algún trazo auxiliar. Inmediatamente surge la pregunta, ¿cuál trazo es útil y cuál no lo es? No es fácil responder esta pregunta, y tal vez es imposible dar una guía de qué trazo debe hacerse en cada situación. Sin embargo, hay problemas cuyos enunciados mismos, sugieren el hacer cierto trazo el cual facilita la solución de los mismos. Trazos como la suma de segmentos, la suma de ángulos, construir triángulos semejantes o triángulos congruentes y en algunas ocasiones circunferencias auxiliares. Por otro lado, hay problemas que al analizarse de manera algebraica se pueden resolver de manera más sencilla y elegante, introduciendo parámetros auxiliares o transportando nuestro problema al contexto de los números complejos, la solución por estos medios consiste en realizar una serie de simplificaciones y no en el descubrimiento de un trazo mágico, por así decirlo.

Esperando que este trabajo sirva de apoyo para alumnos de licenciatura y preparatoria en particular para aquellos que cursan geométria o se preparan para participar en en alguna competencia matemática.

Notación básica

La siguiente notación será utilizada:

$\triangle ABC$	el triángulo de vértices A, B y C
$\lvert ABC \rvert$	área del triángulo $\triangle ABC$
$ABCD$	cuadrilátero con vértices A, B, C y D
$\lvert ABCD \rvert$	área del cuadrilátero $ABCD$
AB	el segmento de extremos A y B
AB	la línea por los puntos A y B
AB	la longitud del segmento AB
$\angle A$	ángulo de vértice A
$\angle BAC$	ángulo formado por BA y CA
$\widehat{AB}$	el arco de A a B
$AB \perp CD$	AB perpendicular a CD
$AB \parallel CD$	AB paralela a CD
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	$\triangle ABC$ congruente con $\triangle DEF$
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	$\triangle ABC$ semejante con $\triangle DEF$
$O(a)$	circunferencia con centro en O y radio a
i	$\sqrt{-1}$
$\overline{OZ}$	vector con inicio en O y punto final en Z
$\lvert OZ \rvert$	modulo de el vector $\overline{OZ}$
$\mathbb{R}^*$	números reales distintos de cero.

Contenido

Capítulo 1

Solución de problemas utilizando trazos auxiliares.

Al resolver problemas de Geometría, generalmente es necesario realizar algún trazo adicional para poder llegar a una solución. Al principio, la tendencia de quien trata de resolver un problema geométrico es, hacer trazos pero sin una idea precisa de cuales pueden ayudar y cuales no, en la busqueda de una solución. Sin embargo, existen muchos problemas cuyos enunciados mismos sugieren él o los trazos que deben ser realizados. Dado que estas sugerencias no son explícitas, es necesario desarrollar nuestra intuición para poder en ocasiones *adivinar* el trazo adecuado. Al principio dichos trazos parecen una idea obtenida por iluminación, sin embargo, al ir resolviendo más y más problemas nos vamos dando cuenta que muchos problemas comparten un tipo de trazo en común. La idea en este capítulo es presentar varios ejemplos donde un mismo tipo de trazo ayuda a encontrar, de manera rápida, una solución. De este modo, los trazos adecuados dejan de parecer *mágicos* y comienzan a convertirse en una *técnica*, la cual resulta en muchas ocasiones bastante útil. El principal propósito de este trabajo es que el lector adquiera la habilidad de construir trazos auxiliares y que tenga en cuenta que a cualquier problema se le pueden agregar trazos, los cuales no alteran nuestro problema pero si en muchas ocasiones lo simplifican.

1.1. Construcción de segmentos auxiliares

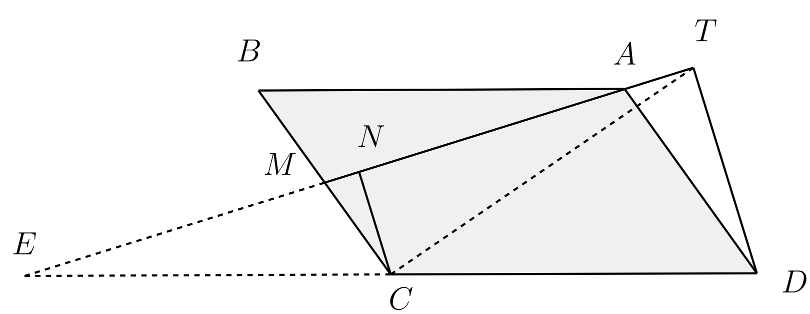
El primer trazo que analizaremos será el de construir segmentos auxiliares.

1.1.1. Prolongar segmentos

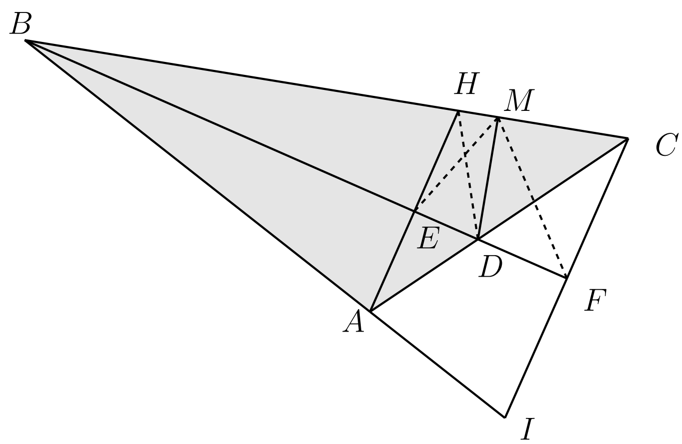
Ejemplo 1.1.1 *En un paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio de BC, DT es dibujada desde D y perpendicular a MA, como se muestra en la figura. Entonces $CT = CD$.*

Demostración. Prolonguemos el segmento TM de tal forma que se intersecta con DC en el punto E. Tenemos que $BA = EC$, puesto que M es punto medio del segmento BC consecuentemente $\triangle ECM \cong \triangle ABM$, ahora construimos una recta perpendicular a ET y que pase por C y ésta se intersecta en el punto N con ET. Tenemos que NC es paralela a TD.

Como $EN = NT$ esto por el Teorema de Thales, obtenemos que $\triangle ENC$ es congruente con el $\triangle NCT$. Por lo tanto $EC = CD = CT$ $\square$



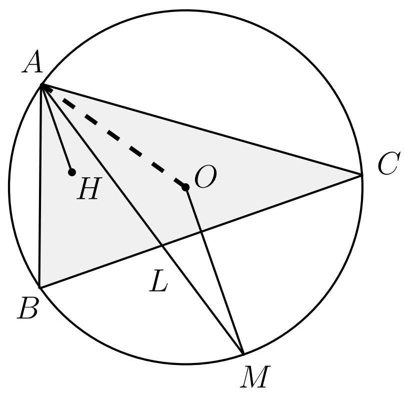
Ejemplo 1.1.2 *En un triángulo escaleno $\triangle ABC$ se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Entonces $\measuredangle EMD = \measuredangle DMF$.*



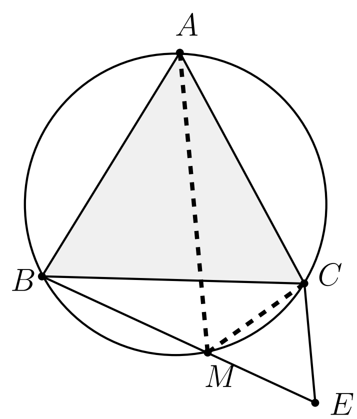
Demostración. Si prolongamos CF y BA estas se inetrsectan en I y si prolongamos AE se intersecta con BC en H. $MDFC$ es ciclico ya que $\angle DMC = \angle DFC = 90°$, entonces $\angle DMF = \angle DCF$. Por otro lado, como AH es paralela a CI, tenemos que $\angle DCF = \angle EAC$. Además $HMDE$ es un cuadrilátero cíclico esto por que $\angle HED = \angle HMD = 90°$. Se sigue que $\angle EHD = \angle EMD$, pero $\angle EHD = \angle EAD$ puesto que $\triangle EHD$ es congruente con $\triangle EDA$. Por lo tanto $\angle EMD = \angle DMF$. $\square$

Ejemplo 1.1.3 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea H el ortocentro, O el circuncentro, sea AL la bisectriz de el ángulo $\measuredangle BAC$. Entonces AL bisecta el $\measuredangle HAO$.*

Demostración. Prolonguemos la bisectriz en $\angle A$ hasta que se intersecte con la circunferencia circunscrita a el triángulo $\triangle ABC$ en el punto M. Se sigue que OM es paralelo a AH, entonces $\angle HAM = \angle AMO$. $\triangle AMO$ es isósceles ya que $AO = OM$ son radios de la circunferencia, así $\angle MAO = \angle AMO$. Por lo tanto $\angle HAM = \angle MAO$. $\square$



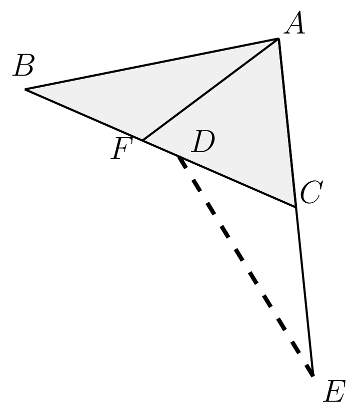
Ejemplo 1.1.4 *Sea M un punto sobre el arco $\widehat{CB}$ (el cúal no contiene a A) de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero $\triangle ABC$. Entonces $BM + CM = AM$.*



Demostración. Prolonguemos el segmento BM hasta E de tal forma que $ME = MC$, y tenemos que $\triangle CME$ es un triángulo equilátero. Entonces $\triangle BEC$ es congruente con $\triangle AMC$. Por lo tanto $BE = BM + MC = AM$. $\square$

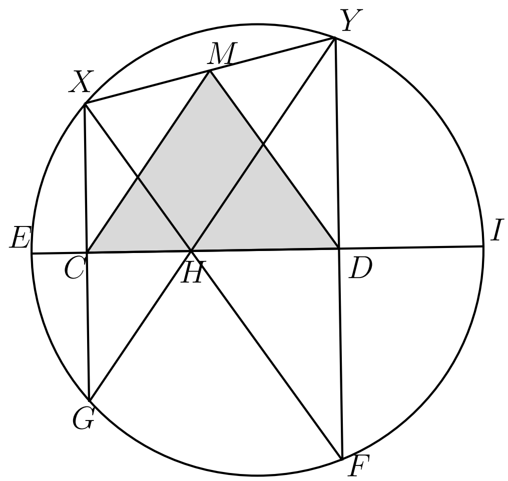
Ejemplo 1.1.5 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\measuredangle BCA = 60^\circ$ y $AC < BC$. El punto D esta sobre el lado BC y cumple $BD = AC$. El lado AC es extendido hasta el punto E donde $AC = CE$. Entonces $AB = DE$.*

Demostración. Si construimos el segmento que esta entre los puntos D y E observamos que $\triangle ABF$ y $\triangle EDC$ comparten los segmentos en cuestión, por tanto solo basta probar que $\triangle ABF$ y $\triangle EDC$ son congruentes. Como $\triangle AFC$ es un triángulo equilátero. Se sigue que $\measuredangle DCE$ es igual a $\measuredangle AFB$. Además $CA = AF$ y $BF = DC$. Por lo tanto $\triangle ABF$ es congruente con $\triangle DEC$ y $AB = DE$. □

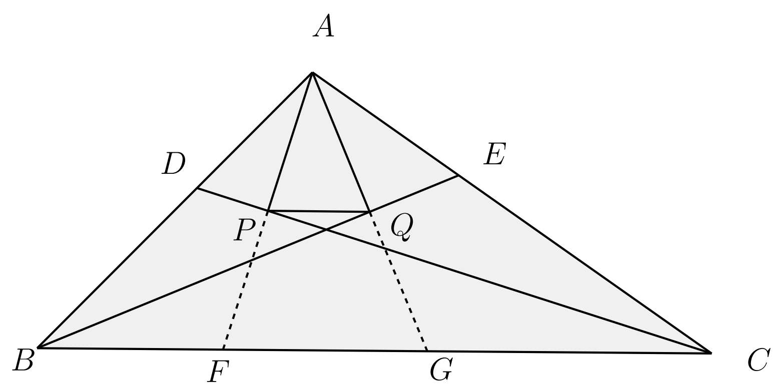


Ejemplo 1.1.6 *Sea XY una cuerda de longitud constante la cual se desliza sobre un semicírculo. Sea M el punto medio de la cuerda, C y D las proyecciones de los puntos X e Y sobre el diámetro AB. Entonces el triángulo $\triangle MCD$ es isósceles y nunca cambia su forma.*

Demostración. Prolongamos XC e YD hasta que se intersecten con la circunferencia en los puntos G y F, respectivamente. Entonces $\measuredangle XGY = \measuredangle XFY$, ya que abarcan el mismo arco y además si se desliza la cuerda XY serán constantes estos ángulos. Como M y D son puntos medios de XY e YF, respectivamente, entonces $MD \parallel XF$, de tal forma que $\measuredangle XFD = \measuredangle MDY$. Por lo tanto $\measuredangle MDC$ es constante. Similarmente YC es paralela a MC, entonces $\measuredangle YGC = \measuredangle MCX$. Así $\measuredangle MCD$ es constante y $\measuredangle MCD = \measuredangle MDC$. Es decir $\triangle MCD$ es isósceles y nunca cambia su forma. □



Ejemplo 1.1.7 *En un triángulo* $\triangle ABC$ *se trazan las bisectrices de los ángulos* $\measuredangle ABC$ *y* $\measuredangle ACB$ *y éstas intersectan los lados* AC *y* AB *en los puntos* E *y* D*, respectivamente. Consideremos los puntos* P *y* Q *sobre las líneas* CD *y* BE*, respectivamente, de manera que* $AP \perp CD$ *y* $AQ \perp BE$*. Entonces* PQ *es paralelo a* BC*.*



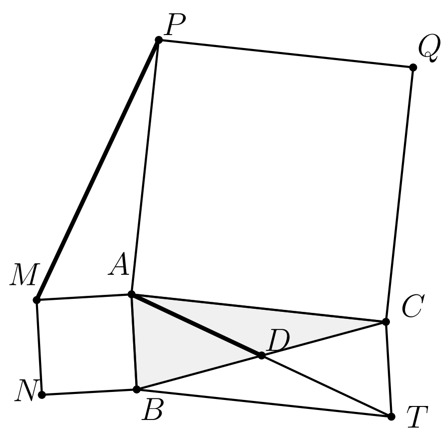
Demostración. Prolonguemos los segmentos AP y AQ, estos se intersectan con BC en F y G, respectivamente. Como PC es perpendicular a AF y además PC

es bisectriz, entonces $AP = PF$. Similarmente BQ es perpendicular a AG y como BQ es bisectriz tenemos que $AQ = QG$. Por lo tanto $\frac{AP}{PF} = \frac{AQ}{QG}$.

Así por el Teorema de Thales PQ es paralela a BC. □

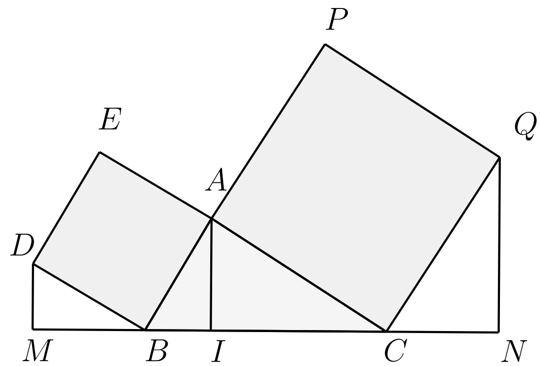
1.1.2. Trazar segmentos paralelos

Ejemplo 1.1.8 *Sobre los lados AB y AC de un triángulo △ABC se construyen hacia afuera los cuadrados ABNM y CAPQ. Sea D el punto medio del lado BC. Entonces se tiene que PM=2AD.*



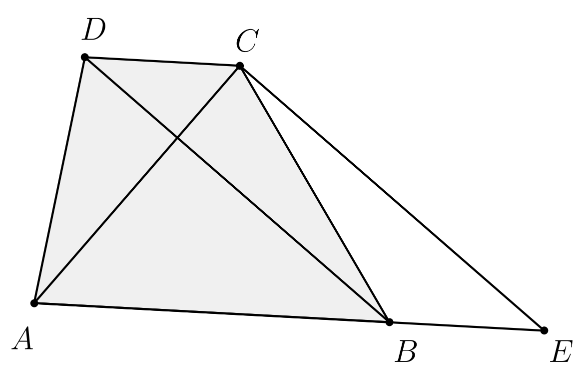
Demostración. Como P es punto medio de AC, si trazamos una recta paralela a BA que pase por C y otra recta paralela a BC que pase por A esta se intersectan en el punto T, entonces tenemos que $CBAT$ es un paralelogramo. BT y AC son diagonales y se intersectan en el punto medio de ambas P, esto ya que las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente, y hacemos la prolongación del segmento BP hacia T aseguramos que $BT = 2BP$. Además $\angle DBM + \angle ABC = 180°$ y $\angle BCA = \angle CAT$, $\angle BAC = \angle ACT$, se sigue que $\angle ABC + \angle BCT = 180°$, así $\angle DBM = \angle BCT$. Por lo tanto $\triangle DBM$ es congruente con $\triangle BCT$, lo que implica que $DM = 2BP$. □

Ejemplo 1.1.9 *Sea △ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. Se construyen los cuadrados $ABDE$ y $CAPQ$ como se muestra en la figura* *siguiente. Se trazan las perpendiculares DM y QN hacia la línea BC. Entonces* $DM + QN = BC$*.*



Demostración. Construimos la recta AI paralela a DM y a QN, tenemos que $\triangle DMB$ es congruente con $\triangle BIA$, esto ya que $DB = AB$, $\angle DBM = \angle BAI$ y $\angle DMB = \angle BIA = 90°$. Similarmente $\triangle AIC$ es congruete con $\triangle CNQ$. Entonces $DM = BI$ y $QN = IC$, por lo tanto $DM + QN = BC$. □

Ejemplo 1.1.10 *Un trapecio* $ABCD$*, con* AB *paralelo a* CD*, tiene sus diagonales* AC *y* BD *mutuamente perpendiculares. Entonces* $AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2$*.*



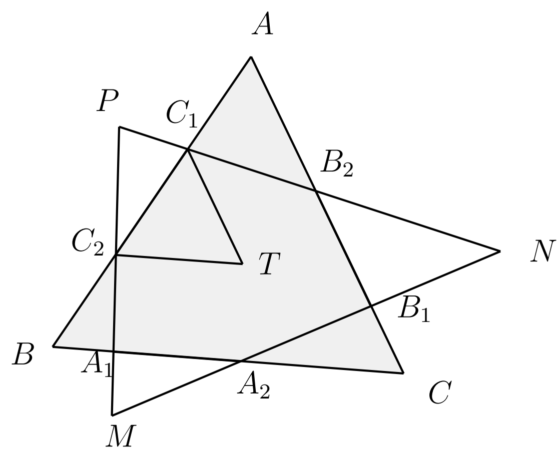
Demostración. Extendemos AB a través de B hasta el punto E de tal forma que $BE = DC$, así aseguramos que CE es paralela a DB y además $\angle ACE = 90°$.

Usando el Teorema de Pitágoras,

$$AC^2 + CE^2 = AE^2$$
$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

□

Ejemplo 1.1.11 *Sea C_1C_2, A_1A_2 y B_1B_2 tres segmentos de igual longitud sobre los lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Entonces* $\frac{C_2A_1}{PM} = \frac{A_2B_1}{MN} = \frac{B_2C_1}{NP}$.



Demostración. Si construimos rectas paralelas a los lados AC y BC que pasen por los puntos C_1 y C_2 respectivamente, estas se cortan en el punto T, por tanto tenemos un triángulo equilátero $\triangle TC_1C_2$. Es fácil ver que $C_2A_1A_2T$ y $C_1TB_1B_2$ son paralelogramos. Entonces $TB_1 \parallel PN$ y $A_2T \parallel PM$, así afirmamos que $\triangle TA_2B_1 \sim \triangle PMN$ y además $TA_2 = C_2A_1$ y $TB_1 = C_1B_2$. Por lo tanto

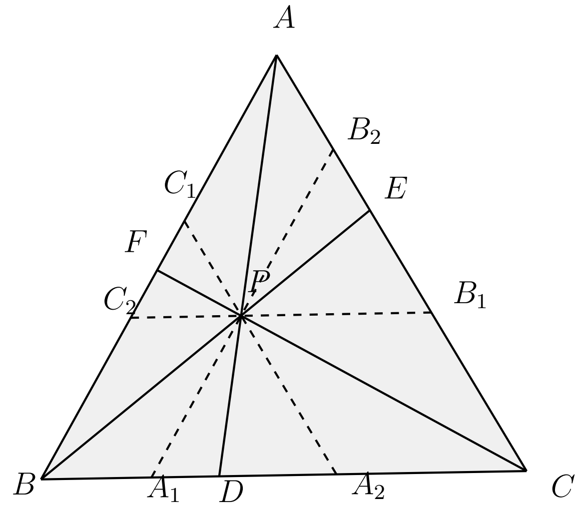
$$\frac{TA_2}{PM} = \frac{A_2B_1}{MN} = \frac{TB_1}{NP}$$

Así obtenemos

$$\frac{C_2A_1}{PM} = \frac{A_2B_1}{MN} = \frac{B_2C_1}{NP}$$

□

Ejemplo 1.1.12 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y sean D, E y F puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, de manera que AD, BE y CF concurren en un punto P. Entonces $PD+PE+PF<l$, donde l es la longitud del lado del $\triangle ABC$.*



Demostración. Sean C_1A_2, C_2B_1 y A_1B_2 rectas paralelas a CA, BC y AB respectivamente y que concurren en el punto P. Así tenemos que $\triangle C_1C_2P$, $\triangle B_1B_2P$, $\triangle A_1A_2P$ son equiláteros, entonces $FP < C_2P$, $PE < PB_1$ y $PD < A_1A_2$, además $C_2P = BA_1$ y $PB_1 = A_2C$. Por lo tanto $PD + PE + PF < A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = l$. $\square$

1.2. Construcción de ángulos auxiliares

El bisecar, duplicar, sumar un ángulo adyacente a otro o encontrar puntos sobre los cuales trazar un ángulo, son construcciones las cuales nos pueden ayudar a transformar nuestro problema para que de este modo sea evidente la aplicación de algún teorema o resultado conocido. En esta sección resolvemos problemas en los cuales aplicamos la idea anterior.

Ejemplo 1.2.1 *Encuentra el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia unitaria circunscrita a éste.*

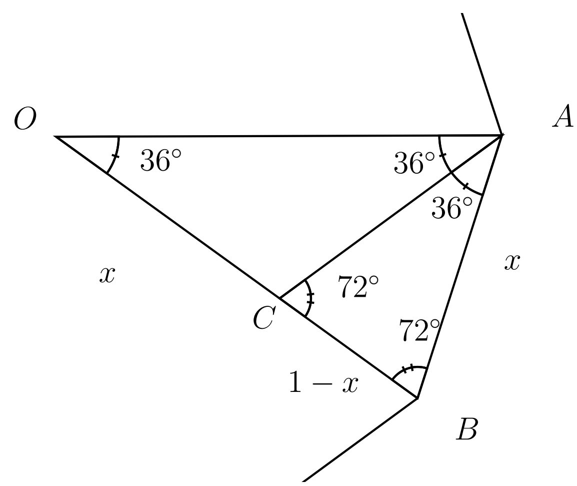
Demostración. Sea $AB = x$ uno de los lados del decágono, O el centro de la circunferencia. Sea C un punto sobre el lado OB de tal manera que $\angle OAC = \angle CAB = 36°$. De esta manera, obtenemos el triángulo $\triangle CAB$, el cual es semejante al triángulo $\triangle OAB$. Utilizando la proporción entre los lados tenemos:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}.$$

De lo anterior obtenemos

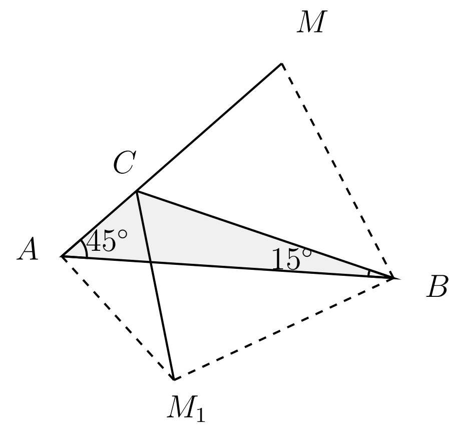
$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Resolviendo obtenemos las raíces $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$. La segunda no puede ser solución a nuestro problema, ya que no existen longitudes negativas. Por lo tanto la solución es $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. $\square$



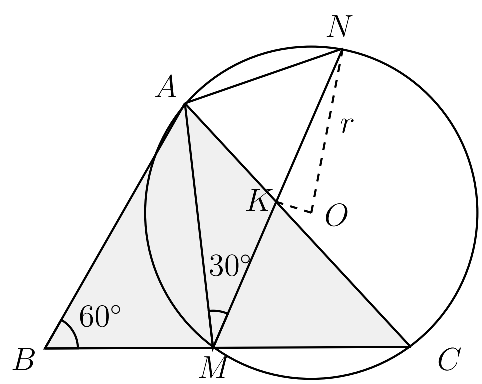
Ejemplo 1.2.2 *En el triángulo $\triangle ABC$ se conocen los ángulos $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$. En la prolongación del lado AC más allá del punto C se toma el punto M de manera que $CM = 2AC$. Hallar $\angle AMB$.*

Demostración. Construyamos el ángulo $\angle M_1CB = \angle BCM$ tal que M_1 es simetrico con M respecto de CB, podemos observar que CB es bisectriz del ángulo $\angle MCM_1$. Además $\angle M_1CA = 60°$ y $AC = \frac{1}{2}CM$, de aquí se deduce que $\angle M_1AC = 90°$; entonces AB es la bisectriz del ángulo $\angle M_1AC$, B se encuentra sobre la bisectriz externa de $\angle AM_1C$. Así $\angle CM_1B = \angle CMB = \angle AMB = 75°$. $\square$

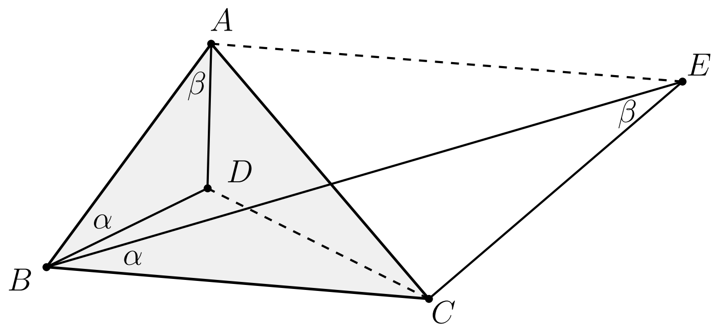


Ejemplo 1.2.3 *En el triángulo $\triangle ABC$, cuyo $\angle B = 60°$, la bisectriz del ángulo A corta corta a BC en el punto M. En el lado AC se toma un punto K de modo que $\angle AMK = 30°$. Hallar $\angle OKC$, donde O es el centro de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo $\triangle AMC$.*

Demostración. Sea $\angle BAC = 2\alpha$, por construcción sabemos que $\angle AMC = 60° + \alpha$, así $\angle KMC = 30° + \alpha$, además $\angle MKC = 30° + \alpha$, es decir, $MC = KC$. Utilizando un truco ya conocido, prolonguemos MK hasta que se intersecte con la circunferencia en el punto N, de este modo $AN = NK = r$, r radio de la circunferencia (ya que $\angle AMN = 30°$). Los puntos A, K y O se hallan en la ciercunferencia con centro en N, así hemos construido $\angle ANO = 60°$, esto por que $\triangle ANO$ es equilátero. Por lo tanto $\angle AKO = 150°$. □



Ejemplo 1.2.4 *Se escoje un punto D en el interior de un triángulo escaleno $\triangle ABC$ de tal manera que el ángulo $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90$ y $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Encuentra $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.*



Demostración. Se traza el segmento CE de la misma longitud que AC y de tal manera que CE es perpendicular a AC (aquí hemos formado el ángulo $\measuredangle ACB + 90°$). Tenemos que $\measuredangle BCE = \measuredangle BDA$, además $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{EC}$ lo cual implica que $\triangle ABD \sim \triangle EBC$. Por otro lado, como $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BC}$ tenemos que $\triangle ABE \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}$.

Esto a la vez implica que $\frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}AC}{CD} \Rightarrow \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$ $\square$

Ejemplo 1.2.5 *Por un punto P exterior a una elipse trazamos dos tangentes a ésta, los puntos de tangencia son X e Y. Entonces $\angle F_1PX = \angle F_2PY$, ($F_1$ y F_2 son los focos de la elipse).*

Demostración. Sea F_1' y F_2' las reflexiones de F_1 y F_2, con respecto a PX y PY, respectivamente (así es como costruimos los ángulos que requerimos para la demostración). Entonces $PF_1' = PF_1$ y $PF_2' = PF_2$. Además los puntos F_1, Y y F_2' son colineales (por la propiedad óptica de las elipses)[1]. Similarmente F_1',

[1]Una linea l tangente a la elipse en un punto P. Entonces l es bisectriz de el ángulo exterior $\angle F_1PF_2$. (F_1 y F_2 son los focos de la elipse)

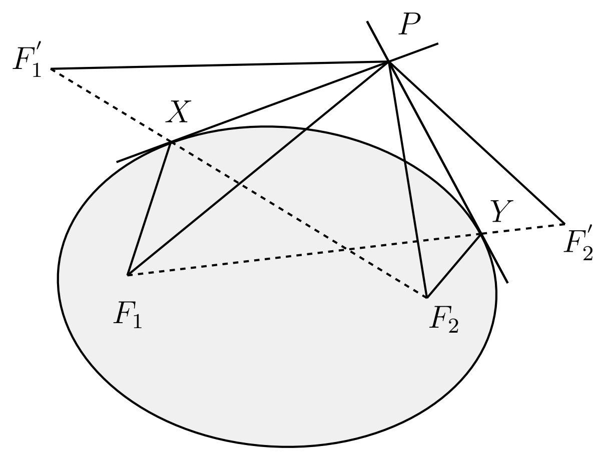
X, F_2 son colineales. Entonces

$$F_2F_1^{'} = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_2^{'}F_1.$$

Así los triángulos $\triangle PF_2F_1^{'}$ y $\triangle PF_1F_2^{'}$ son iguales. Por lo tanto

$$\angle F_2PF_1 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1^{'} = \angle F_1PF_2^{'} = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY.$$

Por lo tanto $\angle F_1PX = \angle F_2PY$. $\square$



Ejemplo 1.2.6 *Sea AD la mediana del triángulo $\triangle ABC$. Sabemos que $\angle DAC + \angle ABC = 90°$. Hallar el valor de $\angle BAC$ si se sabe que $AB \neq AC$.*

Demostración. Sea $\angle DAC = \alpha$. Costruyamos el ángulo $\angle EBA$ adyacente al ángulo $\angle ABC$ tal que $\angle EBA + \angle ABC = 90°$ y E, A y D sean colineales. Además, por construcción $\angle ADB = 2\alpha$. Sea G el punto de intersección de AC con EB. Así obtenemos que

$$\angle BED = 90° - 2\alpha.$$

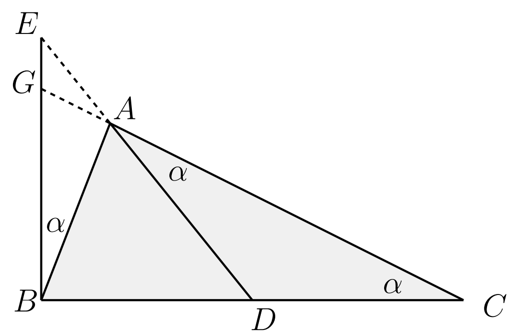
y además

$$\angle BGC = \alpha + \angle BED = \alpha + 90° - 2\alpha = 90° - \alpha.$$

Por lo tanto

$$\angle BAC = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ.$$

$\square$



Ejemplo 1.2.7 *En el triángulo $\triangle ABC$ tenemos que $\angle BCA$ es obtuso y $\angle BAC = 2\angle ABC$. La línea através de B perpendicular a BC intersecta a la línea AC en D. Sea M el punto medio de AB. Entonces $\angle AMC = \angle BMD$.*

Demostración. Sea F un punto sobre CD tal que $\angle CBF = \alpha$ y GA la bisectriz de el ángulo en A, GA se intersecta con BF en H, además BD es bisectriz exterior de $\triangle BFA$ ya que $\angle DBC = 90^\circ$. Ahora vamos a probar que D, H y E son colineales (por medio del Teorema de Menelao)[2]. Por el teorema de la bisectriz tenemos

$$\frac{FD}{AD} = \frac{BF}{BA}.$$

Entonces

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{FD} = \frac{BA}{BF}.$$

Notemos que

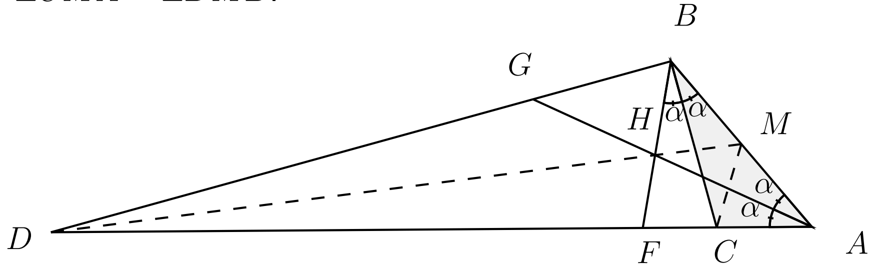
$$\frac{AM}{MA} \cdot \frac{AD}{DF} \cdot \frac{FH}{HB} = \frac{AD}{DF} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{AC}{CF} \cdot \frac{AF}{AB}.$$

Como $BF = AF$, entonces

$$\frac{AC}{CF} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{AC}{CF} \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} = 1.$$

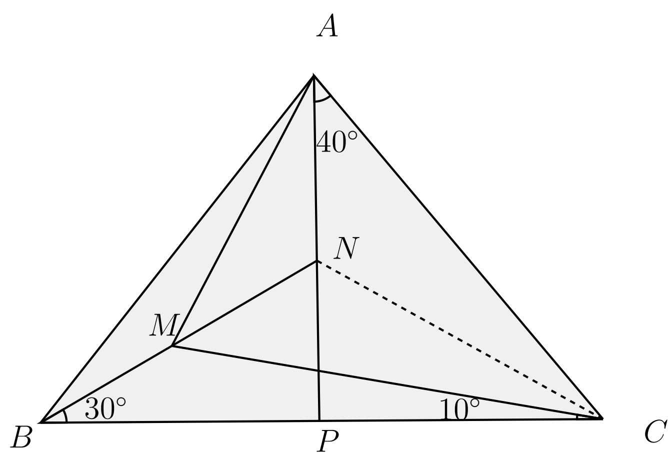
[2] Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E y F, puntos sobre las líneas BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, D, E y F son colineales si y sólo si $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Por lo tanto D, H y M son colineales. Se sigue que $\triangle BHM \cong \triangle CMA$. Por lo tanto $\angle CMA = \angle DMB$. $\square$



Ejemplo 1.2.8 *En el triángulo $\triangle ABC$, $AB = AC$, $\angle A = 80°$. En el interior del triángulo se toma el punto M tal que $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Hallar $\angle AMC$.*

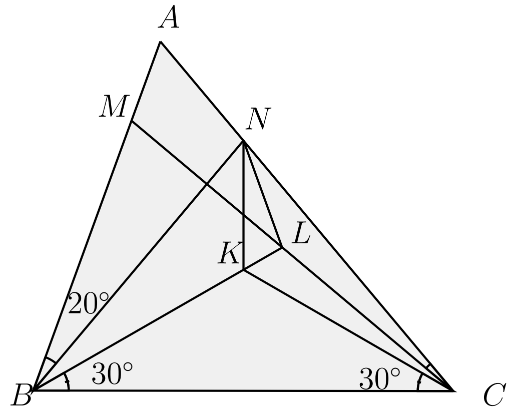
Demostración. Si construimos la bisectriz AP, entonces BM se intersecta con esta en el punto N, como $BN = NC$ entonces $\angle BNC = 120°$, además $\angle BNA = \angle ANC = 120°$. Como $\angle NCA = \angle NCM = 20°$, $\angle NMC = \angle NAC = 40°$ y NC es común, tenemos que $\triangle NMC$ es congruente con $\triangle NCA$. Así $\triangle AMC$ es isósceles, con $MC = AC$. Por lo tanto $\angle AMC = 70°$. $\square$



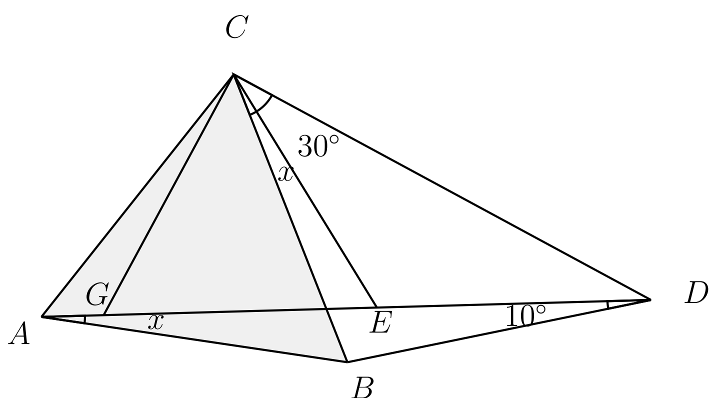
Ejemplo 1.2.9 *En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$, sobre AB se*

toma el punto M de manera que $\angle MCB = 40°$, y sobre AC el punto N de tal manera que $\angle NBC = 50°$. Hallar $\angle NMC$.

Demostración. Designemos un punto K tal que $\angle KBC = \angle KCB = 30°$ y sea L el punto de intersección de las rectas MC y BK. Por construcción sabemos que $\triangle NBC$ es isósceles, $\angle KNC = 40°$ ya que K se encuentra sobre la bisectriz de $\angle BNC$. L es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo $\triangle NKC$ ya que CL es bisectriz en el $\angle KCN$ y $\angle NKL = 60°$. De lo anterior, se sigue que $\angle LNB = 60°$ y como $\angle NLC = 150°$ entonces $\angle NLM = 30°$. Con esto se obtiene que $BN \perp ML$ y como BN es bisectriz de $\angle MBL$ entonces $MN = NL$. Concluimos que $\angle NML = 30°$. $\square$



Ejemplo 1.2.10 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y sea D un punto tal que $\angle ADB = 10°$, $\angle BAD = x$ y $\angle BCD = x + 30°$. Hallar x.*



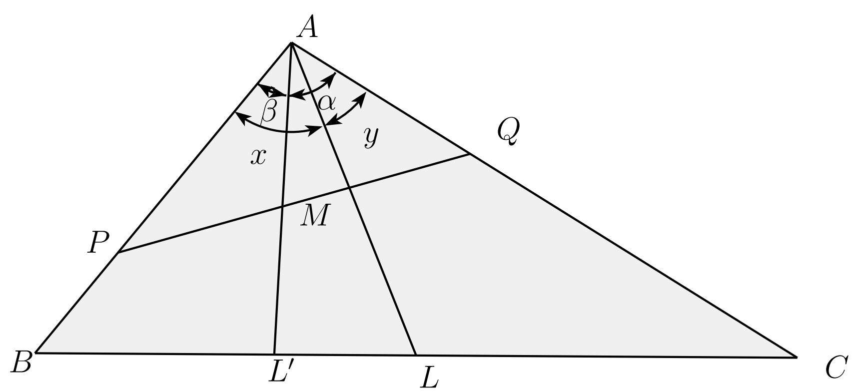
Demostración. Sea E un punto sobre AD tal que $\angle DCE = 30°$, se sigue que $\angle ECB = x$ y $\angle AEC = 60°$ ya que el cuadrilátero $ABEC$ es ciclico. Ahora sea G sobre AD tal que $\angle BCG = 60° - x$, entonces $\angle GCE = 60°$, lo cual implica que $\triangle CGE$ es equilátero. Por el criterio LAL se tiene que $\triangle CAG \cong \triangle CBA$, se sigue que $\angle CBE = 120°$, entonces $\angle AEB = 60°$. El triángulo $\triangle CED$ es isśceles y $\angle BED = 120°$ ya que es exterior al ángulo $\angle AEB$ lo cual implica que $\angle EBD = 50°$ y $\triangle EBD \cong \triangle EBC$. Por lo tanto $x = 10°$. □

1.3. Construcción de circunferencias auxiliares.

Los puntos sobre una circunferencia pueden arrojarnos mucha información en un problema geométrico, es por ello que en esta sección presentamos ejemplos resueltos mediante la estrategia de construir circunferencias como trazo auxiliar.

Definición 1.3.1 *Una recta simétrica a la mediana de un triángulo, con respecto a la bisectriz del mismo ángulo del cual parte la mediana, se llama simediana.*

Teorema 1.3.1 *El lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas a BC con respecto a los lados AB y AC del triángulo $\triangle ABC$, es la simediana por A.*



Demostración. Sean AL y AL' la mediana y la simediana por A, y sea PQ antiparalela a BC. Con los ángulos en A como se muestra en la figura y sabiendo que L es punto medio de BC

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{AB}{CA};$$

y por las igualdades de los ángulos de los ángulos debidas a la isogonalidad

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AB}{CA}.$$

Puesto que PQ es antiparalelo a BC

$$\frac{AP}{QA} = \frac{CA}{AB}.$$

Además

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{AP \cdot \sin \beta}{QA \cdot \sin \alpha}$$

Combinando estos resultados se obtiene que $PM = MQ$. Inversamente, sea M el punto medio de la antiparalela PQ. Entonces $\frac{AP}{QA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; y tambien $\frac{CA}{AB} = \frac{\sin x}{\sin y}$. Ya que

$$\frac{AP}{QA} = \frac{CA}{AB}$$

se infiere que

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin y}.$$

Ahora $x + y = \alpha + \beta < 180°$, además $x = \alpha$, se sigue que el lugar geométrico de los puntos medios M de PQ es la simediana por A.

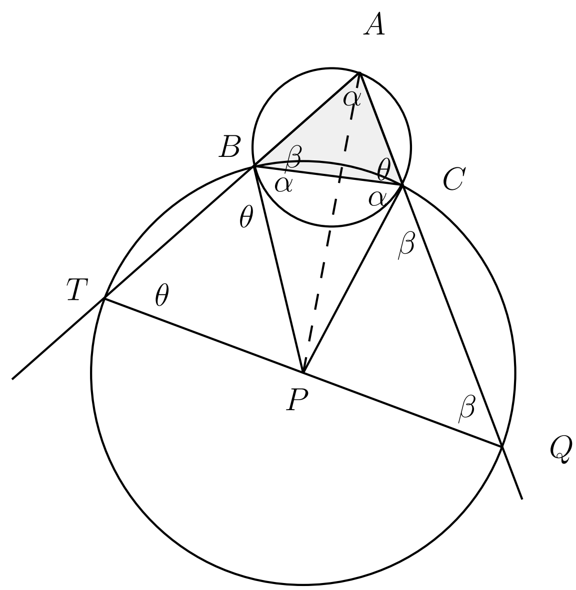
Ejemplo 1.3.1 *Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo $\triangle ABC$ en los puntos B y C se intersectan en un punto P. Entonces tenemos que AP es la simediana del lado BC.*

Demostración. Construimos una circunferencia con centro en P y radio PC. Esta corta a AB en T y a AC en Q. Tenemos triángulos isósceles $\triangle TPB$, $\triangle BPC$ y $\triangle PQC$. Entonces

$$\angle BAC = \angle PBC = \angle BCP = \alpha \Rightarrow \angle BPC = 180° - 2\alpha,$$

$$\angle BCA = \angle PBT = \angle BTP = \theta \Rightarrow \angle TPB = 180^\circ - 2\theta,$$
$$\angle ABC = \angle QCP = \angle PQC = \beta \Rightarrow \angle CPQ = 180^\circ - 2\beta,$$

de donde se obtiene que T, P, Q son colineales. Entonces, como $TP = PQ$ se tiene que AP es mediana del triángulo $\triangle ATQ$ y como $\angle ABC = \angle AQT$, por el Lema anterior tenemos que AP es simediana de $\triangle ABC$. $\square$



Potencia de un punto

Consideremos un punto P y una circunferencia Γ. Ahora, tracemos una línea ℓ que pase por P y nombremos A y B a las intersecciones de ℓ con Γ. El producto $PA{\cdot}PB$ es llamado la *potencia* de P *con respecto a* Γ. Como veremos enseguida, el valor de $PA \cdot PB$ no depende de la línea ℓ que hayamos trazado.

Teorema 1.3.2 *La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia Γ es constante.*

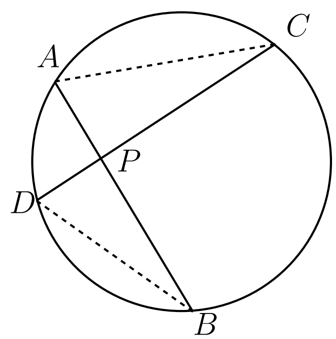
Demostración. El teorema implica cada uno de los siguientes casos.

I El punto P está sobre la circunferencia. Claramente la potencia es cero ya que uno de los segmentos PA o PB tiene longitud cero.

II El punto está en el interior de Γ. Sea AB y CD dos cuerdas arbitrarias que pasan por el punto P. Trcemos CA y BD. Tenemos que $\angle ACD = \angle ABD$ por que ambos son ángulos inscritos que intersectan el mismo arco, análogamente $\angle CAB = \angle CBD$, de aquí que el triángulo $\triangle APC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

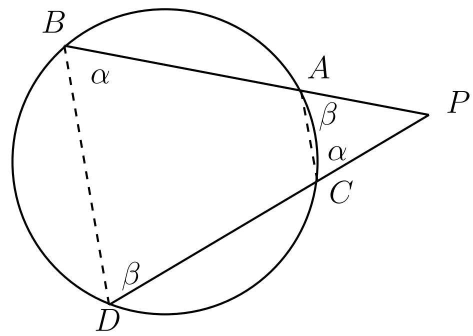
lo cual muestra que la potencia es constante para todas las cuerdas que pasen por P.



III El punto P está en el exterior de la circunferencia. Sean PB y PD dos secantes arbitrarias trazadas desde P, las cuales intersectan a la circunferencia, además de en B y D, en los puntos A y C, como se muestra en la figura. Tracemos CA y BD. Tenemos que $\angle ACP = \angle ABD = \alpha$, ya que el cuadrilátero $ABDC$ es cíclico. Por la misma razón, $\angle CAP = \angle BDC = \beta$, de aquí que el triángulo $\triangle APC$ es semejante al triángulo $\triangle DPB$ de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

lo cual muestra que la potencia es constante para todas las rectas secantes que pasen por P. $\square$

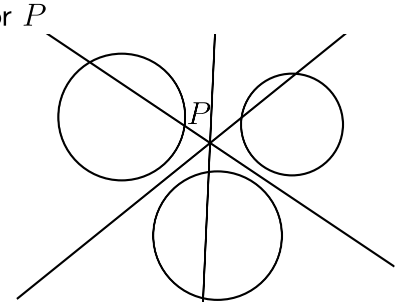


Definición 1.3.2 *El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las circunferencias es igual.*

Definición 1.3.3 *Si dos circunferencias son tangentes en un punto entonces el eje radical es la línea tangente que pasa por el punto común.*

Teorema 1.3.3 *Los ejes radicales de tres circunferencias (con centros no colineales) tomadas por pares son concurrentes.*

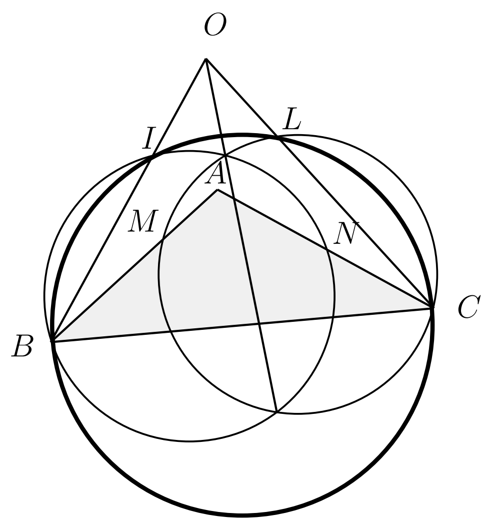
Demostración. Consideremos tres circunferencias, cuyos centros no son colineales, y sea P la intesección del eje radiacal de la primera y la segunda, y de la segunda con la tercera. Entonces P tendrá potencias iguales con respecto a las tres circunferencias. Se sigue que entonces el eje radical de la primera y la tercera también pasa por P $\square$



Ejemplo 1.3.2 *Sobre las las rectas AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se toman los puntos M y N, respectivamente. Entonces la cuerda común de las*

dos circunferencias con diámetros CM y BN pasan por el punto de intersección de las alturas del triángulo $\triangle ABC$.

Demostración. Construimos una circunferencia auxiliar Γ_3 con diámetro BC y llamemos Γ_1 y Γ_2 a las circunferencias con diámetros CM y BN, respectivamente. Ahora la cuerda común entre Γ_1 y Γ_3 es altura desde el segmento AC a el vértice B, similarmente la cuerda común entre Γ_2 y Γ_3 es altura desde AB hacia el vértice C. Por lo tanto la cuerda común entre Γ_1 y Γ_2 concurre en el mismo punto donde concurren las alturas, esto ya que las cuerdas comúnes de tres circunferencias concurren en un mismo punto. $\square$



Ejemplo 1.3.3 *(Lema de Haruki). Sean AB y CD dos rectas que no se intersectan dentro de una circunferencia y un punto P cualquiera dentro de el arco $\widehat{AB}$.Sean E y F las intersecciones de las cuerdas PC y PD con AB, respectivamente.Entonces el valor de $\frac{AE.BF}{EF}$ no depende de la posición de P, es decir $\frac{AE.BF}{EF}$ es constante.*

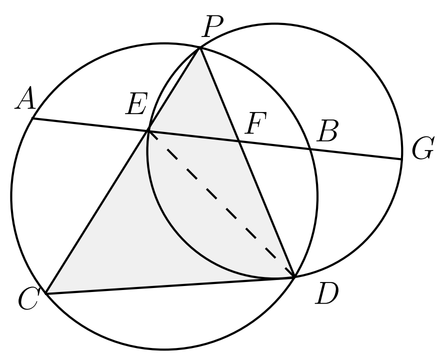
Demostración. Observemos que $\angle CPD$ es constante. Se construye el circuncírculo de el triángulo $\triangle PED$ y definimos el punto G como la interseccón de este círculo con la línea AB. Notemos que $\angle EGD = \angle EPD$, ya que comparten el mismo arco de el circuncírculo de el triángulo $\triangle PED$. Recordemos que para toda posición de P, en el arco AB, el ángulo $\angle EPD$ es constante y por ende $\angle EGD$ también. Se sigue de aquí que el punto G sobre la línea AB está fijo, es decir, la longitud de BG es constante.

Por potencia de un punto se obtiene lo siguiente,

$$AF \cdot FB = PF \cdot FD$$

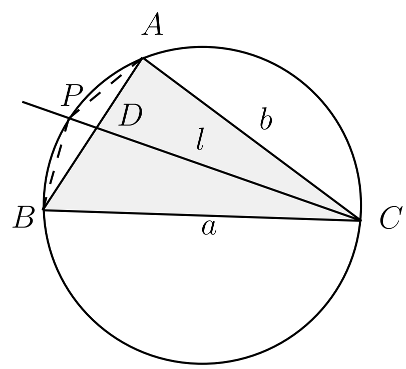
$$EF \cdot FG = PF \cdot FD$$

De esto se sigue que $(AE+EF)FB = EF(FB+BG)$ y entonces $AE \cdot FB = EF \cdot BG$. Por lo tanto, $\frac{AE \cdot BF}{EF} = BG$, es constante. $\square$



Ejemplo 1.3.4 *Si a y b son los lados de un triángulo, l, la bisectriz del ángulo entre ellos, $a^{'}$ y $b^{'}$, los segmentos en los que la bisectriz divide el tercer lado. Entonces,*

$$l^2 = ab - a^{'}b^{'}.$$



Demostración. Sea D el punto donde la bisectriz intersecta al lado AB, construimos la circunferencia circunscrita de el triángulo $\triangle ABC$ y marcamos con P el punto en que ésta se intersecta con la bisectriz, tenemos así el cuadrilatero cíclico $APBC$. Entonces $\triangle APC$ es semejante a $\triangle DBC$, ya que $\angle ACP = \angle DCB$ y $\angle APC = \angle ABC$. Por la potencia del punto D,

$$BD \cdot DA = PD \cdot DC$$

Entonces

$$a' \cdot b' = PD \cdot l. \tag{1.1}$$

Por la semejanza de triángulos $\triangle APC \sim \triangle DBC$ tenemos

$$\frac{b}{l} = \frac{PD + l}{a}$$

$$a \cdot b = (PD + l)l$$

$$a \cdot b = PD \cdot l + l^2$$

Sustituyendo 1.1 tenemos,

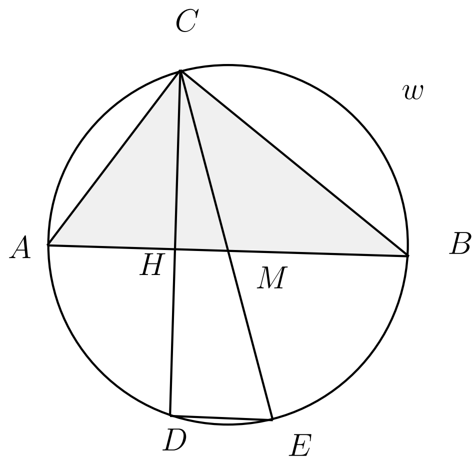
$$a \cdot b = a' \cdot b' + l^2$$

$$a \cdot b - a' \cdot b' = l^2$$

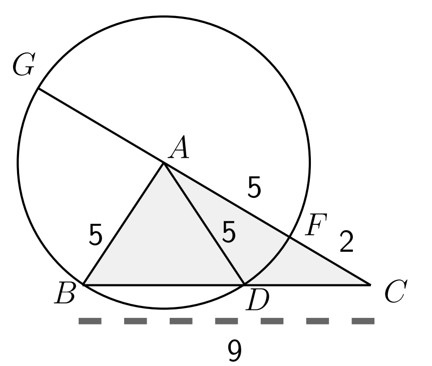
$\square$

Ejemplo 1.3.5 *Si la altura y la mediana, trazadas desde uno de los vértices de un triángulo escaleno, se encuentran dentro del triángulo y forman con sus lados laterales ángulos iguales, dicho triángulo es rectángulo.*

Demostración. Circunscribamos al triángulo dado $\triangle ABC$ la circunferencia ω y tracemos la altura CH y la mediana CM hasta la intersección con la circunferencia en los puntos D y E, respectivamente. Como $\angle ACD = \angle BCE$, $\widehat{BE} = \widehat{DA}$ y, por lo tanto las cuerdas AB y DE son paralelas. Pero $\angle CHB = 90°$, esto quiere decir que también $\angle CDE = 90°$. Entonces, CE es diametro de la circunferencia. Este divide por la mitad la cuerda AB, lo que sólo es posible cuando la cuerda AB es diametro de la circunferencia ω. En este caso, $\angle ACB = 90°$, es decir, $\triangle ABC$ es rectángulo. $\square$



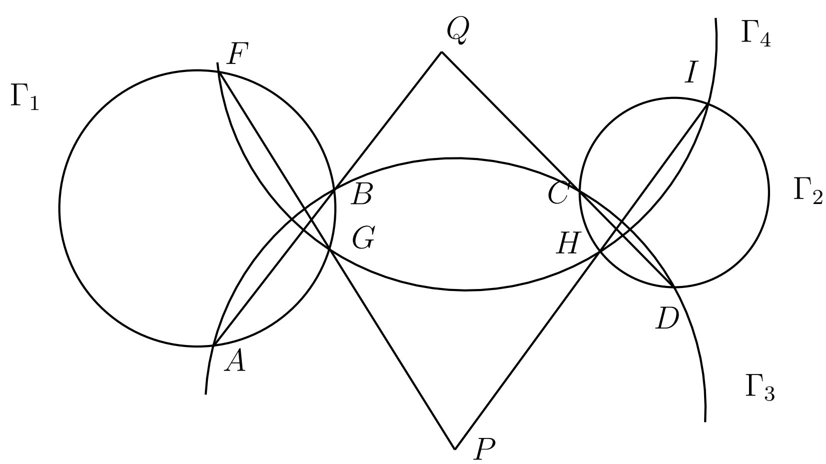
Ejemplo 1.3.6 *En la siguiente figura* $AB = AD = 5$, $BC = 9$ *y* $AC = 7$. *Encontrar* $\frac{BD}{DC}$.



Demostración. Construyamos una circunferencia con centro en A y radio AB. La recta CA corta a la circunferencia en los puntos F y G. Ahora podemos aplicar las propiedades de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia: tenemos que $CF \cdot CG = DC \cdot CB$, esto equivale a $2 \cdot 12 = CD \cdot 9$, esntonces $CD = \frac{8}{3}$. Podemos calcular fácilmente $BD = \frac{19}{3}$, por lo tanto $\frac{BD}{DC} = \frac{19}{8}$. □

Ejemplo 1.3.7 *Construcción del eje radical de dos circunferencias que no se intersectan (usando solamente regla y compás).*

Demostración. Sea Γ_1 y Γ_2 las circunferencias dadas. Hacemos Γ_3 circunferencia que corta a Γ_1 y Γ_2 en los puntos A, B y C, D, respectivamente, entonces las cuerdas AB y CD son ejes radicales comunes de Γ_1 con Γ_3 y Γ_2 con Γ_3, respectivamente, estos se intersectan el en punto Q. Entonces Q es un punto con la misma potencia respecto de Γ_1 y Γ_2 por tanto está sobre el eje radical de Γ_1 y Γ_2. Similarmente para Γ_4 los ejes radicales FG y HI se intersectan en el punto P, P tiene la misma potencia respecto de Γ_1 y Γ_2 así P está sobre el eje radical de Γ_1 y Γ_2. Por lo tanto la recta que pasa por P y Q es el eje radical de las dos circunferencias que no se intersectan. □

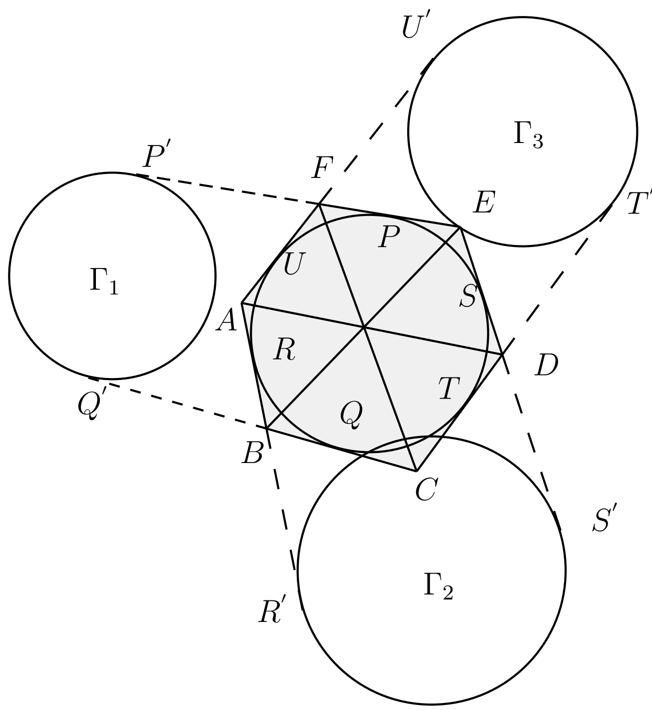


Ejemplo 1.3.8 *(Teorema de Brianchon). Si existe una circunferencia inscrita en un hexágono, entonces las diagonales principales concurren.*

Demostración. Sean R,Q, T, S, P, U los puntos en los cuales la circunferencia toca a AB, BC, CD, DE, EF, FA, respectivamente. Entonces las diagonales AD, BE, CF, son secantes del círculo inscrito. Extendemos los segmentos EF, CB, AB, ED, CD, AF hasta los puntos P', Q', R', S', T', U', respectivamente, tales que

$$PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'.$$

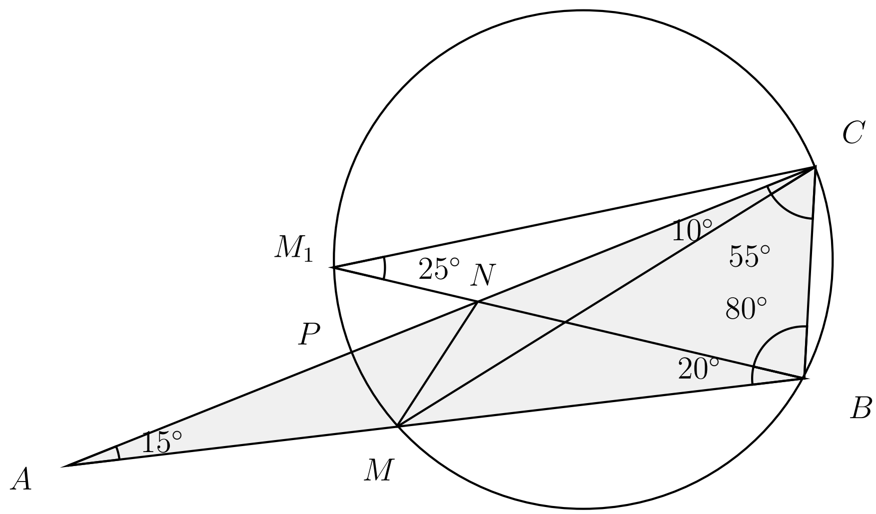
Aquí es donde hacemos uso de la contrucción de circunferencias. Sea Γ_1 tangente a PP' y QQ' en los puntos P' y Q', Γ_2 tangente a RR' y SS' en los puntos R' y S' y Γ_3 tangente a TT' y UU' en los puntos T' y U'. Ahora $AR = AU$, entonces $AR' = AU'$ y por construcción $DT' = DS'$. Por lo tanto $(AR')^2 = (AU')^2$ y $(DT')^2 = (DS')^2$, así A y D tienen la misma potencia respecto a Γ_2 y Γ_3 y por estos puntos pasa el eje radical común entre Γ_2 y Γ_3. Similarmente para Γ_1 y Γ_2 por E y B pasa el eje radical común entre estas dos ciurcunferencias y por F, C pasa el eje radical común entre Γ_1 y Γ_3. Por el Teorema 1.3.2 concluimos que los tres ejes radicales concurren en un punto lo cual implica que las tres diagonales del hexágono concurren en ese mismo punto. □



Ejemplo 1.3.9 *En el triángulo $\triangle ABC$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 65^\circ$; sobre el lado*

AB se toma el punto M de modo que $\angle MCB = 55°$ y sobre AC, el punto N de tal manera que $\angle NBC = 80°$. Hallar $\angle NMC$.

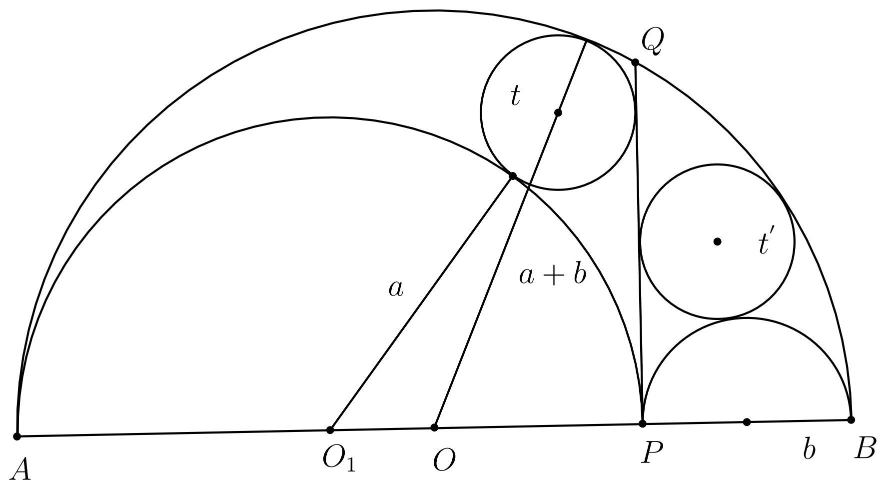
Demostración. Describamos la circunferencia circunscrita a $\triangle BMC$ y prolonguemos BN hasta que intersecte a ésta en el punto M_1. Sea P el punto donde AC intersecta a la circunferencia. Como $\angle PCM = 10°$ y $\angle CBM = 100°$ tenemos que $\angle CBP = 90°$, de donde se obtiene que CP es diámetro. Ahora, como $\angle M_1CM = \angle M_1BM = 20°$ y $\angle PCM = 10°$ tenemos que $\angle M_1CP = 10°$, lo que implica que $M_1C = MC$. De aquí se obtiene fácilmente que $\angle NMC = \angle NM_1C = 25°$. $\square$



Teorema de Arquímedes

Cada uno de los dos círculos tangentes a CP y a cada uno de los semicírculos, como se muestra en la figura, tienen radios iguales, dada por

$$t = \frac{ab}{a+b}.$$



Demostración. Dada una circunferencia de centro O y radio a, la denotaremos como $O(a)$. Consideremos el círculo tangente a los círculos $O(a+b)$, $O_1(a)$ y la línea PQ. Denotemos con t el radio de este círculo. Calculando de dos maneras la altura del centro de este círculo hacia la línea AB, se tiene

$$(a+b-t)^2-(a-b-t)^2=(a+t)^2-(a-t)^2.$$

De esto

$$t=\frac{ab}{a+b}.$$

Ahora si consideramos la circunferencia tangente a $O(a+b)$, $O_2(b)$ y PQ, verifiquémos que el radio de ésta es igual a t. Similarmente al procedimiento anterior tenemos que

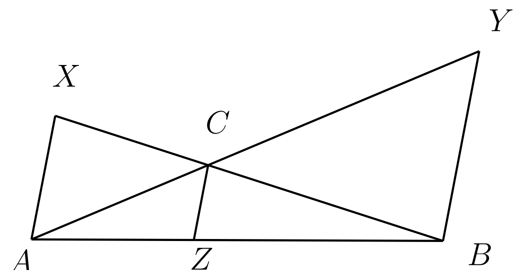
$$(a+b-t^{'})^2-(a-b+t^{'})^2=(b+t^{'})^2-(b-t^{'})^2.$$

De esto obtenemos

$$t^{'}=\frac{ab}{a+b}=t.$$

$\square$

Lema 1.3.1 *Sea Z un punto sobre el lado AB del triángulo $\triangle ABC$. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Entonces $CZ = \frac{AX \cdot BY}{AX+BY}$.*



Demostración. Tenemos que el triángulo $\triangle BCZ$ es semajante al triángulo $\triangle BXA$, de aquí obtenemos

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}.$$

Similarmente, de la semejanza de el triángulo $\triangle ACZ$ con $\triangle AYB$ tenemos

$$\frac{CZ}{BY} = \frac{AZ}{BA}.$$

Sumando las dos expresiones anteriores tenemos que

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{BA} = \frac{BZ + AZ}{AB} = 1.$$

$$\frac{(CZ) \cdot (BY + AX)}{AX \cdot BY} = 1.$$

Por lo tanto

$$CZ = \frac{AX \cdot BY}{BY + AX}.$$

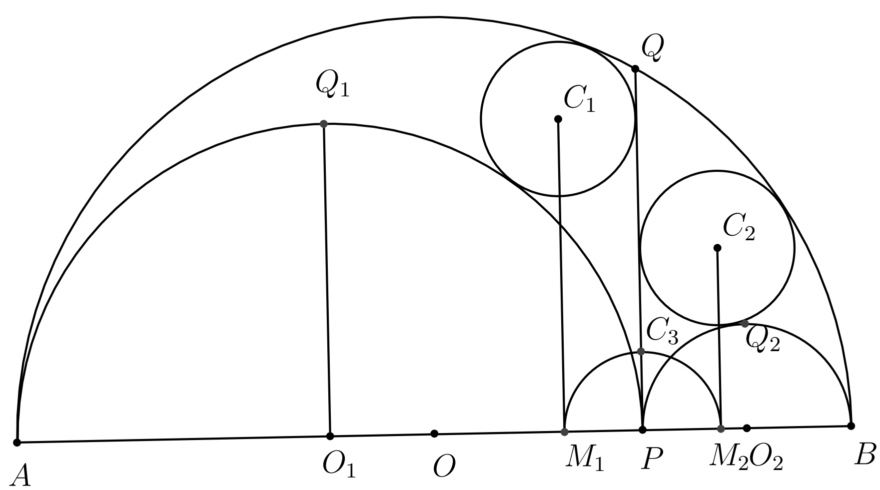
□

Ejemplo 1.3.10 *Construcción de los círculos de Arquímedes*

Sean Q_1 y Q_2 los puntos de los semicírculos $O_1(a)$ y $O_1(b)$, respectivamente, tal que O_1Q_1 y O_2Q_2 son perpendiculares a AB. Las líneas O_1Q_2 y O_2Q_1 se intersectan en un punto C_3 sobre la recta PQ (ya que, como PQ es eje radical de las dos circunferencias y $Q_1C_3 \cdot C_3O_2 = O_1C_3 \cdot C_3Q_2$, entonces C_3 está sobre el eje radical), y por el lema anterior

$$C_3P = \frac{ab}{a+b}.$$

Notemos que $C_3P = t$, el radio de la circunferencia de Arquímedes. Podemos utilizar esta circunferencia como elemento auxiliar para construir los círculos de Arquḿedes. Sea M_1 y M_2 puntos en AB tal que $PM_1 = PM_2 = C_3P$. El centro de la circunferencia C_1 de el círculo de Arquímedes $C_1(t)$ es la intersección de el ciŕculo $O_1(M_2)$ y la perpendicular a AB que pasa por M_1. Similarmente, C_2 es la intersección de el círculo $O_2(M_1)$ y a perpendicular a AB que pasa por M_2. □



1.4. Problemas propuestos

1.4.1. Segmentos auxiliares

Trazar segmentos paralelos

Problema 1.1 *Demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a* $180°$.

Problema 1.2 *Sea* $ABCDEF$ *un hexágono convexo*[3] *con lados opuestos paralelos. Mostrar que* $2|ACE| \geq |ABCDEF|$.

Problema 1.3 *Sea* $ABCDEF$ *un hexágono convexo con lados opuestos paralelos, muestre que* $|ACE| = |BDF|$.

Problema 1.4 *En el triángulo* $\triangle ABC$*, en los lados* AB *y* BC*, se han tomado los puntos* K *y* P *de forma que* $AK : BK = 1 : 2$, $CP : PB = 2 : 1$. *Las rectas* AP *y* CK *se cortan en el punto* E. *Hallemos el area del triángulo* $\triangle ABC$ *si sabemos que el área del triángulo* $\triangle BEC$ *es igual a* $4u^2$.

Problema 1.5 *En los triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle A'B'C'$ *los ángulos en* $\angle B$ *y* $\angle B'$ *son iguales, en tanto que la suma de los ángulos* $\angle A + \angle A' = 180°$. *Demostrar que* $aa' = bb' + cc'$.

Problema 1.6 *Demostrar que la recta que pasa por el punto de intersección de las continuaciones de los lados laterales del trapecio y el punto de intersección de sus diagonales, dividen la base de las diagonales por la mitad.*

Problema 1.7 *Sean* E, F, K *y* L *puntos sobre los lados* AB, BC, CD *y* DA *del cuadrado* $ABCD$*, respectivamente. Muestre que si los segmentos* EK *y* FL *son perpendiculares entonces* $EK = FL$

---

[3] Una figura es convexa si para cualesquiera dos puntos contenidos en su interior, existe un segmento entre estos dos puntos el cual esta completamente contenido dentro de la figura.

Problema 1.8 *La altura trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a ésta en segmentos de longitud* 9 *y* 16*. Del ángulo agudo mayor trazamos una recta que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuánto mide el segmento de tal recta que queda en el interior del triángulo?*

Problema 1.9 *Sean* E*,* F*,* K *y* L *puntos sobre los lados* AB*,* BC*,* CD *y* DA *del cuadrado* $ABCD$*, respectivamente. Muestre que si los segmentos* EJ *y* FL *son perpendiculares entonces* $EK = FL$*.*

Problema 1.10 *En el triángulo* $\triangle ABC$ *con* $AB > AC$*,* D *es el punto medio del lado* BC*;* E *está sobre el lado* AC*. Los puntos* P *y* Q *son los pies de las perpendiculares desde* B *y* E *a la linea* AD*. Demuestra que* $BE = AE + AC$ *si y sólo si* $AD = PQ$*.*

Problema 1.11 *En un triángulo isósceles* $\triangle ABC$*, con* $AB = AC$*, se extiende* CB *a través de* B *hasta un punto* P*. Una línea desde* P*, paralela a la altura* BF*, intersecta a* AC *en* D*. Se dibuja* PE *perpendicular a* AB*. Demuestra que* $BF + PE = PD$*.*

Prolongar segmentos

Problema 1.12 *Sean* AB *y* CD *las dos tangentes externas comunes de dos circunferencias* Γ_1 *y* Γ_2*, con* A*,* C *en* Γ_1 *y* B*,* D *en* Γ_2*. Una tangente interna común de* Γ_1 *y* Γ_2 *corta a los segmentos tangentes en* CD *y* AB *en* X *e* Y*, respectivamente. Sean* P *y* Q *los puntos de tangencia de la tangente interna común con* Γ_1 *y* Γ_2*. Probar que* $XP = QY$*.*

Problema 1.13 *Una circunferencia de radio* 1 *pasa por los dos vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia, trazada desde el tercer vértice del cuadrado es dos veces mayor que el lado del cuadrado. Hallar el lado del cuadrado.*

Problema 1.14 *Dentro de un hexágono regular* $ABCDEF$ *se coloca un punto* G *arbitrario y se trazan segmentos que lo unen con los vértices, formando seis* *triángulos ABG, BCG, CDG, DEG, EFG y FAG los cuales se colorean de forma alternada de negro y blanco. Demuestre que el área de la región negra es igual al área blanca.*

Problema 1.15 *Una circunferencia tiene su centro en el lado AB de un cuadrilátero cíclico $ABCD$. Los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Demuestra que $AD + BC = AB$.*

Problema 1.16 *El ángulo $\angle BAC$ es el menor de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$. Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T. Demuestra que $AU = TB + TC$.*

Problema 1.17 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea AP la bisectriz de $\angle BAC$ con P sobre BC, y sea BQ la bisectriz de $\angle ABC$ con Q sobre CA. Se sabe que $BAC = 60°$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$?*

Problema 1.18 *En un triángulo $\triangle ABC$ sea D el punto donde la bisectriz interior del ángulo $\angle BCA$ intersecta al lado AB. Si $CD = \ell$, $CB = a$, $CA = b$ y α es la medida del ángulo $\angle BCA$, demuestra que*

$$\ell = \frac{2ab.cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}.$$

Problema 1.19 *Sea AB y CD las dos tangentes externas comunes de dos circunferencias Γ_1 y Γ_2, con A, C en Γ_1 y B, D en Γ_2. Una tangente interna común de Γ_1 y Γ_2, corta a los segmentos tangentes CD y AB en X e Y, respectivamente. Sea P y Q los puntos de tangencia de la tangente interna común con Γ_1 y Γ_2. Probar que $XP = QY$*

1.4.2. Ángulos auxiliares

Problema 1.20 *Sea un punto P interior al triágulo $\triangle ABC$ tal que $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Sea D y E los incentros del triángulo $\triangle APB$ y $\triangle APC$, respectivamente. Entonces AP, BD y CE son concurrentes.*

Problema 1.21 *Sea O dentro de el triángulo $\triangle ABC$ tal que $\angle BAO = 40^\circ$ y la bisectriz en $\angle A$ pasa por O, además $\angle OCB = 30^\circ$ y $\angle OCA = 10^\circ$. Hallar $\angle OBC$.*

Problema 1.22 *Sean P y Q puntos en el interior de un triángulo $\triangle ABC$ tales que $\angle PAB = \angle QAC = \angle QBC$. Encontrar*

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC}.$$

Problema 1.23 *En un triángulo $\triangle ABC$, $\angle BAC = 100^\circ$, $AB = AC$. Se elige un punto D en el lado AC de modo que $\angle ABD = \angle CBD$. Demuestra que $AD + DB = BC$.*

Problema 1.24 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles y acutángulo con el ángulo $\angle BAC = 20^\circ$. Muestre que: $2BC < AB < 3BC$*

Problema 1.25 *En el interior del cuadrado $ABCD$ se toma el punto M de manera que $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Hallar $\angle MBC$.*

1.4.3. Circunferencias auxiliares

Problema 1.26 *Bisecar un segmento de línea dado.*

Problema 1.27 *Costruir el simétrico de un punto C con respecto a la línea AB.*

Problema 1.28 *Construir una cuarta proporcional a tres segmentos de línea dados.*

Problema 1.29 *Por un punto P construir una línea paralela a una línea dada.*

Problema 1.30 *Por un punto P construya una línea perpendicular a una línea dada.*

Problema 1.31 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea l cualquier recta que pase por B y que corte al lado AC en un punto E. Sea F el punto medio de EC, G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C a AB en el triángulo ABC. Si O denota el circuncentro del triángulo $\triangle AEH$. Muestre que los triángulos $\triangle OGF$ y $\triangle ABC$ son semejantes.*

Problema 1.32 *En el triángulo ABC se traza una recta que corta los lados AC y BC en los puntos M y N de manera que $MN = AM + BN$. Entonces todas las rectas de este genero son tangentes a una misma circunferencia.*

Capítulo 2

Métodos algebraicos en la solución de problemas geométricos.

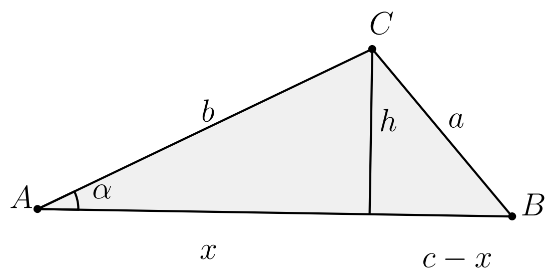
2.1. Introducir un parámetro auxiliar

El metódo del *parámetro auxiliar* consiste en suponer que alguno de los elementos del problema (longitud de un segmento, un ángulo) es conocido. Los demás elementos de la figura se determinan en función de este parámetro auxiliar; de esta manera se obtienen ecuaciones de las cuales se pueden determinar los valores de los demás elementos. El elemento lineal introducido lleva por nombre parámetro auxiliar y es aplicable en los problemas donde la figura geométrica está definida con suficiente precisión.

En los siguientes ejemplos visualizaremos la utilización de parámetros para la simplificacón de la solución.

Ejemplo 2.1.1 *Teorema del Coseno. Dado un triángulo $\triangle ABC$, siendo α el ángulo opuesto al lado a, se cumple que:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



Demostración. Primeramente introducimos los parámetros auxiliares h y x, con h como altura desde el vértice C, como se ve en la figura anterior. Utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 = (c-x)^2 + h^2$, desarrollando la ecuación obtenemos

$$a^2 = c^2 - 2xc + x^2 + h^2 \tag{2.1}$$

Por otro lado

$$b^2 = x^2 + h^2 \tag{2.2}$$

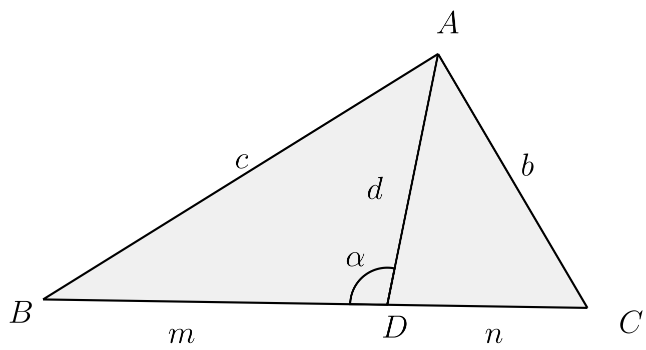
y $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$, despejando x

$$x = b\cos(\alpha) \tag{2.3}$$

Sustituyendo 2.2 y 2.3 en 2.1, obtenemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ □

Ejemplo 2.1.2 *Teorema de Stewart. Sean a, b, c las longitudes de los lados BC, AC y AB respectivamente, del triángulo $\triangle ABC$. Sea D un punto dentro del segmento BC. Si $BD = m$, $CD = n$ y $AD = d$. Se cumple que:*

$$d^2a = b^2m + c^2n - mna$$



Demostración. Sea $\angle ADB = \alpha$, entonces tenemos que $\angle ADC = 180° - \alpha$. Utilizando el Teorema del Coseno en $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$; en el triángulo $\triangle ABD$ tenemos $c^2 = d^2 + m^2 - 2dm\cos\alpha$, despejando el coseno

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm} \tag{2.4}$$

y de el triángulo $\triangle ACD$, $b^2 = d^2 + n^2 - 2dn\cos(180 - \alpha)$, como $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$ tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{(b^2 - d^2 - n^2)}{2dn}. \tag{2.5}$$

Igualando 2.4 con 2.5, $\frac{d^2+m^2-c^2}{2dm} = \frac{(b^2-d^2-n^2)}{2dn}$

$$d^2n + m^2n - c^2n = b^2m - d^2m - n^2m$$

$$[d^2n + d^2m] = b^2m + c^2n - [n^2m + m^2n]$$

$$d^2(m + n) = b^2m + c^2n - mn(m + n)$$

Por hipótesis tenemos que $m + n = BD + CD = BC = a$, por lo tanto $d^2a = b^2m + c^2n - mna$. □

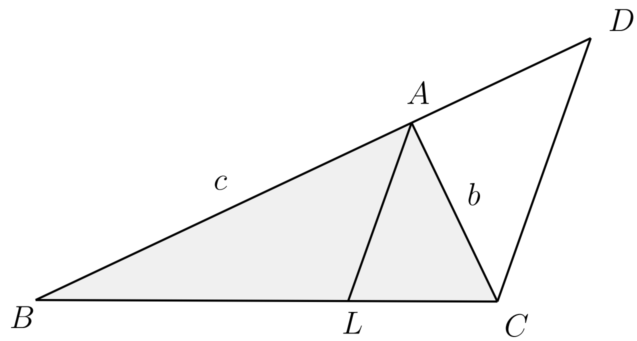
Aunque el siguiente teorema no es demostrado por medio de la introducción de un parámetro auxiliar, lo agreagamos en esta sección ya que será de utilidad en varios de los problemas siguientes.

Teorema 2.1.1 *Teorema de la bisectriz. La bisectriz interna AL del ángulo en A de un triángulo ABC divide internamente al lado opuesto BC en razón $\frac{AB}{CA}$, esto es*

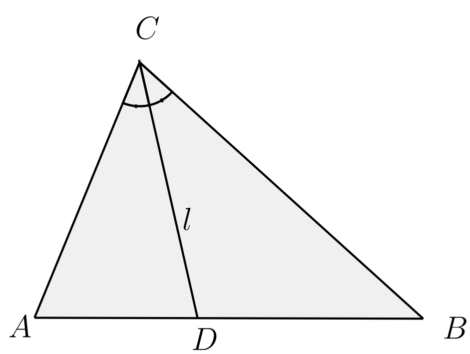
$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

donde L es el punto de intersección de la bisectriz interna con el lado BC.

Demostración. Sea AL la bisectriz del ángulo interior en A, b y c las longitudes de los lados CA y AB, respectivamente. Tracemos la paralela a la bisectriz que pasa por el punto C. Esta se intersecta con AB en el punto D. Notemos que $AD = b$ ya que $\angle BAL = \angle ADC$ y $\angle LAC = \angle ACD$, por lo tanto, $\triangle ACD$ es isósceles y $AD = b$. Así obtenemos que $\triangle ABL$ y $\triangle DBC$ son semejantes, luego por el Teorema de Thales $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{CA}$. $\square$



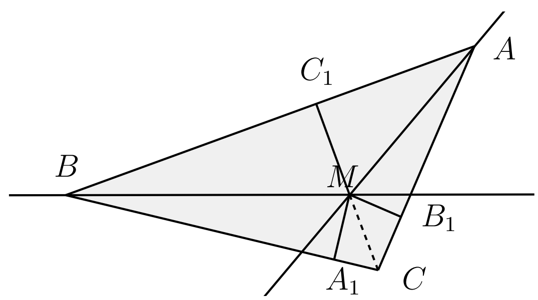
Ejemplo 2.1.3 *Los lados de un triángulo son a, b y c. Hallar la longitud de la bisectriz l trazada hacia el lado c.*



Demostración. Sea D el punto donde la bisectriz intersecta al lado AB. En este caso introduzcamos una incógnita auxiliar x, con $x = \angle ACD = \angle DCB$ y por medio del uso de áreas tenemos que: $|ABC| = |ACD| + |BCD|$. Tenemos que $|ABC| = \frac{1}{2}ab\sin 2x$. Por otro lado, $|ACD| = \frac{1}{2}bl\sin x$, $|BCD| = \frac{1}{2}al\sin x$, así $|ABC| = \frac{1}{2}al\sin x + \frac{1}{2}bl\sin x$. Es decir $\frac{1}{2}al\sin x + \frac{1}{2}bl\sin x = \frac{l(a+b)\sin x}{2}$, de donde $l = \frac{2ab\cos x}{a+b}$. Utilizando el teorema del coseno para encontrar $\cos x$ respecto del triángulo $\triangle ABC$ para el lado AB. Obtenemos : $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos 2x$, de donde: $\cos 2x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Entonces, $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$.

Por último: $l = \frac{2abcosx}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$. □

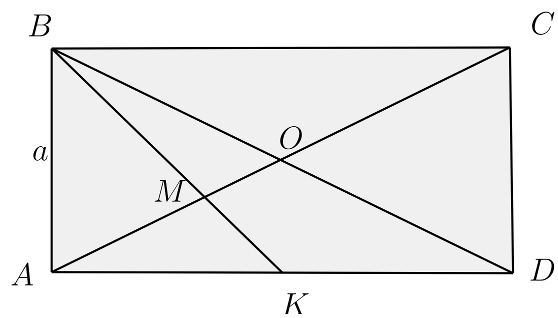
Ejemplo 2.1.4 *En el triángulo isósceles $\triangle ABC$ el ángulo con vértice en C es igual a $100°$. Se han trazado dos rayos: uno que comienza en el punto A bajo un ángulo de $30°$ con relación al rayo AB y, el segundo, que comienza en el punto B bajo un ángulo de $20°$ respecto de BA. Estos rayos concurren en el punto M perteneciente al triángulo $\triangle ABC$. Hallemos los ángulos $\angle ACM$ y $\angle BCM$.*



Demostración. Unamos los puntos M y C y designemos el ángulo $\angle ACM$ con x. Del punto M tracemos perpendiculares a los lados del triángulo: $MC_1 \perp AB$, $MB_1 \perp AC$, $MA_1 \perp BC$. Introduzcamos un parámetro auxiliar, $CM = a$ y calculamos MC_1 con dos procedimientos, es decir, empleamos MC_1 como elemento de referencia. Del triángulo $\triangle CMB_1$, hallamos: $MB_1 = MC\sin x = a\sin x$. Como $\angle ACB = 100°$ y, de acuerdo con el planteamiento , el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles, $\angle CAB = \angle ABC = 40°$, por consiguiente, $\angle CAM = 10°$. Del triángulo $\triangle AMB_1$, hallamos: $AM = \frac{MB_1}{\sin 10°} = \frac{a\sin x}{\sin 10°}$. Por fin de $\triangle AMC_1$, tenemos: $MC_1 = AM\sin 30° = \frac{a\sin x}{\sin 10°}$. Analicemos el triángulo CMA_1. En el que $\angle MCA_1 = 100° - x$. De modo que $MA_1 = CM\sin(100°-x) = a\sin(100°-x)$. Como $\angle MBC = 40° - 20° = 20°$, los triángulos $\triangle BMC_1$ y $\triangle BMA_1$ son iguales y por consiguiente, $MC_1 = MA_1 = a\sin(100° - x)$. Igualando las expresiones halladas para MC_1, encontramos la ecuación trigonométrica $\frac{a\sin x}{2\sin 10°} = a\sin(100° - x)$.

De esta ecuación hallamos consecutivamente: $\sin x = 2\sin(100° - x) \cdot \sin 10°$, $\sin x = \cos(90° - x) - \cos(110° - x)$, $\cos(110° - x) = 0$, $x = 20°$. $\square$

Ejemplo 2.1.5 *K es el punto medio del lado AD del rectángulo $ABCD$. Hallemos el ángulo entre BK y la diagonal AC si sabemos que $AD : AB = \sqrt{2}$.*



Demostración. Primeramente hagamos $AB = a$ y, entonces, $AD = a\sqrt{2}$, expresamos con a todos los lados del triángulo $\triangle AMK$ y apliquemos el teorema de los cosenos para el lado AK. Esto nos permite calcular el coseno del ángulo $\angle AMK$ que buscamos; designémoslo con x. Los segmentos AO y BK son las medianas del triángulo $\triangle ABD$. De modo que $MK = \frac{1}{3}BK$, $AM = \frac{2}{3}AO$. Tenemos:

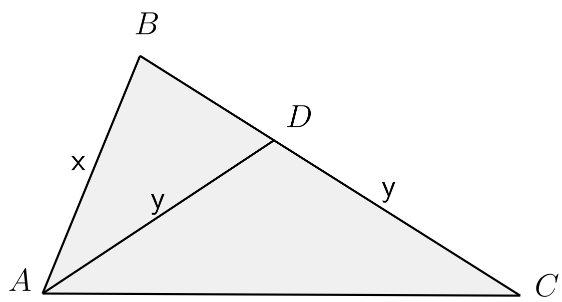
$$MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

En el triángulo $\triangle AMK$, tenemos: $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $MK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Según el Teorema de los Cosenos $AK^2 = AM^2 + MK^2 \cdot 2AM \cdot MK \cdot \cos x$, es decir, $(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{a\sqrt{6}}{6})^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6}\cos x$ y se sigue que, $\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{2}}{3}\cos x$, de donde hallamos: $\cos x = 0$ y por lo tanto $x = 90°$.

Así, el ángulo entre BK y AC es recto. $\square$

Ejemplo 2.1.6 *En el triángulo $\triangle ABC$ se conoce que el ángulo A es dos veces mayor que el ángulo C, el lado BC es dos unidades mayor que el lado AB, en tanto que $AC = 5$. Hallemos AB y BC.*



Demostración. Tracemos la bisectriz AD del ángulo $\angle A$. Entonces, obtenemos que $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACB$. En el $\triangle ADC$ los ángulos en la base son iguales, es decir, este triángulo es isósceles, tal que, $AD = DC$. Hagamos $AB = x$, $AD = DC = y$. Entonces $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$ son semejantes ya que $\angle BAD = \angle BCA$ y $\angle B$ es común para estos triángulos. De esta semejanza obtenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$, es decir, $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$. De esto resolvemos el sistema de ecuaciones con dos variables:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{y}{5},$$

$$\frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5},$$

de donde

$$5x = xy + 2y,$$

$$5x + 10 - 5y = xy,$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos: $5y - 10 = 2y$ e $y = \frac{10}{3}$, esto significa que $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{3}$, o sea, $x = 4$. Por lo tanto $AB = 4$ y $BC = 6$. $\square$

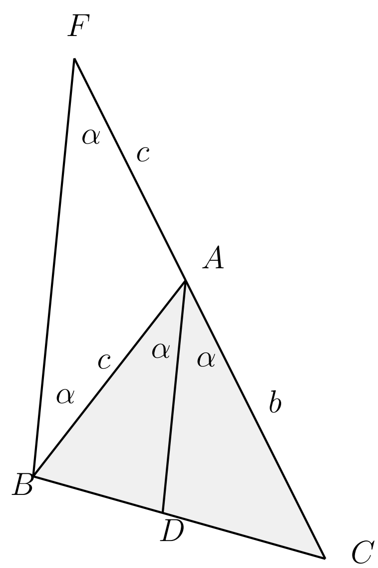
Ejemplo 2.1.7 *Sea D el punto donde la bisectriz del $\angle BAC$ de un triángulo corta al lado BC, y sean, a, b y c los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que*

$$BD = \frac{ac}{b+c}.$$

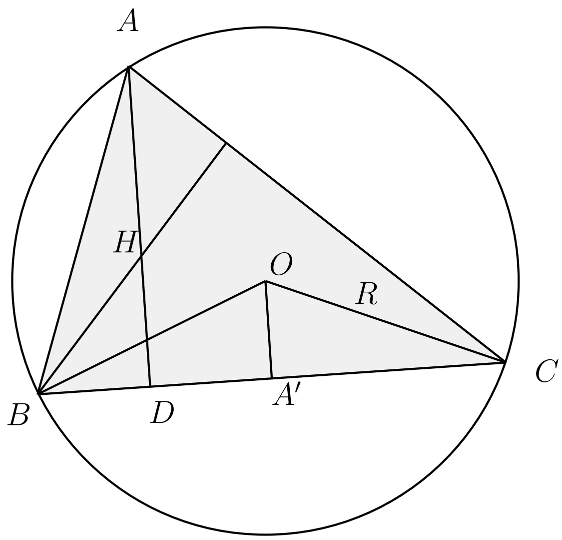
Demostración. Analicemos el enunciado del problema y veamos que tenemos una suma de segmentos por tanto debemos visualizar esto, prolongamos el segmento CA hasta el punto F de tal forma que $AF = AB = c$, de esto se tiene que $\triangle ABF$ es isósceles, se sigue que $\angle AFB + \angle FBA = 2\alpha$ y esto implica que $\angle AFB = \angle FBA = \alpha = \angle BAD$, así $AD \parallel FB$. Ahora utilizando el Teorema de Thales tenemos que

$$\frac{BD}{FA} = \frac{BC}{FC} \Rightarrow BD = \frac{FC \cdot FA}{FC} = \frac{ac}{b+c}.$$

□



Ejemplo 2.1.8 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo, R el circunradio y H el ortocentro. Demostar que $AH^2 = 4R^2 - a^2$*



Demostración. Sea $A^{'}$ el punto medio de BC, introducimos el parámetro auxiliar $x = OA^{'}$ y $a = BC$. Utilizando el Teorema de Pitágoras obtenemos: $x^2 = \frac{a^2}{4} = R^2$, simplificando la ecuación $4x^2 = 4R^2 - a^2$. Como $AH = 2x$. Entonces $AH^2 = 4R^2 - a^2$. $\square$

Ejemplo 2.1.9 *Las circunferencias de radios a y b son tangentes interiores ($a < b$), con la particularidad de que el centro de la circunferencia mayor se encuentra fuera de la menor. La cuerda AB de la circunferencia mayor es tangente a la menor y forma con la tangente común el ángulo α. Entonces $AB = 2\sqrt{b^2 - ((b-a)\cos\alpha - a)^2}$.*

Demostración. Sea O_1 y O_2 los centros de las circunferencias menor y mayor, respectivamente. Sea K un punto sobre la cuerda AB tal que $O_2K \perp AB$ introduzcamos el parámetro auxiliar $O_2K = x$. Sea P el punto donde la paralela a AB, a través de O_2, y la paerpendicular a AB, a través de O_1, se intersectan. Entonces $\angle O_2O_1P = \alpha$ y

$$\cos\alpha = \frac{x+a}{b-a},$$

ya que $PO_1 = PC + CO_1$, donde C es el punto de tangencia de AB con la circunferencia menor, y $O_2O_1 = b - a$. Entonces

$$x = (b - a)\cos\alpha - a. \tag{2.6}$$

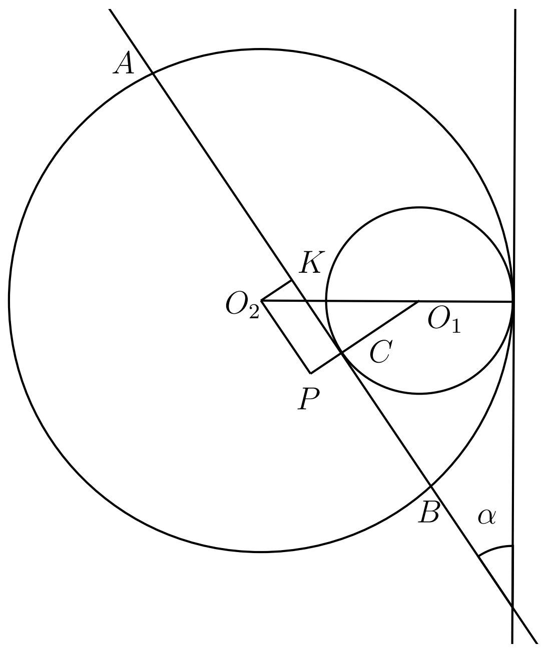
Como $\triangle AO_2K$ y $\triangle KO_2B$ son triángulos rectángulos congruentes tenemos que $AK = KB$, se sigue que:

$$AB = 2\sqrt{b^2 - x^2}. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, sustituyendo 2.6 en 2.7 se obtiene

$$AB = 2\sqrt{b^2 - ((b - a)\cos\alpha - a)^2}.$$

$\square$



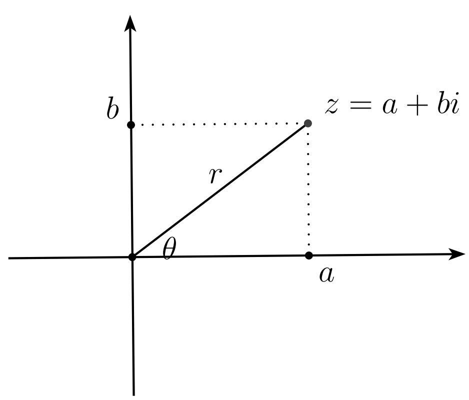
2.2. Números complejos

En muchas ocasiones resulta muy útil transformar un problema geométrico en un problema algebraico. Después del análisis algebraico y las simplificaciones aplicadas, se interpreta el resultado algebraico en forma geométrica. De este modo logramos resolver una gran cantidad de problemas. Los números complejos, dada su relación directa con los puntos del plano, son un buen objeto algebraico para realizar tal trasformación.

Las ecuaciones del tipo $ax + b = 0$, con $(a \neq 0)$, tienen solución dentro de los números reales y $x = \frac{-b}{a}$. Sin embargo, para la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, no existe número real que satisfaga tal condición. Es decir, debemos encontrar un número real que al elevarlo al cuadrado sea igual a menos uno, $x^2 = -1$, pero, cualquier número elevado al cuadrado siempre es no negativo, por lo cual decimos que está ecuación no tiene solución dentro de los números reales. Si definimos $\sqrt{-1} = i$, entonces la ecuación anterior tiene por soluciones a $x = \pm i$. De esta manera surge la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números de manera que estos nos sirvan para resolver ecuaciones como la anterior. Es así como nace el concepto de número complejo. Un número complejo es aquel que se puede escribir en la forma $a + bi$, con a y b números reales.

2.2.1. El plano complejo

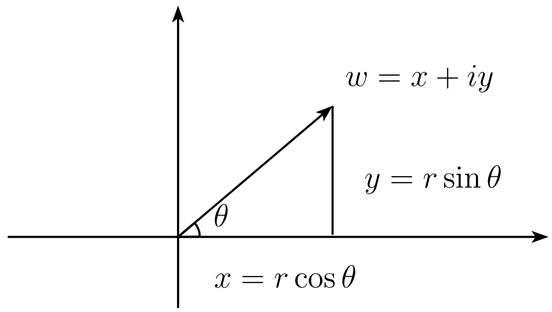
Dado el número $z = a + bi$, le podemos asociar el punto (a, b) en el plano euclidiano, de manera inversa a cada punto del plano lo podemos asociar con un número complejo. El plano desde esta prespectiva se conoce como plano de Gauss o diagrama de Argand.



La longitud del segmento del origen hasta z, es conocida como módulo o longitud de z. El ángulo θ que forma el rayo de 0 a z con el eje real, se llama argumento de z.

2.2.2. Forma polar de un número complejo

Dada la representación en el plano euclidiano de un número complejo $w = x + iy$ observemos que, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg z$. Tenemos entonces que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$[1].

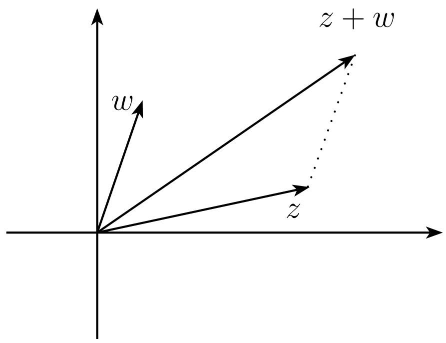


2.2.3. Algunas propiedades de los números complejos

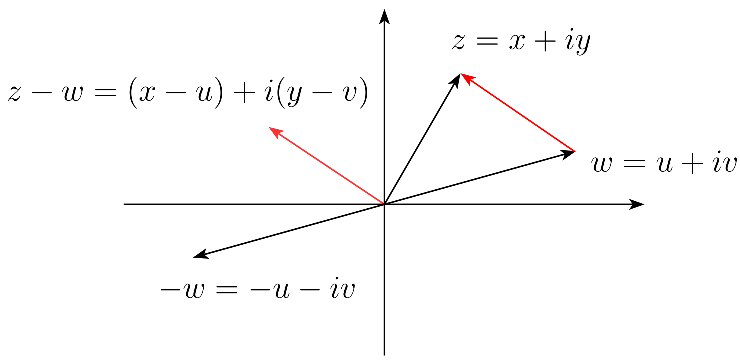
Suma y resta de numeros complejos

Sean $z = x + iy$ y $w = u + iv$, con x, y, u, v números reales. Entonces $z + w$ se define como $(x + u) + i(y + v)$. Si consideramos al número complejo como un vector con punto inicial en 0 y punto final en el número coplejo $z = x + iy$, entonces la suma de $z + w$ corresponde al vector diagonal (desde el origen) de el paralelogramo formado por los vectores z y w.

[1] Esta forma de representar a un número complejo se conoce como forma polar. Además, como fue demostrado por L. Euler, se cumple que $z = |z|e^{i\theta}$.



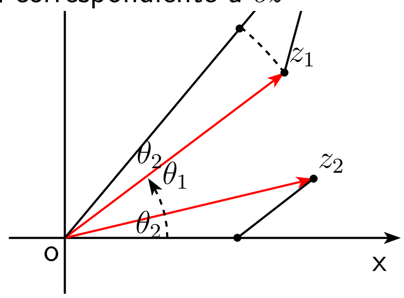
Por otra parte, la diferencia de números $z = x + iy$ y $w = u + iv$ es $z - w = (x - u) + i(y - v)$. La diferencia $z - w$ se representa geométricamente como:



Multiplicación

Si los números complejos z_1, z_2 los representamos por los vectores $\overline{oz_1}$ y $\overline{oz_2}$, el producto $z = z_1 z_2$, es representado por el vector $\overline{oz}$ el cual se obtiene como sigue: primero, rotemos $\overline{oz_1}$ sobre o con un ángulo igual al argumento del vector $\overline{oz_2}$; después multipliquemos el vector obtenido por el módulo de el vector $\overline{oz_2}$.

El vector obtenido es el correspondiente a oz



Si r_1, r_2 y θ_1, θ_2 son los módulos y los argumentos de z_1, z_2 respectivamente, se tiene que,

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Por lo tanto

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

es decir, el argumento de z y el modulo es, $r_1 r_2 = |oz_1 \cdot oz_2|$. De manera algebraica podemos ver la multiplicación como un producto de binomios, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$ y no es difícil ver que esto coincide con la definición de producto dada al principio.

División

Si los números complejos z_1, z_2 los representamos por los vectores $\overline{oz_1}$ y $\overline{oz_2}$, el cociente

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

es representado por el vector $\overline{oz}$ obtenido como sigue: Primero rotemos oz_1 sobre o con un ángulo igual al negativo de el argumento de vector oz_2. La construcción de o es la siguiente,

$$z = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

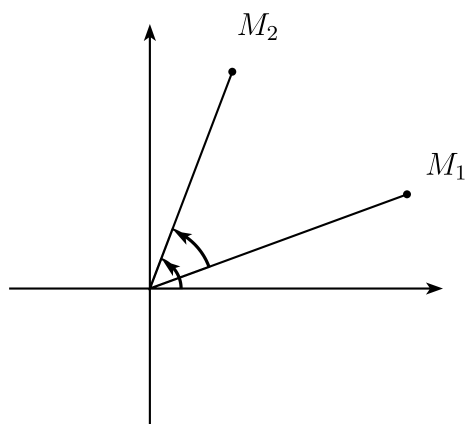
El punto z es el tercer vector de el triángulo $\triangle oz_1z$ directamente similar a el triángulo $\triangle oz_2u$ por lo tanto la división es la operación inversa de la multiplicación.

2.2.4. Medida de un ángulo

Un triángulo esta orientado si sus vértices tienen un orden especifico. Es positivo si es orientado en sentido contrario a las manecillas del reloj, negativo si es en sentido a las manecillas del reloj. Consideremos dos puntos M_1 y M_2 con imagenes en los complejos z_1 y z_2 respectivamente, el ángulo $\angle M_1OM_2$ esta orienta por los puntos M_1 y M_2 en sentido contrario.

Proposición 2.2.1 *La medida de el ángulo* $\angle M_1OM_2 = arg\frac{z_2}{z_1}$.

Demostración. Si consideramos los siguientes dos casos,



a) Si el triángulo $\triangle M_1OM_2$ esta orientado negativamente, entonces $\angle M_1OM_2 = \angle xOM_2 - \angle xOM_1 = arg(z_1) - arg(z_2) = arg(\frac{z_2}{z_1})$.

b) Si el triángulo $\triangle M_1OM_2$ es orientado positivamente, entonces $\angle M_1OM_2 = 2\pi - \angle M_2OM_1 = 2\pi - arg\frac{z_2}{z_1}$.

□

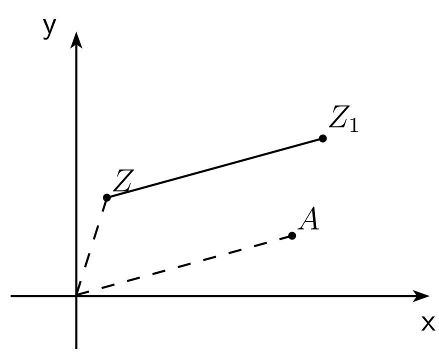
Teorema. Consideremos tres puntos distintos $M_1(z_1)$,$M_2(z_2)$ y $M_3(z_3)$, la medida de el ángulo orientado $\angle M_2M_1M_3$ es $arg\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$.

Demostración. La traslación con el vector $-z_1$ mapea los puntos M_1,M_2 y M_3 en los puntos O,M_2' y M_3', con coordenadas comlejas 0,$z_2 - z_1$,$z_3 - z_1$, de esta forma $\angle M_2M_1M_3 = \angle M_2'OM_3'$. Por el resultado anterior se tiene que $\angle M_2'OM_3' = arg\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$ □

2.2.5. Rotación y traslación

Traslación

Sea A un número fijo y sea Z un punto arbitrario en el plano los cuales son representados con a y z.



Sea el punto Z' tal que

$$\overline{ZZ'} = \overline{OA}$$

es llamado el homologo de Z en la traslación de el vector $\overline{OA}$. La ecuación de la traslación es

$$z' = z + a$$

Con a número real distinto de cero, la traslación es paralela a Ox. Si $a = 0$ la traslación se reduce a la función identidad $z' = z$.

Rotación

Consideremos un ángulo α y el número complejo $\varepsilon = \cos\alpha + i$sen α. Sea $z = r(\cos t + i$sen $t)$ un número complejo y M la imagen de éste.

Del producto

$$z\varepsilon = r(\cos t + i\sin t)(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Realizando el producto obtenemos

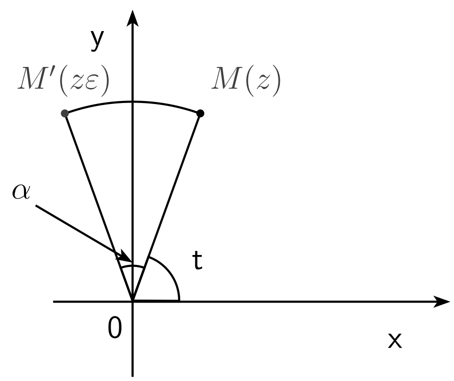
$$r\cos t\cdot\cos\alpha + ri\sin\alpha\cdot\cos\alpha + ri\sin t\cdot\cos\alpha - r\sin t\cdot\sin\alpha.$$

Simplificando utilizando identidades trigonométricas se tiene

$$z\varepsilon = r(\cos(t+\alpha) + i\sin(t+\alpha)).$$

Observamos que $|z\varepsilon| = r$ y $\arg(z\varepsilon) = t + \alpha = \arg z + \alpha$.

Tenemos entonces que la imagen de $z\varepsilon$ es la rotación de M con respecto al origen por el ángulo α.



Proposición 2.2.2 *Supongamos que el punto C es la rotación de un punto B con respecto de un punto A por el ángulo α. Si a, b, c, son los números complejos asociados a los puntos A, B, C, respectivamente, entonces $c = a + (b - a)\varepsilon$, con $\varepsilon = \cos\alpha + i \sin\alpha$.*

Demostración. La traslación con respecto al vector $-a$, mapea los puntos A,B,C hacia los puntos 0, B', C', con coordenadas complejas 0, $b - a$, $c - a$, respectivamente. El punto C' es la imagen de B' bajo la rotación respecto del origen con el ángulo α, es decir, $c - a = (b - a)\varepsilon$ ó $c = a + (b - a)\varepsilon$. □

¿Qué efecto tiene multiplicar por $z = i$? Lo que genera es una rotación de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en contra de las manecillas del reloj. Similarmente al multiplicar por $z = -i$ se genera una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en favor de las manecillas del reloj.

2.2.6. Colinealidad, ortogonalidad y puntos concíclicos

En esta sección estableceremos algunas condiciones para la colinealidad de puntos, la conciclicidad de éstos, ó la ortogonalidad de segmentos.

Primeramente consideremos cuatro puntos $M_k(z_k), k \in 1, 2, 3, 4$.

Proposición 2.2.3 *Los puntos M_1, M_2 , M_3, son colineales si y solo si $\frac{z_3-z_1}{z_3-z_1} \in \mathbb{R}^*$, donde $\mathbb{R}^*$ son todos los números reales distintos de cero.*

Demostración. La colinelaidad de los puntos M_1, M_2 , M_3 es equivalente a $\measuredangle M_2 M_1 M_3 \in 0, \pi$. Se sigue que $arg \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in 0, \pi$ o equivalente a que $arg \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$. $\square$

Proposición 2.2.4 *Las líneas M_1M_2 y M_3M_4 son ortogonales si y solo si $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i\mathbb{R}^*$.*

Demostración. Se tiene $M_1M_2 \perp M_3M_4$ si y solo si $(M_1M_2, M_3M_4) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Esto es equivalente a $arg \frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. De esto se obtiene que $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} \in i\mathbb{R}^*$. $\square$

Proposición 2.2.5 *Cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 son conciclicos si y solo si la razón cruzada*

$$(M_1, M_2; M_3, M_4) := \frac{M_4 - M_1}{M_3 - M_1} / \frac{M_4 - M_2}{M_3 - M_2} = \frac{(M_3 - M_2)(M_4 - M_1)}{(M_3 - M_1)(M_4 - M_2)}$$

es un número real.

2.2.7. Triángulos semejantes

Consideremos seis puntos $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$, en el plano complejo. Se sabe que los triángulos $\triangle A_1A_2A_3$ y $\triangle B_1B_2B_3$ son semejantes si el ángulo que esta sobre el vértice A_k es igual al ángulo en el vértice B_k con $k \in \{1, 2, 3\}$.

Proposición 2.2.6 *Los triángulos $\triangle A_1A_2A_3$ y $\triangle B_1B_2B_3$ son semejantes y tienen la misma orientación, si y solo si*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}. \tag{2.8}$$

Demostración. Se tiene $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ si y solo si $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_3}{B_1B_3}$ y $\measuredangle A_3A_1A_2 = \measuredangle B_3B_1B_2$. Esto es equivalente a $\frac{|a_2-a_1|}{|a-3-a_1|} = \frac{|b_2-b_1|}{|b-3-b_1|}$ y $arg\frac{a_2-a_1}{a-3-a_1} = arg\frac{b_2-b_1}{b-3-b_1}$. Asi obtenemos $\frac{a_2-a_1}{a-3-a_1} = \frac{b_2-b_1}{b-3-b_1}$.

□

Observaciones.

1) La condición 2.8 es equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

2) Los triángulos $A_1(0)$, $A_2(1)$, $A_1(2i)$ y $B_1(0)$, $B_2(-i)$, $B_3(-2)$ son semejantes, pero con orientación opuesta. En este caso la condición 2.8 no se satisface. Ya que

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{1-0}{2i-0} = \frac{1}{2} \neq \frac{b_2-b_1}{b_3-b_1} = \frac{-i-0}{-2-0} = \frac{-i}{2}.$$

Proposición 2.2.7 *Los triángulos $\triangle A_1A_2A_3$ y $\triangle B_1B_2B_3$ son semejantes y tienen orientación opuesta, si y solo si*

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{\overline{b}_2-\overline{b}_1}{\overline{b}_3-\overline{b}_1}.$$

Demostración. Reflejando a través del eje x mapea los puntos B_1, B_2, B_3 en los puntos $M_1(\overline{b}_1)$, $M_2(\overline{b}_2)$, $M_3(\overline{b}_3)$, los triángulos $\triangle B_1B_2B_3$ y $M_1M_2M_3$ son semejantes y tienen orientación opuesta, por lo tanto $A_1A_2A_3$ y $M_1M_2M_3$ son semejantes con la misma orientación. La conclusión biene de la proposición anterior.

□

2.2.8. Triángulos equiláteros

Proposición 2.2.8 *Supongamos* z_1, z_2, z_3*, son los números complejos asociados a los vértices del triángulo* $\triangle A_1A_2A_3$*, entonces las siguientes declaraciones son equivalentes:*

a) $\triangle A_1A_2A_3$ *es un triángulo equilátero*

b) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

c) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

d) $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$

e) $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0$, *con* $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$

f) $(z_1 + wz_2 + w^2z_3)(z_1 + w^2z_2 + wz_3) = 0$, *con* $w = \frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

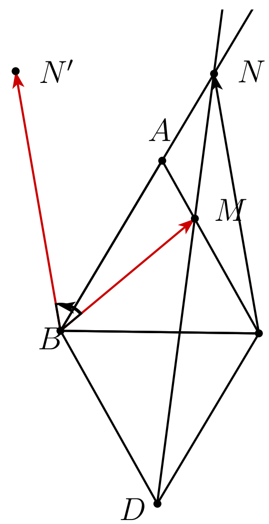
g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$

Demostración. El triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ es equilátero si y solo si es semejante y con la misma orientaciń que $\triangle A_2A_3A_1$, o $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0$,

Entonces $a) \Leftrightarrow g)$. Obteniendo el determianante obtenemos que $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} =$ $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = -(z_1 + wz_2 + w^2z_3)(z_1 + w^2z_2 + wz_3)$, por tanto $g) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow f)$ $\square$

2.2.9. Ejemplos

Ejemplo 2.2.1 *Sean* $\triangle ABC$ *y* $\triangle BCD$ *dos triángulos equiláteros. Una línea a través de* D *intersecta a* AC *en* M *y* AB *en* N*. Entonces el ángulo entre la línea* BM *y* CN *es* $\frac{\pi}{3}$.



Demostración. Sea B el punto $(0,0)$, y C el punto $(1,0)$. Entonces A y D corresponden con los números complejos $e^{\frac{i\pi}{3}}$ y $e^{\frac{-i\pi}{3}}$, respectivamente. Tenemos que N se representa como $te^{\frac{i\pi}{3}}$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Las ecuaciones paramétricas de ND y AC son, $z = \alpha te^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\alpha)e^{\frac{-i\pi}{3}}$, $z = \beta e^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Ahora encontremos el punto de intersección de ND y AC. Tal punto debe satisfacer que

$$\alpha te^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\alpha)e^{\frac{-i\pi}{3}} = \beta e^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\beta),$$

explicitamente la ecuación queda de la siguiente manera,

$$\alpha t(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) + (1-\alpha)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}) = \beta(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) + (1-\beta),$$

de donde

$$\alpha t(1+i\sqrt{3}) + (1-\alpha)(1-i\sqrt{3}) = \beta(1+i\sqrt{3}) + 2(1-\beta)$$

y

$$\alpha t + \alpha ti\sqrt{3} + (1-\alpha) - (1-\alpha)i\sqrt{3} = \beta + \beta i\sqrt{3}) + 2 - 2\beta.$$

Entonces la parte real tiene la siguiente forma, $\alpha t + (1-\alpha) = \beta + 2(1-\beta)$ y la parte imaginaria, $\alpha + i\sqrt{3} - (1-\alpha)i\sqrt{3} = \beta i\sqrt{3}$. Así obtenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\alpha t + (1-\alpha) = \beta + 2(1-\beta),$$

y

$$\alpha t - (1-\alpha) = \beta$$

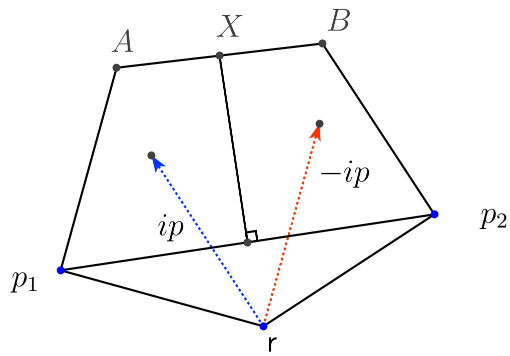
Resolviendo el sistema obtenemos, $\alpha = \frac{1}{t}$. Entonces M es $e^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\frac{1}{t})e^{\frac{-i\pi}{3}}$. El ángulo entre BM y CN es el argumento de los números complejos,

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{3}} + (1-\frac{1}{t})e^{\frac{-i\pi}{3}}}{te^{\frac{i\pi}{3}} - 1} = \frac{(e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{3}}) - \frac{1}{t}e^{\frac{-i\pi}{3}}}{te^{\frac{i\pi}{3}} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{t}e^{\frac{-i\pi}{3}}}{te^{\frac{i\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{t}e^{\frac{-i\pi}{3}}.$$

El ángulo es por lo tanto $\frac{\pi}{3}$.

$\square$

Ejemplo 2.2.2 *La isla del Tesoro. Un día mientras Toño realizaba limpieza en su sótano, encontró un baúl. Al verlo se dio cuenta de que era muy antiguo y que estaba cerrado, después de largos intentos logro abrirlo y dentro de él encontró un viejo mapa. El mapa correspondía a una isla en donde se encontraba un tesoro oculto, dicho mapa contenía las siguientes instrucciones; decía que en la isla existían dos palmeras y un roble y, que la manera en que escondieron el tesoro fue la siguiente: contar la distancia del roble a la palmera al este, al llegar caminar el mismo número de pasos en una rotación de $90°$ a la derecha y marcar el punto A, de manera similar caminar del roble hacia la otra palmera y ahora girar a la izquierda y marcar el punto terminal con B. El tesoro se encuentra en el punto medio de A y B. Sin embargo, cuando Toño llegó a la isla, notó que el roble ya no estaba. ¿Comó le hizo Toño para localizar el tesoro?*



Demostración. Asignemos los números complejos r, p_1, p_2, a, b, x, a los puntos que simbolizan el roble, las palmeras, el punto A, el punto B y el punto X, respectivamente.

Haciendo las operaciones correspondientes obtenemos que

$$a = (r - p_1)i + p_1$$

y

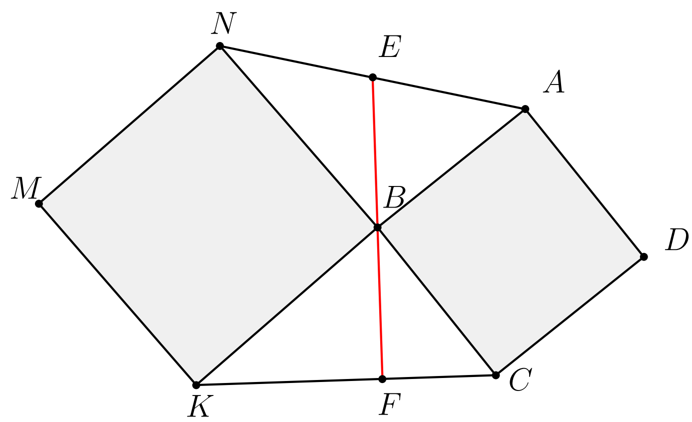
$$b = -i(r - p_2) + p_2.$$

Como $x = \frac{a+b}{2}$, tenemos que

$$x = \frac{(p_2 - p_1)i}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

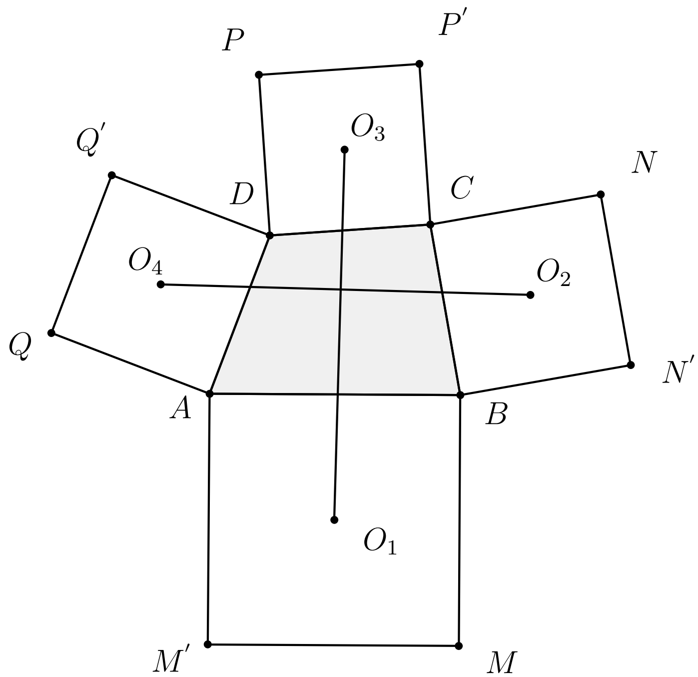
Interpretando geométricamente esta expresión tenemos que: el punto X se localiza sobre la mediatriz del segmento p_1p_2 y ésta precisamente a una distancia de p_1p_2 igual a la mitad de la longitud del segmento p_1p_2. $\square$

Ejemplo 2.2.3 *Sea $ABCD$ y $BNMK$, dos cuadrados que no se superponen, y sea E el punto medio de AN. Si el punto F es la base de la perpendicular de B hacia la línea CK. Entonces se cumple que los puntos E, F, B son colineales.*



Demostración. Consideremos el plano complejo con el origen sobre el punto F con CK y FB como ejes y FB en el eje imaginario. Sea c, k, bi las coordenadas complejas de C, K, B, con c, k, b en los reales. La rotación con centro en B y con un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ mapea el punto C hacia A. Tenemos que A tiene la coordenada compleja $a = b(1-i) + ci$. Similarmente, el punto N es obtenido por una rotación del punto K alrededor de B con un ángulo $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y con coordenadas complejas $n = b(1+i) - ki$. El punto medio E del segmento AN tiene las coordenadas complejas $e = \frac{a+n}{2} = b + \frac{c-k}{2}i$, así E está sobre la línea FB. $\square$

Ejemplo 2.2.4 *En los lados de un cuadriátero $ABCD$, se construyen cuadrados hacia el exterior y con centros O_1, O_2, O_3, O_4. Entonces se cumple que $O_1O_3 \perp O_2O_4$ y que $O_1O_3 = O_2O_4$.*



Demostración. Sean $ABMM'$, $BCNN'$, $CDPP'$, $DAQQ'$, los cuadrados construidos con centros O_1, O_2, O_3, O_4, respectivamente. Denotemos con letras minúsculas los puntos que están representados con letras mayúsculas, es decir, o_1 es la coordenada de O_1, etc. El punto M es obtenido por una rotación de A alrededor de B con un ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$; así $m = b + (a-b)i$. Similarmente,
$n = c + (b-c)i$, $p = d + (c-d)i$ y $q = a + (d-a)i$.

De esto se sigue que
$o_1 = \frac{a+m}{2} = \frac{a+b+(a-b)i}{2}$, $o_2 = \frac{b+c+(b-c)i}{2}$, $o_3 = \frac{c+d+(c-d)i}{2}$ y $o_4 = \frac{d+a+(d-a)i}{2}$.
Entonces

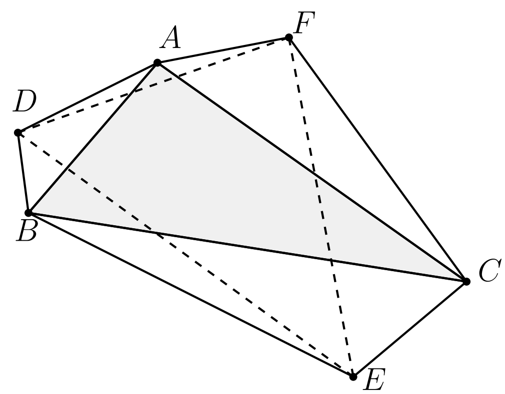
$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{c+d-a-b+i(c-d-a+b)}{a+d-b-c+i(d-a-b+c)} = -i \in \mathbb{R}^*,$$

así $O_1O_3 \perp O_2O_4$. Además,

$$|\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2}| = | - i| = 1;$$

por lo tanto $O_1O_3 = O_2O_4$. □

Ejemplo 2.2.5 *En los lados AB, BC, CA de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen triángulos semejantes $\triangle ADB$, $\triangle BEC$, $\triangle CFA$, los cuales tienen la misma orientación. Demostrar que $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tienen el mismo centroide.*



Demostración. Como los triángulos son semejantes y con la misma orientación, tenemos que,

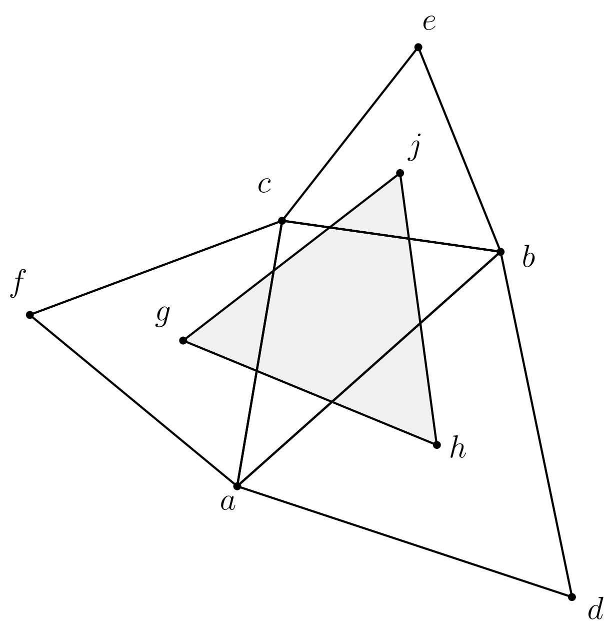
$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{d-c} = z,$$

en consecuencia $d = a + (b-a)z$, $e = b + (c-b)z$, $f = c + (a-c)z$, se sigue que,

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Por lo tanto $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tienen el mismo centroide. □El sigiente problema se le atribuye a Napoleón Bonaparte, quien fué un aficionado a las matemáticas. Por esta razón se le conoce a este resultado como el problema de Napoleón.

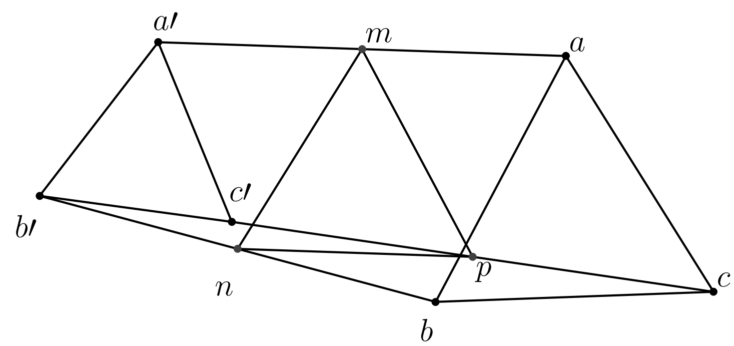
Ejemplo 2.2.6 *Si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo (cualquiera), entonces los centros de gravedad de estos son los vértices de un triángulo equilátero*



Demostración. Sean a, b, c los vértices del triángulo, y $\triangle eac$, $\triangle adb$, $\triangle bfc$ los triángulos equiláteros mencionados. Como los triángulos son equiláteros y tienen la misma orientación que el triángulo $\triangle 1ww^2$ y sabiendo que $1 + w + w^2 = 0$, obtenemos, $e + bw + cw^2 = 0$, $a + dw + bw^2 = 0$, $b + fw + cw^2 = 0$.

Solo falta probar que $\triangle ghj$ es equilátero, pero como g, h, j, son centros de gravedad de los triángulos exteriores, entonces, $g + hw + jw^2 = \frac{1}{3}((a + dw + bw^2)) + \frac{w}{3}((e + bw + cw^2) + \frac{w^2}{3}(b + fw + cw^2) = 0$. Por lo tanto, los centros de gravedad forman un triángulo equilátero. $\square$

Ejemplo 2.2.7 *Los triángulos $\triangle abc$ y $\triangle a\prime a\prime c\prime$ son equiláteros y los puntos m, n, q son los puntos medios de $qq\prime$,$bb\prime$,y $cc\prime$. Probar que $\triangle mnp$ es equilátero.*



Demostración. Tenemos que, $m = \frac{a'-a}{2}$, $n = \frac{b-b'}{2}$, $p = \frac{c-c'}{2}$.

Como los triángulos en referencia son equiláteros, tenemos que $a+wb+w^2c = 0$, $a' + wb' + w^2c' = 0$. Entonces,

$$a + wb + w^2c - (a' + wb' + w^2c') = 0,$$

$$\frac{a + wb + w^2c - (a' + wb' + w^2c')}{2} = 0,$$

$$\frac{(a - a') + w(b - b') + w^2(c - c')}{2} = 0,$$

$$\frac{(a - a'}{2} + w(\frac{b - b'}{2}) + w^2(\frac{c - c'}{2}) = 0,$$

y esto es igual a $m + wn + w^2p = 0$

por lo tanto $\triangle mnp$ es equilátero.

$\square$

Ejemplo 2.2.8 *Sea $P_0P_1...P_{n-1}$ un polígono inscrito en un círculo unitario. Pruebe que:*

1. $P_0P_1 \cdot P_0P_2 \ldots P_0P_{n-1} = n$

2. $\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

Demostración.

1. Consideremos el polinomio $P(z) = z^n - 1 = (z-1)(z-z_1)\ldots(z-z_1^{n-1})$, con $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Sabemos que las Raíces $z^n = 1$ son los vértices de un polígono regular de n vértices. Estos son z_0, z_1,...,z_{n-1}. Como $z_i = z_1^i$ entonces $P' = (1-z_1)(1-z_1^2)\cdots(1-z_1^{n-1}) = n$, sacando el módulo.
$$n = |1-z_1||1-z_1^2|\cdots|1-z_1^{n-1}| \tag{2.9}$$
$n = P_0P_1 \cdot P_0P_2 \ldots P_0P_{n-1}$

2. Como $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, entonces $1 - z_1^k = 1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{2k\pi}{n} - 2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n})$.
Así $|1-z_1^k| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Por lo tanto, por 2.9 tenemos que:
$$n = 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$
$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$
Por lo tanto,
$$\frac{n}{2^{n-1}} = \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

□

2.3. Problemas propuestos

2.3.1. Parametro auxiliar

Problema 2.1 *Las circunferencias de radios R y $\frac{R}{2}$ son tangentes exteriores. Desde el centro de la circunferencia menor se ha trazado, bajo un ángulo de*

30° *con relación a la línea de los centros, un segmento de largura* $2R$*. Hallar la longitud de las partes que estan fuera de la circunferencia.*

Problema 2.2 *Una circunferencia de radio* R *pasa por los vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia, trazada desde el tercer vértice del cuadrado es dos veces mayor que el lado del cuadrado. Hallemos el lado del cuadrado.*

Problema 2.3 *El ángulo de un triángulo es el doble de el ángulo más chico y sus lados son tres números entreros consecutivos. Cuanto valen sus lados?*

Problema 2.4 *En el cuadrilátero* $ABCD$ *el ángulo* $\angle B$ *es recto y* $AB : BD = 2 : 4\sqrt{2}$*. Al continuar los lados* BC *y* AD *ellos concurren en el punto* M*. Hallar el ángulo* $\angle DMC$ *si sabemos que* $\angle ABD = 45^\circ$*.*

Problema 2.5 *En un semicírculo, desde los extremos del diametro se trazan dos cuerdas que se intersectan. Demostrar que la suma de los productos resultantes al multiplicar toda la cuerda por el segmento de cada cuerda, adyacente al diámetro es, igual al cuadrado de este último.*

Problema 2.6 *Sea* $\triangle ABC$ *un triángulo, con* $\angle ABC = 45^\circ$*. Desde* A *trace el segmmento* AD*, con* D *en* BC*, de tal forma que:* $DC = 2BD$ *y el ángulo* $\angle BAD = 15^\circ$*. ¿Cuánto mide el ángulo* $\angle BCA$*?*

2.3.2. Complejos

Problema 2.7 *Dado el triángulo* $z_1z_2z_3$*, probar que el centro de gravedad de este es el puto asociado al número complejo* $\frac{z_1z_2z_3}{3}$*.*

Problema 2.8 *Probar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.*

Problema 2.9 *Los puntos medios de os lados de un cudrilatero son los vértices de un paralelogramo.*

Problema 2.10 *Se construyen cuadrados sobre los lados de un cuadrilatero $ABCD$, hacia el exterior. Sea M, N, P y Q los centros de estos cuadrados, como se muestra en la figura. Probar que $O_4O_2 \perp O_3O_1$ y que $O_4O_2 = O_3O_1$.*

Problema 2.11 *Sea z_1, z_2, z_3 las coordenadas de los vértices del triángulo $A_1A_2A_3$. Si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, probar que el triángulo $A_1A_2A_3$ es equilátero.*

Sugerencia: utilizar la propiedad, $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Problema 2.12 *En los lados de un cuadrlátero convexo $ABCD$ se contruyen hacia afuera los triángulos equiláteros ABM y CDP y hacia adentro los triángulos equláteros BCN y ADQ describe la forma de el cuadrilátero $MNPQ$.*

Problema 2.13 *Si se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo (cualquiera), entonces los centros de gravedad de estos son los vértices de un triángulo equilátero.*

Problema 2.14 *Probar que la línea que une los puntos medios de dos lados opuestos bisecta al segmento que une los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero.*

Problema 2.15 *En los lados AB y BC de un triángulo $\triangle ABC$ trazamos cuadrados con centro D y E tal que los puntos C y D estan en la misma dirección de AB y los puntos A y E son opuestos a la dirección de BC. Probar que el ángulo entre las líneas AC y DE es igual a $45°$.*

Problema 2.16 *En los lados AB y BC de un triángulo $\triangle ABC$ se trazan triángulos equiláteros . Si P, Q, R son los puntos medios de los segmentos BC, AM, AN, respectivamente. Probar que el triángulo $\triangle PQR$ es equilátero.*

Problema 2.17 *Las diagonales AC y CE de un exagono regular $ABCDEF$ son divididas por puntos interiores M y N, respectivamente, tal que*

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

Determinar r si sabemos que B, M y N son colineales.

Problema 2.18 *En los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen cuadrados $ABDE$ y $ACFG$, externos a la figura. Si M es el punto medio de BC, probar que $AM \perp EG$ y $EG = 2AM$.*

Problema 2.19 *En los lados AB y AD de un triángulo $\triangle ABD$ se trazan cuadrados $ABEF$ y $ADGH$ con centros O y Q, respectivamente. Si M es el punto medio de el lado BD, probar que $\triangle OMQ$ es un triángulo isósceles con un ángulo recto en M.*

Problema 2.20 *El los lados de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se trazan triángulos equiláteros ABM y CDP externos a la figura y triángulos equiláteros BCN y ADQ internos a la figura. Describe la forma de el cudrilátero $MNPQ$.*

Problema 2.21 *Sea C un acircunferencia, tracemos tres cuerdas AB, CD y EF cualesquiera con longitud igual al radio de C. Sean M, N y P son los puntos medios de FA, BC y DE, respectivamente. Demostrar que $\triangle MNP$ es equilátero.*

Problema 2.22 *Sea $\triangle ABC$ un triángulo en los lados de este se construyen triángulos $\triangle DAB$, $\triangle BCE$ y $\triangle AFC$ tales que los ángulos en A, C, F son rectos, respectivamente, y $\triangle AFC$ hacia el interior de $\triangle ABC$. Probar que los puntos A, C, F son colineales.*

Problema 2.23 *Dados los vértices, z_1, z_2, de un triángulo equilátero, hallar el tercer vértice z_3.*

Problema 2.24 *Dados tres vértices, z_1, z_2, z_3, de un paralelogramo, halla el cuarto vértice z_4 opuesto a z_2.*

Problema 2.25 *Encontrar todos los números complejos z tal que, $|z| = 1$ y $|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}| = 1$.*

Problema 2.26 *Probar que $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.*

Bibliografía

[1] T. Andrescu, D. Andrica,*Complex Numbers From A to Z*, Birkhauser Boston, (2006).

[2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, (2002).

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. *Geometría, ejercicios y problemas*, Instituto de Matemáticas de la UNAM, (2002).

[4] H.S.M.Coxeter. *Introducción a la geometría*, LIMUSA, (1988).

[5] H.S.M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Retorno a la geometra*, Euler Col. La tortuga de Aquiles, (1994).

[6] R. Deaux,*Introduction to the Geomrmery of Complex Numbers*, Dover Publications, Mineola, New York, (2008).

[7] H. Eves. *Estudio de las geometrías*, UTEHA, (1985).

[8] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich. *Practicas para resolver problemas matemticos*, Geometría, MIR-Moscú, (1989).

[9] R. Honsberger. *Episodes in ninteenth and twentieth century euclidean geometry*, The Mathematical Association of America, (1995).

[10] A. Illanes Mejía. *Principios de Olimpiada, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*. Instituto de Matemáticas de la UNAM, (2001).

[11] A. S. Posamentier, Charles T. Salkind. *Challenging problems in geometry*, Dover, (1988).

[12] I. Shariguin. *Problemas de geometría, Planimetría*, Colección Ciencia Popular, MIR-Moscú, (1989).

[13] L. S. Shively. *Introducción a la geometría moderna*, CECSA, (1984).

[14] P. Yiu. *Euclidean Geometry (Preliminary Version)*, Departament of Mathematics Florida Atlantics University, (1998).

Índice