UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS y DGS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Araceli González Reséndiz
Exp. 171394

Dirigida por:
M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Santiago de Querétaro, Qro. Marzo del 2014

A mi familia, que sido la base de mi formación,

y me ha acompañado en cada paso de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

- A Papá Porfirio y Mamá Guadalupe que siempre me apoyaron para que yo pudiera lograr mis sueños y por siempre extenderme la mano cuando más los necesite.
- A Dios por permitirme vivir y recorrer todo este camino.
- A mis hermanos Elizabeth, Edith y Javier porque han sido un gran ejemplo.
- A Miguel Ángel por su paciencia y comprensión, por regalarme tu tiempo y por estar siempre a mi lado.
- A la maestra Norma Angélica Rodríguez por todo su apoyo, su dirección en la tesis y sobre todo por su gran amistad.
- A los sinodales que se dieron el tiempo para estudiar mi tesis.
- A mis maestros que nos han dado lecciones, conocimientos y experiencias que han contribuido en mi formación como una persona de bien y preparada.
- A mis compañeros de la licenciatura por su gran amistad, grandes recuerdos y todo el apoyo en el transcurso de la carrera.
- A la Universidad Autónoma de Querétaro por el acogimiento y hospitalidad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA ACADÉMICA

ACUERDO 409/13

C. U. 10 de junio de 2013

C. Araceli González Reséndiz (171394)
Alumna de Matemáticas Aplicadas
(MAT04)
Presente

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis Individual, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 10 de junio del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar el protocolo de la opción de tesis individual por lo que deberá trabajar en el tema **"Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS y DGS "** bajo la dirección de la MDM Norma Angélica Rodríguez Guzmán.

El contenido aprobado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

1. Introducción

1.1 Competencias Informáticas.

1.2 Ensamble ente resolución de problemas y su vinculo matemático-social.

1.3 Temas tratados en las prácticas.

2. Software CAS y DGS

2.1 ScientificWorkPlace

2.2 GeoGebra

2.3 Microsoft Excel

3. Prácticas propuestas

3.1 El Tesoro del Pirata

3.2 El Problema de los Cumpleaños

3.3 Los Códigos de Barras

3.4 Determinación del área de un circulo

Centro Universitario, Cerro de las Campanas Santiago de Querétaro, Qro. México, C.P. 76010
Tel. 01(442) 192 12 00 Exts. 6024 Y 6011

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente
"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"

DR. AURELIO DOMÍNGUEZ GONZÁLEZ
Director

c.c.p. Archivo
*ADG/CSG

SECRETARÍA
ACADÉMICA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA ACADÉMICA

Centro Universitario, 21 de febrero de 2014

C. Araceli González Reséndiz
Pasante de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Presente:

Le comunico que una vez revisado el oficio en el que informa la terminación de Tesis Individual Titulada **"Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS Y DGS"**, y con base en la atribución que me confiere el articulo 51 del reglamento de titulación vigente he nombrado como sinodales a los siguientes catedráticos: **M. en C. Roberto Torres Hernández, MDM. Benjamín Zúñiga Becerra, MDM Arturo Corona Pegueros y como Directora de Tesis la MDM Norma Angélica Rodríguez Guzmán.**

Cabe mencionar que para continuar con los trámites de titulación, es necesario obtener el voto aprobatorio del trabajo por parte de los maestros mencionados.

Sin más por el momento, quedo de usted.

Atentamente
"El Ingenio para crear, No para Destruir"

Dr. Aurelio Domínguez González
Director

SECRETARÍA ACADÉMICA

c.c.p. MDM. Norma Angélica Rodríguez Guzmán
M. en C. Roberto Torres Hernández
MDM. Benjamín Zúñiga Becerra
MDM Arturo Corona Pegueros
*ADG/lgo

Centro Universitario, Cerro de las Campanas Santiago de Querétaro, Qro. México, C.P. 76010
Tel. 01(442) 192 12 00 Exts. 6024 Y 6011

Centro Universitario, 21 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS Y DGS**", de la **C. Araceli González Reséndiz, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM. Norma Angélica Rodríguez Guzmán
Directora de Tesis

Centro Universitario, 21 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **"Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS Y DGS"**, de la **C. Araceli González Reséndiz, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

RTorres

M. en C. Roberto Torres Hernández
Sinodal

Centro Universitario, 21 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **"Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS Y DGS"**, de la **C. Araceli González Reséndiz, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM Benjamín Zúñiga Becerra
Sinodal

Centro Universitario, 21 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **"Propuesta didáctica de temas selectos para formación profesores de bachillerato con prácticas en software tipo CAS Y DGS"**, de la **C. Araceli González Reséndiz, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM. Arturo Corona Pegueros
Sinodal

INDICE DE LA TESIS

Capítulo 1.
Introducción

La educación es la base para que un país emerja, para que siga evolucionando y no se quede estancado, si la educación es tan importante entonces cualquier institución educativa debe de tener como estandarte una educación digna, es así como cae un gran peso en el proceso enseñanza-aprendizaje y en el modelo de enseñanza que el profesor utilice.

En el capítulo 1 se trataran dos enfoques educativos, resolución de problemas y competencias, no significa que sean los más importantes pero han sido seleccionados de tal manera que son los que mejor se adaptan a la prácticas propuestas en el capítulo 3.

Dentro del enfoque de competencias, se trataran aquellas que todo profesor debe tener acerca de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, en el capítulo 2 se realiza una pequeña introducción acerca de software que son de suma importancia para esta tesis y que servirá para que el docente vaya completando las "competencias en TIC´s para docentes" según la UNESCO.

Dentro de la resolución de problemas se dará un pequeño bosquejo de lo que trata dicha corriente educativa, además se hará la diferencia entre un ejercicio y un problema porque generalmente estos conceptos se manejan como sinónimos.

Dentro de este capítulo además de los enfoques educativos, se manejaran los temas que han sido tratados en las practicas propuestas del capítulo 3 además mostraremos el por qué se eligieron dicho temas, puesto que no han sido seleccionados al azar sino basándonos en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) que es un proceso consensuado que consisten la Creación del Sistema Nacional del Bachillerato con base en cuatro pilares.

1.1 COMPETENCIAS INFORMÁTICAS

En la actualidad la tecnología está creciendo a pasos agigantados, es muy fácil poder comunicarse con cualquier persona, podemos conocer lo que está pasando en cualquier lugar del mundo casi instantáneamente, en fin, la tecnología ya es parte de nuestra vida, no se puede avanzar y hacerla a un lado, sino todo lo contrario, para vivir, aprender y trabajar hay que conocerla y manejarla, en particular, los docentes deben utilizar la tecnología de manera eficaz. Centrándonos en un contexto educativo, el uso constante de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ayuda a los estudiantes a adquirir capacidades con el uso de estas, por ejemplo, buscar, analizar y evaluar información. El profesor es la persona que tiene el papel fundamental, pues es quien le ayuda al alumno a adquirir estas competencias, el profesor es el responsable de crear el ambiente y circunstancias para facilitar el uso de las TIC’s en el alumno, es por eso que todos los docentes deben estar preparados para brindar esas oportunidades a todos sus estudiantes.

El proyecto “Estándares UNESCO de Competencias en TIC´s para docentes” (ECD-TIC) ofrece orientación y directrices para planear programas de formación de profesores y una selección de cursos que permitirá prepararlos para desempeñar un papel eficaz en la capacitación tecnológica de los estudiantes, de manera general, los objetivos del proyecto “Estándares UNESCO de Competencias en TIC para docentes” pretenden:

- Elaborar un conjunto común de directrices que los proveedores de formación profesional puedan utilizar para identificar, desarrollar o evaluar material de aprendizaje o programas de formación de docentes con miras a la utilización de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje.
- Suministrar un conjunto básico de cualificaciones que permitan a los docentes integrar las TIC en sus actividades de enseñanza y aprendizaje, a fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la realización de otras de sus tareas profesionales.

- Ampliar la formación profesional de docentes para complementar sus competencias en materia de pedagogía, cooperación, liderazgo y desarrollos escolares innovadores, con la utilización de las TIC.
- Armonizar las distintas ideas y el vocabulario relativo al uso de las TIC en la formación docente.

El proyecto va dirigido a mejorar la práctica de los docentes en todas las áreas de desempeño, combinando las competencias en TIC con innovaciones en la pedagogía, el currículo y la organización escolar, así mismo, lograr que los docentes utilicen las competencias en TIC para mejorar las estrategias del aula, y en el ultimo de las casos convertirse en un líder de innovación dentro de su institución. Lo importante del proyecto ECD-TIC es que también ayuda a mejorar la calidad de sistema educativo, con el fin de que esto contribuya al desarrollo económico y social del país.

A continuación mostraremos una especificación de los módulos relativos a los estándares de competencia y directrices para los diseñadores de cursos y los proveedores de formación.

El proyecto ECD-TIC se enmarca en un contexto político amplio de reforma de la educación y desarrollo sostenible. La educación es pilar fundamental en todo país o comunidad y, como tal, responde a una serie de metas y objetivos, entre los que figuran:

- Inculcar valores fundamentales y transmitir el legado cultural.
- Apoyar el desarrollo personal de jóvenes y adultos.
- Promover la democracia e incrementar la participación social especialmente de mujeres y minorías.
- Impulsar el entendimiento entre culturas y la solución pacífica de conflictos y, mejorar la salud y el bienestar,
- Apoyar el desarrollo económico, reducir la pobreza y aumentar la prosperidad de todos.

El proyecto ECD-TIC toma y extiende los objetivos de los programas de educación de las Naciones Unidas y la UNESCO (Objetivos de Desarrollo del Milenio, Educación para todos, entre otros), este proyecto se enfoca en reducir la pobreza y en mejorar la calidad de vida, en especial, mejorar la calidad de la educación, el proyecto se basa en que el crecimiento económico sistémico es la clave

para disminuir la pobreza y aumentar la prosperidad, esto lo corroboran el desarrollo de países como Corea y Chile que hace más de 30 años eran países pobres, también se basa en la hipótesis de que las TIC son motores del crecimiento e instrumentos para el empoderamiento de las personas, que hay repercusión en la evolución y la mejora de la educación.
La educación y el desarrollo de capacidades humanas además de que permite agregar valor a la economía, permite contribuir al patrimonio cultural, participar en sociedad, mejorar la calidad de vida de familias y comunidades. Si se tiene una educación de calidad para todos se multiplican los beneficios personales esto provoca que siga en crecimiento la economía y se disfrute de manera equitativa.

El proyecto ECD-TIC ofrece tres vías para vincular el mejoramiento de la educación con el crecimiento económico, estos enfoque s corresponden a las visiones y objetivos de políticas educativas a futuro, es decir, los estudiante así como los ciudadanos y trabajadores de un país adquieren las competencias necesarias para apoyar a los sectores económicos, sociales, culturales y ambientales, teniendo así una mejor calidad de vida.
Los enfoques son:

- Enfoque de nociones básicas en TIC: Ampliar la comprensión tecnológica en estudiantes, ciudadanos y trabajadores mediante la integración de competencias en TIC en los currículos de estudio.
- Enfoque de profundizar el conocimiento: Ampliar la capacidad de estudiantes, ciudadanos y trabajadores para que utilicen los conocimientos para agregar valor a la economía siempre que apliquen los conocimientos a problemas reales.
- Enfoque generación de conocimiento: Ampliar la capacidad de estudiantes, ciudadanos y trabajadores para innovar y producir nuevo conocimiento.

Estos enfoques tienen efectos en la educación principalmente en las siguientes componentes del sistema educativo:

1. Pedagogía.
2. Práctica y formación profesional de docentes.
3. Currículo y evaluación.
4. Organización y administración de la institución educativa.
5. Utilización de las TIC.

Los estándares que Unesco de competencias en TIC para docentes, aplica a todos los niveles educativos e incluso a para todos aquellos que están interesados en la educación.

La nueva tecnología (TIC) exige que todos los docentes desarrollen nuevas funciones, que se apropien de nuevas pedagogías y nuevos planteamiento en la formación docente. Para agregar las TIC en el aula dependerá del profesor y su capacidad, es decir, deben diseñar el aprendizaje de una forma no tradicional, para poder fusionar las TIC con las nuevas pedagogías así obtener clases dinámicas en un plano social, esto demanda la adquisición de nuevas competencias para manejar la clase. Las competencias fundamentales serán la capacidad para desarrollar métodos innovadores de utilización de TIC para mejorar el aprendizaje, estimular la adquisición de nociones básicas en TIC, profundizar y generar el conocimiento.

La formación del docente será esencial para mejorar la educación, el desarrollo del docente destacara si la formación es constante y se integra en otros cambios del sistema educativo.

Luego, el proyecto ECD-TIC analiza los efectos que tiene cada uno de los tres enfoques en cada componente del sistema educativo:

- Política educativa.
- Currículo
- Utilización de las TIC
- Organización y administración de la institución educativa.
- Desarrollo profesional docente.

Los Estándares UNESCO de Competencias en TIC para Docentes (ECD-TIC) proporcionan un marco de referencia que permite a los proveedores de formación profesional de docentes vincular en sus cursos estos objetivos políticos amplios que buscan mejorar la educación y el desarrollo económico.

El objetivo del proyecto ECD-TIC es proveer, a quienes elaboran las políticas educativas, herramientas que les permitan configurar la reforma educativa con base en las TIC, también en la formación de docentes, con el propósito de llegar a las metas para el desarrollo económico y social, el proyecto ECD-TIC da un marco común para mejorar la educación, centrado en un crecimiento económico y en un desarrollo social.

Para el proyecto Estándares UNESCO de Competencia en TIC para Docentes (ECD-TIC) se elaboro un marco de plan de estudio, el cual se observa en la siguiente tabla, donde cada celda constituye un módulo en el marco y en cada módulo hay objetivos curriculares específicos y competencias docentes, se busca que los formadores de docentes revisen el marco del plan de estudios y los estándares de competencia (ECD-TIC) para que se pueda elaborar material nuevo de aprendizaje o revisar el ya existente para apoyar a los tres enfoques.

A continuación se presenta una descripción más detallada tal y como lo presenta la UNESCO de los Módulos de Estándares de Competencia para docente.

ENFOQUE RELATIVO A LAS NOCIONES BÁSICAS DE TICIONES BÁSICAS DE TIC

Política y visión El objetivo político de este enfoque consiste en preparar estudiantes, ciudadanos y trabajadores capaces de comprender las nuevas tecnologías digitales, con el fin de apoyar el desarrollo social y mejorar la productividad económica. Los objetivos conexos de las políticas educativas comprenden: incrementar la escolarización, poner recursos educativos de calidad al alcance de todos y mejorar la adquisición de competencias básicas (en lectura, escritura y matemáticas), incluyendo nociones básicas de tecnología digital (TIC).

Objetivos del plan de estudios (currículo) Competencias docentes

Política Comprensión de la política. En este enfoque, los programas establecen vínculos directos entre política educativa y prácticas de aula. Los docentes deben comprender las políticas educativas y ser capaces de especificar cómo las prácticas de aula las atienden y apoyan.

Plan de estudios (currículo) y evaluación, Conocimiento básico. Los cambios en el plan de estudios (currículo) que demanda este enfoque pueden comprender: mejoras de habilidades básicas en alfabetismo, además del desarrollo de competencias básicas en TIC en contextos relevantes. Esto demandará disponer del tiempo suficiente dentro de las unidades curriculares o núcleos temáticos, de otras asignaturas, para incorporar una serie de recursos pertinentes de las TIC así como herramientas de productividad de estas. Los docentes deben tener conocimientos sólidos de los estándares curriculares (plan de estudios) de sus asignaturas como también, conocimiento de los procedimientos de evaluación estándar. Además, deben estar en capacidad de integrar el uso de las TIC por los estudiantes y los estándares de esta

Pedagogía Integrar las TIC. Los cambios en la práctica pedagógica suponen la integración de distintas tecnologías, herramientas y contenidos digitales como parte de las actividades que apoyen los procesos de enseñanza/aprendizaje en el aula, tanto a nivel individual como de todo el grupo de estudiantes Los docentes deben saber dónde, cuándo (también cuándo no) y cómo utilizar la tecnología digital (TIC) en actividades y presentaciones efectuadas en el aula.

TIC Herramientas básicas. Las TIC involucradas en este enfoque comprenden: el uso de computadores y de software de productividad; entrenamiento, práctica, tutoriales y contenidos Web; y utilización de redes de datos con fines de gestión. Los docentes deben conocer el funcionamiento básico del hardware y del software, así como de las aplicaciones de productividad, un navegador de Internet, un programa de comunicación, un presentador multimedia y aplicaciones de gestión

Organización y administración Clase estándar. Ocurren cambios menores en la estructura social con este enfoque, exceptuando quizás la disposición del espacio y la integración de recursos de las TIC en aulas o en laboratorios de informática. Los docentes deben estar en capacidad de utilizar las TIC durante las actividades realizadas con: el conjunto de la clase, pequeños grupos y de manera individual. Además, deben garantizar el acceso equitativo al uso de las TIC.

Desarrollo profesional del docente Alfabetismo en TIC. Las repercusiones de este enfoque para la formación de docentes son, principalmente, fomentar el desarrollo de habilidades básicas en las TIC y la utilización de estas para el mejoramiento profesional. Los docentes deben tener habilidades en TIC y conocimiento de los recursos Web, necesarios para hacer uso de las TIC en la adquisición de conocimientos complementarios sobre sus asignaturas, además de la pedagogía, que contribuyan a su propio desarrollo profesional.

ENFOQUE RELATIVO A LA PROFUNDIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Política y visión

El objetivo político del enfoque de profundización de conocimientos consiste en incrementar la capacidad de la fuerza laboral para agregar valor a la sociedad y a la economía, aplicando los conocimientos de las asignaturas escolares para resolver problemas complejos con los que se encuentran en situaciones reales en el trabajo, la sociedad y la vida.

Pedagogía

Solución de problemas complejos. La pedagogía escolar asociada con este enfoque comprende el aprendizaje colaborativo y el aprendizaje basado en problemas y en proyectos, en los que los estudiantes examinan a fondo un tema y utilizan sus conocimientos para responder interrogantes, cuestiones y problemas diarios complejos. En este enfoque la enseñanza/aprendizaje se centra en el estudiante y el papel del docente consiste en estructurar tareas, guiar la comprensión y apoyar los proyectos colaborativos de éstos. Para desempeñar este papel, los docentes deben tener competencias que les permitan ayudar a los estudiantes a generar, implementar y monitorear, planteamientos de proyectos y sus soluciones

TIC

Herramientas complejas. Para comprender los conceptos fundamentales, los estudiantes utilizan herramientas de las TIC no lineales y específicas para una área académica, como: visualizaciones para ciencias naturales, herramientas de análisis de datos para matemáticas y simulaciones de desempeños de funciones (roles) para ciencias sociales. Los docentes deben conocer una variedad de aplicaciones y herramientas específicas y deben ser capaces de utilizarlas con flexibilidad en diferentes situaciones basadas en problemas y proyectos. Los docentes deben poder utilizar redes de recursos para ayudar a los estudiantes a colaborar, acceder a la información y comunicarse con expertos externos, a fin de analizar y resolver los problemas seleccionados. Los docentes también deberán estar en capacidad de utilizar las TIC para crear y supervisar proyectos de clase realizados individualmente o por grupos de estudiantes.

Organización y administración

Grupos colaborativos. Tanto las estructuras de las aulas de clase como los periodos de clase (horas) son más dinámicos y los estudiantes trabajan en grupo durante períodos de tiempo mayores. Los docentes deben ser capaces de generar ambientes de aprendizaje flexibles en las aulas. En esos ambientes, deben poder integrar actividades centradas en el estudiante y aplicar con flexibilidad las TIC, a fin de respaldar la colaboración.

ESTÁNDARES DE UNESCO DE COMPETENCIA EN TIC PARA DOCENTES – PROGRAMA

I. ENFOQUE RELATIVO A LAS NOCIONES BÁSICAS DE TIC

Política y visión El objetivo político de este enfoque consiste en preparar una fuerza laboral capaz de comprender las nuevas tecnologías con el fin de mejorar la productividad económica. Los objetivos de las políticas educativas conexas comprenden: incrementar la escolarización y mejorar la adquisición de competencias básicas (en lectura, escritura y matemáticas), incluyendo nociones básicas de tecnología digital (TIC).

OBJETIVOS. Los docentes deben estar en capacidad de: EJEMPLOS DE MÉTODOS

I.A. Política I.A.1. Identificar características esenciales de las prácticas de aula y especificar cómo éstas pueden servir para implementar la política educativa. Organizar un debate sobre política educativa nacional y prácticas corrientes en el aula de clase. Definir las características de las prácticas que apoyan la política educativa nacional. Solicitar a los participantes en el debate que identifiquen y analicen sus propias prácticas en el aula, teniendo en cuenta la política educativa nacional.

I.B. Plan de estudios y evaluación I.B.1. Concordar los estándares específicos del plan de estudios con software y aplicaciones informáticas específicas, y describir cómo estas aplicaciones respaldan los estándares en cuestión. Seleccionar varias herramientas específicas de las TIC para una asignatura; y pedir a los participantes que identifiquen los estándares específicos del plan de estudios asociados a esas herramientas y discutan cómo éstos se pueden apoyar en las TIC.

I.B.2. Ayudar a los estudiantes, en el contexto de sus asignaturas, a alcanzar habilidades en el uso de las TIC. Proponer a los participantes que preparen un proyecto de clase sobre un tema específico de una asignatura que incluya instrucción sobre la utilización de las TIC. Más concretamente: procesadores de texto, navegadores de Internet, correo electrónico, blogs, wikis y otras tecnologías emergentes. Pedirles además que se los presenten a sus colegas y que les enseñen habilidades en estas herramientas.

I.B.3. Utilizar las TIC para evaluar la adquisición de conocimientos, en asignaturas escolares, por parte de los estudiantes e informarles sobre sus progresos utilizando evaluaciones tanto formativas como sumativas (acumulativa). Proponer a los participantes que integren, en sus proyectos de clase, las TIC y determinados tipos de software para hacer evaluaciones formativas y sumativas y que luego intercambien esos proyectos con otros educadores para obtener recomendaciones de ellos en el contexto de una comunidad profesional de aprendizaje.

I.C. Pedagogía I.C.1. Describir cómo la didáctica y las TIC se pueden utilizar para contribuir a que los estudiantes alcancen conocimientos en las asignaturas escolares. Describir cómo la utilización de las TIC y de determinados tipos de software puede contribuir a que los estudiantes alcancen conocimientos en asignaturas escolares y mostrar, cómo el uso de esas tecnologías digitales puede complementar los métodos didácticos utilizados en clase (cursos magistrales y demostraciones).

I.C.2. Incorporar en los proyectos de clase actividades adecuadas que integren las TIC, a fin de contribuir a que los estudiantes adquieran conocimientos en asignaturas escolares. Proponer a los participantes que elaboren proyectos de clase que integren software de tutoría (tutoriales) y de instrucción y práctica, así como recursos y contenidos digitales. Pedir a los participantes que intercambien esos proyectos y obtengan recomendaciones de otros colegas.

I.C.3. Utilizar software de presentación multimedia y recursos informáticos para complementar la enseñanza. Mostrar la utilización de software de presentación multimedia y otros recursos informáticos para complementar un curso magistral; suministrar una serie de ejemplos de presentaciones multimedia educativas; solicitar a los participantes que elaboren un proyecto de clase que incluya la utilización del presentador multimedia; y pedirles que utilicen este software para preparar una presentación.

I.D. TIC I.D.1. Describir y demostrar el uso de hardware corriente. Examinar y demostrar el funcionamiento del hardware más básico: computadores de escritorio (PC), portátiles y de mano (tipo Palm); impresoras y escáneres.

I.D.2. Describir y demostrar tareas y utilizaciones básicas de procesadores de texto tales como digitación, edición, formateo e impresión de textos. Examinar y presentar las funciones básicas de los procesadores de texto y demostrar cómo se usan en la enseñanza. Proponer a los participantes que creen un documento textual utilizando estos procesadores.

I.D.3. Describir y demostrar el objetivo y las características básicas del software de presentaciones multimedia y otros recursos informáticos. Examinar el objetivo del presentador multimedia y demostrar sus características generales y funcionamiento. Proponer a los participantes que elaboren, utilizando recursos informáticos, una presentación multimedia sobre un tema de su elección.

I.D.4. Describir el objetivo y la función básica del software gráfico y utilizar un programa de este tipo para crear una imagen sencilla. Examinar el objetivo del software gráfico y mostrar cómo se crea una imagen. Solicitar a los participantes que creen visualizaciones gráficas y las intercambien.

I.D.5. Describir Internet y la World Wide Web, explicar con detalle sus usos, describir cómo funciona un navegador y utilizar una dirección (URL) para acceder a un sitio Web. Examinar el objetivo y estructura de Internet y de la World Wide Web, así como las experiencias de los usuarios de estos medios. Describir cómo funciona un navegador de Internet y pedir a los participantes que lo utilicen para acceder a sitios Web conocidos.

I.D.6. Utilizar un motor de búsqueda para efectuar una exploración booleana con palabras clave. Demostrar la utilización de un motor de búsqueda; demostrar cómo se efectúan búsquedas booleanas con palabras clave sencillas; Invitar a los participantes a que busquen sitios Web dedicados a sus temas preferidos y a discutir con el grupo, las estrategias relativas a las palabras clave que utilizaron.

I.D.7. Crear una cuenta de correo electrónico y utilizarla para mantener correspondencia electrónica duradera. Demostrar cómo se genera y utiliza una cuenta de correo electrónico; y solicitar a los participantes que creen una cuenta de este tipo y envíen una serie de mensajes por correo electrónico.

I.D.8. Describir la función y el objetivo de los software de tutoría (tutoriales) y de instrucción y práctica, así como la manera en que contribuyen, en los estudiantes, a la adquisición de conocimientos, en las diferentes asignaturas escolares. Demostrar una serie de paquetes de software de tutoría (tutoriales) y de instrucción y práctica relativos a las asignaturas del énfasis disciplinario de los participantes y describir cómo estos contribuyen a la adquisición de conocimientos en los contenidos de dichas asignaturas. Proponer a los participantes que analicen paquetes específicos de software relacionados con sus respectivas asignaturas y describan cómo estos contribuyen a la adquisición de conocimientos sobre contenidos específicos.

I.D.9. Localizar paquetes de software educativo y recursos Web ya preparados, evaluarlos en función de su precisión y alineamiento con los estándares del plan de estudios (currículo), y adaptarlos a las necesidades de determinados estudiantes. Solicitar a los participantes que busquen sitios Web y catálogos para localizar software que se adapte a determinados objetivos o estándares de aprendizaje y, que analicen esos paquetes para evaluarlos en función de su precisión y alineamiento con el plan de estudios. Pedir a los participantes que examinen los criterios que utilizan para analizar y evaluar software.

I.D.10. Utilizar software para mantener registros en red a fin de controlar asistencia, presentar notas de los estudiantes y mantener registros relativos a ellos. Examinar el objetivo y ventajas de un sistema para mantener registros en red, demostrar cómo se utiliza un sistema de ese tipo, y pedir a los participantes que introduzcan datos para registrar los relativos a sus respectivas clases.

I.D.11. Utilizar tecnologías comunes de comunicación y colaboración tales como mensajes de texto, videoconferencias, colaboración mediante Internet y comunicación con el entorno social.

Examinar el objetivo y ventajas del uso de distintas tecnologías de comunicación y colaboración; y pedir a los participantes que las utilicen para comunicarse y colaborar con otros miembros del grupo.

I.E. Organización y administración I.E.1. Integrar el uso del laboratorio de informática en las actividades docentes permanentes. Examinar y dar ejemplos de las diferentes formas en que se pueden utilizar los laboratorios de informática para complementar la enseñanza en clase; e invitar a los participantes a elaborar proyectos de clase que comprendan realizar actividades en el laboratorio de informática.

I.E.2. Organizar la utilización complementaria de recursos de las TIC, en las clases normales, por parte de estudiantes o grupos pequeños de ellos, para no interrumpir otras actividades educativas que se estén realizando. Examinar y mostrar ejemplos de las diferentes formas en que alumnos solos, en parejas o en grupos pequeños pueden utilizar en clase los recursos de las TIC –cuando éstos son limitados– como complemento de la enseñanza que reciben; y pedir a los participantes que elaboren proyectos de clase que incluyan la utilización de las TIC para complementar la enseñanza impartida en la clase.

I.E.3. Identificar cuáles son las disposiciones adecuadas o inadecuadas en el plano social para el uso de las distintas tecnologías. Identificar las tareas que consumen en su trabajo diario el tiempo de los participantes; examinar cómo se pueden utilizar los recursos ofrecidos por las TIC para coadyuvar a realizar esas tareas y aumentar la productividad personal; y solicitar a los participantes utilizar tanto computadores de escritorio (PC), portátiles, o de mano como software, (por ejemplo procesadores de texto, blogs, wikis y otras herramientas de productividad y comunicación) para ayudar en la realización de una de las tareas identificadas.

I.F. Formación profesional del docente F.1. Utilizar recursos de las TIC para mejorar su productividad. Identificar las tareas que consumen en su trabajo diario el tiempo de los participantes; examinar cómo se pueden utilizar los recursos ofrecidos por las TIC para coadyuvar a realizar esas tareas y aumentar la productividad personal; y solicitar a los participantes utilizar tanto computadores de escritorio (PC), portátiles, o de mano como software, (por ejemplo procesadores de texto, blogs, wikis y otras herramientas de productividad y comunicación) para ayudar en la realización de una de las tareas identificadas.

I.F.2. Utilizar recursos de las TIC, para apoyar su propia adquisición de conocimiento sobre asignaturas y pedagogía para contribuir a su propio desarrollo profesional. Examinar los distintos recursos que ofrecen las TIC y que los participantes pueden utilizar para incrementar sus conocimientos tanto sobre sus asignaturas como sobre pedagogía; y pedir a los participantes que definan un objetivo personal de formación profesional y generen, con el fin de alcanzar ese objetivo, un proyecto para usar varias herramientas de las TIC; por ejemplo navegadores Web y tecnologías de comunicación.

1.2 ENSAMBLE ENTRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU VÍNCULO MATEMÁTICO-SOCIAL

Las Matemáticas se han definido de distintas maneras a través del tiempo, Aristóteles definió a las matemáticas como “el estudio de la cantidad”, mientras que R. Descartes las describió como “La ciencia del orden y la medida”, esto es, por mencionar algunas de las definiciones que se han dado a través del tiempo, por su parte G. Polya decía que las Matemáticas son “saber hacer” más que “saber”, cada afirmación adopta un punto de vista diferente, Polya concibe esta disciplina, así como su enseñanza, desde un enfoque heurístico, es decir, considerar los procesos de búsqueda, de creación, de tanteos, de inferencias, de comprobaciones, propio de la resolución de problemas, como el corazón de la actividad matemática (Polya, 1945).

Aquí es donde nos hacemos la pregunta ¿Cuál es el objetivo fundamental de la educación Matemática?, responder esta pregunta es difícil, sin embargo es claro que el profesor de Matemáticas no se debe conformar con dar el “saber”, sino que debe de dar al estudiante la capacidad de poder utilizar ese “saber”.

Con lo anterior observamos que la concepción de lo que significa las Matemáticas va muy de la mano con su enseñanza y aprendizaje, según Hersh (1986): “La concepción sobre la matemática afecta la propia concepción sobre cómo debe ser enseñada. La manera de enseñar es un indicador sobre lo que uno cree que es esencial en ella”.

También es cierto que el conocimiento matemático no se obtiene de manera directa de la que se expone en clase o de lo que se lea en libros, la matemática se aprende con las interacciones que se realicen en situaciones problemáticas, entonces la educación matemática debe dar a los alumnos; distintos contextos de aprendizaje para que el estudiante construya su propio conocimiento matemático y situaciones problemáticas para que el estudiante puede experimentar, generar, comprobar y analizar resultado, esto se lograra a partir de la resolución de problemas.

El término “resolución de problemas” puede llegar a tener diferentes interpretaciones, se puede pensar el proceso para resolver un ejercicio simple o en hacer matemática un poco más formal, mencionaremos algunas de las definiciones que se has dado a en diferentes épocas acerca de este concepto;

- Según S. Krulik y K. Rudnick (1980), F. J. Perales Palacios (1993) y M. Sánchez (1995), coinciden en que un problemas es una situación que presenta obstáculos para los cuales no se tienen una solución inmediata.
- R. Delgado (1998), define el término problema como “una situación verdaderamente problemática para el resolutor, para la cual, teniendo conciencia de ella, no conoce una vía de solución”.
- I. Alonso (2001), un problema matemático es “una situación matemática que contempla tres elementos:
    - Objetos.
    - Características de esos objetos.
    - Relaciones entre ellos.

  Agrupados en dos componentes:
        - Condiciones
        - Exigencias relativas a esos elementos

  Y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos o experiencias”.
- Según A. F. Labarrete (1996), un problema es “ una situación en la que hay algo oculto para el sujeto, y este se esfuerza por hallar”

Esto es por mencionar algunas de las definiciones que se han dado. Algunos autores comparan los términos de ejercicio y problema:

- M. J. Liviana (1999) dice “un ejercicio es un problema si y sólo si la vía de solución es desconocida para la persona”.
- J. Martínez Torregrosa (1999), expresa “un correcto planteamiento didáctico de la resolución exige la distinción entre ejercicios y problemas, para los ejercicios el alumno ya tiene disponibles respuestas satisfactorias para las que ha sido preparado y, al contrario

de lo que sucede en un verdadero problema, no hay incertidumbre de su comportamiento".

Si se hace la distinción entre ejercicio y problema, entonces ¿Qué es la resolución de problemas?

- Según A. Orton (1996), la resolución de problemas "se concibe como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva".
- R. Delgado (1998), dice que resolver un problema "es encontrar un método o vía de solución que conduzca a la solución del problema".
- Para M.J. Llivina (1999), "la resolución de problemas matemáticas es una capacidad especifica que se desarrolla a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y que se configura en la personalidad del individuo al sistematizar, con determinada calidad y haciendo uso de la metacognición, acciones y conocimientos que participan en la resolución de problemas".

Lo más importante es que el problema debe ser atractivo para que nos cautive, y difícil pero no impenetrable.

Se han dado diversos modelos para resolver problemas, uno de los más conocidos es el que propone G. Polya en su libro "Como plantear y resolver problemas", que consta de cuatro fases:

- Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos y las condiciones?
- Concebir un plan: ¿conoce un plan relacionado con este?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿podría redactar el problema de otra forma?, ¿ha utilizado todos los datos?
- Ejecución del plan: ¿puede usted ver que el paso es correcto?
- Examinar la solución obtenida: verificar el resultado.

Cada una de estas fases tiene subfaces, donde, como ya se observo, es necesario hacerse algunas preguntas para que se pueda llevar a cabo cada fase, Polya sugiere que las preguntas no deben realizarse de forma dura, más bien de una forma más sutil de tal manera que parezca que al alumno se le han ocurrido.

De la misma manera Schoenfeld publicó en su libro Mathematical Problem Solving (1985) que cuando se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta cuestiones que vayan más allá de la heurística, no porque no funcionen sino porque hay muchos factores que afectan, a partir de aquí, se puede entender por heurística a las acciones que pueden resultar de utilidad para resolver un problema.
Las dimensiones que considera son:

Recursos: Estos son los conocimientos previos que tiene el alumno, el profesor debe tener claro cuáles son las herramientas que posee el alumno, aquí tenemos 3 cosas importantes:

- Inventario de recursos: el profesor debe saber como el estudiante utiliza los conocimientos, pues el alumno puede tener muchos conocimientos y no puede usarlos de ninguna manera.
- Circunstancias estereotípicas: provocan respuestas estereotípicas.
- Recursos defectuosos: esto se refiere al que el alumno puede tener conocimientos erróneos, pues fueron mal aprendidos.

Heurísticas: Toma en cuenta el conjunto de estrategias generales que puedes ser buenas para llegar a la solución.

Control: Se refiere a como el estudiante controla su trabajo, debe de detectar si el camino que está tomando para resolver el problema es el adecuado, las componentes que involucra el control son:

- Entendimiento: tener claro acerca de lo que trata el problema, según Polya, si el alumno no entiende el problema, no lo va a resolver, y en caso de resolverlo es pura coincidencia.
- Considerar varias formas para encontrar la solución y seleccionar una.
- Realiza la forma que se selecciono, y en el proceso si es necesario realizar un cambio.
- Revisar el proceso de solución.

Sistema de creencias: Las creencias sobre las matemáticas afectan en la forma en que se resuelve un problema matemático, hay que tener en cuenta las creencias del profesor, los estudiantes e incluso las creencias sociales.

Dentro de las creencias que tiene el estudiante acerca de las matemáticas y que son importantes de mencionar tenemos las siguientes:

- Los problemas matemáticos tienen solo una respuesta correcta.
- Existe solo una técnica para resolver cualquier problema, generalmente es la que da el profesor en clase.
- Los alumnos “comunes” no entenderán las matemáticas, solo podrán memorizarlas y las aplicarán mecánicamente.
- Hacer matemáticas es una actividad solitaria, no es posible realizarse en grupos.
- Las matemáticas que se aprenden en la escuela no tiene mucho que ver con el mundo real.

Todo esto, para ver que la resolución de problemas en una gran herramienta didáctica, siempre y cuando se realice de manera adecuada y considerando todos los recursos posibles, aquel profesor que de manera implícita manifieste que los problemas se resuelven en 5 o 10 minutos estará afectando al estudiante, pues tendrá consecuencias en su desarrollo cognitivo, y pensamiento crítico, no es necesario tener tatuado en el pensamiento una técnica de solución, es necesario ser flexible y tomar en cuenta diferentes métodos. Gagne (2003) menciono que la resolución de problemas es la forma más elevada de aprendizaje, ya que es un proceso en que quien aprende descubre una combinación de reglas previamente aprendida para obtener una solución a un problema.

El resolver problemas desde la educación básica educa a la mente para enfrentarse a los verdaderos retos a los que se enfrenta la humanidad, de aquí la importancia de la resolución de problemas matemáticos con la sociedad.

Resolver problemas en Matemáticas no es solo un proceso cuantitativo, sino también cualitativo, independientemente si es un problema matemático, social, económico, político, etc., si se tiene una educación formativa en resolución de problemas se tendrá una mayor capacidad en tomar las mejores decisiones para dar solución a diversos problemas y resolverlo de una manera optima.

1.3 TEMAS TRATADOS EN LAS PRÁCTICAS

La Reforma Integral de la Educación Media Superior es un proceso consensuado que consiste la Creación del Sistema Nacional del Bachillerato con base en cuatro pilares, no es un intento de homologación de planes de estudios, ni de construcción de troncos de asignaturas comunes, los distintos subsistemas de bachillerato podrán conservar sus programas y planes de estudio, donde se reorientaran y serán enriquecidos por las competencia comunes del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB).

PRIMER PILAR: La construcción de un Marco Curricular Común (MCC).

El MCC permite articular los programas de distintas opciones de Educación Media Superior (EMS) en el país. Alcanza una lista de competencias terminales expresadas como genéricas, disciplinares básicas, disciplinares extendidas y por último las profesionales. Todas las modalidades y subsistemas de la EMS compartirán el mismo MCC. Las competencias genéricas y disciplinares básicas serán comunes en toda oferta académica del SNB, las competencias disciplinares extendidas y profesionales se definen según los objetivos de cada subsistema, bajo los rubros que establezca el SNB.

Las competencias genéricas tienen tres características importantes:

- C*lave*: se aplican en contextos personales, sociales y profesionales. Sobresalientes a lo largo de la vida.
- T*ransversales*: relevantes a todas las disciplinas académicas, actividades extracurriculares.
- T*ransferibles*: refuerza la capacidad de adquirir más competencias. Según el contexto del SNB las genéricas constituyen el perfil del egresado.

Las competencias disciplinares básicas son los conocimientos, habilidades y actitudes asociados las disciplinas que todo alumno debe tener. Las competencias genéricas y disciplinares básicas están íntimamente ligadas y además definen el CCM.

SEGUNDO PILAR: Definición y reconocimiento de las operaciones de oferta de la EMS.

La EMS se oferta en diferentes modalidades: escolarizada, no escolarizada y mixta. Las últimas dos no han tenido un desarrollo notable, dándose a conocer como abiertas, a distancia, etc. Por su rápido aumentó, es necesario impulsar su desarrollo ordenado, es así como la RIEMS analiza la definición de las distintas modalidades, esto ayuda a las autoridades educativas a dar un reconocimiento formal a las distintas opciones y que cumplan con estándares mínimos. Entre los estándares esta la pertenencia a SNB, todas las modalidades se deben asegurar que sus egresados adquieran las competencias que marca el MCC. Así todas las modalidades de la EMS tienen una finalidad compartida.

TERCER PILAR: Profesionalización de los servicios educativos.

Los siguientes puntos son elementos indispensables de la RIEMS, define estándares y procesos que garantizan el apego al MCC bajo las condiciones de oferta del SNB.

Formación y actualización de la planta docente: es un elemento de mucha importancia, los docentes deben de trabajar en un modelo de competencias y adoptar estrategias para un buen aprendizaje, por esto, se definirá el Perfil del Docente constituido por un conjunto de competencias.

Generación de espacios de orientación educativa y atención a las necesidades de los alumnos: por ejemplo, los programas de tutorías, tomando en cuenta las características propias de la población del bachillerato.

Definición de estándares mínimos compartidos aplicables a las instalaciones y el equipamiento: los criterios se establecen según la modalidad.

Profesionalización de la gestión escolar: de esta manera los distintos subsistemas alcancen los estándares adecuados y conducir de manera satisfactoria los procesos de la RIEMS.

Flexibilización para el tránsito entre subsistemas y escuelas: será posible a partir de la adopción de procesos administrativos compartidos. El MCC y el perfil del egresado dan elementos de identidad que hacen viable la capacidad de desenvolverse entre subsistemas e instituciones de manera más simple.

Evaluación para la mejora continua: es necesaria para verificar el desarrollo de las competencias del MCC, por lo tanto se instrumentara un Sistema de Evaluación Integral para la mejora de la EMS.

CUARTO PILAR: Certificación Nacional Complementaria

La certificación nacional que se otorgue en el marco de SNB, complementaria a la que da cada institución, contribuirá a que la EMS alcance una conexión más alta. La certificación reflejara una identidad compartida de bachillerato y se garantizara que se han llevado los 3 procesos de la RIEMS de manera exitosa que en la institución que la otorgue, lo que es que los estudiantes habrán desarrollado los desempeños que marca el MCC en una institución reconocida y certificada que reúne los estándares mínimos.

La RIEMS se llevara a cabo en distintos niveles de concreción, con respecto a la variedad de la EMS, con la finalidad de tener planes y programas de estudio adecuados.

Nivel interinstitucional: con un proceso de actividad interinstitucional, se definirán los componentes del MCC y se darán los mecanismos de la instrumentación de la RIEMS.

Nivel institucional: los subsistemas trabajara para adecuar sus planes y otros elementos de su oferta a los lineamientos generales de SNB, además definirán las competencias adicionales y complementarias a las del MCC, así como estrategias para sus objetivos específicos y necesidades de su población.

Nivel escuela: Los planteles adoptaran estrategias relacionadas con sus necesidades para que los alumnos desarrollen las competencias que abarca el MCC.

Nivel aula: El docente aplicara estrategias con el despliegue de MCC con acciones que se lleven a cabo en el aula con el fin de asegurar en la generación el Perfil del Egresado de la EMS

La RIEMS involucra todos los subsistemas, para ofrecer a los estudiantes, docentes y a la comunidad educativa con los fundamentos teórico –prácticos un nivel medio superior distinguido en el día a día de todo involucrado.

Para que un plantel pertenezca al Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), las instituciones toman el compromiso de adoptar el Marco Curricular Común (MCC), por lo tanto tomar las estrategias necesarias para fortalecer el desempeño académico de los alumnos y garantizar el desarrollo del perfil del egresado.

Las Matemáticas son una herramienta de mucha utilidad para las demás áreas de conocimiento, contribuyen al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que se dará atreves del aprendizaje significativo más que en ejercitarse o repetir, el enfoque que se propone se basa en problemas contextualizados tanto social, científicos, etc.., bajo temas integradores que permitan distinguir un uso diferente de los contenidos.

En seguida presentamos los propósitos formativos de cada materia según el programa de estudio del bachillerato tecnológico (acuerdo secretarial 653), así como la estructura conceptual, estas permiten al profesor hacer distintas interrelaciones.

ÁLGEBRA

Objetivo: Que el estudiante desarrolle el razonamiento matemático y haga uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados por modelos donde se apliquen conocimientos y conceptos algebraicos.

Estructura conceptual:

Lenguaje algebraico.

  - *Expresión algebraica.*
  - *Operaciones fundamentales.*

Ecuaciones.

- *Ecuaciones lineales.*
  - *Con una incógnita.*
  - *Con dos y tres incógnitas.*
- *Ecuaciones cuadráticas.*
  - *Métodos de solución*.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Objetivo: Que el estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos.

Estructura conceptual:

- *Figuras geométricas.*
    - *Origen y métodos*
    - *Ángulos*
    - *Triángulos*
    - *Polígonos*
    - *Circunferencia*
- *Relaciones y funciones en el triángulo*
    - *Relaciones trigonométricas*

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Objetivo: Que el estudiante interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.

Estructura conceptual:

- *Sistemas coordenados*
    - *Rectangulares*
    - *Polares*
- *Lugares geométricos*
    - *La recta*
    - *Cónicas*

CÁLCULO DIFERENCIAL

Objetivo: Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que den solución a problemas surgidos de la actividad humana, tales como: la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.

Estructura conceptual:

- *Pre-cálculo*
    - *Números reales*
    - *Intervalo*
    - *Desigualdades*
- *Funciones*
    - *Dominio y rango*
    - *Clasificación*
    - *Comportamiento*
    - *Operaciones*
- *Límites*
    - *Límite de una función*
    - *Propiedades*
    - *Continuidad de una función*
- *Derivada*
    - *Razón de cambio promedio de interpretación geométrica*
    - *Derivada de funciones*
    - *Derivadas sucesivas*
    - *Comportamiento*

CÁLCULO INTEGRAL

Objetivo: Que el estudiante analice e intérprete las relaciones entre las variables de problemas de la vida cotidiana relacionados con áreas, volúmenes, etc., que impliquen variaciones en procesos infinitos y los resuelva aplicando el teorema fundamental del cálculo.

Estructura conceptual:

- *Integral indefinida*
    - *Diferencial*
    - *Métodos de integración*
- *Integral indefinida*
    - *Suma de Riemann*

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Objetivo: Que el estudiante analice fenómenos sociales o naturales, utilizando las herramientas básicas de la estadística descriptiva y de la teoría de la probabilidad para muestrear, procesar y comunicar información social y científica, para la toma de decisiones.

Estructura conceptual:

- *Estadística*
    - *Manejo de la información*
    - *Medidas de tendencia central*
    - *Medidas de dispersión*
    - *Medidas de forma*
    - *Medidas de correlación*
- *Probabilidad*
    - *Teoría de conjuntos*
    - *Técnicas de conteo*
    - *Probabilidad para eventos*

MATEMÁTICAS APLICADAS

Objetivo: Que el estudiante plantee y resuelva situaciones problemáticas que integren competencias y contenidos de todas las asignaturas del área, interpretando fenómenos naturales y sociales que suceden en su contexto.

Estructura conceptual:

- *Razonamiento lógico–matemático*
    - *Cambio y relaciones*
    - *Percepción espacial*
- *Modelación matemática*
    - *Algebraica*
    - *Geométrica*
    - *Cálculo*
- *Relaciones trascendentes*
    - *Logarítmica*
    - *Exponencial*

De manera general se han mencionado, en la estructura conceptual de cada materia, los temas que el profesor debe impartir en la clase, la finalidad es que el estudiante pueda cumplir con el objetivo de cada materia según el programa de estudio del bachillerato tecnológico (acuerdo secretarial 653), para que el objetivo se cumpla, la RIEMS sostiene que los maestros son los actores fundamentales, para que se tenga éxito con la reforma se contara con ofertas de actualización y formación que les permita dominar el modelo y desarrollar el **Perfil del Docente** que se requiere, esto les proporcionara habilidades para desarrollar estrategias para que el alumno se forme personal, académicamente y profesionalmente, con la adquisición de competencias básicas para enfrenar cada reto de la actualidad, serán maestros en "enseñar a aprender".

El profesor debe saber manejar el conocimiento y dirigirlo de una mejor manera al alumno, siendo éste último quien tiene el papel fundamental en el proceso educativo, por lo que es de suma importancia que construya sus propios conocimientos, lo cual no quiere decir que el profesor no tenga ninguna importancia en dicho proceso, sino todo lo contrario: el valor del profesor permanece en la capacidad de estimular al alumno para que se apropie del conocimiento.

Con la importancia que tiene el docente en la educación y la estructura conceptual de cada materia proponemos 7 actividades para la formación de profesores de bachillerato:

1. *El Tesoro del Pirata.*
2. *El Problema de los Cumpleaños.*
3. *Los Códigos de Barras.*
4. *Determinación del área de un círculo.*
5. *Generalización del Teorema de Pitágoras.*
6. *Graficas en Estadística.*
7. *El Problema de la Lata de Coca-Cola.*

El objetivo de las actividades antes mencionadas es el de integrar mejoras o cambios a la enseñanza-aprendizaje, con prácticas que se realicen con software tipo CAS (Software de Computo Algebraico) como Scientific WorkPlace o Excel, así como software tipo DGS (Software de Geometría Dinámica) como GeoGebra o Cabri Geometry, donde profesores de nivel medio superior observen conceptos, definiciones y aplicaciones matemáticas de este nivel educativo, mismas que creemos servirán para ampliar su formación y con ello diseñar para sus aulas herramientas que les permitan construir conocimientos a sus estudiantes, así como para motivar y resaltar el vinculo *matemático-social y desarrollar habilidades informáticas como tendencia fundamental en las competencias educativas actuales.*

Esta propuesta además de buscar este enlace matemático-social busca desarrollar una cultura informática en la que el docente pueda desarrollar su trabajo en la inminente introducción de la tecnología a la educación como una de las vertientes más fuertes de la tendencia educativa actual donde tener soltura informática representa una competencia importante a desarrollar en nuestros estudiantes y profesores según Manuel Castells (Castells, 2002).

Enseguida damos la estructura de los temas que son tratados en cada una de las prácticas propuestas, así como los softwares a utilizar en cada una, observe que en las prácticas se abarcan más temas de los que propone la RIEMS para cada materia, esto con la finalidad de enriquecer las áreas de oportunidad del profesor y desarrollar un buen **Perfil Docente**.

1. *El Tesoro del Pirata.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
Scientific WorkPlace	*Álgebra* • *Definición de matrices.* • *Álgebra de matrices.* • *Operaciones de matrices (Producto, producto de un escalar por una matriz, suma).* • *Inversa de una matriz.*

2. *El Problema de los Cumpleaños.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
Scientific WorkPlace.	*Probabilidad* • Técnicas de conteo. • Axiomas de probabilidad. • Cálculo de probabilidades. • Independencia. • Regla de la suma y el producto. • Eventos mutuamente excluyentes.

3. *Los Códigos de Barras.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
Scientific WorkPlace. Calculadora. Excel.	*Álgebra* • *Álgebra de matrices.* • *Operaciones de matrices (Producto, producto de un escalar por una matriz, suma).* • *Sistema binario.*

4. *Determinación del área de un círculo.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
GeoGebra. Scientific WorkPlace.	Cálculo Integral • Integral indefinida. • Métodos de integración. • *Determinación del área de una figura curvilínea.* *Geometría.* • *Polígonos.* • *Bisectriz.* • *Circunferencia.*

5. *Generalización del Teorema de Pitágoras.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
GeoGebra.	*Geometría.* • *Teorema de Pitágoras.* • Figuras geométricas. • Ángulos. • Triángulos. • Polígonos.

6. *Graficas en Estadística.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*
Excel.	Estadística • Manejo de la información. • Medidas de tendencia central. • Medidas de dispersión. • Medidas de forma. • Medidas de correlación.

7. *El Problema de la Lata de Coca-Cola.*

Software:	*Área de las Matemáticas relacionada:*

Scientific WorkPlace. Calculadora.	*Cálculo Diferencial.* • *Cuerpos geométricos.* • *Funciones.* • *Derivadas.* • *Máximos y mínimos.*

Capítulo 2.

Software CAS y DGS

INTRODUCCIÓN

Hoy en día la sociedad está sujeta a diferentes cambios, principalmente al proceso de globalización, este proceso da pie al acelerado desarrollo tecnológico, teniendo como consecuencia vivir en un mundo lleno de tecnología e innovación, es fácil ver que un niño a temprana edad ya maneja diferentes aparatos como los teléfonos celulares o las computadoras portátiles, en un mundo así, la educación tiene que ser el centro de atención para la sociedad y la familia, pero de manera muy particular para el profesor.

Los profesores deben estar en constante evolución para que acompañen a los estudiantes en este proceso de desarrollo tecnológico. El proceso de enseñanza y aprendizaje también es afectado por la tecnología, en la Didáctica de las Matemáticas se ha destacado el uso de la tecnología con distintos softwares, esto para aprovechar todas las posibilidades que nos ofrecen los medios de que disponemos actualmente, si el profesor no evoluciona al igual que la tecnología, se quedará estancado, entonces es importante que el profesor tenga acceso a toda la innovación y que la domine o al menos la entienda.

En este capítulo se da una pequeña introducción a tres softwares que son muy populares entre los alumnos y profesores del área por diversas razones, como su disponibilidad, su manejo, su potencia y la facilidad para interactuar con ellos. Hemos seleccionado software tipo CAS (Software de Computo Algebraico) como ScientificWorkPlace, y tipo DGS (Software de Geometría Dinámica) como GeoGebra para conocer y comparar ambos, con ellos hemos realizado una propuesta de siete prácticas que se tratarán en el capítulo 3 donde profesores de nivel medio superior observen conceptos, definiciones y aplicaciones matemáticas de este nivel educativo, mismas que creemos servirán para que, en su caso conozcan estos softwares y su aplicación a la didáctica, y de esta manera conciba nuevas herramientas que les permitan construir materiales para motivar el interés a sus estudiantes por las Matemáticas, además donde puedan resaltar el vínculo matemático-social con problemas extraídos de situaciones reales que llevan a logar un entendimiento profundo de conceptos del área de una manera amena y curiosa, de tal manera que ayudaran al docente en dar un giro en su método tradicional de enseñanza.

Para cada uno de los softwares se da una pequeña reseña sobre la historia y evolución, se describe como es la interfaz de la aplicación, detallando algunas de sus funciones más básicas e importantes, se darán algunos procedimientos para familiarizarse con el software, haciendo notar que en el capítulo 3 se mostrará cómo usar la función que se necesite para las prácticas, finalmente hemos incluido el tipo de licencia con el que cuenta actualmente cada paquete.

2.1 SCIENTIFIC WORKPLACE

En 1981 se fundó la empresa Triad Commputing, Inc. en Nuevo México, tres años después, lanzan el procesador de palabras T3 como proyecto de DOS. Un año después, la compañía cambió su nombre a TCI Software Research, Inc. En 1988, comenzaron a desarrollar procesadores de palabras científicos que integran las cualidades de LaTeX (que es un sistema de composición de textos, orientado especialmente a la creación de libros, documentos científicos y técnicos que contengan fórmulas matemáticas), con la facilidad para agregar notación matemática, así lanzaron Scientific Word en 1992.

En 1993 la compañía es vendida a Brooks/Cole Publishing que es una división de International Thomson Publishing que fue hasta el 2007 uno de los principales proveedores de libros de texto de educación superior del mundo, de soluciones de información académica y de materiales de referencia. En 1994, lanzaron al mercado Scientific WorkPlace, que combinaba las capacidades de Scientific Word con capacidades computacionales integradas y en 1996, lanzan Scientific Notebook, que es un software es ideal para reportes, tareas y exámenes que contengan formulas matemáticas.

En el año de 1998, los cofundadores de la empresa Triad Commputing, Inc. junto con Barry MacKichan (empresario, desarrollador de software y Dr. en Matemáticas por Universidad de Stanford) y su esposa Linda MacKichan**,** adquieren las acciones de la compañía, cambiando el nombre a MacKichan Software, Inc.

A lo largo de 24 años han trabajado para mejorar sus productos, lanzando nuevas versiones periódicamente. Las últimas versiones incluyen animación de gráficos en 2D y 3D para Scientific WorkPlace y Scientific Notebook, mejoras en su habilidad cooperativa con un nuevo filtro de importación de LaTeX y un soporte de pdfTeX, lo que permite crear documentos PDF sin salir software.

Los productos que actualmente ofrece la compañía MacKichan Software, Inc. son:

- Scientific Word
  Crea documentos matemáticos, científicos y técnicos desde el teclado usando notación matemática natural. Se puede escoger si se publica un documento en la Web usando HTML o PDF o imprimirlo con o sin composición tipográfica LaTeX.

- Scientific Notebook

  Es ideal para reportes, tareas y exámenes. Puedes crear atractivos documentos que contengan texto, matemáticas y gráficos, también se tiene la posibilidad de exportar documentos en formato RTF, los cuales permiten compartir trabajos con otras personas que no tengan instalado Scientific Notebook**.**

- Scientific WorkPlace

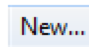
  Se pueden crear, editar y combinar tipográficamente matemáticas y texto científico en forma muy sencilla. Además de realizar cálculos, operaciones matemáticas y muy buenas gráficas.

De estos tres softwares, se propone trabajar con Scientific WorkPlace, por su popularidad en el área de las Matemáticas, ya que ofrece funciones que facilitan el trabajo en la elaboración de textos científicos y cálculos matemáticos, así como por la facilidad de interacción con el usuario., además Scientific WorkPlace ayuda a redactar documentos técnicos muy complejos puesto que Latex tiene una alta calidad y precisión, es por eso que escritores y editores de material científico lo usan considerablemente, con Scientific WorkPlace no es necesario aprender lenguaje LaTex para diseñar documentos tipográficos porque guarda los documentos como archivos LaTeX. Con las nuevas versiones hay nuevas opciones para compartir documentos, pues como ya se mencionó, ahora se incluye soporte para pdfLeX, que permite crear documentos PDF, así las personas que no cuenten con Scientific WorkPlace, pueden abrir los archivos en PDF. Además de todas estas ventajas, se pueden resolver ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, también se puede integrar, derivar, evaluar, simplificar expresiones matemáticas y no es necesario ser un experto en notación matemática para realizar los procedimientos mencionados.

Dado que su interface es muy amigable, se puede aprender de manera muy rápida a crear tablas, insertar matrices, numerar ecuaciones, etcétera. Tiene herramientas que facilitan la escritura y edición de documentos, es una gran opción para aquellos docentes que pertenecen a campos como: Matemáticas, Física, Economía, entre otros más, además este software da la opción de elegir como publicar documentos, se puede imprimir directamente desde el menú Archivo, compilar utilizando LaTex, o realizar publicaciones en la web, sin mencionar que es muy fácil compartir documentos, se pueden guardar documentos como LaTex portátil o exportarlos como PDF, RTF o HTML.

A continuación mencionaremos algunos procedimientos básicos para el manejo de este software:

Pasos para crear un documento nuevo:

1. En el icono  **(**archivo)**,** seleccione  (nuevo).
2. En la lista Shell Directories, seleccione Standart LaTex. (Ver figura 1).
3. En la lista Standart LaTex, seleccione Blank-Standart LaTex Article.
4. Dar clic en OK.

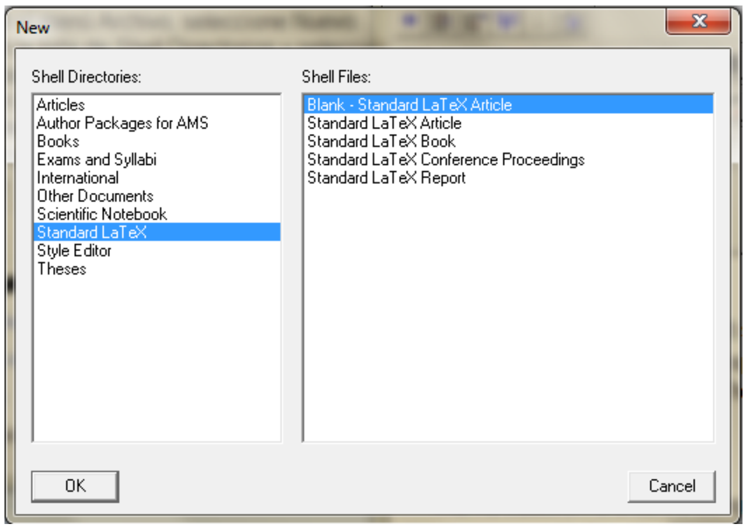


Figura 1.

La ventana principal de Scientific WorkPlace es como la siguiente, figura 2:

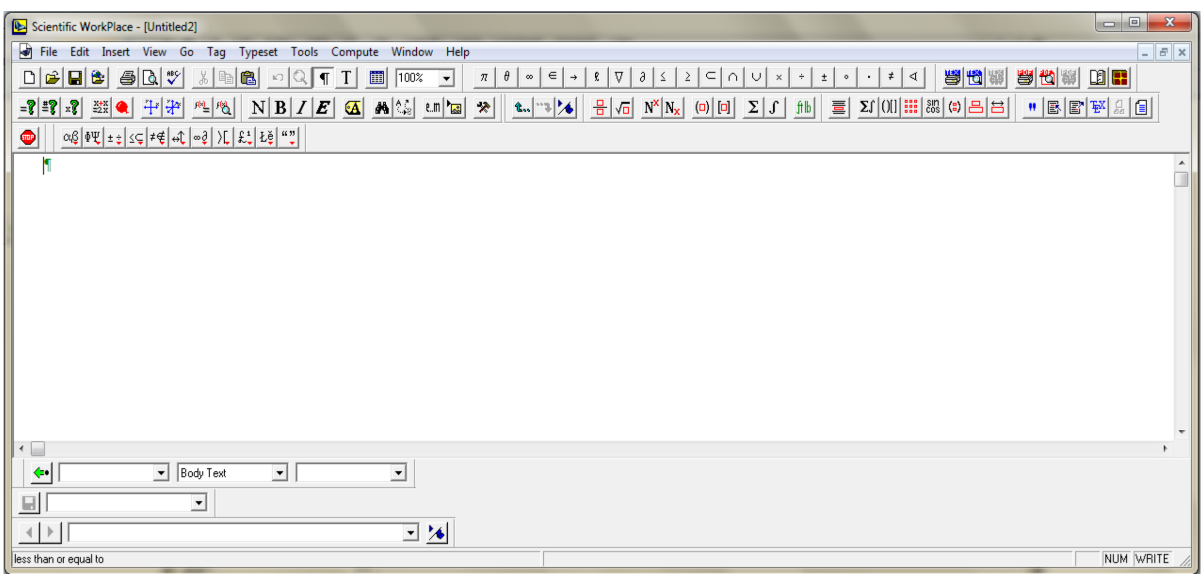


Figura 2.

A continuación describiremos las algunas de las funciones principales de cada opción con las que cuenta la **barra de menús**.

Figura 3.

- **File**: permite abrir y guardar archivos.
- **Edit**: permite cortar, pegar, eliminar, etc.
- **Insert**: agrega elementos matemáticos como fracciones, añade espacios o saltos de página, incluso se pueden insertar notas o referencias.
- **View**: Determina los códigos de internos visibles en la pantalla.
- **Go:** permite trasladarse a distintas secciones del documento, que previamente se definieron.
- **Typeset:** pemite imprimir o compilar el documento.
- **Tolls:** personalización del programa.
- **Maple:** procesador matemático.
- **Windows:** manipulación de ventanas.
- **Help:** ayuda.

Por el momento fijaremos nuestra atención en el menú **View**, ya que tiene un opción llamada **Toolbars**… (Figura 4)que permite ocultar o visualizar las barras de herramientas.

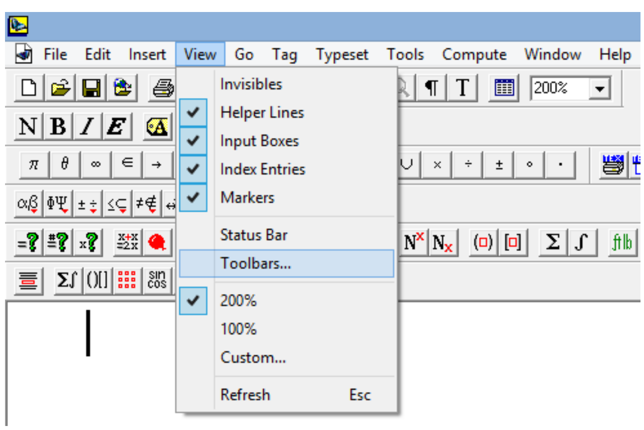


Figura 4.

Cuando se da click sobre **Toolbars**… aparece una ventana como en la figura 5, en donde se puede seleccionar la barra de herramientas que se necesite usar, como por ejemplo, **Math Templates**, que nos da la posibilidad de escribir exponentes, paréntesis, corchetes, raíces, fracciones, etc.

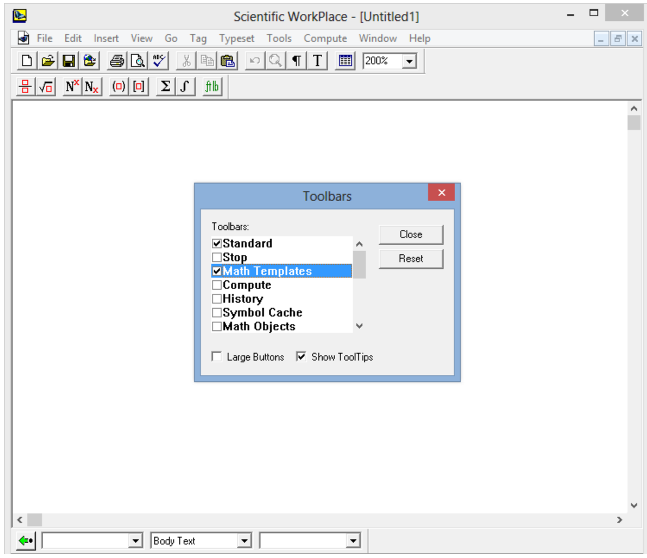


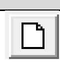
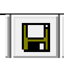
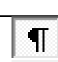
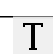
Figura 5.

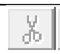
Siempre que no sea visible alguna barra de herramientas, se puede recurrir a esta opción del menú, recordemos **View** y después **Toolbars**…

A continuación definiremos (en español) y en casos donde consideremos necesario, debido a la complejidad de la función, incluiremos una descripción de las funciones de los íconos de las barras de herramientas, que se pueden visualizar con **Toolbars**…, ya se esta es la parte fundamental para el uso del Scientific WorkPlace, es en otras palabras, la parte amigable del software, observa que es muy parecido a Word.

<u>Barra "Standard Toolbar"</u>

Figura 6. Barra "Standard Toolbar".

Icono	***Nombre***	***Icono***	***Nombre***
	Documento nuevo.		Copiar.
	Abrir.		Pegar.
	Guardar.		Deshacer.
	Abrir URL.		Acento sobre/ bajo carácter.
	Imprimir.		Muestra marcas ocultas
	Ortografía.		Modo texto/ matemático.

			En NEGRO escribe texto “español”, y en ROJO escribe texto matemático, para realizar algún cálculo matemático el texto tiene que estar escrito en ROJO.
	Recortar.		Tabla.
			Zoom.

<u>Barra “ Typeset bar”</u>

Figura 7. Barra “Typeset bar”.

Con esta barra se puede imprimir, ver y compilar el archivo con extensión .tex.

 Imprimir.

Vista previa.

 Genera los archivos PDF, no es necesario tener Scientific WorkPlace para poder abrir el archivo.

Las siguientes barras las hemos denominado, **Barras de botones matemáticos,** ya que son las que facilitan la escritura del modo matemático, el ícono se habilita dando clic sobre él, se pueden insertar fracciones, radicales, exponentes, entre otras cosas, como podrá observarse, el texto aparece automáticamente en color rojo.

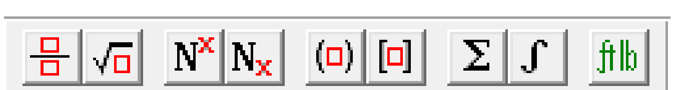


Figura 8. Math Templates.

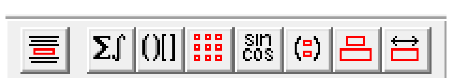


Figura 9. Math Objects.

Figura 10. Symbol Cache.

La siguiente barra es muy práctica, ya que disminuye y resuelve diversos procedimientos matemáticos.

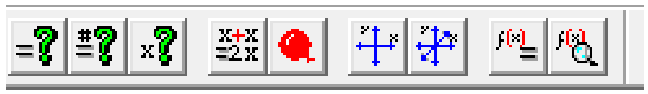
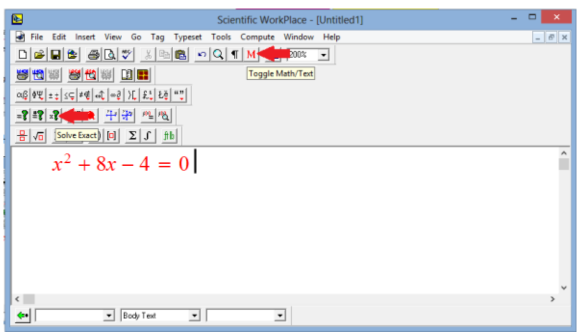
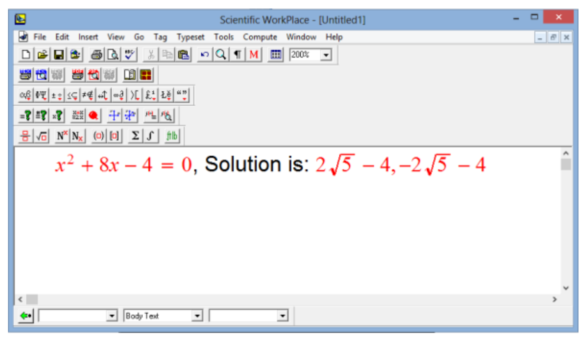


Figura 11. Compute.

 Muestra el resultado de una ecuación, operación algebraica o aritmética, etc., de acuerdo a lo que se requiera se seleccionara el icono, por ejemplo, si se quiere resolver la ecuación $x^2+8x-4=0$ el icono que la resolverá es .

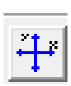


a) *Antes de dar clic al ícono Solve Exact, el cursor tiene que estar al final de la ecuación y la ecuación en texto matemático.*



b) Una vez que se da clic al ícono Solve Exact, aparece ***La solución es:***

Figura 12. Función del ícono Solve Exact.

 Grafica en el plano.

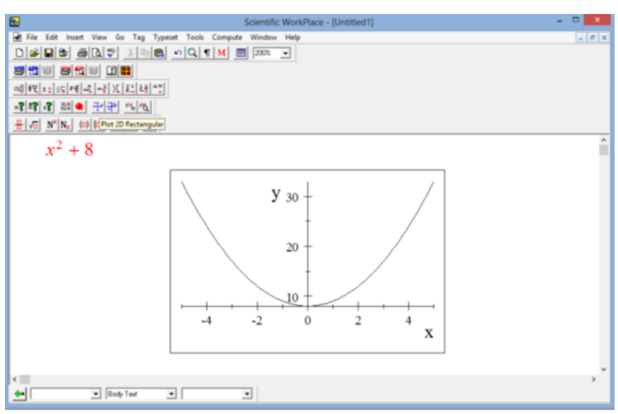
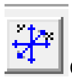


Figura 13. Función del ícono Plot 2D Rectangular.

 Grafica en el espacio.

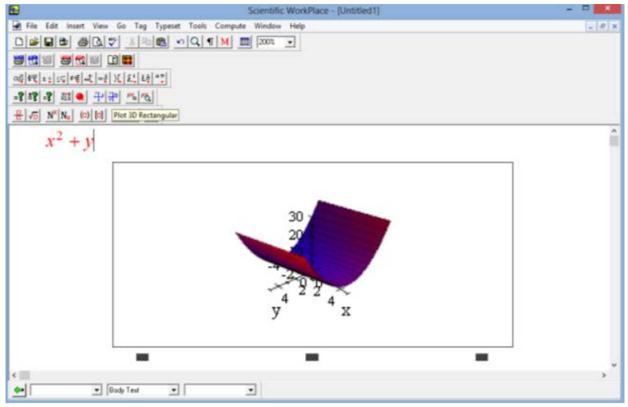


Figura 14. Función del ícono Plot 3D Rectangular.

Con la siguiente barra se pueden escribir diversos símbolos, además se encontra el alfabeto griego, así como los símbolos cruzados.

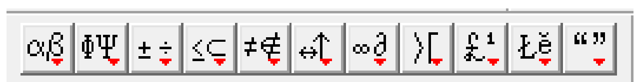


Figura 15. Symbol Panels.

<u>Barra de botones inferiores.</u>

Figura 16. Tag.

 Remueve las etiquetas.

Item Tag:

- Puede incluir lista de palabras, numerar una lista, etc.
- Añade proposiciones, definiciones, etc.

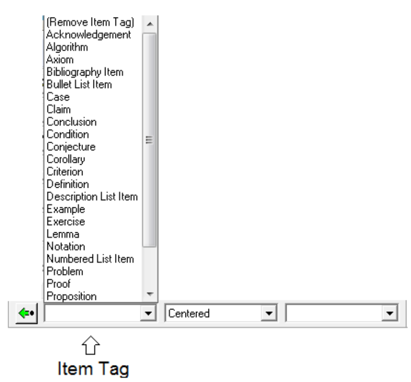


Figura 17. Item Tag.

Section/Body Tag:

- Define la cabecera de una sección, subsección.
- Formato al texto: texto normal o centrado.

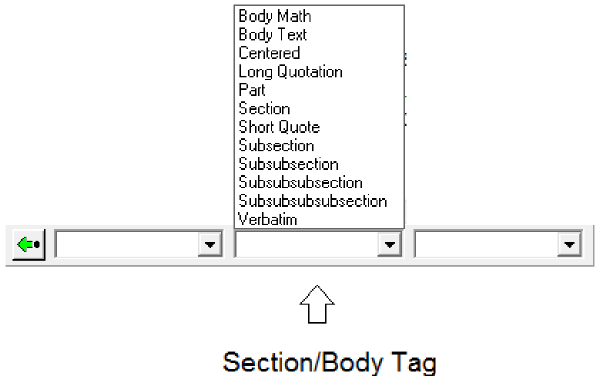


Figura 18. Section/Boby Tag.

Text Tag:

- Tipo de texto, negrita, cursiva, etc.
- Tamaño de texto; pequeño o grande, etc.

Figura 19. Text Tag.

Como podemos apreciar, Scientific WorkPlace es fácil de usar, sin embargo, podemos mencionar que en internet se encuentran tutoriales para aprender el manejo del software, además en las prácticas que se proponen en el capítulo 3 de este trabajo, se darán las indicaciones necesarias para realizar la actividad con el uso del paquete que se esté tratando.

Scientific WorkPlace no es un software libre, se tiene que comprar. Según la empresa MacKichan Software, debido a la gran variedad de sus clientes y a sus múltiples necesidades ofrecen diversas variedades en los tipos de licencias, en la página oficial de la empresa *http://www.mackichan.com/* se encuentran los costos de cada tipo de licencia como se observa en la siguiente figura, estos precios aplican solo para Estados Unidos y Canadá, pero en la página, se puede encontrar una lista de revendedores y distribuidores para otras regiones del mundo.

	Scientific WorkPlace 5.5 for Windows* (Fixed Licenses)	
	New	Upgrade**
Commercial Usage	$810.00	$285.00
Academic/Govt. Usage***	$700.00	$245.00
Student Usage***	$225.00	$222.00

Figura 20. Licencias de Scientific WorkPlace.

2.2 GEOGEBRA

GeoGebra es un software para Matemáticas, que puede ser un apoyo didáctico para la educación en todos los niveles, es decir, este software se puede utilizar desde niveles básicos hasta niveles d educación profesional. Como GeoGebra es diseñado en Java está disponible en distintas plataformas, dependiendo del Sistema Operativo que cada quien tenga en su computadora. GeoGebra tiene la capacidad de relacionar Álgebra y Geometría de una manera dinámica, pero también lo pude hacer con Aritmética, Cálculo, e incluso Probabilidad y Estadística. El proyecto GeoGebra inicia en el año 2001 por Markus Hohenwarter (Profesor de Educación Matemática en la Universidad Johannes Kepler University Linz de Austria), actualmente se continua trabajando en la nuevas versiones.

La licencia de GeoGebra es libre, es decir, se puede copiar, distribuir y transmitir libremente con fines no comerciales. Las versiones de GeoGebra han ido evolucionando considerablemente, hasta la fecha se tienen siete versiones. Su interface es muy parecida a la de Word, por lo que ha alcanzado gran popularidad en el mundo educativo.

La primera versión 1.0 es lanzada el 28 de enero de 2002, en esta versión los objetos disponibles con los que cuenta son: punto, vector, ángulo, número, recta, sección cónica, en esta versión se pueden mostrar y ocultar objetos, posee el zoom de acercamiento y alejamiento, modos de desplazamiento, relación y movimiento de la zona gráfica, menús contextuales para los objetos, las construcciones se realizan con el ratón, y los idiomas en los que aparece solo son dos, inglés y alemán.

La segunda versión es la 2.0, es lanzada el 9 de enero de 2004, en esta versión se agregan las derivadas, integrales, graficas de funciones, función de traslación, la tangente de una función en un punto, las funciones hiperbólicas, una mejor notación de las ecuaciones y un mejor zoom.

Cinco años después, el 23 de marzo de 2009 es lanzada la versión 3.0, cuenta con nuevas opciones, por ejemplo, con polígonos regulares, curvas paramétricas, listas, casillas de controles, herramientas y funciones de usuarios y determinación de la barra de herramientas, se facilita la exportación de páginas web, se agregan nuevas herramientas como área, pendiente, longitud y perímetro, se pueden exportar imágenes a pdf, scg, emf y pstricks, esta versión está disponible en

39 idiomas, en el mismo año, dos meses después aproximadamente, sale la versión 3.2 el 3 de junio de 2009, esta nueva versión ya tiene incluida la vista de hoja de cálculo , cuenta con una animación automática de deslizadores, tiene nuevas herramientas como un compás, inversión circular, un mejor ajuste lineal, incluye matrices y números complejos, esta versión es lanzada en 45 idiomas.

La versión 4.0 es lanzada el 20 de octubre de 2011, cuenta con una interfaz dirigida a alumnos de primaria, GeoGebraPrim, un nuevo espacio donde se pueden compartir trabajos de una manera muy ágil, GeoGebraTube, incluye la barra de estilos, se pueden arrastrar y desplazar objetos, además posee nuevas herramientas; análisis de datos, diagramación interactiva, calculadora de probabilidad, inspección de funciones, las herramientas de texto son ampliadas, se cuenta con la opción de sombreado con rayados, texturas o imágenes, se pueden exportar gráficos animados, entre otras cosas, y esta versión está disponible en 50 idiomas.

El último lanzamiento, GeoGebra 4.2, es la versión actual, se lanzó el 3 de diciembre de 2012, solo mencionaremos algunas de las nuevas herramientas que tiene la versión 4.2, por ejemplo, el lápiz, mano alzada funcional, análisis de datos vinculada a hojas de cálculo, esquemas y cajas de dialogo, entre otras. Hasta estas fechas se sigue trabajando en la versión 5.0, se tienen algunas novedades de GeoGebra 5.0 respecto a la versión GeoGebra 4.2, pues esta versión se extiende a una tercera dimensión, algunas de las nuevas herramientas son el plano, el prisma recto, la esfera, algunas herramientas con las que ya contaban las versiones anteriores se extienden a una tercera dimensión, tales como los puntos, vectores, rectas, segmentos, semirectas, polígonos, así mismo se agregan nuevos objetos como superficies y planos, etcétera, todo lo mencionado es solo una pequeña parte de lo que se espera para la última versión, aquí es importante mencionar que cualquier archivo creado en versiones previas de GeoGebra puede abrirse sin problemas con las versiones siguientes, solo hay algunas diferencias pequeñas entre las versiones 3.2 y 4.0.

Como hemos visto en este pequeño recorrido, GeoGebra es un software de gran potencia, además ofrece gran cantidad de manuales, técnicas y guías rápidas para un mejor manejo y aprovechamiento del mismo.

En lo siguiente, hablaremos de la interfaz de GeoGebra 4.2, pues es muy cómoda y simple, en su ventana principal aparecen dos vistas (ventanas), vista algebraica y vista gráfica, en la parte superior de la ventana principal está la barra de menús y la barra de herramientas, en la parte inferior aparece la barra de entrada.

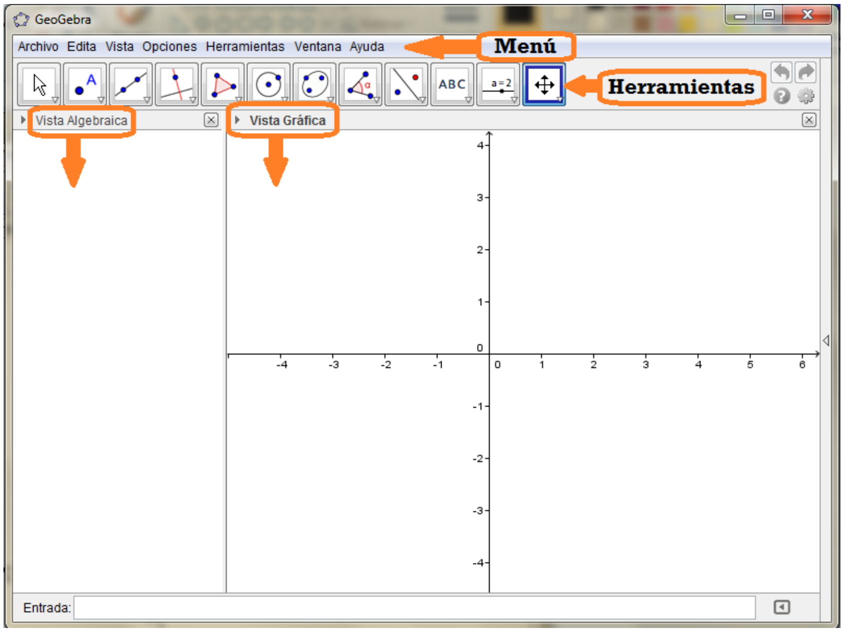


Figura 21. Interface de GeoGebra 4.2.

La barra de menús contiene las siguientes opciones:

Cada opción de la barra de menús, tiene un sub menú, donde con cada botón se puede personalizar la ventana principal.

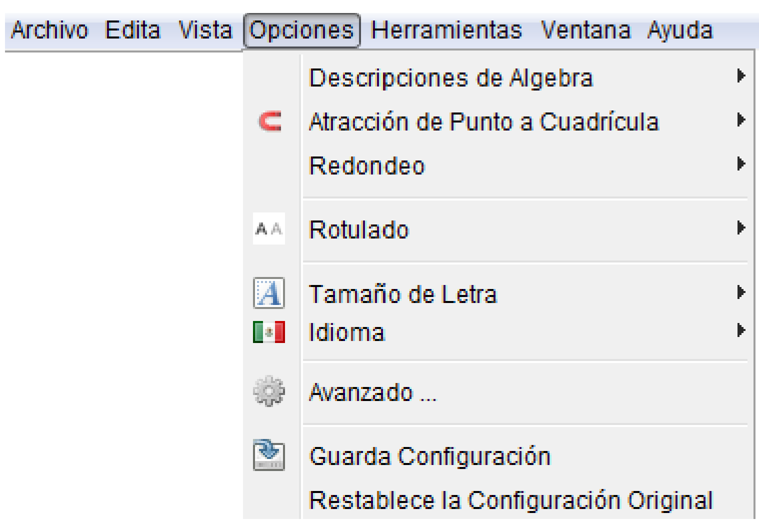


Figura 22.

En la Barra de Herramientas están los iconos que permiten realizar las diversas construcciones, cada botón se activa dando clic sobre él.

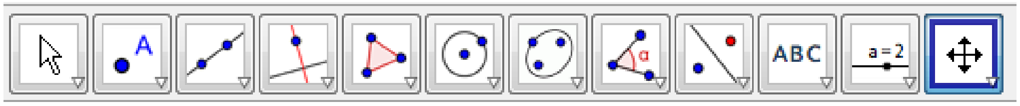
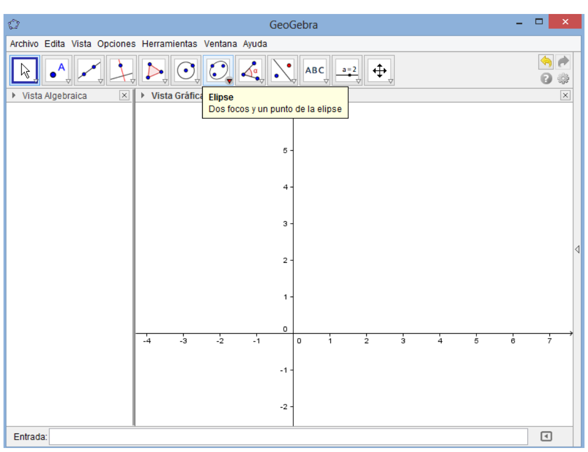


Figura 23. Barra de herramientas.

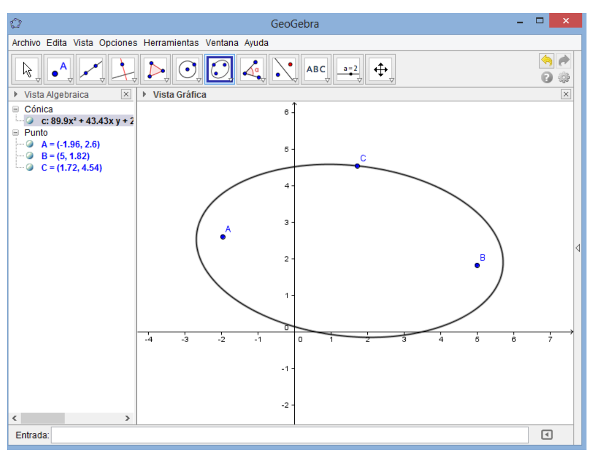
Dando clic sobre cada botón de la Barra de Herramientas, se despliegan automáticamente todas las opciones de la categoría, como por ejemplo, **Rectas** (figura 24).

Figura 24. Opciones de Rectas.

Las siguientes opciones son las herramientas son con la que cuenta la versión 4.2 de GeoGebra, respectivamente para cada opción de la Barra de Herramientas, la descripción para su uso de encuentra al desplegar el botoncito, por ejemplo, para trazar una elipse pide señalar los dos focos y un punto de la elipse:

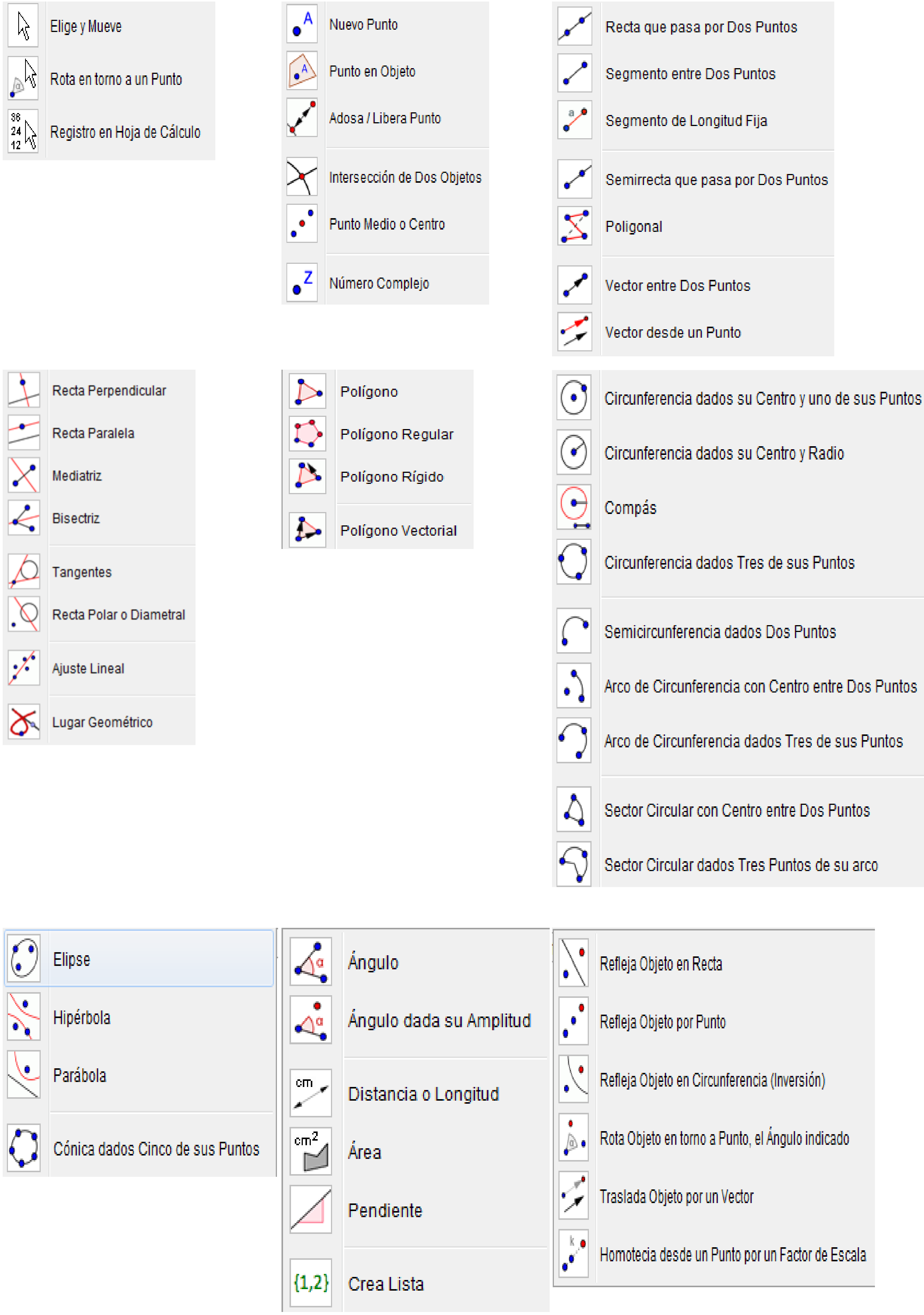


a) Requisitos para trazar una elipse.



b) Trazado de la elipse.

Figura 25.


Elige y Mueve
Rota en torno a un Punto
Registro en Hoja de Cálculo
Nuevo Punto
Punto en Objeto
Adosa / Libera Punto
Intersección de Dos Objetos
Punto Medio o Centro
Número Complejo
Recta que pasa por Dos Puntos
Segmento entre Dos Puntos
Segmento de Longitud Fija
Semirrecta que pasa por Dos Puntos
Poligonal
Vector entre Dos Puntos
Vector desde un Punto
Recta Perpendicular
Recta Paralela
Mediatriz
Bisectriz
Tangentes
Recta Polar o Diametral
Ajuste Lineal
Lugar Geométrico
Polígono
Polígono Regular
Polígono Rígido
Polígono Vectorial
Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
Circunferencia dados su Centro y Radio
Compás
Circunferencia dados Tres de sus Puntos
Semicircunferencia dados Dos Puntos
Arco de Circunferencia con Centro entre Dos Puntos
Arco de Circunferencia dados Tres de sus Puntos
Sector Circular con Centro entre Dos Puntos
Sector Circular dados Tres Puntos de su arco
Elipse
Hipérbola
Parábola
Cónica dados Cinco de sus Puntos
Ángulo
Ángulo dada su Amplitud
Distancia o Longitud
Área
Pendiente
Crea Lista
Refleja Objeto en Recta
Refleja Objeto por Punto
Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión)
Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado
Traslada Objeto por un Vector
Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala

Para realizar cualquier construcción se utiliza la barra de herramientas, en la vista grafica se representan los objetos geométricos que se van construyendo. En la vista grafica se pueden mostrar u ocultar los objetos, ejes y la cuadricula con el click derecho, además se puede interactuar con cada construcción, es decir, mover, desplazar, cambiar el tamaño, características, etcétera, además todo objeto que pertenezca a la vista gráfica, también es representado en la vista algebraica automáticamente, es decir, GeoGebra nos da su ecuación.

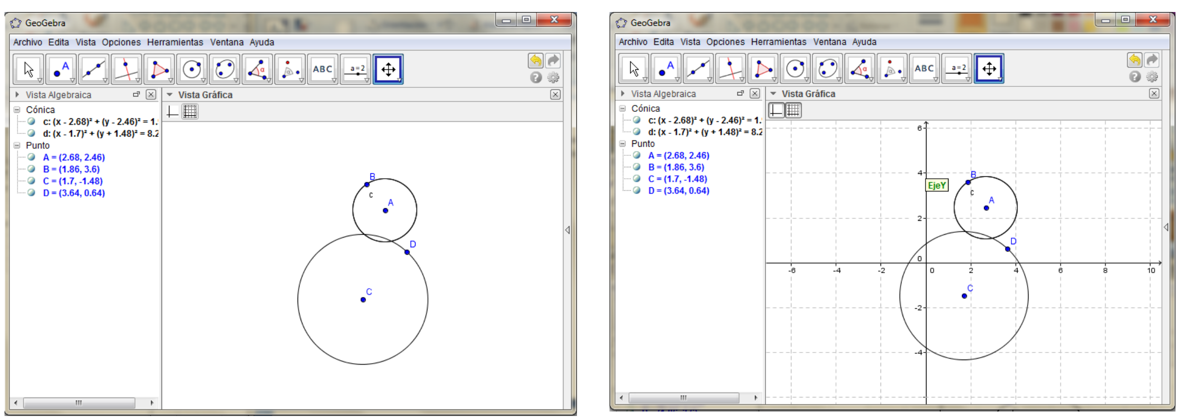


Figura 26. Vista algebraica y geométrica de GeoGebra.

Como vemos, GeoGebra trabaja con números, ángulos, puntos, vectores, matrices, segmentos, etcétera, estos objetos se pueden ingresar por medio la barra de herramientas, pero también se pueden ingresar a través de la barra de Entrada, que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, donde se deben de escribir las expresiones o ecuaciones, para declarar el objeto.

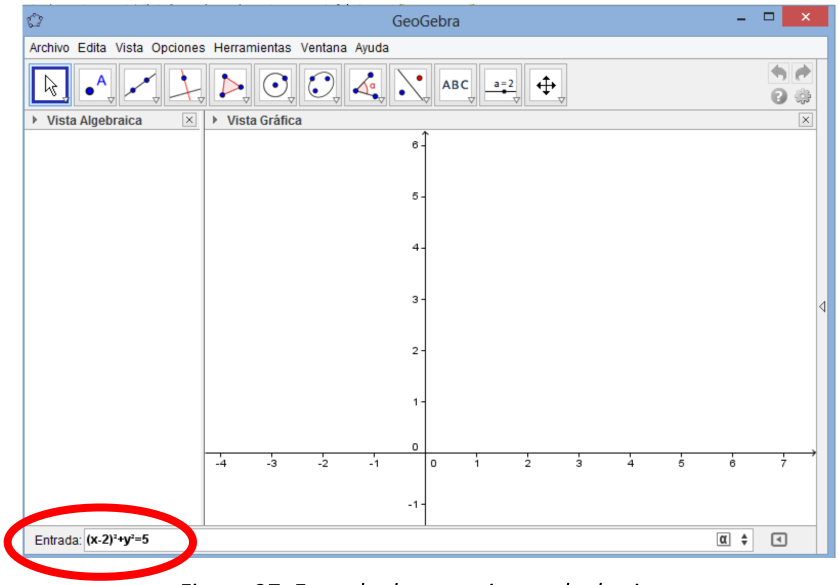


Figura 27. Entrada de expresiones algebraicas.

Una vez que en la barra de entrada se hayan ingresado expresiones algebraicas, estas quedan registradas en la vista algebraica, dentro de la vista algebraica también se pueden modificar las propiedades de los objetos.

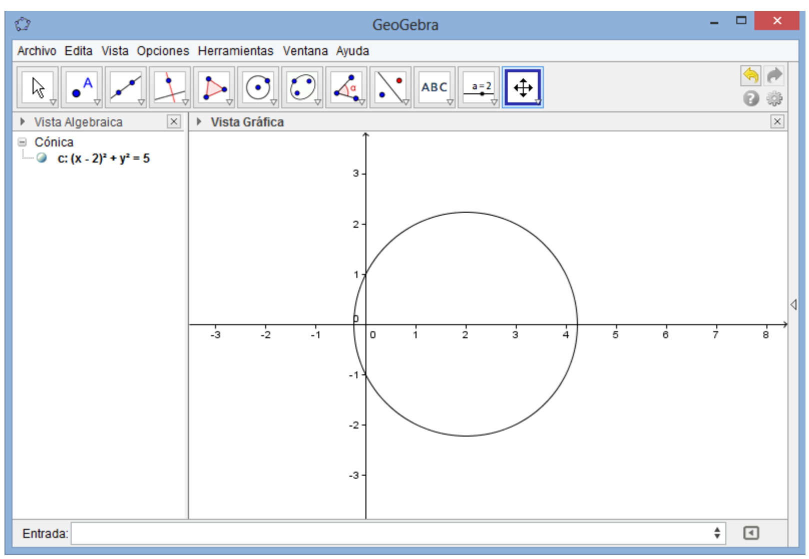


Figura 28. Vista algebraica y geométrica.

Como hemos mencionado, podemos encontrar en internet tutoriales para aprender el manejo del paquete, en especial, de este software abundan videos, manuales y círculos de ayuda. La gran ventaja de GeoGebra es que es un software libre, se puede copiar o distribuir libremente sin propósitos comerciales, se puede descargar desde la página: http://www.geogebra.org/ . En la siguiente figura se muestra la página de descarga, es muy fácil, pues solo hay que dar clic en la opción que más nos convenga, además da un link para revisar a detalle la licencia del software.

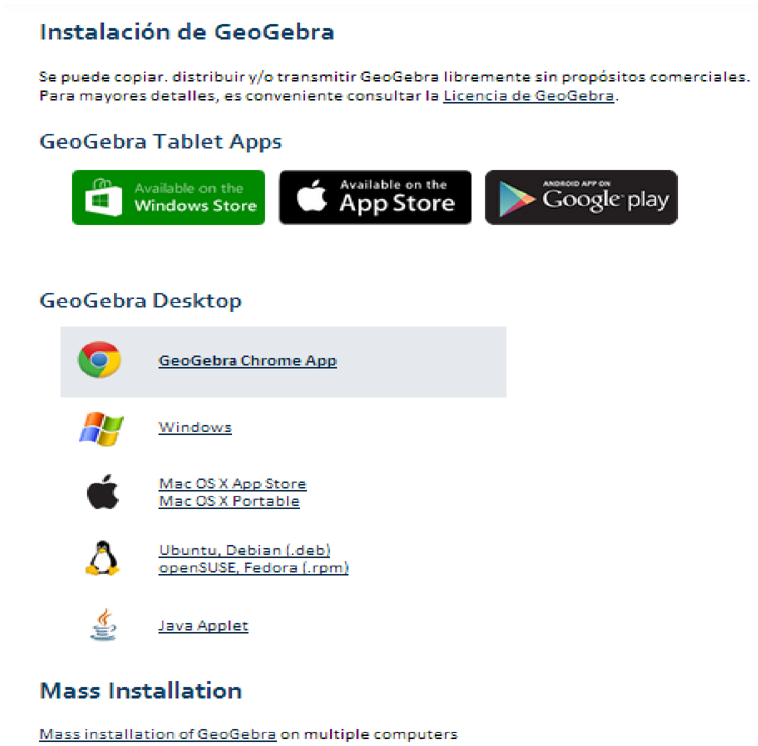


Figura 29. Descarga de GeoGebra.

2.3 MICROSOFT EXCEL

En esta sección presentaremos el software Excel de Office de la empresa Microsoft, el objetivo es apoyar en su uso, sobre todo si no se ha trabajado nunca con Excel o si se conoce muy poco. Para ir familiarizándonos con este software, daremos un pequeño vistazo al siguiente bosquejo histórico.

Recordemos que en la década de los 70' era muy común utilizar máquinas de escribir en el trabajo de oficina, si se deseaba realizar una copia de algún documento se necesitaba papel carbón y muchas horas de trabajo, en aquella época, el término de microcomputadoras no era tan conocido y pocos sabían de su existencia.

Bill Gates (28 de octubre de 1955) y Paul Allen (21 de enero de 1953), dos jóvenes estadunidenses visionarios, pensaban que la informática personal era el siguiente paso hacia el futuro, en 1975 los dos crean la sociedad Microsoft en Albuquerque, Nuevo México, empezaron vendiendo un intérprete del lenguaje *BASIC*. Allen formó parte decisiva en un trato de Microsoft para comprar un sistema operativo llamado MS-DOS (Sistema Operativo de Disco de Microsoft). De esta forma, Microsoft pudo cumplir con un contrato para suministrar el sistema operativo para los nuevos PC de IBM, este fue el principio de una la nueva compañía que pronto se reconocería mundialmente.
En 1981 se comercializan equipos IBM que ejecutan MS-DOS, escribir "C:" seguido de algunos comandos, seria parte de la rutina, aunque fue difícil de comprender para muchas personas. El 20 de noviembre de 1985, Microsoft lanza Windows 1.0, donde no se escriben comandos, con Windows 1.0 se puede desplazar entre ventanas utilizando el mouse que por supuesto ya había patentado Microsoft. Windows 1.0 fue sin duda una gran novedad para la informática, desde su aparición a la fecha han surgido diversas versiones, todas ellas cada vez más amigables y tractivas para el usuario, sobre sobre todo porque cada vez ayudan más a simplificar las tareas y el tiempo de labores, a continuación las enlistamos:

- Windows 2.0 (1987).
- Windows 3.0 (1990).
- Windows 3.1 (1992).
- Windows NT (1993).
- Windows 95 (1995).
- Windows 98 (1998).
- Windows 2000 (2000).

- Windows XP (2001).
- Windows XP Media Center Edition (2002).
- Windows Vista (2006).
- Windows 7 y Windows Touch (2009).
- Windows 8 (2008).

En lo que se refiere a programas de hojas de cálculo, se sabe que en 1982 Microsoft comercializó un programa de hojas de cálculo llamado Multiplan, publicó la primera versión de Excel para Mac en 1985, y la primera versión para Windows en noviembre de 1987. A continuación, mostramos la lista de versiones de Microsoft Excel que han sido lanzadas al mercado para Microsoft Windows:

- En el año 1987 Excel 2.0.
- En el año 1990 Excel 3.0.
- En el año 1992 Excel 4.0
- En el año 1995 Excel 7.0 (Office '95).
- En el año 1997 Excel 8.0 (Office '97).

Microsoft alentó el uso de las letras XL como abreviatura para el programa; el icono del programa en Windows todavía consiste en una estilizada combinación de las dos letras. La extensión de archivo por defecto del formato Excel puede ser **.xls**, **.xlsx**, **.xlsm** o **.xlsb**.

El programa muestra celdas organizadas en filas y columnas, y cada celda contiene datos o una fórmula, con referencias relativas, absolutas o mixtas a otras celdas.

Excel fue la primera hoja de cálculo que permite al usuario definir la apariencia, es decir, las características del archivo. También introdujo recodifiación inteligente de celdas, es decir, se actualizan automáticamente. Excel tiene una amplia capacidad gráfica, y permite a los usuarios realizar, entre otras muchas aplicaciones, tablas y formatos que incluyan cálculos matemáticos mediante fórmulas, las cuales pueden usar "operadores matemáticos" como son: **+** (suma), **-** (resta), ***** (multiplicación), **/** (división) y **^** (exponenciación), además de poder utilizar elementos denominados "funciones" (especie de fórmulas, pre-configuradas) como por ejemplo: Suma(), Promedio(), BuscarV(), etc. Así mismo Excel es útil para gestionar "Listas" o "Bases de Datos"; es decir agrupar, ordenar y filtrar la información.

Un dato curioso es que el límite máximo de filas por hoja de cálculo de es de 1,048,576 para las últimas versiones, otras características también fueron ampliadas, tales como el número máximo de hojas de cálculo que es posible crear por libro que es de 1,024 o la cantidad de memoria del PC que es posible emplear que creció de 1 GB a 2 GB soportando además la posibilidad de usar procesadores más sofisticados.

Las diversas áreas en las que Excel puede participar son:

- Contabilidad
- Definición de presupuestos
- Facturación y ventas
- Informes
- Planeación
- Seguimiento
- Uso de calendarios
- Didáctica*
- Entre otras

Si se ha trabajado con Excel, es posible que note que se tiene una interfaz muy cómoda y que el número de beneficios que obtengamos, sólo dependerá de nuestras limitaciones. A continuación, mostraremos una breve introducción para su uso.

Breve manual de Excel

La **barra de título** se encuentra en la parte superior, muestra el nombre del archivo y el software que se está utilizando.

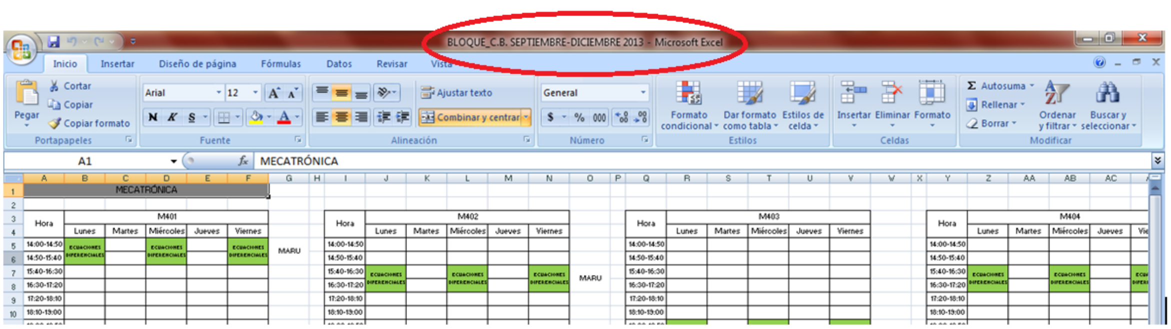


Figura 30. Barra de título.

El **botón de Office**, se encuentra en la esquina superior izquierda, con solo dar clic es posible ejecutar comandos como: Guardar, Imprimir, Abrir, Cerrar, entre otras más.

Para la versión de Windows 2007, tenemos:

Figura 31. Botón de Office.

Para la versión de Windows 8, las funciones; Guardar, Imprimir, Abrir, Cerrar, entre otras más, se tienen en la barra de herramientas “Archivo”:

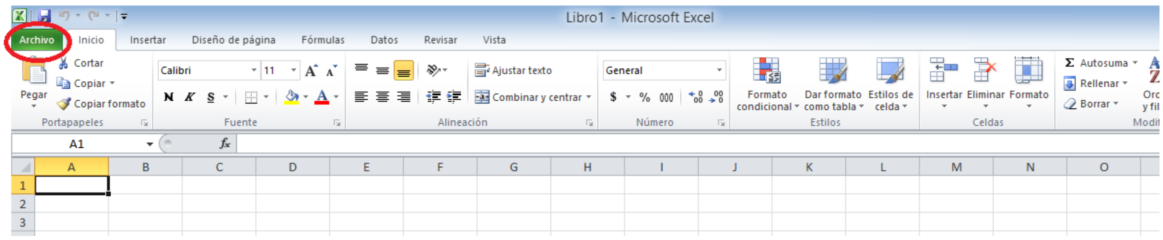


Figura 32. Menú Archivo.

La **botones de acceso rápido**, se encuentra en la esquina superior izquierda, es una barra que se puede personalizar, contiene distintos comandos, aquí se encuentran los más comunes guardar y deshacer.

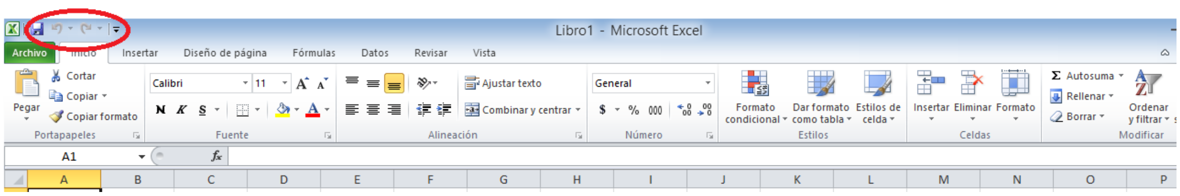


Figura 33. Botones de acceso rápido.

La **cinta de opciones** que se despliega al dar clic a los comandos de la **barra de herramientas,** fue diseñada para encontrar fácilmente lo necesario para realizar la tarea o actividad que se trate. Los comandos están organizados en grupos lógicos, que son reunidas en fichas, donde cada ficha se relaciona con cierta acción, como editar una imagen, algunas fichas se muestran cuando es necesario, por ejemplo, si se edita la imagen se activa la ficha **Herramientas de imagen**.

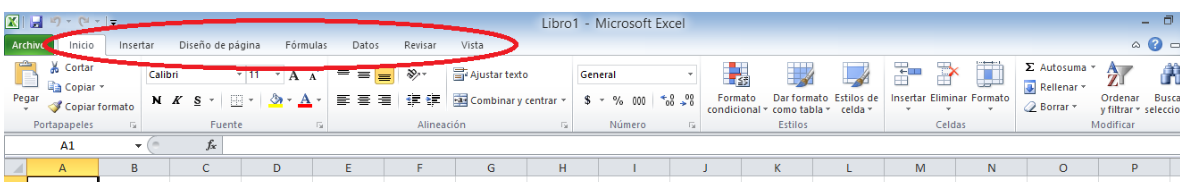


Figura 34. Barra de Herramientas.

Los **Botones de vista** permiten visualizar de distinta manera la hoja de cálculo que se está trabajando, ya sea normal, como diseño de página o vista previa de salto de página. Se encuentra en la esquina inferior derecha, lo mismo que el zoom de acceso rápido.

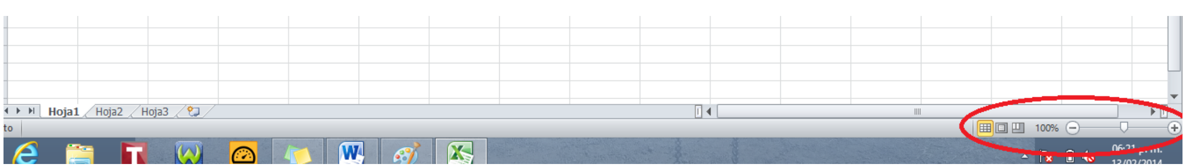


Figura 35. Botones de vista.

La **Barra de desplazamiento** cambia la posición de la hoja de cálculo que se está editando, es el acceso rápido, ya que también se puede hacer desplazándose por las celdas.

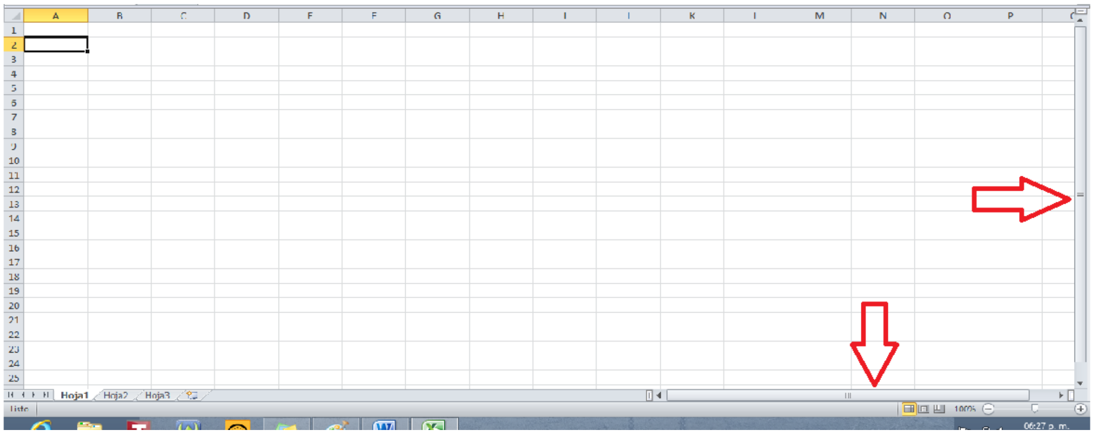


Figura 36. Barra de desplazamiento.

La **Barra de Estado** muestra la información sobre la hoja de cálculo, se encuentra en la esquina izquierda inferior.

Figura 37. Barra de Estado.

Estos son los elementos básicos que componen la ventana principal de Excel.

Para introducir funciones en Excel

Para mostrar como introducir funciones en Excel, vamos a utilizar un ejemplo que será muy útil si se trabaja en el ámbito educativo. Esta actividad consiste en elaborar un archivo para calcular calificaciones, te puede servir si consideras varios rubros o rubricas para obtener las calificaciones bimestrales o finales de los estudiantes, es decir, si consideras tareas, participaciones, asistencia, etcétera.

Para realizar nuestro archivo Excel seguiremos 13 pasos señalados en este manual, de tal manera que nos sea sencillo elaborarlo. Es importante que leas los pies de imagen con cuidado y que observes los óvalos y señales rojas de las figuras, dado que te ayudaran y darán referencias, sobre todo si no has trabajado nunca con Excel o si lo conoces muy poco.

Proponemos realizar un archivo de acuerdo a sus necesidades, es decir, de acuerdo a su lista de alumnos y los rubros que consideras, si no se tienes considerados rubros para cada materia puedes practicar con un ejemplo no real que contenga al menos 20 alumnos, para que puedas apreciar la potencia del software.

PASO 1. Comencemos abriendo un archivo Excel y guardándolo con un nombre, por ejemplo, Calificaciones.

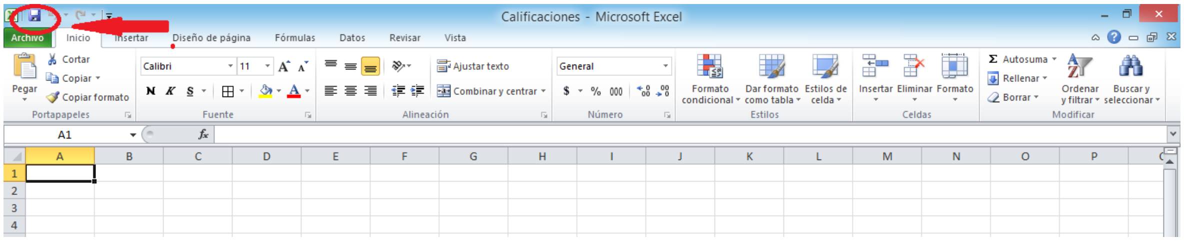


Figura 38. *Abrir un archivo. No olvides ir guardando tus cambios.*

PASO 2. Observa que las celdas están nombradas por la coordenada que indica su letra (en mayúscula) de columna y su número de fila. Por ejemplo, la celda A1 señalada en la figura 39.

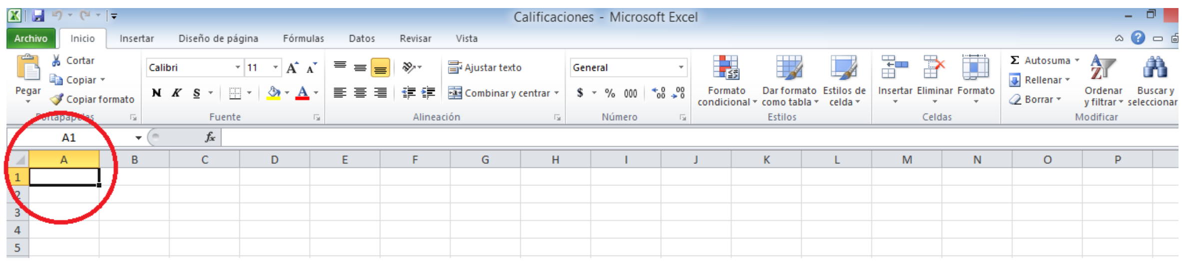


Figura 39. *Nombre de las celdas.*

PASO 3. Vamos a suponer que queremos obtener la calificación bimestral de Matemáticas. En la fila 1 (celdas horizontales) vamos a llenar con nuestros rubros, por ejemplo, examen, tareas y participaciones, además por supuesto, el nombre y el número de lista.

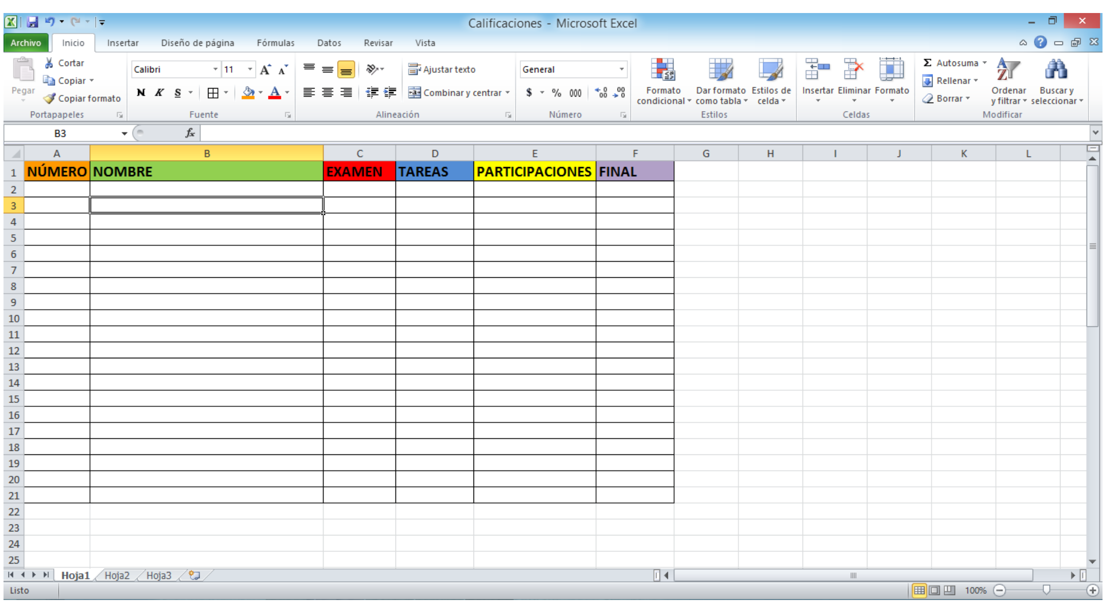


Figura 40. *Llenado de rubros o rubricas.*

Puedes darle formato, cambiando el color de la celda.

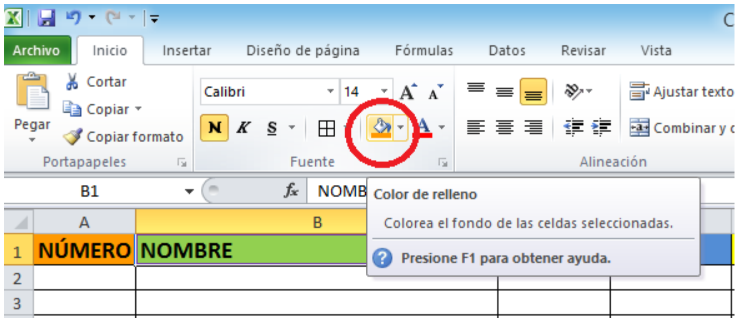


Figura 41. *Color de relleno. Colócate en la celda que quieres cambiar de color,*

luego en la barra de ***Inicio*** *está la cubetita de* ***color de relleno****, selecciona el que más te agrade.*

También puedes darle bordes a las celdas.

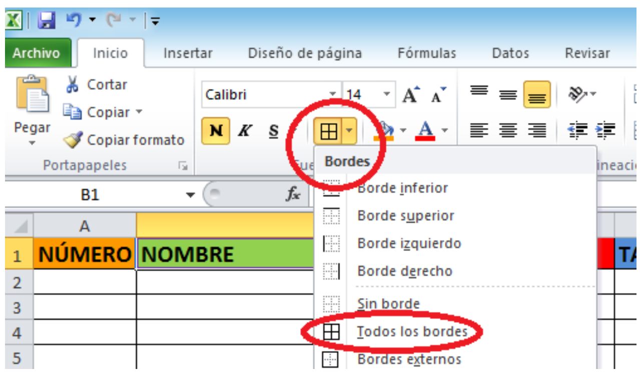


Figura 42. *Bordes. Selecciona las celdas que quieres bordear,*

luego en la barra de ***Inicio*** *está la ventanita de* ***Bordes****, para mi ejemplo he seleccionado* ***Todos los bordes.***

PASO 4. INTRODUCIR FUNCIONES. Para llenar el número de lista, podemos usar una propiedad de EXCEL. En la celda A2 escribimos el 1 y damos "enter", observa que ahora estarás en la celda A3. Estando en la celda A3, insertamos la función **=A2+1** y damos "enter", observa que ahora quedaste en la celda A4. Observa que las funciones siempre comienzan con un signo de igualdad.

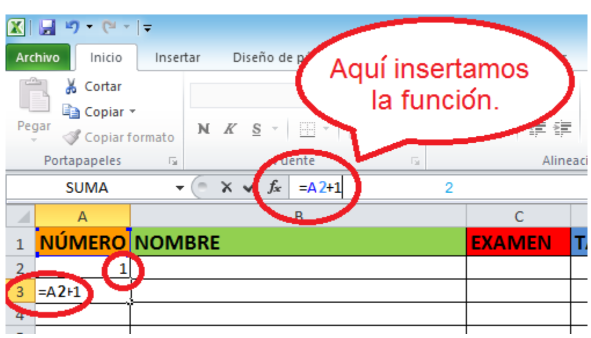


Figura 43. *Insertar una función. En el área para insertar funciones vamos a escribir =A2+1, es decir,*

queremos tener en la celda A3 lo que hay en la celda A2 más 1.

PASO 5. Para copiar una función, lo primero es situarnos en la celda que tiene la función, por ejemplo la celda A3 tiene la función **=A2+1,** la podemos copiar situándonos en la **esquina inferior derecha de la celda A3,** donde se forma una crucita negra, damos click y NO soltamos, primero arrastramos por toda la columna, hasta donde queremos y luego soltamos, automáticamente se copiara.

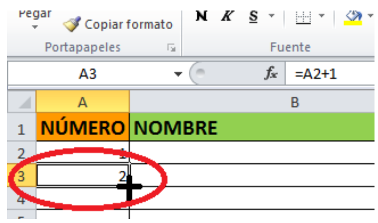


Figura 44. Copiar *una función.* Damos click y NO soltamos, primero arrastramos y luego soltamos.

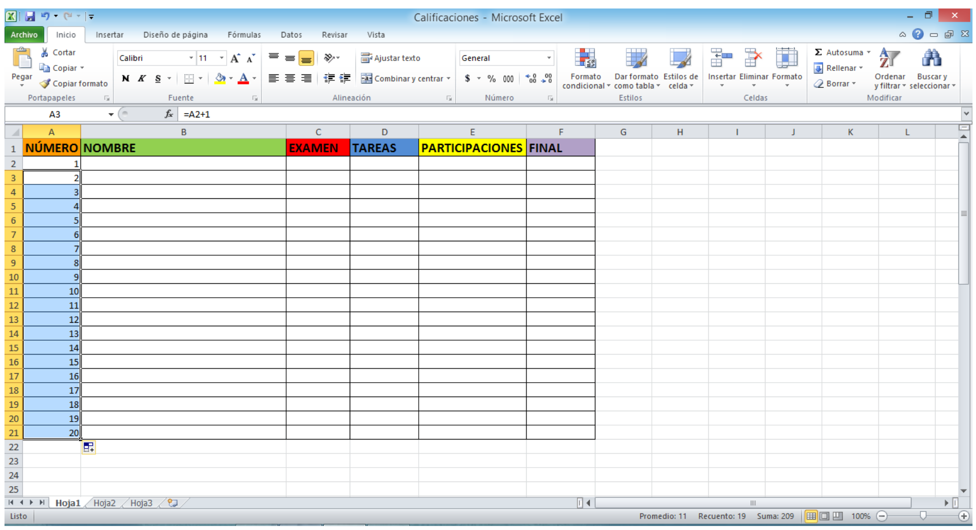
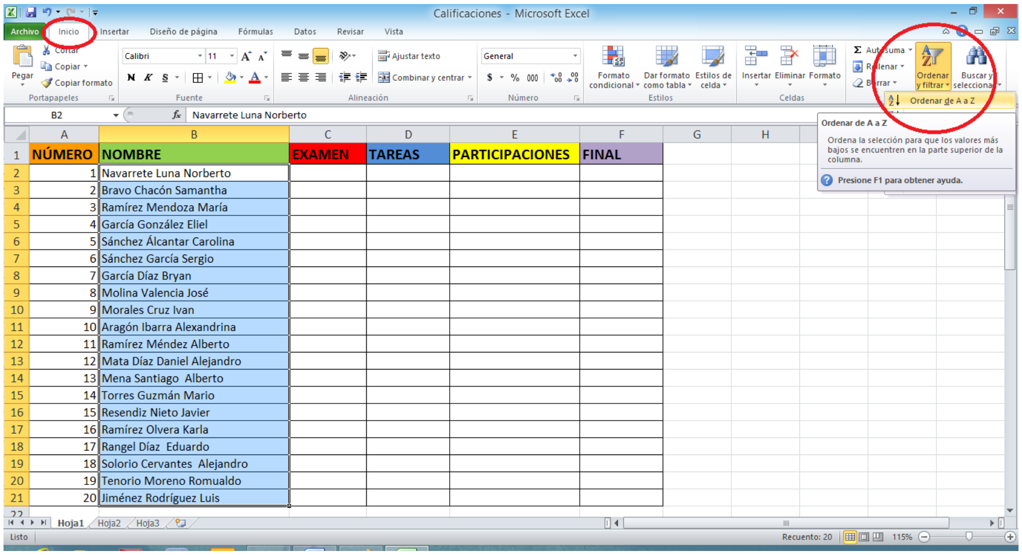


Figura 45. Copiar *una función. A*utomáticamente se copiara la función.

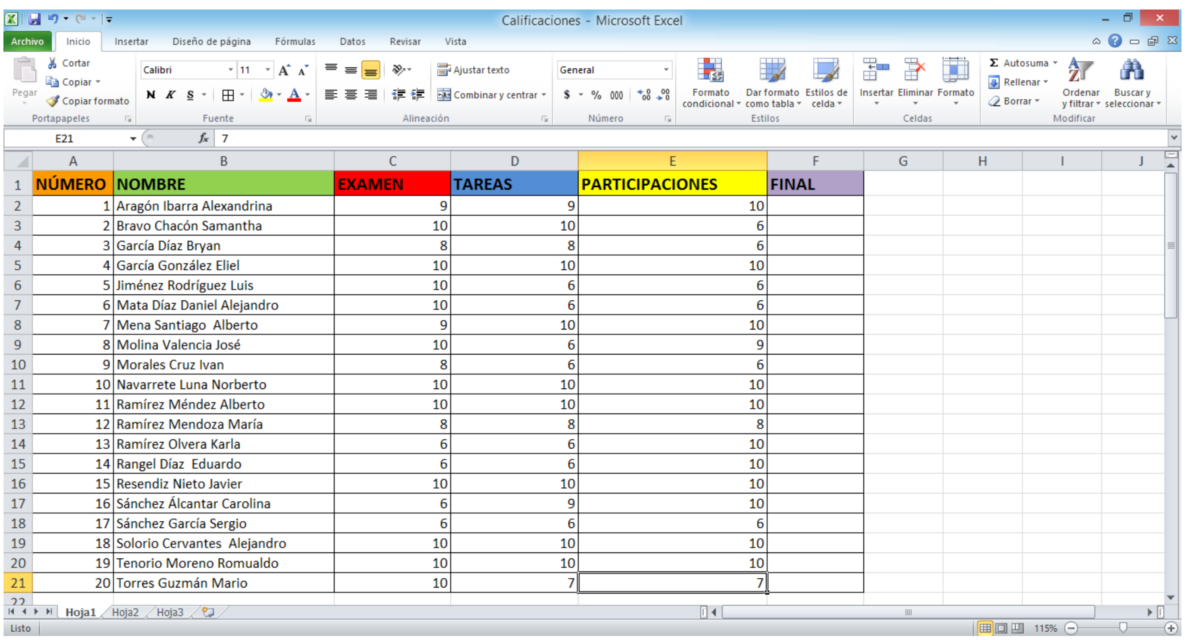
PASO 6. A continuación escribiremos la lista de nuestros estudiantes, para mi ejemplo tendré 20 estudiantes. Observa que puedes no llevar un orden alfabético, EXCEL lo puede ordenar, observa el pie de la figura 46.



NÚMERO	NOMBRE	EXAMEN	TAREAS	PARTICIPACIONES	FINAL
1	Navarrete Luna Norberto				
2	Bravo Chacón Samantha				
3	Ramírez Mendoza María				
4	García González Eliel				
5	Sánchez Álcantar Carolina				
6	Sánchez García Sergio				
7	García Díaz Bryan				
8	Molina Valencia José				
9	Morales Cruz Ivan				
10	Aragón Ibarra Alexandrina				
11	Ramírez Méndez Alberto				
12	Mata Díaz Daniel Alejandro				
13	Mena Santiago Alberto				
14	Torres Guzmán Mario				
15	Resendiz Nieto Javier				
16	Ramírez Olvera Karla				
17	Rangel Díaz Eduardo				
18	Solorio Cervantes Alejandro				
19	Tenorio Moreno Romualdo				
20	Jiménez Rodríguez Luis				

Figura 46. Si capturaste **sin** orden alfabético, selecciona las celdas que quieres ordenar y a continuación *en la barra de **Inicio** está la opción de **Ordenar y filtrar**, selecciónala, despliega y da click en **Ordenar de la A a la Z.***

PASO 7. Ahora capturemos las calificaciones de los rubros considerados.



NÚMERO	NOMBRE	EXAMEN	TAREAS	PARTICIPACIONES	FINAL
1	Aragón Ibarra Alexandrina	9	9	10	
2	Bravo Chacón Samantha	10	10	6	
3	García Díaz Bryan	8	8	6	
4	García González Eliel	10	10	10	
5	Jiménez Rodríguez Luis	10	6	6	
6	Mata Díaz Daniel Alejandro	10	6	6	
7	Mena Santiago Alberto	9	10	10	
8	Molina Valencia José	10	6	9	
9	Morales Cruz Ivan	8	6	6	
10	Navarrete Luna Norberto	10	10	10	
11	Ramírez Méndez Alberto	10	10	10	
12	Ramírez Mendoza María	8	8	8	
13	Ramírez Olvera Karla	6	6	10	
14	Rangel Díaz Eduardo	6	6	10	
15	Resendiz Nieto Javier	10	10	10	
16	Sánchez Álcantar Carolina	6	9	10	
17	Sánchez García Sergio	6	6	6	
18	Solorio Cervantes Alejandro	10	10	10	
19	Tenorio Moreno Romualdo	10	10	10	
20	Torres Guzmán Mario	10	7	7	

Figura 47. Captura de calificaciones.

PASO 8. A cada rubro le hemos asignado un porcentaje, por ejemplo, para el examen 60%, para las tareas 30% y para las participaciones 10%. Para recordarlo lo escribiremos arriba de la celda, seleccionando la celda y escribiendo en la parte donde escribimos las funciones y dando "enter".

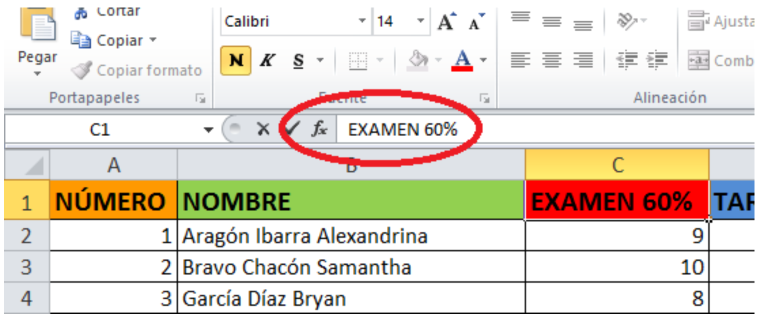


Figura 48. Asignamos porcentajes a los rubros.

PASO 9. INTRODUCIR FUNCIONES. Para la calificación final, utilizaremos la siguiente función:

En la celda F2, que para nuestro ejemplo es la primera que tengo para la calificación final.

=(C2*0.6)+(D2*0.3)+(E2*0.1)

Observaciones matemáticas:

- Hemos hecho uso de signos de agrupación para respetar jerarquías.
- El signo para la multiplicación es un asterisco.
- La calificación de la celda C2 esta multiplicada por 0.6 dado que la regla de proporcionalidad dice:

"Diez es 60%, 8 (por ejemplo) cuanto será"

$$\begin{array}{ccc} 10 & \rightarrow & 60\% \\ 8 & \rightarrow & x \end{array}$$

Resolvemos

$$x = \frac{(60\%)(8)}{10} = 48\%$$

Para quitar el porciento dividimos entre 10, es decir, un estudiante que saca 8 en su examen obtuvo un 4.8 en relación proporcional al 60% que vale el examen.

$$x = \frac{48}{10} = 4.8$$

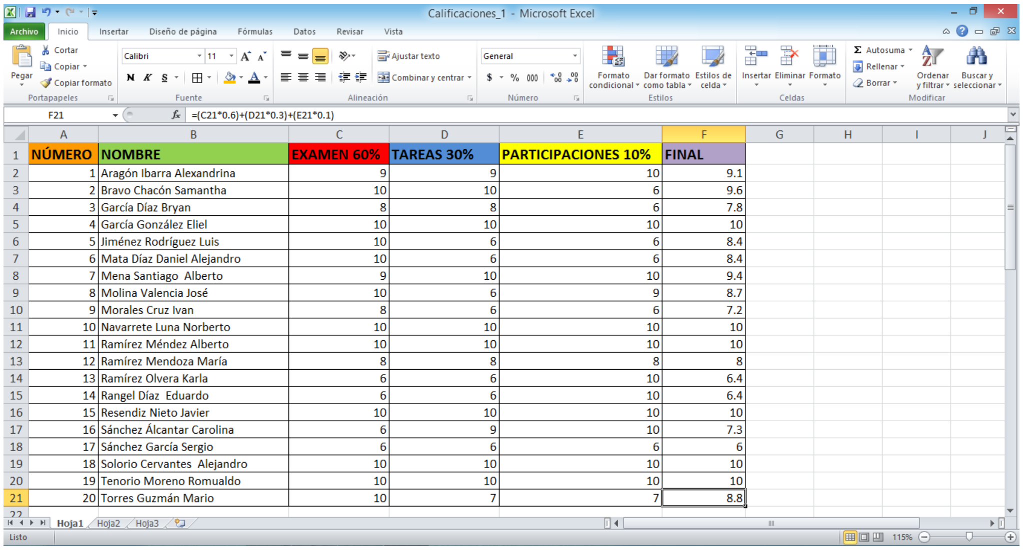
Para evitar hacer estas cuentas, solo multiplicamos la calificación por 0.6, que equivale a obtener el 60%.

Paso 10. De la misma manera procedemos con los demás rubros al señalar cada operación entre paréntesis.

=(C2*0.6)+(D2*0.3)+(E2*0.1)

Paso 11. Finalmente copiamos la función de la celda F2, como lo hicimos en el **Paso 5,** primero nos situarnos en la celda que tiene la función, en este caso F2, nos situándonos en la **esquina**

inferior derecha de la celda F2, donde se forma una crucita negra, damos click y NO soltamos, primero arrastramos por toda la columna, hasta donde queremos y luego soltamos. Automáticamente se copiara y obtendremos las calificaciones finales.



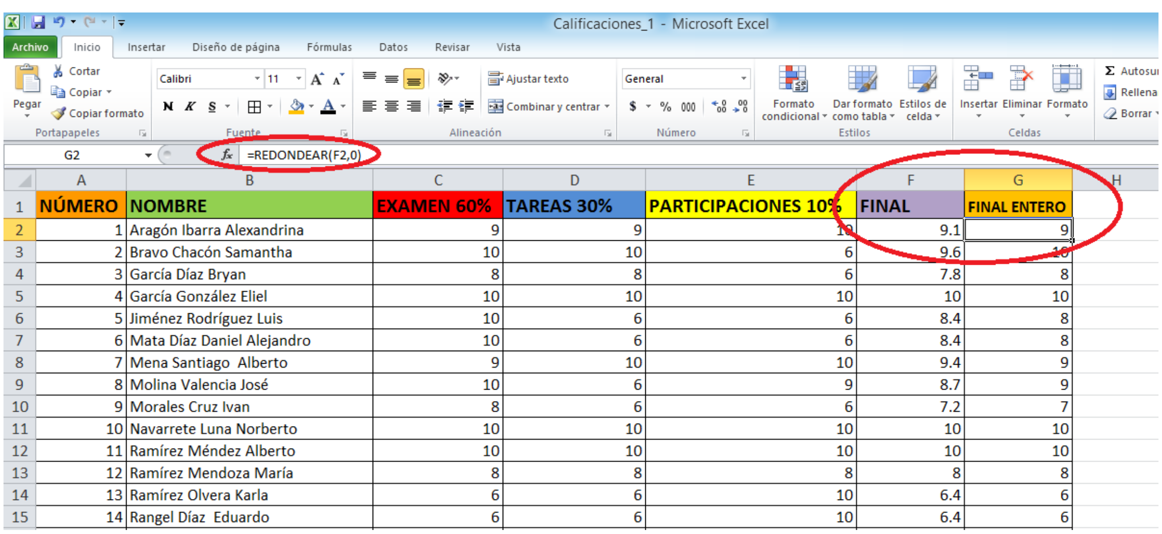
NÚMERO	NOMBRE	EXAMEN 60%	TAREAS 30%	PARTICIPACIONES 10%	FINAL
1	Aragón Ibarra Alexandrina	9	9	10	9.1
2	Bravo Chacón Samantha	10	10	6	9.6
3	García Díaz Bryan	8	8	6	7.8
4	García González Eliel	10	10	10	10
5	Jiménez Rodríguez Luis	10	6	6	8.4
6	Mata Díaz Daniel Alejandro	10	6	6	8.4
7	Mena Santiago Alberto	9	10	10	9.4
8	Molina Valencia José	10	6	9	8.7
9	Morales Cruz Ivan	8	6	6	7.2
10	Navarrete Luna Norberto	10	10	10	10
11	Ramírez Méndez Alberto	10	10	10	10
12	Ramírez Mendoza María	8	8	8	8
13	Ramírez Olvera Karla	6	6	10	6.4
14	Rangel Díaz Eduardo	6	6	10	6.4
15	Resendiz Nieto Javier	10	10	10	10
16	Sánchez Álcantar Carolina	6	9	10	7.3
17	Sánchez García Sergio	6	6	6	6
18	Solorio Cervantes Alejandro	10	10	10	10
19	Tenorio Moreno Romualdo	10	10	10	10
20	Torres Guzmán Mario	10	7	7	8.8

Figura 49. Calificaciones finales.

Paso 12. INTRODUCIR FUNCIÓN. Si deseas calificaciones con números enteros, agrega una columna G, la puedes llamar FINAL ENTERO y escribe la siguiente función con la que cuenta EXCEL en la celda G2 y da "enter". Copia como en el **Paso 5** es decir, arrastrando.

=REDONDEAR(F2,0)

Le estamos pidiendo que redondeé la calificación de la celda F2 con cero decimales, es decir, a número entero, de punto cinco a punto nueve sube al entero inmediato superior y de punto uno a punto cuatro de queda en el entero inmediato inferior.



NÚMERO	NOMBRE	EXAMEN 60%	TAREAS 30%	PARTICIPACIONES 10%	FINAL	FINAL ENTERO
1	Aragón Ibarra Alexandrina	9	9	10	9.1	9
2	Bravo Chacón Samantha	10	10	6	9.6	10
3	García Díaz Bryan	8	8	6	7.8	8
4	García González Eliel	10	10	10	10	10
5	Jiménez Rodríguez Luis	10	6	6	8.4	8
6	Mata Díaz Daniel Alejandro	10	6	6	8.4	8
7	Mena Santiago Alberto	9	10	10	9.4	9
8	Molina Valencia José	10	6	9	8.7	9
9	Morales Cruz Ivan	8	6	6	7.2	7
10	Navarrete Luna Norberto	10	10	10	10	10
11	Ramírez Méndez Alberto	10	10	10	10	10
12	Ramírez Mendoza María	8	8	8	8	8
13	Ramírez Olvera Karla	6	6	10	6.4	6
14	Rangel Díaz Eduardo	6	6	10	6.4	6

Figura 50. Calificaciones redondeadas a enteros.

Paso 13. Guarda tu archivo, con tu actividad terminada. ☺

Finalmente comentaremos como conseguir **Microsoft Excel**. Como sabemos no es un software libre, para tenerlo es necesario comprar el paquete Office, que Microsoft ofrece en diferentes opciones, ya sea para el hogar, empresas o instituciones educativas, la página oficial de Microsoft es http://office.microsoft.com/ [21 de enero de 2014], los paquetes se pueden comprar en línea o en una tienda autorizada, Microsoft oferta paquetes con diversas características donde por ende se tienen diferentes precios, lo podemos observar en la siguiente figura:

Figura 51. Licencias de Excel.

Lo anterior sólo es un ejemplo de algunas opciones, te recomendamos visites la página para mayor información.

COMENTARIOS FINALES DEL CAPÍTULO:

☺ Esperamos que este manual te sirva para que lo emplees en tus labores.

☺ Que te facilite y simplifique tu trabajo como docente.

☺ Que las actividades que vimos para mostrar el uso de los softwares los puedas adaptar o modificar de acuerdo a tus propias necesidades.

☺ Este capítulo sólo trató de mostrar brevemente el uso de estos softwares, sin embargo, también proponemos el uso de tutoriales en Internet, donde podrás ver mayores procedimientos para utilizar con mayor provecho estas herramientas.

☺ A lo largo del capítulo 3 también se tratará sobre el uso de estos tres softwares que hemos visto y daremos a detalle los comandos que se vayan utilizando para cada una de las actividades que proponemos.

Finalmente esperamos que las actividades que se verán en el capítulo 3 te sirvan para:

- Darte opciones para crear actividades que te sirvan para tu trabajo diario.

- Solidificar tus conocimientos y transmitirlos con mayor seguridad y pero sobre todo con mayor gusto lo cual creemos motivara el estudio de las Matemáticas por parte de los estudiantes.

Capítulo 3.
Prácticas propuestas

INTRODUCCIÓN

Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC´s) han transformado a la educación, los jóvenes deben adquirir una formación de tal manera que las puedan usar y manejar, el docente tiene que cambiar sus estrategias para enseñar a aprender y que se cumpla este objetivo, es decir, ya no es suficiente con dar el conocimiento en el pizarrón, ahora se tiene que realizar una fusión entre el conocimiento y las TIC´s, para que el alumno tenga una interacción con el saber y este en la vanguardia en sus competencias informáticas.

Las TIC´s ofrecen una diversidad de recursos para apoyar al proceso enseñanza-aprendizaje, se cuenta con software, foros de consulta , chat, información en línea, tutoriales, videos y demás herramientas, en particular los software son titánicos para este proceso, funcionan como medios didácticos, pues entre todas las cosas, destacan las oportunidades que brindan contribuyendo al aprendizaje continuo de manera dinámica en cualquier momento y lugar, también permiten la creación de nuevas actividades de aprendizaje con un potencial didáctico impresionante siempre que se utilicen de manera adecuada. Si el docente plantea problemas extraídos del entorno, el software adecuado ayudará a simularlo o representarlo, el estudiante trabajará en el problema sin ningún riesgo, podrá observar, distinguir y hasta manipular los elementos relevantes del proceso de solución, en una hoja de papel difícilmente esto se lograría, lo que le ayudará a desarrollar el pensamiento, así el conocimiento que se da en clase puede ser aplicable rompiendo con la creencia de que “las matemáticas que se aprenden en la escuela no tiene mucho que ver con el mundo real”.

En este capítulo se proponen siete prácticas de distintas áreas de las Matemáticas, que creemos ayudarán al docente a introducirse en el inmenso mundo de las TIC´s, en especial de los softwares, cada práctica está elaborada con base en un problema que ha aparecido en la vida cotidiana, por ejemplo, con el material para elaborar una lata de refresco o con los códigos de barras de los productos, además, en cada práctica se detalla paso a paso el proceso de solución matemático basado en teoremas y definiciones que con el apoyo de diferentes software (los mencionados en el capítulo anterior), las practicas propuestas llevan por título el siguiente:

1. *El Tesoro del Pirata*
2. *El Problema de los Cumpleaños*
3. *Los Códigos de Barras*
4. *Determinación del área de un círculo*
5. *Generalización del Teorema de Pitágoras*
6. *Graficas en Estadística*
7. *El Problema de la Lata de Coca-Cola*

Creemos que realizar este tipo de prácticas en el aula tiene muchas ventajas, una de las más importantes es que si se aplica este tipo de material didáctico en el aula o laboratorio de cómputo se ayuda a reforzar los temas vistos en clase, así mismo los relacionará y permitirá verlos en conjunto, finalmente creemos que es importante mencionar que para la aplicación de cada práctica se tiene que dar una intención motivadora, tener dominio del tema para lograr un buen planeamiento y evitar la distracción, dispersión o un aprendizaje fugaz de los estudiantes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación del Álgebra Lineal

EL TESORO DEL PIRATA

El Álgebra Lineal es una rama de las Matemáticas más importantes, pues tiene muchas aplicaciones. Una aplicación muy interesante es en la criptografía, que es una técnica utilizada para ocultar y desifrar información, con el fin de que, sólo los que conozcan la clave puedan desifrar el mensaje.

La técnica para encriptar que presentamos es muy sencilla, se basa en el producto de matrices, básicamente hay que transformar el mensaje en números que se repartiran en matrices fila, así cada matriz fila se multiplicará por una matriz A, llamada matriz codificadora. Para desifrar el mensaje tenemos que multiplicar las nuevas matrices fila por la matriz A^{-1}, llamada matriz decodificadora. A continuación recordaremos algunas definiciones y teoremas importantes para este tema.

Definición
Sea A una matriz $m \times r$, y B una matriz de $r \times n$. El **producto** AB es la matriz $m \times n$ cuya componente $ij-ésima$ es el producto del renglón $i-ésimo$ de A y la columna $j-ésima$ de B.

Observa que para que se defina la multiplicación tenemos que:

Teorema
Si A es una matriz $m \times n$, B es una matriz de $n \times p$ y C es una matriz de de $p \times q$, entonces

$$(AB)C = A(BC) \qquad \text{(ley asociativa)}$$

Aunque el producto de matrices no es conmutativo, con el teorema mencionado podemos garantizar que si es asociativa, sin cambiar el orden de las matrices que para que esté definida la multiplicación.

Definición de Inversa de una matriz

Una matriz B se llama **inversa de una matriz** cuadrada A si $AB = BA = I_n$

Decimos que una matriz es **invertible** o **no singular** si tiene inversa. Sin embargo, una matriz A puede no tener inversa, en cuyo caso se llama **no invertible** o **singular**.

Observa que sólo las matrices matriz cuadradas pueden tener inversa.

El álgebra de matrices muestra que, si una matriz tiene invesa, entonces la matriz inversa es única.

Teorema

Si una matriz A de $n \times n$ es invertible, entonces la inversa de A es única.

Entonces si una matriz cuadrada es invertible, tiene inversa, y dicha inversa es única.

La inversa de una matriz A se denota como A^{-1}.

Así si A^{-1} es inversa de A, entonces A es la inversa de A^{-1}, es decir $(A^{-1})^{-1} = A$

Teorema

Si dos matrices A y B de $n \times n$ son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Lo que nos dice el teorema es que la inversa de un producto de matrices es el producto de las inversas en orden contrario.

Con todo lo mencionado anteriormente, abordaremos un problema de aplicación para observar como el Álgebra Lineal cobra un auge importante en estos tiempos donde se tiene que preservar y asegurar cierta información que no cualquiera puede conocer.

EL TESORO DEL PIRATA

En 1697 el pirata Barba Roja fue capturado por los ingleses. Poco antes de su derrota oculto su tesoro de tal manera que sólo aquel que descifrará el mensaje que escribió antes de ser ejecutado, descubriera su tesoro y fuera dueño de una inmensa fortuna.

El mensaje fue escrito en un pergamino y depositado en una botella que Barba Roja tiro al mar, la cual fue descubierta hace poco pero aún no ha sido descifrado el mensaje, puesto que aparece como en la figura 1.

Figura 1

ACTIVIDAD

Te retamos a descifrar el mensaje y convertirte en el dueño del tesoro del legendario pirata Barba Roja.

Para poder descifrarlo tienes que seguir las siguientes pistas.

Para realizar las operaciones indicadas en cada pista puedes utilizar Scientific WorkPlace.

PROCEDIMIENTO

PISTAS:

1. Divide el mensaje en grupos de tres números de manera que tengas nueve matrices renglón y resérvalas.

   Sean las matrices

   $A_1 = \begin{bmatrix} 19 & -33 & 20 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 89 & 183 & 244 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 102 & 84 & 192 \end{bmatrix},$

$A_4 = \begin{bmatrix} 110 & 120 & 160 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 86 & 100 & 128 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 33 & -1 & 80 \end{bmatrix},$

$A_7 = \begin{bmatrix} 62 & 38 & 108 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 128 & 106 & 188 \end{bmatrix}, A_9 = \begin{bmatrix} -16 & 48 & 64 \end{bmatrix}.$

2. Halla los elementos de una matriz A de rango 3, que te será necesaria para descifrar el mensaje resolviendo cada acertijo.

   (a) **Acertijo** a_{11} . Es un número que multiplicado por cinco y disminuido en doce equivale a tres veces el número disminuido en catorce.

   $5x - 12 = 3x - 14$. *La solución es* $x = -1$, *entonces* $a_{11} = -1$

   (b) **Acertijo** a_{12} . Es el séptimo dígito de la sucesión de Fibonacci dividido entre 7.

   La sucesión de Fibonacci es: 1 2 3 5 8 13 21 34 ... , *el séptimo dígito de la sucesión es 21,entonces* $a_{12} = \frac{21}{7} = 3$

   (c) **Acertijo** a_{13}. Es el sexto número primo positivo disminuido en uno y dividido en 3.

   Los números primos son: 2 3 5 7 11 13 17 ...

   $a_{13}=\frac{13-1}{3}=$ *4*

   (d) **Acertijo** a_{21}. El único primo par.

   $a_{21}=$ *2*

   (e) **Acertijo** a_{22}. Tres menos siete veces el número es igual a once menos cinco veces el mismo número.

   $3 - 7x = 11 - 5x$, *la solución es* $a_{22} = -4$

   (f) **Acertijo** a_{23}. La aportación matemática más importante de los mayas.

   a$_{23}$= **0**

   (g) **Acertijo** a_{31} . La base de un cuadrado se aumenta en 2 cm y la altura en 1 cm. El área de la figura formada es de 42 cm^2. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

   Si $(x + 2)(x + 1) = 42$, *entonces* $x = 5, -8$

   Necesitamos la magnitud de el lado del cuadrado entonces $a_{31} = 5$

   (h) **Acertijo** a_{32} . La raíz positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - 5x - 14 = 0$.

   Las soluciónes son $x = 7, -2$

   Entonces $a_{32} = 7$

   (i) **Acertijo** a_{33} . La posición de la letra H en el abecedario.

   La posición de la letra H en el abecedario es 8

   Por lo tanto $a_{33} = 8$

Luego si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, es la matriz necesaria para descifrar el mensaje.

3. Ahora que ya tienes la matriz A halla su inversa.

   Como $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, entonces $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}$, A^{-1} será la matriz decodificadora.

4. Multiplica por la izquierda cada una de las matrices renglón que obtuviste en la pista 1 por la matriz A^{-1}, para obtener las matrices renglón B_i, $i = 1, 2, ..., 9$.

   Tenemos:

$$A_1A^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & -33 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 0 \end{bmatrix} = B_1$$

$$A_2A^{-1} = \begin{bmatrix} 89 & 183 & 244 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 5 & 20 \end{bmatrix} = B_2$$

$$A_3A^{-1} = \begin{bmatrix} 102 & 84 & 192 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 19 & 16 \end{bmatrix} = B_3$$

$$A_4A^{-1} = \begin{bmatrix} 110 & 120 & 160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} = B_4$$

$$A_5A^{-1} = \begin{bmatrix} 86 & 100 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 16 \end{bmatrix} = B_5$$

$$A_6A^{-1} = \begin{bmatrix} 33 & -1 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 3 \end{bmatrix} = B_6$$

$$A_7A^{-1} = \begin{bmatrix} 62 & 38 & 108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 9 \end{bmatrix} = B_7$$

$$A_8A^{-1} = \begin{bmatrix} 128 & 106 & 188 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 21 \end{bmatrix} = B_8$$

$$A_9A^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & 48 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{7}{30} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{60} & \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_9$$

5. Reagrupa la serie de matrices renglón B_i, $i = 1, 2, 3, ..., 9$, obtenidas en las operaciones de la pista 4, en un solo renglón.

   5 12 0 21 5 20 16 19 16 0 5 20 0 3 16 14 16 3 9 13 9 5 14 21 16 0 0

6. Dada la siguiente asignación descifra el mensaje:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
_	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

El mensaje desifrado es:

5 12 0 21 5 20 16 19 16 0 5 20 0 3 16 14 16 3 9 13 9 5 14 21 16 0 0

E L _ T E S 0 R 0 _ E S _ C 0 N O C I M I E N T 0 _ _

Es interesante descubrir, además del tesoro, la forma en que Barba Roja cifro su mensaje. A continuación justificaremos el algoritmo que siguió nuestro pirata para encriptar la información.

Con la tabla del punto 6 llena en cada espacio el número correspondiente a cada letra para cifrar el mensaje de Barba Roja:

E L _ T E S 0 R 0 _ E S _ C 0 N O C I M I E N T 0 _ _
5 12 0 ...

Si dividimos el mensaje en matrices renglón B_i de orden 1×3 y a cada una de estas matrices las multiplicamos por la izquierda por la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, tenemos lo siguiente:

Debemos multiplicar la matriz A por cada una de las matrices obtenidas B_i como ya se indicó :

$$B_1A = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -33 & 20 \end{bmatrix} = A_1$$

$$B_2A = \begin{bmatrix} 21 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 & 183 & 244 \end{bmatrix} = A_2$$

$$B_3A = \begin{bmatrix} 16 & 19 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 & 84 & 192 \end{bmatrix} = A_3$$

$$B_4A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 120 & 160 \end{bmatrix} = A_4$$

$$B_5A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 & 100 & 128 \end{bmatrix} = A_5$$

$$B_6A = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & -1 & 80 \end{bmatrix} = A_6$$

$$B_7A = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 38 & 108 \end{bmatrix} = A_7$$

$$B_8A = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 & 106 & 188 \end{bmatrix} = A_8$$

$$B_9A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 48 & 64 \end{bmatrix} = A_9$$

Una vez que ya contamos con las nuevas matrices que como observamos son las A_i, tenemos que reagrupar para poder transmitir el mensaje encriptado:

19 -33 20 89 183 244 102 84 192 110 120 160 86 100 128 33 -1 80 62 38 108 128 106 188 -16 48 64

Que como observamos corresponden al mensaje de la figura 1.

Por último reflexionaremos sobre el proceso algebraico realizado:

Sean $A_i, i = 1, 2, 3, ..., 9$ las matrices del mensaje encriptado.
Sean $B_i, i = 1, 2, 3, ..., 9$ las matrices del mensaje desencriptado.
Sea A la matriz codificadora.

Sea A^{-1} la matriz codificadora

Tenemos que para encriptar realizamos la siguiente operación:

$$B_iA = A_i$$

Luego para desencriptar realizamos la siguiente operación:

$$A_iA^{-1} = B_i$$

O bien,

$$A_iA^{-1} = B_i$$

Multiplicamos con A, a la derecha.

$$\begin{gathered}
(A_iA^{-1})\,A = B_iA \\
\Rightarrow A_i(A^{-1}A) = B_iA \qquad \text{ley asociativa} \\
A_iI = B_iA \qquad \text{Teorema} \\
\therefore A_i = B_iA
\end{gathered}$$

Es decir, el mensaje lo encriptamos con A y lo desencriptamos con A^{-1} dado que $(A^{-1}A) = I$.

CONCLUSIONES

Si el mensaje pudiera desencriptarse directamente con la asignación de letras no tendría tanto sentido esconder cierta información, dado que hay técnicas por repetición para descifrar mensajes.

Es necesario encriptar algunos mensajes pues no cualquiera puede tener acceso a cierta información, por ejemplo, es necesario controlar los códigos de acceso de los sistema de los bancos, para evitar fraudes ó robos en las cuentas bancarias.

Para nuestra actividad fue necesaria una matriz, cuyos componentes (acertijos) hay que encontrar, aúnque evidentemente los bancos cuentan con un sistema de encriptamiento más sofisticado.

Esta práctica es una herramienta que nos ayuda a visualizar algunas de las grandes aplicaciones del Álgebra Lineal. Además pudimos observar como a partir de operaciones tan básicas de matrices es posible esconder información.

En fin, esta práctica nos enseña que el Álgebra Lineal va más allá de operaciones con matrices.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación de la Probabilidad

EL PROBLEMA DE LOS CUMPLEAÑOS

En nuestra vida cotidiana podemos encontrar sucesos que están relacionados con la Probabilidad, por ejemplo, determinar si el día de mañana llegaremos tarde a la clase de Matemáticas por la lluvia, por el tráfico o algún accidente automovilistico. Es indispensable la Probabilidad para vivir, en la actualidad, nos ayuda, entre otras cosas, a estudiar acontecimientos y poder predecir resultados, siendo la Probabilidad una herramienta que nos ayuda a describir, relacionar y analizar conjuntos de datos.

A continuación recordaremos algunas definiciones y teoremas importantes para este tema.

Definición

Población es un conjunto completo de individuos, objetos o medidas que poseen alguna característica común observable, luego una **muestra** es un subconjunto de la población.

Definición

Un **experimento** es cualquier proceso que genere datos y una **observación** es cualquier registro de información de un experimento, ya sea numérica o categórica.

Definición

Un **experimento aleatorio** es un experimento para el cual no es posible determinar de antemano el resultado. A lo más podemos considerar el conjunto de resultados posibles. Al experimento aleatorio también se le llama, no determinístico, causal, estocástico, azaroso o probabilístico.

Definición

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y se representa con la letra S. A cada uno de los resultados de un espacio muestral se le llama **elemento**, **miembro del espacio muestral** o **punto muestra**.

Definición

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral, donde este puede tener uno o más puntos muestra.

Es posible que un **evento** pueda ser un subconjunto que incluya todo el espacio muestral **S** o una parte o ningún elemento del conjunto **S** en cuyo caso se denomina **conjunto vacío** y que se denota mediante el símbolo ϕ, es decir, que no contiene elemento alguno.

Definición

El **complemento de un evento** A con respecto a S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A^C.

Definición

A cada punto de un espacio muestral S se le asigna un número real entre 0 y 1, llamado **peso** o **probabilidad**, tal que la suma de todas las probabilidades es 1.

Definición

La probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades de todos los puntos del evento y se escribe $P(A)$. Para cualquier evento A se tiene que $0 \leq P(A) \leq 1$. Considera que $P(\phi) = 0$ y observa que $P(S) = 1$.

La Probabilidad condicional tiene en cuenta la alteración de la probabilidad de un evento a la luz de la ocurrencia de otro evento, pero también nos permite comprender el concepto de **independencia,** veamos la siguiente definición.

Definición

Sean A y B dos eventos tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, se dice que el evento A es **independiente** del evento B si $P(A \mid B) = P(A)$

Es decir, si la ocurrencia de B no da información acerca de la ocurrencia del evento A, éstos dos eventos son **independientes**, dicho de otro modo, la ocurrencia de A es independiente de la ocurrencia de B.

Se han mencionado algunas definiciones, a continuación recordaremos algunos teoremas.

Teorema

Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N resultados igualmente probables y si n de estos resultados corresponden al evento A, entonces $P(A) = \frac{n}{N}$.

Teorema

Dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Teorema

Si los eventos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ son **independientes** entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

Es importante tambien mencionar uno de los teoremas más fuertes de la probabilidad:

Teorema

Si A y A^C son eventos **complementarios**, entonces $P(A) + P(A^C) = 1$.

Una vez que ya hemos recordado algunas definiciones y teoremas de la Probabilidad, trataremos algunas notas importantes, pues la Probabilidad mal interpretada puede causar que cometarios como los siguientes, se interpreten como verdades absolutas.

1. Un hombre que viajaba mucho estaba preocupado por la posibilidad de que hubiera una bomba en su avión. Calculó la probabilidad de que fuera así y, aunque esta era baja, no lo era lo suficiente para dejarlo tranquilo. Desde entonces lleva siempre una bomba en la maleta. Según él, la probabilidad de que haya dos bombas a bordo es infinitesimal.

2. La probabilidad de tener un accidente de tráfico aumenta con el tiempo que pasas manejando. Por lo tanto, cuanto más rápido circules, menos tiempo estarás en la calle y es menor la probabilidad de que tengas un accidente.

3. El alcohol está implicado en el 33% de los accidentes mortales. Esto significa que el 67% restante ha sido causado por personas sobrias. Así, está claro que la forma más segura de conducir es borracho, además de circular a gran velocidad, como ya se ha demostrado.

4. Casi el 100% de los adictos a la cocaína y la mariguana beben leche de pequeños. Por lo tanto, la leche es una sustancia que incita al consumo de drogas.

5. Un estadístico podría meter la cabeza en el horno y los pies en el refrigerador y decir que, en promedio, se encuentra bien.

   Finalmente considera la siguiente apuesta:

6. En un autobús viajas tú con otras veintidós personas (23 personas en total) desconocidas todas de todas. Tu compañero de asiento (que tampoco te conoce) te apuesta que en el autobús se encuentran dos personas que celebran su cumpleaños el mismo día. ¿Es prudente aceptar la apuesta?

Es esta apuesta la que nos lleva a nuestra siguiente práctica, conocida como la paradoja de los cumpleaños…

EL PROBLEMA DE LOS CUMPLEAÑOS

La paradoja del cumpleaños es como se conoce al problema de calcular la probabilidad de que en un conjunto de n personas dos cumplan años el mismo día, en sentido estricto no es una paradoja ya que no es una contradicción a la lógica; es una paradoja en el sentido que es una verdad matemática que contradice la intuición común.

El enunciado del problema dice:

Si hay 23 personas reunidas, existe una probabilidad mayor al 50% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día.

Si desechamos los años bisiestos y los gemelos, podemos asumir que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad.

ACTIVIDAD

Determina cuál es la probabilidad de que de 23 personas reunidas, al menos dos compartan cumpleaños.

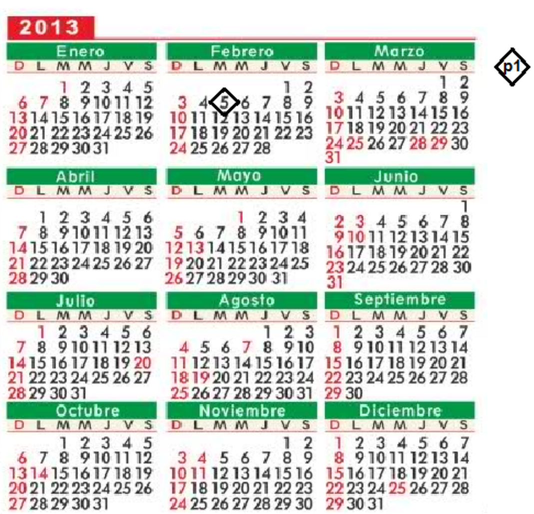
Software: Scientific Workplace

PRECEDIMIENTO

Sea A el evento de que de 23 personas al menos dos compartan cumpleaños el mismo día, entonces A^C es el evento donde al menos dos personas no se compartan cumpleaños.

Primero calcularemos la probabilidad de que 23 personas **no compartan cumpleaños.**

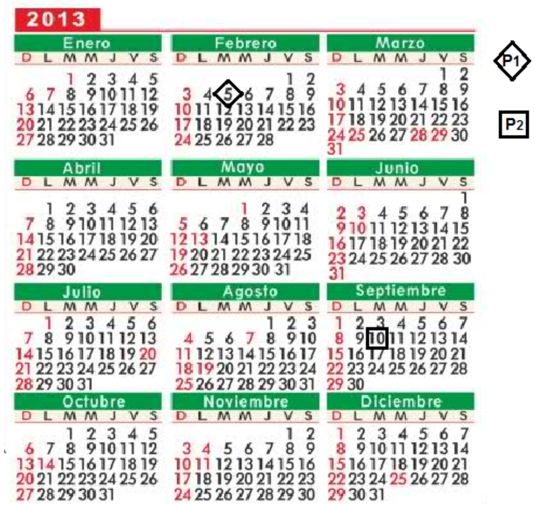
Supongamos que una habitación tiene un casillero con 365 celdas, cada una representa un día del año. Entras a la habitación donde se encuentra el casillero vacío y pones una tarjeta en el día del año de tu nacimiento.



¿Cuál es la probabilidad de que ocupes una de las celdas?

Llamenos A_1 al evento que consiste en ocupar una celda. La probabilidad de que ocurra dicho evento es $P(A_1) = \frac{365}{365}$, pues la probabilidad de un evento A es $P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento A}}{\text{Número de casos posibles}}$

Entra una segunda persona en la habitación. Ahora como queremos la probabilidad de que no se compartan cumpleaños, suponemos que la persona dos no tiene el mismo cumpleaños que tú, luego no podrá utilizar la celda que ya usaste.



¿Cuál es la probabilidad de que ocupe una de las celdas vacías?

Llamenos A_2 al evento que consiste en que la seguda persona ocupe una celda. La probabilidad de que ocurra dicho evento es $P(A_2) = \frac{364}{365}$, ya que ha sido ocupada una celda.

Los eventos de tu cumpleaños y el de la persona dos son independientes, porque dichos eventos no se afectan entre sí, es decir, si uno no ocurre no afecta en nada al otro evento.

¿Cuál es la probabilidad de que tenga un cumpleaños distinto al tuyo?

Como son independientes, la probabilidad de que tenga un cumpleaños distinto es:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \qquad \text{según teorema}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right) = \frac{365 \times 364}{365 \times 365}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 0.99726$$

Suponte que entra una persona tres, como queremos la probablidad de que no se compartan cumpleaños, suponemos que la persona tres no tiene el mismo cumpleaños que tú y tampoco que la persona dos, luego no podrá utilizar la celda que ya usaste tú y ni la de la persona dos.

¿Cuál es la probabilidad de que ocupe una de las celdas vacías restantes?

Sea A_3 el evento tal que la persona tres no cumple años el mismo día que la persona dos y la persona uno.

Como no puede elegir las celdas ya seleccionadas se tiene:

$$P(A_3) = \frac{363}{365}$$

Los eventos de tu cumpleaños, de la persona dos y la persona tres son independientes, porque no se afectan entre sí, es decir, si alguno de ellos no ocurre los eventos restantes no son afectados.

¿Cuál es la probabilidad de que los tres tengamos un cumpleaños distinto?

Como los eventos son independientes se cumple con:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap\, A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad \text{(Teorema)}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap\, A_3) = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right) = \frac{365\times 364\times 363}{365\times 365\times 365}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap\, A_3) = 0.991\,80$$

Supongamos para 23 personas, nuestra expresión de probabilidad para que todas tengan un cumpleaños diferente es de la siguiente forma:

Como todos los eventos son independientes entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap\, A_{23}) = P(A_1)P(A_2)...P(A_{23}) \qquad \text{(Teorema)}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap\, A_{23}) = \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)...\left(\frac{241}{365}\right) = \frac{365\times 364\times ...\times 343}{365\times 365\times ...\times 365} = \frac{365!}{365^{23}(365-23)!}$$
$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap\, A_{23}) = 0.492\,7$$

$\therefore$ Si A es el evento de que 23 personas no compartan años el mismo día $\rightarrow P(A) = \frac{365!}{365^{23}(365-23)!}$
Ahora, ¿Cuál es la probabilidad de que de 23 personas al menos dos compartan cumpleaños?

Recordemos que A^C es el evento donde al menos dos personas comparten cumpleaños, ya que la apuesta era que en el camión con 23 personas al menos dos comparten cumpleaños.

Entonces A y A^C son eventos complementarios, por teorema tenemos:

$$P(A) + P(A^C) = 1$$

Despejamos a $P(A^C)$ para calcular su probabilidad

$$\Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A) \qquad (1)$$

Como $P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{23}) = \frac{365!}{365^{23}(365-23)!}$, sustituimos en (1)
Así la probabilidad de que al menos 2 personas de 23 compartan cumpleaños es

$$P(A^C) = 1 - \frac{365!}{365^{23}(365-23)!} = 0.5073$$
$$\Rightarrow P(A^C) = 0.5073$$

Que corresponde al 50.73%

Observa que si se tienen 366 personas (no gemelos) y un año no bisiesto se asegura que dos comparten cumpleaños, así mismo, para un conjunto de $n \geq 366$ personas, se garantiza que al menos 2 personas comparten cumpleaños, dado que lo peor que puede pasar es que 365 personas cumplan años en día distinto, luego el resto repetirá algún día.

En general la fórmula para determinar la probabilidad de que en un conjunto de n$\leq$ 365 personas dos compartan cumpleaños es la siguiente:

Si D es el evento tal que en una habitación con $n \leq 365$ personas reunidas se comparta al menos un cumpleaños entonces $P(D) = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$

CONCLUSIONES

Antes de realizar la practica la intuición nos dice que la probabilidad de que dos personas de un grupo de 23 cumplan años el mismo día es muy baja o que no existirá la coincidencia de que dos personas compartan cumpleaños.Por ejemplo, si $n = 50$, la probabilidad es muy alta.

Una vez concluida la práctica, nos damos cuenta que la Probabilidad (Matemáticamente hablando) es sumamente alta. Aquí la importancia de la Probabilidad, es necesario conocer su función, pues podemos observar como hace a un lado a la intuición.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación del Álgebra Lineal

LOS CÓDIGOS DE BARRAS

Actualmente es un hecho que cualquiera que sea el soporte en que esté almacenada la información, por ejemplo, un ordenador, en una cámara fotográfica, un CD ó la contenida en las ondas emitidas por televisión o por un teléfono móvil está traducida a números, es decir, está codificada, es digital y el medio por el que se transmita, ya sea un texto, una imagen o sonidos, está traducida a números. En el proceso de traducción a números (codificación) o durante la emisión, captura, transmisión y recepción del mensaje numérico, se pueden cometer errores, y los errores hay que detectarlos y corregirlos.

En esta práctica veremos como detectar y corregir errores en los códigos de barras.

Existen diversos tipos de simbología entre códigos de barras, cada uno diseñando para cubrir ciertas especificaciones. El código de barras permite conocer las características del artículo o producto. La práctica se centra en el EAN-13 (European Article Number), es un sistema de códigos de barras adoptado por una gran multitud de empresas. Está constituido por 13 dígitos divididos en cuatro grupos

$$\underbrace{a_0a_1}_{\text{país}} \quad \underbrace{a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}}_{\text{código de la empresa y del producto}} \quad \underbrace{c}_{\text{control}}$$

País: los primeros dígitos identifican a través de qué organización nacional se ha adscrito una empresa al Sistema EAN.

Código de la empresa: es un número compuesto entre 5 y 8 dígitos, dependiendo de las necesidades de la empresa, el cual identifica al propietario de la marca.

Código del producto: completa los 12 primeros dígitos.

Dígito de control: consta de un solo dígito y sirve para verificar que el código leído es correcto. El proceso de su cálculo es muy sencillo, basta con seguir tres pasos, a saber son los siguientes:

Paso 1: Se numeran los doce primeros dígitos comenzando de izquierda a derecha. Los dígitos que ocupan una posición par se suman, y los que ocupan una posición impar se suman y se multiplican por 3.

Paso 2: Se suman los dos números obtenidos.

Paso 3: Se busca la decena inmediatamente superior al resultado de la suma anterior y se le resta esa suma. El resultado obtenido es el dígito de control del lugar 13.

Ejemplo 1:

Sea el siguiente código de barras

8 454321 654329

Numerando los doce primeros números de izquierda a derecha, se tiene:

Posición	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Código	8	4	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2

La suma de los de lugar par, incluyendo el cero, es:

$(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = (8 + 5 + 3 + 1 + 5 + 3) = 25$

La suma de los de lugares impares multiplicados por tres es:

$3(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) = 3(4 + 4 + 2 + 6 + 4 + 2) = 66$

Ahora bien, sumamos ambas sumas, es decir,

$(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) + 3(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) = 25 + 66 = 91$

La decena inmediatamente superior es 100, entonces $100 - 91 = 9$ por lo que el dígito de control es: $c = 9$

LOS CÓDIGOS DE BARRAS

ACTIVIDAD

Para realizar las operaciones de está práctica puedes usar Scientific WorkPlace o bien, una calculadora.

1. Observe que en los siguientes códigos de barras solo tienen 12 dígitos. Halla el dígito de control de cada uno.

a) coca-cola
b)Danone
c)Boing

a) Coca-cola

El código de barras es 012345678901

$0+2+4+6+8+0+3(1+3+5+7+9+1)=98$

$100-98=2$

Así el código es 2.

b) Danone

El código de barras es 750103233274

$7+0+0+2+3+7+3*(5+1+3+3+2+4)=73$

$80-73=7$

Así el código es 7

c) Boing

El código de barras es 123456789012

$1+3+5+7+9+1+3(2+4+6+8+0+2)=92$

$100-92=8$

Así el código es 8

Entonces el código de control de cada producto es:

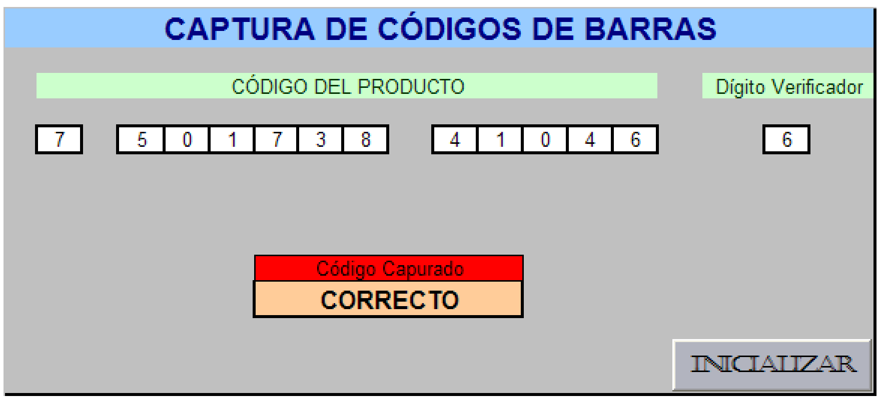
PRODUCTO	Código de control
b)Coca-cola	2
b)Danone	7
c)Boing	8

2. ¿Son correctos los códigos de control de los códigos de barras siguientes?:

a)	1576659024388
b)	3695145412544
c)	5456656554545

3. Busca el código de barras de tres productos reales distintos y verifica que cumplan el algoritmo.

4. Utiliza el programa de Excel para verificar tus códigos de las actividades anteriores.



Se pueden plantear diversas preguntas que son importantes para el desarrollo de la actividad:

a) ¿Cuántos códigos de barras de 12 dígitos, esto es sin contar dígito del código verificador, se pueden formar con los 10 números dígitos?

b) Dos códigos de barras que sólo se diferencien en un dígito de los 12 primeros ¿pueden tener el mismo dígito de control?

c) Intercambiando dos de los doce primeros dígitos ¿se obtiene el mismo dígito de control?

Estas preguntas surgen si pensamos que queremos capturar un código de barras para consultar alguna característica de nuestro producto y en la captura ocurre un error.

5. Estas preguntas nos llevan a pensar si para cada código verificador sólo existe una combinación en sus otros dígitos. Respondamos cada una de las preguntas anteriores y comentemos con el grupo nuestras conclusiones:

a) ¿Cuántos códigos de barras de 12 dígitos, esto es sin contar dígito del código verificador, se pueden formar con los 10 números dígitos?

Cada código está formado por 12 dígitos y en cada dígito podemos elegir una opción de 10 números.

Entonces podemos formar $12^{10} = 61\,917\,364\,224$ códigos de barras.

b) Dos códigos de barras que sólo se diferencien en un dígito de los 12 primeros ¿pueden tener el mismo dígito de control?

Si tomanos dos códigos de barras que solo sean distintos en un dígito, los códigos no van a tener el mismo código de control.

Por ejemplo:

Tomamos los siguientes códigos, observemos que solo cambian en un dígito:

421511325825

421512325825

Calculemos el dígito de control de cada código:

Para el código 421511325825 tenemos;

$$\begin{array}{c} 4+1+1+3+5+2=16 \\ 3(2+5+1+2+8+5)=69 \end{array} \quad 16+69=85 \quad \text{El dígito de control es} \quad 5$$

y para 421512325825 tenemos;

$$\begin{array}{c} 4+1+1+3+5+2=16 \\ 3(2+5+2+2+8+5)=72 \end{array} \quad 16+72=88 \quad \text{El dígito de control es} \quad 2$$

Asi los dígitos de control son totalmente distintos.

c) Intercambiado dos de los doce primeros dígitos ¿se obtiene el mismo dígito de control?

Si se intercambia dos de los dígitos no siempre se obtendrá el mismo código de control.

Si los dígitos se intercambian de una posición par a una posición par o de una posición impar a una impar el dígito de control sera el mismo.

Si se intercambia de el dígito de una posición par a una impar, estaria cambiando el dígito de control.

Por ejemplo:

Tenemos el código 421511325825, donde el dígito de control es 5.

Intercambiamos de posición 2 dígitos del código:

La posición 0 por la 1, así tenemos el siguiente código:

241511325825

Calculemos el dígito de control

$$\begin{array}{c} 2+1+1+3+5+2=14 \\ 3(4+5+1+2+8+5)=75 \end{array} : \quad 14+75=89 \quad \text{El dígito de control es} \quad 1$$

Responde:

6. ¿Cuántos códigos tienen el mismo dígito verificador?

El algoritmo anterior sólo detecta errores en la captura de los dígitos del código de barras lo cual es insuficiente porque como ya revisamos sólo nos indica la existencia del error pero no es capaz de corregirlo, por lo tanto veremos un algoritmo que nos ayude a la detección y corrección de los errores de una manera más eficiente. Para ello es necesario que nuestro código de barras sea convertido a una expresión en código binario, es decir, a una codificación digital.

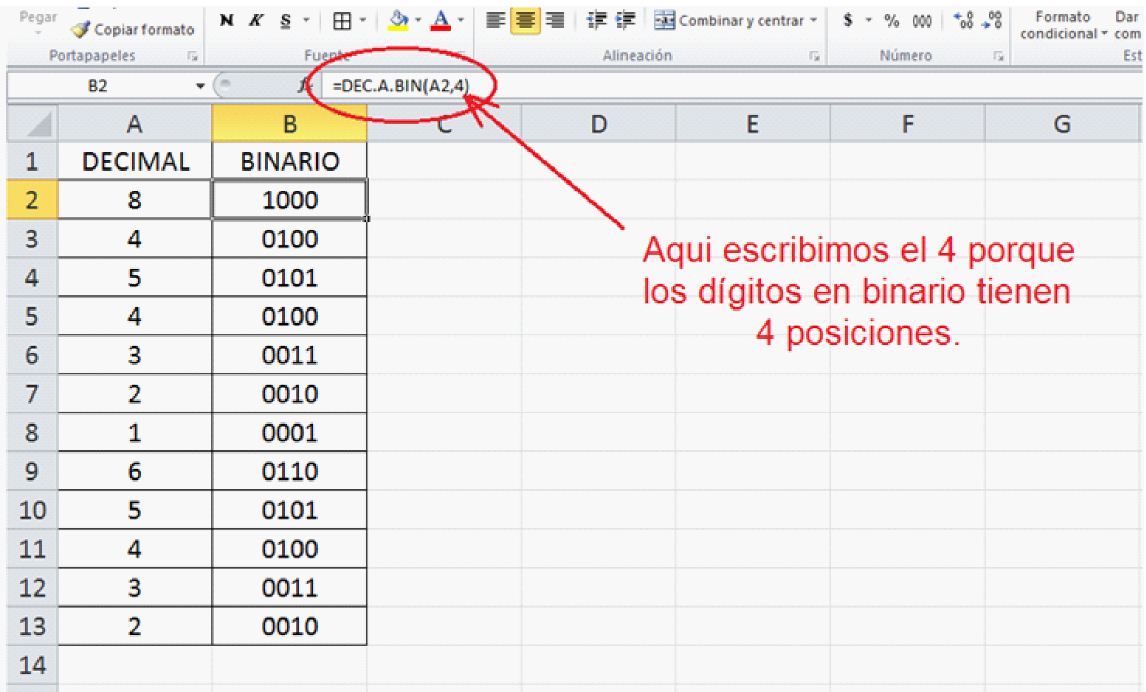
Actualmente la información, se encuentra codificada a una sucesión de señales binarias, de "bits", que se pueden asimilar matemáticamente a "0" y "1". La codificación se define como traducir un mensaje escrito a números utilizando código ASCII, acrónimo inglés de American Standard Code for Information Interchange, que fue creado en 1963 por iniciativa de un comité de la American Standards Association (ASA). Este código representa los caracteres tipográficos basados en el alfabeto latino mediante conjuntos de ocho bits, denominados octetos. La tabla siguiente da la equivalencia numérica de los diez dígitos en ASCII.

Dígito	Representación binaria
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Una de las grandes ventajas de la digitalización es que permite someter a los mensajes a un tratamiento aritmético. Para ello capturemos nuestro código de barras y transformémoslo a código binario con ayuda de Excel y veremos como funciona un algoritmo de detección de errores en el llamado $\mathbb{Z}_2$, dado que solo utiliza el 0 y el 1.

Ejemplo:

Toma un código de barras 8 4 5 4 3 2 1 6 5 4 3 2. Para cada dígito se tiene su correspondiente en binario. En excel usa la función $= DEC.A.BIN(celda, posción)$.



	A	B
1	DECIMAL	BINARIO
2	8	1000
3	4	0100
4	5	0101
5	4	0100
6	3	0011
7	2	0010
8	1	0001
9	6	0110
10	5	0101
11	4	0100
12	3	0011
13	2	0010

Para detectar y corregir un error de un código de barras realiza lo siguiente:

10. a) Define la matriz $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, y la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Toma el primer número 8 pero en binario, es decir 1000. Escribelo de manera matricial como $V_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Realiza la multiplicación GV_8 puedes usar Scientific WorkPlace para multiplicar matrices como ya se vió en la práctica 1 del Tesoro del Pirata.

Nota: El producto de matrices se realizará de la manera usual, recuerda que se esta trabajando con un sistema binario entonces las operaciones de suma y mutiplicación se definen de la siguiente manera:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Producto

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Adición

Además se satisface la propiedad asociativa para la adición, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1+1+1 &= (1+1)+1 \\ &= 0+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $GV_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Observa que la matriz resultante en el paso anterior contiene a V_8 y otros tres números más.

Separa entonces en dos vectores:
$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
donde $v_1 = V_8$ y v_2 es un vector fijo, que es el que permite ver si existe un error al momento de capturar un número de un código de barras.

e) Escribe el número correspondiente al código de barras en binario en este caso 1000 y agrega v_2

formando un vector $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) Verifica si se cometio un error al capturar el código de barras multiplicando P y V. Si el resultado es el vector cero la captura es correcta, si es distinto de cero existe un error.

Primero prueba para cuando es correcto, entonces $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$PV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ por lo tanto no hay error}$$

Ahora supongamos que hubo un error de captura, en el primer dígito del código de barras, supongamos que en lugar de 8, en binario 1000, se capturo 1100, luego $v_8 = 1100$, entonces

$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (recuerda que hay que agregar al vector v_2), entonces

$$PV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1+1 \\ 1+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ por lo tanto tenemos un error.}$$

g) Para corregir el error observa que el vector $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ que se obtuvo en el paso enterior coincide con la $2^{\underline{a}}$ columna de la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Entonces eso indica que el error se cometió en la $2^{\underline{a}}$ entrada del vector $V_8 = 1100$. Por lo tanto hay que corregir ese número en este caso 1 por 0, ya que en el sitemas binario solo hay 0 y 1, para obtener el vector correcto $V_8 = 1000$, que es la representación binaria de 8.

11. Utilizando el mismo procedimiento prueba con los números restantes del código de barras.

CONCLUSIONES

Actualmente se puede observar que los códigos de barras se están integrando en varios elementos de nuestra vida, los podemos enontrar en los super mercados, tiendas de cualquier tipo, farmacias, etc. Los códigos de barras codifican números y letras que guardan cierta información, existen lectores para los códigos de barras para dar el precio al cobrar, revisas algunas carecteristicas del producto, entre otras cosas, en esta práctica se dio una pequeña introducción al mundo de los códigos de barras.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación del Cálculo

DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE UN CÍRCULO

Al periodo comprendido entre 800 a.C. al 800 d.C. se le denomina a veces como la Edad Talásica, es decir, como la edad del mar, porque La Meca del mundo se sitúa en los alrededores del Mar Mediterráneo y del Mar Negro. En esta práctica nos centraremos en esta época y en esas partes del mundo, con grandes personajes de la historia de las Matemáticas conocidos como los griegos clásicos.

La historia de los griegos se remonta al segundo milenio a.C. cuando procedentes del norte presionaron implacablemente como invasores desprovistos de cultura alguna, y sin embargo, parecen haberse mostrado ansiosos de aprender, se apropiaron de la materia de tal manera que la organizaron para dar inicios a su propia ciencia.

Los primeros Juegos Olímpicos se celebraron en el año 776 a.C. con esto se muestra que la civilización naciente se unificaba y que los deportes formaban parte de su vida. Por esa época también ya se había desarrollado la literatura griega, como ponen en evidencia las obras de Homero o por lo menos disponemos de una tradición que le atribuye ciertas obras literarias que, trasmitidas al principio de manera oral de generación en generación, finalmente fueron escritas y se han conservado para la posteridad.

En lo que se refiere a Matemáticas, basta con decir que a esta época se le conoce como la Época Heroica de las Matemáticas, surgen grandes genios de esta ciencia, que con tan pocos descubrimientos lograron lo que en ninguna otra época se ha visto. Aquí ligaremos el trabajo de tres de ellos; Anaxágoras, Eudoxo y el gran Arquímedes.

Anaxágoras de Clazomene (500-428 a. C) , se le atribuye ser uno de los primeros en resolver problemas usando simplemente regla y compás, fue puesto en prisión al afirmar que el Sol no era un dios y que la Luna reflejaba la luz del Sol, durante su estancia en prisión trabajo en la cuadratura del circulo, a partir de aquí nos encontramos con la noción de los problemas con regla y compás, y con el primero de los tres problemas clasicos (Cuadratura del círculo, trisección del ángulo, duplicación del cubo).

El primer problema clasico consite en obtener un cuadrado cuya área fuera igual a la de un círculo dado, Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, pero este problema no pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó ser el paradigma de lo imposible.

Para obtener el área de un círculo es importate conocer el valor de π, ya que como sabemos $A = \pi r^2$. Árquimides de Siracusa (287-212 a. C.) fue uno de los primeros en acercarse al valor de π, su método consistio en inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia y calcular el perímetro de los polígonos utilizados, empezó con un hexágono hasta llegar a un polígono de 96 lados, y concluyó que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, a este proceso geométrico de aproximación, se le conoce como Método de Exahución, atribuido a Eudoxo de Cnido (ft. ca. 390 a.c.-339 a.c.). Este método es el antecesor para el descubrimiento del Cálculo Integral, quien entre otras cosas, nos ayuda a determinar el área de las figuras curvilíneas.

A continuación mencionaremos algunas fórmulas y definiciones básicas que son de gran importancia para la práctica.

Definición

La porción de una línea recta comprendida entre dos puntos se llama **segmento rectilíneo** o simplemente *s***egmento**. Como en la figura 1, para la recta l, AB es un segmento cuyos extremos son el punto A y el punto B.

Figura 1.

Observa que los segmentos comienzan en punto y terminan en punto y las rectas no, son líneas que se prolongan a ambos lados indefinidamente.

Definición

La recta que pasa por el vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales , se llama **bisectriz**.

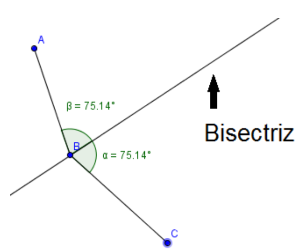


Figura 2.

Definición

Un **polígono** es la figura plana cerrada formada por n segmentos rectos consecutivos no colineales llamados lados que son segmentos rectos consecutivos no colineales, los puntos de intersección de los lados se llaman vértices.

Algunas definiciones relevantes a las definiciones son las siguientes:

1. En la figura 3, observe que AF y FE son segmentos diferentes, pero son colineales y consecutivos. F no es vértice del polígono, ya que se tienen sólo el lado AE por definición del polígono (segmentos rectos consecutivos no colineales).

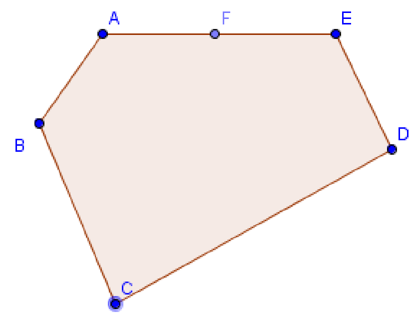


Figura 3. Polígono de 5 lados.

2. En la figura 4 GH y KL son segmentos rectos colineales pero no consecutivos, lo cual no contradice la definición.

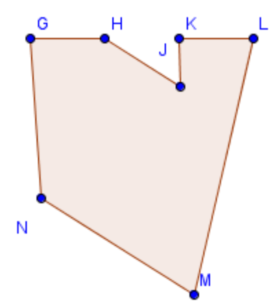


Figura 4. Polígono de 7 lados.

3. Observe la figura 5 es un ejemplo de polígono de 6 lados.

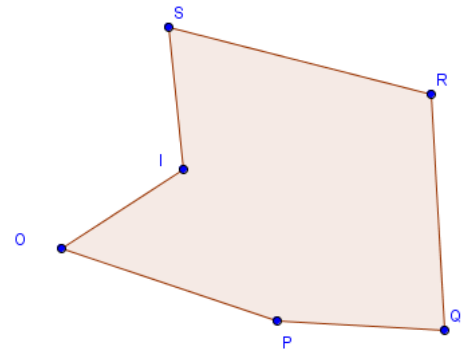


Figura 5. Polígono de 6 lados.

Definición

Un **polígono regular o equilátero** es aquel que cumple con la definición de polígono y que además todos sus lados tienen la misma longitud y cuyos ángulos internos son todos iguales.

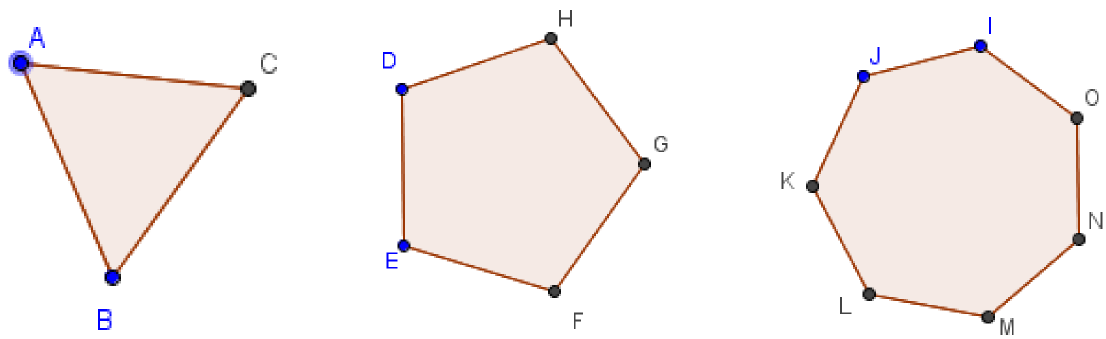


Figura 6. Ejemplos de polígonos regulares o equiláteros.

Definición

La **diagonal de un polígono** es un segmento cuyos extremos son dos vétices no cosecutivos.

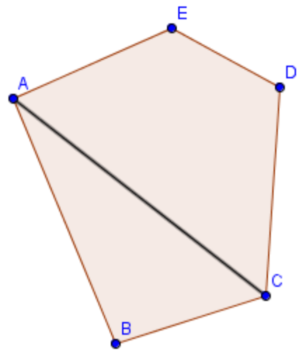
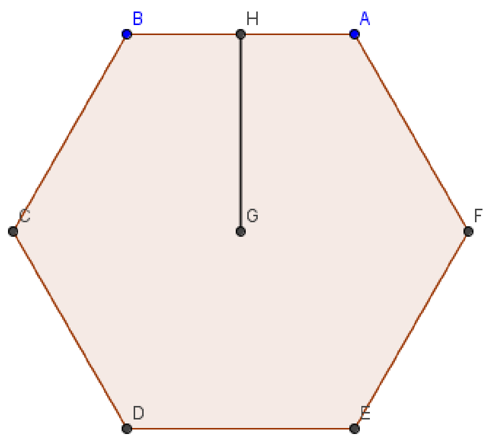


Figura 7. AC es la diagonal del polígono.

Definición

La **apotema** del polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado.



H es el punto medio de BA y G el centro del polígono, así GH es la apotema del polígono.

Figura 8.

Área de un polígono regular

$$A = \frac{(Perímetro)(apotema)}{2} = \frac{Pa}{2}, \text{ donde } \begin{array}{c} P = Perímetro \\ a = apotema \end{array}$$

Área del Círculo

$$A = \pi r^2, \text{ donde } r = radio.$$

DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE UN CÍRCULO

ACTIVIDAD

El objetivo de la práctica es calcular el área del círculo sin utilizar la fórmula $\acute{a}rea_{\varsigma} = \pi r^2$, realizando el mismo procedimieto que utilizo Arquímedes de Siracusa para calcular el valor de π.

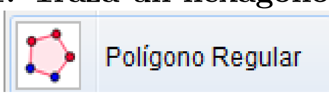
Se comenzará con un hexágono para déspues duplicar el número de lados, hasta tener un polígono de 196 lados, así acercarnos al área de la círculo.

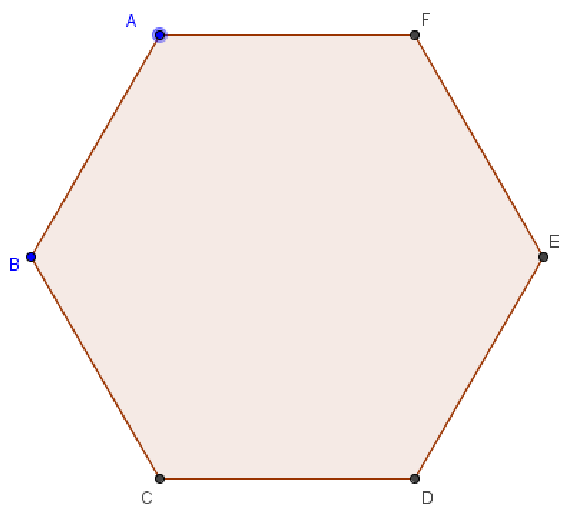
Software: GeoGebra

PROCEDIMIENTO

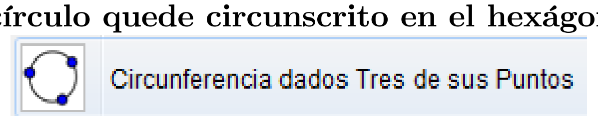
Antes de comenzar, es importante recomendar que en cada paso se vaya observando la figura dada para evitar confusiones.

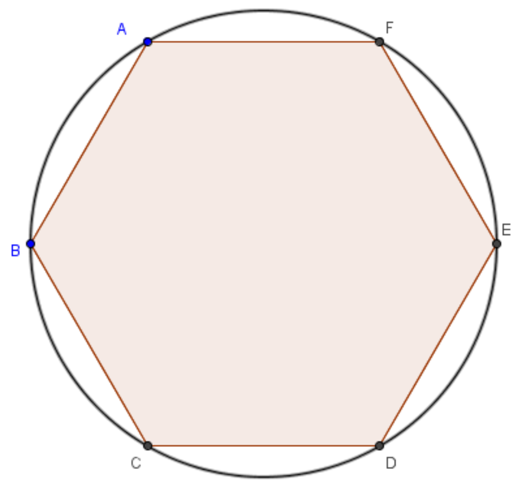
1. Traza un hexágono dando dos puntos.





2. Traza una circunferencia dados 3 puntos (vértices del hexágono) de tal manera que el círculo quede circunscrito en el hexágono.

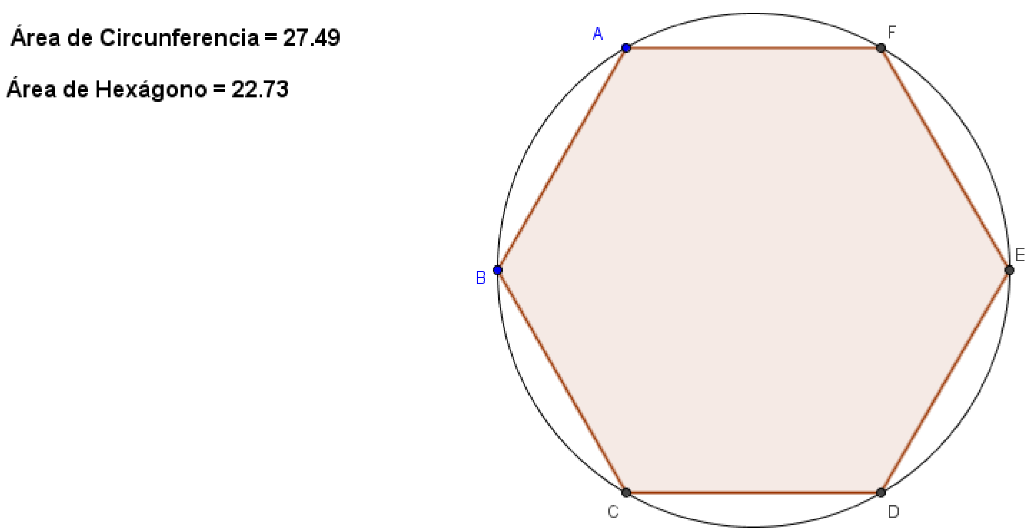




3.Compara el área del círculo con el área de la circunferencia.

Para calcular áreas, selecciona el ícono 

y da clic sobre el polígono, circunferencia o cualquier objeto.



Automáticamente aparecen las etiquetas:

Área de Circunferencia = 27.49 y **Área de Hexágono = 22.73**

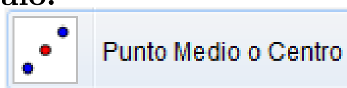
que podrán ser modificadas dando doble clic sobre cada una.

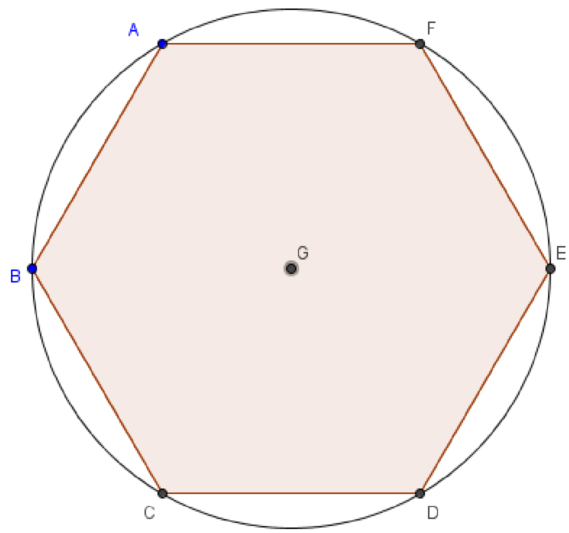
Se observa que el área del hexágono es menor al área de la circunferencia, ya que hay áreas circulares que no se cubren.

Inscribir un polígono de 12 lados en la circunferencia.

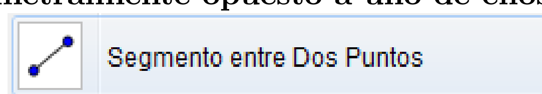
Vamos a inscribir polígonos, duplicando el número de lados del polígono anterior, con el método utilizado por Arquímedes que se describe y justifica en el Apéndice 1.

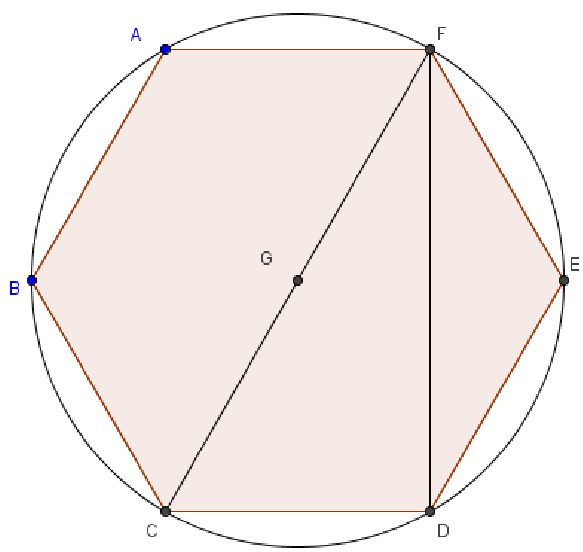
4. Traza el punto medio G entre dos vértices opuestos, punto que será el centro del círculo.



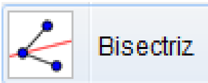


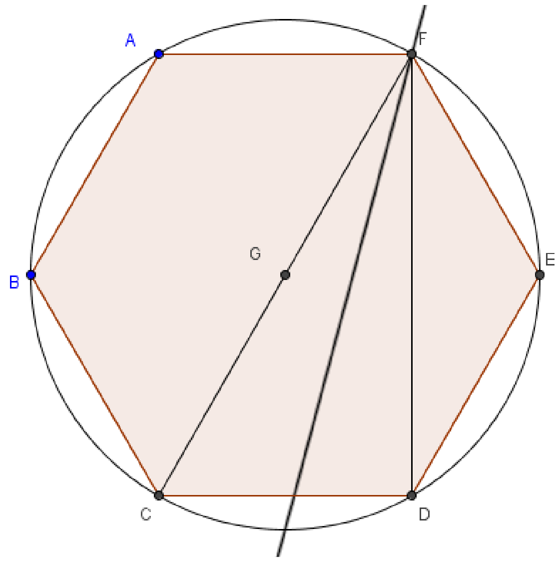
5. Traza las diagonales FC y FD, donde C y D son vértices consecutivos y F es diametralmente opuesto a uno de ellos y el punto G es elemento del segmento FC.



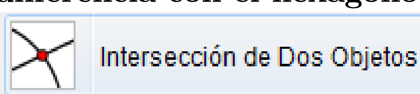


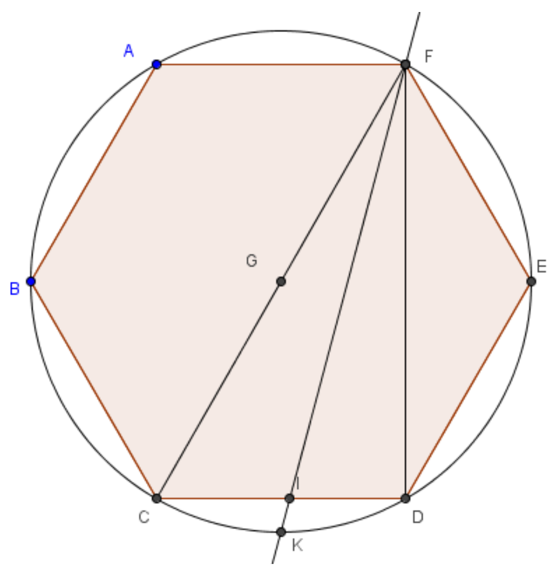
6. Traza la bisectriz del ángulo $\sphericalangle DFC$.



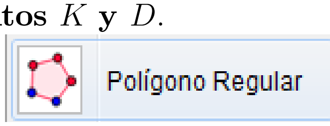


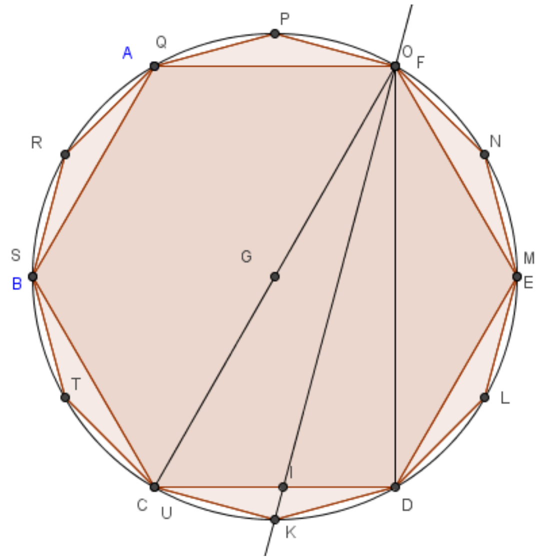
7. Marca los puntos de intersección, de la bisectriz con la circunferencia (K) y , de la circunferencia con el hexágono (I).



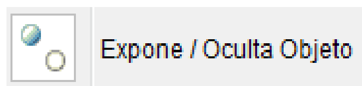


8. Traza un polígono regular de 12 lados que tenga como vértices consecutivos los puntos K y D.

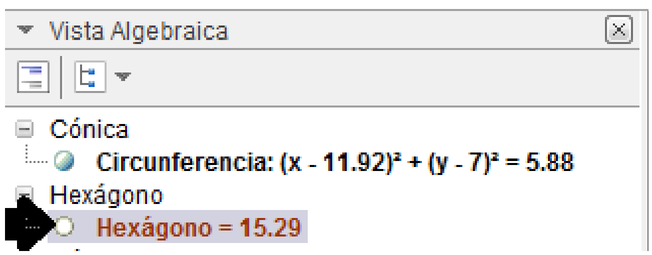




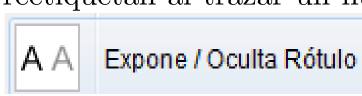
9. Oculta todos los elementos que no sean necesarios de tal manera que solo se observe la circunferencia y el polígono de 12 lados.

Los objetos se ocultan con la opción 

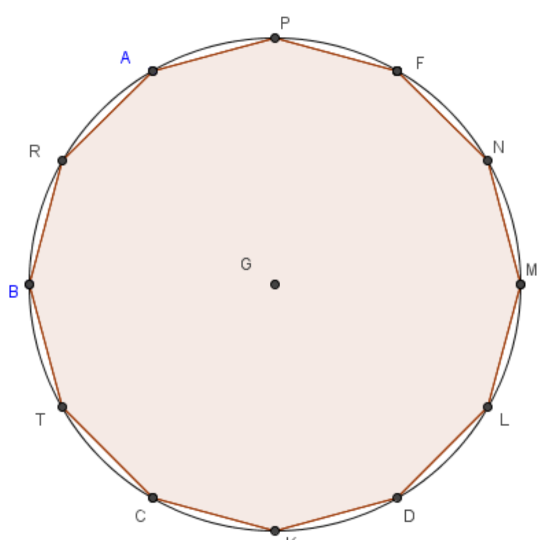
o dando clic directamente sobre el objeto desde la vista algebraica.



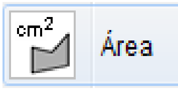
.

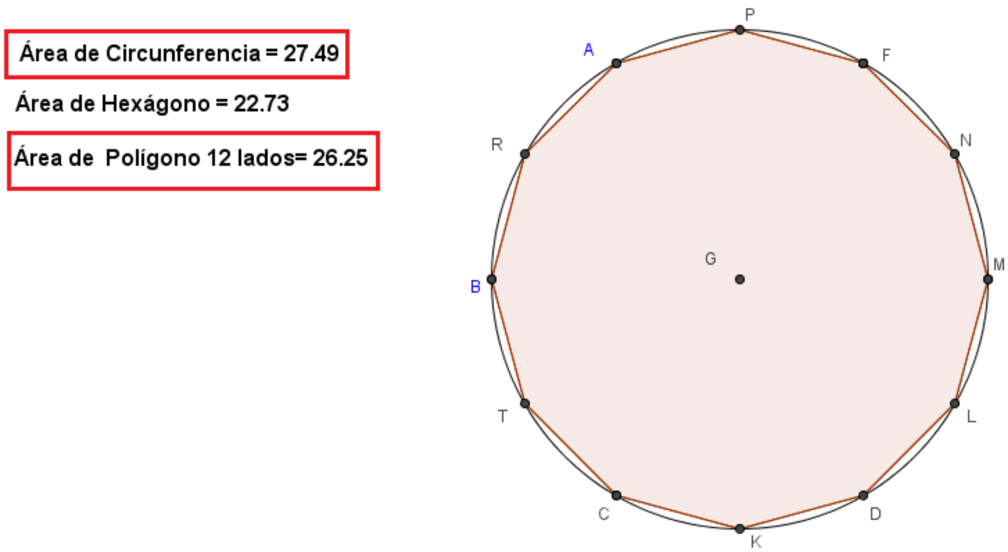
Observese que los vértices se reetiquetan al trazar un nuevo objeto, por lo que es necesario ocultar algunas etiquetas con la opción 

.



10. Calcula y compara las áreas de la circunferencia y el polígono de 12 lados.



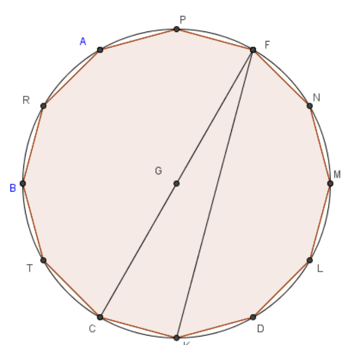


El área del polígono de 12 lados aún es menor al área de la circunferencia pero la diferencia es también menor, comparada con el hexágono ya que se ha cubierto un área más grande incribiendo un polígono con un número mayor de lados.

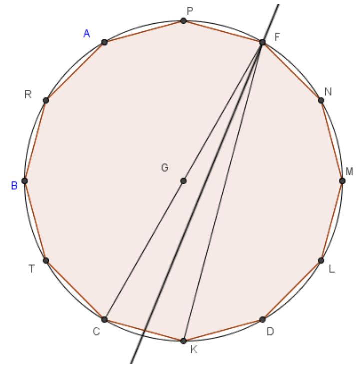
Inscribir un polígono de 24 lados en la circunferencia.

Para inscribir el polígono de 24 lados en la circunferencia se repetirán algunos de los pasos anteriones

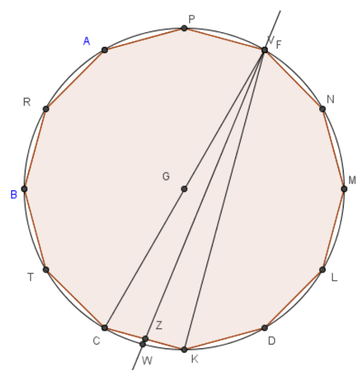
11. Traza las diagonales FC y FK.



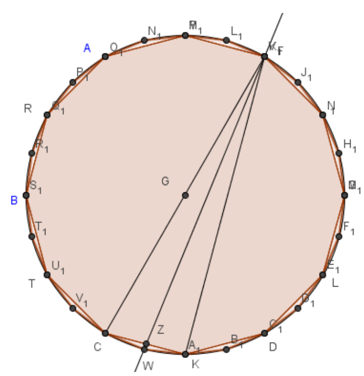
12. Traza la bisectriz $\sphericalangle KFC$



13. Marca los puntos de intersección, intersección de la circunferencia con la bisectriz (W) y , intersección del polígono de 12 lados y bisectriz (Z).

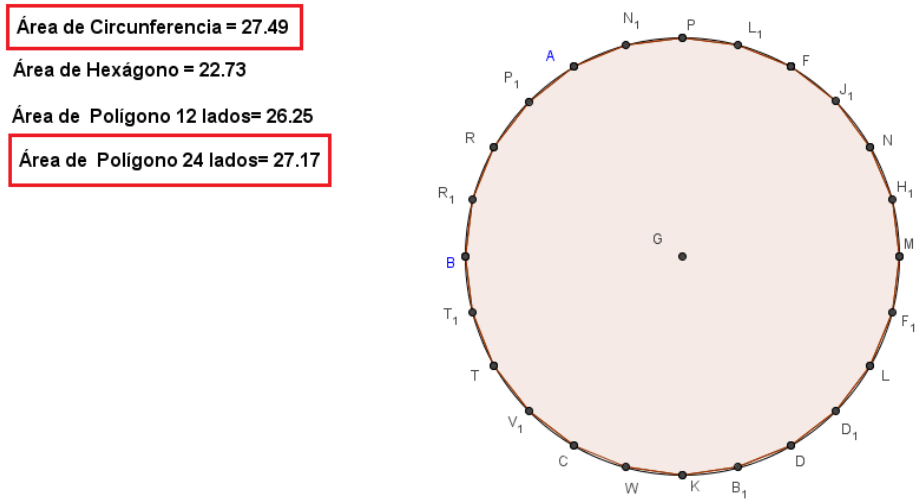


14. Traza un polígono de 24 lados que tenga como vértices consecutivos los puntos C **y** W.



15. Oculta objetos y etiquetas para tener una vista más clara del polígono de 24 lados y la circunferencia.

16. Calcula y compara el área del polígono de 24 lados con el área de la circunferencia.

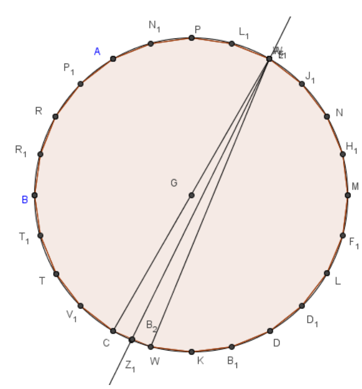


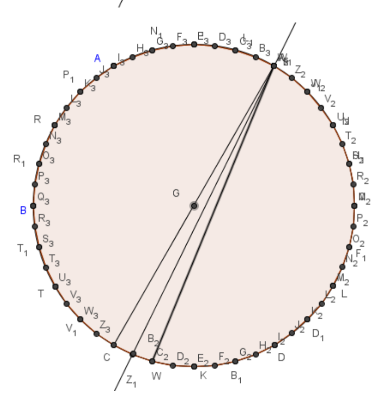
Mientras aumenta el número de lados de un polígono, la diferencia de áreas disminuye, ahora para el polígono de 24 lados el área es de 27.17, observe que siguen sin cubrirse áreas circulares.

.Inscribir un polígono de 48 lados en la circunferencia.

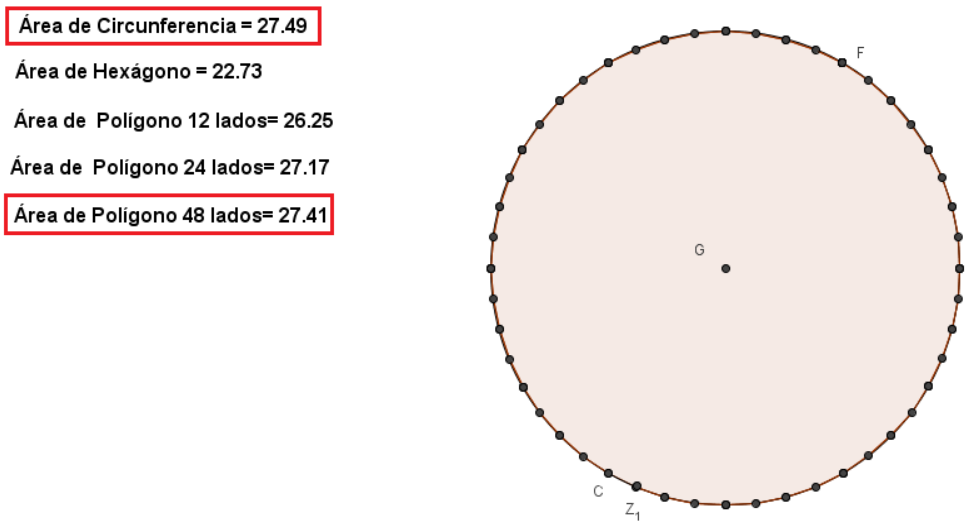
17.**Incribir un polígono de 48 lados en la circunferencia**

Se realizarán los pasos antes mencionados para trazar el polígono.

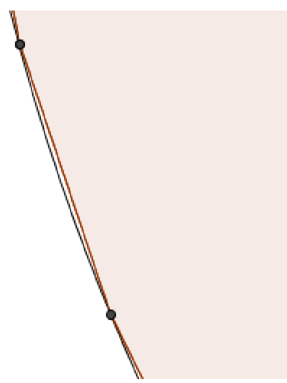




18. Ocultar objetos innecesarios. Calcula y compara las áreas del polígono de 48 lados y la circenferencia.



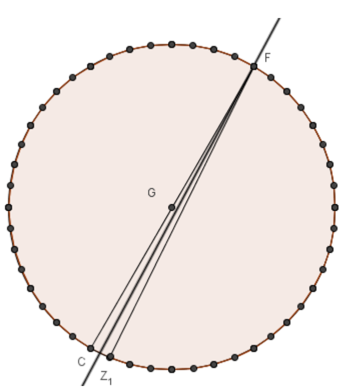
El área de los polígonos incritos se acercan al área de la circunferencia mientras se tenga un múmero mayor de lados, el área de la circenferencia es de 27.49, mientras que el área del polígono de 48 lados es de 27.41. se puede observar que el área que se cubre cada vez es mayor.

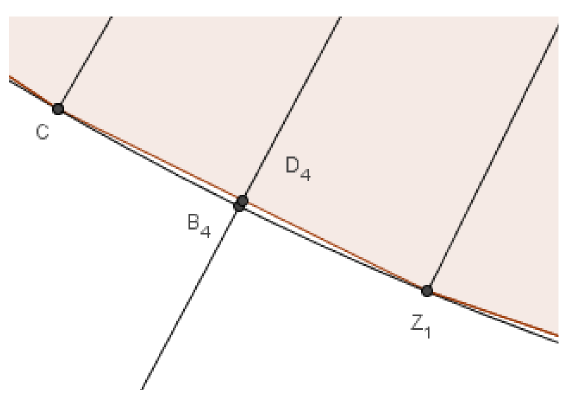


Inscribir un polígono de 96 lados en la circunferencia.

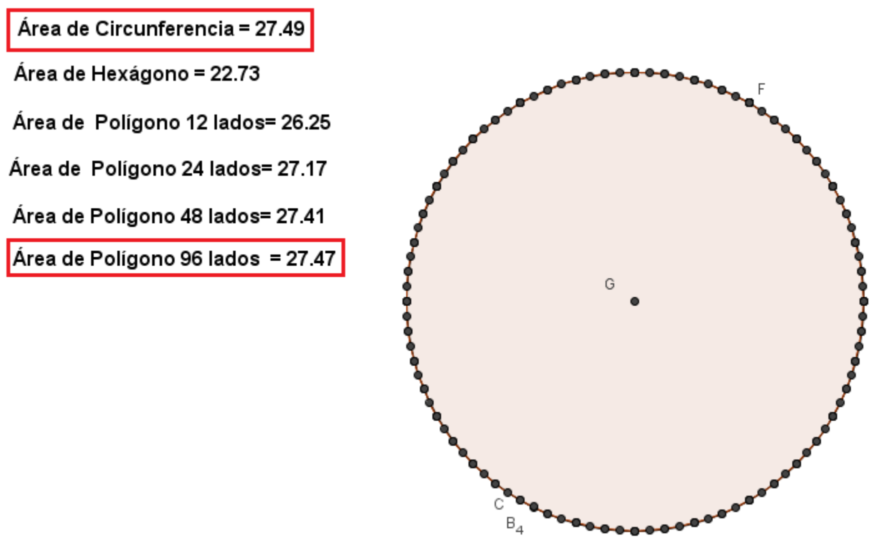
17.**Incribir un polígono de 96 lados en la circunferencia**

Se realizarán los pasos antes mencionados para trazar el polígono.



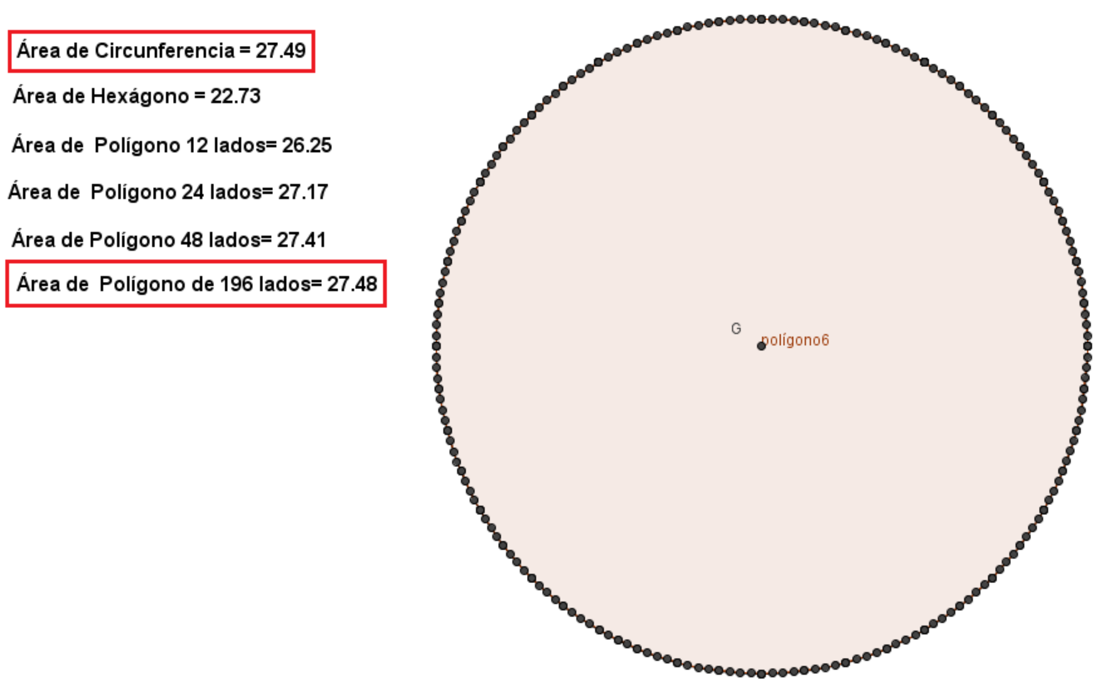


18. Oculta los objetos innecesarios. Calcula y compara las áreas del polígono de 96 lados y la circunferencia.



El área del polígono de 96 lados es de 27.47, el polígono de 96 lados aún no cubre en su totalidad al círculo. Cabe resaltar que el polígono más grande que Arquímedes inscribio en la circunfrencia es el de 96 lados.

Geogebra facilita el procedimiento, por lo que se contunuará inscribiendo un polígono de 192 lados en la circunferencia.



Finalmente observa que las áreas de la circunferencia y el polígono de 196 lados practicamente son iguales, considerando la potencia del Software.

CONCLUSIONES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación de la Geometría

GERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La Geometría es una rama de las Matemáticas que estudia, entre otras cosas, las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio. La aplicación de la Geometría es muy extensa, se puede apreciar en el arte, la arquitectura, la física, la música, etcétera, además podemos mencionar que la naturaleza tiene un lenguaje geométrico, pensemos en un caracol, la Geometría se hace presente en su espiral, o en una flor, o quizás en una manzana cortada horizontalmente.

Figura 1

Uno de los personajes que más ha influido en la Geometría es Euclides de Alejandría, su obra más conocida son los Elementos, obra de gran importancia para la Historia de las Mateméticas, ha sido después de la Biblia, la obra de mayor número de ediciones en la historia de la imprenta. Está constituida por trece libros, cada uno consta de proposiciones, que son basadas en un conjunto de axiomas y definiciones que enuncia al principio de la obra. Lo´primero que aparece son 23 definiciones que continuación se mencionan:

Definiciones

1. Un punto es lo que no tiene partes.

2. Una línea es una longitud sin anchura.

3. Los extremos de una línea son puntos.

4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

5. Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.

6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
11. Ángulo obtuso es el (ángulo) mayor que un recto.
12. Ángulo agudo es el (ángulo) menor que un recto.
13. Un límite es aquel que es extremo de algo.
14. Una figura es lo contenido por uno o varios límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo.
17. Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro rectas.
20. De entre las figuras triláteras, triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, isósceles la que tiene solo dos lados iguales, y escaleno la que tiene los tres lados desiguales.
21. Además de entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.

22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátero ni rectangular; y llámese trapecios a las demás figuras cuadriláteras.

23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Al término de las 23 definiciones aparecen cinco famosos postulados que a continuación se enuncian;

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.

4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.

5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Ninguna proposición ha sido tan discutida como la quinta que acabamos de mencionar, la controversia consiste en determinar si requería demostración, dando origen a las llamadas Geometrías no Euclidianas, luego, la Geometría que admite esta proposición sin demostración llevan el nombre de Geometría Euclidiana, en honor al gran ordenador de la Geometría Griega.

En la Geometría Euclidiana, los postulados y axiomas exponen las bases esenciales de la rama, y de las demostraciones deductivas. Es importante mencionar en este punto la diferencia entre mostrar y demostrar. La etimología de las palabras mostrar y demostrar nos indican la separación de estos conceptos. Mostrar proviene del latín *Monstrare* que significa “indicar, advertir”. Señalar una cosa para que se vea. El prefijo “de” se proviene en este caso del latín “De”, “apartarse de”, así Demostrar es: “apartarse de lo que se muestra”, en este sentido una demostración va más allá de lo que "ven" nuestros ojos, demostrar constituye un acto de *inteligir*, *juzgar* y *razonar*, como dice Carlos Torres (Torres, 2004), sin embargo, los humanos ejercen la facultad de raciocinio cuando simplemente "ven" una verdad [...] sólo los ángeles pueden ver, siempre y en todo lugar, todas las verdades, Euclides fue uno de ellos, al organizar toda o casi toda la Matemática de la Grecia Clásica de una manera sistemática y deductiva. Su primer libro de los *Elementos*, términa elegantemente con uno de los teoremas más conocidos en el mundo, *el Teorema de Pitágoras*, el cual demuestra en la proposición 47, y lo menciona como sigue:

En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Es importante hacer notar la forma en que Euclides redacto la proposición, dado que no utiliza los términos; cateto e hipotenusa, es decir, únicamente los nombro "lados".

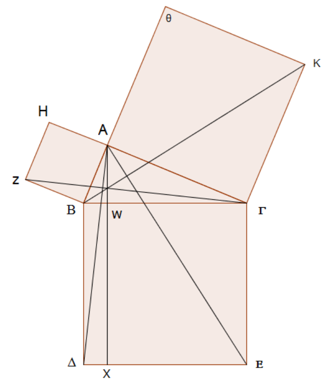


Figura 2

La demostración de Euclides al Teorema de Pitágoras, es famosa por la figura que utiliza, a la cual se le han asignado diversos nombres, como por ejemplo; la silla de la novia o los calzones de Pitágoras (figura 2). Para demostrar el teorema, prueba que el área del rectángulo $BWX\triangle$ es igual al área del cuadrado $HABZ$ y que el área del rectángulo $W\Gamma EX$ es igual al área del cuadrado $\theta K\Gamma A$, luego la suma de las áreas de los rectángulos $BWX\triangle$ y $W\Gamma EX$ es igual al área del cuadrado $B\Gamma E\triangle$, esto implica que el área del cuadrado $B\Gamma E\triangle$ sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados $HABZ$ y $\theta K\Gamma A$.

Muy pocos conocen de la existencia del recíproco del Teorema de Pitágoras, Euclides la demuestra en la proposición 48 del libro I de los *Elementos,* como sigue:

Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual al cuadrado de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

La demostración de la proposición se basa en la figura 3, donde Euclides traza un triángulo cualquiera $\Gamma\Lambda B$ que cumple que $(\Gamma\Lambda)^2 + (\Lambda B) = (B\Gamma)^2$, luego traza el ángulo $\sphericalangle \triangle \Lambda\Gamma$ recto, después prueba que el triángulo $\triangle\Lambda\Gamma$ y el triángulo $\Gamma\Lambda B$ son congruentes, por lo que el ángulo $\sphericalangle\Gamma\Lambda B$ es recto.

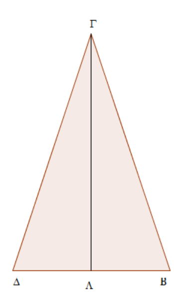


Figura 3

Es así como demuestra que si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto. Luego el Teorema de Pitágoras se convierte en un si y sólo si, sin embargo, se le llama Teorema de Pitágoras sólo a la ida, es decir, a la proposición 47.

Luego si tenemos un triángulo rectángulo y dibujamos cuadrados en sus lados se cumple que $a^2+b^2 = c^2$, ahora pensemos en lo que pasaría si dibujaramos pentágonos o una figura irregular en los lados, en vez de cuadrados ¿Se cumplirá que la suma de las áreas de las figuras dibujadas sobre los catetos es igual a el área de la figura dibujada sobre la hipotenusa?.

Esta pregunta es la que nos inspira la siguiente práctica.

GERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

En la siguiente práctica se mostrara la generalización del Teorema de Pitágoras, creemos que si se realiza en papel puede ser complicado por el trabajo que implica al momento de trazar o medir el área de las figuras, por lo que proponemos utilizar un software, además en papel se estaría trabajando con una figura fija, donde si se quiere estudiar otro caso se tiene que dibujar otra figura, lo que genera invertir más tiempo y esfuerzo, para esto diseñaremos un "applet" que cumpla con nuestras necesidades.

ACTIVIDAD

Mostrar la generalización del Teorema de Pitágoras, es decir, el área de una figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos.

Software: GeoGebra

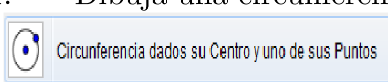
PROCEDIMIENTO

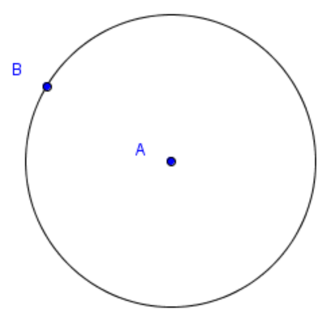
El Teorema de Pitágoras dice; en un triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, sin embargo, nosotros vamos a construir cualquier polígono, siempre que seán proporcionales u homóteticos.

A continuación describimos los pasos para trazar en los lados de un triángulo rectángulo polígonos homotéticos.

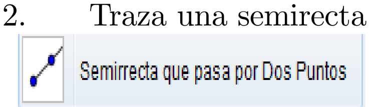
PASOS:

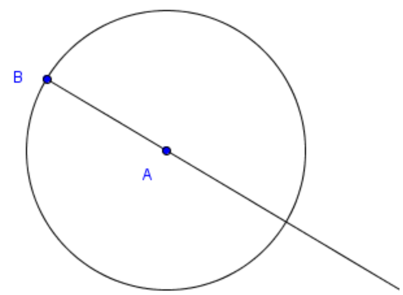
1. Dibuja una circunferencia dado el centro y uno de sus puntos B.



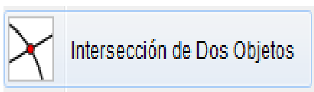


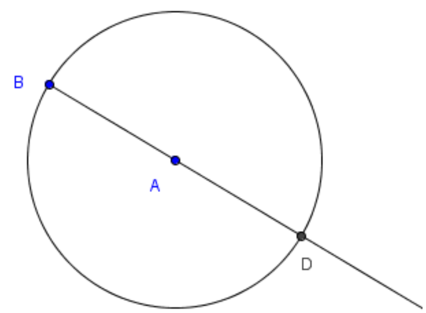
2. Traza una semirecta que pase por el punto B y el centro A .



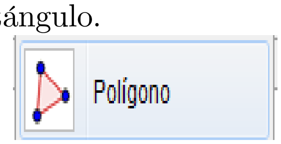


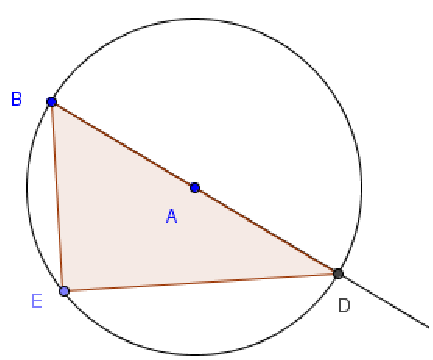
3. Halla la intersección entre la circunferencia y la semirecta.





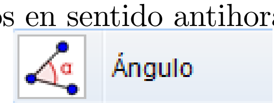
4. Sea E un punto en la circunferencia distinto a las interseccióñes de la circunferencia y la semirecta. Traza un triángulo que pase por B, D y E, luego como abarca un diametro es triángulo rectángulo.

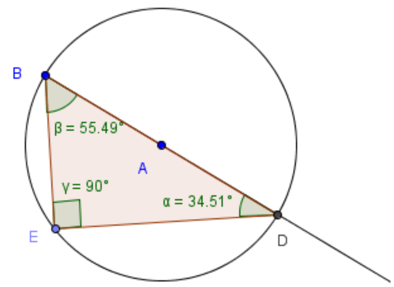




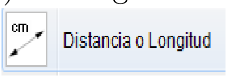
5. Calcula :

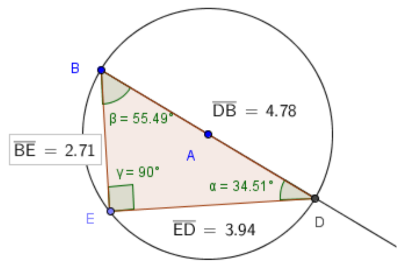
a) Los ángulos interiores del triángulo rectángulo. Observa que GeoGebra trabaja los ángulos positivos en sentido antihorario.



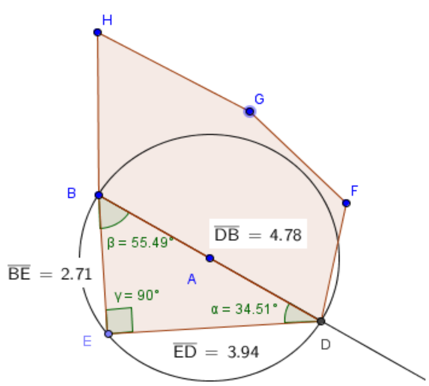


b) La longitud de los lados del triángulo

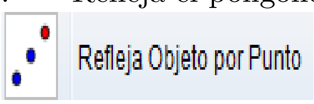


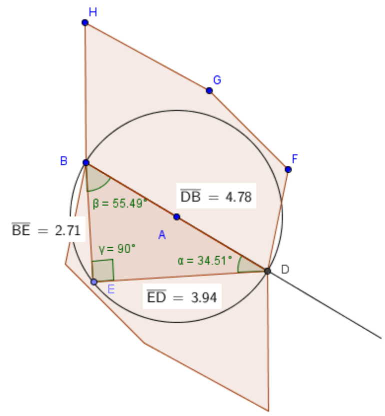


6. Traza un polígono cualquiera sobre la hipotenusa del triángulo.



7. Refleja el polígono respecto al centro de la circunferencia (A).

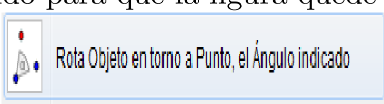




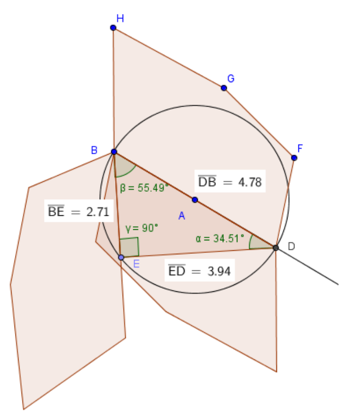
NOTA:

Se pueden ocultar los objetos que no sean necesarios, por ejemplo las etiquetas de los vértices del polígono que ha sido reflejado.

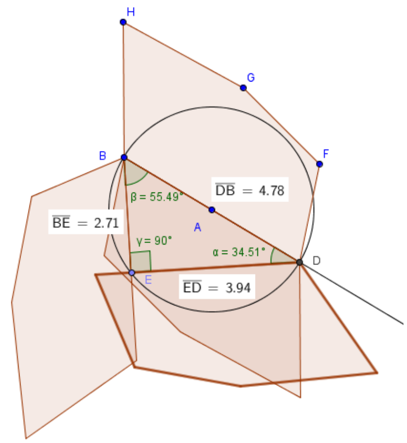
8. Rota el polígono que hemos reflejado para que sea adyacente a cada cateto, identificando el sentido para que la figura quede sobre cada cateto.



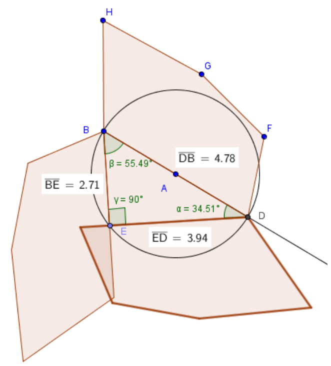
a) ángulo β, sentido horario.



b) ángulo α, sentido antihorario

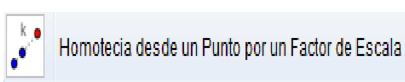


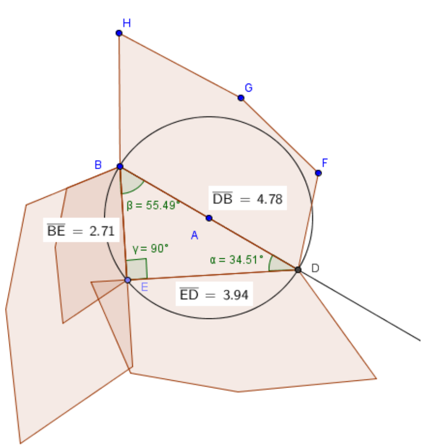
9. Oculta el polígono que se reflejo en el paso 7.



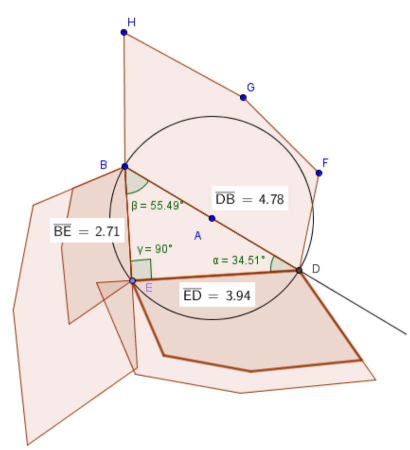
10. Traza polígonos homotéticos al poligono ORIGINAL sobre los catetos, con una razón igual

$$\frac{distancia(CATETO)}{distancia(HIPOTENUSA)}$$



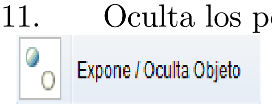


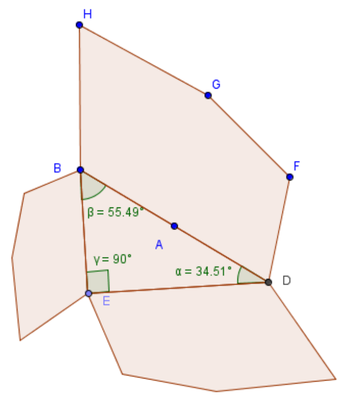
$$\frac{distanciaBE}{dis\tan ciaDB}$$



$$\frac{dis\tan ciaED}{dis\tan ciaDB}$$

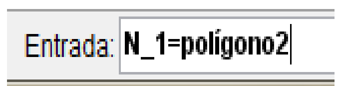
11. Oculta los polígonos, circunferencia, semirecta, etcetéra, que no sean necesarios.



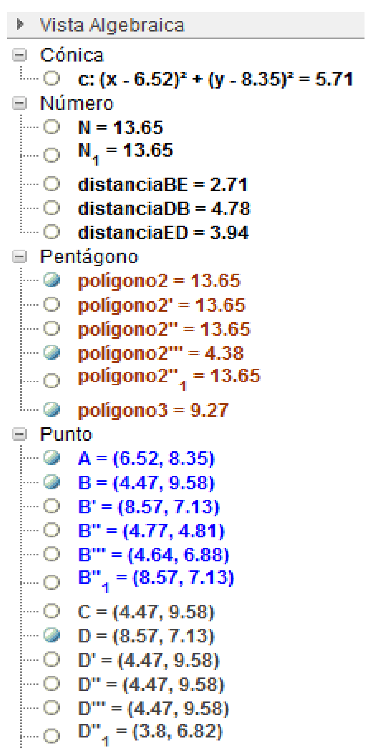


12. a) Sea N un número igual a la suma de las áreas de los polígonos homoteticos trazados sobre los catetos. Declara a N, como se ve a continuacion:

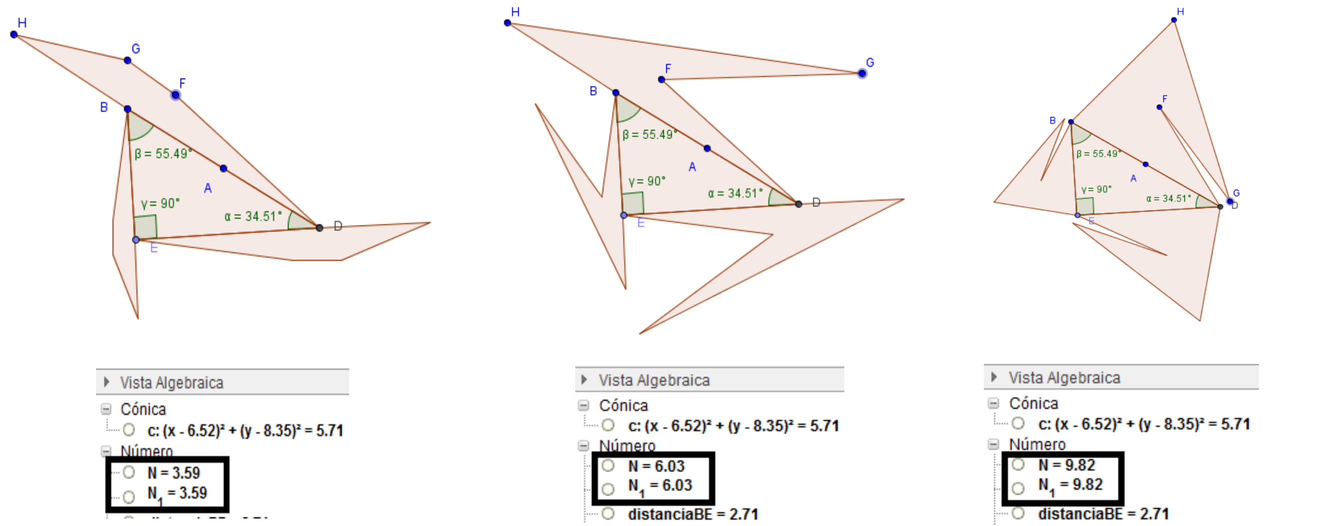
b) Sea N_1 un número igual al área del polígono trazado sobre la hipotenusa. Declara N_1.



La ETIQUETA y CATEGORIA de cada objeto es señalada sobre la vista Álgebraica.



Una vez que hemos obtenido el "applet" podemos mover los vértices del polígono trazado en la hipotenusa e ir comparando el valor de N y N_1.



Observa que el Teorema de Pitágoras se cumple para figuras homotéticas trazadas en los lados de un triángulo rectángulo, no importa su número de lados o si son figuras regulares, a esto le llamamos generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos y polígonos sobre sus lados.

CONCLUSIONES

Podemos observar una generalización del Teorema de Pitágoras, lo cual nos sirve para ver más allá de lo que ven nuestros ojos y reflexionar sobre los Teoremas que hemos usado durante gran parte de nuestras vidas, en especial este Teorema que, empíricamente es usado hasta por los maestros albañiles, además creemos que la práctica nos servirá para contemplar la belleza y alcance que tienen conceptos tan simples y elegantes como estos, así como para recordar principios básicos de Geometría, por ejemplo, garantizar que si inscribimos un ángulo que abarca un diametro en una circunferencia y uno de sus lados coincide con el díametro, el ángulo es recto, famosa proposición que demostraría por primera vez en la historia Tales de Mileto (c. 624 a. C. - c. 546 a. C.).

Una observación más profunda, nos lleva a pensar, que ni de los egipcios (c. 8000 a. C. - c. 2600 a. C.) y mucho menos de la escuela Pitagórica (Pitágoras (c. 580 a.C. - c. 495 a. C.)) se conoce como una demostración, más aún este Teorema acaba con la escuela Pitagórica al no poder dar una generalización del mismo. Es hasta Euclides (fl 300 a.C.) que se encuentra una demostración y observa que NO le llama Teorema de Pitágoras, le llama proposición 47 y da su recíproco (proposición 48), y hemos encontrado personas que se dicen Matemáticos que no saben de este recíproco. La tradición lo ha llamado Teorema de Pitágoras y la escuela no logró generalizarlo, sólo conocian ternas enteras, creemos que se le llamo Teorema de Pitágoras por que fue el "coco" o mejor dicho la caida de la escuela Pitagórica.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación de la Estadística

GRAFICAS EN ESTADÍSTICA

A nuestro alrededor suceden acontecimientos que para gran parte de la sociedad pasan desapercibidos, para la Estadística no es así, para ésta área es importante conocer el comportamiento de ciertos eventos, traduciendolos en datos cuantitativos o cualitativos, generando descripciones más exactas y así, conclusiones más generales. Para hablar de Estadística es importante recordar algunos aspectos básicos, a continuación se mencionan algunas definiciones relevantes para este tema.

Recordando que, la toma de decisiones es fundamental para cualquier actividad humana. En este sentido, todos somos tomadores de decisiones. Sin embargo, tomar una "buena decisión" empieza con un proceso de razonamiento constante y analítico.

Las siguientes tres definiciones corresponden a las medidas de posición o medidas de tendencia central, estas ayudan al analista a obtener alguna medida cuantitativa de donde se encuentra el centro de los datos de una muestra, y sirven como puntos de referencia para describir las características típicas del conjunto de datos, se les llama medidas de tendencia central porque generalmente la acumulación más alta de datos se encuentra en los valores intermedios.

La media aritmética es la medida de posición central más utilizada, la más conocida y la más sencilla de calcular. Su principal desventaja radica en su sensibilidad al cambio cuando se usan valores extremos demasiado grandes o pequeños. La siguiente definición muestra como calcular la media para datos sin agrupar.

Definición

Definimos la **media aritmética o media** de un conjunto de **N** números $x_1, x_{2,\ldots,}x_n$, a la razón entre la suma de todos los valores de los números y el número de elementos del conjunto, se denota por $\bar{x}$.

Esto es:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

La mediana nos ayuda a identificar el valor que se encuentra en el centro de los datos, es decir, nos indica que la mitad de los datos se encuentran por debajo de este valor y la otra mitad por encima.

Definición

Si se ordenan todos los valores de la variable en sentido creciente o decreciente, la **mediana** es:

1. Si el número de elementos es impar, el valor de la variable correspondiente al elemento que ocupa la posición central.
2. Si el número de elementos es par, el promedio de los valores que se encuentren en la posición central.

La mediana se denota por Me.

La medida modal nos indica el valor que más veces se repite dentro de los datos. Es posible que en algunas ocasiones se presenten dos valores con la mayor frecuencia, lo cual se denomina bimodal o multimodal, ésta medida muestra el o los datos típicos del conjunto.

Definición

La **moda** es el valor de la variable que se presenta un mayor número de veces, es el valor de mayor frecuencia, el más común.

También mencionaremos algunas definiciones de las medidas de dispersión, variabilidad o variación, estos valores numéricos describen la cantidad de dispersión o variabilidad que se encuentra entre los datos, nos indica si esos datos están próximos entre sí o si están dispersos, es decir, nos indican cuan esparcidos se encuentran los datos. Estas medidas de dispersión nos permiten apreciar la distancia que existe entre los datos a un cierto valor central e identificar la concentración de los mismos.

La varianza es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media aritmética, es decir, es el promedio de las desviaciones de la media elevadas al cuadrado. La desviación estándar o desviación típica es la raíz de la varianza.

La varianza y desviación estándar proporcionan una medida sobre el punto hasta el cual se dispersan las observaciones alrededor de su media aritmética.

PROPIEDADES

1. La varianza y la desviación estándar (o cualquier otra medida de dispersión) indican el grado en que están dispersos los datos en una distribución. A mayor medida mayor dispersión.
2. La varianza es un número muy grande con respecto a las observaciones, por lo que con frecuencia se vuelve difícil para trabajar.
3. Debido a que las desviaciones son elevadas al cuadrado y la varianza siempre se expresa en términos de los datos originales elevados al cuadrado, se obtiene unidades de medida de los datos que no tiene sentido o interpretación lógica. Por ejemplo, si se calculan la varianza de una distribución de datos medidos en metros, segundos, dólares, etc, se obtendrá una varianza mediada en metros cuadrados, segundos cuadrados, dólares cuadrados, respectivamente, unidades de medida que no tienen significado lógico respecto a los datos originales.
4. Para solucionar las complicaciones que se tiene con la varianza, se halla la raíz cuadrada de la misma, es decir, se calcula la desviación estándar, la cual es un número pequeño expresado en unidades de los datos originales y que tiene significado lógico respecto a los mismos.

Definición

Definimos la varianza de una muestra de observaciones $x_1, x_2, ..., x_n$, cuya media es $\bar{x}$, como

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

Definición

La desviación estándar mide cuan lejos se encuentran los datos de la media muestral, y la definimos como la raíz cuadrada de la varianza.

$$s = \sqrt{s^2}$$

A continuación también se definirá la frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Cuando se escribe una tabla para anotar los datos que se obtuvieron de algún evento, experimento aleatorio o juego de azar, se está haciendo un registro estadístico.

La frecuencia es el número de veces que se repite un valor o dato de análisis en una tabla. Hay dos tipos de frecuencia: la absoluta y la relativa. Con la frecuencia absoluta es sencillo visualizar como se distribuyen los datos. La frecuencia relativa nos ayuda a identificar tendencias. El número cuya frecuencia relativa se acerque más a la unidad es el que tiene mayores probabilidades de salir.

Definición

La frecuencia absoluta f es el número de veces que aparece el valor x en la muestra.

Definición

La frecuencia relativa es una medida proporcional de la frecuencia de un evento, se encuentra al dividir la frecuencia absoluta de una clase entre el número total de observaciones.

Cada área tiene leyes y teoremas importantes, y para la Probabilidad no es la excepción, existe una ley que es fundamental y esta intimanmente ligada a la Estadística, esta ley es conocida como: *La Ley de los Grandes Números*. A continuación vamos a mencionar a lo que se refiere.

Ley de los Grandes Números

La ley establece que al repetir un experimento aleatorio un número grande de veces, la frecuencia relativa de cada suceso tiende a aproximarse a un mismo número fijo, llamado probabilidad de un suceso.

Esta ley se considera el primer teorema fundamental de la probabilidad. Una demostración teórica del teorema es laboriosa, y no tiene sentido profundizar en ella. Explica por qué el promedio de una muestra de una población de gran tamaño tenderá a estar cerca de la media de la población completa.

Esta ley justifica la interpretación intuitiva de que el valor esperado de un suceso entre más se repita más probabilidad tiene de suceder.

En la siguiente practica utilizaremos las definiciones anteriores y expondremos un ejemplo para tratar de comprender la *Ley de los Grandes Números.* Utilizando un paquete Office

GRAFICAS EN ESTADÍSTICA

ACTIVIDAD

Se realizara un experimento aleatorio muy conocido: "*Lanzar un dado no cargado*", donde primeramente se lanzará 50 veces. En una tabla de una hoja de Excel se registrarán los resultados de los lanzamientos como sigue:

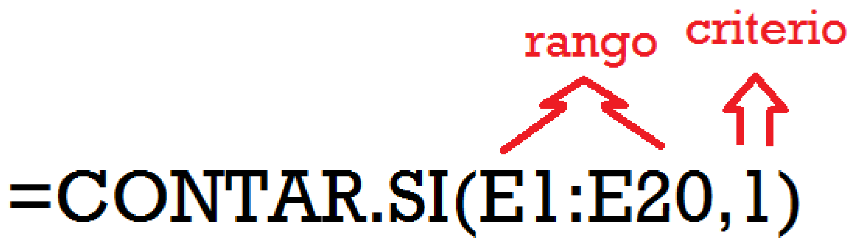
PROCEDIMIENTO

1. **En una hoja de Excel registra la cara que salio en cada lanzamiento, en una tabla como la siguiente:**

	A	B
1	# DE LANZAMIENTO	CARA
2	1	6
3	2	5
4	3	5
5	4	6
6	5	3
7	6	1
8	7	5
9	8	3
10	9	2
11	10	4
12	11	5
13	12	5
14	13	6
15	14	1
16	15	4
17	16	3
18	17	6
19	18	2
20	19	6
21	20	3

22	21	6
23	22	4
24	23	5
25	24	5
26	25	5
27	26	3
28	27	5
29	28	5
30	29	6
31	30	5
32	31	4
33	32	3
34	33	1
35	34	5
36	35	4
37	36	1
38	37	6
39	38	4
40	39	4
41	40	4
42	41	3
43	42	6
44	43	1
45	44	2
46	45	1
47	46	5
48	47	5
49	48	4
50	49	3
51	50	4

A partir de aquí el *rango* es *un conjunto de celdas de Excel*, este agrupamiento facilita la aplicacion de funciones a los datos que se encuentran en ellas. Por ejemplo, en la siguiente función:

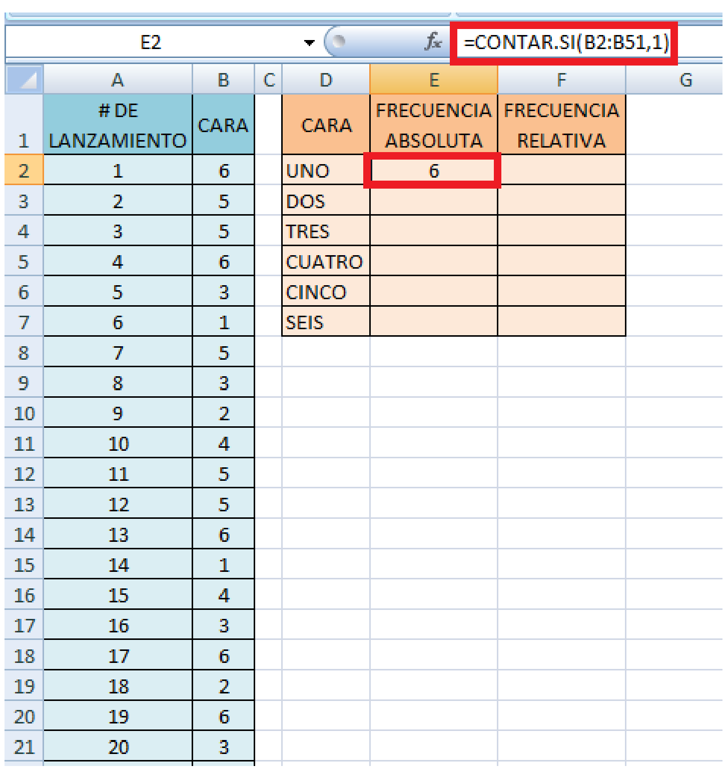


El rango adopta la forma E1:E20, aquí se estan considerando todas las celdas que hay entre E1 y E20.

2. En una tabla obtén las frecuencias absoluta y relativa. Recordando las definiciones que ya han sido mencionadas.

Para obtener la frecuencia absoluta, utiliza la fórmula =CONTAR.SI(rango,criterio).

Calcula la frecuencia absoluta de que salga la cara con un punto, como se observa en la siguiente figura, en este caso el creterio es 1



E2 =CONTAR.SI(B2:B51,1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	
2	1	6		UNO	6		
3	2	5		DOS			
4	3	5		TRES			
5	4	6		CUATRO			
6	5	3		CINCO			
7	6	1		SEIS			
8	7	5					
9	8	3					
10	9	2					
11	10	4					
12	11	5					
13	12	5					
14	13	6					
15	14	1					
16	15	4					
17	16	3					
18	17	6					
19	18	2					
20	19	6					
21	20	3					

Para obtener la frecuencia relativa de la cara 1 se utiliza la fórmula $== E2/50$, donde $E2$ es la ceda que representa la frecuencia relativa de la cara uno.

F2 f_x =E2/50

	A	B	C	D	E	F
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
2	1	6		UNO	6	0.12
3	2	5		DOS		
4	3	5		TRES		
5	4	6		CUATRO		
6	5	3		CINCO		
7	6	1		SEIS		
8	7	5				

Vuelve a escribir la fórmula para calcular la frecuencia absoluta y relativa de cada cara.

	A	B	C	D	E	F	G
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA	
2	1	6		UNO	6	0.12	
3	2	5		DOS	3	0.06	
4	3	5		TRES	8	0.16	
5	4	6		CUATRO	10	0.2	
6	5	3		CINCO	10	0.2	
7	6	1		SEIS	9	0.18	
8	7	5					

Pregunta de reflexión:

¿Qué significa la frecuencia relativa en nuestro ejemplo?

3. Calcula las medidas de posición o tendencia central.

MEDIA:

Calcula la media de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= PROMEDIO(rango)$

J2 f_x =PROMEDIO(B2:B51)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR	
2	1	6		UNO	6	0.12		MEDIA		4	
3	2	5		DOS	3	0.06		MEDIANA			
4	3	5		TRES	8	0.16		MODA			
5	4	6		CUATRO	10	0.2					
6	5	3		CINCO	10	0.2					
7	6	1		SEIS	9	0.18					
8	7	5									

El que la media sea ese número ¿Qué significado tiene?

MEDIANA:

Calcula la mediana de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= MEDIANA(rango)$

J3 | f_x | =MEDIANA(B2:B51)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	6		UNO	6	0.12		MEDIA		4
3	2	5		DOS	3	0.06		MEDIANA		4
4	3	5		TRES	8	0.16		MODA		
5	4	6		CUATRO	10	0.2				
6	5	3		CINCO	10	0.2				
7	6	1		SEIS	9	0.18				
8	7	5								

¿Qué puedes decir acerca de la mediana?

MODA:

Calcula la moda de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= MODA(rango)$

J4 | f_x | =MODA(B2:B51)

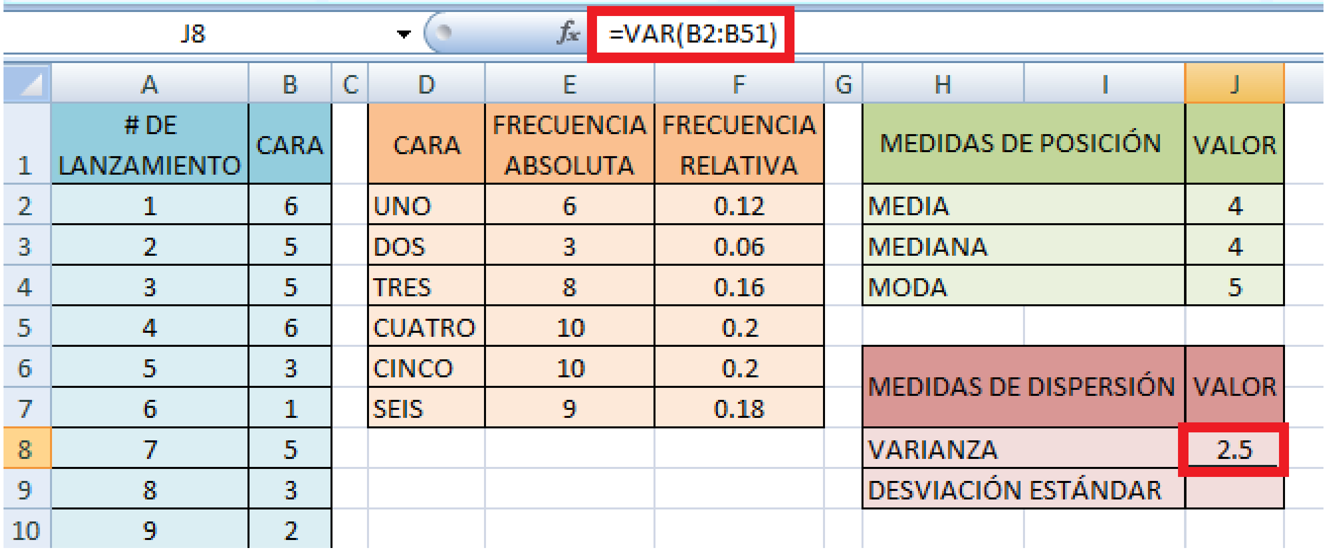
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	6		UNO	6	0.12		MEDIA		4
3	2	5		DOS	3	0.06		MEDIANA		4
4	3	5		TRES	8	0.16		MODA		5
5	4	6		CUATRO	10	0.2				
6	5	3		CINCO	10	0.2				
7	6	1		SEIS	9	0.18				
8	7	5								

¿Qué puedes decir de la moda?

4. Calcula las medidas de desviación o dispersión.

VARIANZA:

Calcula la varianza de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= VAR(rango)$



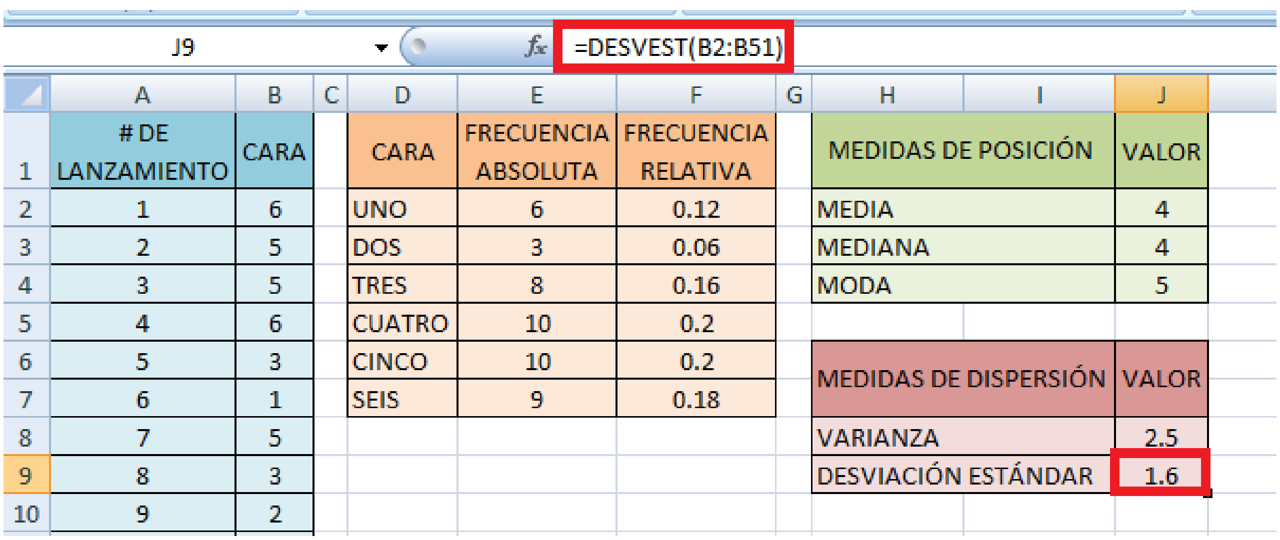
J8 =VAR(B2:B51)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	6		UNO	6	0.12		MEDIA		4
3	2	5		DOS	3	0.06		MEDIANA		4
4	3	5		TRES	8	0.16		MODA		5
5	4	6		CUATRO	10	0.2				
6	5	3		CINCO	10	0.2		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		VALOR
7	6	1		SEIS	9	0.18				
8	7	5						VARIANZA		2.5
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
10	9	2								

¿Qué significa obtener la varianza?

DESVIACIÓN ESTÁNDAR:

Calcula la desviación estándar de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= DESVEST(rango)$

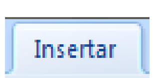


J9 =DESVEST(B2:B51)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	6		UNO	6	0.12		MEDIA		4
3	2	5		DOS	3	0.06		MEDIANA		4
4	3	5		TRES	8	0.16		MODA		5
5	4	6		CUATRO	10	0.2				
6	5	3		CINCO	10	0.2		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		VALOR
7	6	1		SEIS	9	0.18				
8	7	5						VARIANZA		2.5
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		1.6
10	9	2								

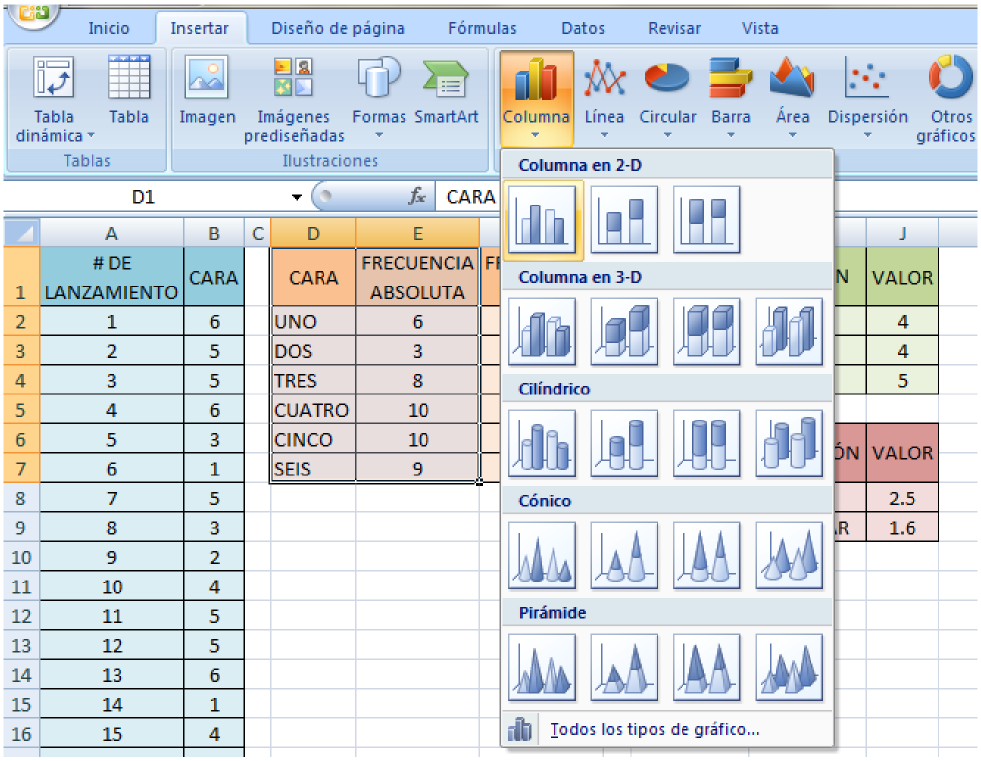
¿Qué representa la desviación estándar?

5. Grafica la tabla de frecuencia absolutas.

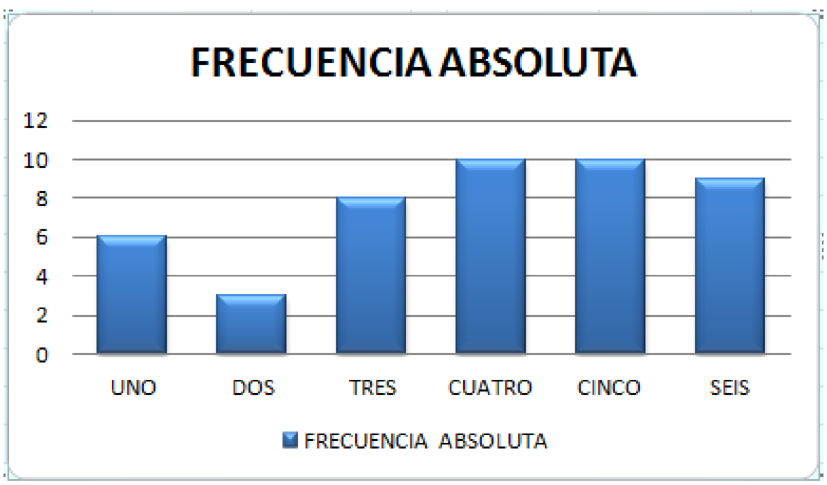
Para graficar las frecuencias absolutas, seleccionar las columnas de CARA y FRECUENCIA ABSOLUTA, damos clic en 

, luego en el icono 

y finalmente seleccionar el tipo de grafica que se necesite, como se observa en la siguiente figura.



Lo que se obtiene es una gráfica como la siguiente:



Cada vez que se selecciona la gráfica se habilita el icono Diseño donde se puede dar formato que se desee, aprecia la frecuencia de los datos.

6. Utilizando la tabla de frecuencia relativa, calcula la probabilidad de cada evento, es decir, la probabilidad de que salga cierta cara del dado.

Observación: Si el dado no esta cargado y se lanza una vez, la probabilidad de cada cara es:

$$P(c) = \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
UNO	6	0.12
DOS	3	0.06
TRES	8	0.16
CUATRO	10	0.2
CINCO	10	0.2
SEIS	9	0.18

Ahora para 50 lanzamientos, sean A, B, C, D, E y F, los eventos donde la cara del dado tiene $1, 2, ..., 6$ puntos respectivamente.

Entonces, dado nuestro experimento, obtenemos que:

$P(A) = 0.12$

$P(B) = 0.06$

$P(C) = 0.16$

$P(D) = 0.2$

$P(E) = 0.2$

$P(F) = 0.18$

¿Qué observas en las probabilidades anteriores?

7. **Realiza todos los pasos anteriores pero al lanzar el dado** 1000 **veces, para hacer esta actividad vamos a simular dichos lanzamientos ya que es un número muy grande.**

En una tabla de una hoja de Excel registra las simulaciones de los lanzamientos, utiliza la fórmula $= ALEATORIO.ENTRE(1, 6)$ que arrojará valores aleatorios entre 1 y 6.

B2 | f_x =ALEATORIO.ENTRE(1,6)

	A	B	C	D	E	F
1	# DE LANZAMIENTO	CARA				
2	1	3				
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

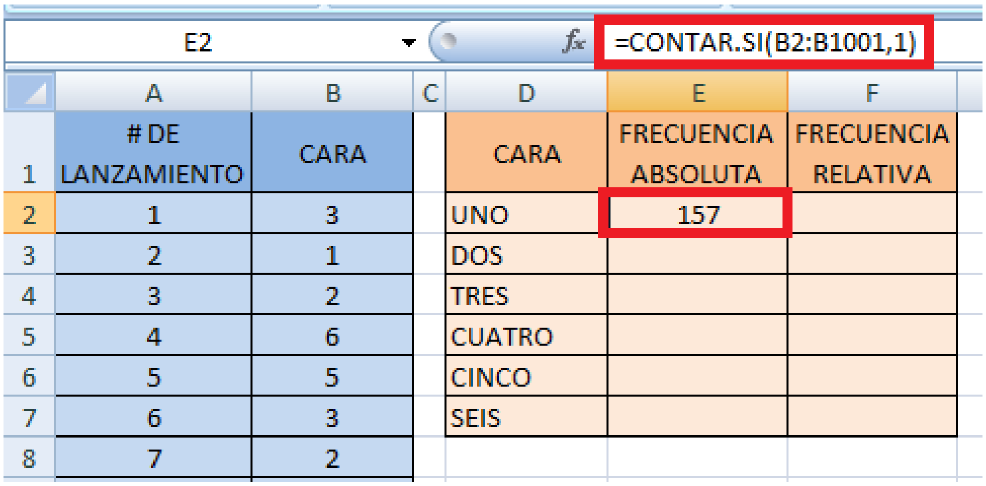
Arrastra o copia la fórmula en todas las celdas de la tabla para completar los 1000 lanzamientos.

	A	B
1	# DE LANZAMIENTO	CARA
2	1	3
3	2	1
4	3	2
5	4	6
6	5	5
7	6	3
8	7	2
9	8	3
10	9	6
11	10	6
12	11	5
13	12	6
14	13	1
15	14	1
16	15	1
	⋮	
986	985	2
987	986	6
988	987	1
989	988	2
990	989	3
991	990	2
992	991	4
993	992	3
994	993	1
995	994	4
996	995	4
997	996	5
998	997	5
999	998	4
1000	999	3
1001	1000	4

8. Calcula la tabla de frecuencias absoluta y relativa. Recordando las definiciones que ya han sido mencionadas.

Para obtener la frecuencia absoluta utiliza la fórmula $= CONTAR.SI(rango, 1)$.

Para obtener la frecuencia relativa utiliza la fórmula $= E2/1000$



E2 | f_x | =CONTAR.SI(B2:B1001,1)

	A	B	C	D	E	F
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
2	1	3		UNO	157	
3	2	1		DOS		
4	3	2		TRES		
5	4	6		CUATRO		
6	5	5		CINCO		
7	6	3		SEIS		
8	7	2				

F2

	A	B	C
1	# DE LANZAMIENTO	CARA	
2	1	3	UN
3	2	1	DO
4	3	2	TRE
5	4	6	CU
6	5	5	CIN
7	6	3	SEI
8	7	2	

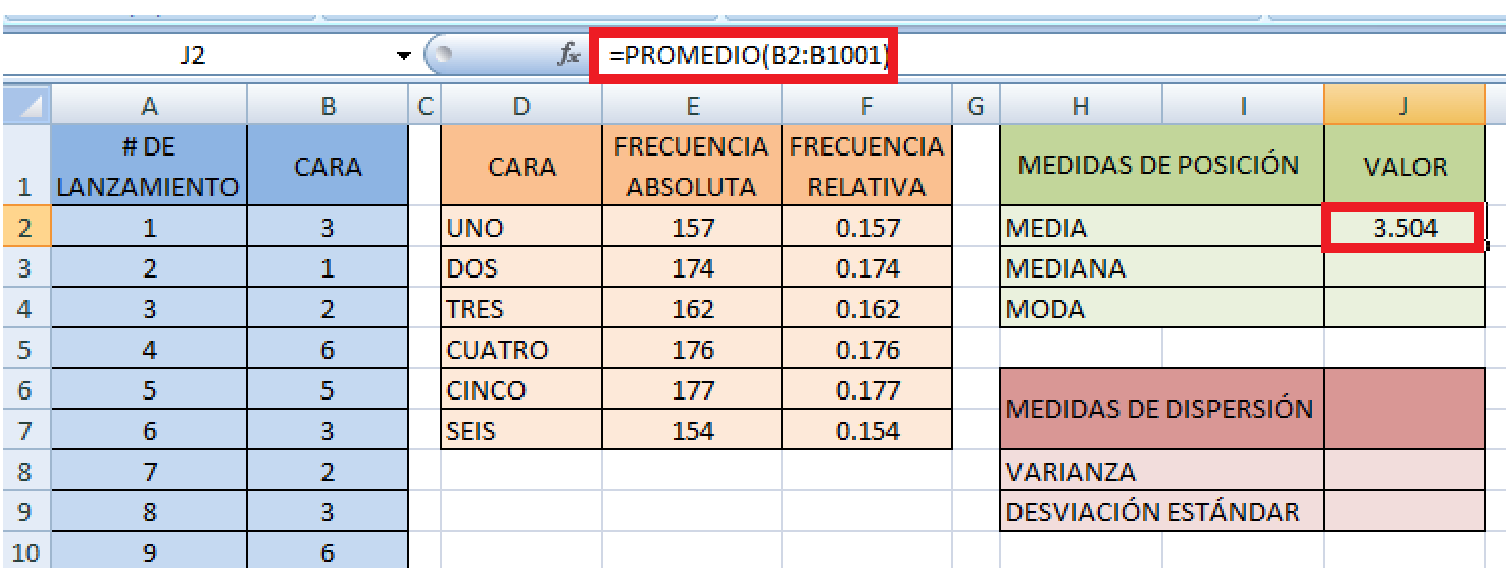
Vuelve a escribir la fórmula para calcular la frecuencia absoluta y relativa de cada cara del dado.

CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
UNO	157	0.157
DOS	174	0.174
TRES	162	0.162
CUATRO	176	0.176
CINCO	177	0.177
SEIS	154	0.154

9. Calcula las medidas de posición o tendencia central.

MEDIA:

Calcula la media de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= PROMEDIO(rango)$



J2 | f_x | =PROMEDIO(B2:B1001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	3		UNO	157	0.157		MEDIA		3.504
3	2	1		DOS	174	0.174		MEDIANA		
4	3	2		TRES	162	0.162		MODA		
5	4	6		CUATRO	176	0.176				
6	5	5		CINCO	177	0.177		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		
7	6	3		SEIS	154	0.154				
8	7	2						VARIANZA		
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
10	9	6								

MEDIANA:

Calcula la mediana de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= MEDIANA(rango)$

J3 | f_x | =MEDIANA(B2:B1001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	3		UNO	157	0.157		MEDIA		3.504
3	2	1		DOS	174	0.174		MEDIANA		4
4	3	2		TRES	162	0.162		MODA		
5	4	6		CUATRO	176	0.176				
6	5	5		CINCO	177	0.177		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		
7	6	3		SEIS	154	0.154				
8	7	2						VARIANZA		
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
10	9	6								

MODA:

Calcula la moda de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= MODA(rango)$

J4 | f_x | =MODA(B2:B1001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	3		UNO	157	0.157		MEDIA		3.504
3	2	1		DOS	174	0.174		MEDIANA		4
4	3	2		TRES	162	0.162		MODA		5
5	4	6		CUATRO	176	0.176				
6	5	5		CINCO	177	0.177		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		
7	6	3		SEIS	154	0.154				
8	7	2						VARIANZA		
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
10	9	6								

10. Calcula las medidas de variación:

VARIANZA:

Calcula la varianza de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= VAR(rango)$

J8 f_x =VAR(B2:B1001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	3		UNO	157	0.157		MEDIA		3.504
3	2	1		DOS	174	0.174		MEDIANA		4
4	3	2		TRES	162	0.162		MODA		5
5	4	6		CUATRO	176	0.176				
6	5	5		CINCO	177	0.177		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		
7	6	3		SEIS	154	0.154				
8	7	2						VARIANZA		2.8
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		
10	9	6								

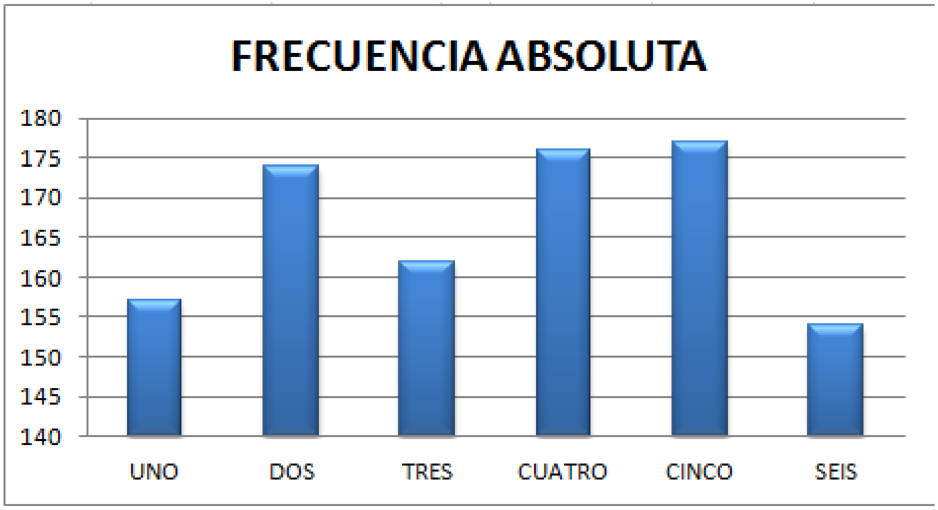
DESVIACIÓN ESTÁNDAR:

Calcula la desviación estándar de los lanzamientos del dado, con la fórmula $= DESVEST(rango)$

J9 f_x =DESVEST(B2:B1001)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	# DE LANZAMIENTO	CARA		CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA		MEDIDAS DE POSICIÓN		VALOR
2	1	3		UNO	157	0.157		MEDIA		3.504
3	2	1		DOS	174	0.174		MEDIANA		4
4	3	2		TRES	162	0.162		MODA		5
5	4	6		CUATRO	176	0.176				
6	5	5		CINCO	177	0.177		MEDIDAS DE DISPERSIÓN		
7	6	3		SEIS	154	0.154				
8	7	2						VARIANZA		2.8
9	8	3						DESVIACIÓN ESTÁNDAR		1.7
10	9	6								

11. Grafica la tabla de frecuencia absolutas como se menciono anteriormente.



12. Utilizando la tabla de frecuencias relativa, calcula la probabilidad de cada evento, es decir,la probabilidad de que salga cierta cara del dado cuando se ha lanzado 1000 veces.

CARA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
UNO	157	0.157
DOS	174	0.174
TRES	162	0.162
CUATRO	176	0.176
CINCO	177	0.177
SEIS	154	0.154

Ahora para 1000 lanzamientos, sean A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1, los eventos donde la cara del dado tiene $1, 2, ..., 6$ puntos respectivamente.

Entonces, dado nuestro experimento, obtenemos que:

$P(A_1) = 0.157$

$P(B_1) = 0.174$

$P(C_1) = 0.162$

$P(D_1) = 0.176$

$P(E_1) = 0.177$

$P(F_1) = 0.154$

13. Compara las probabilidades del punto 6 **y** 12.

50 lanzamientos	1000 lanzamientos
$P(A) = 0.12$	$P(A_1) = 0.157$
$P(B) = 0.06$	$P(B_1) = 0.174$
$P(C) = 0.16$	$P(C_1) = 0.162$
$P(D) = 0.2$	$P(D_1) = 0.176$
$P(E) = 0.2$	$P(E_1) = 0.177$
$P(F) = 0.18$	$P(F_1) = 0.154$

¿Qué se puede decir al respecto?

¿Que ocurre con las probabilidades de los eventos cuando se tienen 1000 lanzamientos?¿Observas alguna tendencia?

14. ¿Qué ocurrirá si se tiene un número mayor de lanzamientos?

15. Según la Ley de los Grandes Números ¿qué relación hay con la práctica?

¿Cómo podemos concluir?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Aplicación de la Derivada

EL PROBLEMA DE LA LATA DE COCA COLA

Una de las aplicaciones más comunes del Cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo, basta con recordar que en la industria las producciones y utilidades se basan en costos mínimos y máximos, tiempos mínimos, voltajes máximos, formas óptimas, máxima resistencia o mínima distancia.

La estrategia para resolver problemas de máximo y mínimos, según Larson (Larson, 2006), es la siguiente:

1. Identificar las cantidades dadas y las se van a encontrar, si es posible realice un dibujo.
2. Escribir una ecuación primaria para la cantidad a minimizar o maximizar.
3. Reducir la ecuación primaria para que este dada en términos de una sola variable.
4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria reducida, es decir, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo que a continuación recordaremos:

Definición de extremos

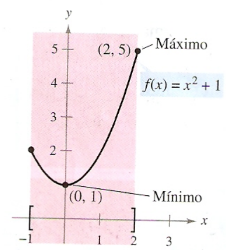
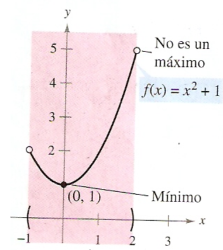
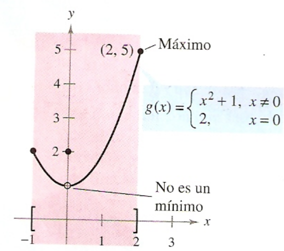
Sea f definida en un intervalo I que contiene a c.

1. $f(c)$ es el mínimo de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I.
2. $f(c)$ es el máximo de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I.

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los valores extremos de la función en un intervalo.

El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **mínimo absoluto** y **máximo absoluto** en el intervalo.

Una función no siempre tiene un mínimo o un máximo absoluto en un intervalo, observa las siguientes figuras:

		
a) f es continua, $[-1, 2]$ es cerrado	b) f es continua, $(-1, 2)$ es abierto	c) g no es continua, $[-1, 2]$

Para concluir con la observación de las gráficas, tenemos el siguiente teorema:

Teorema del valor extremo

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

Note que el teorema del valor extremo es un teorema de existencia porque indica sólo que existen más no muestra cómo determinarlos.

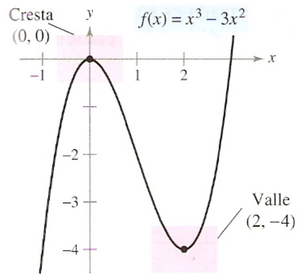
Definición de extremos relativos

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo absoluto entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo absoluto entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.

Podemos decir que hay un mínimo (máximo) relativo donde existe un valle (cima), es decir tales valles (cimas) pueden existir cuando la curva es suave y redondeada, así el valle (cima) tienen una tangente horizontal en el punto bajo (alto).

En la siguiente figura podemos observar que la función posee un máximo y mínimo relativo.



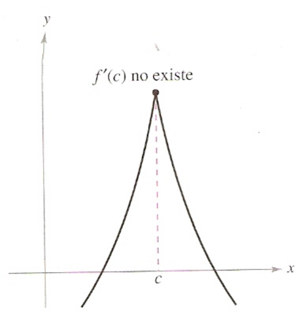
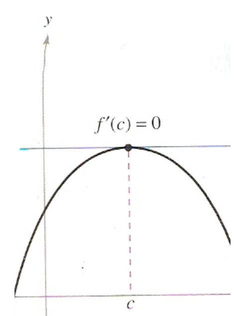
d) f tiene un máximo relativo en $(0,0)$ y un mínimo relativo en $(2,-4)$

A continuación, veamos que es un punto crítico y como determinarlo.

Definición de punto crítico

Sea f definida en c. Si $f'(c)=0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un punto crítico de f.

En la siguiente figura se ilustran los dos tipos de puntos críticos:

	
e) c es un punto crítico de f, dado que f no es derivable en c.	d) c es un punto crítico de f, dado que $f'(c)=0$

Teorema: Los extremos relativos ocurren sólo en puntos críticos.

Si f tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x=c$, entonces c es un punto crítico de f.

El teorema anterior muestra que los extremos relativos de una función ocurren en los puntos críticos de la función.

Sabiendo esto, se pueden utilizar las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado $[a,b]$:

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado.

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Ahora, dado este pequeño resumen, veamos una aplicación, que creemos es muy interesante y entretenida.

El objetivo principal de esta práctica es aplicar los conocimientos anteriormente descritos para resolver un problema de la "vida real" como parte de los planteamientos para el estudiante de significado a los conceptos y definiciones adquiridos.

EL PROBLEMA DE LA LATA DE COCA COLA

The Coca Cola Company es una coorpación enfocada a producir bebidas y alimentos. Su principal producto es la *Coca-Cola,* refresco más consumido en el mundo, dicha bebida es vendida en diversos establecimientos como tiendas y restaurantes, este producto es ofertado en botellas y latas, donde la lata es un envase metálico que tiene forma de cilindro. Imaginemos que The Coca Cola Company se enfreta a un grave problema para crear las latas ya que el costo de fabricación es muy alto dado que el aluminio ha subido de precio, The Coca Cola Company desea encontrar las dimensiones óptimas de la lata para minimizar el costo de la producción, es decir, desea encontrar de entre todos lo cilindros rectos con un volumen igual a 335 ml el de menor superficie, dado que esto minimizará los costos de producción en términos del material que se utilice para producir cada lata.

Figura 1

ACTIVIDAD

Determina el radio y altura del cilindro para encontrar las dimensiones de la lata con menor superficie y un volumen igual a 335 ml.

PROCEDIMIENTO

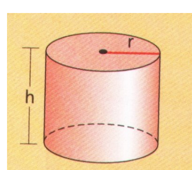


Figura 2

Para determinar la menor superficie, analiza las fórmulas del área de cada figura que forman la lata.

Se tiene que la base y la tapa de la lata son dos círculos de radio r.

Luego, el área de un círculo es: $A_{\zeta} = \pi r^2$

Ahora el área de la cara lateral del cilindro es un rectángulo de altura h y base b (ver figura 2), donde b es el perímetro del círculo (ver figura 3).

Luego, si el perímetro del círculo es $P_\zeta = 2\pi r = b$

Entonces, el área del del rectángulo será $A_R = bh = 2\pi rh$

Por otro lado el volumen del cilindro se cálcula como: $V = \pi r^2 h$, en este caso, este volumen es fijo e igual a 355 ml, ahora dado que se busca el radio y la altura de la lata se convertirá en cm, entonces $355ml$ equivalen a 355 cm^3, por que $1ml \to 1cm^3$.

Entonces $\pi r^2 h = 355cm^3$

$$\Rightarrow h = \tfrac{335}{\pi r^2} cm^3 \qquad (1)$$

Sea S la suma de las áreas superficiales, donde S es el valor a minimizar.

$$S = 2A_C + A_R$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

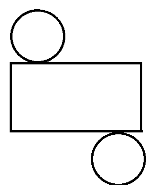


Figura 3

Luego, observa que S esta en términos de r y h, es decir,

$$S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (2)$$

Por otro lado de (1) se tiene que $h = \frac{335}{\pi r^2} cm^3$, sustituye en (2) para dejar a S en términos de una sola variable, r.

$$\Rightarrow S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r(\tfrac{335}{\pi r^2})$$
$$\Rightarrow S(r) = 2\pi r^2 + \tfrac{670}{r},$$

observa que el dominio de $S(r)$ es $(0,\infty)$ para que la solución tenga sentido, es decir, se quiere que exista el cilindro, entonces $S(r) \in (0,\infty)$ y $r \in (0,\infty)$

Luego $S^{'}(r) = 4\pi r - \frac{670}{r^2}$,

Hacemos $S^{'}(r) = 0$ para encontrar los puntos críticos

$$\Rightarrow 0 = 4\pi r - \tfrac{670}{r^2}$$
$$4\pi r = \tfrac{670}{r^2}$$
$$4\pi r^3 = 670$$
$$\Rightarrow r^3 = \tfrac{670}{4\pi}$$
$$\Rightarrow r^3 = \tfrac{335}{2\pi}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\tfrac{335}{2\pi}} \text{ es un punto crítico.}$$

Además $f'(0)$ no está definido.

Pero $r = 0$ no es opción dado que si $r = 0$ no hay lata.

Luego $r = \sqrt[3]{\frac{335}{2\pi}}cm$ es el radio que minimiza el área superficial con $r \in (0, \infty)$

Entonces si $h = \frac{335}{\pi r^2}$

$$\Rightarrow h = \frac{335}{\pi(\sqrt[3]{\frac{335}{2\pi}})^2} = \frac{\sqrt[3]{1340}}{\sqrt[3]{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1340}{\pi}}$$

$$\text{Por lo que } h = \sqrt[3]{\frac{1340}{\pi}}$$

$\therefore$Si $r = \sqrt[3]{\frac{335}{2\pi}}cm$ y $h = \sqrt[3]{\frac{1340}{\pi}}cm$ se obtendra la superficie mínima para un cilindro de 335 ml de volumen.

CONCLUSIONES

Para concluir, diremos que, en proporción, nuestra lata será como aparece en la figura 4, con un diámetro aproximado de $d \approx 7.52cm$ y una altura de $h \approx 7.52cm$, aúnque la lata real sea como en la figura 1, porque creemos que el diseño no sólo depende del material de la lata, si no de la estética y de la manejabilidad, sin embargo, hemos visto una útil aplicación de las derivadas.

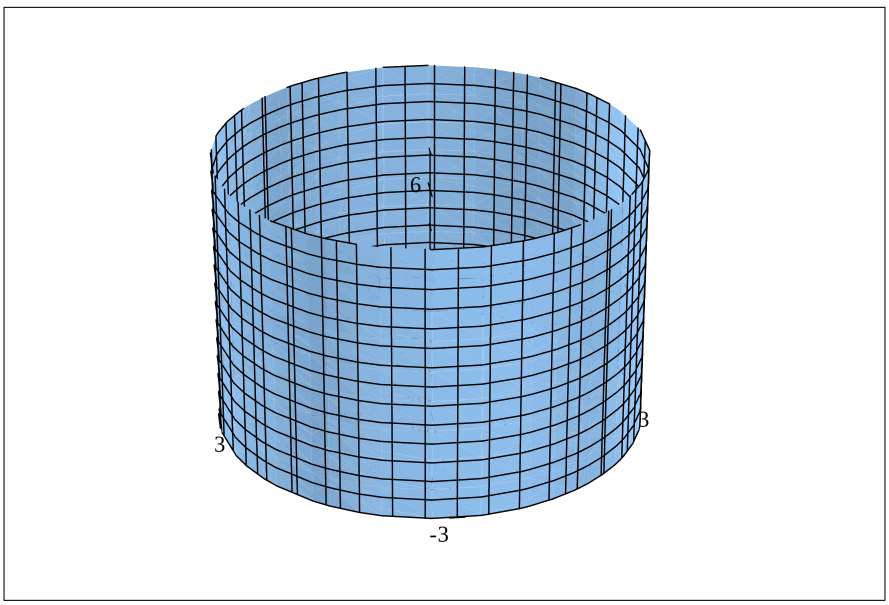


Figura 4

CONCLUSIONES

La propuesta que se da en esta tesis exige que el maestro tenga un dominio de los temas a impartir así como de las diferentes competencias en TIC para docentes, este trabajo ha sido realizado de tal manera que el docente empiecen a relacionarte con el mundo de las tecnologías sin dejar a un lado la profundidad de los temas.

Además se proponen diferentes problemas para relacionar los conocimientos vistos en clase con la vida real, estos problemas no son únicos, se pueden plantear más problemas para diferentes contenidos para contribuir a la motivación y el desarrollo de las habilidades del docente así como las habilidades.

En general la tesis es una propuesta muy buena, lo que realizo fue una introducción a la educación del nuevo mundo en el que estamos viviendo, un mundo lleno de tecnología, las prácticas son una gran oportunidad para tocar de fondo a cada tema de diferentes materias de Matemáticas, a simple vista las definiciones o teoremas pueden ser confusas en particular si son temas muy complejos, con la tecnología, en particular con los software tipo CAS y DGS, se pueden visualizar diversas cosas como gráficas, tablas, o facilitar diversos procedimientos.

Para que el docente pueda continuar con esta propuesta didáctica es necesario intercambiar ideas con otros docentes, incluso realizar juntas académicas donde se trabaje con prácticas de este estilo, todo esto para lograr que el alumno tenga una educación de calidad.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ausubel, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston

[2] Castells, M. (2002). *La Era de la Información. Vol. I: La Sociedad Red*. México, Distrito Federal: Siglo XXI Editores.

[3] Díaz Barriga, F. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. Mc Graw Hill.

[4] Euclides.(Reimpresión,1991).Elementos .Editorial Gredos S.

[5] Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza,* en las Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (IV JAEM).

[6] Hernstein, I. (1996). Álgebra Moderna. Ediorial Trillas.

[7] Vergnaud, G. (2004). *El Niño, las Matemáticas y la Realidad*. Editorial Trillas.