

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**cálculo de la cinemática inversa y el espacio
de trabajo de un manipulador paralelo de 6 GDL**

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Línea Terminal en Instrumentación y Control Automático

Presenta:

ALEJANDRA SANCHEZ FLORES

SANTIAGO DE QUERÉTARO, QRO., SEPTIEMBRE 2001

BIBLIOTECA CENTRAL UAQ
"ROBERTO RUIZ OBREGÓN"

No Adq: H 660787
No. Título TS
Clas. 531.112
32110
Ej. 2



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

***CÁLCULO DE LA CINEMATICA INVERSA Y DEL ESPACIO DE TRABAJO DE UN
MANIPULADOR PARALELO DE 6 GDL***

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Maestro en Ciencias
Línea Terminal en Instrumentación y Control Automático.

Presenta

Alejandra Sánchez Flores

Santiago de Querétaro, Qro. 28 de Mayo de 2001



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Instrumentación y Control Automático.

**CÁLCULO DE LA CINEMATICA INVERSA Y DEL ESPACIO DE TRABAJO DE UN MANIPULADOR
PARALELO DE 6 GDL**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Línea terminal en Instrumentación y Control Automático.

Presenta:

Alejandra Sánchez Flores.

Dirigida por:

Dr. Eduardo Castillo Castañeda.

SINODALES

Dr. Eduardo Castillo Castañeda

Presidente

Firma

Dr. Carlos Santiago López Cajún

Secretario

Firma

Dr. C. Roberto Torres Hernández

Local

Firma

Dr. C. Victor Hernández Guzmán

Suplente

Firma

Dr. José Emilio Vargas Soto

Suplente

Firma

Dr. Jorge Martínez Carrillo
Director de la Facultad

Dr. Sergio Quesada Aldana
Director de Investigación y
Posgrado

RESUMEN

El estudio y las aplicaciones de manipuladores paralelos (MP) se han intensificado en los últimos años. Las razones son: facilidad de construcción, altas aceleraciones permitidas y alta relación carga-peso. Un inconveniente el espacio de trabajo reducido. Si el espacio de trabajo requerido es conocido, caso común en aplicaciones industriales, el MP puede ser geoméricamente diseñado para alcanzar tal espacio. La presente tesis tiene como objetivo analizar el modelo geométrico asociado a un MP y su relación con la cinemática inversa y el espacio de trabajo; ello permitiría obtener criterios de diseño del MP en función del espacio de trabajo requerido. Para el desarrollo de la cinemática inversa se calcularon los desplazamientos necesarios de todos los eslabones para alcanzar una actitud dada por coordenadas generalizadas. Posteriormente se procedió a proponer la forma del espacio de trabajo del MP. Por su estructura, los MP tienen un espacio de trabajo de forma compleja, por lo que no es tan fácil determinarla. Se propone el volumen del espacio de trabajo como parámetro de comparación y validación de las propuestas, que son básicamente tres: 1) aproximación por una figura geométrica regular, 2) interpolación, que consiste en aproximar una ecuación que describa el contorno del espacio de trabajo y rotarlo alrededor del eje z; y 3) caracterización, que consiste en obtener planos para integrarlos en un volumen final. Estas propuestas fueron probadas para varias estructuras de manipulador. La propuesta de caracterización presenta un buen comportamiento con base en el parámetro de comparación a la vez que nos proporciona relaciones directas con la geometría del MP, lo cual la convierte en una herramienta sumamente útil para el diseño de MP's. Los estudios reportados en México sobre robots paralelos son escasos y de diferente configuración. Se sabe de una plataforma Stewart realizada en el CIATEQ, Aguascalientes [1] así como un prototipo en el CINVESTAV.

(Palabras clave: robot paralelo, espacio de trabajo, modelo geométrico, cinemática inversa, cadena cinemática).

SUMMARY

The study and applications of parallel manipulators (PM) have been increased over the last few years. Easy to build, precision of movements, big ratio load to weight and high permissible acceleration are some of its advantages. An important inconvenience is the small workspace. However, if the required workspace is known, as it is in most industrial applications, a robot could be designed to guarantee good performance in the desired workspace. This thesis has the purpose of studying and analyzing the geometric model of a specific parallel robot and its relation to the inverse kinematics and workspace; this would provide us with robot design criteria. For the development of the inverse kinematics, the needed movements of all links were calculated in order to achieve a pose, given in general coordinates. Because of its structure, the PM's have a complex workspace form, so several proposals of the form of the workspace were developed. The volume of the workspace is introduced as a validation and comparison parameter of the proposals, which are basically three: 1) approximation by a regular geometric body, 2) interpolation, consists of finding an approximated equation of the edge of the workspace and then rotate it around z axis; and 3) characterization, is the integration of planes into a final volume. These proposals were tested with several PM's structures. The characterization proposal showed good performance while it provides direct relations with the PM's geometry, which makes it a powerful tool for PM's design. Few parallel manipulators research projects have been reported in Mexico: CIATEQ, Aguascalientes developed a Stewart platform [1], and a prototype was developed in CINVESTAV.

(Key words: parallel manipulator, workspace, geometric model, inverse kinematics, kinematic chain.

DEDICATORIAS

A Dios,
como ofrenda y alabanza.

A Rosa y Filiberto,
que tanto me quieren y a quienes amo.

A Mauro,
quien me ha dedicado paciencia y ayuda.

A Rocío, Laura y Claudia,
por ser maravillosas hermanas.

AGRADECIMIENTOS

Presento mis agradecimientos a mi asesor, Dr. Eduardo Castillo Castañeda, quien me ofreció toda la ayuda y respaldo posible para realizar este trabajo. Agradezco también a los doctores y maestros que aceptaron ser sinodales y revisaron y corrigieron la tesis, Dr. Carlos López Cajún, Dr. Emilio Vargas Soto, M.C. Víctor Manuel Hernández Guzmán y M.C. Roberto Torres Hernández. Gracias al coordinador de la maestría Dr. Gilberto Herrera por su apoyo para obtener beca. A CONACYT por contribuir con recursos económicos durante mis estudios de maestría.

INDICE

RESUMEN	i
SUMMARY	ii
DEDICATORIAS	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
INDICE	v
INDICE DE FIGURAS	vii
INDICE DE TABLAS	ix
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes de los manipuladores paralelos	2
1.2 Estado del Conocimiento	8
2. ELEMENTOS DEL MANIPULADOR	9
2.1 Configuración del manipulador bajo estudio	9
2.2 Descripción geométrica	11
2.3 Obtención de coordenadas y dimensiones del manipulador	14
3. CINEMÁTICA INVERSA DEL MANIPULADOR PARALELO	17
3.1 Descripción del manipulador bajo estudio	17
3.2 Solución de la Cinemática Inversa	17
4. CALCULO DEL ESPACIO DE TRABAJO	23
4.1 Cálculo del Espacio de Trabajo por barrido de coordenadas	23
4.2 Comparación del Espacio de Trabajo con el volumen de un cono	26
4.3 Cálculo del Espacio de Trabajo por rotación de una ecuación obtenida con interpolación de puntos	27
4.4 Cálculo del Espacio de Trabajo basado en la geometría del manipulador	30
5. DISEÑO DE UN MANIPULADOR A TRAVÉS DE CARACTERIZACIÓN	47
5.1 Definición del Espacio de Trabajo	47
5.2 Cálculo de la estructura del manipulador paralelo	48
6. CONCLUSIONES	55

Referencias.....	56
APÉNDICE.....	58

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1 El manipulador paralelo Delta 4.....	2
Figura 1. 2 Estructura de un manipulador serial.	3
Figura 1. 3 Plataforma Stewart aplicado a un manipulador para cirugía de la arteria coronaria.	5
Figura 1. 4 El manipulador de unión de cinco barras.....	6
Figura 2. 1 Representación de la configuración del manipulador paralelo bajo estudio.	9
Figura 2. 2 Representación de dos cadenas cinemáticas.....	10
Figura 2. 3 Descripción de la cadena cinemática y los ejes de cada articulación.....	11
Figura 2. 4 Modelo geométrico del manipulador paralelo en el plano xy.	12
Figura 2. 5 a) El eslabón L en tres dimensiones.....	13
Figura 2. 6 Representación en el plano xz de una cadena cinemática.....	14
Figura 3. 1 Representación geométrica de una cadena cinemática.	18
Figura 3. 2 Representación de las posibles soluciones de la ecuación 3.14.	22
Figura 4. 1 a) Vista del espacio de trabajo en plano xz.	25
Figura 4. 2 a) Interpolación de los puntos de la superficie del espacio de trabajo.....	28
Figura 4. 3 El espacio de trabajo en el plano xy	31
Figura 4. 4 El manipulador en su posición extrema en el eje z.....	32
Figura 4. 5 Las cadenas cinemáticas 4 y 5 del manipulador.	33
Figura 4. 6 El manipulador en posición de alcanzar la posición extrema en el eje x.	34
Figura 4. 7 Las cadenas 4 y 5 cuando el manipulador alcanza posición extrema en el eje x.	35
Figura 4. 8 El eslabón número 4 al alcanzar el punto extremo X_{e1}	36
Figura 4. 9 Características de un triángulo equilátero.....	37
Figura 4. 10 El triángulo Reuleaux sombreado en gris.	38
Figura 4. 11 El espacio de trabajo calculado en este trabajo.....	39
Figura 4. 12 Los movimientos extremos que son permitidos por dos cadenas cinemáticas...	41

Figura 4. 13 Representación del desplazamiento de los eslabones prismáticos para alcanzar el punto extremo x_{e1} .	42
Figura 4. 14 El manipulador paralelo cuando no existe desplazamiento de las articulaciones prismáticas.	43
Figura 4. 15 a) Gráfica del espacio de trabajo por caracterización en el plano xz .	44
Figura 5. 1 Ejemplos de espacio de trabajo deseado.	47
Figura 5. 2 Características de la estructura del manipulador.	48
Figura 5. 3 Diagrama de los puntos importantes para realizar el cálculo de eslabones a partir del espacio de trabajo.	49
Figura 5. 4 El ángulo ω , máxima abertura de la articulación esférica.	51
Figura 5. 5 Dos posiciones de la estructura del manipulador. A) Posición extrema en el eje z . B) Posición extrema en xy .	52
Figura 5. 6 Las cadenas 4 y 6, en el plano xz , representadas en las dos posiciones A y B de la Fig. 5.3.	53

INDICE DE TABLAS

Tabla 4. 1 Resultados para el cálculo del espacio de trabajo.	46
--	----

1. INTRODUCCIÓN

La presente tesis tiene como objetivo estudiar y analizar el modelo asociado a robots paralelos; este tipo de robots tiene la particularidad de que dos o más de sus eslabones comparten el punto de conexión inicial y el punto de conexión final en sus respectivos extremos. El presente trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 presentamos una introducción sobre los antecedentes de los manipuladores paralelos y su aplicación en la actualidad.

En el Capítulo 2 presentamos la configuración del manipulador bajo estudio.

En el Capítulo 3 se realiza el cálculo de La cinemática inversa del manipulador en particular.

El Capítulo 4 contiene varias propuestas de cómo obtener el volumen del espacio de trabajo, y con ello también propone una caracterización del espacio de trabajo.

En el Capítulo 5, es presentado el diseño del manipulador, con base en un espacio de trabajo específico y tomando en consideración el estudio que se desarrolló en el Capítulo 4.

1.1 Antecedentes de los manipuladores paralelos

Por su estructura cinemática, los manipuladores se dividen en dos tipos: los seriales y los paralelos. Los primeros tienen una estructura, como su nombre lo indica, serial: un eslabón le sigue a otro y cada uno es movido por un actuador, de tal manera que todos son eslabones activos.

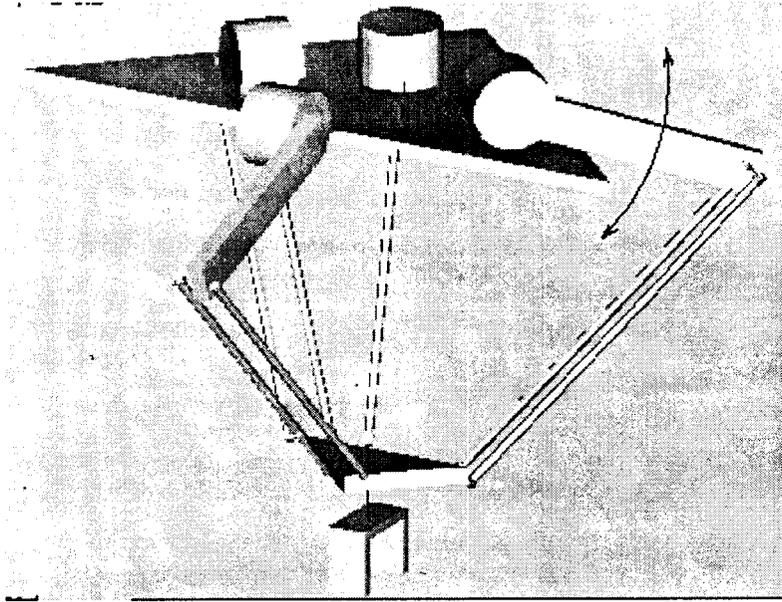


Figura 1. 1 El manipulador paralelo Delta 4.

Los manipuladores paralelos están conformados por cadenas cinemáticas (formadas por eslabones, no todos activos), cada cadena es colocada sobre el eslabón fijo, tiene un solo actuador y provoca un movimiento en la plataforma móvil. Las aplicaciones de robots paralelos se han intensificado en los últimos años y las razones para considerar su uso son: el cálculo de la cinemática inversa se obtiene directamente; el robot paralelo soporta cargas mayores a su propio peso; el error de posición puede corregirse al controlar independientemente cada uno de los actuadores; debido a la alta resolución de movimiento en espacios pequeños que presentan, se han diseñado manipuladores de tareas minuciosas.

Las características anteriores pueden considerarse como ventajas sobre los manipuladores seriales - los cuales se limitan en cuanto velocidad - ya que el cálculo de la cinemática inversa produce más de una solución lo que complica la obtención de soluciones para mover al manipulador a un punto dado; además el error al mover al manipulador es el resultado de la suma de los errores de todos los actuadores, provocando que el uso de estos manipuladores en tareas donde se requiere alta resolución de movimiento no son del todo recomendables. Las características de los manipuladores seriales son: alcance de espacio de trabajo mayor; y el cálculo de la cinemática directa se obtiene directamente. Cuando las ventajas de ambos manipuladores se han querido aprovechar y el resultado ha dado lugar a los manipuladores híbridos, cuyo espacio de trabajo es alcanzado a través de un manipulador serie y se aprovechan las características del paralelo como órgano terminal.

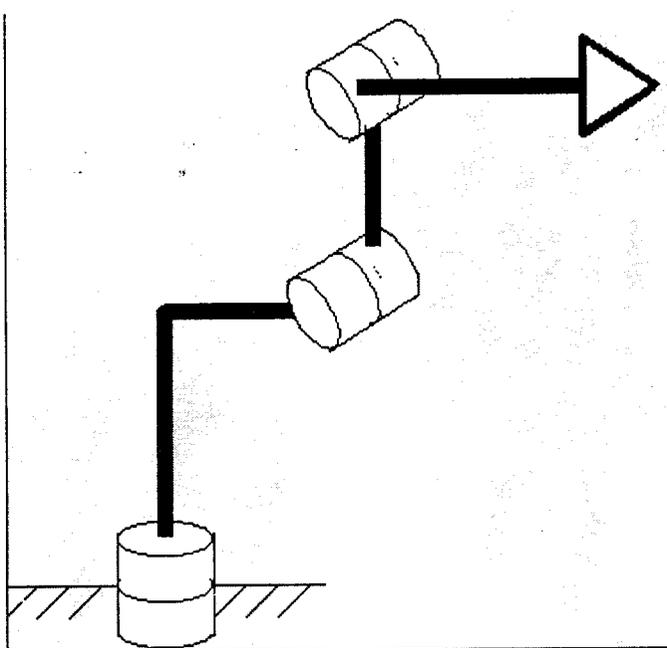


Figura 1. 2 Estructura de un manipulador serial.

Los manipuladores paralelos están compuestos de lazos cerrados cinemáticos formados por dos o más cadenas cinemáticas que conectan una plataforma móvil a una base. Una sola articulación de la cadena es movida por un actuador (articulación activa) y

las articulaciones restantes se mueven por transmisión del movimiento (articulaciones pasivas); tal estructura cinemática permite a los manipuladores paralelos ser manejados por actuadores localizados en la base del manipulador. En contraste, los manipuladores seriales tienen usualmente un actuador por cada articulación a lo largo de la cadena serial, lo que contribuye con una porción significativa de la carga experimentada por el manipulador. Los eslabones de un manipulador paralelo generalmente no necesitan soportar el peso de los actuadores y esto permite que los eslabones del manipulador paralelo sean seleccionados más ligeros que los de un manipulador serial. En resumen, los manipuladores paralelos proporcionan beneficios potenciales asociados con construcción de peso ligero tales como operaciones de alta velocidad y los beneficios de la razón de peso-carga.

En este tipo de manipuladores se distinguen dos plataformas: una fija, usada como base, y otra móvil, que sirve como órgano terminal. En el caso de un manipulador paralelo de seis grados de libertad, la plataforma móvil está unida a la base a través de seis cadenas cinemáticas o piernas - las cuales están constituidas por seis grados de libertad cada una -.

Para cada configuración diferente de manipulador paralelo es necesario realizar estudios de su geometría, cinemática inversa y del espacio de trabajo alcanzable. Una desventaja del manipulador paralelo es el espacio reducido de trabajo, sin embargo, si el espacio de trabajo es conocido, como es comúnmente el caso en aplicaciones industriales, el robot puede ser geoméricamente diseñado para garantizar un buen desempeño en el espacio de trabajo indicado. En este documento, proponemos un estudio de la cinemática inversa de la estructura del manipulador, y a su vez se usa como herramienta para el cálculo del espacio de trabajo.

El primer manipulador paralelo del cual se tiene referencia es el construido por Stewart [Lazarevic, Z]. Este fue utilizado como simulador de vuelos en entrenamiento de pilotos. Por ser la primera referencia que se tiene, es a Stewart a quien se le atribuye su origen. Los actuadores se encuentran en la plataforma fija, ver Fig. 1.1.

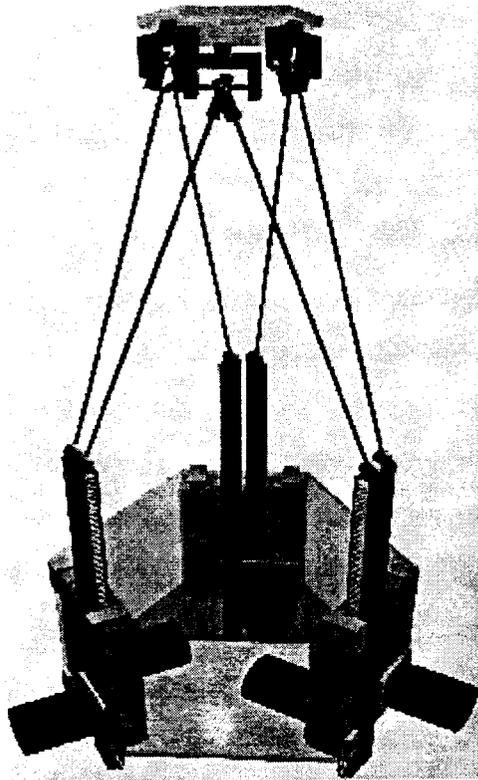


Figura 1. 3 Plataforma Stewart aplicado a un manipulador para cirugía de la arteria coronaria.

Una generalización del robot DELTA es el robot HEXA de Pierrot. Una variante del robot Hexa es el 321-Hexa presentado por Bruyninks. El HEXA tiene el mismo concepto que el DELTA pero le son añadidas articulaciones esféricas que aportan un movimiento de 3 gdl más a la plataforma móvil [Pierrot F., Dauchez P].

El USParm fué diseñado para estudiar la factibilidad de cargar paquetes dentro de un trailer acolchado. Este es un híbrido de manipulador serial y paralelo con diez grados de libertad. El subsistema 'hombro' del UPSarm usa una cadena cinemática de lazo cerrado donde el subsistema 'puño' emplea un mecanismo paralelo de tal manera que puede soportar gran cantidad de peso. El movimiento telescópico provee al UPSarm de un amplio espacio de trabajo, que es alcanzado operando tres articulaciones prismáticas redundantes del brazo. Para el diseño, análisis y control de tiempo real del manipulador híbrido serial-

paralelo, se coordinan tres espacios: espacio coordenado Cartesiano, espacio efectivo de las articulaciones y el espacio de los actuadores [Cheng H.H., Lee, J.J., Penkar R].

El manipulador paralelo de unión de 5 barras construido en la Universidad de Waterloo es una aplicación con una máquina CNC. Los más recientes trabajos hecho en este robot incluye: Control de posición: vibración en una dirección. Control de posición: vibración en dos direcciones. Detección de colisión.

http://www.sena.com/korean/download/parallel_mechanism/IMECE97.pdf. 31-Aug-2000].

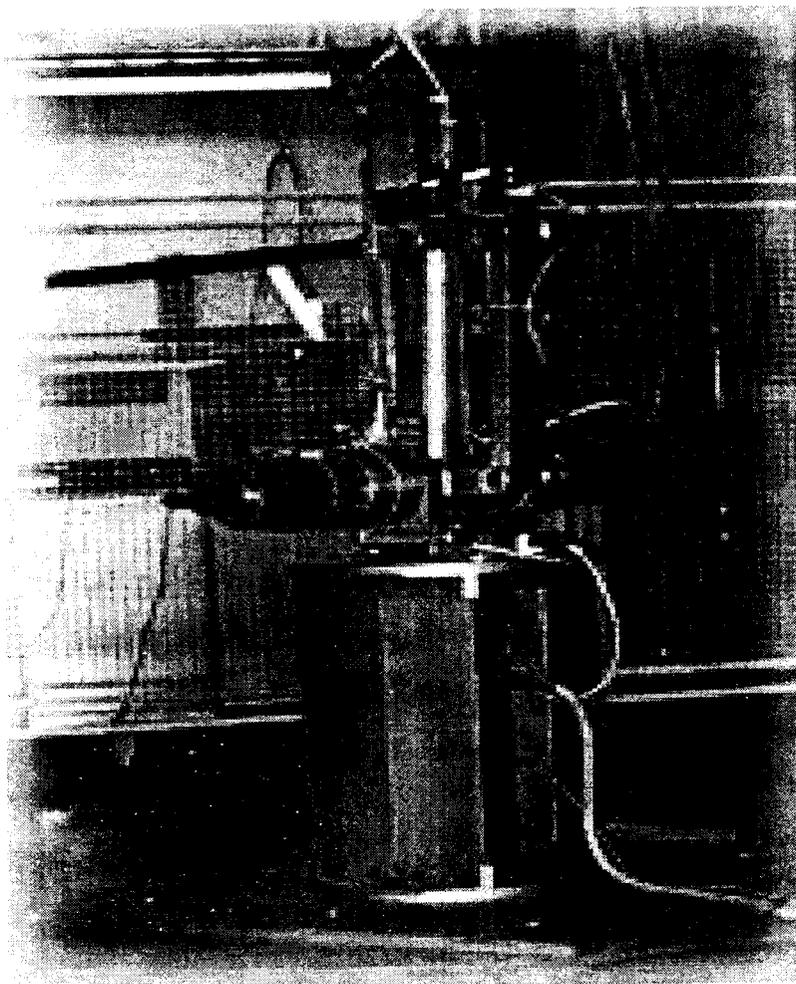


Figura 1. 4 El manipulador de unión de cinco barras.

Los manipuladores que han sido mencionados tienen diferentes configuraciones y sus estudios cinemáticos, geométrico y de movimiento son completamente diferentes, dependiendo de los mecanismos que conformen a la estructura.

Jáuregui, en el CIATEQ unidad Aguascalientes, Mex., presenta un análisis de cinemática directa para un manipulador paralelo. La estructura del manipulador consiste de seis cadenas cinemáticas que conectan una plataforma fija con articulaciones esféricas; su dimensión es controlada por una articulación prismática y se une a la fija a través de una articulación universal. Cada par de piernas está conectada a un solo punto en la plataforma, de esta manera se forma un triángulo rígido en el espacio. La posición de los tres vértices de la plataforma es determinada como una función de la dimensión de cada pierna [Jáuregui, J.C].

Recientemente, Tahmasebi y Tsai introdujeron y estudiaron un manipulador paralelo. Este mecanismo consiste de una plataforma superior y de una inferior y tres eslabones. Cada eslabón se conecta en su extremo inferior, a la plataforma base a través de una articulación esférica del tipo bola - socket. El actuador es lineal y de pasos, pero capaz de moverse simultáneamente en las direcciones x y y , en la plataforma base. El extremo superior del eslabón es conectado a la plataforma móvil por una articulación tipo revoluta o revolución. El ensamblado especial de los pares cinemáticos de este manipulador, que es muy diferente al de la original plataforma Stewart, hace posible obtener un espacio de trabajo mayor. En su análisis, la interferencia entre los eslabones y las limitaciones de las juntas son considerados así como la composición del espacio de trabajo para identificar regiones constituyentes de acuerdo a diferentes clases de poses de manipuladores [Lawrence Yao].

Carretero, hizo el estudio de las características cinemáticas de un manipulador paralelo de tres grados de libertad. Su trabajo se centra en obtener una arquitectura que permita eliminar movimientos parásitos, esto es, movimientos derivados de las interrelaciones entre los mecanismos. Propone usar valores específicos en las variables del diseño reflejadas en una matriz Jacobiana, que permiten minimizar los movimientos parásitos [Carretero J.A., Podhorodeski R.P. and Nahon M].

1.2 Estado del Conocimiento

Los esfuerzos por determinar un método para realizar el diseño de un manipulador paralelo se ven obstaculizados por el cálculo de la cinemática directa; este cálculo, por las características estructurales del manipulador, nos lleva a obtener múltiples soluciones – de desplazamiento de los eslabones activos - para un punto coordinado dado. El diseño está enfocado a obtener una estructura de un robot a partir de establecer un conjunto de necesidades que sean cumplidas; dentro de este conjunto, es de importancia el alcanzar un espacio de trabajo determinado. Un estudio para la determinación del espacio de trabajo para una plataforma Stewart fue presentado por Plessis y Snyman [12du Plessis L.J., Snyman J.A]. Chablat y Wenger se han ocupado de caracterizar las regiones donde es posible realizar trayectorias dentro del espacio de trabajo de manipuladores paralelos [Chablat D., Wenger P].

Merlet propone un algoritmo que determina todas las posibles geometrías de una plataforma Gough de 6 grados de libertad cuyo espacio de trabajo debe incluir el espacio de trabajo deseado. Este espacio de trabajo deseado está descrito por un conjunto de objetos geométricos limitados por puntos, segmentos y esferas, que describen la posición del centro de la plataforma móvil, la orientación de la misma. Su análisis parte de fijar los valores de la longitud de uno de los eslabones y dos ángulos de la estructura. Su método es generalizado y no toma en cuenta las limitaciones de las articulaciones [Merlet J.P].

2. ELEMENTOS DEL MANIPULADOR.

2.1 Configuración del manipulador bajo estudio

El manipulador paralelo se compone de una plataforma fija, seis cadenas cinemáticas y una plataforma móvil. La figura 2.1 muestra una representación del modelo geométrico. La plataforma fija sostiene a las seis cadenas cinemáticas y estas a su vez sostienen a la plataforma móvil; en la plataforma móvil se coloca el órgano terminal. El marco de coordenadas absolutas coincide con la estructura de la plataforma fija.

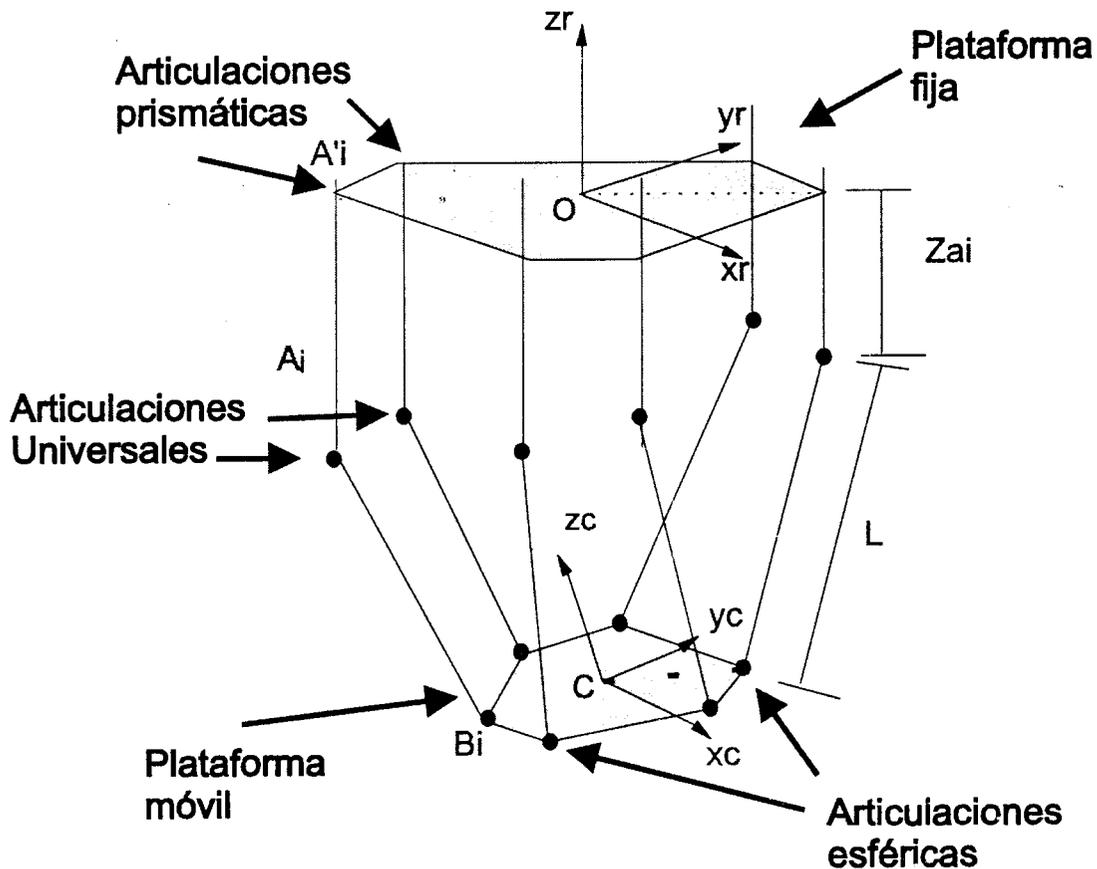


Figura 2. 1 Representación de la configuración del manipulador paralelo bajo estudio.

La Fig. 2.2 presenta la configuración de dos cadenas cinemáticas. Considerando una sola cadena se observa que la plataforma fija sostiene un extremo de la misma; en este extremo es colocado el actuador que ejerce movimiento sobre el eslabón móvil de la articulación prismática (se propone un sistema piñón – cremallera). El resultado de tal acción es un desplazamiento del eslabón móvil solo en el eje z, lo cual aporta un grado de libertad a la cadena. Este eslabón es conectado a una articulación universal o cardan que aporta a la cadena cinemática dos grados más de libertad.

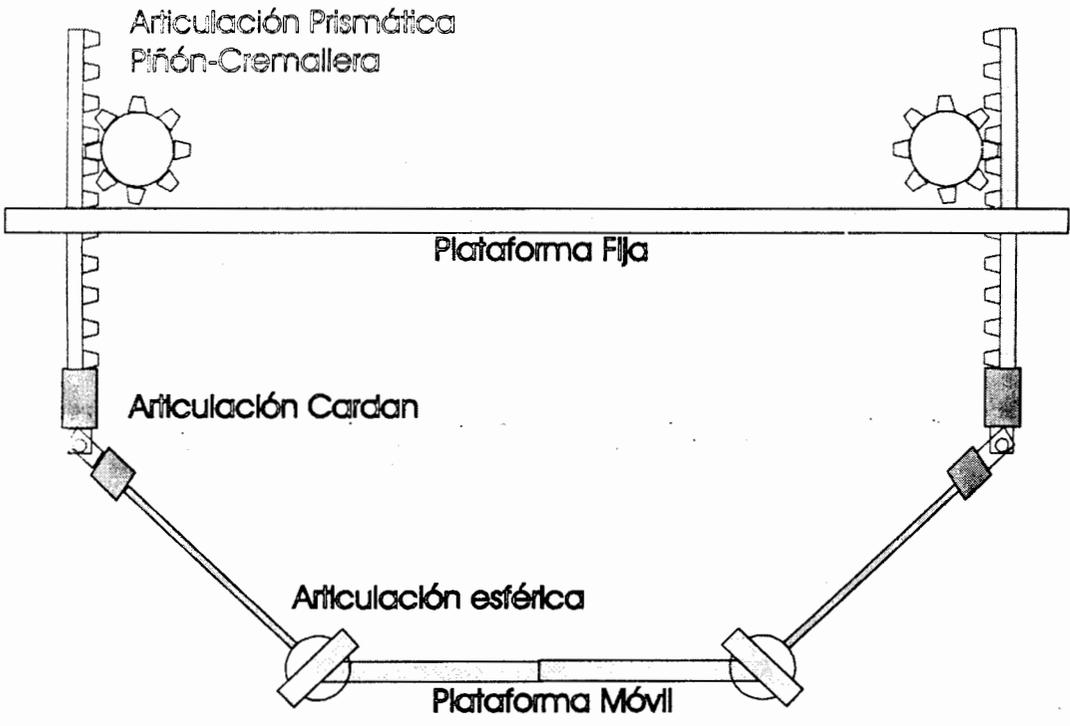


Figura 2. 2 Representación de dos cadenas cinemáticas.

La articulación cardán está conectada a través de un eslabón de longitud fija, a una articulación esférica con la cual se obtienen tres grados de libertad más. En total cada cadena tiene seis grados de libertad. La articulación esférica se conecta directamente a la plataforma móvil. La plataforma fija es considerada como el eslabón fijo. La orientación de la plataforma móvil es la orientación que el manipulador tiene y las coordenadas del punto central de esta son tomadas como las coordenadas que el manipulador alcanza.

La figura 2.3 muestra los ejes sobre los cuales cada articulación tiene movimiento. La articulación prismática tiene movimiento solamente en el eje z. La articulación cardán tiene movimiento en los ejes x y y. Finalmente la articulación prismática tiene movimiento en los tres ejes x, y y z.

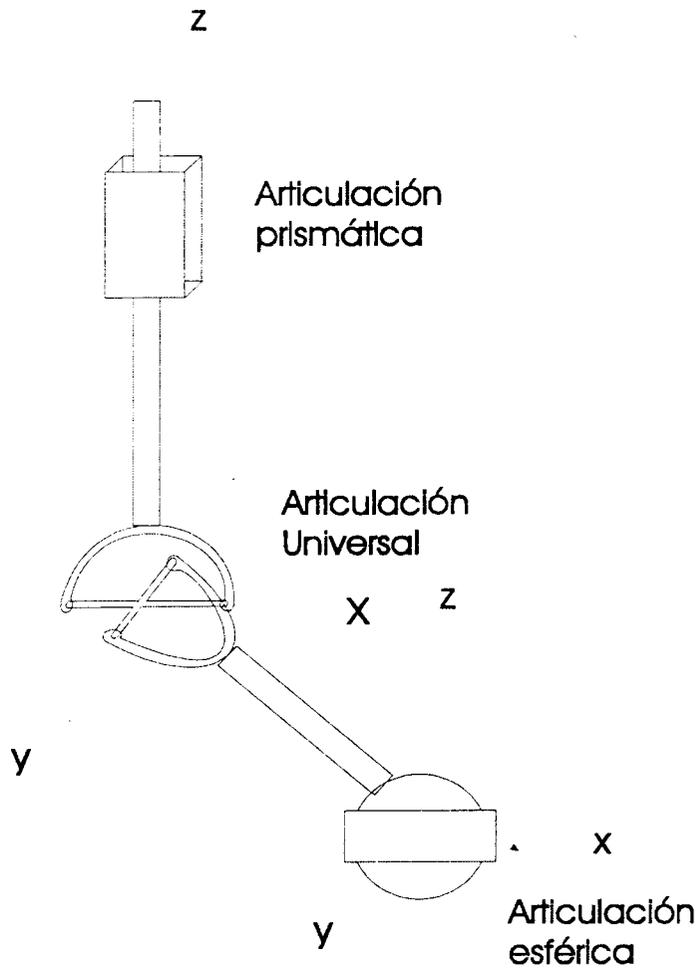


Figura 2. 3 Descripción de la cadena cinemática y los ejes de cada articulación.

2.2 Descripción geométrica

La vista del manipulador paralelo en el plano xy puede observarse en la Fig.2.4. O representa el origen de coordenadas absolutas del manipulador. En los punto A_i' , donde el subíndice i denomina el número de cadena cinemática, son colocadas las conexiones entre actuador y la articulación prismática (piñón - cremallera); todas los puntos A_i' se encuentran

al nivel de la plataforma fija en el eje z. Entre los puntos A_i' y A_i se encuentran las articulaciones prismáticas (cremallera). En A_i están las uniones de las articulaciones prismáticas con las articulaciones cardan. Los puntos B_i son el lugar de localización de las articulaciones esféricas, esto es, donde el eslabón L y la plataforma móvil se unen. El punto C es el centro de la plataforma móvil. β_i es el ángulo en el plano xy entre dos eslabones L pertenecientes a cadenas cinemáticas que forman un par. ε_i es el ángulo entre dos articulaciones esféricas a partir del origen del plano xy.

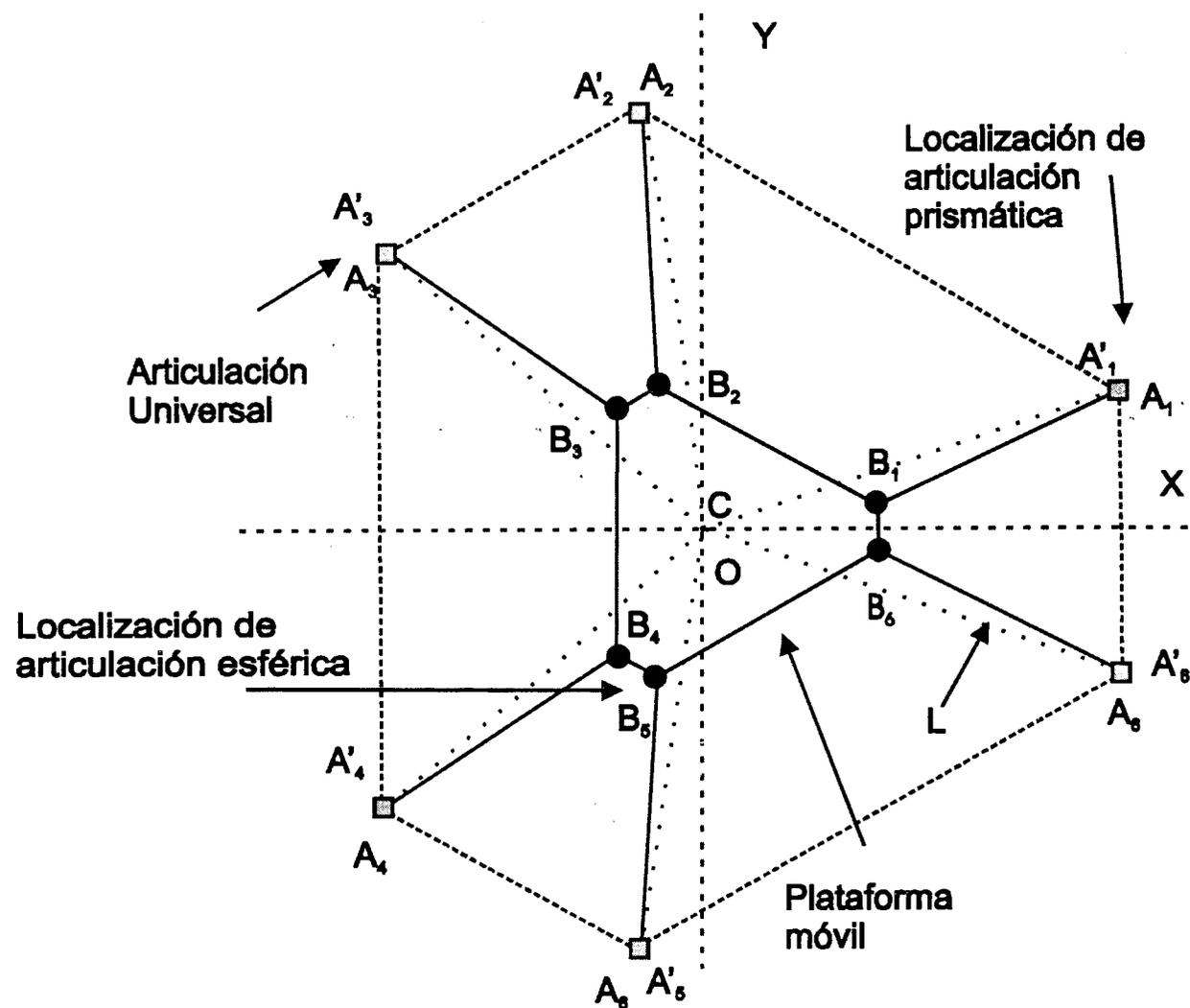


Figura 2. 4 Modelo geométrico del manipulador paralelo en el plano xy.

El eslabón L es presentado en la figura 2.5 a) en tres dimensiones. La figura está dibujada en un marco independiente al eje de coordenadas total del manipulador.

La vista del mismo eslabón en el plano xy presentada en la Fig.2.5 b), muestra los elementos de una cadena cinemática. $\beta/2$ es el ángulo del eslabón L y el eje x. $\varepsilon/2$ es el ángulo entre el punto B_i y el eje x.

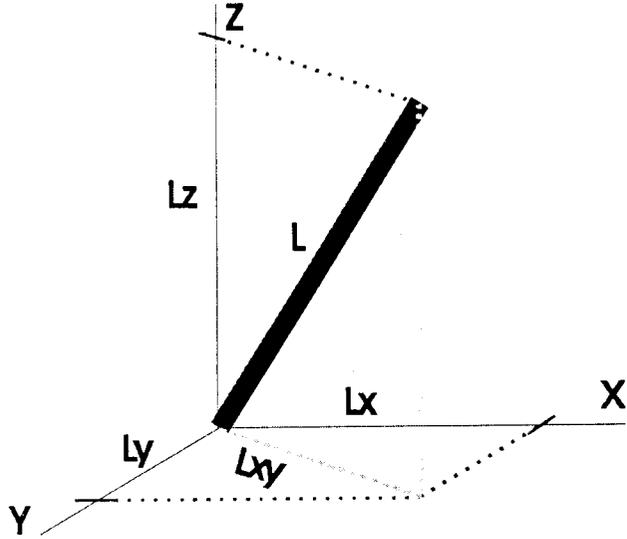


Figura 2. 5 a) El eslabón L en tres dimensiones.

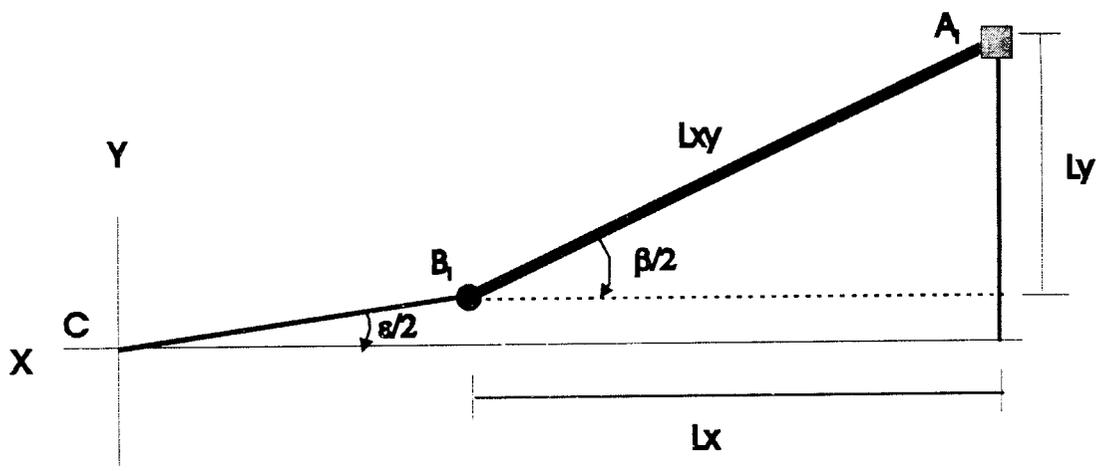


Figura 2. 1 b) Descripción detallada de una cadena cinemática en el plano xy.

En el plano xz tenemos una vista como se muestra en la Fig. 2.6, para una sola cadena cinemática. La articulación prismática tiene una longitud $\|A, A_i\|$, que de forma abreviada

llamamos AA' . El eslabón L une a A_i y a B_i , y tiene un ángulo con respecto al eje z definido como α . La distancia entre el centro C y el punto B_i , forma parte también de la estructura de la plataforma móvil y es llamada CB_i .

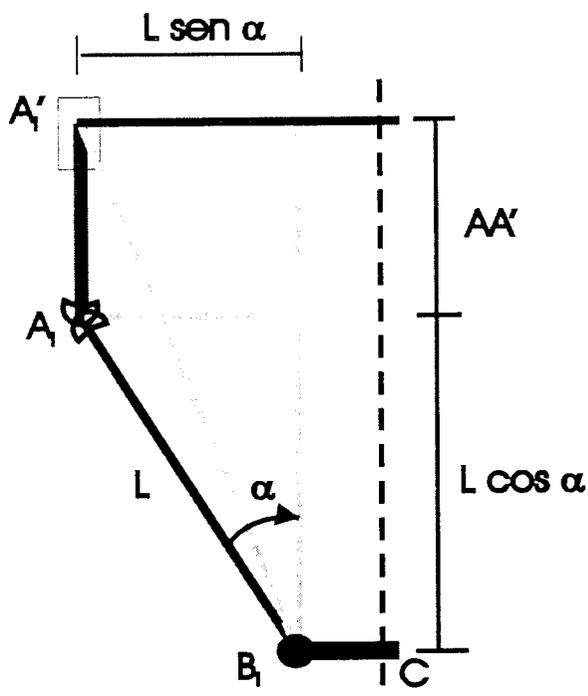


Figura 2. 6 Representación en el plano xz de una cadena cinemática.

2.3 Obtención de coordenadas y dimensiones del manipulador

Los datos iniciales para el cálculo de las dimensiones del manipulador son: la longitud de la articulación prismática AA' , la longitud el eslabón L , el radio de la plataforma móvil CB_i , el ángulo α , el ángulo β y el ángulo ε . Es suficiente calcular estas dimensiones para una cadena cinemática, las seis cadenas tienen las mismas dimensiones.

La proyección de L sobre el plano xy es igual a:

$$L_{xy} = L \operatorname{sen} \alpha \quad (2. 1)$$

por otro lado, la distancia entre A_i y B_i en la Fig. 2.5, cuya proyección en el eje x es:

$$L_x = L_{xy} \cos(\beta / 2) = L \sin \alpha \cos(\beta / 2) \quad (2. 2)$$

y la proyección en el eje y es:

$$L_y = L_{xy} \sin(\beta / 2) = L \sin \alpha \sin(\beta / 2) \quad (2. 3)$$

La proyección del segmento CB_i sobre el eje x es igual a:

$$CB_x = CB_i \cos(\varepsilon / 2) \quad (2. 4)$$

y la proyección de CB_i sobre el eje y es:

$$CB_y = CB_i \sin(\varepsilon / 2) \quad (2. 5)$$

Las coordenadas en el espacio del punto B_i , correspondiente a la cadena presentada en las figuras 2.5 y 2.6 son:

$$B_x = CB_x \quad (2. 6)$$

$$B_y = CB_y \quad (2. 7)$$

$$B_z = -(L \cos \alpha + AA') \quad (2. 8)$$

Las coordenadas del punto A_i correspondiente a la cadena, son:

$$A_x = L_x + CB_x \quad (2. 9)$$

$$A_y = L_y + CB_y \quad (2.10)$$

$$A_z = -AA' \quad (2.11)$$

Para el punto A_i' , las coordenadas xy son las mismas que para A_i , y solo difieren en la componente z :

$$A'_z = 0 \quad (2.12)$$

A partir de estas coordenadas se obtiene el resto de coordenadas de todo el manipulador, aplicando la transformación de rotación a cada uno de los puntos para obtener, seis conjuntos de coordenadas.

3. CINEMÁTICA INVERSA DEL MANIPULADOR PARALELO

3.1 Descripción del manipulador bajo estudio

El problema de la cinemática inversa consiste en encontrar los movimientos de cada uno de los eslabones activos que conforman al manipulador para alcanzar con el órgano terminal una actitud en el espacio cartesiano. En este capítulo, se propone un método que sirva para la solución el cálculo de la cinemática inversa. La cinemática inversa utiliza transformaciones de rotación y traslación, las variables usadas (dimensiones, vectores y ángulos) dependen de la localización de una posición inicial y de una posición final deseada y alcanzable por el manipulador. Al generalizar estos cálculos para cualquier actitud, podemos identificar aquellas para los cuales los desplazamientos de los eslabones son físicamente imposibles, si las dimensiones de tales eslabones están predeterminadas.

3.2 Solución de la Cinemática Inversa

La solución de la Cinemática Inversa (CI) del manipulador paralelo que se propone, consiste en calcular el desplazamiento del eslabón prismático correspondiente a cada cadena cinemática. Para alcanzar el objetivo de un análisis del manipulador completo, primero se realizara para una sola cadena cinemática y posteriormente se extenderá el resultado para el resto de cadenas. Una cadena cinemática está compuesta de los siguientes elementos: la articulación prismática, con un grado de libertad, que está unida directamente a la universal cuya aportación de movimiento son dos grados de libertad. La sección conformada por la articulación esférica (con tres grados de libertad) y el radio de la plataforma móvil puede estudiarse con ayuda de los ángulos de Euler, que son usados para especificar la orientación de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia. Los ángulos de Euler (ϕ, ψ, θ especifican tres sucesivas rotaciones que deben ocurrir en el orden especificado) [13]. En el caso general, la matriz de transformación para rotar desde los ejes xyz hasta $x'y'z'$ es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La matriz M está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \text{sen} \psi \cos \phi \text{sen} \theta & \text{sen} \psi \cos \theta + \cos \psi \cos \phi \text{sen} \theta & \text{sen} \phi \text{sen} \theta \\ -\cos \psi \text{sen} \theta - \text{sen} \psi \cos \phi \cos \theta & -\text{sen} \psi \text{sen} \theta + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & \text{sen} \phi \text{sen} \theta \\ \text{sen} \psi \text{sen} \phi & -\cos \psi \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Para describir el modelo, se muestra en la Fig.3.1, una representación parcial del mecanismo. X_r , Y_r y Z_r son las coordenadas del marco de referencia absoluto del manipulador.

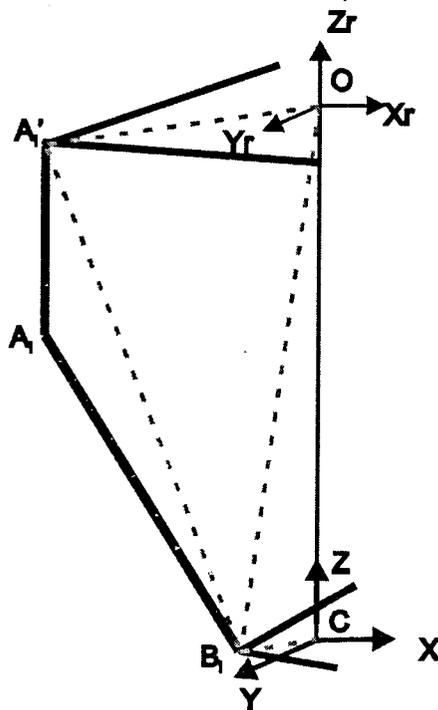


Figura 3. 1 Representación geométrica de una cadena cinemática.

Es importante observar que para la solución de la CI, las coordenadas de A_i y B_i ($i = 1...6$) son determinadas y definidas en el plano absoluto del manipulador. Estos puntos corresponden a las uniones entre la articulación prismática y la plataforma fija y entre la articulación esférica y la plataforma móvil. Podemos constatar que si la posición de la plataforma móvil es conocida, a través del vector \overline{OC} es posible expresar la posición de los puntos B_i en el plano absoluto. La posición de los puntos B_i que corresponden a la plataforma móvil puede ser obtenidos por:

$$\overline{OB}_i = \overline{OC} + M\overline{CB}_i \quad (3.3)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde M es la matriz de rotación para alcanzar el punto C, y los valores de m_i están dados por la ecuación 3.2

De esta forma, podemos obtener la ecuación que describe a una de las cadenas cinemáticas del manipulador:

$$\overline{A_i B_i} = \overline{A_i A_i'} + \overline{A_i' B_i}$$

$$= \overline{A_i A_i'} - \overline{OA_i'} + \overline{OC} + M\overline{CB}_i$$

$$\overline{A_i' B_i} = -\overline{OA_i'} + \overline{OC} + M\overline{CB}_i \quad (3.5)$$

Como la longitud del segmento $\overline{A_i B_i}$ es constante y de valor L, la norma, al aplicar producto punto, es:

$$L^2 = \|\overrightarrow{A_i B_i}\|^2 = \quad (3.6)$$

$$= (\overrightarrow{A_i A_i})^T \cdot \overrightarrow{A_i A_i} + (\overrightarrow{A_i B_i})^T \cdot \overrightarrow{A_i B_i} + 2(\overrightarrow{A_i A_i})^T \cdot \overrightarrow{A_i B_i}$$

El vector $\overrightarrow{A_i A_i}$ puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{A_i A_i} = -Za_i \overrightarrow{U_i} \quad (3.7)$$

Donde Za_i es la longitud de la articulación prismática y U_i es el vector unitario de $\overrightarrow{A_i A_i}$.

Al sustituir (3.7) en (3.6) se obtiene:

$$L^2 = Za_i^2 + (\overrightarrow{A_i B_i})^T \cdot \overrightarrow{A_i B_i} - 2Za_i \overrightarrow{U_i}^T \cdot \overrightarrow{A_i B_i} \quad (3.8)$$

La ecuación anterior está en términos de las coordenadas articulares Za_i . Al definir las coordenadas, con respecto a la referencia relativa, para los términos A_i , B_i , U_i y C obtenemos:

$$A_i = \begin{bmatrix} Xa_i \\ Ya_i \\ Za_i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} Xb_i \\ Yb_i \\ Zb_i \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} Xc \\ Yc \\ Zc \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y también definimos $\overrightarrow{A_i B_i}$:

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \begin{bmatrix} xu_i \\ yu_i \\ zu_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Entonces la ecuación. 3.5 puede expresarse de la siguiente manera:

$$\overline{A_i' B_i} = -\overline{OA_i'} + \overline{OC} + \overline{MCB_i'} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} xu_i \\ yu_i \\ zu_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xc - Xa_i + m_1 Xb_i + m_2 Yb_i + m_3 Zb_i \\ Yc - Ya_i + m_4 Xb_i + m_5 Yb_i + m_6 Zb_i \\ Zc + m_7 Xb_i + m_8 Yb_i + m_9 Zb_i \end{bmatrix}$$

Basada en lo anterior, (3.8) puede escribirse como sigue:

$$L^2 = Za_i^2 + \begin{bmatrix} xu_i & yu_i & zu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xu_i \\ yu_i \\ zu_i \end{bmatrix} - 2za_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xu_i \\ yu_i \\ zu_i \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$L^2 = Za_i^2 + xu_i^2 + yu_i^2 + zu_i^2 - 2Za_i zu_i \quad (3.13)$$

$$L^2 = (zu_i - Za_i)^2 + xu_i^2 + yu_i^2 \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) representa una esfera de centro B_i y radio L intersectada en la dirección del vector $\overline{A_i A_i'}$, es de segundo grado en za_i y tiene dos soluciones (ver fig. 3.4).

Ahora serán determinadas las soluciones reales de la ecuación (3.14). Una de las soluciones corresponde a una configuración de la plataforma móvil donde la recta paralela al eje U_i pasando por el punto A_i' que no corta la esfera de centro B_i - con radio del largo del segmento rígido L -. Dicho de otra forma, significa que el montaje de la plataforma móvil del prototipo no es posible en esta configuración (Fig. 3.4). De otra manera, representada por la Fig. 3.4b, la esfera - de centro B_i y radio L - es atravesada por la recta cuya ecuación es una de las posibles soluciones de (3.14). En los otros casos de la Fig., la elección de una de las dos soluciones reales de (3.14) es hecha teniendo en cuenta el curso máximo y mínimo de los actuadores.

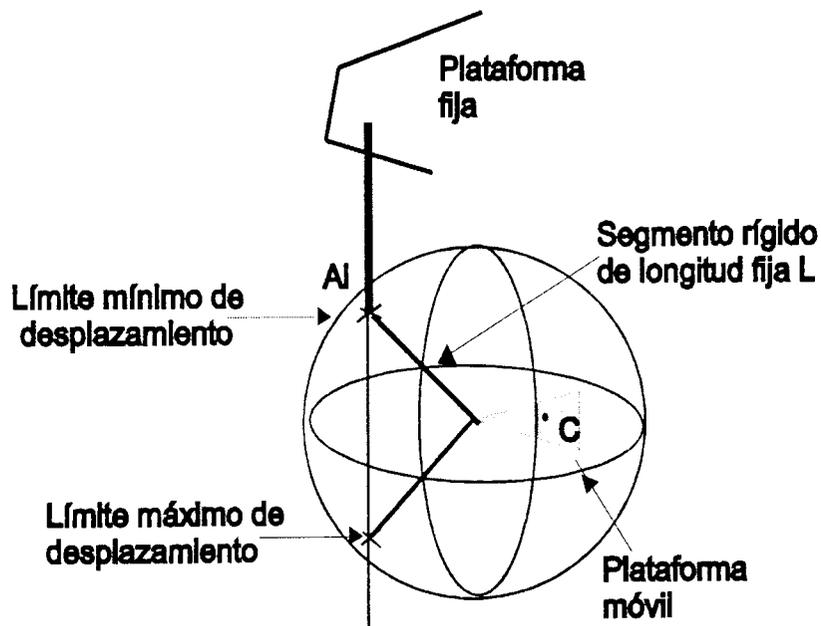


Figura 3. 2 Representación de las posibles soluciones de la ecuación 3.14.

La elección entre los dos puntos de intersección es hecha sobre el punto más próximo a la base. La relación del modelo geométrico inverso que permite calcular la componente articular Za_i conociendo el vector generalizado Xc es:

$$(Za_i - zu_i)^2 = L^2 - xu_i^2 - yu_i^2$$

$$Za_i = zu_i \pm \sqrt{L^2 - xu_i^2 - yu_i^2}$$

$$Za_i = zu_i - \sqrt{(L^2 - xu_i^2 - yu_i^2)} \quad (3. 15)$$

Está demostrado que la solución de la CI es idéntica para todas las cadenas [10Mouly N.] por esta razón, el mismo cálculo se aplica para las seis cadenas cinemáticas.

4. CALCULO DEL ESPACIO DE TRABAJO

El cálculo del espacio de trabajo que el manipulador puede alcanzar es una de sus características primordiales y debe ser considerada desde la etapa de diseño. Factores como la longitud de los eslabones, el ángulo máximo de apertura de las articulaciones y los movimientos característicos de los actuadores son considerados para determinar las actitudes posibles y el alcance que puede tener el manipulador. El espacio de trabajo comprende todos aquellos puntos coordinados que el manipulador puede alcanzar. A partir de esta definición se establecen otros conceptos necesarios para la siguiente sección.

La tabla 4.1 que se encuentra al final de este capítulo, presenta valores de L , AA' , CB , α , β , y ξ (estos tres últimos representan ángulos entre los vectores L , AA' y CB), que son variables de la estructura del manipulador y variables de entrada para el diseño. Junto a estas variables, son mostrados resultados con métodos experimentales que se hicieron durante este estudio: Barrido de coordenadas, volumen de cono – cuya forma se asemeja al del espacio de trabajo del manipulador con valores de radio de base y altura, similares a las del volumen real del espacio de trabajo -, una ecuación obtenida a partir de una serie de puntos que se encuentran a lo largo de la frontera del espacio de trabajo y por el método de caracterización.

En este capítulo se presentan resultados de diferentes propuestas de obtención del espacio de trabajo, los resultados son presentados en la tabla 4.1. Los cálculos se realizan con base en diferentes configuraciones del manipulador paralelo.

4.1 Cálculo del Espacio de Trabajo por barrido de coordenadas

Para obtener datos confiables acerca del espacio de trabajo, de inicio se aplica un método para obtenerlo, que se ha llamado en este documento Barrido de Coordenadas; los resultados obtenidos de esta manera son considerados reales y sirven para hacer comparación con resultados obtenidos con otras técnicas. Primero se establece un espacio donde - con mayor probabilidad - el espacio de trabajo del manipulador paralelo podrá

encontrarse. No existe un método para determinar tal área por lo cual es seleccionada lo suficientemente grande en los 3 ejes coordenados y, a partir de tal selección, se hace barrido de todos los puntos contenidos dentro, primero en el eje y, después en el eje x, y por último, en el eje z. La exactitud del resultado depende del incremento Δ que se elija entre los puntos.

Este método se realiza proponiendo una orientación de $\psi = 0$, $\phi = 0$ y $\theta = 0$ del órgano terminal en el punto a analizar, ya que los puntos alcanzables con orientación diferente de $(0, 0, 0)$ son un subconjunto del conjunto de puntos alcanzables sin esta transformación (se necesita de un desplazamiento mayor por parte de los eslabones prismáticos de algunas de las cadenas cinemáticas para dar orientación a la plataforma en un punto), por lo cual podemos simplificar nuestro estudio al considerar al manipulador de 3 gdl. El criterio para determinar si el punto pertenece o no al espacio de trabajo se basa en los desplazamientos de los eslabones prismáticos, si estos rebasan la longitud de la dimensión real del mismo, entonces el punto bajo análisis se encuentra fuera del alcance del manipulador.

Una vez terminado el barrido, para obtener el valor del volumen, cada punto alcanzado, es multiplicado por la resolución entre puntos.

$$Vol = (no.puntos) \times (resolución)$$

El cálculo del espacio de trabajo para diferentes dimensiones de la estructura del manipulador es presentado en la tabla 4.1 bajo el título de Vol. Real. Los datos que se utilizaron para obtener la graficación de las figuras 4.1 corresponden a la configuración No.2 de la tabla 4.1, cuyos parámetros son $L = 40$, $AA' = 40$, $CB = 10$, $\alpha = 30$, $\beta = 33.676$ y $\varepsilon = 20$.

La figura 4.1 a) muestra una vista en el plano xz, b) muestra el espacio en tres dimensiones y c) tiene una proyección en el plano xy. El programa en MatLab con el cual se obtuvieron los valores de volumen real de la tabla 4.1, se encuentra en el apéndice, Programa 1. El Programa 2 fue utilizado para graficar las figuras 4.1.

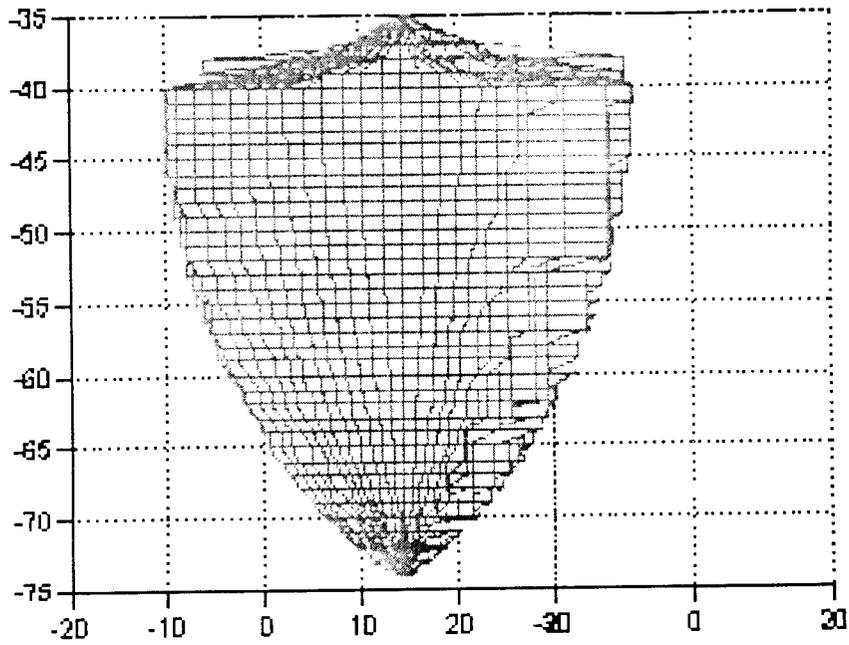


Figura 4. 1 a) Vista del espacio de trabajo en plano xz.

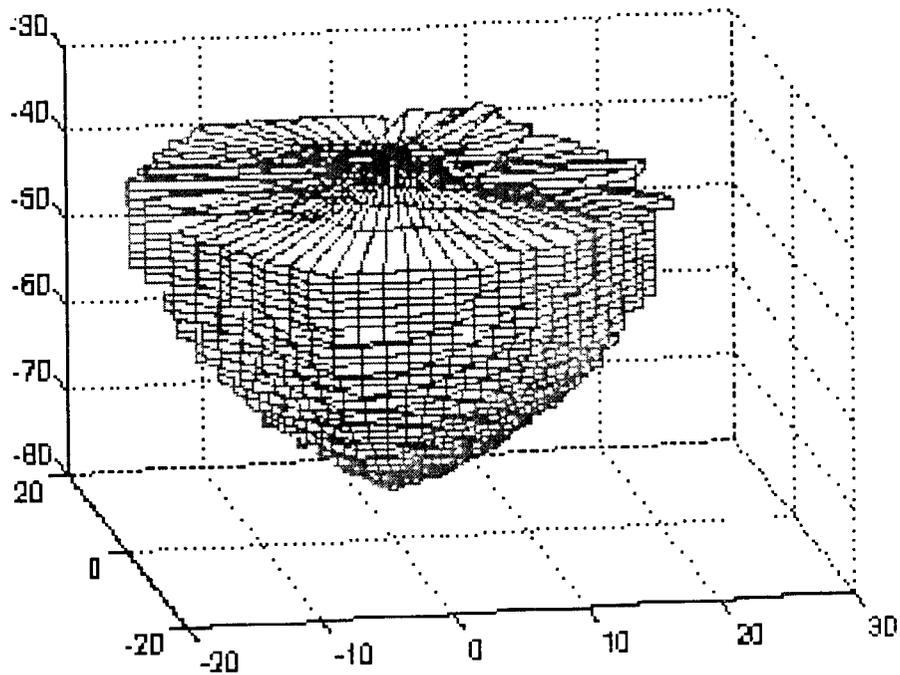


Figura 4.1 b) Espacio de trabajo obtenido con barrido de coordenadas con vista en tres dimensiones.

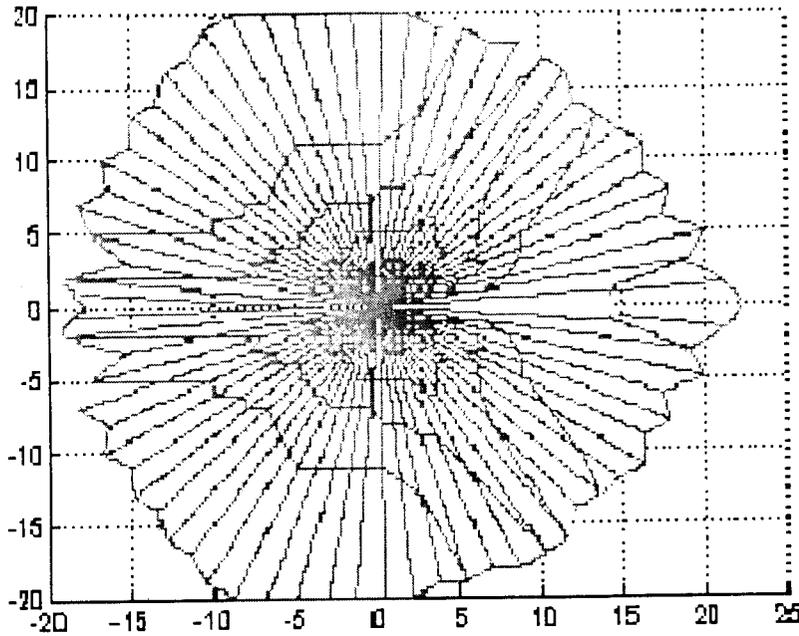


Figura 4.1 c) Vista en el plano xy del espacio de trabajo.

4.2 Comparación del Espacio de Trabajo con el volumen de un cono

Por la figura que el método anterior proporciona, hace suponer que el espacio de trabajo puede aproximarse al volumen de un cono. Al proponer el volumen del cono como una posibilidad para obtener el espacio de trabajo, el objetivo es analizar qué tan cercana es la forma superficial del espacio de trabajo con la del cono y con ello, proponer una caracterización con ecuaciones simples. La ecuación del volumen del cono utiliza el radio de la base el cual es determinado al calcular, con la ayuda de la cinemática inversa, el punto más alejado en el eje x. Además la altura del cono es considerada con el valor de AA':

$$Vol.cono = \frac{(r^2 h \pi)}{3} \quad (4.1)$$

Al comparar los resultados de la columna Vol. cono en la tabla 4.1 con la del Vol. real demuestra que este no es método confiable. Además, la forma del volumen de un cono no coincide totalmente con la mostrada en las figuras 4.1.

4.3 Cálculo del Espacio de Trabajo por rotación de una ecuación obtenida con interpolación de puntos

Las figuras 4.1a) y b) mostraron que el borde del volumen real del espacio de trabajo no es lineal. El método del cálculo del volumen del cono muestra resultados de valor menores que los del volumen real.

El método de calcular el espacio de trabajo por interpolación consiste en obtener, por barrido de coordenadas, solo los puntos más alejados del espacio de trabajo; si se consideran los puntos externos y contenidos solo en el plano xz; posteriormente, con ayuda del paquete MatLab, específicamente con la opción de interpolación de puntos, es calculada una función que representa el comportamiento de los puntos de la superficie del espacio.

Al contar con una función que describe la frontera del espacio en un plano, puede obtenerse el volumen resultante de rotar la función sobre el eje z, utilizando el teorema siguiente:

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x , y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V es el volumen de S en unidades cúbicas, entonces

$$V = \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (4.2)$$

La figura 4.2a presenta la gráfica del conjunto de puntos que forman la frontera del espacio de trabajo. La figura 4.2b muestra la rotación de tal línea sobre el eje z.

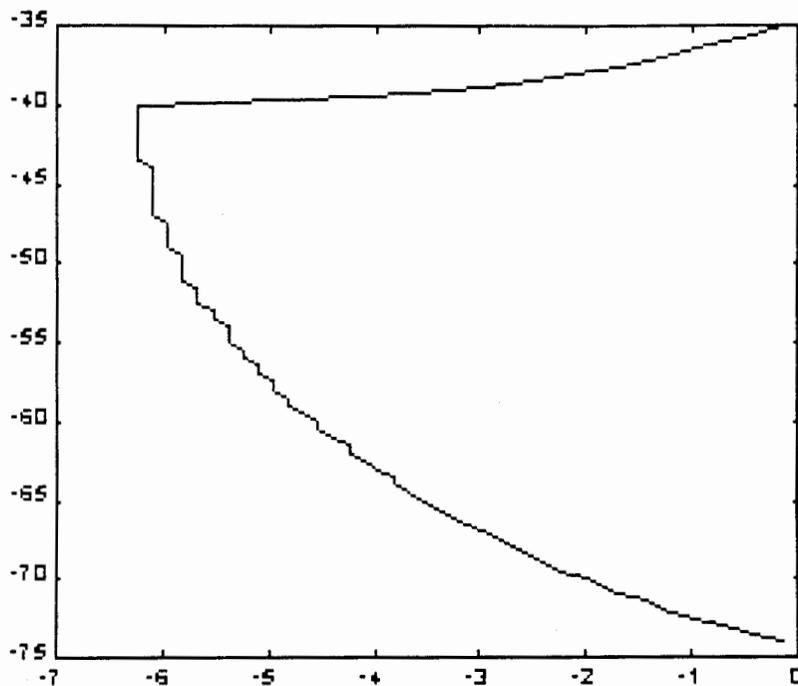


Figura 4. 2 a) Interpolación de los puntos de la superficie del espacio de trabajo.

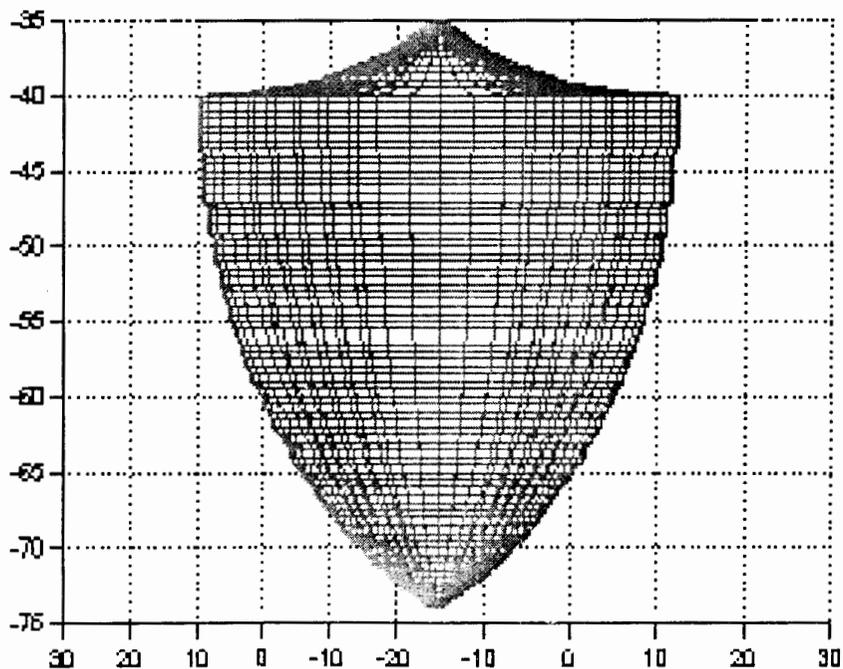


Figura 4.2 b) Espacio de trabajo obtenido con interpolación en el plano xz.

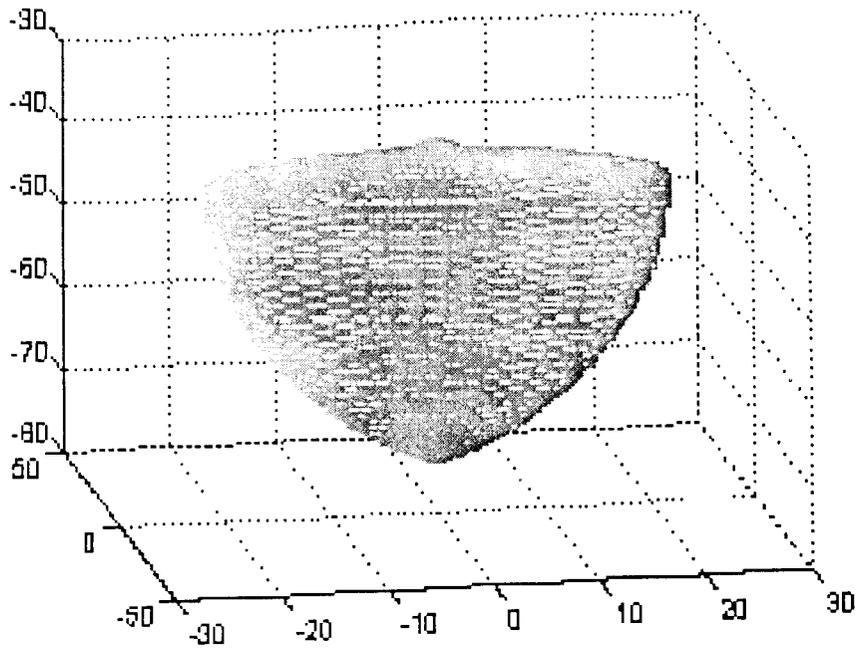


Figura 4.2 c) Espacio de trabajo obtenido con interpolación en tres dimensiones.

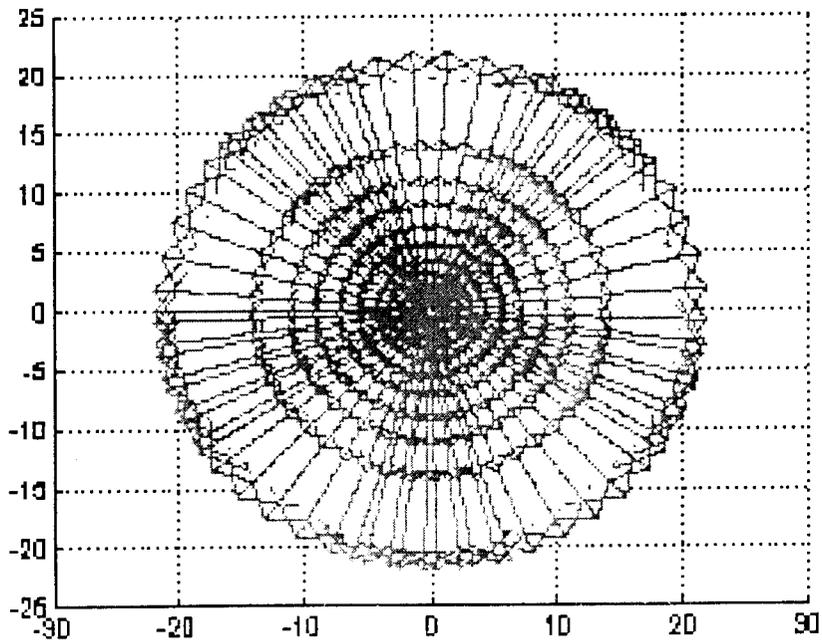


Figura 4.2 d) Espacio de trabajo obtenido con interpolación en el plano xy.

Este método aporta un volumen muy cercano al del valor real del espacio de trabajo, pero aún se encuentra muy lejos de ser un método confiable, puesto que no se hacen otras consideraciones como la forma de la base en el plano xy, simplemente se considera circular, como se observa en la figura 4.2 d). Para explicar el por qué existen aun variaciones entre el resultado de este método y el del barrido de coordenadas, debemos analizar el la forma del volumen real en el plano xy mostrado en la figura 4.1 c).

La aportación de este método está al analizar la figura 4.2 a) y observar que desde el punto $z = -55$ hasta $z = ZZ$, el borde se va incrementando en x, pero a partir de $z = ZZ$, el valor de x se mantiene dentro de un rango hasta llegar hasta $z = ZZX$, donde el valor de x empieza a decrecer. Con esta observación establecemos que el espacio de trabajo podría estar formado por tres secciones al variar entre los puntos extremos máximo y mínimo de alcance del manipulador en el eje z.

Los datos para obtener las figuras son los correspondientes a la configuración no. 2 en la tabla 4.1, cuyos valores son $L = 40$, $AA' = 40$, $CB = 10$, $\alpha = 30$, $\beta = 33.676$ y $\varepsilon = 20$. Los resultados fueron calculados y graficados con el Programa 3, realizado en MatLab.

4.4 Cálculo del Espacio de Trabajo basado en la geometría del manipulador

Ahora proponemos un método más formal, basado en la geometría del manipulador paralelo y en la consideración de tener solo movimientos de 3 gdl por parte del manipulador, ya que las posiciones más lejanas se alcanzan sin ángulos de orientación del órgano terminal (8). Con esta idea, puede visualizarse el espacio de trabajo en el plano xy, según Fig. 4.3.

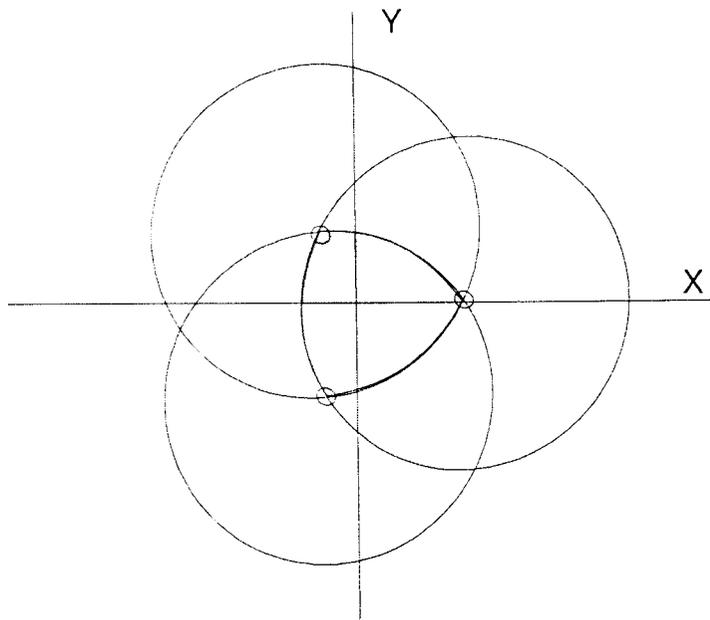


Figura 4. 3 El espacio de trabajo en el plano xy

El área sombreada en la Fig. 4.3 representa la intersección de los posibles movimientos que cada par de cadenas cinemáticas puede alcanzar. A esta forma de triángulo se le conoce como triángulo de Reuleaux, y entre sus características se encuentran: sus vértices coinciden con los de un triángulo equilátero, que se forma al intersectar tres círculos. El centro del triángulo, por la geometría del manipulador, coincide con el centro del espacio de trabajo.

Para la figura 4.4, consideramos un desplazamiento máximo en z y el centro de la plataforma fija coincide con el eje z. Los números denotan la respectiva cadena cinemática del manipulador. La figura 4.5 representa un par de cadenas (4 y 5) cuando el manipulador se encuentra en la posición que la figura 4.4 muestra.

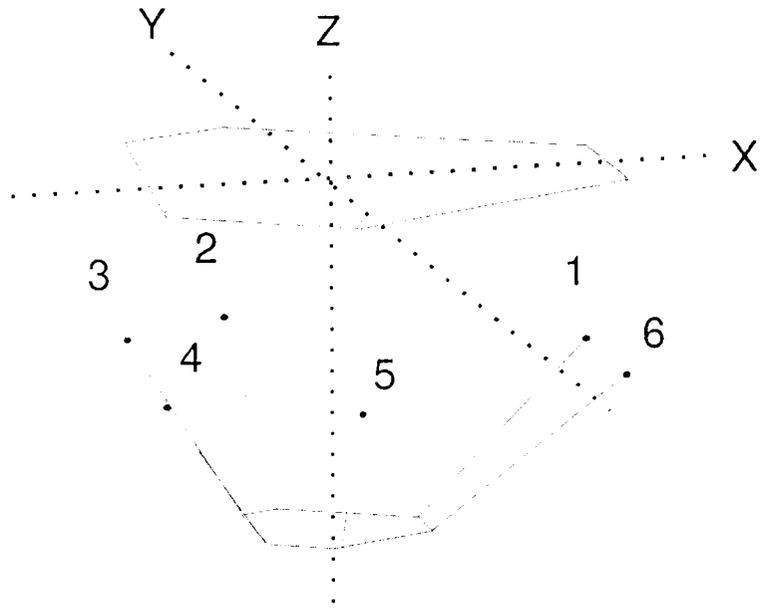


Figura 4. 4 El manipulador en su posición extrema en el eje z.

La zona sombreada en la figura 4.5 representa la intersección de los círculos formados por los movimientos de cada par de cadenas, y por lo tanto, el área en el plano xy del espacio de trabajo del manipulador. Los puntos A_4 y A_5 , representan los puntos donde se encuentran localizadas las articulaciones prismáticas de 4 y 5 respectivamente. La distancia entre E_1 y C es el radio de la plataforma móvil.

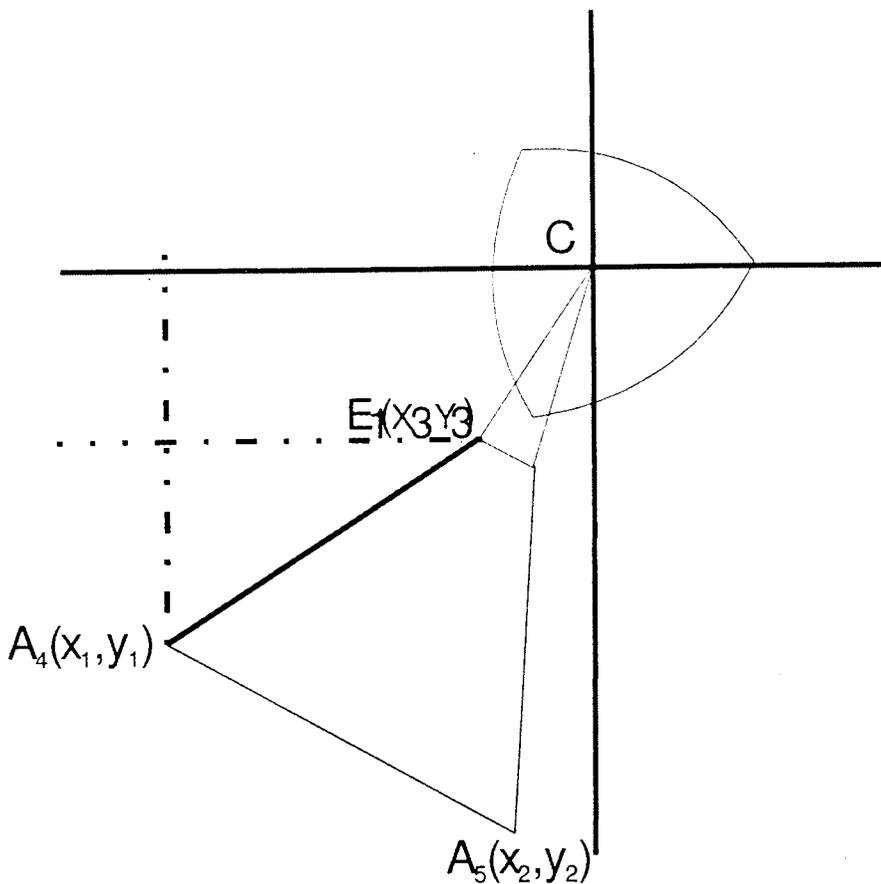


Figura 4. 5 Las cadenas cinemáticas 4 y 5 del manipulador.

La figura 4.6 muestra al mismo manipulador pero alcanzando otra posición, que se obtiene al mantener las articulaciones prismáticas de 3 y 4 desplazadas totalmente y desplazar hacia arriba al resto (1, 2, 5 y 6), hasta que los eslabones L de 3 y 4 se encuentren paralelos al plano xy (donde L es el eslabón que une a la articulación prismática con la plataforma móvil).

Al tomar como ejemplo la cadena 4, consideramos que la cadena 3 sufre los mismos movimientos también. En el plano xy, los eslabones 4 y 5 se encontrarían localizados como se muestra en la figura 4.7 para alcanzar la posición que la figura 4.6 presenta. El centro de la plataforma móvil se encuentra, en esta posición, alcanzando uno de los extremos del triángulo de Reuleaux, por lo tanto, un extremo del espacio de trabajo en el plano xy, y específicamente en el eje x.

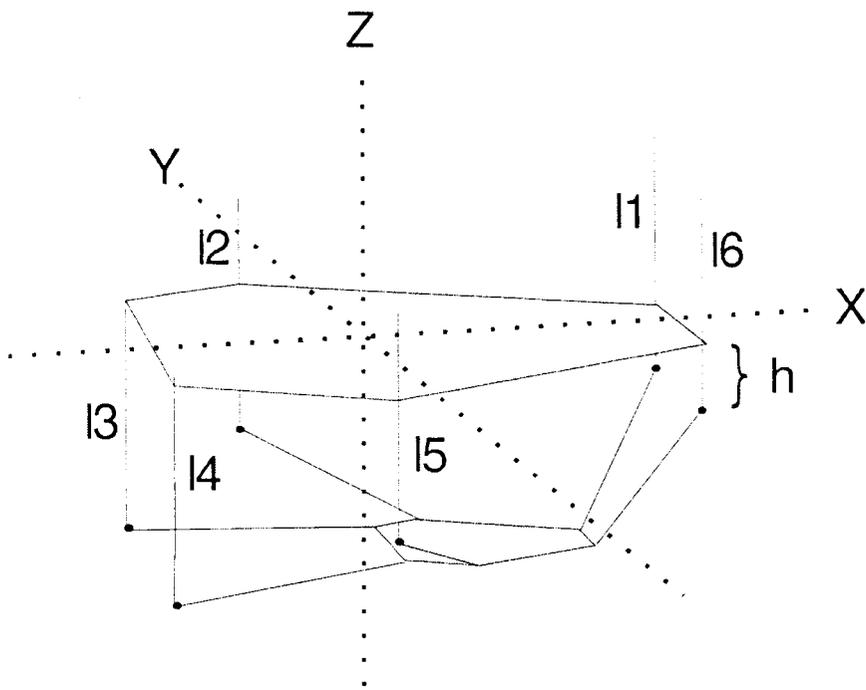


Figura 4. 6 El manipulador en posición de alcanzar la posición extrema en el eje x.

La figura 4.7 nos ayuda a identificar que el eslabón L de 4 alcanza totalmente su longitud en el plano xy, desde A_4 hasta E_2 .

Tanto en la figura 4.5 como en la figura 4.7, la plataforma móvil no sufre de movimiento rotatorio y los puntos A_4 y A_5 se mantienen en el mismo lugar. Para comparar ambas posiciones, nos auxiliamos de la figura 4.8.

El objetivo de los siguientes pasos, es obtener la distancia entre el centro C y Xe_1 , el cual puede asumirse, como el radio del ángulo equilátero formado entre los tres puntos extremos Xe_1 , Xe_2 y Xe_3 .

Las coordenadas de A_4 y A_5 son conocidas desde el capítulo 2 de este documento, así como las de E_1 (serían las mismas que las del punto CB_4 en el mismo capítulo). La longitud entre A_4 y E_1 , que llamaremos L_a , también es un dato conocido, dado por:

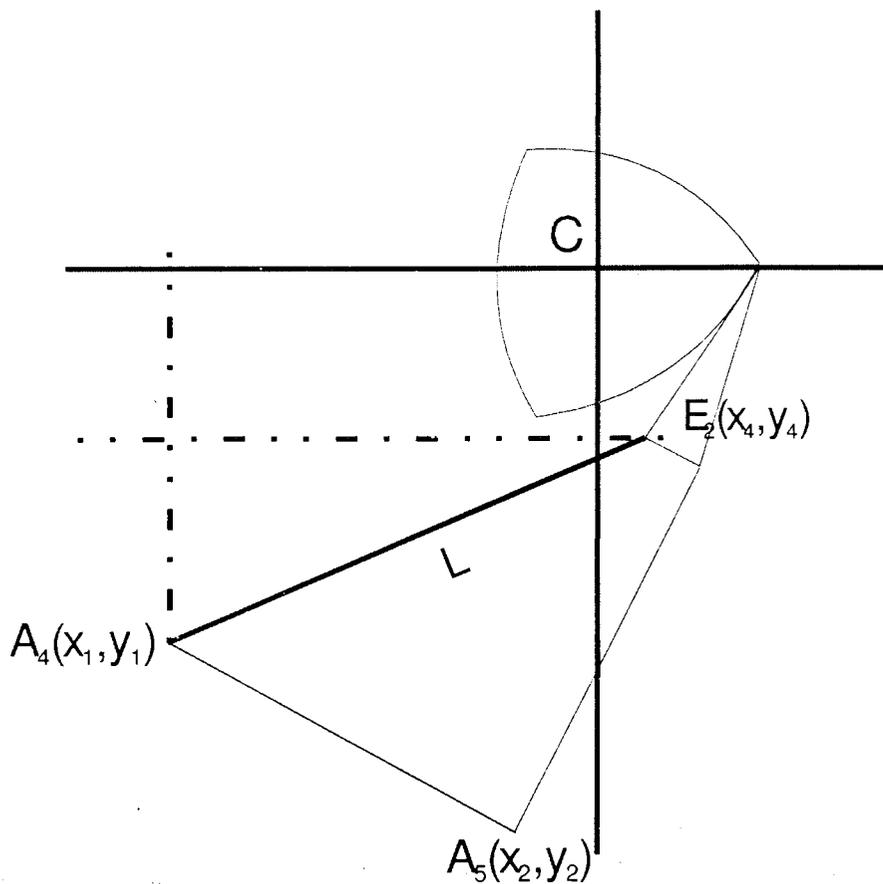


Figura 4. 7 Las cadenas 4 y 5 cuando el manipulador alcanza posición extrema en el eje x.

$$L_a = L \sin \alpha \quad (4. 3)$$

donde L es la longitud del eslabón que une a la articulación prismática con la esférica. La distancia entre A₄ y E₂ es la longitud L.

Con respecto al eje y, la distancia entre A₄ y H, es:

$$ah = y_1 - y_3 \quad (4. 4)$$

y con la ayuda del teorema de Pitágoras:

$$x_{he1} = \sqrt{L_2^2 - ah^2} \quad (4.5)$$

donde x_{he} es la distancia, en x , entre H y E_1 .

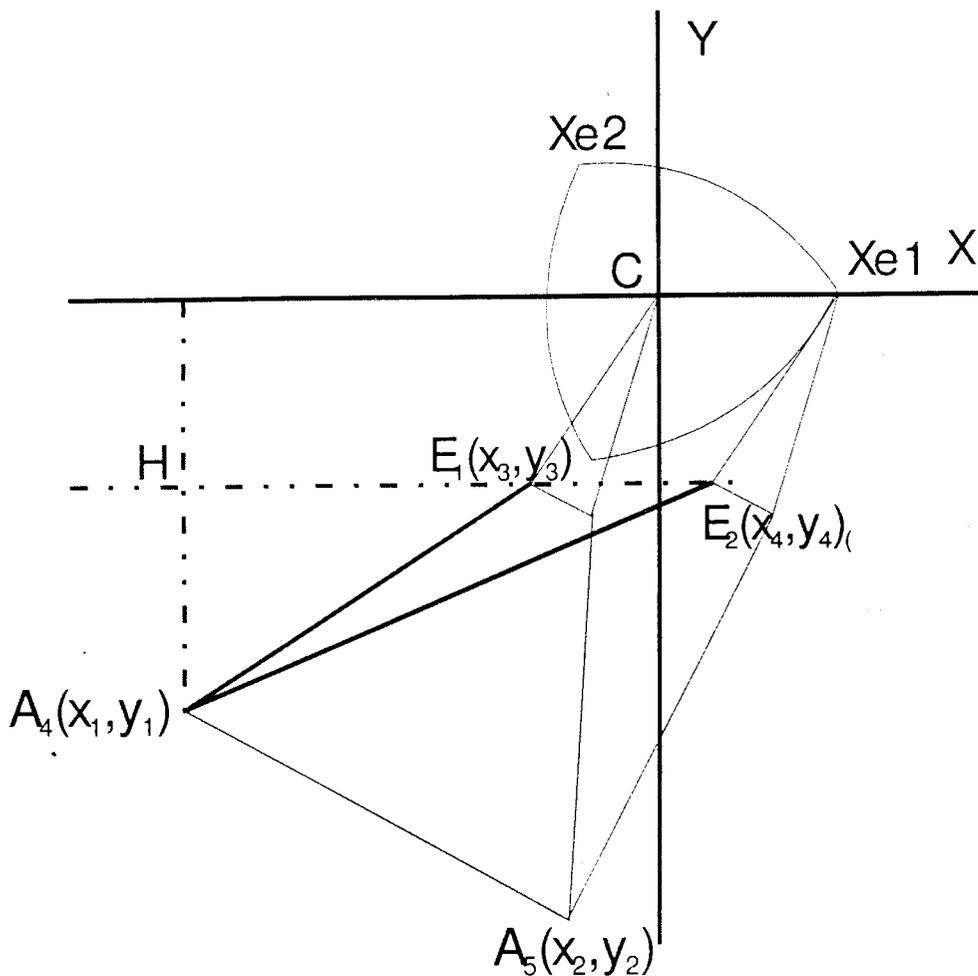


Figura 4. 8 El eslabón número 4 al alcanzar el punto extremo Xe1.

De igual manera, para obtener la distancia en x , de la base del triángulo formado entre los puntos A_4 , e_2 y H :

$$x_{he2} = \sqrt{L^2 - ah^2} \quad (4.6)$$

Como ya se observó anteriormente, la plataforma móvil no tiene movimiento de rotación solamente desplazamiento, por lo que para ambos puntos, la orientación de CB_4 y CB_5 es la misma como puede verse en la figura 4.8. Entonces, la distancia en el eje x entre el centro y $Xe1$ es la misma distancia, en el eje x, que entre e_1 y e_2 .

Por lo tanto:

$$radx1 = xhe2 - xhe1 \quad (4.7)$$

donde $radx1$ es el circunradio (R) del triángulo equilátero, como se muestra en la Fig.4.9.

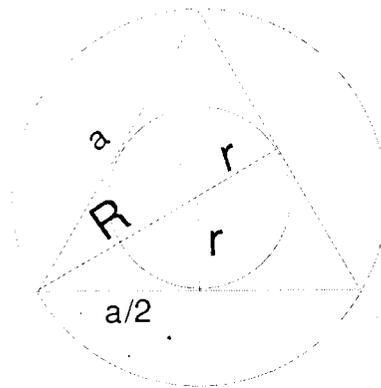


Figura 4. 9 Características de un triángulo equilátero.

R está relacionado con a , uno de los lados del triángulo, de la siguiente manera:

$$R = \frac{1}{2} a \csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} a \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \sqrt{3} a \quad (4.8)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{3}} R \quad (4.9)$$

Entonces:

$$a = \frac{3}{\sqrt{3}} radx1 \quad (4.10)$$

La intersección formada entre los tres círculos es una forma conocida como triángulo Reuleaux (Fig. 4.10), y en cuyo interior puede ser inscrito un triángulo equilátero.

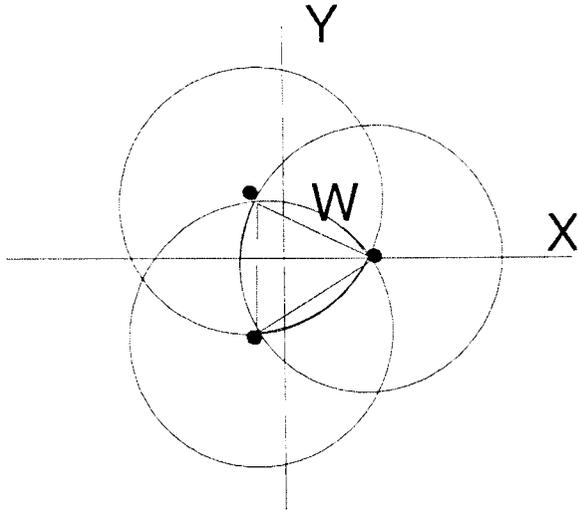


Figura 4. 10 El triángulo Reuleaux sombreado en gris.

El área de este triángulo está dividido en dos secciones: una es la del triángulo equilátero inscrito:

$$A_t = \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2 = \frac{3}{4} \sqrt{3} r^2 \tag{4. 11}$$

y otra la conforman tres porciones meniscus-shaped que son segmentos circulares con ángulo de abertura igual a $\sigma = \pi/3$:

$$A_s = \frac{1}{2} w^2 (\sigma - \text{sen} \sigma) = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) w^2 \tag{4. 12}$$

donde w es el radio de cada círculo. En nuestro caso, este radio está dado por L.

Así, el área total es:

$$A = 3A_s + A_t = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)L^2 + \frac{3}{4}\sqrt{3}radx1^2 \quad (4.13)$$

Esta área representa solo una sección transversal del volumen total que conforma el espacio de trabajo. Este está dividido en tres secciones, como se muestra en la figura 4.11.

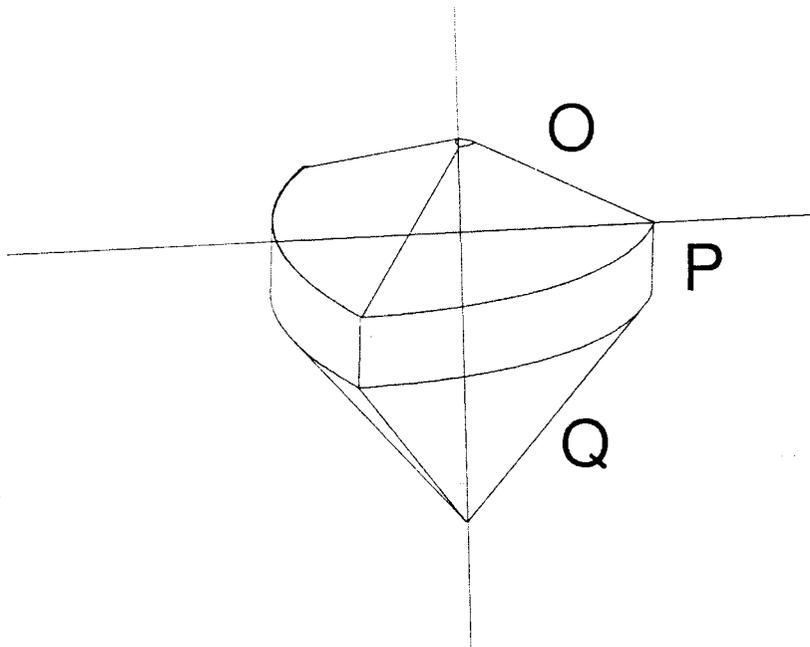


Figura 4. 11 El espacio de trabajo calculado en este trabajo.

La sección P es un prisma con base mayor y base menor igual al área descrita en la ec.(4.14). La altura de tal prisma es obtenida de la siguiente manera: al considerar anteriormente (para el cálculo de $radx1$, el punto extremo del área) que la longitud de L es la máxima que puede alcanzar la cadena cinemática, ahora consideramos, para el mismo punto que el eslabón prismático de la misma cadena está desplazado en su máxima capacidad hacia el eje negativo de z. Tenemos así un punto en el espacio con coordenadas $x_{ext1}(radx1,0, -AA')$, donde AA' es la longitud posible a desplazar del eslabón prismático. Con la información de tal punto, podemos introducir el cálculo geométrico inverso (que se

estudió en el capítulo 3) y obtener los desplazamientos del resto de los eslabones prismáticos que conforman al manipulador paralelo: 1,2,3,5 y 6.

Al hacer un análisis de mecanismos del manipulador en el plano xz, como lo muestra la Fig. 4.12, observamos la frontera del espacio de trabajo en el plano xz. Para calcular tal línea, trazada por los puntos M1, M2, M3 y M4, proponemos lo siguiente:

$$L1 = xhe2$$

$$Cb1 = CB * \cos(\varepsilon / 2) * \cos(60)$$

$$H1 = L \cos \alpha$$

$$H2 = AA' + L \cos \alpha$$

H3 y H4 pueden ser calculadas con ayuda de la geometría inversa del manipulador, como mas adelante se verá.

Entre M1 y M2, la proyección de la curva en el eje x está dada por

$$x_{ext}(n) = \sqrt{(L1)^2 - (Z(n))^2} + (Cb1) \quad (4.14)$$

donde Z varía a lo largo de H2.

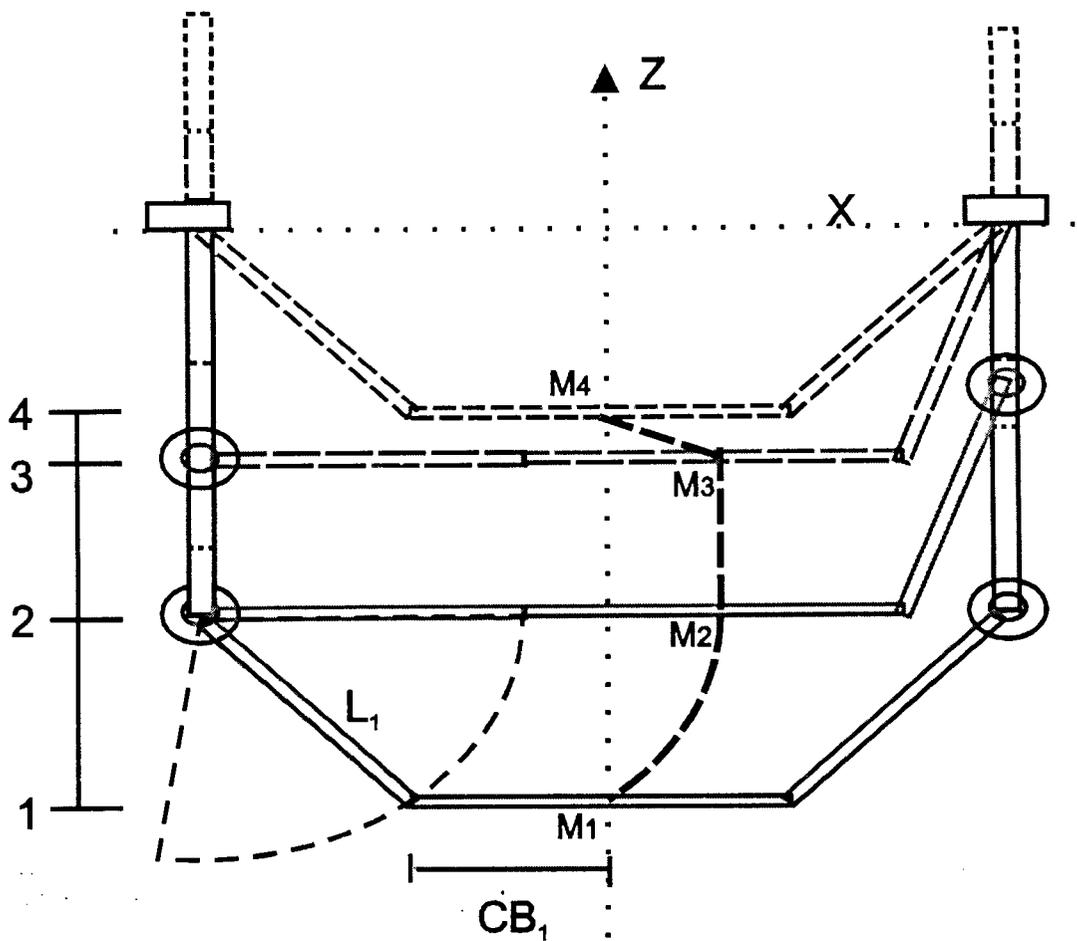


Figura 4. 12 Los movimientos extremos que son permitidos por dos cadenas cinemáticas.

La figura 4.13 muestra una idea del desplazamiento de todos los eslabones prismáticos. Los eslabones l3 y l4 tienen un desplazamiento total hacia abajo, mientras que l1 y l6 tienen un desplazamiento h. Esta longitud h es la distancia máxima (en el eje z) que el manipulador puede mantenerse con las mismas coordenadas en x,y del punto xe1.

Así, el volumen de P está dado por:

$$V_p = A * h \quad (4. 15)$$

$$V_n = \frac{1}{3} A_n h_n \quad (4. 16)$$

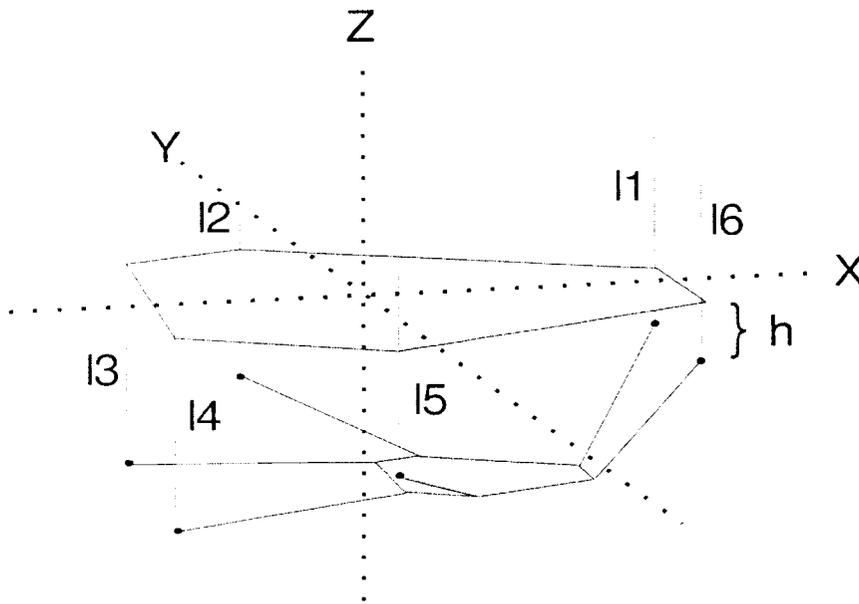


Figura 4. 13 Representación del desplazamiento de los eslabones prismáticos para alcanzar el punto extremo xe1.

Para ambas secciones coincide el área A_n , pero la altura es diferente y este será el cálculo que a continuación se hará.

Como lo muestra la figura 4.12, la distancia más lejana en el eje z que el manipulador puede alcanzar es H_1 que es igual a $AA' + L \cos \alpha$, pero cuando el manipulador tiene componente en z igual o menor de AA' , se encuentra en alguna de las otras dos secciones (P u O).

Por último para la sección O, la altura del volumen está definida por:

$$h_o = (AA' - h - L \cos \alpha) \quad 4. 17$$

Ya que una distancia mayor de $AA' - h$ corresponde a la región de P, y una menor de $L \cos \alpha$, no es factible alcanzarla con el manipulador (Fig.4.14). El volumen para O, entonces está dado por:

$$V_0 = \frac{1}{3} A(AA' - h - l \cos \alpha) \quad 4.18$$

Y por lo tanto, el volumen total del espacio de trabajo es:

$$V = V_0 + V_p + V_q \quad 4.19$$

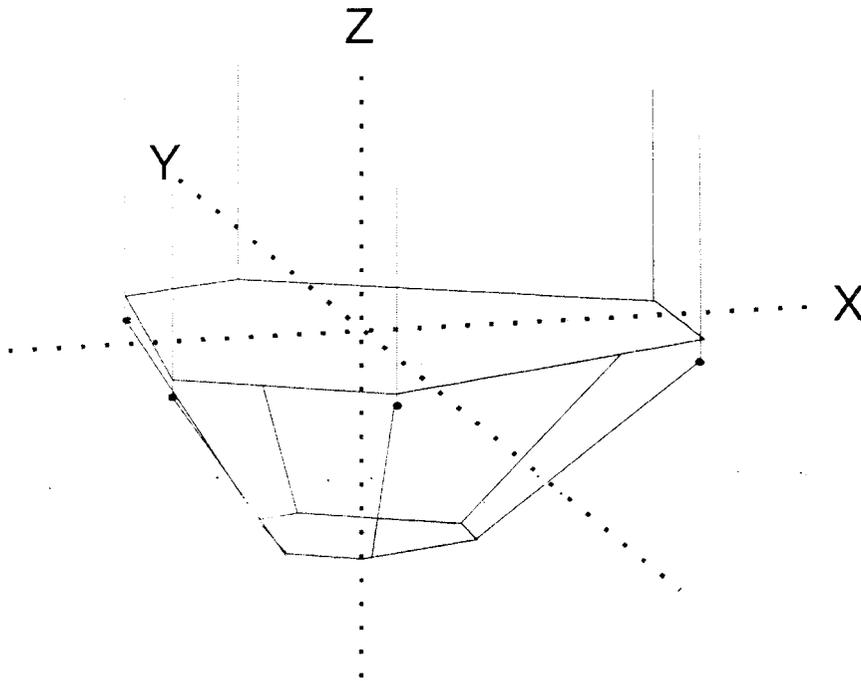


Figura 4. 14 El manipulador paralelo cuando no existe desplazamiento de las articulaciones prismáticas.

Al calcular el espacio de trabajo con este método fueron obtenidos los resultados mostrados en la tabla 1, bajo el título de Caracterización. Las figuras 4.15 muestran una simulación de la representación del espacio de trabajo obtenido con la caracterización con los parámetros de la configuración no.2 de la tabla 2, $L = 40$, $AA' = 40$, $CB = 10$, $\alpha = 30$, $\beta = 33.676$ y $\varepsilon = 20$. El Programa 4, incluido en el Apéndice, fue utilizado para obtener los valores del espacio de trabajo. La figura 4.16 contiene una representación del espacio de trabajo y del manipulador paralelo que lo produce.

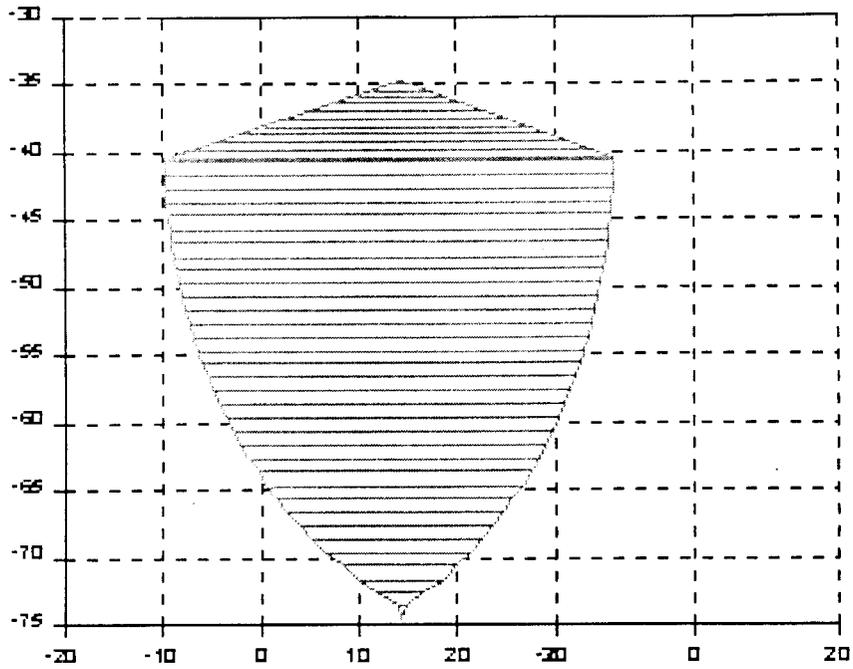


Figura 4. 15 a) Gráfica del espacio de trabajo por caracterización en el plano xz.

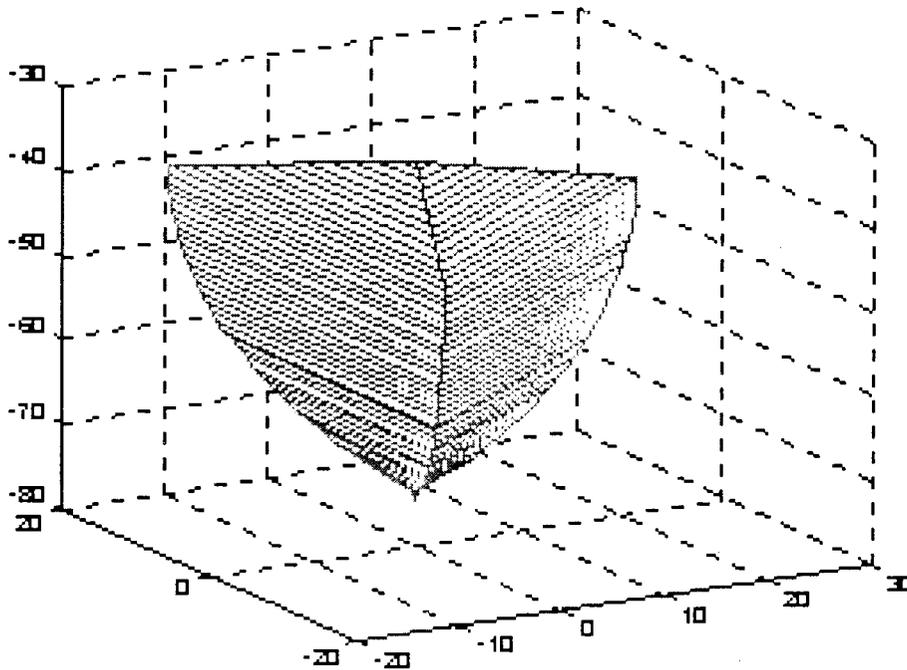


Figura 4.15 b) Gráfica del por caracterización en tres dimensiones.

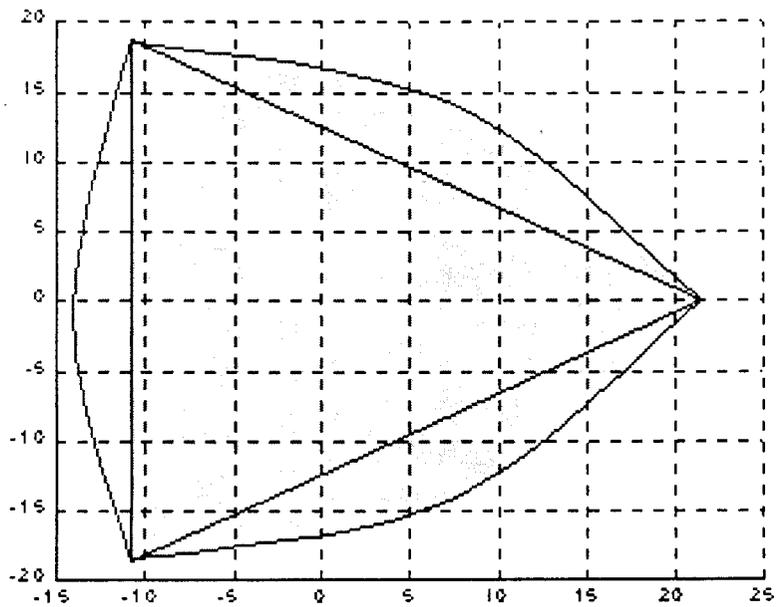


Figura 4.15 a) Gráfica del espacio de trabajo en el plano xy.

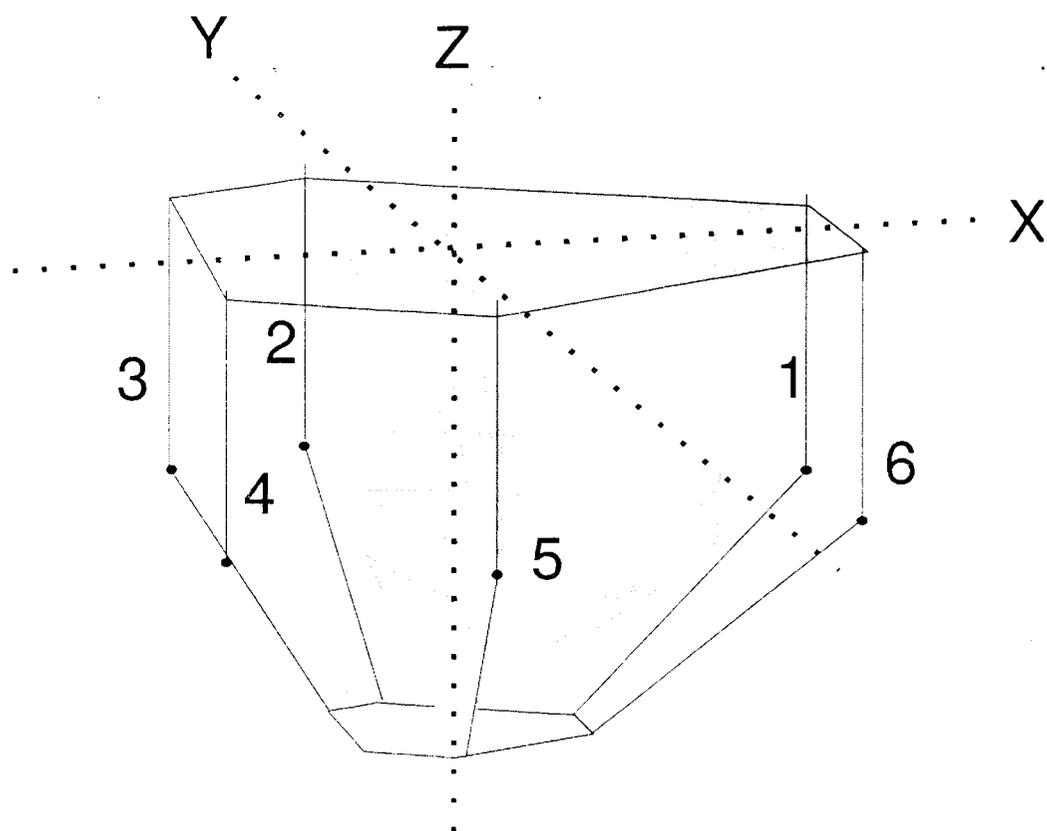


Figura 4.15 Un manipulador paralelo y su espacio de trabajo.

No.	L	AA'	CB	α	β	ε	Vol. real	Caraterización	Vol. cono	Eq. Interpolación
1	20	40	10	30	33.6	20	9855	10735	5438	12711
2	40	40	10	30	33.6	20	30022	27311	21009	33019
3	20	20	10	30	33.6	20	3800	4163	2719	4850
4	20	40	10	10	33.6	20	29710	21270	12578	33500
5	20	40	5	30	33.6	20	10156	9635	5252	11560
6	20	40	10	30	15	20	11300	11323	5221	14724
7	20	40	10	30	5	20	11680	11561	5174	11940
8	20	40	10	30	50	20	10550	11112	5770	11940
9	20	40	10	30	33.6	0	11328	13469	5012	10395
10	20	40	10	30	33.6	40	8812	8919	5958	14724

Tabla 4. 1 Resultados para el cálculo del espacio de trabajo.

5. DISEÑO DE UN MANIPULADOR A TRAVÉS DE CARACTERIZACIÓN.

Para realizar un diseño cualquiera, es necesario iniciar enlistando las características que queremos en la nueva herramienta. En el diseño del manipulador paralelo una característica importante es el cubrir un determinado espacio de trabajo, conjuntamente con este requisito fijamos otros como materiales de eslabones, tipo de actuadores, carga a soportar, interfase de control, etc. En este capítulo centraremos nuestro esfuerzo en el diseño del manipulador paralelo a partir del dato inicial de un espacio de trabajo y realizaremos el cálculo de longitud de eslabones principalmente.

5.1 Definición del Espacio de Trabajo.

Como inicio, el área del espacio de trabajo deseado a cubrir, debe considerarse contenido en el área de un triángulo Reuleaux. Fig. 5.1. Las dimensiones de esta área (longitud, altura y radio), son requisitos y se encuentran en el plano xy. El espesor del espacio es también un dato de inicio y se ubica en el eje z.

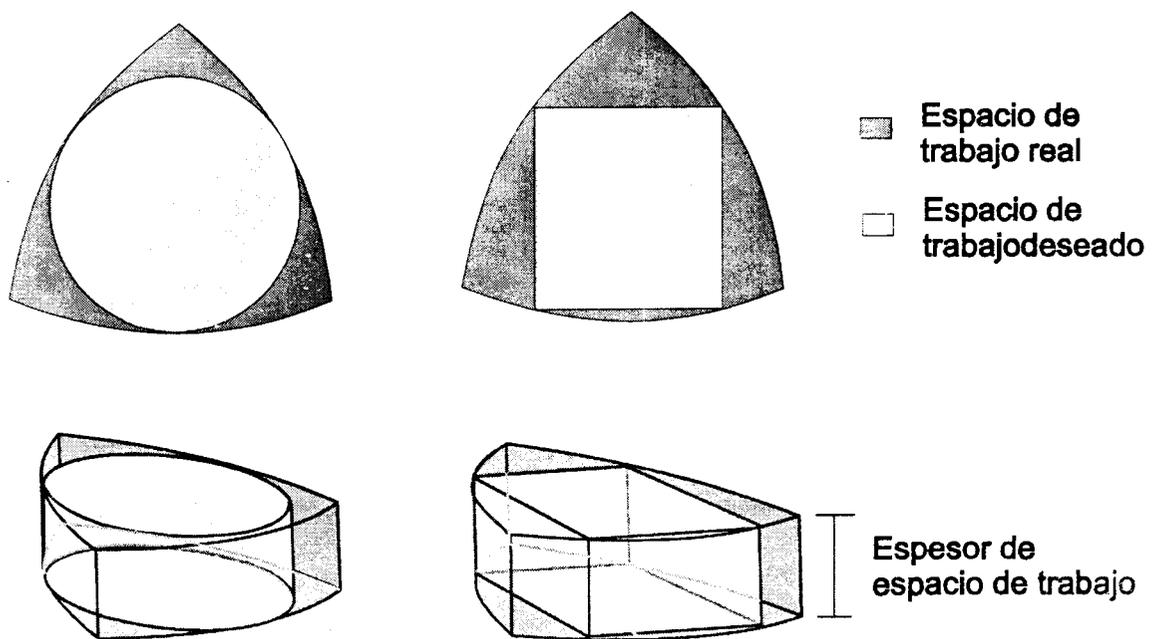


Figura 5. 1 Ejemplos de espacio de trabajo deseado.

Otros datos de entrada al cálculo son: el ángulo máximo de abertura de la articulación esférica (ω , Fig. 5.2), las dimensiones de la plataforma móvil (CB , ε), el ángulo (β) entre dos cadenas cinemáticas consecutivas (p. ej. 4 y 5) y se da por hecho que entre cada par de cadenas cinemáticas existen 120° de abertura. Algunos de estos datos se trataron en el capítulo 2, y como referencia, usamos la figura 5.2.

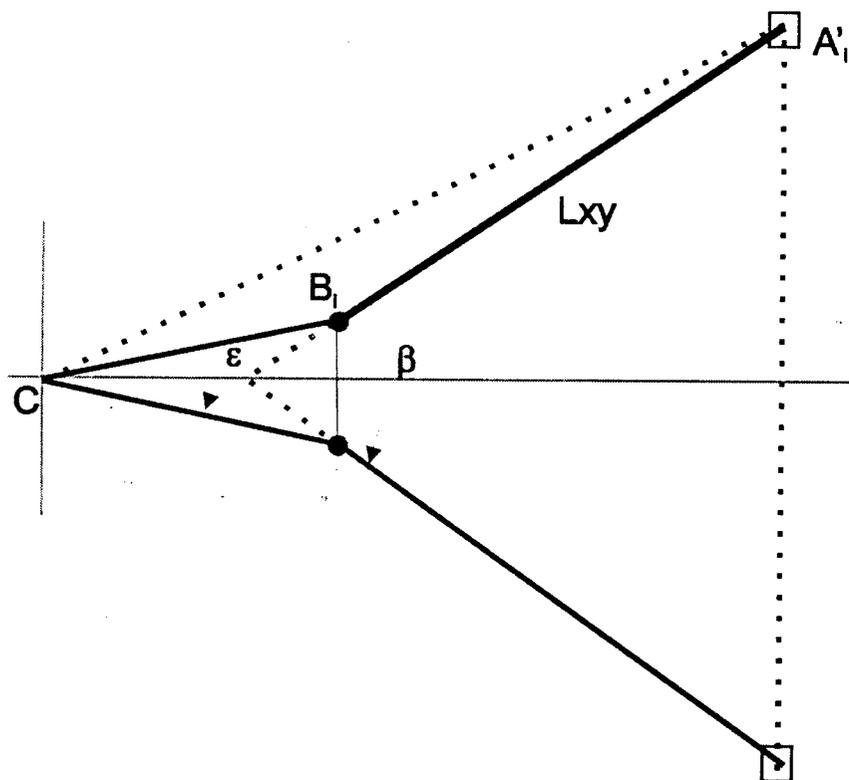


Figura 5. 2 Características de la estructura del manipulador.

5.2 Cálculo de la estructura del manipulador paralelo.

Para iniciar, basados en la configuración descrita en el capítulo 2, la proyección del labón L, en una posición inicial, sobre el plano xy (Fig. 5.3) está dado por las componentes x e y:

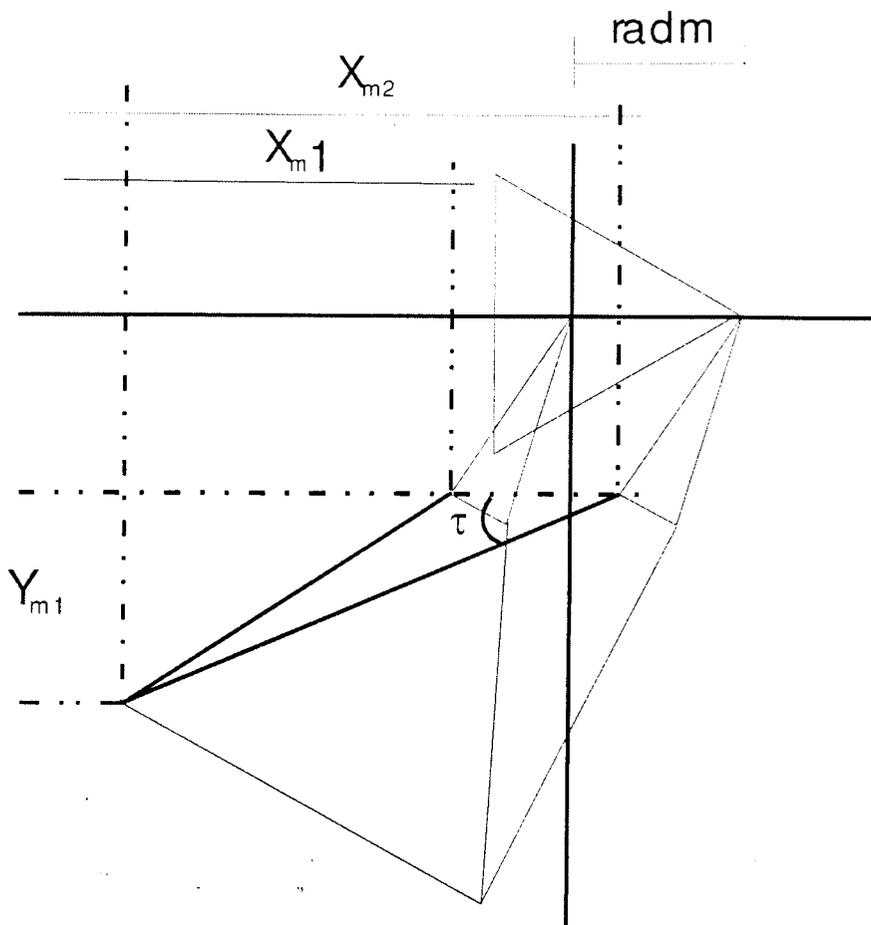


Figura 5. 3 Diagrama de los puntos importantes para realizar el cálculo de eslabones a partir del espacio de trabajo.

$$xm_1 = L \cos \varpi \cos \beta \cos 60^\circ \quad (5. 1)$$

$$ym_1 = L \cos \varpi \cos \beta \text{sen} 60^\circ \quad (5. 2)$$

El eslabón L , al estar extendido totalmente sobre el plano xy , tiene componentes:

$$xm_2 = L \cos \tau \quad (5. 3)$$

$$ym_2 = L \text{sen} \tau \quad (5. 4)$$

En la figura 5.3 podemos observar que:

$$ym_2 = ym_1 \quad (5.5)$$

Por lo tanto, sustituyendo (5.2) y (5.4) en (5.5):

$$L \operatorname{sen} \tau = L \cos \varpi \cos \beta \operatorname{sen} 60^\circ \quad (5.6)$$

Al despejar τ :

$$\tau = \operatorname{sen}^{-1}(\cos \varpi \cos \beta \operatorname{sen} 60^\circ) \quad (5.7)$$

De la figura 5.3, la magnitud del circunradio del triángulo es equivalente a la diferencia de las proyecciones en x de L en las dos configuraciones:

$$radm = xm_2 - xm_1 \quad (5.8)$$

Al sustituir (5.1) y (5.3) en (5.8):

$$radm = L \cos \tau - L \cos \varpi \cos \beta \cos 60^\circ \quad (5.9)$$

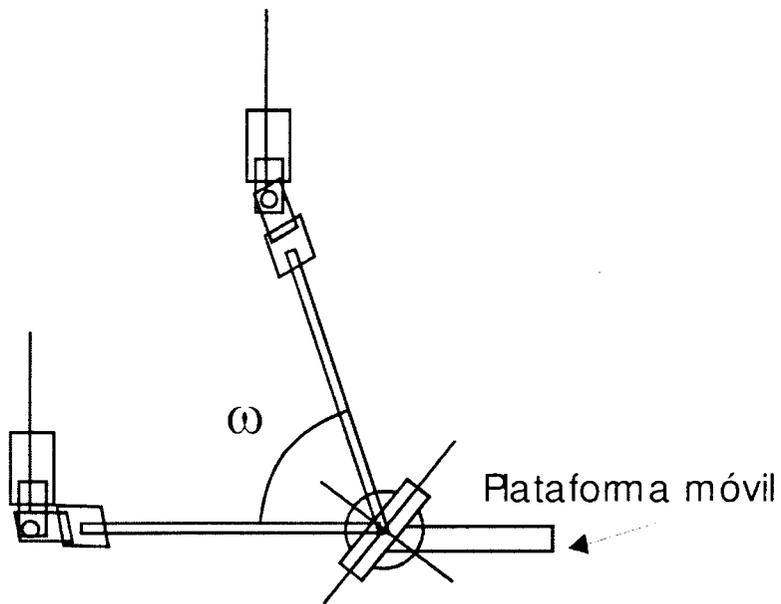
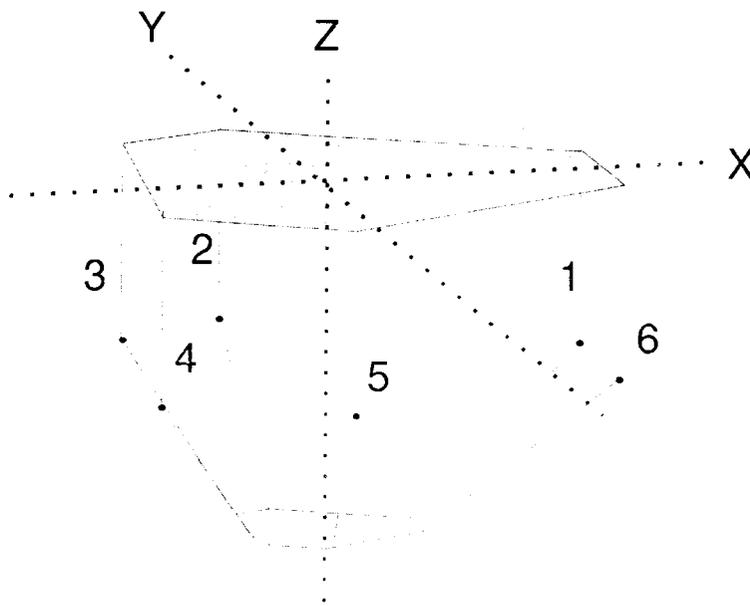


Figura 5. 4 El ángulo ω , máxima abertura de la articulación esférica.

Al despejar L . Obtenemos el valor de la magnitud que el eslabón debe tener para alcanzar los extremos del espacio de trabajo deseado en el plano xy .

$$L = \frac{radm}{(\cos \tau - \cos \omega \cos \beta \cos 60^\circ)} \quad (5. 10)$$



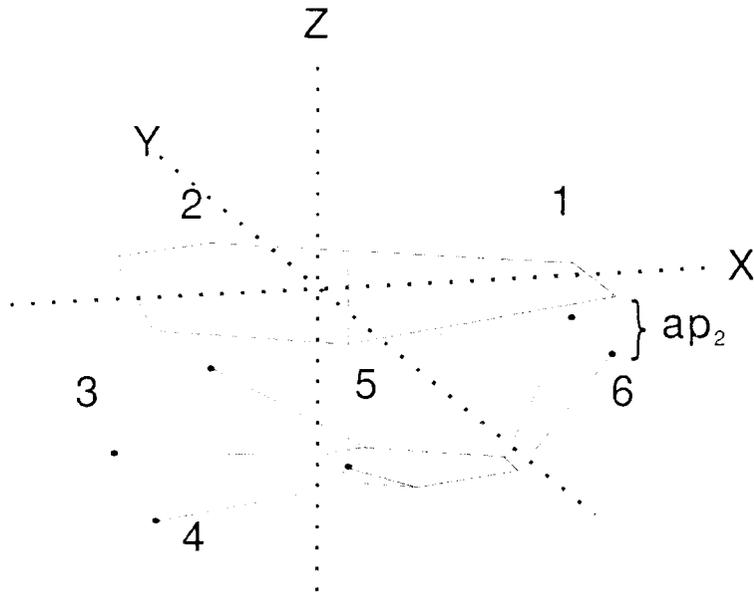


Figura 5. 5 Dos posiciones de la estructura del manipulador. A) Posición extrema en el eje z. B) Posición extrema en xy.

Para la obtención de la longitud del eslabón prismático, partimos de la posición A, en la Fig. 5.3, hasta la posición B, donde se supone alcanzar un punto extremo del espacio de trabajo en el plano xy. Las cadenas 3 y 4, en esta posición mantienen sus eslabones L en posición paralela con el plano xy. Es necesario observar que los eslabones prismáticos de 1 y 6, limitarían al manipulador desplazarse en el eje z, en la misma posición en xy, para obtener un espesor de espacio de trabajo (ap_2).

Por lo tanto, el valor de la longitud de la articulación prismática (ap_T) debe ser mayor o igual al valor de ap_2 .

Como las cadenas 3 y 4, 1 y 6 limitan la posición (el desplazamiento en 2 y 5 no es crítico), son estas las que estudiamos para calcular el valor ap_T ..

La Fig. 5.6 muestra un par de cadenas (p.ej 4 y 6) en el plano xz, en las posiciones A y B. Se supone, como ya se mencionó arriba, que el eslabón prismático de 6 es desplazado

hacia arriba, de tal manera que jale a la plataforma móvil, hasta que el eslabón L de la cadena 4, se encuentra paralela a xy, y por lo tanto, en el punto extremo.

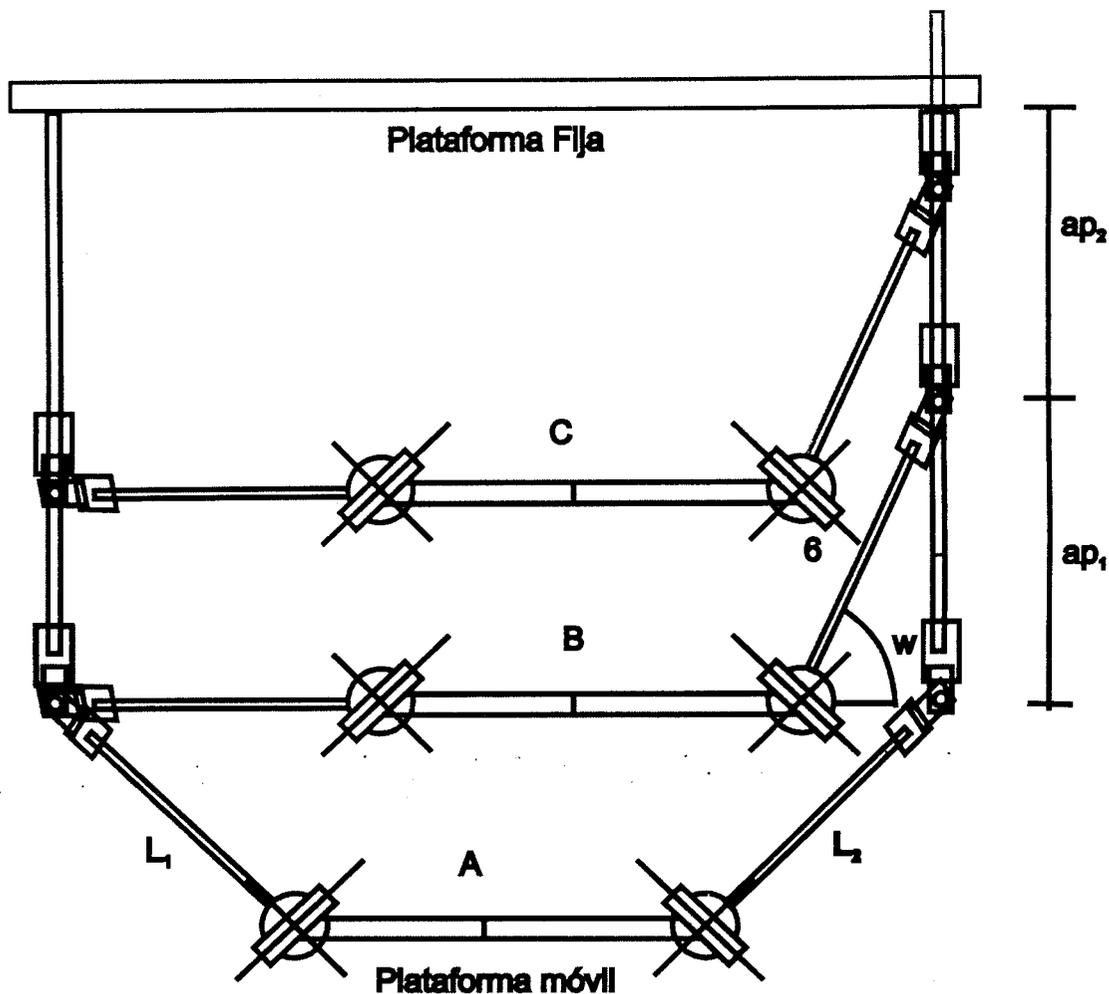


Figura 5. 6 Las cadenas 4 y 6, en el plano xz, representadas en las dos posiciones A y B de la Fig. 5.3.

La magnitud de la articulación prismática debe ser lo suficientemente grande como para permitir los movimientos que en la Fig. 5.5, las cadenas 4 y 6 sufren. Así, ap_T , debe ser mayor o igual a:

$$ap_1 = L \sin \omega \quad (5. 11)$$

La suma de los valores ap_1 y ap_2 arriba mencionados, proporciona el valor de ap_T :

$$ap_T = ap_2 + ap_1 = ap_2 + L\text{sen}\omega \quad (5. 12)$$

6. CONCLUSIONES

En esta tesis se ha presentado un análisis geométrico de un robot manipulador paralelo de seis grados de libertad. Se resolvió el modelo geométrico inverso, y se calculó el espacio de trabajo utilizando diferentes técnicas. Se propone una metodología sencilla para el diseño del manipulador en función del espacio de trabajo requerido. La aportación de este trabajo consiste en el desarrollo de un método formal para caracterizar el espacio de trabajo a partir de la geometría del manipulador. Basado en este resultado se propone un método para el diseño de un manipulador con la misma configuración. El siguiente paso de este trabajo, es aplicar estas técnicas para la construcción física de un manipulador. Se debe continuar el análisis de las limitantes físicas de las componentes de una manera mas detallada para un resultado mas realista. Durante el proceso de construcción física deberá cuidarse con las dimensiones y con las posiciones de las cadenas cinemáticas del manipulador, que traerían variaciones entre los resultados matemáticos y la posición real. El estudio y desarrollo de manipuladores paralelo debe ser difundido para tener mayor desarrollo de la tecnología en el país.

Referencias.

- Carretero J.A., Podhorodeski R.P. and Nahon M., *Architecture Optimization of a 3-DOF Parallel Mechanism*, Proceedings of the 1998 ASME Design Engineering Technical Conference, 25th Biennial Mechanisms Conference, September 13-16 1998, Atlanta, Georgia. <http://subspace.me.uvic.ca/~jcarrete/work/school.html> [1]
- Clavel R. DELTA, A fast robot with parallel geometry. In *18th Int. Symp. on Industrial Robot*, pages 91-100, Lausanne, 26-28 Abril 1988. [2]
- Chablat D., Wenger P., On the Characterization of the Regions of Feasible Trajectories in the Workspace of Parallel Manipulators, Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp 1127-1129, Oulu, Finland, June 20-24, 1999. [3]
- Cheng H.H., Lee, J.J., Penkar R. Kinematic Analysis of a Hybrid Serial-and-Parallel-Driven Redundant Industrial Manipulator. <http://iel.ucdavis.edu/publication/> . 24 Feb. 1995. [4]
- Jáuregui, J.C. Stewart plataform position accuracy as a function of prismatic pair uncertainty. Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp 1331-1336, Oulu, Finland, June 20-24, 1999. [5]
- Lawrence Yao, Y. Numerical and Experimental Investigation of Laser Micromachining Processes for Improved Precision and Prediction Capabilities. Department of Mechanical Engineering Columbia University. <http://www.columbia.edu/~yly1/pzaidie.htm>. [6]
- Lazarevic, Z. Feasibility of a Stewart Platform with Fixed Actuators as a Platform for CABG Surgery Device. Master's Thesis. Columbia University. Department of Bioengineering. p. 35. <http://www.cs.columbia.edu/~laza/Stewart/thesis/>. October 10, 1997. [7]

Merlet, J.P. Les robots à mouvements spatiaux/Spatial robots. Manipulateurs à 3 degrés de liberté/3 DOF robots. Manipulateurs pour translations/Translation robots. <http://www-sop.inria.fr/saga/merlet/Archi/node2.htm> [8]

Merlet J.P. Designing a parallel manipulator for a specific workspace. Rapport de recherche no. 2527. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Francia, abril 1995. [9]

Mouly N. Development d'une Famille de Robots Paralleles a Motorisation Electrique. L'Ecole des Mines de Paris. May 1993. [10]

Pierrot F., Dauchez P., et Fournier A. Towards a fully-parallel 6 d.o.f. robot for high speed applications. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1288-1293, Sacramento, 11-14 April 1991. [11]

du Plessis L.J., Snyman J.A.. The Determination of the Workspace of a Spatial 6-3 Stewart Platform by Mathematical Optimization. Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp 1109-1111, Oulu, Finland, June 20-24, 1999. [12]

Shigley J.E. Theory of Machines and Mechanisms. 2nd ed. Late Professor of Mechanical Engineering University of Wisconsin-Madison, pages 399-403. McGraw-Hill. [13]

http://www.sena.com/korean/download/parallel_mechanism/IMECE97.pdf. 31-Aug-2000 [14]

APÉNDICE

A continuación se incluyen los programas para el cálculo del espacio de trabajo.

Programa no. 1. Obtención del espacio de trabajo por barrido de coordenadas.

```
% Programa que calcula coordenadas dentro de un
% rango dado para una espacio de trabajo dentro de un
% cubo de dimensiones -45<=x<=45, -45<=y<=45 y -80<=z<=0.

clear all;
yyy3; % Programa para calcular las dimensiones del manipulador
av=12.93;
bv=11.94;
cv=10;

k1=-AAp-AB(3); % Inicializacion de variables
for i=1:6
    zb(i)=0;
end
j=1;
jz=0;
jx=0;

% Obtencion de los elementos de la matriz
% de Euler
m1=cos(psi)*cos(fi)-sin(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m2=-cos(psi)*sin(fi)-sin(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m3=sin(psi)*sin(theta);
m4=sin(psi)*cos(fi)+cos(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m5=-sin(psi)*sin(fi)+cos(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m6=-cos(psi)*sin(theta);
m7=sin(theta)*sin(fi);
m8=sin(theta)*cos(fi);
m9=cos(theta);

% Inicia proceso de barrido de coordenadas
for k=k1:1:0 % Barrido en eje z
    for i=-45:1:45 % Barrido en eje x
        for h=-45:1:45 % Barrido en eje y
            xzc=i;
            yzc=h;
            zzc=k;

            % Calculo de la cinematica inversa
            for l=1:6
                xu(l)=xzc-xa(l)+m1*xb(l)+m2*yb(l)+m3*zb(l);
                yu(l)=yzc-ya(l)+m4*xb(l)+m5*yb(l)+m6*zb(l);
                zu(l)=-zzc+m7*xb(l)+m8*yb(l)+m9*zb(l);
                raiz=L*L-xu(l)*xu(l)-yu(l)*yu(l);
                if(raiz>=0)
                    za(l)=zu(l)-sqrt(raiz);
                else
```

```

        za(1)=-1;
    end
end
        % Fin de calculo de la cinematica inversa
        % Criterio para aceptar el punto analizado dentro
    if
        (((za(1)<=AAp)&(za(2)<=AAp))&((za(3)<=AAp)&(za(4)<=AAp))&((za(5)<=AAp)&(za(6)<=AAp))
        &((za(1)>=0)&(za(2)>=0))&((za(3)>=0)&(za(4)>=0))&((za(5)>=0)&(za(6)>=0)))
        coorx(j)=xzc;    %asigna los valores de las coordenadas calc.
        coory(j)=yzc;
        coorz(j)=zzc;
        j=j+1;
        jx=jx+1;    % variable p/determinar cuantos valores se encontraron
                    % en el semiplano en z
        break;    % rompe el ciclo mas interno (y)
    end
end;    % Fin del if
        % Fin del ciclo mas interno (y)
    if (i==45)
        jx=0;
    end;
end;
end;
        % Guarda los datos en un archivo
out = fopen('coord7.txt', 'w+');
for i=1:(j-1)
fprintf(out, '%5.3i %5.3i %5.3i\n', coorx(i), coory(i), coorz(i));
end
fclose(out);

for i=(j-1):-1:1
    coorx(2*j-i)=coorx(i);
    coory(2*j-i)=-coory(i);
    coorz(2*j-i)=coorz(i);
end;
        % Grafica el espacio de trabajo desde 2 vistas
clf;
hold on;
figure(1);
plot3(coorx,coory,coorz,'b');
view(2);
figure(2);
plot3(coorx,coory,coorz,'b');
view(-37.5,0);

```

Programa no. 2. Graficación del EdeT obtenido por barrido de coordenadas. Este programa solo obtiene los puntos del contorno del EdeT.

```

% Programa que calcula coordenadas dentro de un
% rango dado para una espacio de trabajo dentro de un
% cubo de dimensiones -45<=x<=45, -45<=y<=45 y -80<=x<=0.
% Este programa grafica el contorno del espacio de
% trabajo procesado.

```

```

clear all;
yyy3;    % Programa para calcular las dimensiones del manipulador

```

```

av=12.93;
bv=11.94;
cv=10;

k1=-AAp-AB(3);          % Inicializacion de variables
for i=1:6
    zb(i)=0;
end
j=1;
jz=0;
jx=0;
matj=1;
n=36;
coorx(n)=0;
coory(n)=0;
coorz(n)=0;

                % Obtencion de los elementos de la matriz
                % de Euler
m1=cos(psi)*cos(fi)-sin(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m2=-cos(psi)*sin(fi)-sin(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m3=sin(psi)*sin(theta);
m4=sin(psi)*cos(fi)+cos(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m5=-sin(psi)*sin(fi)+cos(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m6=-cos(psi)*sin(theta);
m7=sin(theta)*sin(fi);
m8=sin(theta)*cos(fi);
m9=cos(theta);

                % Inicia proceso de barrido de coordenadas
for k=-76:1:0          % Barrido en eje z
    for angh=179:-5:-1 % Barrido circular
        for h=45:-1:0 % Barrido radial en plano xy
            yzc=h;
            zzc=k;
            i=h/tan(angh/57.2958);
            xzc=i;
            for l=1:6 % Calculo de la cinematica inversa
                xu(l)=xzc-xa(l)+m1*xb(l)+m2*yb(l)+m3*zb(l);
                yu(l)=yzc-ya(l)+m4*xb(l)+m5*yb(l)+m6*zb(l);
                zu(l)=-zzc+m7*xb(l)+m8*yb(l)+m9*zb(l);
                raiz=L*L-xu(l)*xu(l)-yu(l)*yu(l);
                if(raiz>=0)
                    za(l)=zu(l)-sqrt(raiz);
                else
                    za(l)=-1;
                end
            end
            % Fin de calculo de la cinematica inversa
            % Criterio para aceptar el punto analizado dentro del EdeT
            if
                (((za(1)<=AAp)&(za(2)<=AAp))&((za(3)<=AAp)&(za(4)<=AAp))&((za(5)<=AAp)&(za(6)<=AAp))
                &((za(1)>=0)&(za(2)>=0))&((za(3)>=0)&(za(4)>=0))&((za(5)>=0)&(za(6)>=0)))
                coorx(j)=xzc; %asigna los valores de las coordenadas calc.
                coory(j)=yzc;
                coorz(j)=zzc;
                j=j+1;
                jx=jx+1; % variable p/determinar cuantos valores se encontraron
                % en el semiplano en z
            break; %rompe el ciclo mas interno (y)

```

```

        end;                %fin del if
    end;                %fin del ciclo mas interno (y)
end;
if (jx>0)
    for i=1:1:n        % asigancion de valores para imagen simetrica
        coorx(n+i)=coorx(n-i+1);
        coory(n+i)=-coory(n-i+1);
        coorz(n+i)=coorz(n-i+1);
    end;
    matx(matj,:)=coorx;    % Ordena los resultados en una matriz
    maty(matj,:)=coory;
    matz(matj,:)=coorz;
    matj=matj+1;
    jx=0;
    j=1;
    clear coorx;        % Reinicializacion de variables
    clear coory;
    clear coorz;
    coorx(n)=0;
    coory(n)=0;
    coorz(n)=0;
end;                % Fin del ciclo x
end;                % Fin del ciclo z
                % Guarda los datos en un archivo
out = fopen('coord7.txt', 'w+');
for i=1:(j-1)
    fprintf(out, '%5.3i %5.3i %5.3i\n', coorx(i), coory(i), coorz(i));
end
fclose(out);
                % Gráfica el espacio de trabajo desde 4 perspectivas
colormap(gray);
ccol=ones(40,n*2);
figure(1);
mesh(matx,maty,matz,ccol);
view(2);
pause;
figure(2);
mesh(matx,maty,matz,ccol);
view(30,0);
figure(3);
mesh(matx,maty,matz,ccol);
view(3);
figure(4);
mesh(matx,maty,matz,ccol);
view(-37.5,0);

```

Programa no 3. Obtención del espacio de trabajo por interpolación.

```

% Este programa detecta el contorno del espacio de trabajo de un
% manipulador paralelo en el plano xz. Los puntos obtenidos se
% organizan en una matriz y se le aplica una operacion de rotacion.
% El resultado obtenido es graficado al final del programa.

```

```

clear all;
yyy3;                % Rutina de obtencion de dimensiones del MP
j=0;

```

```

h=0;

for i=1:6      % Inicializacion de variables
    zb(i)=0;
end

    % Calculo de elementos de la matriz de Euler
m1=cos(psi)*cos(fi)-sin(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m2=-cos(psi)*sin(fi)-sin(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m3=sin(psi)*sin(theta);
m4=sin(psi)*cos(fi)+cos(psi)*cos(theta)*sin(fi);
m5=-sin(psi)*sin(fi)+cos(psi)*cos(theta)*cos(fi);
m6=-cos(psi)*sin(theta);
m7=sin(theta)*sin(fi);
m8=sin(theta)*cos(fi);
m9=cos(theta);

    % Inicia barrido de coordenadas
for k=-80:0.5:0 % Barrido en el eje z
    for i=25:-0.5:0 % Barrido en el eje
        xzc=i;
        yzc=h;
        zzc=k;

        % Calculo de la cinematica inversa
        for l=1:6
            xu(l)=xzc-xa(l)+m1*xb(l)+m2*yb(l)+m3*zb(l);
            yu(l)=yzc-ya(l)+m4*xb(l)+m5*yb(l)+m6*zb(l);
            zu(l)=-zzc+m7*xb(l)+m8*yb(l)+m9*zb(l);
            raiz=L*L-xu(l)*xu(l)-yu(l)*yu(l);
            if(raiz>=0)
                za(l)=zu(l)-sqrt(raiz);
            else
                za(l)=-1;
            end
        end
        % Fin de calculo de la cinematica inversa
        % Criterio para aceptar un punto dentro del espacio de trabajo
        % las dimensiones de los eslabones za(i) deben ser menores de AAP
        % y mayores de 0.
        if
            ((za(1)<=AAP)&(za(2)<=AAP))&((za(3)<=AAP)&(za(4)<=AAP))&((za(5)<=AAP)&(za(6)<=AAP))
            &((za(1)>=0)&(za(2)>=0))&((za(3)>=0)&(za(4)>=0))&((za(5)>=0)&(za(6)>=0))
                j=j+1;
                trayx(j)=xzc;
                trayz(j)=zzc;
                vectz(j)=j;
                break;
            end
        end;
end;

    % Los puntos obtenidos son incluidos en vectores
trayy(1,:)=ones(size(trayx(1,:)))*0;
for i=1:72
    [tx,ty,tz]=rotz_(trayx, trayy, trayz, i*5);
    vecx(i,:)=tx;
    vecy(i,:)=ty;
    vecz(i,:)=tz;
end

    % Grafica el contorno en el plano xz
figure(2);
plot(tx,tz,'r');

```

```

        % Grafica el espacio calculado completo
figure(3);
colormap(gray);
mesh(vecx,vecy,vecz,vecz);
pause;
figure(4);
colormap(bone);
mesh(vecx,vecy,vecz,vecz);
view(-37.5,0);
pause;
figure(5);
colormap(cool);
mesh(vecx,vecy,vecz,vecz);
view(0,30);

no=3;
tz=trayz-trayz(1);
        % Obtencion de coeficientes
[pp,ss] = POLYFIT(tz,trayx,no)
        % Cálculo del volumen del espacio de trabajo con interpolación
for i=no+2:5
    pp(i)=0;
end
        % Obtencion de coeficientes
coef(9)=pp(1)^2;
coef(8)=2*pp(1)*pp(2);
coef(7)=2*pp(1)*pp(3)+pp(2)^2;
coef(6)=2*pp(1)*pp(4)+2*pp(2)*pp(3);
coef(5)=2*pp(2)*pp(4)+pp(3)^2;
coef(4)=2*pp(2)*pp(5)+2*pp(3)*pp(4);
coef(3)=2*pp(3)*pp(5)+pp(4)^2;
coef(2)=2*pp(4)*pp(5);
coef(1)=pp(5)^2;

polin(9)=coef(9)/9;
polin(8)=coef(8)/8;
polin(7)=coef(7)/7;
polin(6)=coef(6)/6;
polin(5)=coef(5)/5;
polin(4)=coef(4)/4;
polin(3)=coef(3)/3;
polin(2)=coef(2)/2;
polin(1)=coef(1);

voleq=0;
for i=1:7
    voleq=voleq+coef(i+2)*(AAP)^i/i;
end
voleq=voleq*pi
        %
tx=polyval(pp,tz);

```

Programa no. 4. Método de caracterización.

```
% Este es un intento por obtener el espacio de trabajo
% calculando x (punto extremo en el eje X) como una funcion de z,
% la cual es usada para obtener el area como una seccion
% transversal de z. El volumen se obtiene al realizar una
% sumatoria de todas las secciones transversales
% por un factor dz, que son los incrementos entre cada z.

yyy3; % Calculo de las dimensiones del manipulador
ang_tao(1)=asin((ya(3)-yb(3))/L); % Angulo de abertura total de L
% cuando esta paralelo al plano xy
% Inicializacion de variables

volumenx=0;
j=1;
lamda=L*cos(ang_tao(1));
% Inicio de la sumatoria para la seccion
% la seccion baja del EdeT

for z=(-AAp-AB(3)):1:-AAp
% Obtencion del valor de la componente en el eje x
% de los puntos coordenados pertenecientes a los vertices
% de una seccion transversal

xext(1)=sqrt(lamda^2-(z+AAp)^2)+xa(4)+CB(1)*cos(60/57.29);
yext(1)=0;
xext(2)=-xext(1)*cos(60/57.29);
xext(3)=xext(2);
yext(2)=xext(1)*cos(30/57.29);
yext(3)=-yext(2);
mx1=(yext(1)-(ya(4)+ya(5))/2)/(xext(1)-(xa(4)+xa(5))/2);
mx2=(yext(2)-(ya(4)+ya(5))/2)/(xext(2)-(xa(4)+xa(5))/2);
angarc=atan((mx2-mx1)/(1+mx1*mx2));

longtemp=sqrt(abs(lamda^2-(z+AAp)^2))+CBi*cos(ang_epsilon/2);
longitud=sqrt((abs(xext(2)-xext(1)))^2+(abs(yext(2)-yext(1)))^2);
altura=sqrt(3)*longitud/2;
% Obtencion del area de la seccion transversal en z
area=3*(pi/6-sqrt(3)/4)*(longtemp)^2+altura*longitud/2;
% Suma total
volumenx=volumenx+area;

end;

xext(4)=xext(1);
yext(4)=yext(1);
pext(1,:)=[xext(1),yext(1)];
pext(2,:)=[xext(2),yext(2)];
pext(3,:)=[xext(3),yext(3)];

long_min=AAp;
long_max=0;
for jj=1:3
xzc=pext(jj,1);
```

```
yzc=pext(jj,2);
zzc=-AAp;
paralel3;
end;

longm=-AAp+long_min;
% Calculo de la seccion intermedia del EdeT
volumen1=area*(long_min);
% Calculo de la seccion alta del EdeT
if(long_min>AB(3))
    volumen2=area*(long_min-AB(3))/3;
else
    volumen2=0;
end
% Calculo del volumen total del EdeT
volumenxx=volumenx+volumen1+volumen2;
```

CALCULO DEL ESPACIO DE TRABAJO PARA EL DISEÑO DE UN ROBOT PARALELO DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD

Alejandra Sánchez Flores, Eduardo Castillo Castañeda

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería,
Centro Universitario, 76010-Querétaro, MEXICO
tel: +52-(42)-16-24-14, fax: +52-(42)-15-08-98
e-mail: alsanchez@prodigy.net.mx
ecast@sunserver.uaq.mx

RESUMEN

El estudio y las aplicaciones de robots paralelos se ha intensificado los últimos años. Las razones son la facilidad de construcción, la simplicidad de la dinámica originada por el hecho de tener los actuadores fijos en la base, las altas aceleraciones permitidas. Uno de los inconvenientes de este tipo de mecanismos es el espacio reducido de trabajo. Sin embargo, si el espacio de trabajo es conocido, como es comúnmente el caso en aplicaciones industriales, el robot puede ser geoméricamente diseñado para garantizar un buen desempeño en el espacio de trabajo indicado. El método consiste en proponer un espacio suficientemente amplio y verificar mediante el modelo geométrico inverso que puntos de ese espacio son alcanzables

1. INTRODUCCION

Los manipuladores paralelos aún no son muy conocidos comúnmente, aún existe la idea de un robot brazo serial que – al igual que el brazo humano - es una extremidad que tiene movimiento activo en cada articulación, desde la inicial hasta la final. El concepto de manipulador paralelo no concuerda del todo con esta idea. Una idea general del manipulador paralelo - relacionada con su forma de producir movimiento deseado en su órgano terminal - puede obtenerse al sostener un espejo con las yemas de los dedos de la mano y moverlo en diferentes direcciones, solo es necesario contraer y expandir cada uno de los dedos y obtenemos diferentes orientaciones y traslaciones del espejo. En general, los manipuladores paralelos son dispositivos robóticos que difieren del manipulador serial en virtud de su estructura cinemática. Los manipuladores paralelos están compuestos de lazos cerrados cinemáticos formados por dos o más cadenas cinemáticas que conectan una plataforma móvil a una base; una articulación de la cadena tiene un actuador o es activa y las articulaciones restantes son pasivas, esto es sin actuadores; tal estructura cinemática permite a los manipuladores paralelos ser manejados

por actuadores localizados en la base del manipulador. En contraste, los manipuladores seriales no tienen lazos cerrados cinemáticos y usualmente tienen un actuador por cada articulación a lo largo de la cadena serial, lo que contribuye con una porción significativa de la carga experimentada por el manipulador. Los eslabones de un manipulador paralelo generalmente no necesitan soportar el peso de los actuadores y esto permite que los eslabones del manipulador paralelo sean seleccionados más ligeros que los de un manipulador serial. En general: los manipuladores paralelos pueden disfrutar de beneficios potenciales asociados con construcción de peso ligero tal como operaciones de alta velocidad y los beneficios de la razón de peso-carga.

En este tipo de manipuladores se distinguen dos plataformas: una fija, usada como base, y otra móvil, que sirve como órgano terminal. En el caso de un manipulador paralelo de seis grados de libertad, la plataforma móvil es unida a la base a través de seis cadenas cinemáticas o piernas - las cuales están constituidas por seis grados de libertad cada una -.

2. ANTECEDENTES

2.1 Reseña histórica

El primer manipulador paralelo del cual se tiene referencia es el construido por Stewart. Este fue utilizado como simulador de vuelos en entrenamiento de pilotos. Por ser la primera referencia que se tiene, es a Stewart [1] a quien se le atribuye su origen. Los actuadores se encuentran en la plataforma fija, ver Fig. 1.1.

El robot DELTA de Clavel [2], Fig. 1.2, es un robot de tres grados de libertad con una estructura que asegura solamente movimientos de traslación para la plataforma móvil. El robot Hexaglide de la Escuela Politécnica de Zurich es un manipulador en el cual los ejes de las articulaciones prismáticas son horizontales y paralelos. Las articulaciones universales son colocadas en la base y las cadenas cinemáticas se mueven a lo largo de ejes paralelos [3].

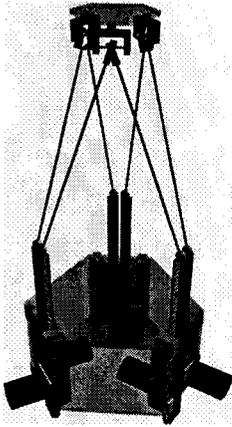


Fig. 1.1 Plataforma Stewart aplicado a un manipulador para cirugía de la arteria coronaria

Una generalización del robot DELTA es el robot HEXA de Pierrot, Fig. 1.3. Una variante del robot Hexa es el 321-Hexa presentado por Bruyninks. El HEXA tiene el mismo concepto que el DELTA pero le son añadidas articulaciones esféricas que aportan un movimiento de 3 gdl más a la plataforma móvil [4]. Los manipuladores arriba mencionados tienen estructuras varias y hacemos referencia a ellas para reconocer las variaciones de configuraciones posibles manipulador paralelo.

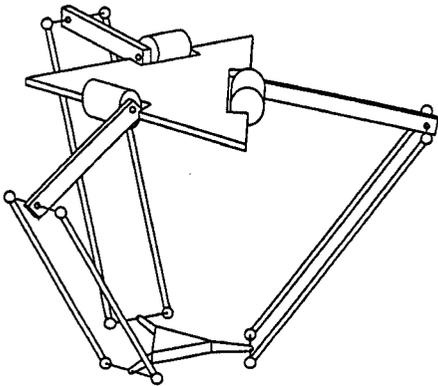
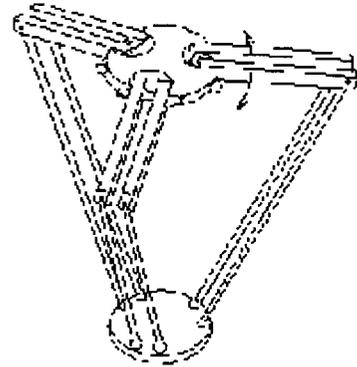


Fig. 1.2 El robot DELTA

2.2 Estado del Arte

Los esfuerzos por determinar un método para realizar el diseño de un manipulador paralelo se ven obstaculizados por el cálculo de la cinemática directa; este cálculo, por las características estructurales del manipulador, nos lleva a obtener múltiples soluciones – de desplazamiento de los eslabones activos - para un punto coordinado dado. El diseño está enfocado a

obtener una estructura de un robot a partir de establecer un conjunto de necesidades que sean cumplidas; dentro de este conjunto, es de importancia el alcanzar un espacio de trabajo determinado. Un estudio para la determinación del espacio de trabajo para una plataforma Stewart fue presentado por Plessis y Snyman [5]. Chablat y Wenger se han ocupado de caracterizar las regiones donde es posible realizar trayectorias dentro del espacio de trabajo de manipuladores paralelos [6].



1.3 El robot HEXA, una variante

Merlet propone en [7] diseñar un manipulador paralelo para un espacio de trabajo específico. Este trabajo es interesante ya que el procedimiento es normalmente contraria.

3. MODELO CINEMÁTICO INVERSO

3.1 Descripción del manipulador bajo estudio

El problema del modelo cinemático inverso consiste en encontrar los movimientos de cada uno de los eslabones activos que conforman al manipulador para alcanzar con el órgano terminal una actitud en el espacio cartesiano. El eslabón activo produce un movimiento a través del par generado por el actuador. En este trabajo el modelo cinemático inverso es utilizado para el cálculo del espacio de trabajo. También la cinemática inversa utiliza transformaciones de rotación y desplazamiento y las variables depende de la localización de una posición inicial y de una posición final deseada y que sea alcanzable por el manipulador. Al generalizar estos cálculos para cualquier punto, podemos identificar puntos para los cuales los desplazamientos de los eslabones son físicamente imposibles, si sus dimensiones están predeterminadas.

La estructura geométrica con que se trabaja en el presente estudio, mostrada en la Fig. 3.1, la componen 6 cadenas cinemáticas soportadas por la plataforma fija y que sostienen a la plataforma móvil. La Fig. 3.2 presenta la configuración de una sola cadena cinemática. Se observa que el eslabón fijo sostiene el resto de la cadena. En este es colocado el actuador que ejerce movimiento sobre la articulación prismática de un grado de libertad. El resultado de tal acción es un desplazamiento del eslabón prismático solo en el eje z. Este eslabón es conectado a una articulación universal o cardan que aporta a la cadena cinemática dos grados de libertad.

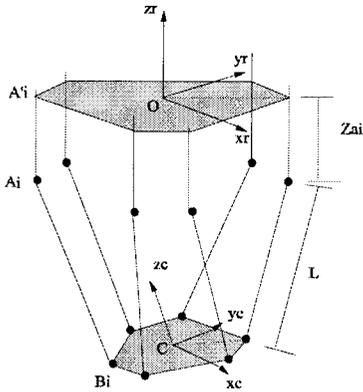
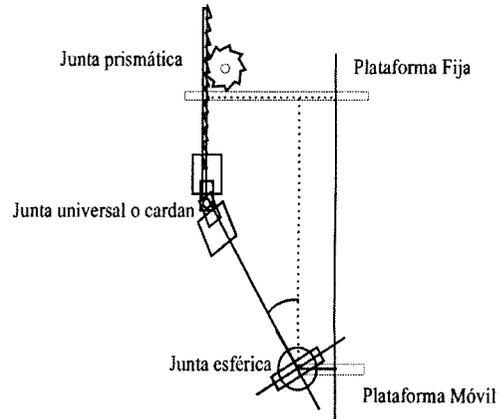


Fig. 3.1 Representación de la configuración del manipulador paralelo bajo estudio

La cardán a su vez es conectada a través de otro eslabón a una articulación esférica con la cual se obtienen tres grados de libertad más. En total se cuenta con seis grados de libertad para cada cadena. La articulación esférica es conectada directamente a la plataforma móvil. La configuración que se propone tiene como articulación prismática un sistema piñón – cremallera. La plataforma fija es considerada como el eslabón fijo, sobre la plataforma móvil se coloca el órgano efector. La orientación de la plataforma móvil es la orientación que el manipulador tiene y las coordenadas del punto central de esta misma son tomadas como las coordenadas que el manipulador alcanza.

3.2 Cálculo del Modelo Geométrico Inverso.

El problema del Modelo Geométrico Inverso (MGI) para el manipulador paralelo que se propone consiste



en calcular el desplazamiento del eslabón prismático correspondiente a cada cadena cinemática. Para el cálculo del MGI, primero se analizará la Cinemática Inversa de una sola cadena cinemática y posteriormente se extenderá el resultado para el resto de cadenas. Para simplificar la explicación la cadena cinemática será dividida en dos partes: la articulación prismática y la universal, juntas, conforman una articulación de 3 gdl que llamaremos T; y la articulación esférica, con 3 gdl e identificada como V. La parte T puede estudiarse en términos geométricos debido a que sólo se tiene una articulación activa con dos pasivas. La parte V puede estudiarse con ayuda de los ángulos de Euler, que son usados para especificar la orientación de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia. Los ángulos de Euler (α, β, γ) especifican tres sucesivas rotaciones que deben ocurrir en el orden especificado. En el caso general, la matriz de transformación para rotar desde los ejes xyz hasta $x'y'z'$ es:

Fig., 3.2 Estructura geométrica del manipulador paralelo.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La matriz M está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \text{sen} \psi \cos \phi \text{sen} \theta & \text{sen} \psi \cos \theta + \cos \psi \cos \phi \text{sen} \theta & \text{sen} \phi \text{sen} \theta \\ -\cos \psi \text{sen} \theta - \text{sen} \psi \cos \phi \cos \theta & -\text{sen} \psi \text{sen} \theta + \cos \psi \cos \phi \cos \theta & \text{sen} \phi \text{sen} \theta \\ \text{sen} \psi \text{sen} \phi & -\cos \psi \text{sen} \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para describir el modelo, se muestra en la Fig. 3.3, una representación parcial del mecanismo.

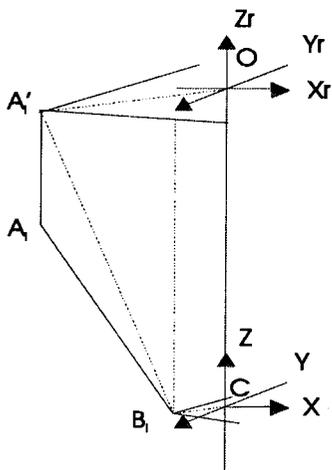


Fig. 3.3 Representación geométrica de una cadena cinemática.

Es importante observar que para el cálculo del MGI, las coordenadas de los puntos A_i' y B_i ($i = 1 \dots 6$) son determinadas y definidas en el plano absoluto y relativo del manipulador. Estos puntos corresponden a las uniones entre las cadenas cinemáticas independientes y las dos plataformas. Podemos constatar que si la posición de la plataforma móvil es conocida, a través del vector OC es posible expresar la posición de los puntos B_i en el plano absoluto. La posición de los puntos B_i que corresponden a la plataforma móvil puede ser obtenidos por:

$$OB_i = OC + MCB_i \quad (3.3)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

De esta forma, podemos obtener la ecuación que describe a una de las cadenas cinemáticas del manipulador:

$$\begin{aligned} A_i B_i &= A_i A_i' + A_i' B_i \\ &= A_i A_i' - OA_i' + OC + MCB_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$AA_i = -OA_i + OC + MCB_i$$

Como la longitud del segmento $A_i B_i$ es constante y de valor L , la norma, al aplicar producto punto, es:

$$L^2 = \|A_i B_i\|^2 = \quad (3.6)$$

$$= A_i A_i' \cdot A_i A_i' + A_i' B_i \cdot A_i' B_i + 2A_i A_i' \cdot A_i' B_i$$

El vector $A_i A_i'$ puede ser escrito de la siguiente manera:

$$A_i A_i' = -Za_i U_i \quad (3.7)$$

Donde Za_i es la longitud de la articulación prismática y U_i es el vector unitario de $A_i A_i'$. Al sustituir (3.7) en (3.6) es posible obtener:

$$L^2 = Za_i^2 + A_i' B_i^T \cdot A_i' B_i - 2Za_i U_i^T \cdot A_i' B_i \quad (3.8)$$

La ecuación anterior está en términos de las coordenadas articulares Za_i . Al definir las coordenadas, con respecto a la referencia relativa, para los términos A_i' , B_i' , U_i y C obtenemos:

$$A_i = \begin{bmatrix} Xa_i \\ Ya_i \\ Za_i \end{bmatrix} \quad B_i' = \begin{bmatrix} Xb_i \\ Yb_i \\ Zb_i \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} Xc \\ Yc \\ Zc \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, la ecuación 3.5 se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A_i' &= -OA_i' + OC + MCB_i' \\ &= \begin{bmatrix} Xc - Xa_i + m_1 Xb_i + m_2 Yb_i + m_3 Zb_i \\ Yc - Ya_i + m_4 Xb_i + m_5 Yb_i + m_6 Zb_i \\ Zc + m_7 Xb_i + m_8 Yb_i + m_9 Zb_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Y sustituyendo (3.10) en (3.8) se tiene:

$$L^2 = (Zu_i + Za_i)^2 + Xu_i^2 + Yu_i^2 \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) representa una esfera de centro B_i y radio L intersectada en la dirección del vector $A_i A_i'$, es de segundo grado en za_i y tiene dos soluciones.

Ahora vamos a determinar las soluciones reales de la ecuación (3.11). Es posible que (3.11) no admita dos soluciones complejas. Una de las soluciones corresponde a una configuración de la plataforma móvil donde la recta paralela al eje U_i pasando por el punto A_i' que no corta la esfera de centro B_i - con radio del largo del segmento rígido L - . Dicho de otra forma, significa que el montaje de la plataforma móvil del prototipo no es posible en esta configuración (Fig. 3.4) De otra manera, representada por la Fig. 3.4b, la esfera - de centro B_i y radio L - es atravesada por la

recta cuya ecuación es una de las posibles soluciones de (3.11). En los otros casos de la Fig., la elección de una de las dos soluciones reales de (3.11) es hecha teniendo en cuenta el curso máximo y mínimo de los actuadores.

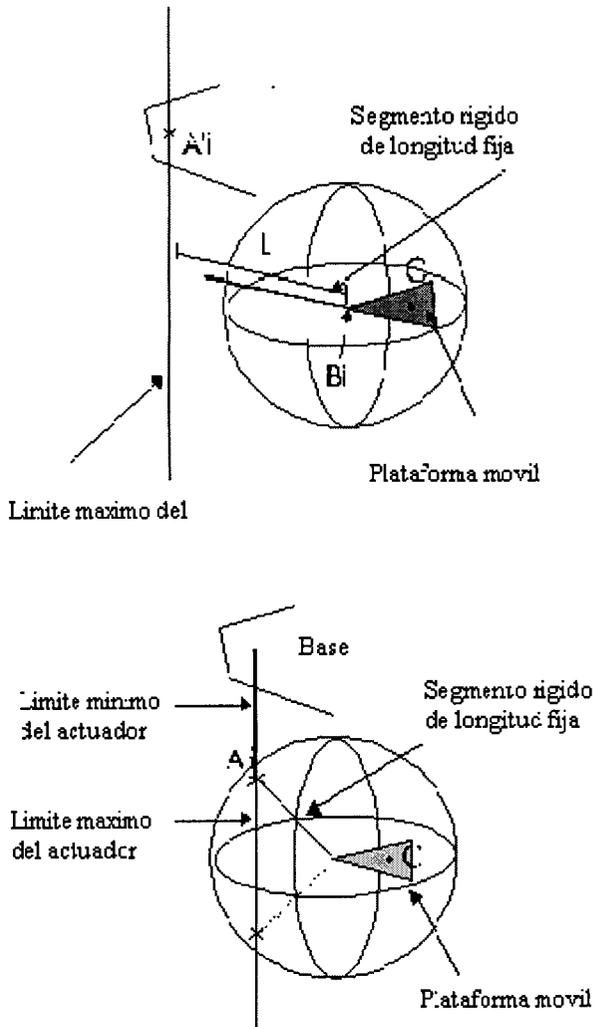


Fig. 3.4 Representación de las posibles soluciones de la ecuación (3.11).

La elección entre los dos puntos de intersección es hecha sobre el punto más próximo a la base. La relación del modelo geométrico inverso que permite calcular la componente articular Za_i conociendo el vector generalizado Xc es:

$$Za_i = Zu_i - \sqrt{(L^2 - Xu_i^2 - Yu_i^2)} \quad (3.12)$$

La solución del MGI es idéntica para todas las cadenas.

4. CALCULO DEL ESPACIO DE TRABAJO

El cálculo del espacio de trabajo que el manipulador puede alcanzar es una de sus características primordiales y debe ser considerada desde la etapa de diseño. Factores como la longitud de los eslabones, el ángulo máximo de apertura de las articulaciones y las características de los actuadores son considerados para determinar las posiciones extremas y el alcance que puede tener el manipulador. El espacio de trabajo comprende todos aquellos puntos coordenados que el manipulador puede alcanzar. A partir de esta definición se establecen otros conceptos necesarios para la siguiente sección.

La tabla 4.1 presenta valores de L , AA' , CB , α , β , y γ (estos tres últimos representan ángulos entre los vectores L , AA' y CB), que son variables de entrada, y los valores obtenidos con métodos propuestos: Barrido de coordenadas, ecuación propuesta, volumen de cono – con características similares de radio de base y altura -, y una ecuación obtenida a partir de una serie de puntos que se encuentran a lo largo de la frontera del espacio de trabajo.

4.1 Cálculo del Espacio de Trabajo por barrido de coordenadas

Para obtener datos confiables acerca del espacio de trabajo, de inicio, se aplica un método para obtenerlo al que se ha llamado en este documento barrido de coordenadas; los resultados obtenidos de esta manera los consideramos como reales y sirven para hacer comparación con resultados obtenidos con otras técnicas. Primero se establece un espacio donde - con mayor probabilidad - el espacio de trabajo del manipulador paralelo podrá encontrarse. No existe una metodología para determinar tal área por lo cual es seleccionada lo suficientemente grande y, a partir de tal selección, se hace barrido de todos los puntos contenidos dentro, primero en el eje y , después en el eje x y por último, en el eje z . La exactitud de la información depende de la resolución que se elija entre las coordenadas.

No.	L	AA'	CB	□	□	□	Vol. real	Eq. Prop	Vol. cono	Eq. Interpolación
1	20	40	10	30	33.6	20	11640	8254	5438	12711
2	40	20	10	30	33.6	20	12472	15889	10504	13860
3	40	40	10	30	33.6	20	31780	31778	21009	33019
4	20	20	10	30	33.6	20	4100	4157	2719	4521
5	20	40	10	10	33.6	20	33246	18896	12578	33500
6	40	20	10	10	33.6	20	32436	36853	24550	28583
7	20	40	5	30	33.6	20	11090	7944	5252	11560
8	20	40	10	50	33.6	20	3162	2736	1694	3394
9	20	40	10	30	15	20	11675	7920	5221	14724
10	20	40	10	30	5	20	11000	7848	5174	11940
11	20	40	10	30	50	20	13051	8766	5770	11940
12	20	40	10	30	33.6	0	10132	7553	5012	10395
13	20	40	10	30	33.6	40	12523	9153	5958	14724

Tabla 4.1. ConFig.aciones para el manipulador para la obtención del espacio de trabajo y resultados de los métodos explicados en esta sección

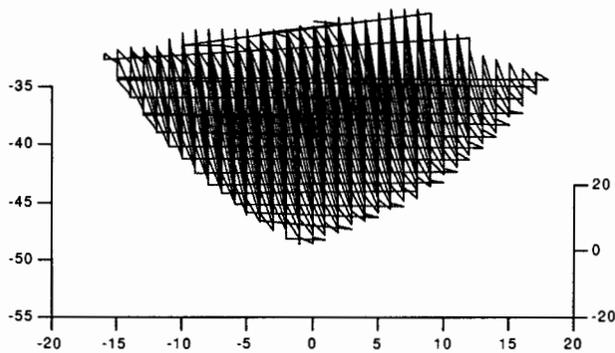


Fig. 4.1 a Vista del espacio de trabajo en plano ax

Para obtener datos confiables acerca del espacio de trabajo, de inicio, se aplica un método para obtenerlo al que se ha llamado en este documento barrido de coordenadas; los resultados obtenidos de esta manera los consideramos como reales y sirven para hacer comparación con resultados obtenidos con otras técnicas. Primero se establece un espacio donde - con mayor probabilidad - el espacio de trabajo del manipulador paralelo podrá encontrarse. No existe una metodología para determinar tal área por lo cual es seleccionada lo suficientemente grande y, a partir de tal selección, se hace barrido de todos los puntos contenidos dentro, primero en el eje y, después en el eje x y por último, en el eje z. La exactitud de la información depende de la resolución que se elija entre las coordenadas. Esta obtención de coordenadas dentro del espacio de trabajo se realiza proponiendo una rotación nula del punto a analizar, ya que los puntos alcanzables con rotación son un subconjunto del conjunto de puntos alcanzables sin esta transformación, por lo cual podemos simplificar nuestro estudio si consideramos al manipulador de 3 gdl. El criterio para determinar si el punto pertenece o no al espacio de trabajo se basa en los desplazamientos de los eslabones prismáticos, si estos rebasan la longitud de la dimensión real del mismo, entonces el punto bajo análisis se encuentra fuera del alcance del manipulador. El cálculo del espacio de trabajo para diferentes dimensiones de la estructura del manipulador es presentado en la tabla 4.1 bajo el título de Vol. Real.

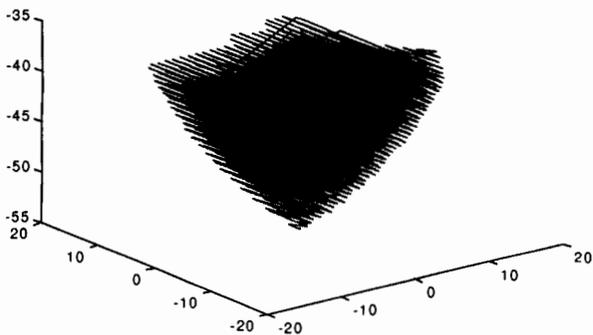


Fig. 4.1b Espacio de trabajo obtenido con barrido de coordenadas con vista en tres dimensiones.

4.2 Cálculo del Espacio de Trabajo con ecuación propuesta

El método de la ecuación propuesta consiste en considerar la forma exterior del volumen del espacio de trabajo en el plano xz, como una parábola rotada alrededor del eje z. La ecuación propuesta contiene un valor A que depende de las características estructurales del manipulador:

$$z = Ax^2 \quad (5.1)$$

Para obtener el volumen resultante de rotar la parábola sobre el eje z, es utilizado el teorema siguiente:

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x , y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V es el volumen de S en unidades cúbicas, entonces

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_i \approx \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (5.2)$$

El volumen es obtenido al proponer a (5.1) como $f(x)$, los límites a y b como los valores extremos en z . Este método caracteriza al espacio de trabajo, sin embargo, los resultados no son muy cercanos a los del volumen real, como puede apreciarse en la tabla 4.1.

4.3 Comparación del Espacio de Trabajo con el volumen de un cono

Al proponer el volumen del cono como una posibilidad para obtener el espacio de trabajo, el objetivo era demostrar cuán cercana era la forma superficial del espacio de trabajo con la del cono. La ecuación del volumen del cono utiliza el radio de la base el cual es determinado al calcular, también con la ayuda de la cinemática inversa, el punto más alejado en el eje x . Además la altura del cono es considerada con el valor de AA' :

$$\text{Vol. Cono} = r^2 * h * \pi / 3 \quad (5.3)$$

Al comparar los resultados de la columna Vol. cono en la tabla 4.1 con la del Vol. real demuestra que este no es método confiable.

4.4 Cálculo del Espacio de Trabajo por rotación de una ecuación obtenida con interpolación de puntos

El método de calcular el espacio de trabajo por interpolación consiste en obtener, por barrido de

coordenadas, solo los puntos más alejados del espacio de trabajo; si consideramos solo puntos externos y contenidos solo en el plano xz; posteriormente, con ayuda del paquete MatLab, específicamente con la opción de interpolación de puntos, es calculada una ecuación que representa el comportamiento de los puntos de la superficie del espacio. Al contar con una ecuación que describe la frontera del espacio en un plano, puede utilizarse nuevamente (5.2). Así también, obtenemos el volumen resultante si rotamos en el eje z la línea correspondiente a la ecuación.

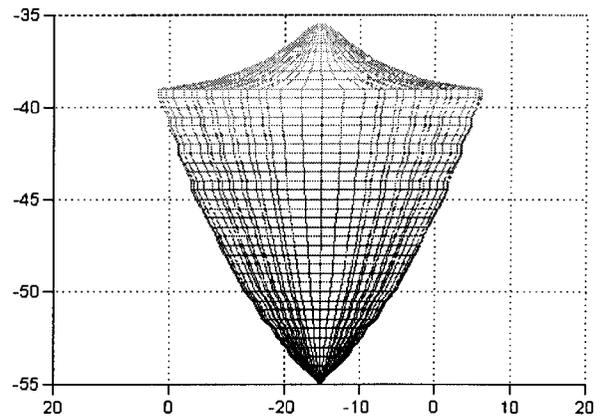
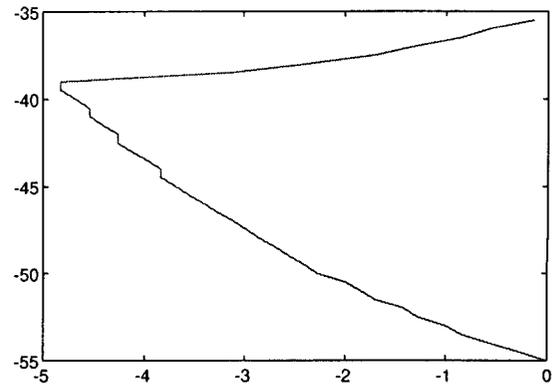


Fig. 4.2 a) Interpolación con datos aportados de los puntos de la superficie del espacio de trabajo, b) Espacio de trabajo obtenido con método de interpolación.

4.5 Cálculo del Espacio de Trabajo basado en el modelo geométrico del manipulador

Existe un método más formal, basado en la geometría del manipulador paralelo y en la propuesta de considerar movimientos de 3 gdl por parte del manipulador, como las posiciones con mayor lejanía posible. Con esta idea, puede visualizarse el espacio

de trabajo en el plano xy de la forma en que la Fig. 4.3 presenta.

El área sombreada en la Fig. 4.3 representa la intersección de los posibles movimientos de cada par de eslabones. Los consideramos por pares debido a solo considerar al manipulador de 3 gdl. Esta área es multiplicada por una altura en el eje z, obtenida al calcular, con cinemática inversa, los valores más lejano y más cercano en el mismo eje y con coordenadas x, y a lo largo del perímetro del área sombreada. Este cálculo resultaría en un volumen equivalente a una porción significativa del espacio de trabajo.

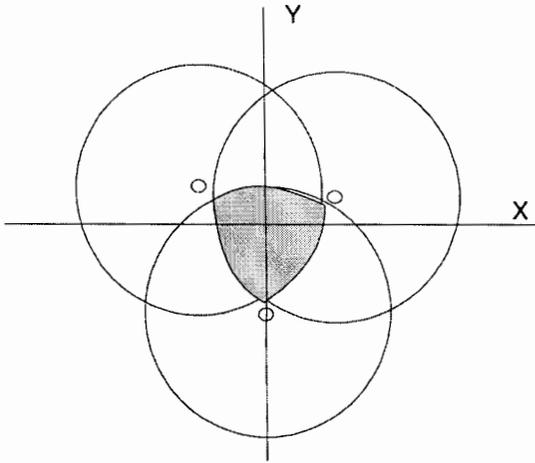


Fig. 4.3. El espacio de trabajo en el plano xy

El cálculo de la cinemática inversa parte de un punto dado en el espacio y de ahí se calcula el desplazamiento de los eslabones; después es usado el cálculo de cinemática inversa al tomar un punto del espacio propuesto para saber el desplazamiento de los eslabones; si este desplazamiento no es válido - un valor negativo o mayor que el valor total de la longitud de la articulación prismática - entonces el punto no forma parte del espacio de trabajo del manipulador. Esto se repite para todos los elementos del área propuesta. Es un método sencillo pero confiable. La idea original de este método fue hacer el barrido dentro del cubo para todos los puntos posibles; otra opción para realizar un barrido en menor tiempo, es no realizar el barrido de todos los puntos contenidos en el área propuesta, sino hacerlo en una porción del cubo. La estructura del manipulador está distribuida en tres porciones iguales de dimensiones, pero rotadas a 120 grados cada una, lo cual hace pensar que al obtener una de las tres porciones podemos obtener las otras dos aplicando una transformación de rotación a la porción obtenida a 120 y 240 grados. Hasta este momento es el método que aplicamos, pero no dejamos de

proponer otras soluciones de obtener el espacio de trabajo.

5. CONCLUSIONES

El espacio de trabajo para el manipulador paralelo depende de diferentes características del manipulador. Aunque los métodos aplicados nos entregan valores aproximados al valor real del espacio de trabajo, aún no contamos con un método de obtención del espacio de trabajo que dependa de las variables de entrada - que son longitud de eslabones y aberturas entre ellos -, esto es, una caracterización del espacio de trabajo. Al alcanzar este objetivo sería muy sencillo pasar a la etapa de diseño.

REFERENCIAS

[1] Feasibility of a Stewart Platform with Fixed Actuators as a Platform for CABG Surgery Device. Zoran Lazarevic. Master's Thesis. Columbia University. Department of Bioengineering. p. 35.

[2] Clavel R. DELTA, a fast robot with parallel geometry. In *18th Int. Symp. on Industrial Robot*, pages 91-100, Lausanne, 26-28 Avril 1988

[3] Les robots à mouvements spatiaux/Spatial robots. Manipulateurs à 3 degrés de liberté/3 DOF robots. Manipulateurs pour translations/Translation robots.

<http://www-sop.inria.fr/saga/merlet/Archi/node2.htm>

[4] Pierrot F., Dauchez P., et Fournier A. Towards a fully-parallel 6 d.o.f. robot for high speed applications. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1288-1293, Sacramento, 11-14 Avril 1991

[5] L.J. du Plessis, J.A.Snyman. The Determination of the Workspace of a Spatial 6-3 Stewart Platform by Mathematical Optimization. Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp 1109-1111, Oulu, Finland, June 20-24, 1999.

[6] D. Chablat, P. Wenger, On the Characterization of the Regions of Feasible Trajectories in the Workspace of Parallel Manipulators, Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, pp 1127-1129, Oulu, Finland, June 20-24, 1999. [5] J.E. Shigley. *Theory of Machines and Mechanisms*. 2nd ed. Late Professor of Mechanical Engineering University of Wisconsin-Madison, pages 399-403. McGraw-Hill.

[7] J.P.Merlet. Designing a parallel manipulator for a specific workspace. Rapport de recherche no. 2527. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Francia, abril 1995.

[8] N. Mouly. Development d'une Famille de Robots Paralleles a Motorisation Electrique. L'Ecole des Mines de Paris. Mai 1993.