Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

La geometría Analítica en la escuela nacional preparatoria de 1886 a 1914

Tesis
Como parte de los requisitos para obtener el grado de
Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta: Fernanda Gabriela Arnaud Chávez
Asesor: M. en C. Roberto Torres Hernandez

Quéretaro, Querétaro, Mayo 2014

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo surge como un espacio para reconocer y estudiar el desarrollo de la teoría matemátematica durante los inicios de la Escuela Nacional Preparatoria.
Si bien se ha estudiado mucho desde el punto de vista histórico, poco se ha hecho desde un punto de vista matemático. Es así que con el fin de rescatar el contenido científico desarrollado por matemáticos mexicanos y tener un panorama más claro del nacimiento y evolución de nuestro sistema educativo, se hace un estudio a profundidad de los textos de esta época.
Resulta imposible para una sola tesis estudiar todo este contenido matemático, por esta razón este trabajo se enfoca en la materia de Geometría Analítica, estudiando cuatro de los principales libros con que se impartía esta materia en la Escuela Nacional Preparatoria en el periodo de 1886 a 1914.
Como segundo enfoque de esta tesis y siendo la inspiración de la misma, se hace notar también el nivel de conocimientos, y aplicación de los mismos, requeridos para un alumno de preparatoria en este periodo. Al estudiar los libros es notable la profundidad y dominio con que se abarcaban los temas, más aun si se comparan con el estudio de la Geométria Analítica a nivel preparatoria en la actualidad.
Esta comparación y estudio desde el punto de vista docente, queda fuera de este trabajo, sin embargo se plantean las bases para desarrollar un trabajo posterior, con el fin de mejorar el método de enseñanza de las matemáticas, en este caso la Geometría Analítica, rescatando conceptos y tácticas del pasado, que no son obsoletas sino que nos ayudan a reencontrarnos con las matemáticas a un nivel más profundo y aplicar estas herramientas en la actualidad, ya que conociendo nuestro pasado, podemos tener una mayor

comprensión del presente y planear el futuro.

Para cumplir las expectativas anteriores, el trabajo se divide en cuatro capítulos, el primero esta **Introducción** en la cual se describe el trabajo, sus motivaciones y elaboración.

El segundo capítulo **Breve Historia de la Escuela Nacional Preparatoria**, nos ayuda a entrar en contexto, entender los alcances de la época y el gran desarrollo educativo que se fomento con la creación de la Escuela. En este capítulo se trata desde como surguió la escuela, hasta la forma de dar las clases, de evaluar las materias y la vida en el colegio, descrita por algunos maestros y alumnos durante la época en que se usaban los libros que estudiaremos.

El tercer capítulo, **Libros a estudiar** presenta cuatro libros centrales para este trabajo. **Nociones de Geometría Analítica** por Manuel Ramírez publicado en 1886. **Nociones de Aplicación del Calculo Algebraico a la Geometría y recíprocamente** de Francisco Echeagaray, **Nociones de Geometría Analítica plana** también de Echeagaray, publicados en 1898 y 1897 respectivamente y por último **Tratado de Matemáticas superiores** de Manuel Torres Torija publicado en 1914.
Para cada uno de los libros anteriores se hace un estudio profundo, presentando una síntesis del contenido, resaltando definiciones, teoremas o ejercicios de interés. Para todos ellos se presentan imágenes de la portada y el índice. Además todos los teoremas, definiciones, ejercicios y demostraciones que se presentan, llevan la imagen original del libro y se desarrollan haciendo un seguimiento de las ideas del autor. Es importante mencionar que la presentación de las imágenes está sujeta al hecho de estar trabajando con libros muy antiguos, por lo tanto se pide al lector tenga en consideración las dificultades de obtener las imágenes y considere que se intento conservar el encanto de los libros antiguos.

El cuarto y último capítulo presenta las concluciones, en las cuales se presentan opiniones de los libros estudiados, se hacen también observaciones desde un punto de vista didáctico, proponiendo ideas para mejorar esta área. Se hace brevemente una comparación del material presentado entre los libros estudiados y los libros de la actualidad, con la esperanza de que esto sirva de base para mejorar el sistema educativo actual, en el area de las matemáticas.

Capítulo 2

Breve Historia de la Escuela Nacional Preparatoria

La escuela nacional preparatoria surge con la idea del Presidente Benito Juárez de unificar la educación en México, persiguiendo el sueño de instaurar una educación enciclopédica y obligatoria para cualquier joven que deseara estudiar una carrera profesional.
Juárez estaba convencido que restarurar la educación sería la salvación del país y fue así, aprovechando el periodo de restaruración de la república después de la intervención francesa, la iniciativa de Juárez y la filosofía del Gabino Barreda, primer director de la Escuela Nacional Preparatoria, que el 3 de Febrero de 1868 inician oficialmente, en el antiguo colegio de San Ildefonso, las clases en esta institución, marcando así uno de los más importantes desarrollos de la educación en México.
En las decadas previas a que se instaurara la Escuela Nacional Preparatoria, durante la guerra de independencia y el triunfo de los liberales sobre los conquistadores, hubo pocos avances en el terreno educativo, ya que la educación estaba mayormente en manos del clero, y el gobierno no tenía ni el tiempo ni los recursos para hacerse cargo de ella. Antes de la escuela nacional preparatoria la educación obligatoria cesaba en la secundaria, a partir de ahí los jóvenes seguían sus estudios dentro de la institución correspondiente a la carrera que deseaban desempeñar, aprendiendo únicamente los temas que se consideraban necesarios para su profesión.
En esa epoca se podían realizar dichos estudios en el colegio de San Ildefonso, Colegio de Mineria, en la escuela de medicina o en algún seminario.
En el colegio de mineria se estudiaba para las profesiones basadas en las

ciencias exactas, los alumnos cursaban materias de álgebra, geometría, aplicación del álgebra a la geometría, trigonometría esférica y cálculo diferencial e integral. Para impartir estas materias se utilizaban libros extranjeros ya que no habia textos mexicanos, algunos de los libros utilizados en el colegio de mineria eran:
Tratado de Matemáticas de Bails, *Tratado de artimética* de Franceur, *Tratado de artmética* de Raynaud, *Elementos de aritmética* de Bourdon, *Análisis aplicado a la geometría* de Le Roy, *Aplicaciones del álgebra a la geometría* de Jacob y *Compendio de matemticas* de Vallejo.
Fue hasta 1850 que se empezó a usar la obra *Curso elemental de matemáticas tomo I y II* de Joaquin Mier y Teran y Francisco M.Chavero[1], ambos profesores del colegio de mineria.
En el colegio de San Ildefonso se concentraban los jovenes que estudiarían las carreras de jurisprudencia y teología. Se estudiaban matemáticas durante el segundo año de estudios preparatorios con materias como aritmética, álgebra, geometría, Trigonometría plana y esférica y geometría práctica. Se usaba el texto *Compendio de matemáticas de Vallejo.*
En la escuela de medicina se estudiaban también materias como aritmética, álegebra, geometría y trigonometría plana.
Tras el triunfo de los liberales en Julio de 1867, comenzo a impulsarse entre muchas otras cosas la educación. Juárez alegaba que un joven salido de secundaria no era capaz de decidir la profesion que desempeñaria por el resto de su vida. Además consideraba que los jóvenes debían abarcar más temas y no centrarse solo en aprender la información competente a su profesión, es así que el 2 de diciembre de 1867 Juárez, con la colaboracion de Barreda y una comisión de cuidadanos educados en las ciencias exactas como Francisco y Jose Maria Díaz Covarrubias y Antonio Tagle (último director del Colegio de San Ildefonso), se expide la "Ley orgánica de instrucción pública en el Distrito Federal", en la cual se establecia la fundación de la Escuela Nacional Preparatoria y se presenta el primer plan de estudios de la misma, marcando un camino de progreso para la educación en México.

Por su lado Gabino Barreda tenía la filosofía de que el conocimiento debía basarse en las ciencias exactas, su filosofía positivista influenciada por las ideas de Augusto Comte, quien sostenia "*Enfrentar las teorías de cualquer orden de ideas a la coordinación de los hechos observados, incluyendo*

[1]Sin embargo esta obra, era casi una traducción exacta de obras francesas.

la experimentación y la comparación".
Decía también que las matemáticas constituian el instrumento más poderoso que puede impulsar el espiritu humano en la investigacion de las leyes de los fenómenos naturales y que había que mirarlas como la base fundamental de la filosofía natural, plantaba que la ciencia matemática debe constituir el punto de partida de toda educación científica racional.
Fue siguiendo estos ideales que Barreda forjó la idea de lograr un conocimiento intuitivo y práctico.
Tras escuchar un discurso de Gabino Barreda en el que hablaba de la importancia de no sacrificar la educación por la guerra , Juárez se dio cuenta de lo mucho que empataban sus ideas conforme a la educación y fue así que decidió nombrarlo director de la Escuela Nacional Preparatoria, además de ser el encargado de crear y verificar los planes de estudio.
Barreda hizo un excelente trabajo, siguiendo el método positivista, creado por el gran filósofo francés Montpellier, creó un plan de estudios a 6 años el cual, como dijo el mismo en su discurso del 8 de septiembre de 1877, tomaba como base las ciencias exactas tales como, matemáticas, cosmografía, física, química, botánica, zoología y lógica y a un menor nivel pero con buen contenido la geografía, historia general y particular de México, literatura, lenguas modernas(francés e inglés), griego y latín. El director construyó su plan, eligío los libros de texto y la mecánica de las clases siguiendo siempre su lema de *Amor, orden y progreso* y teniendo en mente la idea tanto suya como de Juárez de consolidar la educación física, intelectual y moral. De modo que el plan de estudios estaba centrado en las ciencias exactas y experimentales, de ahí que para armar la planta docente de esta escuela, don Gabino Barreda hubo de recurrir a los mejores hombres del país formados en estas ciencias. Algunos de ellos con filosofía positivista y otros no tanto, sin embargo esto no fue condicionante para trabajar o no en la institución, para el director lo importante era que su planta de profesores estuviera bien capacitada y dispuesta a transmitir conocimientos.

Fue así que en Febrero de 1868 inician por primera vez los cursos en la Escuela Nacional Preparatoria, iniciando aproximadamente con 900 alumnos inscritos. Algunos de ellos de entrada por salida y otros internos instalados en el colegio, las antiguas instalaciones de San Ildefonso fueron adaptadas para los nuevos alumnos y modificadas a lo largo de los años según las necesidades de la escuela.
Se contaba con aulas amplias de techos altos y duela de madera, estas aulas

contaban con una plataforma para el profesor, pizarron, bancas de madera para los alumos y silla y mesa para el maestro en turno. Para las clases muy concurridas había también salones tipo graderias. Los alumnos tomaban sus clases aproximadamente 250 días habiles al año. Con clases de lunes a sabado, las materias referentes a las matemáticas se impartian diario con clases de hora y media.

El 2 de diciembre de 1867 se publica la *"Ley organica de instrucción pública"* y se da a conocer su reglamento el 24 de enero de 1868, en el se incluía el primer plan de estudios para la Escuela Nacional Preparatoria, este plan solo estuvo vigente dos años tras el inicio de cursos del colegio en febrero de 1868. De acuerdo con este plan los estudios preparatorianos se repartían en cinco años escolares, excepto para los futuros ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficaidores de metales, quienes lo concluirían solo en cuatro años.
Para este plan se impartirían las siguienes cátedras:
Aritmética, Álgebra y Geometría, Gramática española, Francés, Taquigrafía, Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimail, Cosmografía y Mecánica racional, Raíces griegas, Latín I, II y III, Inglés I y II, Física, Geografía, Química, Historia, Cronología, Tendeduría de libros, Historia natural, Alemán I y II, Lógica, Ideología, Moral, Gramática general, Historia de la metafísica, Literatura y Dibujo en sus diversa ramas. El plan de estudios listaba las cátedras que habia que cursar de acuerdo a la carrera profesional que seguirían los alumnos, abogados, médicos y farmacéuticos, agricultores y veterinarios, y otra para ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales. Sin embargo en lo referente a las matemáticas el plan de estudios era uniforme para todos.
El primer año se cursaban los cursos de Artimética, Álgebra y Geometría, en el segundo, Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal; y en el tercer, Física. De modo que como se menciono anteriormete se seguia el enfoque positivista y estas materias eran básicas y obligatorias para todos los alumnos.
El 15 de mayo de 1869 se establece la nueva *"Ley orgánica de instrucción pública"* con un nuevo plan de estudios que entra en vigor en 1870 y continúa hasta 1896. En este nuevo plan, sigue vigente el enfoque positivista y las catedras son las mismas, esta vez se extiende el estudio de la preparatoria a cinco años escolares para todos los alumnos, en cuanto a las matemáticas se reacomodan las materias de la siguiente forma.

En el primer curso de matemáticas se estudiaba Arítmetica, Álgebra y

Geometría plana; en el segundo curso se estudiarían Geometría en el espacio y general junto con Trigonometría para concluir con nociones de Cálculo infinitesimal. De esta forma se disminuía la carga del primer año pretendiendo así obtener mejores resultados por parte de los estudiantes.
Este plan tuvo algunas modificaciones durante los veintisiete años en los que estuvo vigente. Uno de los cambios más importantes fue que en 1871 se integro una nueva materia llamada Academias de Matemáticas. Esta materia era opcional, pero se dirigia especialmente a los alumnos de cuarto y quinto año que se preparaban para estudiar una carrera de ingenieria. En esta clase se hacian discusiones sobre los temas de las materias de matemáticas y se resolvian algunos ejercicios.

Para el año de 1873 se incluye entre las materias de estudio de las matemáticas la Geometría analítica, para el estudio de esta se utilizaba el libro de Terán y Chavero. Para el año de 1874 se incluye esta materia en el segundo curso de matemáticas y en los años siguientes permaneció siempre en el plan de estudio. También a partir de este año se exonera a los futuros abogados, médicos y farmacéuticos de algunas materias de matemáticas, de modo que solo estaban obligados a cursar Trigonometría plana en el primer año y completar el segundo curso de matemáticas.
Para 1877 se plantean nuevas normas sobre el plan de estudios, entre ellas se mencionaba que los alumnos que iban a seguir la carrera de abogado, médico o farmacéutico, habrían de cursar todas las materias de Geometría y Trigonometría, revirtiendo así de cierta manera las normas de 1874, sin embargo se seguía excluyendo a estos alumnos del estudio del Cálculo infinitesimal.
El 18 de septiembre de 1874, la Junta Directiva de Instrucción Pública envió un comunicado al entonces director de la ENP, don Alfonso Herrera. En este comunicado se expedia el *Reglamento para el estudio de los cursos de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria.* Este entró en vigor en el ciclo escolar de 1879 e incluía los siguientes artículos.

> Artículo 1. Se suprime del primer curso de Matemáticas para todas las carreras el estudio de la Geometría Plana, y pasa ésta a formar parte de segundo curso.
> Artículo 2. En el segundo curso, también para todas las carreras, se estudiará Geometría plana y en el espacio, y Trigonometría Rectilínea.
> Artículo 3. El tercer curso, obligatorio únicamente para los que

> se dediquen a la carrera de Ingeniería, comprenderá: la aplicación del Álgebra a la Geometría, Trigonometría esférica y Geometría analítica.
> Artículo 4. En el cuarto curso, igualmente obligatorio para los que se dediquen a la carrera antes mencionada, se enseñara el Cálculo infinitesimal.
> Artículo 5. Para llevar a cabo estas reformas, uno de los actuales catedráticos de los primeros cursos con un aumento de sueldo de doscientos pesos anuales, pasará a ser profesor de una de las clases de segundo año; y uno de los actuales profesores de segundo curso, sin alteración de sueldo, pasará a ser profesor de los cursos de tercero y cuarto años, debidamente dar terciadas las lecciones de una y otra clase.
> Artículo 6. En el presente año se verificarán los exámenes de Matemáticas conforme al sistema y en los términos que hasta hoy se han observado; pero podrán admitirse igualmente exámenes conforme a la distribución de materias establecidas en los artículos que anteceden, a los alumnos que así lo soliciten.

Fue así que a partir del ciclo escolar de 1879, las Matemáticas en la ENP se impartirían en los primeros cuatro años. Los primeros dos años obligatorios para todos los estudiantes y los últimos dos solo para los futuros Ingenieros. Las ventajas de este plan fueron notorias para el desarrollo academico de los alumnos. El director Alfonso Herrera aseguraba que los alumnos estaban muy bien preparados para sus estudios posteriores.

En enero de 1885 asume la dirección de la escuela don Vidal Castañeda y Nájera que, entre otras medidas, impulsó que se formara una junta de profesores, una comision destinada a estudiar la *Ley de Instruccion Pública* y su reglamento, con el fin de proponer modificaciones que hicieran más eficientes los cursos que se impartian en la escuela.
Así en el plan impuesto por la comisión de profesores, las cátedras de matemáticas y Física, se redistribuyeron de la siguiente forma:
Para el primer año, Artimética, Álgebra y Geometría plana. Para el segundo Geometría de los volumenes y ambas trigonometrías. En el tercer curso Geometría analítica, nociones de Cálculo trascendente y Física. Y en el cuarto año, obligatorio únicamente para los alumnos que iban a estudiar una ingenieria, se estudiaría el Cálculo infinitesimal. Conforme pasaron los años con

este nuevo acomodo, no se sabe si fue por la dificultad, sin ningun nombramiento oficial se fue dejando de lado la materia de Cálculo infinitesimal y a partir del 1883 ya no se exigió a los alumnos que cursaran esta materia.
En el año de 1897 entró en vigor el nuevo plan de estudios de la ENP, igual para todos los alumnos, se volvio a incluir el Cálculo infinitesinal y se dejo fuera la Trigonometría.
A pesar de todos los cambios que sufrieron los planes de estudios, se mantuvo siempre el enfoque positivista, fomentando en los alumos un pensamiento cientifico y estructurado que les permitiría tener éxito en el ambito laboral. [2]
Para cada uno de estos planes y sus materías se elegían cuiadosamente los textos que llevarían los alumnos, en los primeros años los contenidos de las catedras se basaban casi por completo en los textos que se usaban para ellas. Estos textos eran elegidos por los profesores y las juntas directivas, en 1869 para el primer y segundo curso de matemáticas se usaba la obra de Terán y Chavero, esta no incluia Cálculo infitesimal a falta de un libro de texto que cumpliera las necesidades para este curso, esta matería se impartía con notas del profesor.
Se nombró a Manuel Ma. Contreras como profesor titular del primer curso de matemáticas y fué él mismo por instrucción de Gabino Barreda quien escribió un texto para la enseñanza de del primer curso de matemáticas, escrito conforme al programa del plan de estudios vigente en ese periodo. La idea era escribir un texto accesible para los jovenes que apenas aprendían sus primeras nociones aritméticas.

La obra de Contreras incluía temas de Aritmética, Álgebra, Geometría plana y en el espacio, Trigonometría plana y esférica, es decir todos los temas a curbir en el primer curso de Matemáticas y parte del segundo.

Para 1875 siguió utilizandose el libro de Contreras para la materia de Aritmética y Álgebra, y el texto de Terán y Chavero para la Geometría.
Para 1876 se adopto el libro de Geometría plana de Contreras, y el de Terán y Chavero se utilizó para Geometría en el espacio y trigonometría rectilinea, a partir de 1879 estos temas pasaron a estudiarse también con el libro del

[2] Al final de este capítulo se incluyen los planes de estudío de 1868-1869 y 1870-1896, incluyendo todas las materias que debían cursar los alumnos según su futura carrera y su año de estudio.

profesor Contreras.
Para 1886 se uso el libro *Tratado de trigonometría esférica* también de Contreras para estudiar esta materia.
En cuanto al Cálculo infitesimal, durante los primeros seis años se impratía la clase con lecciones orales y notas del profesor, siendo Franciso Díaz Covarrubias el primero en impartir la materia. Para esta materia se apoyaban en un texto frances del autor Boucharlat.
En 1873 el profesor Covarrubias publica su obra *Calculo trascendental* la cual a partir de 1874 fue adoptada como texto para el estudio del segundo año de matemáticas y se siguio utilizando hasta el último plan de estudio de 1897.
Para el año de 1880 se seguía usando para el estudio de la Geometría Analítica el segundo texto de Terán y Chavero y en 1881 se asigno para esta matería el libro de Lefebure de Fouray que incluia Trigonometría esférica. En 1885 se asignaron las obras de Briot y Bouquet *Geometría analtica* y *Lecciones de trigonometría* y en 1886 comenzo a utilizarse la obra de Contreras.
En 1899 el estudio de la prepratoria se dividió por semestres, sigieron usandose los textos de Contreras para Aritmética, Álgebra, Geometría y trigonometría rectilinea. Pero para Cálculo infinitesimal y Geometría analítica se usaron los textos de Francisco Echeagaray.
Todos los libros que los alumnos necesitaran para sus estudios se encontraban en la biblioteca de la Escuela Nacional Preparatoria junto con algunos libros extranjeros que se usaban para consulta.
Más adelante estudiaremos, algunos de estos textos con más detalle, siendo de interes para este trabajo aquellos que se usaron para impartir la matería de geometría analítica, ya que el nivel de estos textos exigia a los alumnos dedicación a sus estudios y un alto desarrollo de capacidades matemáticas, permitiendo así un notable avance del desarrollo de la teoría matemática en México.

La elección de los libros de texto así como el contenido de las clases se realizaban con extremo cuidado, sin embargo nada de esto hubiera tenido el mismo impacto de no ser por los excelentes profesores de los que se conformaba la Escuela Nacional Preparatoria.
Previo a la fundación de la escuela, Gabino Barreda fue muy cuidadoso en elegir a profesores muy bien preparados, sobre todo en el área de las ciencias exactas, ya que su plan de estudios se basaba fuertemente en ellas.
Barreda no exigía que los profesores siguieran la filosofía positivista para poder ser contratados, pero si era muy estricto en contratar profesores bien

estudiados y preparados para dar clase. Eligiendo así destacados hombres de ciencia casi mayormente egresados del colegio de mineria.
Fue así que previa a la fundación de la Escuela Nacional Preparatoria, en Enero de 1868 se publica la primera nómina de profesores y empleados de la institución, figurando en ella los siguientes maestros de matemáticas.
Para el primer curso:

Isidoro Chavero
Jose Bustamante
Eduardo Garay
Manuel Tinoco
(Quien fue sustituido por Manuel María contreras en septiembre del miso año.)
Rafael Ángel de la Peña
(Quien duro más de 40 años en la institución, impartiendo la materia de lógica.)
Francisco Bulner

Para el segundo curso[3] de matemáticas:

Francisco Díaz Covarrubias
Manuel Fernandez Leal

En Diciembre de 1868 se nombra a Manuel Ma. Contreras coordinador del primer año de matemáticas, durante este periodo no ejerció como maestro. Desde este cambio y hasta 1873 se sumaron a la escuela los siguientes profesores.
Para el primer curso:

Mariano Villamil
Francisco Prieto
Luis Castillo
Ignacio Ortiz de Zarate
Manuel Ramírez
Agustin Banajo
Rafael Hernandez

[3]Recordemos que de 1868 a 1878 en el plan de estudios solo se estudiaban matemáticas en primer y segundo año.

En 1874 ocupa Manuel Fernandez Leal el puesto de Manuel Ma. Contreras y se incorporan los siquientes profesores:

Roberto Esfera
Manuel Calderon
Rafael Barba
Juan Vallarino
Emilio Baz
Eduardo García
Jose María Bustamante.

En 1878 se incorpora también Agustín Barresco, como profesor titular del primer año, y para 1887 ya se habían incorporado los profesores:

Carlos Tamborel
Damian Flores
Francisco Leon
Gabriel Alcocer

A la muerte del profesor Barraso en 1887 regresa como titular de la materia el profesor Manuel Ma. contreras y en mayo de 1895 ocupa este cargo Ignacio Ortiz Zarate.
A partir de 1879 Rafael Barba toma el puesto de Contreras y se incorporan:

Rafael Angel de la Peña
Emilio Baz

Tras este periodo para tercer y cuarto se fija como titular a Manuel Ramírez el cual cumple su labor de 1879 a 1887 y es reemplazado por Francisco Echeagaray quien estuvo a cargo hasta 1896.
En este periodo se impartían también las academias de matemáticas, algunos de los profesores de esta materia fueron:

Francisco Diaz Covarrubias
Eduardo Prado
Carlos Tamborel
Jose Tamborel
[4]

[4]Los profesores que aquí se mencionan son los que pudieron consguirse basandose en algunas nominas que se han recuperado de esos años, sin embargo no podemos asegurar que estén todos los maestros de este periodo.

Al contar con maestros tan preparados, se exigía a los alumnos un alto rendimiento y comprension de las clases, esto se refleja en el modo en que estos eran evaluados y en como se definía si pasaban o no alguno de los cursos. La ley del 2 de diciembre de 1867 dictaba que los examentes comenzaban el 15 de octubre y se realizarían por tres maestros de la institución, ninguno de los cuales podía ser titular de la matería que se evaluaba.
Con los examenes se pretendía medir el grado de preparacion de un alumno, el cual se evaluaba con los parametros M,B,MB y PB, siendo estos: contesto medianamente, bien, muy bien y perfectamente bien. Estas calificaciones no se daban a la ligera, cada escuela debía llevar un libro de actas en el cual se registrarían los examenes y calificaciones de cada alumno.
Esta ley establecía tambíen que, para poder acreditar la materia, si un alumno tenía muchas faltas, este debía presentar un examen con mayor duración y la cual era proporcinal al número de faltas.
Dos años despues entra en vigor la *"Ley de instruccion pública"* la cual en esencia dictaba lo mismo que la anterior con respecto a los exámenes, no obstante establecía que para las evaluaciones debía hacerse un jurado compuesto de profesores de las escuelas nacionales, no necesariamente a la que asistía el alumno[5]. Establecía tambíen con respecto a los exámenes para los alumnos con muchas faltas, que la evaluación no solo debía ser más larga sino más rigurosa.
Esta ley también decía que cada escuela tenía derecho a establecer sus propios lineamientos para los exámenes siempre y cuando se cumplieran las normas básicas establecidas.

La Escuela Nacional Preparatoria agrego a su reglamento interno los siguientes artículos referentes a los exámenes.
El artículo 11 establecía:

> Al fin de cada año los alumnos sufrirán examen público sobre las materias correpondientes a sus respectivos cursos y sin ser aprobados no podrán inscribirse en el curso siguiente.
> Para dar cumplimiento con lo dispuesto en la ley orgánica, se observarán en los exámenes las prescripciones siguientes: los alumnos tanto de número como supernumerarios que hayan dejado de asistir a más de la tercera parte de las clases que hayan debido

[5]La ENP no tenía necesidad de solicitar profesores de otras escuelas, por que contaba con suficientes para sus evaluaciones.

> darse en el año escolar, sacarán seis cuestiones; y los jovenes no inscritos que hayan dejado de asistir a más de la mitad de las clases, sacarán nueve.
> El alumno que no concurra al examen , en los días y hora a que haya sido llamado, no podrá volver a presentarse hasta que se le señale nuevo término.

Entiendase cuestiones, en la cita anterior como las fichas con las que se evaluaba a los alumnos. Estas fichas contenian grupos de preguntas o ejercicios que el alumno debía responder. Para hacer estas fichas primero se hacia un catálogo de preguntas basandose en el libro de texto con el que se estudiaba la matería a evaluar, según este catálogo se hacia un índice de temas a estudiar y se entregaba a los alumnos a modo de guía para que se prepararan para la evaluación.
Después de acuerdo a los catálogos de preguntas se hacian grupos de cuatro o más procurando que en cada ficha hubiera algo teórico y algo práctico, cuando así lo permitiera la materia, y que las preguntas estuvieran bien balanceadas en todas ellas.
A cada una de estas fichas se les asigna un número, formando así un nuevo catálogo para uso de los sinodales durante el examen, en este se veia el contenido de cada ficha según su número.
Para hacer el examen el alumno sacaba un número al azar y la ficha que correpondiera a dicho número conformaba el examen que debía resolverse, se sacaban números según la cantidad de cuestiones que cada alumno debía resolver.
Los sinodales fijaban junto con el titular de la matería el número de cuestiones que de no ser resueltas impedirían que el alumno fuera aprobado. El examen se hacia de manera oral y era abierto al público, el alumno respondía cada cuestion mientras era evaluado por los sinodales.
Para que los alumnos pudieran presentar su examen, debían registrase previamente, al registrase se les expedia una boleta que debía ser entregada a los sinodales antes del examen.
En la secretaría de cada escuela se llevaba un libro con dichos registros para los examenes, de este modo los alumnos sabían de antemano el día y la hora de la evaluación así como el número de cuestiones que debían responder, quienes serían sus sinodales y los temas que se evaluarían.
De las cuestiones antes mencionadas veremos a continuación algunos ejemplos de las fichas que se usaban en las evaluaciones, obtenidas del libro *Cuestiona-*

rio para los examenes del segundo curso de Matemáticas, 1897 un compendio de 81 cuestiones usadas para evaluar los temas de Geometría y trigonometría.

FICHA NÚMERO 1

-Qué se entiende por triángulos semejantes?
-Cuáles son los casos principales de semejanza y cómo se demuestra que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales?
-Qué valor tiene la suma de los ángulo diedros de un triedro y cual es la razón?
-Determinar el valor numérico del arco en la expresión: tang x=2, siendo r=1

FICHA NÚMERO 7

-En qué razón están las áreas de dos polígonos semejantes y por qué razón?
-Cómo se demuestra que todo prisma oblicuo puede ser equivalente a uno recto, señalando las condiciones de equivalencia?
-Determinar las fórmulas: sen(a+b) y cos(a+b).

Podemos tener ahora una clara idea de como funcionaba esta insitución, de el orden y el esfuerzo con que fue abriendose paso y revolucionando la educación en México. Sin embargo no fue sin algunos tropiezos ya que tras su fundación los problemas no se hicieron esperar, había mucha gente inconforme debido a la nueva filosofía de Barreda la cual dejaba de lado la religión e inculcaba en los alumnos la ciencia, la sed por descubrir la verdad basada en experimentación, al contrario del deseo de la iglesia de atribuir a la divinidad los fenómenos naturales.
Estos cambios generaron mucho descontento y recibieron fuertes críticas, se decía que los alumnos no tenían tiempo de aprender tantas cosas, que había muchas materias inútiles e incluso que la falta de educación religiosa provocaba alumnos descarriados y problemáticos.
Sin embargo a pesar de las fuertes críticas y problemas que se desarrollaron alrededor de la institución, la escuela nacional preparatoria progreso y los ideales de Juárez y Barreda lograron un cambio incomparable en la educación en México, un ejemplo de esto es que en diciembre de 1896 el presidente Porfirio Díaz dio a conocer la primera ley de la enseñanza en el distrito federal, la cual contenía el plan de estudios en 8 semestres, la frecuencia semanal de cada materia, el contenido, la justificación de incluirla en el plan y el modo de acreditación y validación del estudio de preparatoria entre otros.
La escuela nacional preparatoria siguió siempre en boca de los periodicos de la época, con comentarios bueno y malos, sin embargo es inegable el desarrollo de esta insitución y el nivel que lograba obtener en sus alumnos incluso más que los colegios particulares que pretendian competir con ella. Fueron quizas los muy bien elaborados planes de estudio, los muy preparados profesores que laboraban en ella o la comunicacion constante con los padres de familia lo que lograron hacer a la escuela nacional preparatoria una impresionante entidad educativa que continua trabajando hasta nuestros días.

Cuadro 1. Plan de estudio de la ENP. 1867

AÑO	ABOGADOS	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS	AGRICULTORES Y VETERINARIOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES Y BENEFICIADORES DE METALES
Primero	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía
Segundo	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Geografía Inglés I
Tercero	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Cronología e Historia Literatura Teneduría de libros Inglés II Alemán I
Cuarto	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia natural Lógica Ideología Moral Alemán II Gramática general
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Historia de la metafísica Literatura	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	

Figura 2.1: Plan de estudios 1867

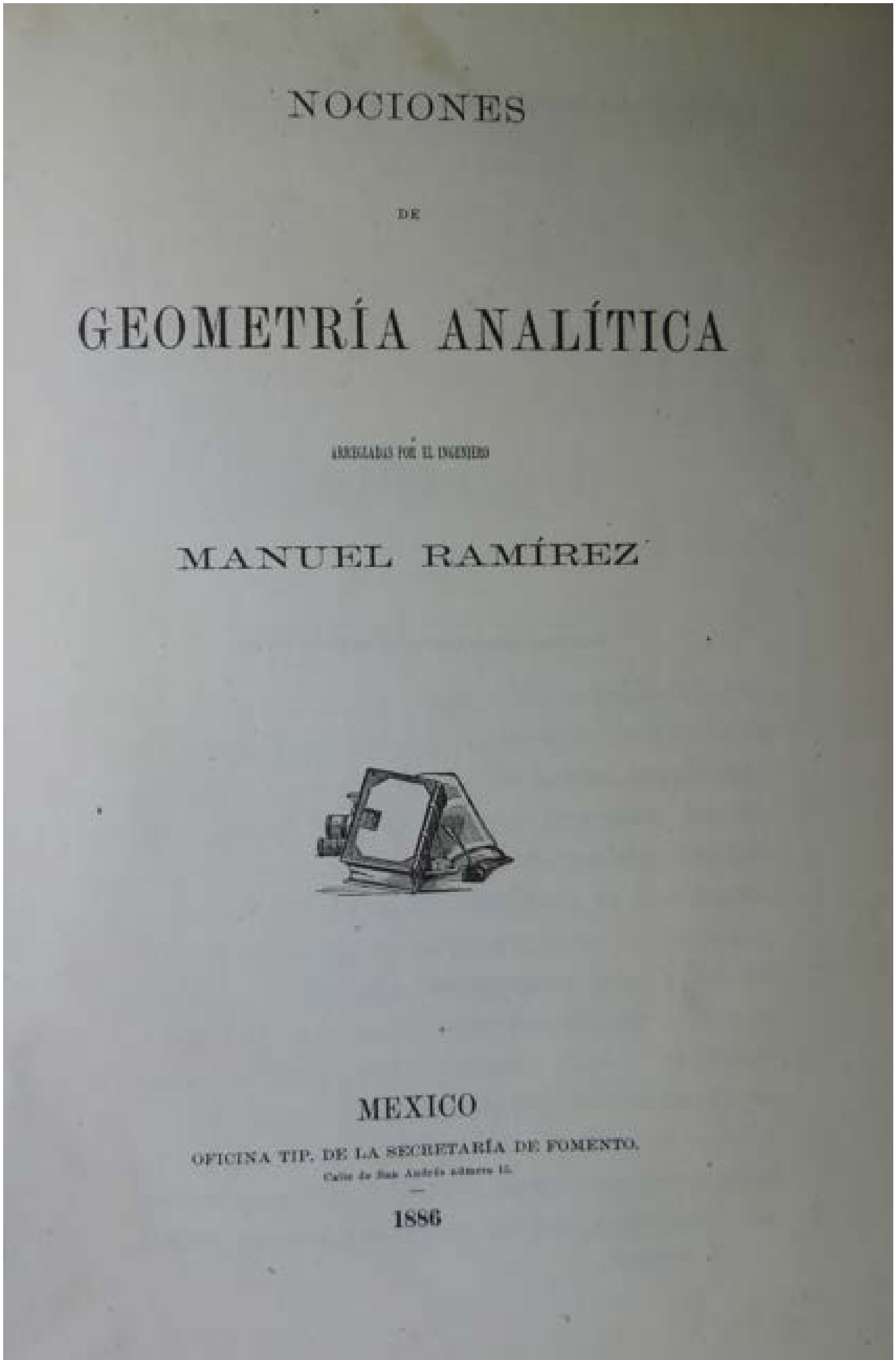
AÑO	ABOGADOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES YBENEFICIADORES DE METALES	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS, AGRICULTORES Y VETERINARIOS
Primero	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés
Segundo	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés
Tercero	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés
Cuarto	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I	Química Geografía Historia general y del país Cronología Alemán Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Alemán Literatura Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura

Figura 2.2: Plan de estudios 1869

Capítulo 3

Libros a estudiar

3.1. Manuel Ramírez. *Nociones de geometría analítica*



NOCIONES

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

ARREGLADAS POR EL INGENIERO

MANUEL RAMÍREZ

MEXICO

OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO.

Calle de San Andrés número 15.

1886

Este libro consta de 624 páginas divididas en dos partes, la primera **Introducción al estudio de la geometría analítica** consta de nueve capítulos y la segunda **Geometría Analítica de tres dimensiones**, de seis capítulos. Para ambas partes se hará un estudio de cada capítulo, haciendo incapie en algunos ejercicios, teoremas o ejemplos que sean de interes, con el fin de representar lo mas fielmente posible el contenido de este libro, como se ha hecho con los anteriores.

A continuación se presenta el prólogo del libro, en este el autor explica el objetivo del texto.

> *Las "Nociones de Geometría Analítica"que hoy publicamos, fueron escritas en vista de la falta que se nota de un libro elemental de esta materia; pues todas las obras que conocemos, son demasiado extensas, y por lo mismo inadecuadas, para servir de texto en un programa de enseñanza.*
> *En la presente, se hallan reunidas las lecciones dadas en la Escuela Preparatoria, pues la hemos formado con el extracto que durante algún tiempo hemos hecho de esas lecciones; y una vez reuindas, nos pareció conveniente publicalas por la razón expuesta; y además, para facilitar el estudio de la Geometría Analítica, por que las principales dudas que los discípulos nos han consultado, están resueltas en este libro; los puntos que han juzgado oscuros, hemos procurado alcararlos y las cuestiones generales, las hemos aplicado a casos particulares, poniendo además una serie de ejercicioes con el objeto de que el lector se forme idea del modo de aplicar las fórmulas y las teorías.*
> *Los cálculos para cuyo desarrollo son insuficientes los conociemientos adquiridos por el alumno al llegar el año en que se estudia la Analítica, estan desarrollados; los problemas para cuya resolución se presentan las mismas dificultades, están resueltos; pero con el objeto de que los alumnos ejerciten en el cálculo sus facultades y puedan estudiar por si solos, se han agregado varios ejercicios y problemas sin indicar el camino que ha de seguirse para llegar al resultado, señalando solamente el punto a donde han de llegar; y omitiendo el procedimiento que deben seguir a fin de que cada uno elija el que le parezca más propio.*
> *No hacemos mención de las maetrias contendias en este libro, ni*

del órden en que se ha expuesto, por que basta consultar el Indice para fomarse idea de ambos puntos; solo harémos notar que en el Capítulo de Lugares Geométricos nos hemos detenido un poco, examinando la forma general y las propiedades de varias curvas, exclusivamente con los conocimientos que el Álgebra elemental proporciona, a fin de preparar a los alumnos que estudien el Análisis Trascendente para el exámen completo de la forma de las curvas.
Harémos notar también que las "Notas"que están al fin de la primera parte de este libro, son del distinguido matemático Eduardo Prado[1]*, que tuvo la bonad de ponerlas a nuestra disposicion cuando le pedimos su juicio sobre este trabajo; y creemos cumplir con un deber; expresándole nuestro agradecimiento por la molestia que se tomó y por las oportunas observaciones que nos hizo.*
Por último manifestamos que nada nuevo encontrará el lector en este libro: todas las teorías y aplicaciones que en el se registran, están tomadas de varios autores, y por eso hemos usado de la palabra arregladas en el título que esta en la protada.

Introducción al estudio de la geometría analítica

Principios fundamentales

El autor introduce el tema diciendo:

Se sabe que el Álgebra representa las cantidades por letras, y las operaciones por signos convencionales; que expresan en general las relaciones que existen entre los datos y las incognitas de un problema...pueden ser numéricos como en las cuestiones de Aritmética; pueden ser cantidades que representan fuerzas, velocidades o masas, como en las cuestione de Mecánica; pueden ser lineas, superficies o volumenes, como en las de Geometría... de manera que si en cada una de las cantidades que se combinan, sea linea, superficie, volumen, masa, etc. se elige una de su especie para que sirva de unidad, todas la cantidades que se combinan

[1]Profesor de Fśica en el Colegio de Mineria y de mecánica en la ENP. Contemporaneo a Manuel Ramirez y a Torres Torija reviso varias de sus obras antes de ser publicadas.

> *entre si, son reuniones de la unidad elegida; de manera que todas las relaciones a que se les puede sujetar, suceptibles de calcularse son en realidad problemas numéricos.*

Esto quiere decir que al reducir, en conceptos geométricos, las lineas a unidades, estas pueden trabajarse como números y por lo tanto hacer con ellas operaciones aritméticas.
Por ejemplo la adición y sustraccion de líneas con longuitudes a y b se puede expresar como:

$$x = a \pm b$$

así podemos saber el valor de x si conocemos los valores de a y b.
Para hacer el procedimiento anterior geométricamente, se toma sobre una linea indefinida AB, un punto fijo C y fijamos otros dos puntos D y B de modo que $CD = a$ y $DB = b$ así la distancia x será igual a la linea CB. Es importante tomar en consideración el valor de a y b ó si se trata de una suma o una resta, ya que de eso depende hacia donde se fijen los puntos D y B.
Si suponemos que el valor de una linea x depede de las lineas a, b, c de manera que entre ellas exista la relación:

$$x = \frac{ab}{c}$$

Basta sustituir los valores numéricos de a, b, c para conocer el valor de x, pero para hacerlo geométricamente, construimos una cuarta proporcional entre las lineas c, a, b.
Cuando, sin perdida de generalidad, $a = b$ el valor de x es dado por:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

entonces podremos representarlo geométricamente construyendo una tecera proporcional entre a y c.
El valor de x puede tambien representarse como sigue:

$$x = \sqrt{ab}$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para las expresiones anteriores se supone que conocemos los valores de a y b, de modo que encontrar el valor numérico de x no tiene ninguna dificultad,

en los casos anteriores nos interesa encontrar el valor geométrico, observemos que para el primer caso tenemos una media proporcional entre las líneas a y b. Para el segundo caso x representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b y la última representa uno de los catetos de un triángulo rectángulo siendo a la hipotenusa.
De modo que en resumen se han considerado para su contrucción las siguientes expresiones:

1. $x = a+b+c-(d+e+f)$...representa una suma algebráica de líneas.
2.$x = \frac{ab}{c}$...representa una cuarta proporcional.
3.$x = \dfrac{a^2}{c}$...representa una tercera proporcional.
4.$x = \sqrt{ab}$...representa una media proporcional.
5.$x = \sqrt{a^2+b^2}$...representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
6.$x = \sqrt{a^2-b^2}$...representa un cateto de un triángulo rectángulo.

Tras explicar como construir estas expresiones algebraicas el autor dice los siguiente:

> *Sabiendo consturir las seis expresiones que hemos considerado, puede consturise calquiera otra, como vamos a indicarlo; pero para que una expresion se pueda construir; es necesario que sea homogénea; de suerte que, antes de ocuparnos de la construcción de las expresiones algebráicas, estudiaremos las condiciones de homogeneidad.*

Homogeneidad

El autor comienza este capítulo dando la definición:

> *Una expresion alegráica es homogénea cuando todos sus términos son del mismo grado.*

Después, aclara, usando leyes de los exponenetes que el grado de una expresión algebráica se toma sobre las variables y como los coeficientes no deben tomarse en cuenta, ya que un coeficiente tiene a la variable con grado 0. Como ejemplo da:

$$x^3 = \frac{a^2b^4}{c^3}$$

y dice que esa expresion es de tercer grado.
Explica que cuando una expresion es homogénea y de primer grado, esta representa una línea, cuando es de segundo grado representa una superficie y cuando es de tercer grado, un volumen. Observemos entonces que siguiendo la definición del autor, las expresiones planteadas en el capítulo anterior son todas homogeneas y de primer grado.

Para aclarar el objetivo del autor en este capítulo, presentamos el siguiente ejemplo del libro:
Sea la expresión:

$$x = \sqrt{\frac{abc^3d}{g^3h^4}}$$

Observemos que en este caso el primer miembro de la ecuación es de grado 1, pero el segundo no lo es, de modo que para homogeneizar la ecuación, multiplicamos el numerador por u^z siendo siendo z una cantidad desconocida y u la unidad. Así obtenemos:

$$x = \sqrt{\frac{abc^3du^z}{g^3h^4}} \tag{3.1}$$

Ahora basta encontrar el valor de z para el cual ambos lados de la ecuación son de grado 1. Considerando las leyes de los signos podemos usar la sigueinte igualdad para despejar z.

$$\frac{1+1+3+1+z-(3+4)}{2} = 1$$

de ahi que $z = 3$.
Sustituyendo en (3.1) tenemos

$$x = \sqrt{\frac{abc^3du^3}{g^3h^3}}$$

cuya expresion ya es homogénea.
Con esto el autor concluye que para homogeneizar una expresion algebráica, ésta debe multiplicarse por la línea que se tomó por unidad, elevada a la potencia conveniente, para que se verifiquen las conidciones de homogeneidad.

Construcción de expresiones algebráicas

Para este tema, el autor divide el estudio en los cuatro casos siguientes

1.Construcción de un monomio racional.
2.Cosntrucción de un polinomio racional.
3.Construcción de un monomio irracional.
4.Cosntrucción de un polinomio irracional.

Para explicar lo anterior, el autor da un ejemplo para cada caso, a continuación presentamos el ejemplo del primer caso:

Primer caso. Constuir la expresión $x = \dfrac{a^2b^4c}{d^2f^3g}$.
Esta expresión puede ponerse en la forma:

$$x = \frac{a^2}{d}.\frac{b^2}{f}.\frac{b^2}{f}.\frac{c}{dfg} \tag{3.2}$$

Los factores $\dfrac{a^2}{d}, \dfrac{b^2}{f}$, pueden construirse por terceras proporcionales.
Haciendo $\dfrac{a^2}{d} = A_1; \dfrac{b^2}{f} = A_2$ tenemos que la ecuación 3.2 se transforma en:

$$x = \frac{A_1A_2^2c}{d.f.g} = \frac{A_1c}{d}.\frac{A_2^2}{f}.\frac{1}{g} \tag{3.3}$$

Los factores $\dfrac{A_1c}{d}, \dfrac{A_2^2}{f}$, pueden construirse por cuartas y terceras proporcionales.
Haciendo $\dfrac{A_1c}{d} = A_3; \dfrac{A_2^2}{f} = A_4$ la ecuación 3.3 se reduce a:
$x = \dfrac{A_3A_4}{g}$ cuya expresión se construye por cuartas proporcionales.

Al final del ejemplo el autor hace la siguiente observación.

> *La cosntrucción anterior se ha hecho por terceras y cuartas porporcionales , y el número de construcciones es igual al grado del denominador.*

Para los siguientes casos el autor continua haciendo los arreglos necesarios para construir cada expresión usando medias, terceras y cuartas proporcionales, o bien construyendo hipotenusas o catetos de triangulos como en la primera parte. Al final presenta una sección de ejercicios resueltos, los siguientes son ejemplos de estos.

1.Construir las expresiones
$x = \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}......,\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{1}{3}}......$
Para constuir raíces numéricas de enteros, se puede proceder de dos maneras:
1^a. *Descomponiendo la cantidad en dos factores y construyendo una média proporcional entre los dos factorse en que se descompuso la cantidad.*
2^a. *Descomponiendo la cantidad en varios términos que sean caudrados perfectos: entónces se construye por los tipos:*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ó

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Las raíces numéricas de fracciones, se pueden constuir también por dos procediemientos: se descompone la fracción en dos factores (uno de ellos es generalmente la unidad) y se construye una média proporcional; o bien se hace racional el denominador, se construye el numerador, y por último, se divide el numerador en tantas partes iguales, como unidades tiene el denominador.
Aplicando estas reglas a los ejemplos propuestos, tenemos:
$\sqrt{2} = \sqrt{2x1}$ *média proporcional entre 2 y 1.*
$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ *hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son 1 y 1.*
$\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$ *cateto de un triángulo cuya hipotenusa es 2, y el otro cateto es 1.*
$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ *hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son 2 y 1.*
$\sqrt{5} = \sqrt{2x3}$ *média proporcional entre 2 y 3.*

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ la $\sqrt{2}$ *se divide en dos partes iguales.*
$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ la $\sqrt{3}$ *se divide en tres partes iguales.*
$\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{30} = \frac{1}{6}\sqrt{5x6}$ *se divide en seis partes iguales la média proporcional entre 5 y 6.*

2.Construir la expresión

$$x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{c-\sqrt{d}}}$$

Comenzarémos por hacer homogénea la expresion dada: quedará despues de ésto

$$x = \sqrt{\frac{au^2+\sqrt{bu^5}}{c-\sqrt{du}}}$$

(u, representa la unidad.) Las raíces: $\sqrt{du}$, $\sqrt{bu}$, *se cosntruyen por médias proporcionales. Suponiendo* $\sqrt{du} = k, \sqrt{bu} = h$, *el valor de* x *se transforma en:*

$$x = \sqrt{\frac{au^2+u^2h}{c-k}} = \sqrt{\frac{u^2(a+h)}{c-k}} = \sqrt{\frac{u^2}{q}.p} = \sqrt{s.p}$$

Construcción de ecuaciones mixtas de segund grado

El autor comienza el capítulo planteando la ecuación de segundo grado

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

Después menciona la falta de homogeneidad de la ecuación y propone multiplicar el término q por la unidad u, de ahí obtiene:

$$x^2 \pm px \pm qu = 0$$

Y hace incapie en que qu es un rectangulo de base q y altura u, el autor hace notar también que al construir una media proporcional á b, tal que $b^2 = qu$, existe un cuadrado de lado b equivalente al rectángulo bq. con la observación anterior podemos escribir la ecuación como:

$$x^2 \pm px \pm b^2 = 0$$

Y la ecuación anterior puede transformarse en las siguientes:

$$x^2 + px = b^2$$
$$x^2 - px = b^2$$
$$x^2 + px = -b^2$$
$$x^2 - px = -b^2$$

Las cuales pueden construirse fácilmente con lo que se vio en los capítulos anteriores.

Construccion de superficies y volúmenes

El autor comienza esta sección con el siguiente texto:

> *La incógnita de un problema puede ser una seperficie o volumen: en el primer caso, la expresión que se desea construir debe ser homogénea y del segundo grado. Una superficie S, es suceptible de representarse por un rectángulo cuya base a es arbitraria y cuya altura x se construye por la ecuación:*
>
> $$x = \frac{S}{a}$$
>
> *Esta extresión es homogénea y de primer grado, puesto que S es del segundo y a del primero; luego puede constuirse por los métodos conocidos.*
> *Cuando se trata de constuir un volúmen, la expresion debe ser homogénea y del tercer grado. El volúmen puede representarse siempre por un paralelipípedo rectangular en el que se toman dos dimensiones a y b arbitrarias, y la tercera dimension x se construye por la ecuación:*
>
> $$x = \frac{V}{ab}$$
>
> *expresion homogénea y del primer grado, puesto que V es del tercer grado y ab del segundo.*

Después de esta breve introducción en la que aclara la idea de la construcción de una superficie o volumen y la asocia con los capítulos anteriores el autor continua con tres páginas de ejercicios para esta sección y así concluye el capítulo.

Primera Parte. *Geometría Analítica Plana*

El autor introduce este capítulo como sigue:

> *La Geometría Analítica, llamada tambien Geometría General, tiene por objeto estudiar las propiedaades de las figuras por procedimientos algebráicos, y sujetar las cuestiones de Geometría a métodos generales y uniformes que sean aplicables a todas las figuras.*
> *Se divide en dos partes: Geometría Analítica de dos dimensiones y Geometría Analítica de tres.*
> *La primera se llama también Geometría Analítica Plana, y la segunda Geometría Analítica en el Espacio.*
> *La primera aplica el análisis a las figuras planas, enseña el modo de servirse del cálculo para resolver las cuestiones de Geometría Plana, y da los métodos de representar las ecuaciones por figuras.*
> *La segunda trata de las superficies curvas y en general de las líeas situadas en el espacio.*
> *Para comprender la diferencia que hay entre la Geometría Analítica y la Geometría Especial, tomarémos dos ejemplos: Sea el primero el probleam de las tangentes: este problema tiene por objeto principal, trazar una tangente a una curva dada por un punto conocido. Si se resuelve este problema por la Geometría Especial, lo pirmero que necesita conocerse es la forma de la curva; pues el procedimeinto que se emplea para trazar una tangente a un círculo, es diferente de el que se sigue para trazarla a una elipse, a una hiperbola, etc.: para cada curva hay un procedimiento especial de resolver el problema: de manera que puede decirse que hay tantos porcedimientos diferentes, como curvas se conocen; y cuando se conozca una curva nueva, deberá buscarse el modo especial de trazar a esta curva una tangente, sin que sirvan, para ésto, los métodos empleados para trazar tangentes a las curvas conocidas.*

> *La Geometría Analítica resuelve el mismo problema de una manera general, ésto es, independiente de la forma de la curva, y por lo mismo, el procedimiento que la Geometría Analítica emplea, es aplicable a todas las curvas.*

Capítulo Primero. El punto

Dice el autor:

> *Se fija la posición de un punto en un plano por medio de dos magnitudes variables llamadas coordenadas.*

Explica como hay coordenadas cartesianas y polares, además explica como encontrar un punto en un plano, como representarlo y como trazarlo usando las rectas absicas[2] y ordenadas a dicho punto según sus coordenadas.
Habla también de la distancia entre dos puntos y dice:

> *Sean (x', y'),(x'', y'') las coordenadas de los puntos M y N; β el ángulo que forman los ejes. Tomemos un punto R tal que trazando una línea MR paralela al eje X, se forma el triángulo MNR, que da:*
>
> $$\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{NR}^2 + 2.\overline{MR}.\overline{NR}.cos\beta$$
>
> *o bien*
>
> $$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')cos\beta}$$

El autor plantea el caso general para ejes oblicuos y como caso partícular tenemos cuando $\beta = 90°$ y nos queda la ya conocida ecuación.

$$D = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

A continuación se presentan algunos de los ejercicios que se plantean en el texto para esta sección, no los resuelve pero da la respuesta, como guía para el alumno, como lo menciona en el prólogo.

[2]Se refiere a las absicas y las ordenadas como las rectas paralelas a los ejes que se trazan a partir de los valores de las respectivas coordenadas de un punto.

> *1.-Dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo encontrar las longuitudes de sus lados.*
> *2.-Resolver el problema anterior con ejes oblicuos $\beta = 60°$.*
> *3.-Encontrar un punto que este igual en distancia de los puntos $(2,3)$ $(4,5)$ $(6,1)$.*

Continua con una sección de coordenadas polares, en la cual las define y presenta las formulas para pasar de coordenadas rectilineas a polares. Da algunos ejemplos y plantea ejercicios. Después da una sección de transpocición de ejes, en ella menciona lo siguiente:

> *La transposición de ejes o transformacion de coordenadas, tiene por objeto determinar las modificaciones que sufre la ecuación de una figura, cuando se cambian los ejes a que está referida. Para conocer estas modificaciones, es necesario determinar las coordeandas de un punto cualquiera de la figura, con respecto a los primeros ejes, en función de las coordenadas del mismo punto con respecto al segundo sistema de ejes, y después sustituir estos valores en la ecuación que se considera.*
> *Examinarémos tres casos:*
> *1.-Cambio de orígen, siendo los nuevos ejes paraleleos a los primeros.*
> *2.-Cambio de dirección de los ejes sin cambiar de orígen.*
> *3.-Cambio de orígen y en la dirección de los ejes.*

El autor explica cada uno de estos casos, y plantea ejercicios. A continuación presentamos un seguimiento del desarrollo que hace el autor para el primer caso.

> Sean AX, AY los primeros ejes,$A'X'$;$A'Y'$ los nuevos ejes que deben ser paralelos a los primeros. Las coordenadas de un punto cualquiera M, son (x, y) con respecto a los primeros ejes, y con respecto a los segundos son (x', y').
> Las coordenadas del nuevo orígen A, con respecto a los ejes AX,AY, con (a,b). De la figura 3.2 se tiene:
>
> $$AP = AB + A'Q; MP = A'B + MQ$$
>
> o bien
>
> $$X = a + x'; y = b + y'$$

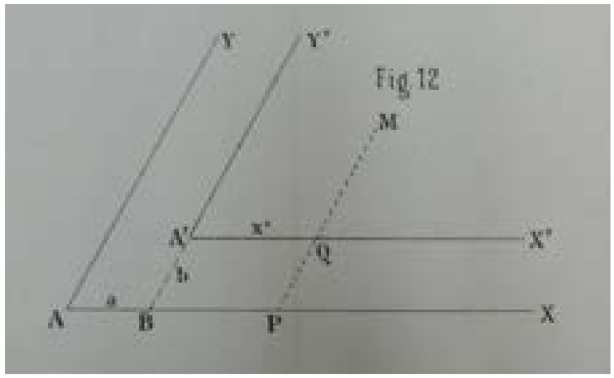


Figura 3.2: Imágen original del libro

> Las fórmulas anteriores son independientes del ángulo que forman los ejes.

Despues de 3 hojas de ejercicios el autor continua al siguiente capítulo.

Capítulo Segundo. Linea Recta

Ramírez comienza el capítulo planteando lo que el llama *Teorema Fundamental* y dice:

> *Toda ecuación de primer grado ente una o dos variables, siempre representa una linea recta.*

La ecuación general de primer grado es de la forma:

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.4}$$

En el texto se mencionan cuatro casos para estudiar la ecuación anterior:

> *1.-Cuando la ecuación solo contenga la variable x.*
> *2.-Cuando sólo contenga la variable y.*
> *3.-Cuando contenga las dos variables, pero no el término independiente.*
> *4.-La ecuación general.*

Para los cuatro casos el autor realiza algunos trabajos geométricos y demuestra que toda ecuación de pirmer grado representa siempre una linea recta.

Continua desarrollando la ecuación de la recta cuando los ejes son rectos y así describe las propiedades de la recta, luego plantea el significado de estas propiedades pero cuando los ejes son oblicuos.
Siguiendo el texto se encuentra una sección llama **Construcción de la linea recta** en ella dice:

> *Cuando se conoce la ecuación y se quiere construir la recta, esta construcción puede hacerse de varios modos.*
> *1.-Determinando los puntos en que la recta corta a los ejes.*
> *2.-Determinando un punto de la recta y el ángulo que forma con uno de los ejes(generalmente con el eje de las x).*
> *3.-Determinando dos puntos cualesquiera de la recta.*
> *El primer método sólo se emplea cuando la recta no pasa por el orígen; los otros dos siempre se pueden emplear, y los tres son independientes del ángulo que formen los ejes.*

Tras presentar ejemplos para explicar cada uno de los casos que se plantean para construir una recta, el autor procede a trabajar sobre la ecuación de ésta, por ejemplo.
A partir de la ecuación general

$$Ax + By + C = 0$$

Haciendo x y y igual a cero obtine los puntos $(-\frac{C}{A}, 0)$ y $(0, -\frac{C}{B})$ de ahí que $\frac{C}{A} = m$ y $\frac{C}{B} = n$ de donde obtiene $A = \frac{C}{m}$ y $B = \frac{C}{n}$.
Sustituyendo estos valores en la ecuación original y simplificando obtenemos:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + 1 = 0$$

Esta ecuación representa la ecuación de la recta en función de las distancias a que la recta corta a los ejes.
El capítulo concluye con una sección de problemas resueltos en lo que ejemplifica las propiedades de la recta y el manejo de las mimsas, a continuación algunos ejemplos de ellos:

Probleams relativos a la ecuación de la recta.

1.-Encontrar la ecuación de la recta que pasa por un punto.
2.-Econtrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

3.-Coordenadas del punto de intersección de dos rectas.
4.-Encontar el ángulo de dos rectas conociendo sus ecuaciones. (ejes rectángulares).
5.-Dada una recta y un punto trazar por el punto una recta que forme con la recta dada un ángulo conocido.
6.-Determinar las condiciones que deben unificarse para que tres puntos estén en línea recta.
Presentamos también a continuación una lista de los ejercicios planteados para este capítulo para dar una idea del nivel que se requeria en los estudiantes.

Ejercicios

1.-Dadas las ecuacionees:

$$y = 7x - 5; y = -\frac{1}{2}x + 2$$

encontrar las coordenadas del punto de intersección de las rectas que representan y el ángulo que estas rectas forman (ejes rectangulares).
2.-Conociendo las coordenadas de los vértices de un triángulo, encontrar las ecuaciones de sus lados y las ecuaciones de las alturas. Los vértices tienen por coordenadas: $(2,1)$;$(3,-2)$;$(-4,-1)$.
3.-Dadas las rectas $y = ax$, $y = a'x$, encontrar el ángulo que forman con el eje de las x, la bisectriz del ángulo de las rectas dadas.
4.-Demostrar que la ecuación $xy = 0$ representa los ejes.
5.-Demostar que la ecuación $x^2 - y^2 = 0$, representa la bisectriz del ángulo de los ejes y la de su suplemento.
6.-Cuáles son las ecuaciones de las rectas representadas por la ecuación: $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.[3]

Capítulo Tercero. Lugares Geométricos

A continuación citamos la introducción que da el autor para este capítulo.

> *Lugar geométrico de una ecuacion es la línea que pasa por todos los puntos que tienen una propiedad común y cuyas coordenadas*

[3]Los ejercicios anteriores son una selección de ejercicios que se plantean durante todo el capítulo, para la mayoria de ellos el autor da la solución.

> *verifican la ecuación. También se llama lugar geométrico a un punto o a una serie de puntos cuyas distancias a puntos o a lineas fijas, satisfacen a determinadas condiciones.*
> *Segun ésto, el lugar geométrico de la ecuacion $x = c$ puede ser:*
> *1.-Un punto tomado a una distancia c de un punto fijo.*
> *2.-Una circunferencia cuyo radio es igual a c.*
> *3.-Una esfera cuyo radio es c también.*
> *4.-Una recta paralela al eje de las ordenadas, etc.*
> *Según el enunciado de las condiciones a que debe satisfacer.*

El autor divide el estudio de los lugares geométricos en dos partes, la primera se enfoca en buscar la ecuación de una figura conociendo algunas de sus propiedades, mientras que la segunda estudia las propiedades de las curvas y determina su forma general conociendo su ecuación.
A continuación incluimos dos ejemplos del libro para explicar la división anterior.

> *Encontrar el lugar geometrico de los puntos cuyas distancias a dos rectas fijas esten en una relación constante.*
>
> *Tomarémos por orígen las líneas fijas, y representarémos por (x é y) las distancias de cualquier punto de la figuara a los ejes; por a la relación constante.*
> *Según el enunciado, se tiene inmediatamente la ecuacion:*
>
> $$\frac{y}{x} = a$$
>
> *o bien*
>
> $$y = ax$$
>
> *cuya ecuación es la de una línea recta que pasa por el orígen.*

El ejemplo anterior se refiere a la primera parte de la división del autor, para ejemplificar la segunda parte, tenemos el siguiente ejemplo:

> *Construir la curva cuya ecuación es:*
>
> $$y = \frac{x}{1 + x^2}$$
>
> *De la ecuación de la curva se deducen las siguientes propiedades:*
> *1.-Que pasa por el orígen, puesto que para $x = 0$ resulta $y = 0$.*

2.-Para valores positivos de x, los de y son positivos; y para valores negativos de x, los de y son también negativos; es decir, que x é y tienen siempre el mismo signo; luego la curva está solamente en los cuadrantes YoX, $Y'oX'$.[4]
3.-De la ecuación se saca:

$$x = \frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1}$$

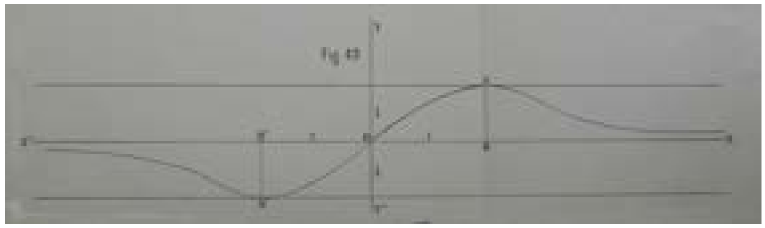
y cuando $y = 0$, resulta $x = 0$ y $x = \propto$: los valores $x = 0$, $y = 0$ correspondel al orígen; y los valores $x = \propto, y = 0$ indican que la curva corta al eje de las x a una distancia infinita: además se ve que a medida que y disminuye, el valor de x aumenta; luego el eje de las X es asíntota de la curva.
4.-Para que el valor de x sea real, debe tenerse $\frac{1}{4y^2} > 1$, o bien $y < \frac{1}{2}$ el limite.
5.-Cuando $y = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm 1$: los puntos cuyas coordenadas con $(\pm 1, \pm\frac{1}{2})$ son A, A', y la ordenada correpondiente es la mayor.
Los valores de x son:

$$x = \frac{1}{2y} + \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1}$$

$$x' = \frac{1}{2y} - \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1}$$

El primero es positivo para valores positivos de y: el segundo es también positivo para valores positivos de y , lo que indica que la curva esta en el cuadrante YoX. Para valores negativos de y, los dos de x son tambien negativos, lo que indica que esta en el cuadrante $Y'oX'$.
Esta propiedad es la segunda, pero deducida del valor de x.
7.Cuando y disminuye de $\frac{1}{2}$ a cero, x' disminuye de 1 a cero, y x aumenta de 1 a $\propto$.
La forma general de la curva está representada en la siguiente figura.

[4] Se refiere al primer y tercer cuadrante.



Observemos que en el ejemplo anterior el autor estudia a profundidad la curva, estudiando desde lo más básico, como hacer cero cada una de las variables para ver que pasa, hasta hacerlas tender a infinito, encontrando las asíntotas. En este cuidadoso procedimiento también acomoda la forma de la ecuación para poder ver más cualidades a fin de encontrar el lugar geométrico adecuado.

Para los dos casos que plantea, el autor resuelve diversos ejemplos, como los anteriores, con el fin de ejemplificar la división de los lugares geométricos.

Capítulo Cuarto. Circunferencia

El capítulo comienza diciendo:

> *Antes de discutir la ecuación general de segundo grado con dos variables, estudiaremos la ecuacion del círculo con el objeto de que se vea cómo pueden obtenerse, por medio de una ecuación, las principales propiedades de una curva; y además, para examinar diversas formas de la ecuación cuando cambia el sistema de ejes a que la curva está referida.*

El autor considera primero el caso general con ejes oblicuos y el origen en un punto cualquiera (x, y), toma también un punto (a, b) que se encuentre en la circunferencia, llama β al ángulo que forman los ejes y R el radio de la circunferencia.
Para deducir la ecuación de una circunferencia cuando los ejes son rectos, consideramos el triángulo rectángulo que se forma trazando, a partir del centro rectas paralelas a los ejes y uniendolas con un radio del círculo. Este triángulo tiene por hipotenusa al radio y por catetos los segmentos $(x - h)$ y $(y - k)$ siendo (h, k) las coordenadas del centro del círculo y al ser un triángulo rectángulo, por el teorema de pitágoras se tiene que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

El autor hace la misma deducción pero en un caso más general para ejes oblicuos. La figura 3.4 muestra una circunferencia, trazada en ejes oblicuos.

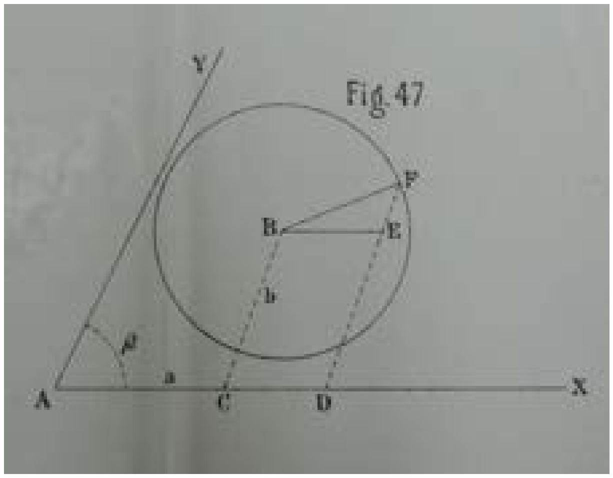


Figura 3.3: Imágen original de libro

En este caso como se observa el triángulo que formamos dentro del círculo ya no es rectángulo, por lo tanto debemos hacer algunos cambios para encontrar su ecuación.
Para poder encontrar la ecuación que describe a todos los puntos de la circunferencia, usamos la ley de cosenos para el triángulo BEF. Pero antes hagamos algunas observaciones del triángulo.
Si el ángulo que se forma entre los ejes es β y prolongamos la recta BE el ángulo que forma ésta al cortar a la recta DF también es β. Llamemos α al ángulo FBE y γ al ángulo BFE. Observese que $\beta = \alpha + \gamma$ de modo que el ángulo restante del triángulo será $180 - \beta$.
En cuanto a los lados, el lado BF es el radio y lo denotaremos por R, el lado BE como lo vimos anteriormente es $(x - a)$ y el lado EF será $(y - b)$. Siendo (a, b) las coordenadas del centro de la circunferencia. Teniendo en cuenta estos elementos, aplicamos la ley de cosenos y obtenemos:

$$R^2 = (y - b)^2 + (x - a)^2 - 2(y - b)(x - a)cos(180 - \beta)$$

Como $cos(180 - \beta) = -cos(\beta)$ podemos reescribir la ecuación como

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 - 2(y - b)(x - a) = R^2$$

La anterior es la ecuación que el autor presenta en el libro.
Observemos que si el ángulo $\beta = 90$, es decir, si los ejes son rectos, la ecuación se transforma en la ya conocida $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, el autor continua trabajando sobre esta ecuación y la desarrolla para obtener la forma general $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ de donde el autor aclara que los coeficientes de x^2 y y^2 deben ser iguales y que no debe haber término xy. Tras deducir algunas propiedades más a partir de esta ecuación el autor plantea ejercicios como los siguientes.

1.-Consturir la curva cuya ecación en ejes oblicuos es

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

siendo $\beta = 60°$
2.-Encontrar la ecuación de un círculo que sea tangente a los ejes a una distancia a del origen.
3.-Encontrar la ecuación de un cícrulo que sea tangente a los ejes a una distancia a del origen.

Continua el capítulo con algunas secciónes cortas como las siguientes
I. Teoremas realtivos a la circunferencia, demostrados por el cálculo.
II.Intersección y contacto de dos circunferencias.

Para esta sección propone ejercicios como el siguiente:
1.-Dado el círculo $x^2 + y^2 = 25$, encontrar la ecuación de la tangente que pasa por el punto $(3, 4)$.
y por último presenta la sección de:
III. Ecuación polar del círculo.
En esta sección no deduce la ecuación, simplemente la presenta para ejes rectos, construye la ecuación de circulo para distintas condiciones, como polo en el extremo de un diámetro o polo en un punto exterior. Por último hace algunos trabajos sobre la ecuación y plantea ejercicios.

Capítulo Quinto. Curvas o lineas de segundo grado. Ecuación general

La ecuación general de segundo grado con dos variables x y y es de la forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \tag{3.5}$$

A, B, C, D, E y F son coeficientes que pueden tomar cualquier valor, pero para que sea una ecuación de segundo grado A, B y C deben ser siempere distitnos de cero.
El autor dice:

> *En la ecuación 52*[5] *entran seis constantes, y para determinar la curva correspondiente, bastan cinco relaciones, puesto que se pueden divididr todos los términos de 52 por uno de los coeficientes.*

Siguiendo esta idea el autor comienza a dividir la ecuación entre todas las constantes y hace algunos calculos hasta obtener el coeficiente

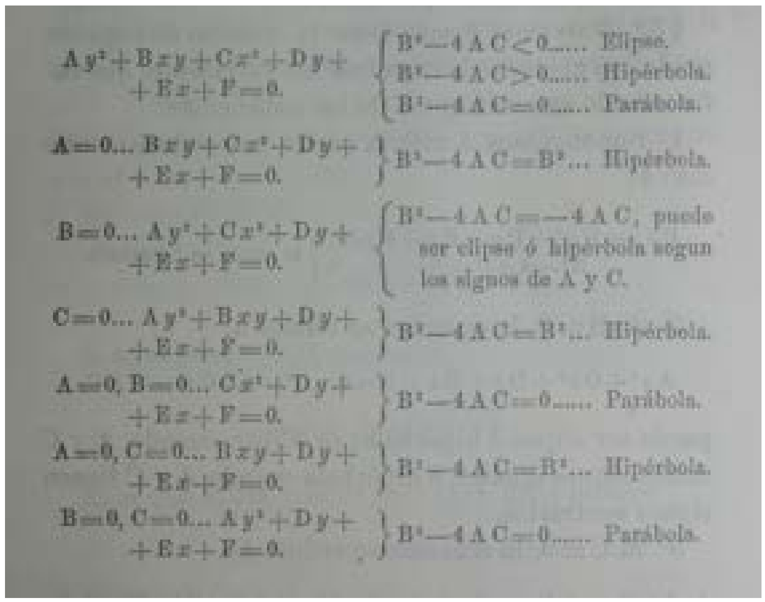
$$B^2 - 4AC \tag{3.6}$$

del cual dice:

> *Siempre que en una ecuación de segundo grado se verifica la relacion* $B^2 - 4AC < 0$, *esa ecaución representa una curva limitada en todos los sentidos(Elipse).*
> *Si* $B^2 - 4AC > 0$, *la ecuación representa una curva indefinida en todos los sentidos (Hipérbola).*
> *Y si* $B^2 - 4AC = 0$, *representa una curva indefinida en un solo sentido (Parábola).*
> *Volvamos a considerar la ecuación de segundo grado con el objeto de examinar la variación que sufre cuando es cero alguno de los coeficientes.*
> *1.- Supongamos que* $A = 0$, *la ecuación se reduce en este caso a:*
>
> $$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
>
> $$B^2 - 4AC = B^2$$
>
> *la curva es una hipérbola.*
> *2.- Si B=0, la ecuación se reduce a*
>
> $$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
>
> $$B^2 - 4AC = -4AC$$
>
> *Puede ser elipse o hipérbola: es elipse cuando A y C tienen signos iguales, e hipérbola cuando A y C tienen signos contrarios.*
> *3.-Si C=0...*

[5] 52 es en el libro original en este trabajo se refiere a la ecuación 3.5

El texto continua con estos casos a partir de ellos se forma la tabla de la figura 3.4.



$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC<0$...... Elipse. $B^2-4AC>0$...... Hipérbola. $B^2-4AC=0$...... Parábola.
$A=0$... $Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=B^2$... Hipérbola.
$B=0$... $Ay^2+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=-4AC$, puede ser elipse ó hipérbola segun los signos de A y C.
$C=0$... $Ay^2+Bxy+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=B^2$... Hipérbola.
$A=0$, $B=0$... $Cx^2+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=0$...... Parábola.
$A=0$, $C=0$... $Bxy+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=B^2$... Hipérbola.
$B=0$, $C=0$... $Ay^2+Dy+Ex+F=0.$	$B^2-4AC=0$...... Parábola.

Figura 3.4: Tabla original de libro

Después estudia por separado cada uno de los casos para los valores del discriminante, estudiando así a cada una de las curvas y también los casos en los que la ecuación no puede represeantar ningun lugar geométrico. De este modo estudia por ejemplo las asintotas de la hiperbola en base a la ecuación establecida y variaos elementos de las curvas.
Este capítulo es muy extenso ya que el autor continua deduciendo muchas propiedades según todos los valores posibles que puede tener el discriminante de una ecuación cuadrática, también trabaja sobre la ecuación misma simplificandola para cumplir con casos especificos y facilitar el cálculo.
Este trabajo tan profundo junto con los ejercicios planteados por el autor, permiten que el alumno se familiarize con las curvas para después estudiar sus propiedades por separado.

Capítulo Sexto. Estudio especial de la curvas de segundo grado

Elipse

El capítulo comienza así:

> *Hemos visto que la elipse es una curva cerrada que tiene la propiedad de que la suma de los radios vectores correspondientes a un mismo punto, es siempre constante.*
> *El radio vector es la distancia de un punto cualquiera de la curva a uno de los puntos fijos.*

El autor procede a encontrar la ecuación, como se ha hecho anteriormente, basandose en la ecuación de segundo grado

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

haciendo ciertas trasnformaciones obtenemos:

$$My^2 + Nx^2 = F^{'}$$

de donde haciendo $x, y = 0$ obtenemos,

$$y = \sqrt{\frac{F^{'}}{M}} = b$$

$$x = \sqrt{\frac{F^{'}}{M}} = a$$

que son los semiejes de la elípse. De los valores a y b se obtiene,

$$M = \frac{F^{'}}{b^2}$$

$$N = \frac{F^{'}}{a^2}$$

sustituyendo obtengo:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

trabajando sobre la ecuación anterior se obtienen las siguientes propiedades de la elipse.

1.- Que la curva es simétrica respecto a los ejes.
2.-Que la curva es limitada en el sentido de las absisas y las ordenadas.
3.-Que el mayor valor de x es el que corresponde a y=0.
4.-La ecuación no cambia al sustituir x por $-x$ ó y por $-y$.
5.-Que la elipse corta a los ejes a distancias iguales al orgien.

Explica estas propiedades y procede a definir los elementos, define $2a$ y $2b$ como los ejes de simetría.
Obtiene después la ecuación de la elipse con centro fuera del orígen, a continuación se cita su procedimieto.

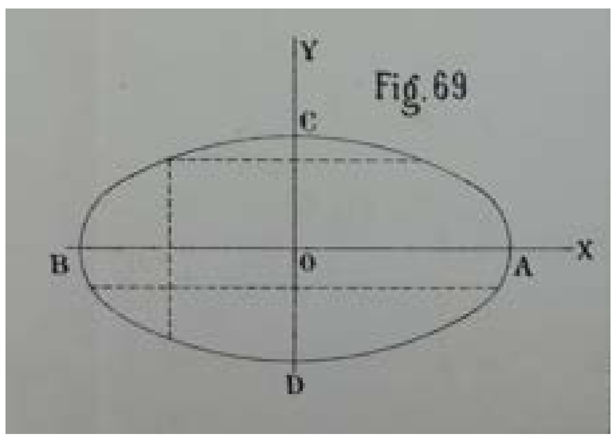


Figura 3.5: Imágen original de libro

Hemos encontrado que la ecuacion de la elipse referida a su centro como origen y a sus ejes principales es:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Si en vez de tomar por orígen el centro, tomamos uno de los vértices, B por ejemplo, sustituiremos en la ecuación anterior por x, $x - a$, y quedará:

$$a^2y^2 + b^2(x - a)^2 = a^2b^2$$

o bien

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

la ecuación anterior es la de la elipse referida a uno de sus vértices como orígen.
Si se supone

$$\frac{b^2}{a} = p$$

resulta:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

La cantidad $2p$ se llama parámetro de la elipse, y se ve en la ecuación anterior que el cuadrado de la ordenada es siempre menor que le rectángulo construido sobre el parámetro y la abscisa correspondiente, ésto es:

$$y^2 < 2px \tag{3.7}$$

De esta propiedad se deriva el nombre de elipse.

Después se demuestran algunas propiedades de la elipse para poder construirla, al definir las propiedades el autor describe los elementos de la elipse como la excentricidad, los focos, vértices, etc.
Tras explicar las propiedades, la forma y la construcción de esta curva, se plantean ejercicios como los siguietnes.

1.-Determinar la excentricidad, los focos, los ejes y las directrices de las elipses:

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

$$2x^2 + 4y^2 = 8$$

2.-Encontrar la ecuación de la elipse fundándose en que la relación de las distancias de uno de sus puntos al foco y a la directriz, es igual a:

$$\frac{c}{a} = e$$

A continución presentamos el seguimiento de la solución del segundo ejercicio. Esta solución viene en el el libro y se presenta para ilustrar el contenido de este capítulo.

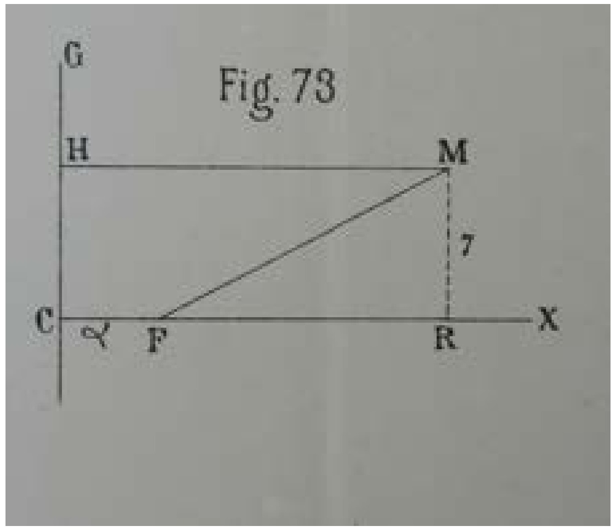


Figura 3.6: Imágen original de libro

Sea, en la figura 3.6, F el foco y CG la directriz.
Tracemos por el foco una perpendicular a la directriz, y tomemos esta perpendicular por eje de las abscisas, y por orígen el punto C.
Sea α la abscisa CF del punto F; suponiendo que M es un punto de la elipse, se debe tener:

$$\frac{MF}{MH} = e$$

Para determinar MF y MH en función de las coordenadas (xy) del punto M, de α y de e, tenemos:

$$MF = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$$

$$MH = RC = x$$

sustituyendo estos valores en

$$e = \frac{MF}{MH}$$

se tiene:

$$e = \frac{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}}{x}$$

o bien:

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0 \tag{3.8}$$

La ecuación anterior es de una elipse siempre que sea $e < 1$.
Para pasar de la ecuación 3.14 a la ecuacion de la elipse referida a su centro y a sus ejes, sustituirémos en 3.17 por x, α y e, los valores:

$$x = \frac{a^2}{c} + x$$

$$\alpha = \frac{a^2}{c} - c$$

o bien:

$$\alpha = \frac{b^2}{c}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

y resultará

$$y^2 + (\frac{a^2}{c} + x)^2(1 - \frac{c^2}{a^2}) - 2\frac{b^2}{c}(\frac{a^2}{c} + x) + \frac{b^4}{c^2} = 0$$

La ecuación puede transformarse en las siguientes:

$$y^2 + (\frac{a^2 - c^2}{a^2})x^2 + (\frac{2a^2 - 2b^2}{c} - 2c)x + (\frac{a^2 - b^2}{c})^2 - a^2 = 0$$

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + c^2 - a^2 = 0;$$

y por último:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

El capítulo concluye con una sección sobre la tangente y la normal de la elipse, explica como constuirlas y como obtener sus ecuaciones.

Hipérbola

Citando el texto:

> *Hemos visto que la hipérola es una curva indefinida que tiene la porpiedad de que la diferencia de dos radios vectores correspondientes a un mismo punto, es constante; siendo, como en la elipse, radio vector la distancia de un punto de la curva a cada uno de los focos.*

Este capítulo se desarrolla del mismo modo que el de la elipse, el autor hace el mismo tipo de deducciones, explica la ecuación sus propiedades y los elementos de la curva.
A continuación se presentan algunos de los ejercicios propuestos para esa sección.

1.-Encontrar la ecuación de la tangente a la hiperbola $xy = K^2$.
2.-Qué condiciones debe tener la ecuación general de segundo grado

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

para que represente una hipérbola equilátera?.

Parábola

Hemos visto que la parábola es una curva que tiene la propiedadde que cualquiera de sus puntos dista lo mismo de un punto fijo que de una recta fija también.
Igual que en los casos anteriores el autor realiza cálculos sobre la ecuación general de segundo grado para obtener la ecuación

$$Ay^2 + Dy + Ex + F = 0$$

habla de las propiedades de la parábola y como construirla, la diferencia con los dos capítulos anteriores es que en este el autor toma especial cuidado de las propiedades de la parábola. Dedica mucho tiempo a explicar a fondo cada una.
Al final presenta una sección en la que compara las ecuaciones polares de las tres curvas anteriores.

Capítulo Septimo. Secciones cónicas y cilíndricas

En el texto se da la siguiente introducción:

> *Las lineas de segundo grado se llaman en general secciones cónicas, por que siempre que se corta un cono recto de base circular por un plano, la seccion que resulta es una línea de segundo grado.*

En este capítulo el autor explica y describe las curvas que se forma al cortar un cono. Obtiene la siguiente ecuación

$$y^2 = 2px + qx$$

de la cual concluye que para que la ecuación sea una elipse, el coeficiente de x^2 debe ser negativo y para esto es necesario que:

$$sen(\beta + 2\alpha) > 0$$

o bien

$$\beta + 2\alpha > 180$$

Para que represente una hipérbola, debe tenerse:

$$\beta + 2\alpha > 180$$

Para que represte una parábola, debe tenerse:

$$\beta + 2\alpha = 180$$

La desigualdad $\beta+2\alpha < 180$, indica que para obtener una elipse debe cortarse un cono por un plano, de manera que dicho plano corte a las generatrices en un mismo manto del cono.
La igualdad $beta + 2\alpha = 180$, indica que debe cortarse el cono por un plano paralelo a una de las generatrices para que resulte la parábola.
Este capítulo es muy corto, sin embargo el autor explica a detalle que pasa con los cortes del cono y las ecuaciones que se obtinene a partir de estos.

Capítulo Octavo. Teorías generales

El autor comienza el capítulo diciendo que la geometría analtíca tiene las siguientes nueve teorías generales.

> 1.-Núemro de puntos que es necesario conocer para determinar cada especie de curva.
> 2.-Teoría general de las tangentes.

3.-Teoría general de las asíntotas.
4.-Teoría general de los diámetros.
5.-Teoría general de los centros.
6.-Teoría general de la semejanza de las curvas.
7.-Teoría general de la cuadratura de las idem.
8.-Teoría general de la curvatura.
9.-Teoría general de la rectificacion.

Después el autor dice:

> *Antes de tratar estas teorías generales, es indipensable tener algunas nociones de las funciones derivadas, pues por medio de ellas se facilita mucho el estudio de estas teorías; así que comenzarémos por dar algunas ideas sobre las funciones derivadas.*

Cita a Díaz Covarrubias diciendo:

> *Toda expresión analítica que representa cierta relación de magnitudes, de manera que una de éstas dependa de las demás, constituye lo que hemos llamado función.*

Después procede a explicar algunos conceptos de la derivada, explica como escribir una función de x como $F(X)$ y un aumento en dicha función como $F(x+h)$. Después de esta noción da una breve explicación de series de Taylor, procede a explicar el tema de Derivada de una función.
Aqui el autor explica la nocion de derivada diciendo:

> *Se llama derivada de una función, el límite de la relación del aumento de esta funcion al aumento correspondiente de la variable, cuando ésta tiende a ser cero.*

El autor deduce por medio de la fórmula de Taylor, que previamente explica, la definición de derivada:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Explica por medio de tangentes el significado geométrico de una derivada y da algunas fórmulas de derivación. Para así proceder a explicar cada una de las teorías generales.
Para ejemplificar lo que hace el autor, a continuación hacemos un seguimiento del desarrollo que hace para la quinta teoría.

V. Centros.

El centro de una curva es, en general, el punto que divide en dos parte iguales las cuerdas que pasan por el.
La determinación del centro de una curva es importane, pues este punto contribuye a la determinacion de la forma general de la curva.
El procedimiento para determinar el centro de una curva, está fundado en que si se toma este punto por origen de coordenadas (cualquiera que sea la dirección de los ejes), todos los puntos de la curva tendrán, de dos en dos, coordenadas iguales y de signos contrarios; de suerte que la ecuación no deberá cambiar cuando se cambien simultáneamente los signos de las dos variables, y este carcácter analítico sirve además para conocer si el orígen es el centro de una curva.
La simple inspección de las ecuaciones

$$y = x^2$$

$$Y = senx$$

$$y = tgx$$

indica que el orígen es un centro, puesto que estas ecuaciones no alteran cuando se cambian los signos de x y de y.
Cuando el cambio de x en $-x$ e y en $-y$, altera la ecuación propuesta, ésto indica o que la curva no tiene centro o que este centro no está en el orígen. Para saber si en efecto la curva no tiene centro, se trasnportan los ejes paralelamete a un punto (a, b) y se ve si después de este cambio de ejes puede obtenerse una ecuación que no se altere por el cambio de x en $-x$ e y en $-y$.
Cuando esta condición se verifique, la curva tendrá un centro cuyas coordenadas son los valores correspondientes de a y b.
Si ningún sistema de valores reales y finitos de las cantidades a y b, sustituido en la ecuación, la transforma en otra, que no altere por el cambio de x en $-x$ e y en $-y$, la curva no tendrá centro.
Este método se aplica tanto a las curvas cuyas ecuaciones son algebráicas, como a las curvas cuyas ecuaciones son trascendentes.
Las curvas cuyas ecuaciones son:

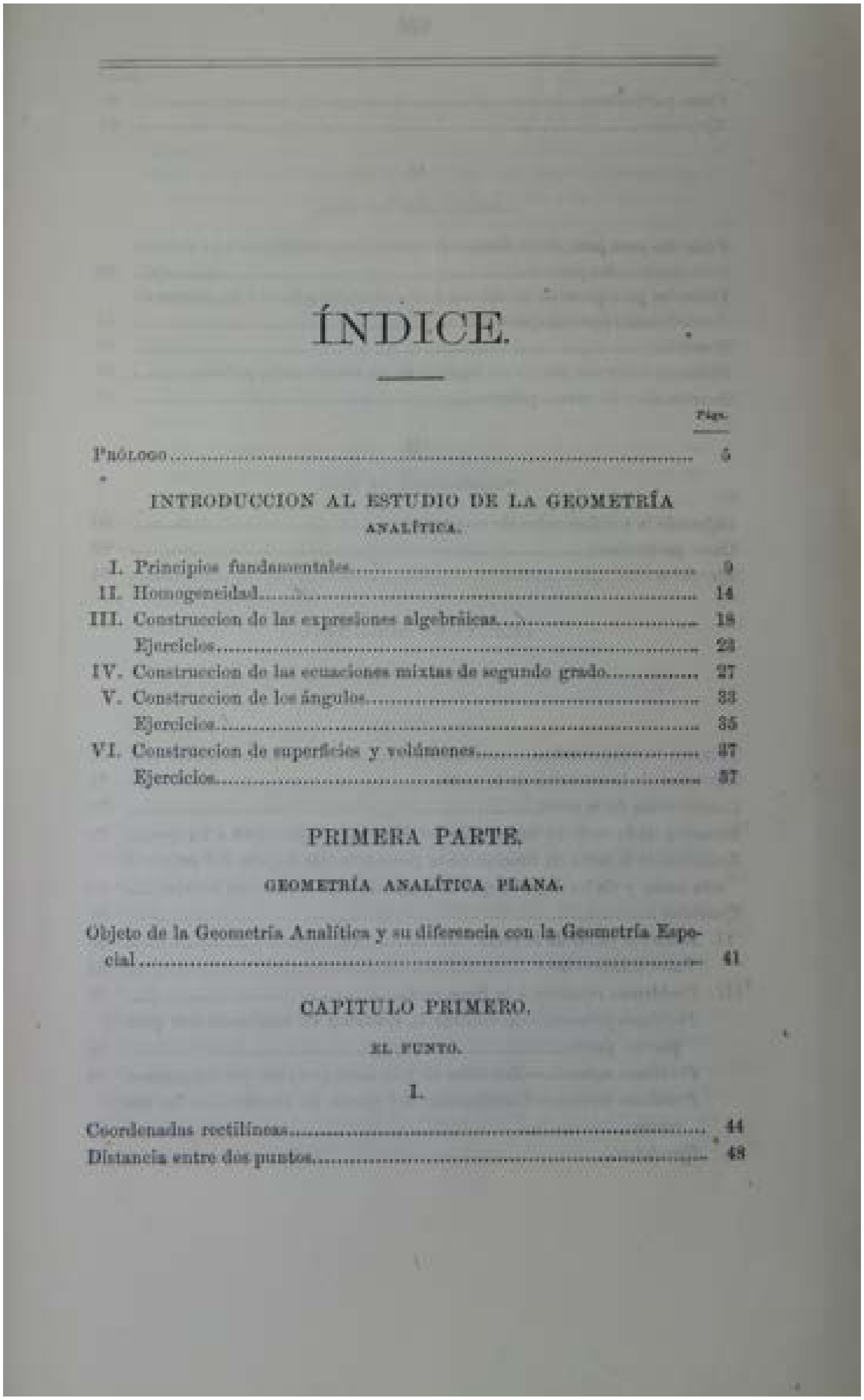
$$y = senx$$

$$y = tgx$$

> tienen por centros los puntos en que cortan estas curvas al eje de las x, puesto que colocando el orgien en cualquiera de estos puntos, se obtienen ecuaciones que llenan la condición analítica de no cambiar cuando se cambian los signos de x y de y.
> En efecto, estando estas curvas compuestas de una infinidad de partes idénticas, según la amplitud del período correpondiente a las funciones será natural tomar por centro cualquiera de los puntos en que estas curvas cortan al eje de las x.
> Para trasportar el orígen a los puntos en que la curva corta al eje de las x, basta sustituir en las ecuaciones $y = senx$; $y = tgx$, por x los valores $x + \pi$, $x + 2\pi ... x + n\pi$.

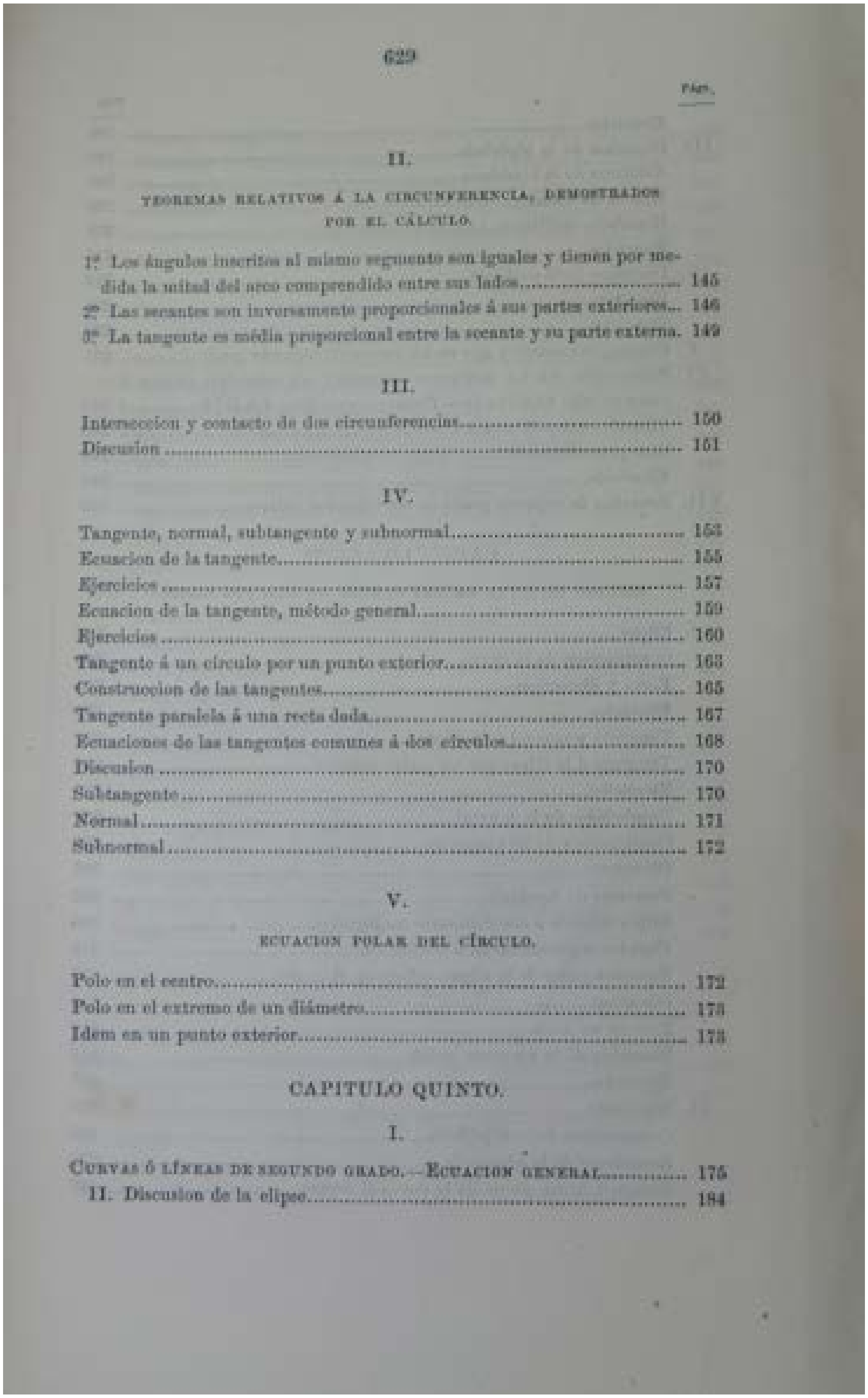
Tras este ejemplo y algunos mas, el autor procede al capítulo noveno *Clasificacion de las lineas planas* pero este capítulo y el resto del libro no se estudiarán en esta tesis ya que no pertenecen al tema de interes.

Concluimos presentando el indice de éste libro.



ÍNDICE.

626



Pág.

II.

TEOREMAS RELATIVOS Á LA CIRCUNFERENCIA, DEMOSTRADOS POR EL CÁLCULO.

III.

IV.

V.

ECUACION POLAR DEL CÍRCULO.

CAPITULO QUINTO.

I.

CAPITULO SEXTO.

ESTUDIO ESPECIAL DE LAS CURVAS DE SEGUNDO GRADO.

CAPITULO SÉTIMO.

CAPITULO OCTAVO.

632

CAPITULO NOVENO.

NOTAS.

Págs.

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE TRES DIMENSIONES.

CAPITULO PRIMERO.

CAPITULO SEGUNDO.

LUGARES GEOMÉTRICOS Y SU CLASIFICACION.

CAPITULO TERCERO.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LA LÍNEA RECTA.

634

Pág.

CAPITULO CUARTO

TEORÍA ANALÍTICA DEL PLANO.

PROBLEMAS RELATIVOS AL PLANO Y Á LA RECTA.

CAPITULO QUINTO.

TEORÍA GENERAL DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

CAPITULO SEXTO.

FIN DEL ÍNDICE.

3.2. Francisco Echeagaray. *Nociones de Aplicación del Cálculo Algebraico a la Geometría y recíprocamente.*

Francisco Echegaray y Allén fue un notable educador e ingeniero, nacido en Xalapa, Veracruz en 1844. Fue desde muy pequeño un alumno destacado, comenzando sus estudios en el Colegio Caso en Puebla, más tarde en la cuidad de México estudió en la Escuela Nacional de Medicina, pero concluyo sus estudios en la Escuela de Mineria de donde se graduo como Ingeniero Civil. Al tener un gran interes por las matemáticas ademas de habilidad para las mismas, decidió entrar como profesor a la Escuela Nacional Preparatoria en el año 1846, siendo considerado uno de los maestros fundadores de esta institución, desempeño ese puesto por 40 años. Durante este tiempo fue titular de casi todas las materias de matemáticas y algunas de física. También fue profesor en algunos colegios privados como, el Instituto Kattain, Monasterio Bas, Soriano Fournier, Villagrán, Colegio Francs y Escuela de Mascarones.
Echeagaray disfrutaba de impartir clases particulares a alumnos destacados para mejorar su desempeño, muchos de estos alumnos llegaron a ocupar cargos muy importantes en la sociedad. Fue también director de la Escuela Nacional Preparatoria de 1911 a 1912 haciendo, según los escritos de ese tiempo, una excelente labor.
Escribió varios textos de matemáticas algunos de los cuales se usaron en la Escuela Nacional Preparatoria y durante algun tiempo en las escuelas públicas a nivel secundaria. Sus obras fueron premiadas en las expocisiones de París y San Luis, Missouri. El Ingeniero Echegaray falleció el 22 de Febrero de 1929 en la cuidad de México.
En particular estudiaremos dos de sus obras utilizada para impartir la materia de geometría, en la Escuela Nacional Preparatoria, titulada: *Nociones de Aplicación del Cálculo Algebraico a la Geometría y recíprocamente.* y El segundo libro *Nociones de geometría analítica plana.*
Estos libros se usaban para impartir la materia de geometría analítica en segundo año en la Escuela Nacional Preparatoria.

A continuación presentamos las portadas de ambos y una reseña de su contenido y desarrollo, enfatizando ejemplos o ejercicios que sean útiles para ilustrar el texto.

NOCIONES DE APLICACIÓN

DEL

Cálculo Algebráico á la Geometría

Y RECÍPROCAMENTE

—POR—

FRANCISCO ECHEAGARAY,

PROFESOR
de Geometría General y Cálculo Trascendente
en la Escuela Nacional Preparatoria.

MEXICO.

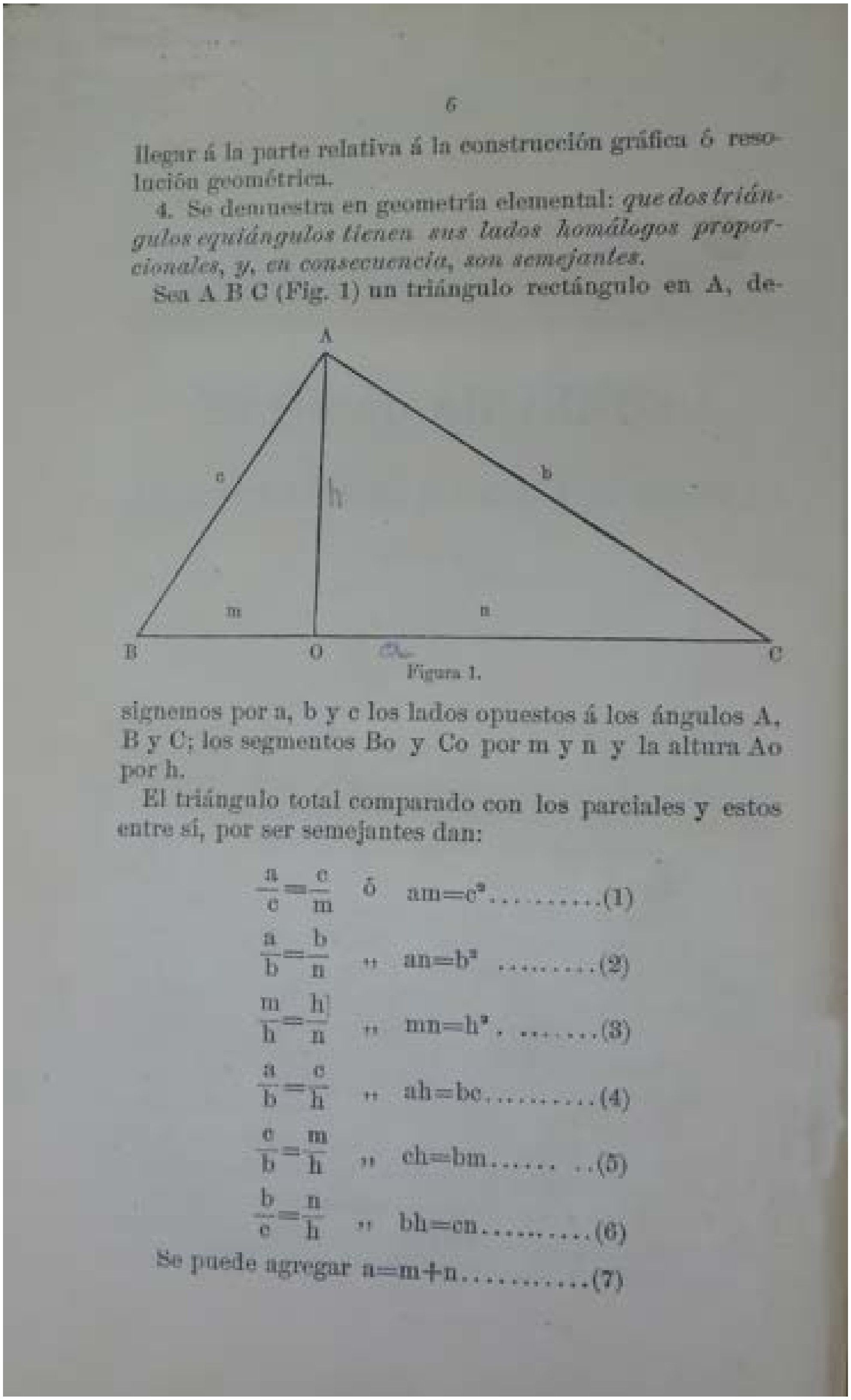
Imp. Hijas de J. F. Jens, San José el Real 22.
8ª Calle Sur 41 y 43.
1898.

Nociones de Aplicación del Cálculo Algebraico a la Geometría y recíprocamente

Este primer libro consta de 63 páginas, en las cuales se enumeran 49 conceptos divididos en tres capítulos. Estos conceptos son comentarios del autor, teoremas o ejemplos, los cuales son numerados a lo largo del libro. También incluye 6 notas al final, las cuales constan de diversos ejercicios resueltos donde se aplican distintas nociones de geometría. Y por último incluye un índice de contenidos que se muestra al final de esta sección.

Para este libro el autor hace incapie en la importancia de utilizar la matemática como herramienta, más aún conocer sus propiedades para ser capaces de aplicarlas, invita a los alumnos a adquirir un conocimiento profundo basandose en la observación y la intuición. Menciona y recalca la importancia de pasar de un concepto algebráico a un concepto geométrico, se entiende su intención estudiando el siguiente ejemplo, el cual, por cierto ,es el primero del libro. Para este ejemplo el autor dice :

> *4. Se demuestra en geometr ía elemental: que dos triángulos equiángulos tienen sus lados homálogos proporcioneales, y, en consecuencia, son semejantes.*



6

llegar á la parte relativa á la construcción gráfica ó resolución geométrica.

4. Se demuestra en geometría elemental: *que dos triángulos equiángulos tienen sus lados homálogos proporcionales, y, en consecuencia, son semejantes.*

Sea A B C (Fig. 1) un triángulo rectángulo en A, de-

Figura 1.

signemos por a, b y c los lados opuestos á los ángulos A, B y C; los segmentos Bo y Co por m y n y la altura Ao por h.

El triángulo total comparado con los parciales y estos entre sí, por ser semejantes dan:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{m} \quad \text{ó} \quad am=c^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{n} \quad ,, \quad an=b^2 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \quad ,, \quad mn=h^2 \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{h} \quad ,, \quad ah=bc \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{c}{b}=\frac{m}{h} \quad ,, \quad ch=bm \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\frac{b}{c}=\frac{n}{h} \quad ,, \quad bh=cn \ldots\ldots\ldots(6)$$

Se puede agregar $a=m+n \ldots\ldots\ldots(7)$

Figura 3.7: ejemplo del libro

La afirmación mencionada anteriormente que aparece en el ejemplo de la figura 3.7 es fácil de demostrar, pero la idea del autor es seguir el ejemplo para explicar intuitivamente lo que es una demostración, llevando al alumno de la mano en el proceso de entender lo que se quiere demostrar, buscar herramientas para hacerlo y aplicarlas.
Como se muestra en la figura el autor toma el triangulo ABC y dice que es rectángulo en A, designa los lados a, b y c opuestos a los ángulos que les corresponden y nombra a los segmentos Bo y Co por m y n y la altura Ao por h. Compara así los triángulos ABC, ABO y AOC con el previo de que son semejantes y obtiene así las igualdades 1,...,7 que aparecen en la imagen 3.7 y que el autor llama *materia prima*. Posteriormente con la información obtenida a partir del ejercicio, plantea teoremas sencillos, los cuales al ser construidos mediante el ejemplo pueden ser entendidos profundamente por el leector. El autor escribe lo siguiente en referencia al ejercicio anterior:

> *5.Las igualdades anteriorres nos proporcionan el material para algunas investigaciones. La importante división de las matemáticas en concretas y abstractas, nos obligan a considerar primeramente la parte concreta, fenomenal, para en seguida atender a la parte abstracta.*
> *En nuestro caso la parte concreta está en la propiedad de los triángulos equiángulos, de tener sus lados homólogos proporcionales y en consecuencia ser semejantes; la parte abstracta corresponde a las diversas combinaciones o transformaciones que hagamos con las mencionadas igualdades, o sea la materia prima.*

Para explicar lo anterior, se presenta a continuación el primer teorema que se plantea en base al ejericicio de la figura 3.7.

> *7.Por las igualdades anteriores obtenemos, desde luego, algunas proposiciones importantes, como estas:*
> *De (1)y(2) se infiere: que, cada cateto del triángulo ABC, es medio proporional entre la hipotenusa y su proyección sobre esta línea. O bien: los rectángulos am y an son respectivamene equivalentes a los cuadrados c^2 y b^2.*

Para explicar este teormena, del ejemplo uno podemos identificar las primeras dos igualdades y recordando la siguiente definición la primera afirmación es clara y de esta con un despeje muy simple obtenemos la segunda.

> Definición. Un numero a es media proporcional de otros dos numeros b y c, si se cumple que $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$

dice también:

> *De (3) se deduce: que la altura h es media proporcional entre los segmentos m y n de la hipotenusa. O bien: el rectángulo m,n es equivalente al cuadrado h^2.*
> *Las igualdades (4) (5) y (6) son fáciles de interpretar geométricamente y dan lugar a otras proposiciones.*
>
> *8. Vemos que la simple comparación de los triángulos nos ha conducido a varios teoremas. Este es, pues, un medio sencillo de descubrir verdades geométricas.*
>
> *9. Pero hay algo más fácil que las anteriores comparaciones, adicionar o sustraer las cantidades m y n que nos representa líneas y cuyas operaciones dan lugar a la siguiente igualdad $m + n = a$*

Ahora es más claro que la idea del autor al planetear este ejercicio no se centra en la dificultad del mismo, el autor mas bien menciona este ejercicio para sembrar en el lector la intuición de utilizar la *materia prima* que podamos obtener de cierta afirmación y convertirla en soluciones para la misma.
El autor sigue la misma linea de trabajo, utilizando las primeras igualdades y mezclandolas hasta llegar a plantear el teorema de Pitágoras, como sigue:
Sumando las igualdades (1) y (2) de la figuara 3.7 obtengo:

$$am + ab = b^2 + c^2$$

factorizando

$$a(m + n) = b^2 + c^2$$

y por la igualdad (7) me queda:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

El cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.
Después a modo de ejemplo demuestra el siguiente teorema.

> *12. Si desde un punto se trazan a una circunferenia una secante y una tangente, la tangente es media proporcional.*

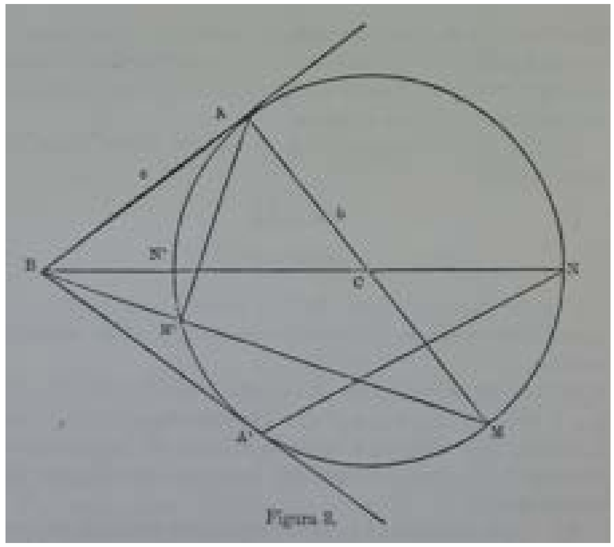


Figura 3.8: Imágen original del libro

Sea en la figura anterior, BN la secante, y llamemos a al segmento BC. De este modo podemos decir que $BN = a + b$ por ser CN un radio de la circunferencia. Sea BA la tangente y observese que $BA = c$ y $BN' = a - b$. Por ser BA tangente al círculo, el triángulo BAC es un triángulo rectángulo y por el teorema de pitágoras tenemos

$$a^2 - b^2 = c^2 \tag{3.9}$$

de donde

$$(a + b)(a - b) = c^2 \tag{3.10}$$

luego

$$\frac{c}{BN} = \frac{BN'}{c} \tag{3.11}$$

con lo que se demuestra el teorema.[6]

Tras demostrar este teorema continua trabajando sobre ejemplos sencillos y haciendo énfasis en la idea de pasar del álgebra y el cálculo a la geometría y viceversa, ya sea construyendo igualdades o demostrando teoremas y corolarios como los siguientes

[6]Esta demostración se basa en la que realizo el autor en el libro, sin embargo se agregaron algunas lineas que el autor da por tribiales en su demostración.

> 1 *Corolario. Las secantes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia, son inversamente proporcionals a sus partes exteriores.*
> 2 *Corolario. Las tangetes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia, son iguales.*

Al resolver estos corolarios el autor dice:

> *15. El empleo de la Geometría para probar posiciones de Álgebra es de bastante importancia, pues además de llevar al espíritu la evidencia, la claridad propia de la ciencia de la extención, nos evita considerar magnitudes fraccionarias o inconmensurables...*

Procede asi a hacer algunas demostraciones algebráicas de estos corolarios, despues plantea y resuelve el siguiente problema para el triángulo de la figura 3.7:

> *17. Problema. Conociendo a y h, resolver el triángulo rectángulo ABC es decir, determinar m y n, b y c para en seguida construirlo.*

De la igualdad (7) sabemos que $m = a - n$ sustituyendola en la igualdad (3) tengo $h^2 = (a - n)n$ resolviendo esta ecuación para n queda:

$$n = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2} \tag{3.12}$$

tomamos el caso en el que el radical es positivo y teniendo en cuenta que $m + n = a$ podemos hacer:

$$n + m = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2} + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - h^2} = a$$

Esto nos perminte observar que hay ciertas condiciones que deben cumplirse para que este problema sea posible, $\frac{a^2}{4} \geq h^2$ por otro lado de (1) y (2) tenemos que:

$$b = \sqrt{an} \quad c = \sqrt{am} \tag{3.13}$$

Tras hacer estas observaciones podemos empezar a constuir el triángulo.

Observemos que la ecuación 3.12 se construye de dos partes, citando al autor, *la mitad de la línea a y la línea represeantada por la parte irracional.*

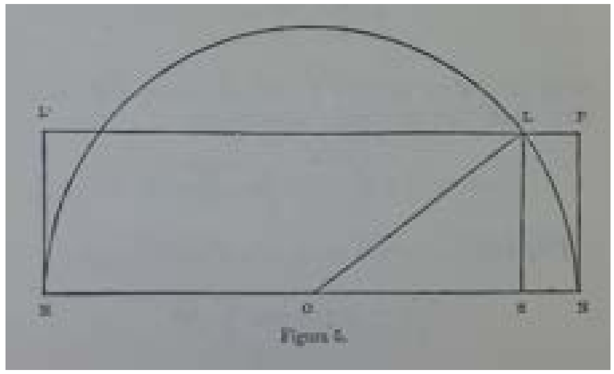


Figura 3.9: Imágen original del libro

Se toma primero una magnitud MO igual a $\frac{a}{2}$ sobre la linea MN en la figura 3.9 y a continuación el valor del radical que representa un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\frac{a}{2}$ y el otro cateto es h, y se construye el radical trazando una semicircunferencia de radio $\frac{a}{2}$. Luego por M se traza una perpendicular $ML^{'}$ de modo que $ML^{'} = h$, se traza desde $L^{'}$ una recta paralela a MN y se une en el punto F. Sea L el punto donde se intersectan la circunferencia y la recta $L^{'}F$ y trazamos así la recta LS perpendicular a MN, por último unimos el punto L con O y se forma el triángulo OLS, en el que OS es el cateto buscado y asi MS representa el valor de n, también podemos ver que SN representa el valor de m.
Para encontrar los catetos, partiendo de las ecuaciones 3.13 construimos c y b usando medias proporcionales.[7]
Al conocer los valores de m y n ó b y c puede construirse el triángulo.

El autor continua planteando problemas y resolviendolos algebráica y geométricamente, procede así a otro capítulo en el que explica algunos casos particulares de construcciónes geométricas así como la interpretación de las mismas y un último capítulo que consta solametne de tres páginas en donde habla de la homogeneidad en expresiones algebráicas y la construcción de estas.

[7]La contrucción de una media proporcional es un caso particular de la contrucción de la tercera proporcional. Puede construirse utilizando el teorema de Tales.

En la última parte del libro aparecen las 6 notas antes mencionadas, en ellas plantea y resuelve problemas geometrica y algebraícamente pero con un grado mayor de dificultad. El siguiente ejemplo corresponde a la segunda nota del libro en la cual se resuelve una ecuación de segundo grado por medio de la geometría y la trigonometría. Al principio de la nota el autor dice:

> *Vamos a resolver una ecuación de segundo grado, reducida a la forma más sencilla por la trigonometría, habiéndola resuelto ya geométricamente.*

El autor resuelve el caso en el que todas las raices son reales y de signos iguales, y nos enfocaremos únicamente en la solución geométrica que se da dentro de la nota 2.
Supongase la balanza de la Figura 3.10, citando al autor:

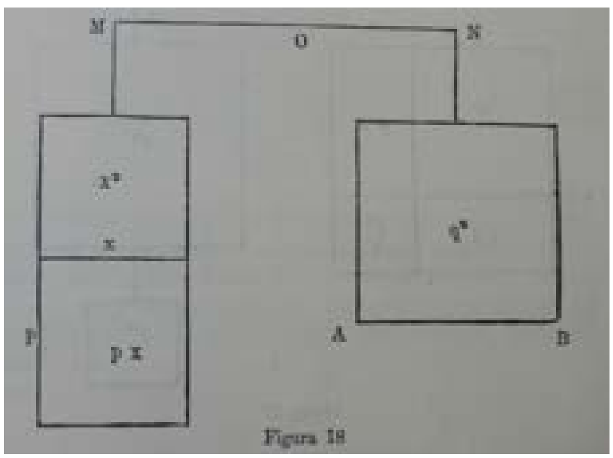


Figura 3.10: Imágen original de las notas

> *En la cual se tiene el cuadrado x^2 y el rectángulo px, formados de lámina muy delgada, suspendidos del extremo M, y el cuadrado q^2 del extremo N; verificandose el equilibrio.*

Si tomamos ahora la Figura 3.11, en la cual unicamente partimos en dos el rectángulo px y movemos una de sus piezas al al lado derecho del cuadrado. Podemos ver que el equilibrio no se altera, tampoco en el siguiente caso, en el que completamos el lado izquierdo de la balanza para formar un cuadrado,

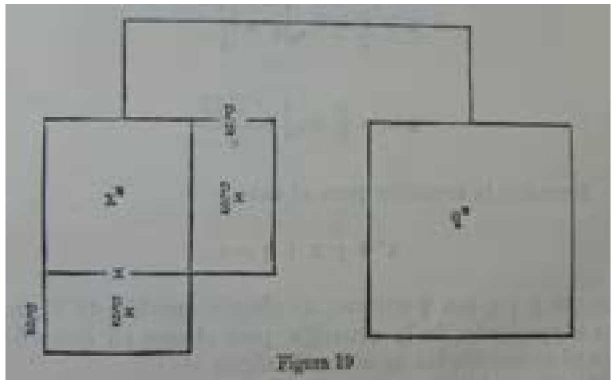


Figura 3.11: Imágen original de las notas

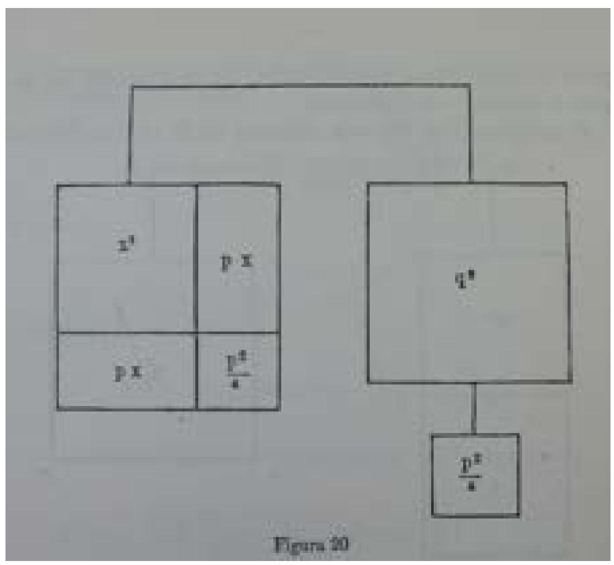


Figura 3.12: Imágen original de las notas

y para mantener el equilibrio agregamos un pedazo, igual que el que usamos en el lado izquierdo, al lado derecho. De la Figura 3.12 nos queda:

$$(x + \frac{p}{2})^2 = q^2 + \frac{p^2}{4}$$

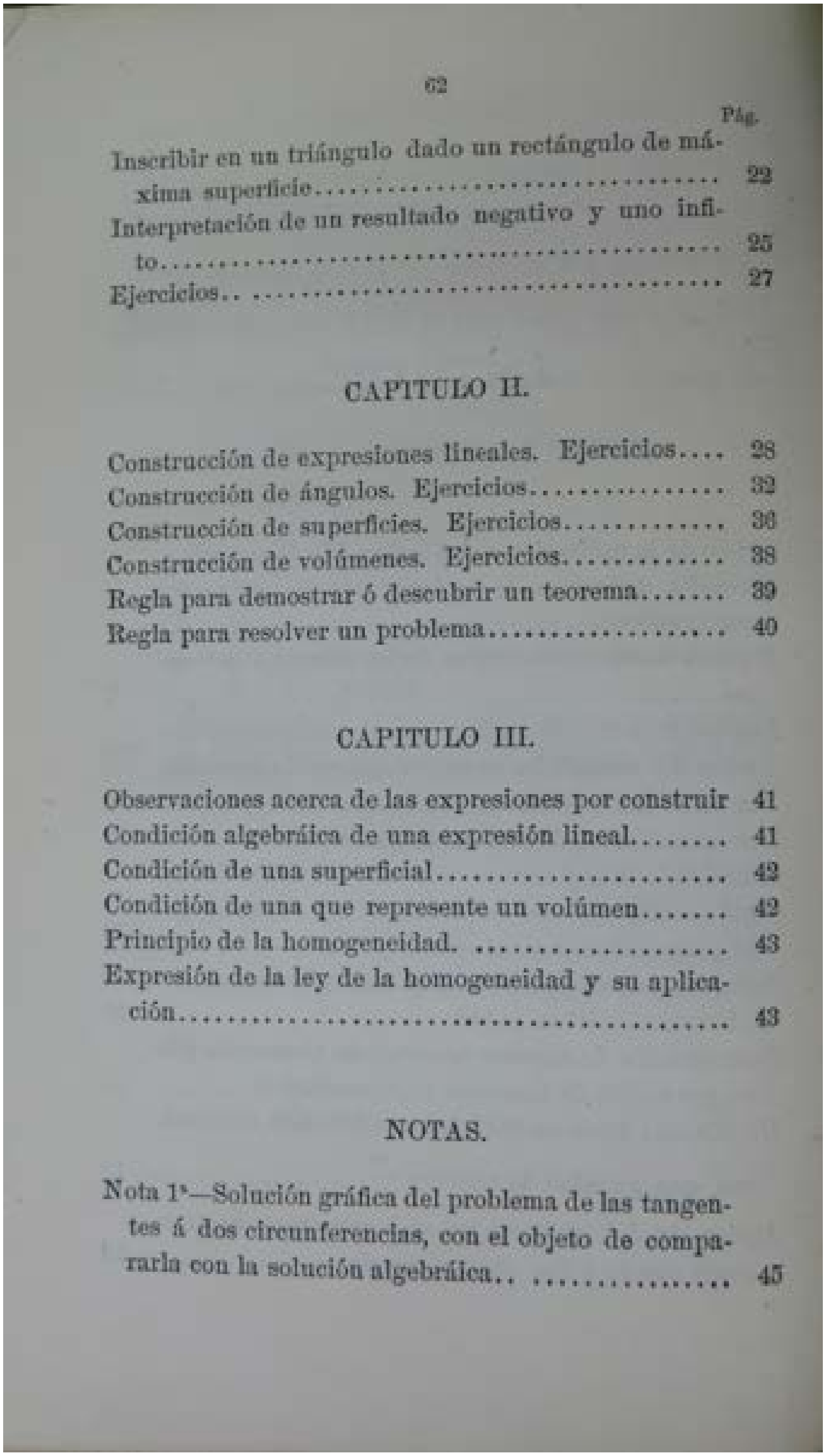
de donde

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{q^2 + \frac{p^2}{4}}$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + epp^2}{4}}$$

Esta última representa las soluciones de una ecuación cuadratica $x^2+px+q = 0$.

El resto de las notas contienen problemas similares. Por último presentamos el índice de este libro.

ÍNDICE.



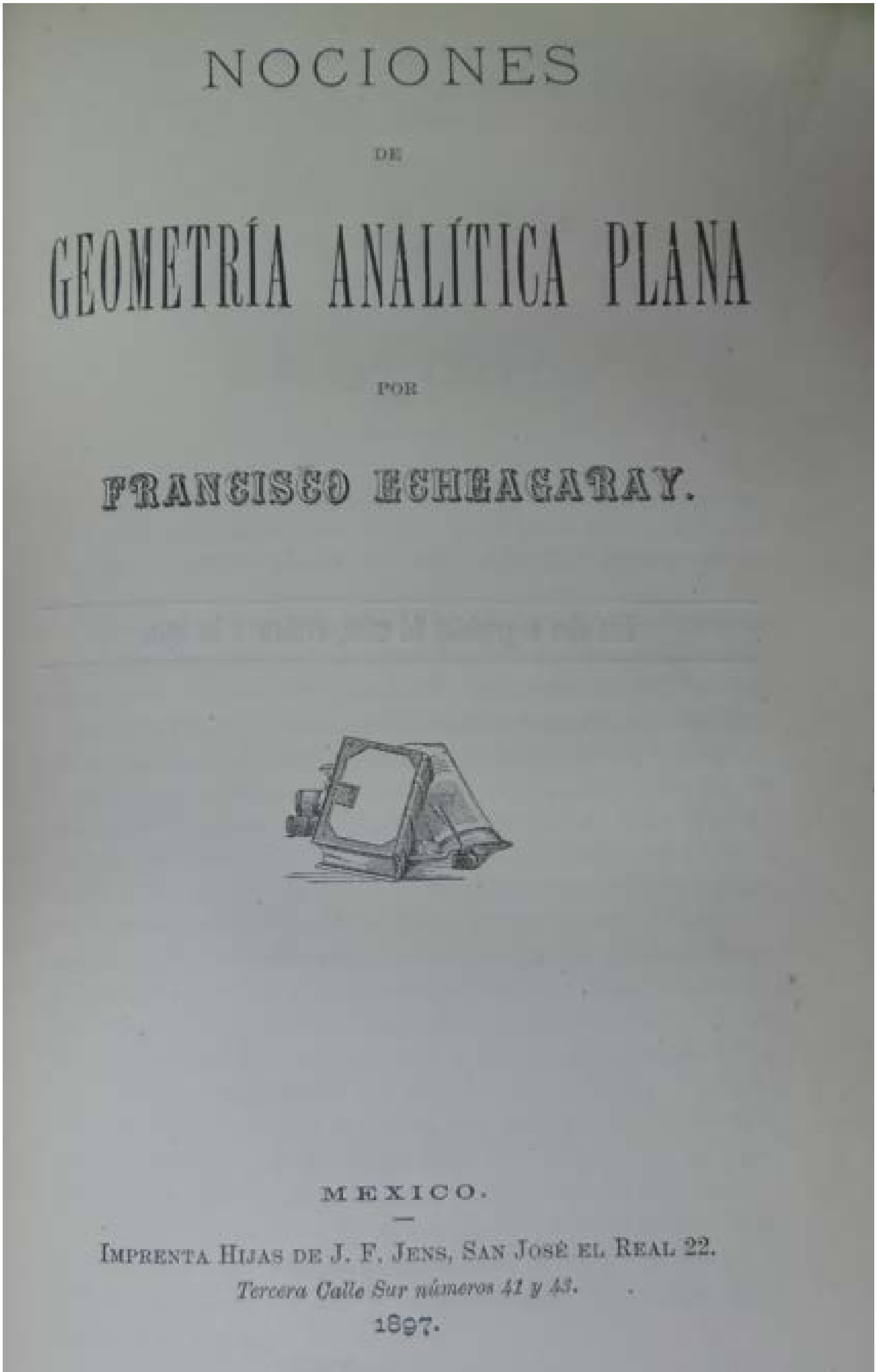
CAPITULO II.

CAPITULO III.

NOTAS.

3.3. Francisco Echegaray. *Nociones de geometría analítica plana.*

El autor menciona en el prólogo que este libro fue escrito para usarse en el tercer semestre de la preparatoria. Se conforma de 112 paginas, las cuales incluyen 7 capítulos un indice y una fe de erratas, cuenta también con una sección independiente al libro llamada *Resolución de algunas cuestiones de geometría analítica propuestas en el texto*. Esta sección consta de 35 páginas incluyendo un indice, en ella se resuelven algunos de los ejercicios planteados en el libro.
A continuación se menciona cada capítulo y su contenido, resaltando algunas demostraciones, explicaciones o comentarios del autor.



NOCIONES

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

POR

FRANCISCO ECHEAGARAY.

MEXICO.

IMPRENTA HIJAS DE J. F. JENS, SAN JOSÉ EL REAL 22.

Tercera Calle Sur números 41 y 43.

1897.

Capitulo I. Teoría algebráica de las proyecciones.

El autor comienza el capítulo definiendo una proyección de la siguiente manera:

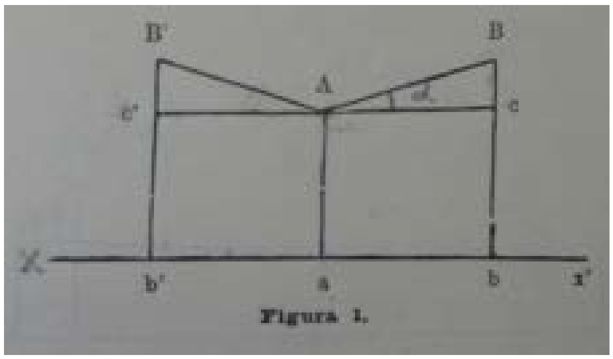


Figura 3.13: Imágen del libro

> *1.La proyección ortogonal de una recta AB sobre otra xx', llamada eje de proyección es la distancia ab de los pies de las perpendiculares bajadas a los extremos A y B de la primera recta sobre la segunda.*

Tras definir lo que es una proyección el autor plantea y resuelve algunos teoremas, por ejemplo:

> *2. Teorema. La proyección de una recta sobre un eje es igual a su longitud por el coseno del ángulo que forma con la parte positiva del eje de la proyección.*
> En efecto, $Proy.AB = ab = Ac = ABcos\alpha = lcos\alpha$ siendo l, la longuitud AB y α el ángulo BAc que forma AB con xx'.

Observese que en efecto se cumplen las igualdades anteriores ya que, por definición la proyección de AB ($Proy.AB$)es igual al segmento ab sobre la recta xx'. Luego la igualdad $ab = Ac$ se cumple por que al ser las rectas Aa y cb perpendiculares a xx' y paralelas entre ellas, se forma el rectángulo $Acba$ luego $ab = Ac$. Si tomamos en cuenta el triágnulo rectángulo ABc y siendo α el angulo en A sabemos que, $cos\alpha = \frac{ab}{AB}$ despejamos y obtenemos $ab = ABcos\alpha$ y por último sea, por definición de autor, $l = AB$ y obtenemos el resultado deseado.

Ejemplos como este se presentan a lo largo del capítulo, todos con el fin de aterrizar el concepto de proyección y aplicarlo para resolver distintos ejercicios.

Capitulo II. Teoría analítica de la línea recta.

El autor comienza el capitulo con la siguiente frase, *Busquemos una relación entre las coordenadas de un punto cualquiera de una recta y ciertas constantes.* Es así como procede a deducir la ecuación de la recta para ejes oblicuos.

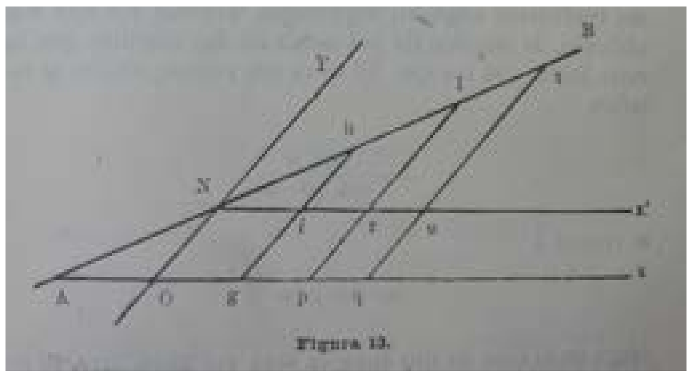


Figura 3.14: Imágen original del libro

En la figura anterior, llamaremos $y^{'}, y^{''}$ y $y^{'''}$ a las rectas gh,pl y qt las cuales son paralelas al eje y y la recta $X^{'}$ es paralela al eje X. Por lo anterior podemos formar triángulos semejantes, Nih, Nrl y Ntu de donde:

$$\frac{hi}{Ni} = \frac{lr}{Nr} = \frac{tu}{Nu} = a \tag{3.14}$$

Y a una constante. Ahora sea b la ordenada al origen, es decir la distancia del origen al punto de intersección de la recta AB con el eje Y. Entonces $b = ON$, pero también, para $y^{'}$, $b = gi$, para $y^{''}$, $b = rp$,etc.
Luego $b = ON = ig = rp = ut$.
Por otro lado sabemos que $hg = y^{'}$ y $hg = hi + ig$ despejamos y obtenemos $hi = hg - ig$ de ahí que $hi = y - b$.
Hacemos lo mismo para lr y tu de la igualdad 3.14 obtenemos:

$$\frac{y-b}{x} = \frac{y^{'}-b}{x^{'}} = \frac{y^{''}-b}{x^{''}} = a$$

Siendo x,$x^{'}$ y $x^{''}$ los segmentos de recta que se forman entre las intersecciones de y,$y^{'}$ y $y^{''}$ con $X^{'}$, es decir Ni, Nr y Nu
Luego

$$\frac{y-b}{x}=a$$

despejamos y obtenemos la ecuación de la recta

$$y=ax+b$$

A simple vista la ecuación parece igual a la ecuación de la recta en el plano cartesiano, sin embargo la diferencia se encuentra en la interpretación de a y b. Por la deducción anterior es fácil ver que a es la razón entre los catetos de los triángulos que forma la recta AB con las paralelas a los ejes. En el plano cartesiano a es la pendiente de la recta y se obtiene con la razón de los catetos de triángulos rectángulos, para el caso general debemos tener en cuenta el ángulo que se forma entre las rectas. De la figura anterior, observemos únicamente el triángulo Nih.
Sea β el ángulo que forman los ejes, y sea α el ángulo que forma la recta AB con el eje X. De modo que los ángulos en el triángulo Nih son, en N, α, en h, $\beta-\alpha$ y en i, $180-\beta$.
Por la ley de los senos se tiene igualdad

$$\frac{hi}{sen\alpha}=\frac{Ni}{sen(\beta-\alpha)}$$

luego

$$\frac{hi}{Ni}=\frac{sen\alpha}{sen(\beta-\alpha)}=a$$

El autor llama a a el coeficiente angular, y observemos que en efecto cuando el ángulo β es de 90 grados tenemos que $a=tan\alpha$.
La variable b es la distancia del origen al punto N donde la recta AB intersecta al eje Y, que debe medirse en el cateto adyacente del triángulo AON.

Tras obtener la ecuación el autor procede a demostrar si esta pertenece a una recta, siguiendo así la linea de trabajo que ha fomentado, de la geometría al cálculo y viceversa.
Observemos que dichas deducciónes aportan una noción más profunda de la estructura de la ecuación de la recta, el alumno es capaz de enteder que es y como se obtiene la pendiente, como afecta el movimiento de una recta a su

ecuación y dada esta como podemos saber de que recta se trata.
Para seguir desarrollando la intuición en el alumno, el autor explica que en el terreno algebráico se trabajan las ecuaciones que representan lugares geométricos, estas se combinan y se confeccionan en talleres de cálculo abriendo así paso para que la geometría trabaje en la parte gráfica, la parte de construcción. Explica que este caso es análogo al de el álgebra y la aritmética ya que la segunda proporciona la materia prima para que el álgebra la transforme, con su lenguaje simbólico, en fórmulas y ecuaciones y a su vez al resolverlas es la áritmetica quien termina la obra del álgebra. Lo que sigue de esta explicación, se dará a modo de cita para conservar el estilo del autor:

> *Hay que hacer una explicación respecto de lo que se acaba de decir, no es simplemente el empleo del cálculo, lo que caracteriza a la geometría cartesiana; pues si tal fuera, desde los tiempos de Euclides, en que se hacía uso de la teoría de las proporciones que constituye como procedimiento lógico el equivalente muy imperfecto de nuestra álgebra actual, la geometría general hubiera existido.*

Es así que el autor hace notar una vez más que la geometría va de la mano del cálculo y que se abstraen los trabajos de este a cuestiones de magnitud para trabajar en el campo de la geometría.

Pensando en esta idea explica el siguiente ejemplo.

> *Para una recta dada, a y b son constantes, dos condiciones fijan pues la dirección de una recta, que podrán ser los puntos A y N, en que AB corta a los ejes, el punto N, por ejemplo, y el ángulo que ANB forma con la paralela Nx' al eje de las X, y por último dos puntos cualesquiera de la recta, como h y l. En el primer caso se determinan A y N haciendo sucesivamente en la ecuación de la línea recta $y = 0$,$x = 0$; para $y = 0$, resulta $x = -\frac{b}{a}$, cantidad que se lleva de O hacia A. Para $x = 0$, $y = b$, que se llevará de O hacia N, y uniendose A con N se tendrá la dirección de la recta AN.*
> *En el segundo caso para determinar el ángulo BNx' se procede de la siguiente manera:*
> *Se recordará que*
> $$a = \frac{sen\alpha}{sen(\beta - \alpha)}$$

agregando la unidad a los dos miembros, e incorporando el quebrado al entero, quitando en seguida la unidad a los miembros y dividiendo uno por otro los resultados se obtiene:

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{sen\alpha + sen(\beta-\alpha)}{sen\alpha - sen(\beta-\alpha)} = \frac{tang\frac{1}{2}\beta}{tang(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}$$

de donde

$$tang(\alpha - \frac{1}{2}\beta) = \frac{a-1}{a+1} tang\frac{1}{2}\beta$$

y por consiguiente se obtendrá α, ángulo que se construirá en el punto N distante del origen b, y se obtendrá la dirección ANB. Por último si en la ecuación

$$y = ax + b$$

Se dan dos valores a x y se determinan los de y, se tendrán dos puntos h y l, por donde pasará la recta, cuya construcción se deseaba.

De este modo el autor explica, geometricamente, las condiciones necesarias para encontrar la ecuación de una recta.

El autor continua el capítulo proponiendo y resolviendo los siguientes problemas, los cuales se presentan en el orden en que aparecen en el libro:

1er *Problema. Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos punto cuyas coordenadas son (x', y') y (x'', y'') .*
2° *Problema. Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, cuyas coordenadas son (x', y'),(x'', y'')*
3er *Problema. Dadas dos rectas, por sus ecuaciones determinar su punto de intersección.*
Ejercicio. Demostrar que si se unen los medios de los lados de un cuadrilátero, la figura que resulta es un paralelógramo.
4° *Problema. Dadas dos rectas determinar el ángulo que forman.*

Presentamos a continuación un seguimiento de como resuelve el autor el tercer problema.

Sean $y = ax+b$ y $y = a^{'}x+b^{'}$ las rectas, el autor dice que la cuestion se reduce a resolver el sistema de ecuaciones que estas rectas forman, para encontrar las coordenadas de un punto (x, y) que este en ambas y por lo tanto sea su punto de intersección. Esta solución será:

$$x = \frac{b - b^{'}}{a^{'} - a} \quad y = \frac{a^{'}b - b^{'}a}{a^{'} - a}$$

Hace notar que si $a^{'} = a$ las ecuaciones se indefinien y por lo tanto el punto de intersección no existe, indicando que las rectas son paralelas.

Observese que todos los ejercicios anteriores se plantean y se resuelven de un modo general, lo que fomenta una mayor comprensión del tema y las herramientas empleadas para resolver cuestiones de geometría.
Concluye este capítulo planteando algunos ejercicios y haciendo observaciones sobre los mismos, dice por ejemplo:

> *Los siguietnes ejercicios, nos pueden servir para establecer la diferencia en cuanto al método que emplea la geometría especial y la general; aparte del interés puramente geométrico que cada uno de ellos tiene, y además por lo que el alumno pueda ejercitarse en el cálculo cartesiano que es necesario distinguir del método cartesiano.*

Dicho esto plantea el siguiente ejercicio:

> *Demostrar que las tres medianas de un triángulo, las tres bisectrices, las tres alturas y las tres perpendiculares que se levantan al medio de los lados son líneas concurrentes.*

Hace observaciones sobre los ejercicios que plantea y su utilidad para el alumno y concluye el capítulo.

Capítulo III. Curvas de segundo grado.

Este capítulo inicia con la definición de la ecuación del círculo, también para ejes oblicuos, con un procedimiento similar al del capítulo anterior con el que obtuvimos la linea recta. De este modo se obtienen la siguiente ecuación.

$$r^2 = (x - a)^2 + [y - b]^2 + (x - a)[y - b]cos\beta \tag{3.15}$$

Desarrollando y haciendo:

$$A = -2a - 2bcos\beta \tag{3.16}$$

$$B = -2b - 2acos\beta \tag{3.17}$$

y

$$C = a^2 + b^2 + 2abcos(\beta - r^2) \tag{3.18}$$

se obtiene:

$$x^2 + y^2 + 2xycos\beta + Ax + By + C = 0$$

De las ecuaciones anteriores, a y b representan las coordenadas del centro de la circunferencia y r el radio. Observemos también que para $\beta = 90°$, las ecuaciones anteriores quedan:

$$[x - a]^2 + [y - b]^2 = r^2$$

o bien

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Estas son las ecuaciones con las que se trabaja en los libros de geometría analítica a nivel preparatoria en la actualidad. Sin embargo en este texto se presentan solo como un caso particular de la ecuación de la circunferencia.
A partir de las ecuaciones 3.15,3.16,3.17 y 3.18 el autor deduce las siguientes igualdades, $a = -\dfrac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{2}$ y $r = \sqrt{\dfrac{A^2 + B^2}{4} - C}$ con las cuales, dice se pueden determinar las coordenadas del centro y radio de un círculo. Inmediatamente despues de estas igualdades propone los siguientes ejercicios.

I. Construir la ecuación $x^2 + y^2 + 5x - 2y + 3 = 0$.
II.Las ecuaciones del círculo, cuando el orígen está en la extremidad de un diámetro y en el centro, son respectivamente:
$y^2 = 2rx - x^2$, $y^2 + x^2 = r^2$. *Inferir de estas últimas ecuaciones algunas propiedades del círculo.*
III.Dada la ecuación

$$y^2 + x^2 + Ax + By + C = 0$$

determinar las condiciones para que los ejes corten, toquen o sean exteriores a la circunferencia.

Una vez más el autor plantea sus ejercicios a modo general, invitando al alumno a que escarbe en las propiedades del círculo , obligandolo a comprender su definición y su estructura para poder resolver los ejercicios planteados. Termina el capítulo proponiendo y resolviendo ejercicios como los siguientes.

> *20*[8]*.Trazar una tangente a la circunferencia* $[x-a]^2+[y-b]^2 = r^2$ *por un punto tomado en la curva.*
> *21.Ecuación de la normal a un círculo.*
> *22.Por un punto exterior a un círculo trazar una tangente.*
> *23.Método de los lugares geométricos.*
> *24.Trazar una tangente a un círculo y paralela a una recta dada* $y = mx$.
> *25.Determinar la ecuación de una tangente común a dos circunferencias.*

A continuación presentamos el método de resolución del autor para el ejercicio 20.
Antes de resolver el ejercicio el autor escribe lo siguiente:

> *La anterior cuestión es fundamental y los alumnos deben fijar mucho su atención en el método que se va a emplear para resolverla, pues comprendiendo bien la resolución en el presente caso, podrán resolver sin dificultad cuando en lugar de la circunferencia se trate de la elípse, de la hipérbola, de la parábola o de otra curva algebráica. En la cuestión propuesta se presenta nuevamente una buena oportunidad para distinguir en su parte esencial la geometría moderna de la antigua, para dar un nuevo paso de la diversidad a la unidad, para comprender que se atiende en la primera el fenónmeno geométrico y se prescinde de la forma en que éste se verifica, al contrario de lo que pasa en la geometría antigua.*

Tras hacer incapie en la importancia de estudiar a detalle los ejercicios el autor procede a resolverlo. Propone considerar a la tangente como una secanta, cuyos dos puntos de intersección se confuden en uno solo, esta consideración facilita resolver el problema ya que amplia nuestras herramientas para resolverlo. De este modo podemos tomar los dos puntos en donde la secante corta

[8]La numeración que se da en este, y todos los ejercicios que se citan del libro, es la que lleva el autor para los mismos. Esta numeración fue mencionada al principio de este capítulo.

a la circunferencia y sabemos que basta con estos dos puntos par encontrar la ecuación de esta recta.
La ecuación de una recta que pasa por dos puntos es:

$$y - y^{''} = \frac{y^{''} - y^{'}}{x^{''} - x^{'}}(x - x^{'}) \tag{3.19}$$

Para dos puntos cuyas coordenadas son $[x^{'}, y^{'}]$ y $[x^{''}, y^{''}]$. Estos puntos deben de pertenecer tanto a la circunferencia como a la recta sencante a esta. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$[x^{'} - a]^2 + [y^{'} - b]^2 = r^2$$

$$[x^{''} - a]^2 + [y^{''} - b]^2 = r^2$$

Restando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$[x^{'} - a]^2 + [y^{'} - b]^2 - [x^{''} - a]^2 + [y^{''} - b]^2 = 0$$

Desarrollando los binomios y despejando nos queda que

$$\frac{y^{'} - y^{''}}{x^{'} - x^{''}} = \frac{x^{'} + x^{''} - 2a}{y^{'} + y^{''} - 2b}(x - x^{'})$$

Sustituyendo en la ecuación 3.19 resulta

$$y - y^{''} = \frac{x^{'} + x^{''} - 2a}{y^{'} + y^{''} - 2b}(x - x^{'}) \tag{3.20}$$

Esta es la ecuación de la secantae a la circunferencia. Si tomamos los dos puntos de intersección de la secante y los convertimos en mismo de modo que $y^{'} = y^{''}$ y $x^{'} = x^{''}$ la secante se convierte en una tangente y de la ecuacion 3.20 me queda:

$$y - y^{''} = \frac{x^{'} - a}{y^{'} - b}(x - x^{'})$$

y con esto se resuelve el ejercicio.[9]
El ejercicio 23, *Método de los lugares geométricos* es muy importante ya que en el explica que es un lugar geométrico y su importancia para todo el desarrollo posterior del texto. El autor dice:

[9]Esta solucón es un seguimiento de la que se da en el libro, sin embargo en algunos puntos entramos en más detalle que el autor.

> *La ecuación de un lugar geométrico es una relación entre ciertas variables, propias para fijar la posción de todos los puntos del lugar geométrico, que llamamos coordenadas, y determinadas constantes o parámetros.*

El autor concluye el capítulo proponiendo el siguente ejercicio:
Ejercicio. Demostrar que la mayor de las cuerdas es el diámetro y la menor la perpendicular al diámetro.

Capítulo IV. Ovalos.

En este se capítulo el autor estudia a la Elipse, la Hipérbola y Parábola en ese orden, definiendolas como casos particulares del óvalo de Descartes. Dedica especial atención a la elipse y explica a las otras dos curvas guiandose de el trabajo que realiza para la primera.

Elipse

El autor comienza el capítulo describiendo a le elipse como sigue:

> *Defínase esta curva por la propiedad que tienen todos sus puntos de que la suma de sus distancias a dos puntos dados es constante e igual a* $2a$.

Ilustra la definición anterior con la imágen de la figura 3.15 y dice:

> *Sea* M *un punto que se supone pertenece al lugar geométrico indicado, y hagámos*
>
> $F^{'}M = z^{'}$ y $MF = z$
>
> $$z^{'} + z = 2a$$
>
> *Será la ecauación que inmediatamente se deduce de la definición dada.*

El punto M, y otro cualquiera de la curva, se obtiene por la intersección de dos arcos de círculo trazados desde los puntos $F^{'}$ y F y con los radios $F^{'}M$ y FM, cuya suma debe ser igual a $2a$.

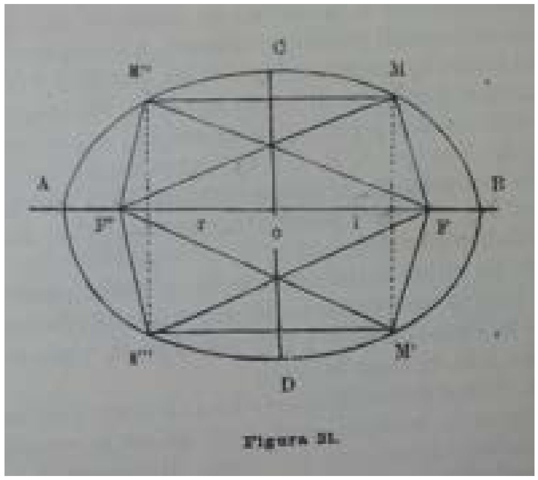


Figura 3.15: Imágen del libro

El autor continua construyendo la ecuación de la elipse, mencionando las propiedades de cada uno de los puntos para deducir la ecuación. Explica también las propiedades de cada elemento de ella, mientras construye la elipse a partir de estos.
Menciona por ejemplo:

> *Si haciendo centro en los puntos, F y F' y con radios iguales á a, trazamos arcos que se corten en los puntos C y D, evidentement estos puntos son del lugar geométrico. A los puntos A, B, C y D, extremos de las líneas o ejes de simetría, se les llama vértices de la curva, a los puntos F y F' focos y a las distancias de un foco a la curva radios vectores.*
> *La elipse se traza fácilmente por movimiento contínuo; para lo cual se fija un hilo inextensible de longuitud igual a $2a$ en los focos F y F' y con el lapiz, tendiendo tenso dicho hilo, se traza la curva.*

Posteriormente el autor dice que con las consideraciones anteriores se logra una comprensión profunda de que es y como se contruye una elipse, y con esto se puede deducir fácilmente su ecuación.
Usando los elementos de la figura 3.15 el autor continua construyendo al ecuación bajo diferentes circunstacias. Considerando las propiedades de simetría de la curva, tomando un punto cualquiera de ella (x, y) y llamando a y b a

los semiejes OA y OC respectivamente. Luego por ser la curva simétrica con respecto a ambos ejes, debe tener una ecuación tal que un valor de x resulta dos de y iguales y de signos contrarios y biceversa, ademas x no puede ser mayor que a ni y mayor que b, es así que obtiene la ecuación que satisface todas las condiciones anteriores.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{3.21}$$

esta ecuación representa en coordenadas cartesianas a la elipse en su forma implicita con centro en el origen y ejes sobre los ejes coordenados.
El autor también propone determinar los valores para $F^{'}M$ y FM, para lo cual forma en la figura 3.15 los triángulos MFi y $MF^{'}i$ y asi obtiene

$$MF^{'2} = y^2 + (c + x)^2$$

y

$$MF^2 = y^2 + (c - x)^2$$

En donde c es la distancia del centro a los focos. Restando las ecuaciones anteriores y usando diferencia de cuadrados se obtiene:

$$(MF^{'} + MF)(MF^{'} - MF) = 4cx$$

Recordando que $(MF^{'} + MF) = z^{'} + z = 2a$ nos queda:

$$z^{'} - z = \frac{2cx}{a}$$

Ahora conocemos el valor de la suma y la diferencia de $z^{'}$ y z y podemos formar un sistema de ecuaciónes, del cual obtenemos:

$$z^{'} = a + \frac{cx}{a} \quad z = a - \frac{cx}{a}$$

Formando por lo anterior la ecuación: $z^{'2} = y^2 + (c+x)^2$ y haciendo $a^2 - c^2 = b^2$ se obtiene:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Que es la misma ecuación que la de la forma implícita.

El autor procede a dar algunas definiciones, para continuar trabajando sobre la teoría de espacios geométricos y dice:

> *Se llama centro de una curva el punto que divide en dos partes iguales un sistema de cuerdas. Se conocerá que una ecuación está referida a su centro, cuando cambiando en x, en -x, en y, en -y no se altera...Se tiene que observar que las condiciones que definen un lugar geométrico proporcionan un medio para establecer desde luego la ecuación natural de dicho lugar geométrico en un cierto sistema de coordenadas, y de cuya ecuación se deducen varias propiedades fundamentales...Si se atinede la ecuación, puede obtenerse por medida de ésta una pintura fiel del lugar geométrico que representa, y a tal grado que, cualquier modificación que sufra la ecuación la sufrirá la figura.*

Explica también que para encontrar un lugar geométrico mediante su ecuación basta con darle valores a x para obtener los respectivos de y y a más puntos, más precisas serán las ecuaciones. Es así que el autor una vez más hace al alumno entender a profundidad lo que se esta trabajando. Continúa el capítulo planteando y resolviendo los siguientes ejercicios, ejemplos, teormas y definiciones.

> *35.Trazar una tangente a la elipse por un punto, tomado en la curva.*
> *36.Obtener la ecuación normal de una elipse.*
> *37.Trazar una tangente a la elipse por un punto exterior.*
> *39.Teorema. Los ángulos que la normal forma con los radios vectores trazados a un punto de la elipse son iguales.*
> *40.Por un punto P tomado fuera de la elipse trazar una tangente.*
> *41.Diámetro. Se llaman diámetros a las lineas que tienen la propiedad de dividir en dos partes iguales a un sistema de cuerdas paralelas. Demostrar que los diámetors en la elipse son rectas que pasan por el centro.*
> *42.Ecuación polar de la elipse. Polo en el foco.*

Para ilustrar los ejercicios anteriores, se presenta a continuación un seguimiento de como resuelve el autor el ejercicio 40. Para este ejercicio el autor simplemente describe el procedimiento que debe seguirse para trazar la tangente que se pide. Comienza suponiendo que el problema esta resuleto, de este modo sabemos que la recta PN por ser tangente debe ser perpendicular a la recta SF', esto nos ayuda a reducir el problema a simplemente encontrar el punto S. De este modo podremos trazar SF' y luego su perpendicular PN.

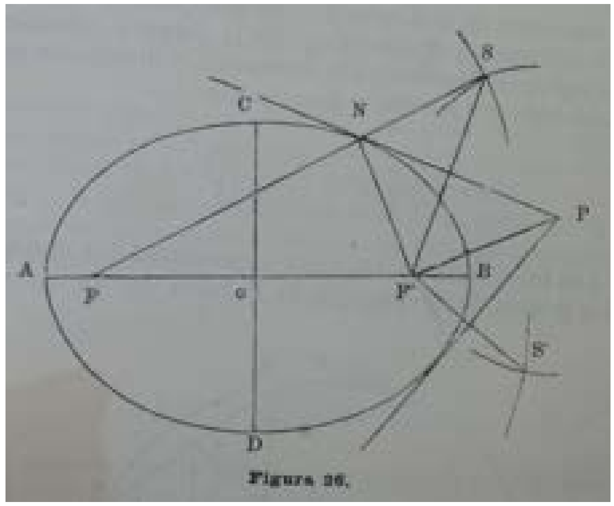


Figura 3.16: Imágen del libro

Para determinar a S, se traza desde P un arco de círculo de radio igual a PF', luego desde F y con radio $FS = 2a$ se traza otro arco de círculo. El punto en donde se intersecten estos arcos será S. Notese que le problema tiene dos soluciónes como se ve en la figura 3.16.

Hipérbola

Al terminar los ejercicios para la elipse define del mismo modo a la hipérbola, describiendola como lugar geométrico, presentando su gráfica y a partir de ella deduciendo la ecuación.
También estudia a profundidad sus caracteristicas de modo muy similar a como se hace para la elipse, aunque no plantea ni resuelve tantos ejemplos como en el caso anterior, si hace un buen desarrollo de la hiperbola, busca sus asintotas, sus tangentes, etc. Por último propone los siguientes ejercicios, los cuales no resuelve pero pueden resolverse siguiendo los ejemplos del capítulo anterior y realizando algunos cambios para ajustarlos a la hipérbola, obligando a los alumnos a una mayor comprension de ambos capítulos.
Ejercicios para la Hipérbola.

> *I. Demostar que los diámetros en la hipérbola son rectas que pasan por el centro.*

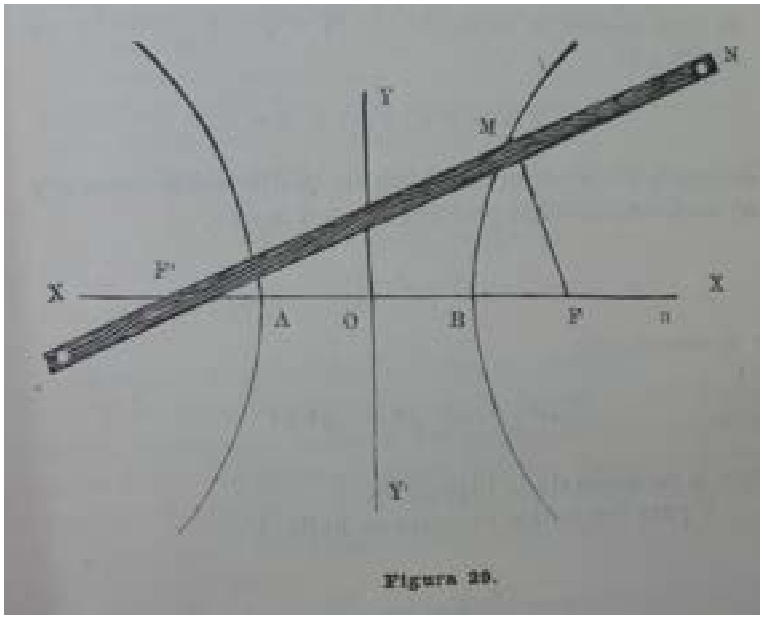


Figura 3.17: Imágen usada para deducir la ecuación de la hipérbola

II.Determinar la ecuación de la tangente a la curva representada por $xy = \frac{c^2}{4}$.
III.Determinar la ecuación polar de la hipérbola cuando el polo esta en el foco y construirla.
IV.Demostrar que la tangente a la hipérbola es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores trazados al punto contacto.(Téngase presente la propiedad de la bisectriz de un ángulo de un triángulo).
V.Trazar gráficamente una tangente a la hipérbola por un punto exterior.

Parábola

Define la parábola como, *las distancias de cualquiera de sus puntos a un punto fijo y a una recta fija son iguales.* Y a partir de esto deduce su ecuación, en este caso para coordenadas cartesianas.

Dice que por definicion y observando la figura 3.18, sabemos que $FS = SR$, aunque no lo explica, refiriendose a F como punto y R como recta, tam-

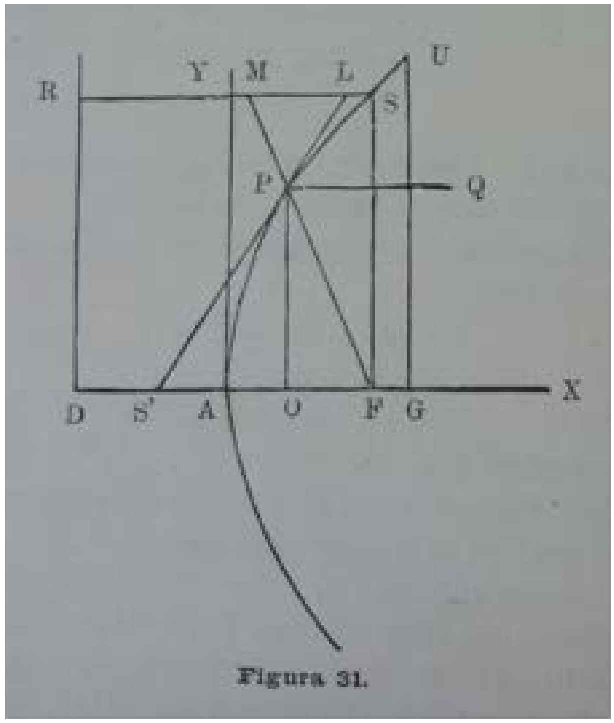


Figura 3.18: Imágen del libro

bién podría ser R el punto con el que se forma la distancia más corta a la recta desde el punto dado.
Haciendo algunas observaciones más llega a la ecuación $y = \sqrt{2px}$. Siendo p la distancia $FS = SR$.
Tras obtener la ecuación, Echeagaray propone el problema de construir la parábola por puntos y movimiento continuo a partir de la definición previa. Para trazar la parábola con puntos, el autor traza como se ve en la figura 3.18, la recta GU perpendicular al eje x, luego desde el punto F con un radio DG, que representa la distancia de G a la directriz DR, se traza un arco. El punto U donde se intersectan la recta GU y el arco, será entonces un punto de la curva. Con el mismo procedimiento se obtienen todos los otros puntos. Para trazar con movimiento continuo, se coloca una escuadra sobre la directriz, y con la ayuda de un hilo y un lapiz, recorriendo la escuadra se traza la parábola.

Continua así planteando y resolviendo ejercicios para la parabola y algunos otros lugares geométricos. Para concluir el capítulo, propone, pero no resuelve, los siguientes ejercicios:

> *I.Determinar la ecuación* $y - y^{'} = \dfrac{p}{y'(x - x')}$ *que representa la de una tangente a la parábola, cuando el punto está en la curva.*
> *II.Demostrar que la subnormal en la parábola es constante y aprovechar esta propiedad para trazar una tangente a la curva.*
> *III. Cuál es el valor de la subtangente a la parábola?*

Por último plantea y resuelve teoremas y ejercicios, estos son algunos ejemplos:

> *55. Los diámetros en la paráola son rectas paralelas al eje principal.*
> *56. Ecuación polar de la parábola, polo en el foco.*

Capítulo IV. Curvas trascendentes.

El autor comienza el capítulo diciendo lo siguiente:

> *Se llaman curvas trascendentes, a las que contienen sus ecuaciones, expresadas en coordenadas rectilíneas, funciones exponenciales, logaritmicas o circulares.*

En este capítulo el autor habla de la hélice, la espiral de Arquímedes, La espiral logarítmica, el cicloide y el senoide. Aunque no plantea ejercicios describe cada una, su movimiento y sus elementos.
Para la descripción anterior presentamos a continuación la descripción que hace el autor de la espiral de Arquímedes. Y dice:

> *Defínse la espiral diciendo que, mientras el radio AB describe una revolución, un punto A se transporta del centro A a la extremidad B de este radio, con un movimiento uniforme, de tal manera que el punto móvil que se encuentra en A al principio de la rotación de AB, se encuentra en B, cuando AB describe una revolución entera al rededor del centro A.*

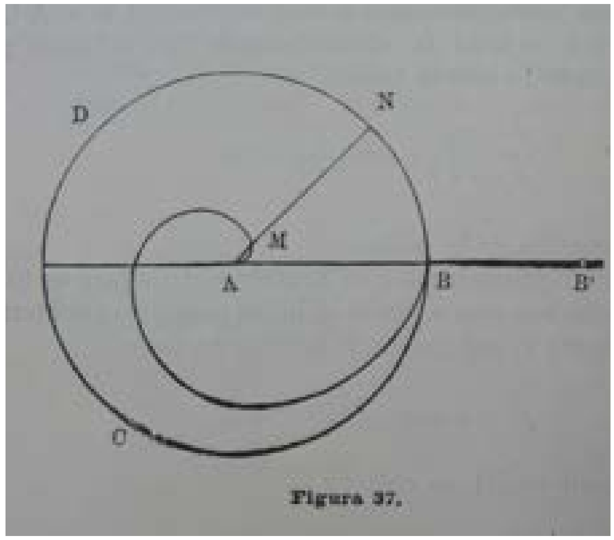


Figura 3.19: Espiral de Arquímedes presentada en el libro

A partir de esta definición el autor hace la siguiente relación:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{arc.NB}{BCDN}$$

En donde M y N representan los puntos en donde estará el punto móvil que parte de A según la posción del radio AB

Capítulo V. Secciones cónicas y cilíndricas

Este capítulo contiene unicamente cuatro páginas, en ellas incluye la imagen de la figura 3.20, la cual describe como un cono recto, cortado por un plano YOX, perpendicular del plano de las aristas SA y SB, a partir de esto obtiene la siguiente ecuación

$$y^2 = 2px \pm qx^2$$

con ella invita al lector a observar como se pueden obtener las ecuaciones estudiadas en los capítulos anteriores. Si hacemos q negativa tenemos la ecuación de una elipse, si q es positiva tenemos una hipérbola, si $q = 0$ tenemos una parábola y si $q = 1$ se forma la ecuación de una circunferencia.

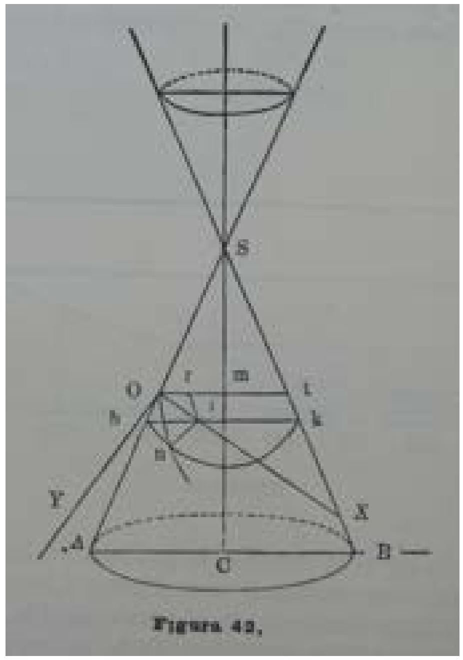


Figura 3.20: Imágen del libro

Capítulo VI

Este capítulo no tiene título consta unicamente de 6 páginas y en ellas plantea ejercicios a partir de la ecuación de segundo grado entre dos variables.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Esto con el fin de enfatizar el paso de consideraciones concretas a cosideraciones abstractas y vicersa.
Haciendo despejes y cambiando algunos valores de la ecuación anterior el autor muestra como deducir algunas curvas, tras una breve explicación plantea y resuelve algunos ejercicios.

Capitulo VII. Reducción de la ecuación de segundo grado entre dos variables.

Este capítulo contiene tres páginas en las que el autor continúa con el trabajo del capítulo anterior, trabajando sobre la misma ecuación y obteninedo diferentes curvas. Al final del capítulo plantea para el lector los siguientes ejercicios.

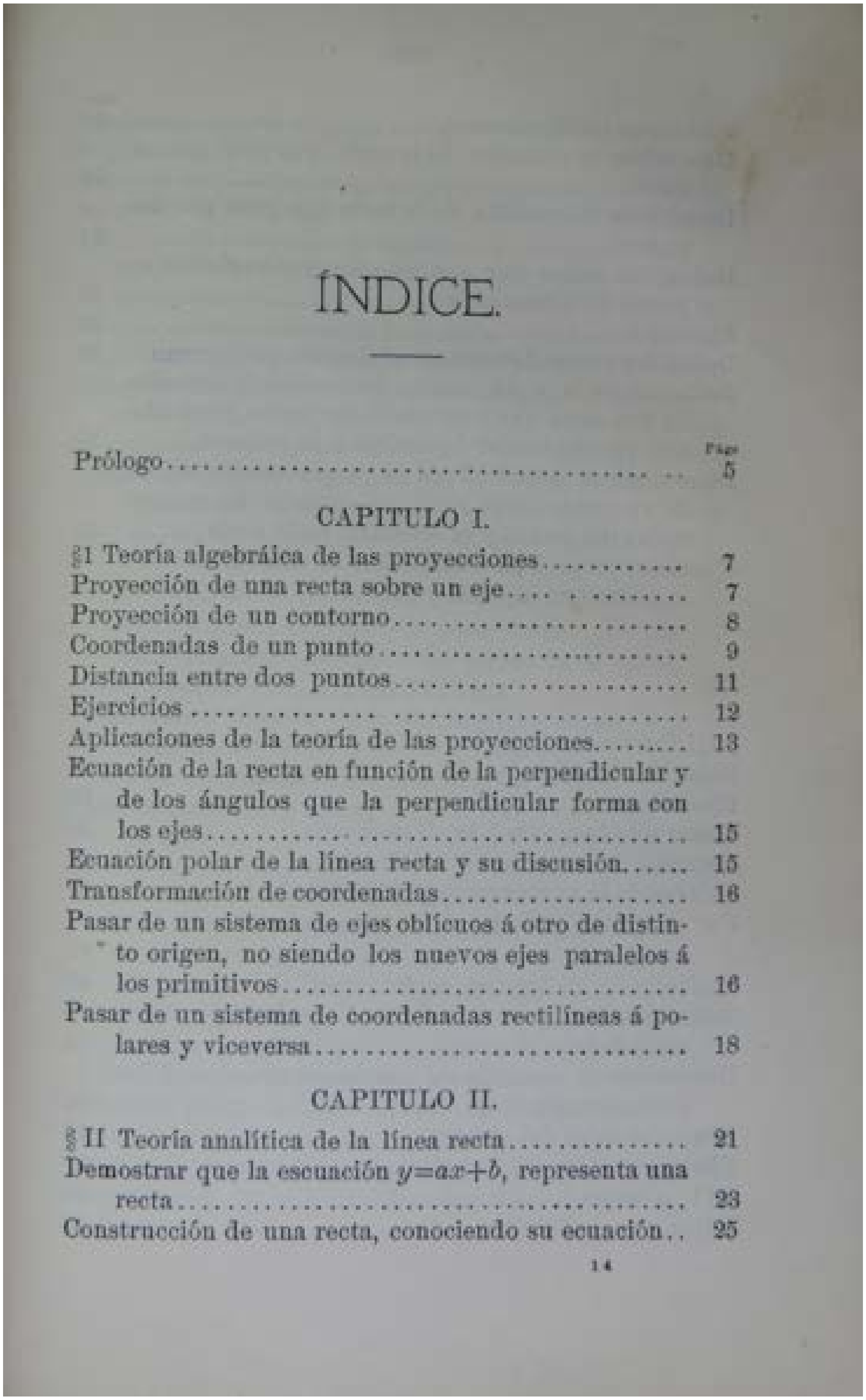
Ejercicios. Reducir las ecuaciones a sus formas más sencillas.

$$3x^2 - 8xy + 4y^2 - x + 4y + 6 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$$

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 87 + 9 = 0$$

Con esto termina el libro, a continuación presenta el indice. Después del indice, hay una sección de 35 páginas llamada **Resolucion de algunas cuestiones de Geometría Analítica propuestas en el texto**, la cual contiene las soluciones a los ejercicios planteados por el autor en el libro, esta sección no se presenta en el libro.



ÍNDICE.

14

CAPITULO III.

HIPÉBOLA.

II.

PARÁBOLA.

III.

CAPITULO IV.

Curvas trascendentes.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

FIN DEL INDICE.

3.4. Manuel Torres Torija. *Tratado de Matemáticas Superiores*

TRATADO

DE

Matemáticas Superiores

POR

MANUEL TORRES TORIJA

INGENIERO CIVIL Y ARQUITECTO

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA N. PREPARATORIA, DE MATEMÁTICAS SUPERIORES EN LA ESCUELA N. DE INGENIEROS, MECÁNICA GENERAL Y CONSTRUCCIÓN EN LA ACADEMIA N. DE BELLAS ARTES, MIEMBRO DE LA ASOCIACIÓN DE INGENIEROS Y ARQUITECTOS DE MÉXICO Y DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA "ANTONIO ALZATE."

OBRA IMPRESA BAJO LOS AUSPICIOS DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MÉXICO

TOMO I

SECCIÓN I.—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA.

„ II.—PRELIMINARES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

MÉXICO.

TIPOGRAFÍA ECONÓMICA.—2ª DE SAN LORENZO, NÚM. 32.

1914.

Manuel Torres Troija, ingeniero civil y arquitecto. Fue profesor de matemáticas en la escuela nacional preparatoria, impartió también clases de matemáticas superiores en la escuela de ingenieros y mecánica general, y construcción en la academia nacional de bellas artes. Fue miembro de la asociación de ingenieros y arquitectos de México y de la sociedad científica *Antonio Alzate.* Ademas realizo trabajos de remodelacóin dentro de la escuela nacional preparatoria.

Estudiaremos a continuación su libro *Tratado de Matemáticas Superiores*, este libro se divide en dos secciones, la primera *Complementos de álgebra*, en ella se tratan los temas:
Teoría elemental de los determinantes, Análisis combinatorio, Cálculo de los radicales, Funciones, Límites, Series, Números complejos y Logaritmos.

La segunda sección *Geometría analítica* es la que se estudiará más a detalle, por ser de interes para este trabajo.
Antes de entrar de lleno al estudio del libro, citaremos el prólogo de este, que fue escrito por el autor y describe el contenido del libro y el objetivo que busca para los estudiantes, esto nos ayuda a tener una idea de la forma de impartir las clases y abordar los temas.

Prólogo

> *La presente obra lleva por título Tratado de Matemáticas Superiores para estar de acuerdo con la Ley vigente que así denomina al curso en cuestión; la verdad es que su legítimo nombre debe ser, Tratado de Matemáticas, simple y sencillamente.*
> *El estudio de las Matemáticas puede emprenderse bajo dos aspectos característicos que suponen nociones preparatorias distintas. El primero tiende a un fin más bien especulativo y el segundo conduce a un objeto práctico.*
> *El aspecto especulativo interesa a los sabios y a aquellos que se dedican de preferencia al profesorado; el objeto práctico concierne a los Igenieros, Arquitectos y Constructores en general para referirise a un fin eminentemente técnico. Los primeros necesitan conocimientos más profundos y superirores que les permitan abordar despues materias tan arduas como la astronomía, la mecánica celeste, etc. Los segundo por el contrario, necesitan solamente un discreto dominio de las teorías fundamentales como base indis-*

pensable de su futuro ejercicio profesional.
Este tratado propende hacia este último rumbo; es de propósitos marcadamente técnicos; esta consagrado con especialidad a los Ingenieros y muy distante de pretender un alto carácter especultavio. No es sino el resultado sintético del curso que he tenido la honra de explicar durante algunos años en la Escuela Nacional de Ingenieros.
Está divididio en secciónes bien caracterizadas: La primera sección titulada Complementos de Álgebra incluye un cierto número de teorías de Álgebra que no se relacionan directamente con la resolución de las ecuaciones de primero o segundo grado, pero cuyo conocimiento es indispensable para poseer con suficiencia las leyes generales del Análisis; tales son por ejemplo las combinaciones, la de los números complejos, la de las series y la de los logaritmos.
La sección II se ocupa de la iniciación a la Geometría Analítica de dos y tres dimensiones.
El ilustre matemático, filosofo y critico C.A. LAISANT[10]*, en su interesante obra LES MATHEMATHIQUES. (Philosophie et Enseignement Pars 1898)*[11] *dice:* [12]

> *Se comprende facilmente que la mayoría de los conceptos generales de Geometría Analítica, com hemos indicado anteriormente, con respecto al método de las coordenadas cartesioanas son susceptibles a la extension a la Geometría en el espacio...*

Siguiendo este consejo racional y filosófico de Laisant, en la sección II van expuestos los preliminares de la Geometría Analítica plana y en el espacio de una manera simultanea en obvio de tiempo y sobretodo en beneficio de la exposición más rigurosa, más general, más directa, más metódica.
Las secciones III y V se ocupan del Cálculo diferencial y el inte-

[10]Charles-Ange Laisant (18411920) Matemático y político Frances
[11]Traducción: Las Matemáticas (filosofía y educación)
[12]La nota siguiente aparece originalmente en Frances, se traduce le principio de esta para fines prácticos

gral.
Estas dos secciones son quizá las de mayor importancia práctica para el Ingeniero; contienen los elementos estrictos e indispensables para abordar más adelante los estudios de la Mecánica General, la Estabilidad de las construcciones, la hidraulica, la electicidad, etc
La seccin IV trata de la Teoría general de las ecuaciones (Álgebra superior). Hace tiempo este estudio revestía gran extensión e importancia y dado su marcado carácter abstracto era naturalmente un escollo para la mayoría de los estudiantes.
Ahora bien: Ciertos métodos modernos principalmente basadoes en el Cálculo gráfico y en la Nomografía[13] *han permitido simplificar notablemente la resolución de las ecuaciones y por lo mismo en este tratado se ha querido restringir esta sección a sus estrictos límites (por tratarse de un curso técnico) y se han consierado tan solo las nociones, teoremas y leyes indispensables. Por otra parte, el Indice presentado en forma analítica señala los detalles particularizados de las diversas materias.*
En suma, este tratado intenta conservar la estructura clásica en su exposición, limitándose a desarrollar preferentemente los puntos de aplicación práctica y prescindiendo a menudo de otros muy interesantes y fecundos; pero que más bien son el resorte de la ciencia pura.
Inútil me parece advertir que poco o nada original contiene; ya por las naturales deficiencias del autor, ya por la perfección que caracteriza a la Matemática moderna; he consultado los autores más autorizados; Serret, Briot Stoffaes, Bertrand, Apell, Carnoy, Gilbert, etc. Sin prejuicio de ocurrir a los trabajos y memorias origniales cuando ha sido necesario.
Para concluir, debo consagrar un recuerdo de afecto y de reconocimiento a mis alumnos del curso de 1912 que me estimularion a preparar los apuntes que más tarde ha visto a convertirse en estas páginas; apuntes que sirvieron de germen a este tratado y que esos alumnos tomaron asiduamente en forma de notas para

[13]La nomografía es una rama de la geometría analítica que se ocupa de representar gráficamente los valores de una función. Su origen data desde 1797 pero fue hasta 1884 cuando se perfecciono el uso de esta rama.

ir formando el esqueleto de esta obra. Debo, pues mirarlos por su laboriosidad, empeño y dedicación como afanosos colaboradores de este modesto trabajo.
Así mismo hago patente y pública mi gratitud al Sr. Dr. Alfonso Pruneda, cultísimo e inteligente Jefe de al Seccióon Universitaria de la Secretaría de Instrucción Pública y Bellas que en su carácter de Consejero de la Universidad N. de México, presento la moción para que este tratado fuese impreso bajo los honorables auspicios de la Universidad; a los demás consejeros que me honraron aprobando la propuesta y a la comisión administradora de fondos que me ha allanado empeñosamente las naturales dificultades que se ha presentado para la publicación de la obra.
Por último, debo hacer mención muy especial, colmada de afecto y agradecimiento, del Sr. Prof. Sotero Prieto, matemático distinguidísimo, de alto relieve, que con verdadero derroche de bondad y galantería ha cooperado a la relización de este libro revisando los origiales, corrigiendolos, sugiriendo cambios trascendetales y elaborando a menudo en beneficio de mi obra teorías completas presentadas con el rigor y la elegancia propios de su reconocida competencia.
Si de algún provecho puede ser mi labor para el estudiante en general y en particular para los que ejercen la noble carrera de Ingeniero, quedaran coladas, con amplitud mis aspiraciones.

Sección II. GEOMETRÍA ANALÍTICA

Capítulo I. Sistemas coordenados

Posición de un punto en una recta, en un plano y en el espacio. En esta sección el autor explica, basándose en algunas definiciones de álgebra, qué representa un punto, y como ubicarlo para el plano y el espacio. Esto con el fin a introducir al lector a los elementos y nociones básicas de la geometría. Utiliza lo aprendido en la primera sección de este tratado, como segmentos y longitud, haciendo notar que para encontrar las coordenadas de un punto en un plano basta con calcular la longuitud y sentido del segmento que va del punto hacia cada uno de los ejes, en forma paralela al eje contrario. Definiendo los ejes como segmentos $-X, +X$ y $-Y, +Y$.

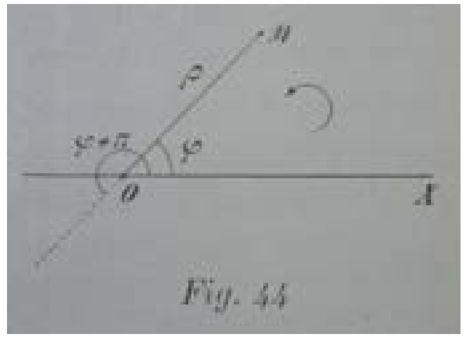
Para pasar al espacio, describe la misma idea pero para 3 ejes interesep-tandose en el origen, de este modo introduce al lector en la forma de trabajar en el espacio.
Si se quieren encontrar, por ejemplo, las coordenada de un punto cualquiera M se trazan rectas paralelas a los ejes, hasta cortar al eje opuesto en un punto, que será su coordenada. Y para encontrar un punto en el espacio, el autor dice que en vez de trazar líneas paralelas, se trazan planos, paralelos al formado entre dos de los ejes y que corten al tercero en algún punto Q, de tal forma que Q y M estén en el mismo plano, de esta manera la longuitud del segmento QO, siendo O el orígen, será la coordenada correspondiete al eje en el que se encuentra Q, sin perdida de generalidad se realiza el mismo procedimiento para los demás ejes.

Concluye esta sección diciendo:

> *Los puntos de una recta son tales que cada uno de ellos corresponde a un número real x: se dice que los puntos de una recta forman un continuo de una dimensión. Los puntos de un plano son tales que cada uno de ellos corresponde a un sistema formado por dos elementos simples que son dos números reales x, y; se dice que los puntos de un plano forman un continuo de dos dimensiones. Los puntos del espacio son tales que cada uno de ellos corresponde a un sistema formado por tres elementos simples que son tres números reales x,y,z; se dice que los puntos del espacio forman un continuo de tres dimensiones.*

Diversos sistemas de coordenadas. Torres Torija explica a continuación que existen diversos sitemas de coordenadas en los cuales puede fijarse o definirse la posición de un punto o una serie de estos. Explica entonces las coordenadas polares con las imágenes de la figura 3.21 y hace una análogia al caso anterior diciendo:

> *El sistema de referencia lo forman un punto fijo O llamado polo y un eje OX llamado eje polar.*
> *Las coordenadas polares del punto M son el radio vector p que es la distancia OM y la inclinación π del radio vector, que es el ngulo XOM.*
> *Dadas las coordenadas ρ,π el punto M queda bien determinado , pero a un punto M no corresponde un sistema único. Si para el*



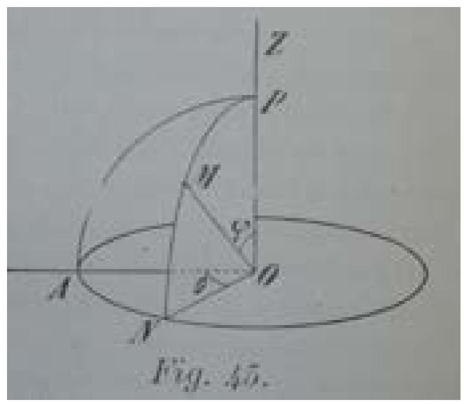


Figura 3.21: Imágen del libro

radio vector solo se admiten valores positivos al miso punto M, corresponden coordenadas:

$$...(\rho, \phi - 4\pi), (\rho, \phi - 2\pi), (\rho, \phi), (\rho, \phi + 2\pi), ...$$
$$(\rho, \phi + 4\pi)$$

Si para el radio vector se admiten valores negativos, a las coordenadas anteriores hay que agregar las siguientes:

$$...(-\rho, \phi - 3\pi), (-\rho, \phi - \pi), (-\rho, \phi + \pi), (-\rho, \phi + 3\pi)...$$

La correspondencia de los puntos del plano con los sistemas de dos números, ρ, π es uniforme y continua en el sentido coordenadas-punto; pero en el sentido opuesto, punto-coordenadas, la correspondencia es multiforme y deja de ser continua en la vecindad del polo, porque puntos muy cercanos pueden diferir en un ángulo cualquiera.

El autor define así como encontrar e interpretar las coordenadas polares y algunas de las fallas que pueden presentarse al utilizar este sistema. Hace la misma analogía en el plano y explica también la coordenadas *bipolares y bivectoriales* , como se muestra en la figura 3.22, éstas se definen tomando dos polos P y P' y trazanado radio vectores al punto que se quiere determinar llamémoslo M.
De modo que los ángulos fomados por PM y $P'M$ con el eje PP' son las coordenadas de M.
Explica también las coordenadas *polo cartesiano* las cuales se construyen

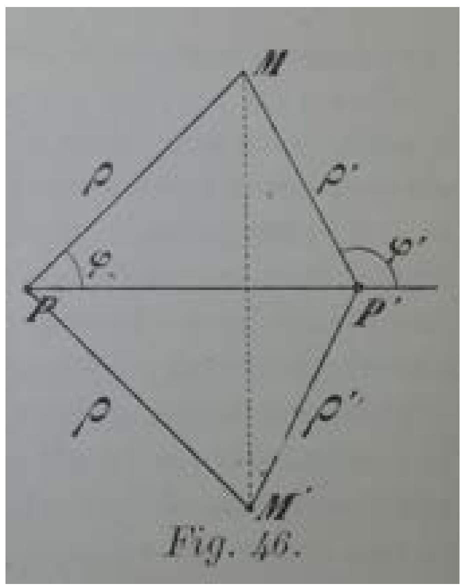


Figura 3.22: Imágen del libro

usando un polo y un eje. Y por último las coordenadas *curvilieneas*, para las cuales el autor no entra en detalle, por la dificultad que sugiere esta representación. Explica solamente que deben tenerse dos sitemas de curvas, de modo que un punto M en una región de este plano pueda tomar valores de cada uno de estos sistemas.
Notemos entonces que todos los casos anteriores son casos particulares de este sistema de curvas. Por ejemplo, el sistema de coordenadas polares es una familia de círculos concéntricos al polo. De modo que se obtienen las dos familias de curvas que se necesitan, una de ellas los radios de este circulo (ρ) y la otra las rectas que cortan al polo en distintos ángulos (π).

Representación geométrica de una ecuación entre dos variables. La idea del autor en este capítulo es la de definir una ecuación, no solo utilizando algunos puntos que se encuentren en ella sino definiendo rigurosamente el lugar que representan todos sus puntos, los cuales especifica son infinitos. Explica esta noción dando un ejemplo, en el que utilizando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - y = -1$$

$$x + 2y = 5$$

busca el punto de intersección, no por el ejercicio en si sino por las ideas que plantea con el. Para cada una de las ecuaciones dice que pueden encontrarse puntos que pertenezcan a ellas, haciendo variar los valores de x y encontrando pares de puntos que verifiquen cada una de las ecuaciones.
Menciona que no es importante saber si la ecuación es una recta y por tal motivo no la define por ahora como tal. Pero si encuentra sus intersecciones con los ejes haciendo respectivamente x y y iguales a cero, con el fin de ayudar a que el lector identifique el posicionamiento de las curvas representadas por esta ecuación.
Al hacer lo mismo para ambas ecuaciones del sistema, dice que para encontrar el punto M donde las rectas se intersectan basta con buscar un par de coordenadas que satisfagan ambas ecuaciones a la vez, de modo que este punto debe estar en ambas ecuaciones y por lo tanto es el punto en el que se intersectan.
Deja algunas nociones borrosas, ya que al no referirse exactamente a una recta deja abierta la posibilidad de varios puntos de intersección, pero como mencionamos anteriormente su objetivo no es resolver el problema sino introducir la idea de representar una ecuación de forma geométrica.
Tras hacer estas alcaraciones el autor dice que una sola ecuación no es suficiente para definir un punto pero si para marcar una sección restringida del plano, un lugar geométrico de puntos que satisfacen una ecuación.
Dice que un lugar geomŕico es generalmente una línea curva continua $F(x, y) = 0$ en la cual se pueden hacer variar x o y para obtener los puntos correspondientes para representar tal lugar.
Concluye la sección diciendo:

> *Esta correspondencia entre una ecuación con dos variables y una linea recta o curva es una noción de importancia considerable que*

> *Descartes introdujo en la ciencia; se le considera como el concepto fundamental de Geometría Analítica.*

Representación geométrica de una función de una variable y Representación geométrica de una función de dos variables independietes. El autor dice, que si en una ecuación como las anteriores entre las coorenadas x y y puede hacerse un despeje tal que $y = f(x)$ debe considerarse a una variable como función explicita de la otra, que llamaremos variable independiente.
De modo que esta ecuación es la representación geométrica de $f(x)$.
La misma idea si escribimos una función $F(x, y) = c$ podemos encontrar el lugar geométrico que satisface esta ecuación.
Referente a esto el autor dice *Un lugar geométrico expresa una propiedad común en todos los puntos que lo toman.*
Da algunas secciones más en las que ayuda al lector a entender mejor los lugares geométricos y sus propiedades, construyéndolos a partir de condiciones que los satisfacen. Plantea así algunos problemas, como el siguiente:
Distancia entre dos puntos.
Tomemos dos puntos $M_1 = (x_1, y_1)$ y $M_2 = (x_2, y_2)$ en un sistema de ejes

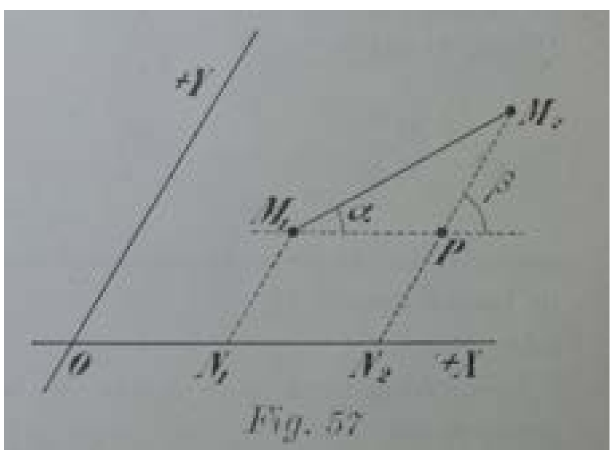


Figura 3.23: Imágen del libro

oblicuos, siendo β el ángulo entre los ejes. Formamos el triángulo M_1PM_2, tomamos un punto P tal que M_2P sea paralelo al eje Y y M_1P sea paralelo al eje X. Luego el ángulo M_1PM_2 es $180 - \beta$ y por ley de cosenos tenemos:

$$(M_1M_2)^2 = (M_1P)^2 + (PM_2)^2 - 2\overline{M_1PPM_2}cos(\pi - \beta)$$

y representando como ρ la distancia buscada queda:

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)cos\beta}$$

Para ejes rectangulares $\beta = 90°$ y la ecuación queda $\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Para tres dimensiones resolvemos también este problema pero únicamente para el caso particular de ejes rectangulares.
Buscamos la distancia de 2 puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_{2)}$. Tomamos dos puntos P y Q de modo tal que PQ sea paralela al eje X, PM_1 sea paralela al eje Y y M_2Q paralela al eje z, formamos así dos triángulos rectángulos. M_1PQ y M_1QM_2 y tenemos por pitágoras:

$$(M_1Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

y

$$(M_1M_2)^2 = (M_1Q)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

luego

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Siguiendo esta linea de trabajo plantea y resuelve más ejercicios como: Dividir un segmento en una recta dada, calcular el área de un polígono plano conociendo las coordenadas de sus vértices o calcular el ángulo de dos rectas y con esto concluye el capítulo.

Capítulo II. Segmentos y proyecciones

El autor empieza el capítulo definiendo segmentos consecutivos, ángulos y ángulos consecutivos. Y hace las siguientes aclaraciones:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE} \tag{3.22}$$

en particular:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \tag{3.23}$$

o bien:

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \tag{3.24}$$

Siendo A,B,C,D,E puntos sobre una misma recta.
Con definiciones similares trabaja para los ángulos.

Explica después las proyecciones oblicuas o cilindricas en el espacio, definiendo que para un eje $X^{'}X$ y un plano ortogonal P la proyección de un punto M en el eje $X^{'}X$ es el punto en donde se intersectan $X^{'}X$ y un plano $P^{'}$ que contiene a M y es paralelo a P. Lo mismo para un segmento culaquiera MN proyectando uno a uno los puntos del segmento.
Define también a las proyecciones ortogonales, las cuales reciben este nombre cuando el plano P proyectane es perpendiculare al eje de proyección. Para las proyecciones sobre un plano los planos proyectantes se reducen a ejes proyectantes, siguiendo las mismas nociones que en el espacio.
Plantea así el teorema general de las proyecciones.

Teorema General. La proyección oblicua de un segmento de recta sobre un eje, es igual al producto del segmento por la relación de los senos de los ángulos que forman: por una parte, el segmento de recta con su proyección sobre el plano proyectante y por la otra esta misma proyección y el eje de proyección considerado. Por la figura 3.24 se tiene que para el triángulo ABC:

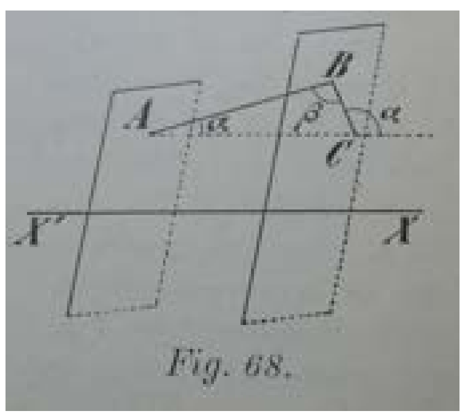


Figura 3.24: Imágen del libro

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{sen\beta}{sen\gamma} \quad \overline{AC} = \overline{AB}\frac{sen\beta}{sen\gamma}$$

como corolario menciona, que si las proyecciones son ortogonales, es decir

$\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ tenemos:

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \frac{sen\beta}{sen\frac{\pi}{2}} = \overline{AB}sen\beta = \overline{AB}cos\alpha$$

con esto se concluye que la proyección ortogonal de un semgento de recta sobre un eje es igual al producto de este segmento por el coseno del ángulo que forma con la parte positiva del eje de proyección. Esto nos lleva al siguiente corolario:

CorolarioII. Si el segmento y el eje están situados en un mismo plano la proyección oblicua del segmento sobre el eje es igua al producto de la longuitud del segmento por la relación de los senos de los ángulos que forman; por una parte el segmento con la proyectante y por la otra la proyectante con el eje de proyección. De modo que:

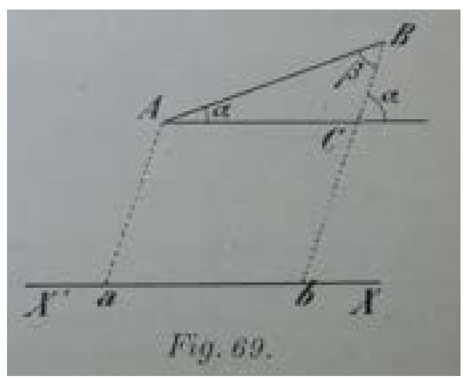


Figura 3.25: Imágen original del Corolario II

$$proyec\overline{AB} = \overline{AB}\frac{sen\beta}{sen\gamma}$$

y para el caso ortogonal

$$\overline{AC} = \overline{AB}cos\alpha$$

A continuación hacemos una síntesis de la demostración de otro teorema para proyecciones que presenta el autor, este teorema se utiliza constantemente durante el resto del libro.

Teorema. La suma algebraica de las proyecciones de los lados de un contorno poligonal cerrado sobre un eje cualquiera es nula.

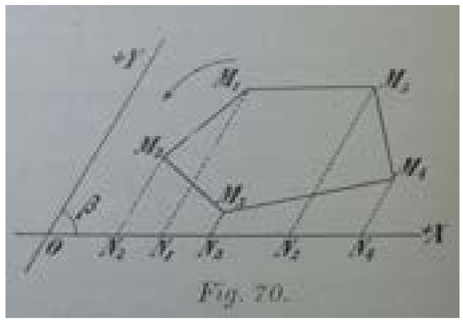


Figura 3.26: Imágen del libro

Tomemos el contorno $M1, M2, M3, M4, M5$ como se muestra en la figura 3.26 y lo proyectamos sobre el eje OX quedan así determinados los siguientes segmentos sobre el eje.

$$\overline{N_1N_2}, \overline{N_2N_3}, \overline{N_3N_4}, \overline{N_4N_5}, \overline{N_5N_1}$$

Hemos definido anteriormente que:

$$\overline{N_1N_2} + \overline{N_2N_3} + \overline{N_3N_4} + \overline{N_4N_5} + \overline{N_5N_1} = 0$$

Luego sustituyendo como sigue:

$$pr\overline{M_1M_2} + pr\overline{M_2M_3} + ... + pr\overline{M_4M_5} + pr\overline{M_5M_1} = 0$$

El teorema queda demostrado.
El autor nombra a las lineas $M_1M_2, ..., M_5M_1$ componentes geométricas del contorno poligonal; y a la linea M_5M_1 la llama componente geométrica del cierre. Concluyendo así que si el contorno es abierto esta misma será la resultante geométrica.

El autor hace también la siguiente generalización del teorema de Pitágoras usando proyecciones.

Teorema. La suma de los cuadrados de las proyecciones ortogonales de un

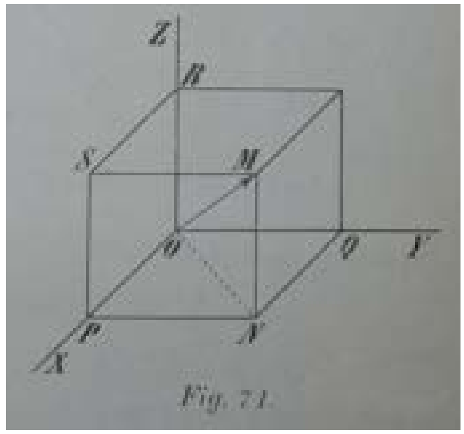


Figura 3.27: Imágen del libro

segmento de recta sobre tres ejes rectangulares es igual al cuadrado de la longuitud del segmento.

La demostración es como sigue: Tomemos el vector OM en R^3 y lo proyectamos en el plano XY como se ve en la figuraX. De modo que OMN es un triángulo rectángulo y tenemos:

$$\overline{OM^2} = \overline{ON^2} + \overline{NM^2}$$

al ser OPN un triángulo rectángulo y por ser $NM = OR$ nos queda:

$$\overline{OM^2} = \overline{OQ^2} + \overline{OR^2}$$

y tomando $OM = \rho$, $OP = x$, $OQ = y$ y $OR = z$ resulta:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

EL autor continua platneando problemas y resolviéndolos usando proyecciones, con el fin de aclarar el concepto y sus aplicaciones, ya que será muy importante en el resto del libro.

Capítulo III. Representación de lineas y superficies

Para este capítulo se plantean primero algunos prelimintares, usando una definiciónes dada previamente en el libro el autor dice que:

$$F(x, y, z) = 0$$

o bien

$$z = F(x, y)$$

Representan en general una superficie.

Ecuaciones aisladas. Para comenzar a explicar este tema el autor propone tres lugares geométricos dados por las ecuaciones, $X = k$, $Y = k'$, $z = k''$ que representan , en dos dimensiones para los primeros dos casos rectas paralelas a los ejes y y x, y para tres dimensiones planos paralelos a los planos YOZ, XOZ y XOY respectivamente.
Define los casos particulares en los que $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ y también:

$f(x) = 0$,$f(y) = 0$ y $f(z) = 0$

definiendo familias o sistemas de rectas y planos paralelos, basándose en esto el autor llega a la siguiente definición.

> *Sean las ecuaciones de grado m, tomadas separadamente:*
>
> $$f(x, y) = 0, \quad f(x, z) = 0, \quad f(y, z) = 0$$
>
> *representarán líneas planas respectivamente situadas en los planos XOY, XOZ, YOZ.*
> *Mas como cada una de estas funciones es independiente de la tercera coordenada, represeantarán asimismo cilidnros[14]. Apoyados respectivamente sobre los planos XOY,XOZ,YOZ y cuyas generatices serán paralelas al tercer eje correspodiente.*
> *Así por ejemplo la Figura 77[15] indica que la ecuacin $f(x, y) = 0$ representa la curva NN' o el cilindro $NN'MM'$.*

Ahora toma las ecuaciones anteriores pero de grado uno de modo que $f(x, y) = 0$ y se forma la ecuación $Ax + By + C = 0$ de donde

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = ax + b \tag{3.25}$$

La cual se sabe pertenece a una línea recta, por las construcciones hechas en el primer capítulo.
Esta ecuación se refiere a un lugar geométrico tal que la ordenada de cada

[14]Se define un cilindro como uan superficie cuadrática paralela a una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana cerrada o abierta denominada directriz.

[15]77 es el número original de la figura del libro 3.28 es el correspondiente para trabajo.

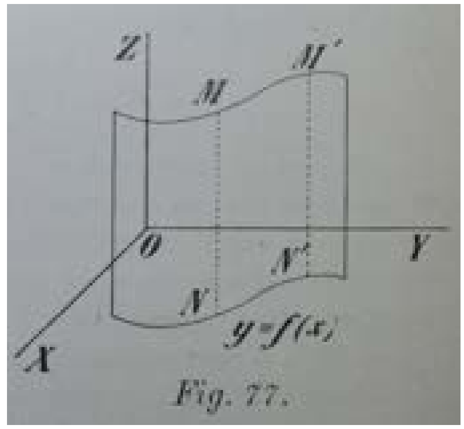


Figura 3.28: Imágen del libro

punto es igual a la absias por una constante más otra constante.

Dicho esto, el autor se propone demostrar usando triángulos semejantes la unicidad de esta ecuación y concluye que una función $f(x, y) = 0$ de grado uno representa siempre una línea recta.

Concluye este capítulo haciendo algunas aclaraciones y explicando algunos ejemplos como los que se citan a continuación:

1.-Sea la ecuación de tres variables de grado superior al primero $f(x, y, z) = 0$ o bien $z = F(x, y)$ ya hemos visto que esta representa una superficie.
Así por ejemplo, la esfera es el lugar geométrico de puntos equidistantes del centro, por lo tanto, si suponemos el centro en el origen la ecuación $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ será la de la esfera siendo ρ el radio y x, y,z las coordeadas de un punto perteneciente a la superficie.

2.- Si la ecuación entre tres variables $f(x, y, z) = 0$ es de primer grado, la superfcie es un plano.
En efecto le daremos a la ecuación la forma: $Ax+By+Cz+D = 0$ cortemos esta superficie que vamos a precisar, por un plano $Z = k$, paralelo al XOY y tendremos: $z = k$, $Ax + By + Ck + D = 0$

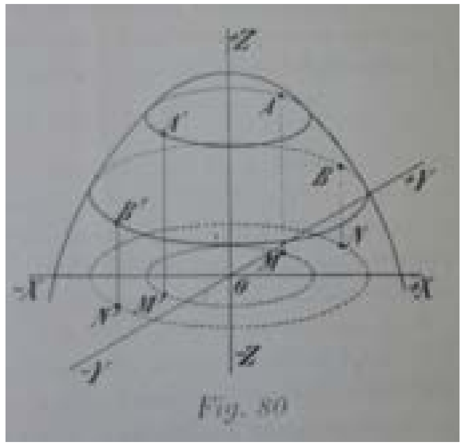


Figura 3.29: Imágen del libro

> *Esta intersección es pues una línea recta pralela al plano XOY. Si k varia paulatinamente, la intersección va moviéndose paralelamente a si misma ab, cd, .; luego la ecuación propuesta es el lugar geométrico de las posicions sucesivas de una línea recta que se desliza paralelamente a si misma.*
> *Finalmente si se hace $z = 0$, en la ecuación resulta $By+Cz+D = 0$.*
> *Como ecuación de la intersección de la superficie que tratamos con el plano YOZ, y que corresponde, como se ve, a una linea recta. Luego en definitiva la ecuacion $f(x, y, z) = 0$ entre tres variables, cuando es de primer grado, respreseenta un plano que en general corta a los tres ejes coordenados.*

Explica aún más características de lugares geométricos como:
Ecuaciones simultaneas. Las cuales,dice, se representan por la intersección de dos lugares geométricos $f(x, y, z) = 0$ y $F(x, y, z) = 0$. Esta intersección forma una linea recta real o imaginaria.

Las ramas de curvas o mantos. Siguiendo la definición del autor,tomemos el ejemplo de la parábola $y = x^2$ en donde $x = \pm\sqrt{y}$ esto significa que para cada valor de y resultan 2 valores para x, iguales y de signos contrarios, estos corresponden a dos ramas que se unen en el origen. Estas ramas pueden también no tocarse como en el caso de la hipérbola, lo miso para el caso de las superficies cuando para los mismos valores de x e y resultan dos o más

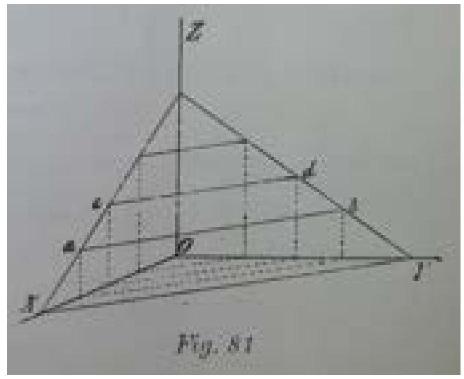


Figura 3.30: Imágen del libro

para z y si para pasar de uno a otro de estos puntos no es necesario salir de la supuerficie, se dice que la superficie es continua, pero si por el contrario para pasar de un punto a otro se tiene que salir de ella entonces la superficie tendrá diversoas mantos u hojas.

Trazos de una superficie. Se refiere a las intersecciones de una superficie con los ejes. estudia también las proyecciones de una linea y los puntos reales e imaginarios.
El autor concluye este capítulo con algunas aplicaciones y ejemplos de lo tratado anteriormente.

Capítulo IV. Unidades y Homogeneidad

Citaremos a continuació algunos párrafos de la intorucciόon que da el autor, ya que vale la pena destacar las explicaciones que da para el capítulo.

> *Las longitudes de líneas (o distancia entre puntos) son cosas entre las cuales puede haber igualdad. La igualdad de dos longitudes tiene para nosotros un significado preciso; lo mismo sucede con la igualdad entre dos áreas, entre dos volúmenes, entre dos ángulos, entre dos velocidades, etc. Por el contrario la igualdad entre dos sensaciones agradabels o dolorosas, no tiene un sentido preciso.*

Menciona tambié:

> *Para cosas de cualquier especie se fija siempre el significado preciso de la palabra igualdad, de tal manera que dos causas iguales a una tercera sean iguales entre si. Las longuitudes agregadas unas a otras dan nuevas longuitudes; lo mismo sucede con los volúmenes, con los ángulos, con los intervalos de tiempo, etc. Siempre que se define el sentido preciso de la palabra agregar aplicado a cosas conocidas o a nuevas, se hace de tal modo, que el resultado de agregar varias cosas entre si, sea independiente del orden en que se efectúan las operaciones.*
> *Todas las cosas para las cuales las palabras igualdad y agregar tienen significación precisa están sujetas a las condiciones expresadas más arriba, se llaman cantidades.*
> *Se dice que una cantidad A es mayor que otra cantidad B, cuando A resulta de agregar a B una cantidad C; en este caso se dice que B es menor que A.*
> *Cantidades de la misma especie son cantidades que pueden ser iguales o unas mayores que las otras y que se pueden agregar entre si.*

El autor da también las definiciones de número, medir y unidad.
Hace una aclaración diciendo que si la unidad=1 una unidad agregada a otra es igual a 2 y si agregamos una unidad más a estas el resultado sera igual a 3,etc. De este modo define los enteros.
Dice que para medir las cantidades que no pueden obtenerse agregando unidades se introducen los números no enteros siendo estos las fracciones y los inconmensurables, sin embargo no entra más en el tema diciendo que no es de interés de la materia que se estudia y que el alumno ya debería conocerlos.

Continúa describiendo el objetivo del capítulo en el cual, desea estudiar las unidades y las modificaciones que sufren los números que miden las cantidades cuando se hace un cambio de unidades, dice por ejemplo que una cantidad expresada como $A = un$, en donde n es el número que mide la cantidad y u la unidad empleada. Por ejemplo 2m son dos metros.
Procede a explicar distitntos tipos de unidades como de longuitud, tiempo y como se definien. Luego habla sobre el cambio de unidad y dice

> *Para medir las cantidades de la misma especie $A, B, C, ..$se elige una unidad arbitraria u y se determinan los números que sirvan*

> *para designar las cantidades:*
> $A = un,\ B = n1u,\ C = n2u,.;$
> *Ahora calculemos los números que designen las mismas cantidades midiéndolas como unidad* $u^{'}$ *diferente de* u*. Siendo* $u^{'}$ *una cantidad forzosamente de la misma especie que* $A, B, C,$ *podrá valuarse con la antigua unidad u, siendo* $U^{'} = ku$

Con esto explica, que una cantidad puede medirse en base a distintas unidades, respetando siempre la relación entre la nueva unidad y la anterior. Hace más aclaraciones sobre esta idea pero todas simples. Da el ejemplo del metro y el pie como unidades de medida de longuitud y a partir de ellos forma las siguientes igualdades:
Una milla= 5280 pies= 5280(0.3048m)=1609.35m
Un kilometro=1000m=1000(3.2808pies)=3280.8pies

Luego habla de las unidades derivadas como el área, volúmenes, velocidad, aceleración, etc. Profundiza en algunas de estas unidades explicando los elementos de cada una de ellas y formandolas a partir de la longuitud y el tiempo, por ejemplo.

> *Velocidad: La noción de velocidad es muy secilla cuando se trata de un punto animado de movimiento uniforme.*
> *Se dice que el movimiento es uniforme cuando el móvil recorre espacios iguales en intervalos iguales de tiempo, cualesquiera que sean estos intervalos.*

Da las siguientes propiedades, para hacer notar que estas permiten que la velocidad se defina como una cantidad.

> *La velocidad de un móvil es la suma de las velocidades de otros dos cuando en un mismo intervalo de tiempo recorre una distancia igual a la suma de las recorridas por otros dos.*

Para ejemplificar el autor mide la velocidad tomando como unidad la de un punto animado de movimiento uniforme que en el tiempo $t = ns$ recorre el espacio $x = mc$ y llamandola v.
De ahí que $vx = vmc$.

Para medir dicha velocidad tomemos un móvil que en el intervalo $t_1 = n_1 s$ recorre la distancia $x_1 = m_1 c$. Este móvil recorrerá en el intervalo de 1 segundo s la distancia $\frac{m_1}{n_1}c$ y en el tiempo $t = ns$ recorrera la distancia:

$$\frac{nm_1}{n_1}c = \frac{nm_1}{n_1 m}x$$

por consecuencia la velocidad v es:

$$v = \frac{nm_1}{n_1 m} = \frac{m_1}{n_1}\frac{n}{m}$$

luego haciendo $k = \frac{n}{m}$ tenemos

$$v = k\frac{m_1}{n_1}$$

De este modo si se adopta como unidad de velocidad la de un punto que en la unidad de tiempo recorre a la unidad de distancia, el número que expresa la velocidad de cualquier móvil es igual a la relación de distancia y tiempo.
Explica otros conceptos como aceleración y velocidad angular. Luego explica algunos movimientos a los que llama, *Movimiento particular* como la rotación de la tierra, empleando velocidad angular. Todo este estudio con el fin de mostrar como algunos cambios en las unidades, provocan cambios en las ecuaciones.
Procede así a estudiar la homogeneidad. La cual define como la propiedad de algunas ecuaciones de no perder la relación entre sus variables cuando se traslada a un nuevo sistema de unidades. Esta definición surge naturalmentente con todos los trabajos previos que hace el autor.
Define un polinomio homogéneo como el que tienen todos sus terminos del mismo grado por ejemplo:

$$a^3bxy^2 + b^7 + ax^6 + b^4x^2y + x^3y^4$$

y dice:

> *Si un polinomio es homogéneo, la substitución de ka en lugar de a y kb en lugar de b, intorduce un favor común igual a una potencia de k cuyo exponente es el grado del poliniomio.*

Así para una función homogénea cualquiera:
$F(a,b,c,,x,y,z)$ se tiene $F(ka,kb,kc,.,kx,ky,kz) = knF(a,b,c,,x,y,z)$
En donde n es el grado de la función.
Por ejemplo:
Tomamos la función $A(x,y,a,b,c)$ del ejemplo del libro y la evaluemos en $A(kx,ky,ka,kb,kc)$ de modo que nos queda

$$A = \frac{x^2+y^2}{a^3+b^3+c^3} = \frac{(kx)^2+(ky)^2}{(ka)^3+(kb)^3+(kc)^3} = \frac{k^2(x^2+y^2)}{k^3(a^3+b^3+c^3)} = k^{-1}A$$

Luego la fraccin es homogenea y su grado es -1.

Con este y otros ejemplos el autor se ayuda a explicar algunas reglas de homogeneidad.
1.-Una fracción es homogénea cuando son homogéneas separadamente sus dos términos; el grado es igual al del numerador menos el del denominador.
2.-Un radical es homogéneo cuando es homogénea la cantidad subradical; el grado se determina dividiendo el de dicha cantidad entre el índice.

Procede así a definir el principio de homogeneidad como sigue:
Una ecuación:

$$\phi(a,b,c,...,x,y,z) = \psi(a,b,c,...,x,y,z)$$

Es homogénea si son homogéneas y de grados iguales las funciones ϕ y ψ.
El autor menciona la siguiente definición:

> *El principio de homogeneidad dice que una ecuación homogénea con respecto a cantidades de la misma especia $a,b,c,,x,y,z,$ que se verifica cuando se evaluan estas cantidades con una unidad u, se verificara con cualquier otra unidad.*

Y procede a demostrar esta afirmación como sigue:
Consideremos la ecuación $F(\alpha,\beta,\gamma,...,\chi,\eta,\zeta)$ cuyas variables se miden empelando la unidad u. Se considera entonces otra unidad $u^{'}$ de la misma especie de modo que $u = ku^{'}$. Así se forma la relación $\alpha^{'} = k\alpha, \beta^{'} = k\beta, \gamma^{'} = k\gamma ... \zeta^{'} = k\zeta$, por consiguiente:

$$F(\alpha^{'},\beta^{'},\gamma^{'},...,\chi^{'},\eta^{'},\zeta^{'}) = F(k\alpha,k\beta,k\gamma,...,k\chi,k\eta,k\zeta) = k^nF(\alpha,\beta,\gamma,...,\chi,\eta,\zeta) = 0$$

Luego la ecuación se verifica independientemente de la unidad elegida.

El autor aclara que la especie de las cantidades puede ser cualquiera, siempre y cuando sea la misma.
Asigna a cada especie de unidad una relación con la longuitud y pureba si son o no homogeneas, hace lo mismo para el tiempo como muestra el siguiente ejemplo:
I. Un cuerpo al caer partiendo del reposo recorre la altura h ligada al tiempo empleado con la relación $h = \frac{1}{2}gt^2$.
Analiza si esta ecuación es homogénea según los lineamientos anteriores, las dimensiones de h, considerando L como unidades de longuitud y T como unidades de tiempo, son L^1T^0 las de g son L^1T^{-2} y las de t^2, L^0T^2 así que los dos miembros son homogéneos y de dimensión uno con respecto a L y cero con respecto a T. luego la ecuación es homogenea y se verifica en cualquier sistema de unidades.

Para finalizar el capítulo el autor hace un apartado de construcciones geométricas, en el cual explica que muchos problemas geométricos pueden reducirse a construir una longuitud que se tiene expresada algebraicamanete en función de otras dadas, la idea que el propone es ligar los datos de un problema a construcciones geométricas y así resolver el problema usando geometría analítica.
Hace algunos ejemplos de estas contrucciones que crean la base para siguiente capítulo.

Capitulo V. Cambio de ejes y transformación de coordenadas

Según el autor el problema de cambio de ejes consiste en expresar las coordenadas de un punto cualquiera del lugar referido a un primer sistema, en función de las coordenadas con relación a uno nuevo y ciertas variables arbitrarias.
Menciona que esto se divide en dos problemas principales:
1.-Hallar las coordenadas de puntos aislados en el nuevo sistema, conociendo sus coordenadas antiguas.
2.- Determinar la ecuación de una curva con las nuevas coordenadas conociendo su ecuación con las antiguas.

Comienza entonces la primera sección.

Cambio de ejes en un plano. A continuación se presenta una sintesis de como el autor encuentra las coordenadas de un punto tras un cambio de ejes. Los ejes son oblicuos y no solo cambia el ángulo entre ellos, sino la posición del origen.

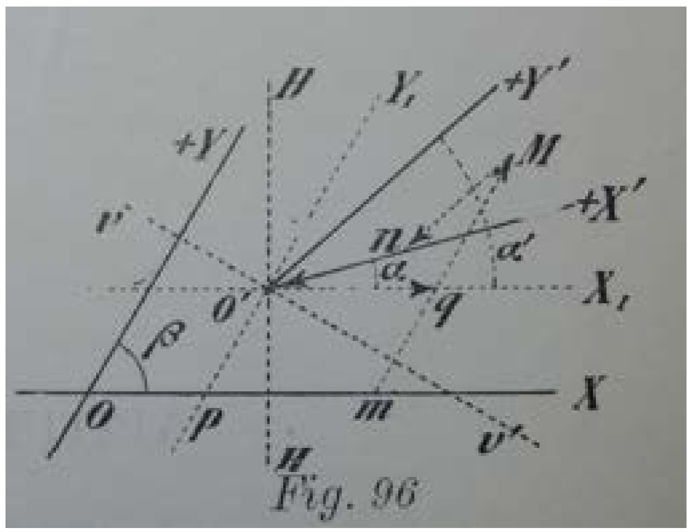


Figura 3.31: Imágen del libro

Sean dos sistemas de ejes XOY y $X^{'}O^{'}Y^{'}$ como se muestra en la figura 3.31, sean $\overline{Op} = a$ y $\overline{pO^{'}} = b$, las coordenadas del nuevo origen $O^{'}$ respecto al primer sistema[16].

Tomemos ahora un punto M cuyas coordenas son, para el primer sistema $\overline{Om} = x$, $\overline{mM} = y$ y en el segundo $\overline{O^{'}n = x^{'}}$ y $\overline{nM} = y^{'}$ sea β el ángulo entre los primeros dos ejes y α y $\alpha^{'}$ los ángulos que formas respectivamente los segundos ejes $O^{'}X^{'}$,$O^{'}Y^{'}$ con el primer eje de las x.

[16] Al hacer el seguimiento de esta demostración se noto un error en la imágen del libro el punto n esta mal ubicado, en realidad el punto n debe ser en donde se intersecta la recta Mq con el eje X este debe ser simplemente un error de impresion ya que no afecta la solución del problema, sin embargo debe aclararse para que dicha demostración sea comprensible.

Tomemos ahora el contorno cerrado $o^{'}qMno^{'}$ y lo proyectamos sobre $VV^{'}$ sabemos que:

$$pr\overline{O'q} + pr\overline{qM} + pr\overline{Mn} + pr\overline{nO'} = 0 \tag{3.26}$$

y tenemos:

$$proyec.\overline{O'q} = \overline{O'q}cosV^{'}O^{'}q = \overline{O'q}cos(90-\beta) = \overline{O'q}sen(\beta)$$

por ser $\overline{qm}$ ortogonal a $VV^{'}$ tenemos:

$$proyec.\overline{qm} = 0$$

por otro lado:

$$proyec.\overline{Mn} = \overline{Mn}cosV^{'}O^{'}Y^{'} = \overline{Mn}cos(90-\beta+\alpha^{'} = \overline{Mn}cos(90-(\beta-\alpha^{'})) = \overline{Mn}sen(\beta-\alpha^{'}) = y^{'}sen(\beta-$$

y

$$proyec.\overline{nO'} = \overline{nO'}cosVO^{'}n = \overline{nO'}cos(90-\beta+\alpha) = x^{'}sen(\beta-\alpha)$$

Sustituyendo en la ecuación X nos queda:

$$(x-a)sen\beta - y^{'}sen(\beta-\alpha^{'}) - x^{'}sen(\beta-\alpha) = 0$$

luego

$$x = a + \frac{x^{'}sen(\beta-\alpha) + y^{'}sen(\beta-\alpha^{'}}{sen\beta} \tag{3.27}$$

Proyectando sobre $HH^{'}$ resulta:

$$proyec.\overline{O'q} = 0$$

$$proyec.\overline{qM} = \overline{qM}cosHO^{'}Y_1 = (y-b)cos(90+\beta) = (y-b)sen(\beta)$$
$$proyec.\overline{Mn} = \overline{Mn}cosHO^{'}Y^{'} = \overline{Mn}cos(90+\alpha^{'}) = -y^{'}sen(\alpha^{'})$$
$$proyec.\overline{nO'}cosH^{'}On = -\overline{O'n}cos(90+\alpha) = -x^{'}sen\alpha$$

Sustituyendo una vez más en la ecuación X tengo:

$$y = b + \frac{x^{'}sen\alpha + y^{'}sen\alpha^{'}}{sen\beta} \tag{3.28}$$

De este modo obtengo las coordenadas de un sistema de ejes en base a otro para el cual se ha cambiado el origen y el ángulo entre los ejes.

El autor da también las coordenadas para casos particulares como, la rotación de los ejes sin mover el origen, en este caso $a = 0$ y $b = 0$, o bien el caso en el que solamente cambia el ángulo entre los ejes de modo que $\alpha = 0$ y $\alpha^{'} = \beta$ y las coordenadas serán:

$$x = a + x^{'} \quad y = y + y^{'} \tag{3.29}$$

y otros ejemplos como pasar ejes oblicuos a rectangulares, rectangulares a oblicuos, etc.

Explica también que el grado de una ecuación no puede variar al hacer un cambio de coordenadas, con el grado se puede establecer orden en las ecuaciónes, diciendo que una línea es de grado u orden m cuando la ecuación que la representa después de ser hecha irreducible es de grado m. De este modo la linea es de primer orden, el circulo de segundo, etc.

Continúa el capítulo desglosando característeicas de diferentes ecuaciones, simplemente como un modo de introducir al lector al modo de interpretarlas y trabajar con ellas.
Toma también el ejercicio de cambio de ejes para coordenadas polares, después en el espacio en coordenadas rectángulares y polares. Clasifica también algunas superficies y curvas y concluye presentando la formula general de la trigonometría esférica.

Capítulo VI. Linea recta en el plano

Para introducir este capítulo el autor explica que toda ecuación de primer grado entre una o dos variables representa una linea recta. $Ax + By + C = 0$ la cual corta a los ejes, o bien es paralela a alguno de ellos.
Luego demuestra usando proyecciones la afirmación opuesta, toda linea recta que queda representada por una ecuación de primer grado entre una o dos variables, $y = ax + b$ describe elementos como a el coeficinete angular, el cual representa la relación de los senos de los ángulos que la recta forma con los ejes y b la ordenada al origen.
De modo que:

$$a = \frac{sen\alpha}{sen(\beta - \alpha)}$$

y

$$b = \overline{OP}$$

Siendo para ejes oblicuos β el ángulo entre los ejes, α el ángulo que la recta forma con el eje X, O el origen y P el punto en donde la recta corta al eje Y.
Menciona algunos casos particulares representando siempre la ecuación en su forma general $Ax + By + C = 0$, menciona los casos en los que la recta pasa por el origen y su ecuación general es $Ax + By = 0$ o bien la recta es paralela a alguno de los ejes y quedan las ecuaciones del tipo $Ax + C = 0$ ó $By + C = 0$ despues plantea algunos ejemplos sencillos usando estas ecuaciones y las definiciones anteriores.
Pasa a una sección que llama *Construcción de la linea recta.* Para contrurir una recta el autor propone los tres procedimientos siguientes:
I.En la ecuación $Ax + By + C = 0$ se dan dos valores para x y se encuentran los correspondientes para y. Esto basta para fijar dos puntos, los cuales son suficientes para encontrar una recta.
II. Hacer por separado $x = 0$ y $y = 0$ para encontrar las intersecciones con los ejes $Y, -Y$ y $X, -X$, obteniendo así los dos puntos desados para trazar una recta, los cuales localizaremos sobre cada uno de los ejes. Obteniendo que para $x = 0$, $y = -\frac{C}{B} = \overline{OP}$ y para $y = 0$ queda $x = -\frac{C}{A} = \overline{OQ}$.
III. Se fija un punto P, dado por la ordenada al orgien y por el se traza una recta que forme con la parte positiva del eje $X, -X$, el ángulo α.
Para calcular el ángulo α en este último caso, sabemos que:

$$a = \frac{sen\alpha}{sen(\beta - \alpha}$$

despejando tenemos:

$$a(sen\beta cos\alpha - cos\beta sen\alpha) = sen\alpha$$

desarrollando y acomodando

$$sen\alpha + asen\alpha cos\beta = asen\beta cos\alpha$$
$$\frac{sen\alpha + asen\alpha cos\beta}{cos\alpha} = asen\beta$$
$$tan\alpha + atan\alpha cos\beta = asen\beta$$

factorizando y despejando me queda

$$tan\alpha = \frac{asen\beta}{1 + acos\beta}$$

Para el caso en el que los ejes son rectángulares es claro que $tan\alpha = a$.
Después el autor resuelve un ejemplo usando los tres métodos descritos anteriormente, para continuar con otra sección en la que deduce y explica otras ecuaciones de la linea recta. Como la que llama *Ecuación en que interviene la ordenaa y la abscisa al orgien* la cual es de la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ en donde p y q son la abscisa y la ordenada al origen, para construirla el autor hace $x, y = 0$ por separado, para representarlas en funcion de A, B, C como lo hizo anteriormente y denomina $q = \overline{OP}$ y $p = \overline{OQ}$. Menciona también la *Ecuación en la forma normal de Hesse* la cual construye como sigue:

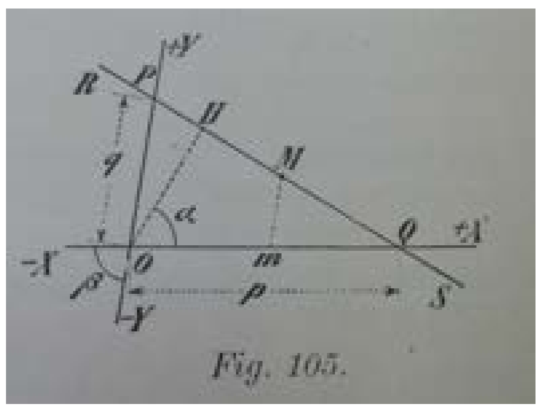


Figura 3.32: Imágen del libro

Como se muestra en la figura 3.32 se traza un recta $OP = H$ perpendicular a la recta dada, y sea el ángulo α el que forma esta normal con el eje X y β el ángulo de los ejes, asi pues proyectado tenemos la ecuación en forma normal, para ejes rectangulares queda $xcos\alpha + ysen\alpha = P$.
Basandose en esta ecaución y en la forma general el autor plantea los procedimientos necesarios para pasar de una ecación $Ax + By + C = 0$ a la forma normal y dice:

> *Para reducir una ecuación $Ax + By + C = 0$ a la forma normal, se pasa el término independiente C, al segundo miembro se le*

> *atribuye signo positivo cambiando si es pereciso los signos de los demás términos de la ecuación y se dividen todos ellos por el radical* $\sqrt{A^2+B^2}$.

Esto se explica con el siguiente ejemplo del libro.
Sea la ecuación:

$$3x - 4y + 12 = 0$$

Se pasa el término independiente:

$$3x - 4y = -12$$

y para atribuir al segundo número el término positivo hacemos:

$$-3x + 4y = 12$$

luego

$$-\frac{3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}x + \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}y = \frac{12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

o bien

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{12}{5}$$

Después el autor plantea una sección llamada *Problemas sobre la linea recta* la cual comienza diciendo:

> *La ecuación general de la linea recta es como se ha visto:*
>
> $$Ax + By + C = 0$$
>
> *y contiene dos parametros que son las relaciones de dos de los coeficientes al tercero. Se llama* ***condición simple*** *toda condición geométrica impuesta a la recta y que se expresa analíticamente por medio de una sola ecuación; así pues dos condiciones simples determinarán una recta puesto que suministran dos relaciones entre los dos parámetros de esta recta.*

Con esto procede a resolver algunos ejercicios, como obtener la ecuacion general de las rectas que pasan por un punto dado, el cual busca evaluando la ecuación en dicho punto y con esto llega a la conclusión de que no es posible obtener esta ecuación ya que por solo un punto fijo pasa una infinidad de rectas y para determinar alguna de ellas es necesaria una segunda condición,

es decir otro punto o la inclinación de la recta.
Continua encontrando las ecuaciones para los siquientes casos:
Ecuación de la recta que pasa por un punto dado y es paralela a otra, ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, intersección de dos rectas, intersección de tres rectas, ecuación general de las rectas que concurren con otras dos dadas por sus ecuaciones, ángulo entre dos rectas, dado un punto y una recta bajar del punto una perpendicular a la recta, determinando su ecuación y su longitud.

El autor plantea otras tres secciones del mismo canto que los ejercicos anteriores, estas son: Ecuacioens de las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas, Ecuaciones que presentan sistemas de rectas, Ecuación polar de la recta.
Despues plantea quince ejercicios para todo el capítulo a continuación mencionamos algunos para ilustrar lo que se espera de los alumnos, con la información obtenida en este capítulo.

I.Sea la ecuación $2y + 3x = 1$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ *Qué ángulo forma la recta con el eje* OX*?*
II.Siendo $\beta = \dfrac{\pi}{3}$,$b = -2$ *y* $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ *,Cuál es la ecuación de la línea recta con estos datos?*
V.Por el punto $(1, 5)$ *llevar una perpendicular a la recta* $y = -\frac{3}{4}x - 2$ *(ejes rectangulares) y determinar la ecuación y longuitud de esta perpendicular.*
VI.Teorema. Demostrar que las tres perpendiculares bajadas de cada uno de los vértices de un triángulo a los lados opuestos se cortan en un punto.
IX.Reducir la ecuación $4x - 5y - 5 = 0$ *a la forma*

$$xcos\alpha + ysen\alpha - P = 0$$

XIII.Un triángulo equilátero cuyo lado vale a, tiene uno de su vértices en el origen (ejes rectangulares) y sus lados igualemnte inclinados respecto a las poiciones positivas de los ejes. Encontrar las coordenadas de los otros dos vertices y del punto medio de la base que pasa por estos dos vértices.
XV.Encontrar las coordenadas polares de la intersección de las

líneas:

$$\rho = \frac{2a}{cos(\phi - \frac{\pi}{2}}$$

y

$$\rho = \frac{a}{cos(\phi - \frac{\pi}{6}}$$

y el ángulo que forman.

por último hace una sección de aplicaciones de la teoría de la línea recta a los fenómenos físicos.

Capítulo VII. Plano y Línea recta en el espacio

Comienza con las ecuaciones del plano, en las cuales le recuerda al lector que una ecuación de primer grado entre tres variables representa un plano $Ax + By + Cz + D = 0$.
Propone también la ecuación $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ usando las intersecciones con los ejes y $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ usando las perpendiculares bajadas al plano y los cosenos de los ángulos que forman con los tres ejes.
El autor dice que bastan tres condiciones simples para determinar un plano ya que esta contiene tres parametros arbitrarios. [17]
Del mismo modo que en capítulo anterior el autor plantea en forma general los siguientes problemas, de los cuales mencionamos todos, pero solo en algunos casos se presentan las soluciones dadas por el autor.

I.Ecuacion general de los planos que pasan por un punto dado (x_1, y_1, z_1).
Para este caso el autor substituye el punto dado en la ecuación general del plano y resta la ecuación obtenida con la ecuación general.

II.Ángulo de un plano con los planos coordenados.
Para este caso el autor dice: *Los ángulos que forma el plano con los planos coordenados son iguales a los que forma la perpendicular llevada del origen al plano, con los ejes coordenados.* Siguiendo esta idea resuelve el ejercicio.

[17]Con condicion simple se refiere a la definición del capítulo anterior. Toda propiedad geométirca suceptible de traducirse analíticamente por una relación entre coeficientes.

III.Ecuación general de los planos que pasan por la intersección de dos dados. Tomemos los planos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Sea γ un coeficiente arbitrario y formamos la ecuación:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\gamma(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{3.30}$$

que es la ecuación pedida, ya que cualquier punto en la recta de interseccón de los planos está también en la ecuación anterior. Entonces el plano X contiene a la recta de intersección.

IV. Ecuación general de los planos que pasan por al intersección de dos dados y por otro punto.
V.Intersección de tres planos.Basta con resolver el sistema de ecuaciones que se forma.
VI.Distancia de un punto a un plano.
VII. Ángulo entre dos planos.
VIII. Por un punto dado llevar un plano paralelo a otro dado.
IX. Ecuacion del plano que pasa por tres puntos.

El autor hace también una sección llamada **Ecuaciones de la linea recta en el espacio.** En ella dice, que para representar una recta en el espacio, son necesarias, dos ecuaciones de primer grado entre uno o dos variables. De modo que la recta se forma según los planos proyectantes que se elijan para darle forma. Da así algunos casos particulares y plantea ejemplos como los de el capítulo anterior pero resueltos en el espacio.

Capítulo VIII. Circunferencia

Comienza este capítulo con la definición de circunferencia, dada como el lugar geométrico de los puntos equidistntes de uno interior llamado centro. Dice el autor que la ecuación que surgiria naturalmente sería $R = constante$ pero suponiendo ejes oblicuos y considerando (a,b) como las coordenadas del centro de la circunferencia, por el procedimiento que se ha visto en los libros anteriores obtiene:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)cos\beta = R^2$$

Después menciona las ecuaciones de los siguientes casos particulares:

I.Si los ejes son oblicuos y el centro coincide con el orgien.
II.Si lo ejes son rectangulares y el centro no coincide con el orgien.
III.Si lo ejes son rectangulares y el centro no coincide con el origen.

Procede a mostrar la relación entre la ecuación de la circunferencia y las ecuaciones de segundo diciendo que:
Siendo la ecuación general de segundo grado con dos variables $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para que esta ecuación sea idéntica a la de la circunferencia es necesario que sus coeficientes sean proporcionales, es decir:

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{2cos\beta} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2a - 2bcos\beta} = \frac{E}{-2b - 2acos\beta} = \frac{F}{a^2 + b^2 + 2abcos\beta - R^2}$$

Al comparar estar relaciones obtenemos las siguientes igualdades:

$$A = C$$
$$B = 2Acos\beta$$
$$D = -2Aa - 2Abcos\beta$$
$$E = -2Ab - 2Aacos\beta$$
$$F = Aa^2 + Ab^2 + 2Aabcos\beta - AR^2$$

Con estas igualdades llega a las siguientes concluciones:

> *Para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia se necesita: 1.Que los coeficientes de y^2 y x^2 sean idénticos; 2.Que el coeficiente B del rectángulo sy sea igual al doble producto de los coeficientes A ó C por el coseno del ángulo de los ejes; 3.Las ecuaciones cuarta y quinta permiten conocer las coordenadas del centro y 4. La ecuación sexta permite conocer el radio.*

Aunque no lo menciona, a falta de sexta ecuación en las relaciones anteriores suponemos que se refiere a la que obtiene en el siguente desarrollo:
Despejando de la segunda igualdad obtenemos $cos\beta = \frac{B}{2A}$ si se sustituye en la tercera ecuación obtenemos $D = -2Aa - 2Ab\frac{B}{2A}$ la cual puede reducirse a $2Aa + Bb = -D$ y por la cuarta ecuación tenemos $2Ab + Ba = -E$ resolvemos este sistema de ecuaciones y tenemos:

$$a = \frac{2AD - BE}{B^2 - 4A^2} \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4A^2}$$

etonces para calcular R por la quinta igualdad tenemos:

$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\frac{B}{2A} - \frac{F}{A}$$

de donde:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{Bab}{A} - \frac{F}{A}}$$

Así sustituyendo los valores necesarios obtendremos el valor de radio. Más aún según el valor que obtengamos en R podremos saber si la circunferencia es real, evanescente[18] o imaginaria.
El autor realiza el mismo procedimiento para el caso particular de ejes rectángulares y realiza algunos ejemplos para obtener el radio del círculo con el método anterior.
Procede a resolver el problema de la intersección de una circunferencia con una linea recta para ejes rectángulares. Para resolver el problema el autor substituye la ecuación de la recta $y = mx + b$ en la ecuación general de la circunferencia y obtenemos la ecuación $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ en donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + m^2 \\
\beta &= 2mn + D + Em \\
\gamma &= n^2 + En + F
\end{aligned}$$

Y al ser una ecuación cuadrática, sabremos que las raices de esta serán las abscisas de los puntos de intersección de la circunferencia con la recta y podemos usar el discriminante para saber si tenemos dos soluciones reales, dos imaginarias o una única solución real doble. De este modo podemos saber si la recta es una secante, una tangente o no corta a la circunferencia. Como caso particular el autor estudia la intersección de la circunferencia con los ejes.

Comienza así una sección que nombra **Teoremas de Geometría Plana.** En esta sección plantea tres teoremas.
I.La ordenada al diámetro es media proporcional entre los dos segmententos del diámetro.
II.Una cuerda es media proporcional entre todo el diámetro y su proyección.
III.Los ángulos inscritos que abrazan un diámetro son rectos.

[18]Que tiene radio cero.

Hace también una sección para **Circunferencias que satisfacen condiciones determinadas**, dice que bastan tres condiciones para determinar la ecuación de una circunferencia.
Y realiza varios ejemplos como el siguiente:
Ecuación de un círculo tangente al eje OY, en este caso dice el autor que basta con hacer $a = R$ y obtenemos la ecuación $x^2 + (y - b)^2 - 2Rx = 0$.
Por último obtiene las ecuaciones de las rectas tangente, normal, subtangente y subnormal a una circunferencia usando las condiciones particulaes de cada una de ellas y la ecuación de la circunferencia. Encuentra también la ecuación polar de la circunferencia y da algunos casos particulares para ella.

Concluye este capítulo con los ejercicios que se enlistan a continuación.

> *En todos los ejercicios supongase ejes rectangulares, salvo advertencia en contrario.*
> *(1)Cuál es la ecuación del círculo cuyo centro es* $C(3, 0)$ *y el radio* $R = 5$*?*
> *(2)Cuál es la ecuación del círculo que pasa por el origen, por el punto* (x_1, y_1) *y que tiene su centro en el eje* OX*.*
> *(3)Ecuación del círculo que pasa por los puntos (0,0),(α,0),(0,β).*
> *(4)Si la ecuación* $x^2+y^2+xy+2x+2y = 0$ *representa un círculo, demostrar que los ejes forman un ángulo* $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ *y encontrar las coordenadas del centro y el radio.*
> *(5)Qué relación debe existir entre* a, b, R *para que la línea* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} = 1$ *sea tangente al círculo* $x^2 + y^2 = R^2$*?*
> *(6)Encontrar la polar del punto P(2,0) respecto al círculo* $x^2 + y^2 = 16$ [19]
> *(7)Cuál es la ecuación polar del círculo cuyo centro es* $c(8, \dfrac{\pi}{4})$ *y cuyo radio es 10 y determinar en que puntos corta al eje inicial.*

[19]Un polo es el punto de intersección de todas las cuerdas que se trazan uniendo los puntos de contacto de tangentes bajadas desde diversos puntos todos sobre una misma recta paralela a alguno de los ejes.

Capítulo IX. Lugares geométricos

Comenzaremos citando la primera sección llamada **Consideraciones generales.** con la cual el autor abre el capítulo.

> *Existiendo un lugare geométrico, debe existir la ecuación que lo represetne y recíprocamente. Hay pues dos problemas que resolver: 1.Dada la definición de un lugar geométrico, encontrar la ecuación que lo represente en un cierto sistema de coordenadas. 2.Dada una ecuación entre dos variables encontrar el lugar geométrico que representa. Para abordar el primer problema se procurará traducir las condiciones del enunciado en un sistema de coordenadas naturales y apropiadas para el caso de que se trata, interpretando las cicunstacias geométricas por relaciones algebráicas de tal manera que figuren en éstas las constantes o parámetros que exije la definición propia del lugar. Hecho esto, se pasará del sistema de coordenadas naturales al que se prefiera o convenga elegir para lo cual se emplearán las fórmulas ya conocidas de transformación. En ocasiones y en obvio del tiempo aunque aprentemente no parezca haber simplificación, conviene recurrir al empleo de un sistema intermedio auxiliar mediante el cual se llega más facilmente al resultado, no obstante los cambios que es preciso ejecutar. El sistema de coordeandas final es generalmente de la libre elección del calculista, pero es claro que el más apropiasdo será aquél que permita llegar más llanamaente a la ecuación y obtener ésta en la forma más conveniente para interpretar de un modo claro las propiedades del lugar geomético. Si el mencionado lugar tiene centro, es decir, un punto que divida en partes iguales todas las cuerdas que pasan por él; como las coordeandas de los puntos extremos e una cuerda cualquiera, deben ser entonces iguales y de signos contrarios. Si el origen de coordenadas se hace coincidir con dicho centro la ecuación resultante se verificará para valores de x e y iguales y de signo contrario por lo que todos los términos resultarán de la misma paridad y la ecuación se presentará reducida. Si la curva tiene ejes de simetría y se confunden con éstos los ejes coordeandos, para cada valor de una de las coordenadas resultarán para la otra dos iguales y de signo contrario, y por lo tanto la ecuación carecerá de ciertos términos independientes. Una práctica metódicamenbte desarrollada enseñara a elegir con-*

> *venientemente el mejor sistema de coordenadas y sus condiciens más convenientes para encontrar la ecuación del lugar. Respecto al segundo problema no presenta grandes dificultades, tratándose de ecuaciones que no sean de grado superior; los ejemplos que adelante van desarrollados escalrecen mejor que una larga exposición, la manera de discutir las ecuaciones de los lugares geométricos correspondientes. El Cálculo, como más adelante se verá, ha permitido por medio de sus leyes generales, facilitar esta clase de investigaciones y puede decirse que en sus manos la teoría de las curvas planas presenta hoy día una admirable perfección. Las dificultades inherentes a la especulación algebraica, quedan muy disminuidas en virtud de las propiedades generales que suministra la teoría de las derivadas.*

Así el autor procede a demostrar con diversos ejemplos la noción de que dada una propiedead de un lugar geométrico puede encontrarse su ecuación, como veremos en el siguiente ejemplo para la Elipse.
La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante.

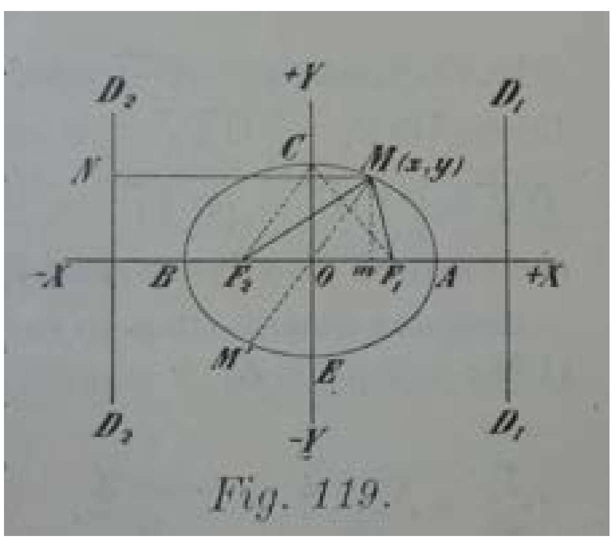


Figura 3.33: Imágen del libro

En la figura 3.33 sean $X, -X; Y, -Y$ los ejes cartesianos y F_1,F_2 los dos puntos fijos llamados focos; O punto medio de $\overline{F_1F_2}$ el origen, $M(x, y)$ un punto del lugar: $\overline{F_1M} = \rho_1$, $\overline{F_2M} = \rho_2$. La suma $\overline{F_1M} + \overline{F_2M} = constante = \overline{AB} = 2a$ y la distancia $\overline{F_1F_2} = 2c$.

Por la forma en que se ha definido el lugar geométrico tenemos $\rho_1 + \rho_2 = 2a$ y de los triángulos F_1mM, F_2mM tenemos:

$$\rho_1^2 = y^2 + (x - c)^2 \quad \rho_2^2 = y^2 + (x + c)^2 \tag{3.31}$$

restando las dos anteriores obtenemos:

$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = (\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1) = 4cx \tag{3.32}$$

ya conocemos el valor de $\rho_2 + \rho_1$ y despejando en la ecuación anterior obtenemos $\rho_2 - \rho_1$ resolvemos este sistema de ecuaciones y tenemos:

$$\rho_2 = a + \frac{cx}{a} \quad \rho_1 = a - \frac{cx}{a}$$

Sustituyendo en la ecuacion 3.32:

$$(a + \frac{cx}{a})^2 = y^2 + (x + c)^2 \tag{3.33}$$

El autor hace la siguente consideración, dado que $a > c$ la diferenca $a^2 - c^2$ es positiva y por conveniencia se representará como b^2 con esta consideración y desarrollando la ecuación 3.33 obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes cartesianos.

Después el autor define los elementos de la elipse, denominando a la distancia $a = \overline{OA}$ semieje mayor, la distancia $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$ semidistancia focal, la distancia $\overline{OC} = \sqrt{a^2 - b^2} = b$ semieje menor.
Hace también la ecuación polar de la Elipse a partir de la obtenida anteriormente y discute algunos casos particulares de la ecución polar.

Continua el capítulo repitiendo el procedimiento anterior para la Hipérbola,

la Parábola, El Cisoide de Diocles, El Conchoide de Nicomedes, El Estrofiode, El Lemniscato de Bernoulli y La espiral de Arquímedes.
Por último procede al problema contrario mencionado al inicio del capítulo, dada una ecuación cartesiana construir el lugar geométrico correspondiente. Como primer ejemplo toma la función $y = senx$ y hace una tabla en la cual da valores a x y obtiene los correspondientes de y construye así los puntos obtenidos y traza la función como se ve en la figura 3.34.

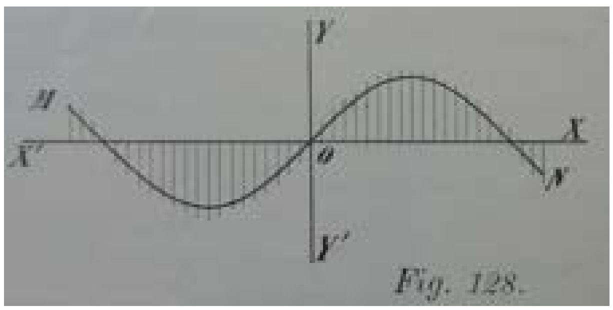


Figura 3.34: Imágen del libro

Hace la aclaración de que un mayor número de puntos, dara una aproximación gráfica más precisa a la función y que basta con trasladar el origen un cuadrante a la derecha para obtener la función $y = cosx$.
Del mismo modo construye otras funciones y concluye con una con la construcción de un lugar geometrico dada su ecuación polar. Por último presentamos el indice de este libro.

ÍNDICE

DEL TOMO I.

SECCIÓN I.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA.

SECCIÓN II

GEOMETRÍA ANALÍTICA

415

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo de este capítulo es aterrizar lo estudiado en los tres libros aneriores, para esto se presentan opiniones y anánlisis de los libros estudiados y presentados anteriormente, así como algunas breves comparaciones del método de enseñanza de dichos libros y el método actual. Se hacen notar problemas especiales y las distintas formas de abordar un mismo tema. Cabe destacar que estos libros no contienen ninguna teoría nueva desarrollada por sus autores, como sus prólogos lo mencionan, no son sino compendios de autores europeos y material rescatado de las clases, desarrollando entre ellos dudas que presentaban los alumnos, con el fin de adaptar un libro de texto a las necesidades de los estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria.

En este estudio hemos observado que la teoría de geometría analítica en estos libros es muy parecida, ya que los tres autores estudiados inspiraron sus obras en autores europeos y en los temarios de las clases, sin embargo él de Manuel Torres Torija siendo el más nuevo de los tres presenta una teoría mucho más completa y compleja.

El principal hallazgo y quiza el más importante que surgió al estudiar estos libros, es que la mayoria de la teoría se presenta para ejes oblicuos, siendo una forma más general para el estudio de la geometría y abarcando los conceptos de una forma más completa. A continuación presentaremos y explicaremos estos casos.

Distitnas introducciones a la Geometría Analítica

Repasemos en el principio de cada libro, cómo los autores ayudan a los estudiantes a inmiscuirse en la geometría analítica. El primer libro por orden de antiguedad es el de Manuel Ramírez, en el se describió primero la importante traducción que existe del Álgebra a la Geometría siendo la primera el orígen de la segunda.
Ramírez comienzó por explicar como se puede transformar una noción algebraica en una geométrica permitiendonos ampliar el contexto para resolver problemas. Esto se logra tomando las cantidades del álgebra y representandolas como segmentos de recta para modificarlos y trabajar con ellos desde el punto de vista de la geometría obteniendo así un resultado que puede ser traducido una vez más al álgebra, dependiendo de la cantidad que se haya determinado como unidad.
Es así que Ramírez explica la cercana relación a modo de diccionario del álgebra a la geometría. Considero que la importancia de esta alcaración yace en la supoción de que un alumno que estudio geometría analítica, ha estudiado ya el álgebra, esta asociación ayuda a evitar la confusion de pasar de una materia a otra, logrando suavizar el camino que éste recorre de una a otra, ayudandolo a comprender que todo esta ligado y que sus conocimientos previos de álgebra no deben dejarse atras si no aplicarse para lograr un mejor desempeño y coprensión de la geometría analítica, siendo este proceso aplicable para cualquier rama de las matemáticas.

Siguiendo con el orden establecido, Francisco Echeagaray presentó en su primer libro, *Nociones de la aplicación del cálculo a la geometría y reciprocamente* un método para abordar problemas, en este caso de geometría, pero aplicables a cualquier problema matemático que quiera resolverse. Esto lo explica con el primer ejemplo que se presenta en el libro original y en la tesis, en el cual a partir de un triángulo del cual conoce algunas propiedades deduce muchas otras. El llama a estas deducciones *materia prima*, en el sentido en que forman la base para llegar a concluciones importantes. Con este ejemplo Echeagaray invita al alumno a rescatar toda la información posible de un problema apoyandose en sus conocimientos previos y los otorgados para el problema. De esta forma enseña como atacar cualquier problema desmenuzando sus elementos y formando concluciones cada vez más complejas hasta llegar a la solución buscada. Noción que en mi opinion debería tener cualquier estudiante de materías de matemáticas.

En el caso de Torres Torija el libro se presentó en dos secciones, se plantearon todas las bases necesarias durante la primera sección, *Complementos de Álgebra* y la segunda sección *Geometría Analítica* comenzó directamente con las bases del tema de interes. Sin embargo toda su intención y modo de estudio se presenta en el prólogo, citado en este trabajo, en el invita al alumno en profundizar en los conceptos necesarios y advierte que se requeire conocer a fondo los conceptos para poder resolver los ejercicios propuestos en el libro.

Contenidos

Comenzaremos ahora a comparar el contenido de geometría analítica de los libros presentados. En los libros y cursos actuales de Geometría analítica a nivel preparatoria se estudian, el plano cartesiano, ubicación de puntos en el plano, coordenadas rectángulares y en algunos casos polares. Después se estudia la recta, distitans formas de su ecuación y algunos problemas relativos a ella. Se estudian curvas de segundo grado como la parabola, la circunferencia, la elipse y la hiperbola. Todo este estudio se realiza en coordeandas cartesianas.
La primera gran diferencia entre el estudio actual y el que se presenta en esta tesis, es, como ya habíamos mencionado, que en todos los libros que se estudian, se presentan la mayoria de las definiciones para ejes oblicuos, siendo el caso de los ejes cartesianos simplemente un caso particular. Esta construcción modifica enormemente el nivel de comprensión que se requiere de un alumno, ya que al plantear teorías más generales es necesario mayor profundización en los temas, pero también brinda dominio sobre ellos.

Para ejemplificar lo anterior discutamos por ejemplo, el libro de Manuel Torres Torija en el describe muy cuidadosamente que son las coordenadas y como ubicarlas, dando una definición que funciona sin imporatar el ángulo de los ejes y más aun llevando esta definición al espacio de tres dimensiones. Ramírez menciona también distintos tipos de coordenadas, permitiendo al alumno entender la noción de diferentes formas de representar un lugar geométrico, o encontrar un punto en un espacio de dos o más dimensiones, simplificando la idea pero al mismo tiempo permitiendo al lector crear una mayor comprension de un lugar geométrico. Abordando de este modo las bases de la geometría, enseña al alumno a pensar en lo que esta haciendo no solo a memorizar formulas sin comprender el sentido de ellas. Una buena coprensión de las coordenadas es la mejor base posible para entender el resto de los temas y desarrollos de la geometría analítica ya que al final se siguie trabajando con conjuntos de puntos que forman lugares geométricos. Y si se logra una comprension profunda del significado de un punto en un plano, o en el espacio es un escalon muy firme para seguir construyendo y comprendiendo la teoría que aqui se discute.

Para seguir con el orden lógico de la geométria, veamos como presentan los autores estudiados la linea recta. Presentamos anteriormente el desarollo de Echeagaray, siendo todos los otros muy parecidos, este es el que parece más ilustrativo. Echeagaray, al igual que Torres Torija, comienzó definiendo las proyecciones, las cuales utiliza constantemente en el libro para las demostraciones, esta teoría de proyección es constantemente ignorada en los libros de texto actuales, sin embargo es clave en los libros estudiados en este tesis. Tras esta definición Echeagary deduce la ecuación de la linea recta.
La demostración se ha desarrollado siguiendo la idea del autor en el Capítulo primero del Libro Echeagaray presentado en el Capítulo III de la tesis. Para encontrar esta ecuación el autor propone buscar la relación entre las coordenadas de un punto cualquiera dentro de una recta y ciertas constantes. Para buscar estas relaciones traza rectas paralelas a los ejes y que toquen a la recta en diversos puntos, de este modo forma triángulos semejantes que le permiten identificar las propiedades que deben tener todos los puntos dentro de una misma recta y de esta forma deduce la ecuación.
Esta generalidad continua hasta en el planteamiento de los ejercicios, como se puede ver después de la presentación, ya que estos siguen desarrollandose de manera general, exigiendo a quien quiera resolverlos una amplia comprensión de la demostración anterior y las partes de la ecuación de la recta.

La idea que debe estudiarse en seguida de la linea recta es la de un espacio geométrico, para este caso Echeagaray aprovecha su definición de la linea recta para introducir los lugares geométircos, ya que en en desarrollo que presenta para buscar la ecuación de una recta, aclara la idea de buscar todos los puntos que pertenecen a ella y una forma general de representarlos.

El ingeniero Ramírez, respecto a este tema, explicó que un lugar geométrico es el que pasa por los puntos que tienen una propiedad común y verifican la ecuación. Esta idea se comprende facilmente tras estudiar el desarrollo que presentamos sobre la ecuación de la linea recta, queda con el muy claro que lo que se busca es una ecuación que funcione para todos los puntos que estan en ella, haciendo notar una vez más que llevar al alumno de la mano a traves de conceptos que podrían parecer inecesarios, es en mi opinion la manera perfecta de sembrar las bases para comprender la teoría que se va a estudiar.

Por otra parte Torres Torija sigue un orden distinto a los otros autores, profundizando más en algunos conceptos como el espacio. De este modo tras definir las coordenadas estudia igual que los otros autores las proyecciones, pero antes de llegar a la linea recta pasa por muchos otros capítulos. Pimero habla sobre la representación de lineas y superficies, en este capítulo ayuda al alumno a comprender los lugares geométricos y representa en este la ecuación de la recta por medio de ellos. Describe tambien algunos tipos de ecuaciones y propiedades de las mismas para facilitar la definición de sus lugares geométricos. Continua con un capítulo sobre homogeneidad en el cual siembra las bases para uno de los problemas más interesantes presentados en este trabajo. Es así que después de definir la homogeneidad Torija presenta el capítulo de cambio de ejes y transformación de coordenadas, este problema es muy importante, ya que trabaja de una sola vez problemas que ususalmente se toman por separado, define las ecuaciones necesarias para hacer el cambio de ejes de un punto. Lo importante de esta demostración es que se trabajan al mismo tiempo el cambio de ejes, la rotación y el cambio de centro, siendo que en la mayoria de los casos se toman por separado. Esta demostración se presenta siguiendo a la original en el capítulo V. Del libro de Manuel Torres Torija en el capítulo III de la tesis. Y nos da la fórmula para obtener las coordenadas de cualquier punto o conjunto de ellos, bajo cualquier transfromación que sufran sus ejes. Define también la ecaución de la linea recta usando proyecciones, presenta también algunas formas de la ecuación de la recta. Presenta en este capítulo otra idea muy interesante, la llamada condición simple. Con ella se refiere a toda condición geométrica impuesta a la recta y que se expresa analíticamente por medio de una sola ecuación. Usa esta definición para demostrar varios conceptos y con ella simplifica muchas de las explicaciónes como puede verse a lo largo del libro. Por último y a diferencia de los otros autores habla también de la linea recta en el espacio de tres dimensiones, condición que ayuda al lector a ampliar su panorama geométrico y hacer sus primeros trabajos en R^3. Esta noción de cambiár de un espacio de dos dimensiones a uno de tres ayuda a visualizar como se modifican las propiedades de una curva y es la base para avanzar a otros espacios.

El siguiente tema a tratar son las curvas de segundo grado, para este tema a excepción de la circunferencia, el resto de las curvas en todos los libros estudiados se presentan solo para ejes rectos. Sin embargo se trabaja a profundidad con sus propiedades, con la interesante diferencia de que se abarcan desde el punto de vista de una ecuación cuadrática. Construyendo sus lugares geométricos dependiendo de las características de la ecuación cuadrática que representa cada curva para llegar a la conclusion de la misma y la especificación de sus propiedades.
Comenzando por la circunferencia, presentamos anteriormente la deducción de la ecuación de la circunferencía del libro de Manuel Ramírez en el Capítulo IV, en el que deduce la ecuación de la circunferencia para ejes oblicuos. Esta demostración nos ayuda a comprender como puede variar una figura si alteramos el ángulo entre los ejes, pensemos en el de una cicunferencia trazada en ejes oblicuos, para encontrar su ecuación se traza un triángulo rectángulo usando un radio de la circunferencia y rectas paralelas a los ejes, en el caso de ejes oblicuos este triángulo no puede ser rectángulo ya que no se formaria una circunferencia.

En su libro Echeagaray presentó algunos problemas para el circulo, todos en forma general. Como encontrar la recta tangente y secante a un círculo. Podemos observar que en todos los casos los autores presentan y resuelven ejercicios de forma general, permitiendo que al entenderlos se puedan aplicar a cualquier caso particular deseado. En los ejercicios plantean también problemas de modo general y algunos para casos particulares.
Por su parte Manuel Torres Torija define el lugar geometrico del círculo y a partir de el, también para ejes oblicuos, llega a la ecuación del circulo. A partir de esta ecuación menciona algunos casos de circulos particulares y como deben quedar sus ecuaciones, otro apartado muy interesante que hace Torres Torija es el de comparar una ecuación general de segundo grado con la ecuación del circulo, esta comparación permite identificar las cualidades necesarias para que una ecuación de segundo grado sea un circulo y abre paso para comprender las ecuaciones de la elipse, la parábola y la hipérbola. Estas ecuaciones son también de segundo grado pero el autor plantea un escenario que permite al alumno identificar las propiedades de los lugares geométricos de cada una de estas curvas.

Manuel Torres Torija continua trabajando sobre estas curvas en un modo conjunto, presentando sus propiedades como lugares geometricos sin centrarse en cada una de ellas como capítulos separados. Esto ayuda al lector a borrar la ilusion de que se pasa de que al pasar, por ejemplo, de la circunferencia a la elipse se está tratando un tema totalmente diferente. Al tratarlas en conjunto se forma una idea más concreta de la relación que existe entre todos los lugares geometrícos y como a partir de las caracteristicas dadas para cada uno se puede obtener la ecuación y trabajar con ella.

En todos los libros los autores extienden su estudio a otras curvas como el ejemplo de la espiral de Arquímedes, aunque no profundizan tanto en su estudio, las dan a conocer para el lector y siguen trabajando con propiedades y teorías geométricas importantes. Estas curvas ayudan al alumno a crear un mayor panorama geométrico al trabajar con curvas que se trazan con movimientos continuos o bajo condiciones muy específicas.

Se estudio tambén al final del libor de Ramírez una sección de propiedades generales de la geometría. En ella se combina la anterior con el cálculo, aunque no se profundizó en estos temas, se dio una reseña suficiente para ilustrar el nivel de el libro y los alcanzes de su estudio.

Comentarios

Al repasar el resumen presentado de los libros que se estudiaron, es notable el contenido matemático de todos ellos. Es discutible que en muchos casos el contenido y dificultad de un libro de texto no dicta el de la matería impartida con este, en el sentido de que podrían solo resolverse los problemas sencillos o tomar la materia ignorando muchos capítulos del libro. Sin embargo como se presenta en el Capito II *Breve Historia de la Escuela Nacional Preparatoria* los alumnos eran sometidos a rigurosos exámenes y como observamos en las fichas que se presentan estos exámenes tenian un honorable nivel de dificultad. Es así que en base a lo estudiado podría decirse que en efecto cualquier alumno respetable de la Escuela Nacional Preparatoria tenía un muy buen nivel de conociemiento matemático y muy probablemente de otras matérias.

Vale la pena hacer incapie en que el nivel de esta escuela era en gran parte

gracias a los maestros que tenian los alumnos, al ser la Escuela Nacional Preparatoria, en la época estudiada, la única preparatoria de su clase y ademas una muy reconocida institución, los maestros que ahí laboraban, elegidos cuidadosamente, eran todos notables en sus campos de enseñanza y esto dice mucho del nivel de clases que impartian.
Esto representa un fuerte factor en la diferencia de nivel de estudio de aquellos tiempos y la actualidad, ya que la falta de maestros bien preparados afecta la educación en todos los niveles y campos de estudio.

Para concluir y con la esperanza de sentar una base para trabajos posteriores, sin pretender verdades absolutas, comparto mi opinon sobre las decadencias en la enseñanza acutal inspiradas por el estudio de los libros antiguos. Creo que con la intención de mejorar los resultados académicos en México, se han barrido de los programas de enseñanza algunos temas que se consideran complicados. Especialmente en el ambito de las matemáticas esta purga ha sido en mi opinion contraproducente, ya que su enseñanza no se basa en cuantos temas se vean si no en cuantos conceptos se comprendan. Si en la formación matemática desde sus puntos más báscios se priorizara lograr un pensamiento lógico y deductivo en los estudiantes las dificultades para aprender conceptos más avanzados serían menores.
Si se enseñara con la noción que tienen los autores estudiados en esta tesis, de hacer todo sobre una misma linea de trabajo y desvanecer la creencia de que de un tema a otro en matemáticas se modifica totalmente el contexto, además del esfuerzo por inmiscuir a los alumnos en la comprension completa de los temas, podría facilitarse en ellos el aprendizaje de todas las materias necesarias.
Alumnos con un pensamiento lógico y con una noción de que cualquier tema o rama de las matemáticas esta ligado, como el álgebra a la geométria, podrían, en mi opinion, tener un mejor desempeño y comprension de las ciencias exactas.
Sin embargo, el problema de la educación en México tiene muchas más vertientes que el mero método de enseñanza. Es incomparable una preparatoria acutal con la Escuela Nacional Preparatoria en sus inicios, ya que en esa época la ENP era la unica institución de su clase, permitiendole tener excelentes maestros. Tal es el caso de los autores de estos libros, quienes escribieron sus propios textos para impartir los cursos de los cuales eran titulares, desgraciadamente creo que en este tiempo la enseñanza de las matemáticas falla

desde quien las enseña, pues en la mayoria de los casos no son personas que tengan un dominio de los temas que imparten.

Estas fallas junto con algunos temas políticos que no pretendo discutir, han creado una notable decadencia en la educación en México, en mi opinion es muy poco el porcentaje de la población que tiene una comprensión aceptable de las matemáticas, quiza en muchos casos no es necesaría mucha de la teoría de esta ciencia, pero si el pensamiento lógico y deductivo de una persona que práctica y aplica esta materia.

Capítulo 5

Bibliografía

1.-*Ramírez, Manuel.* **Nociones de Geometra Analítica.** México, Oficina Tip. De la secretara de fomento, 1886.

2.-*Echegaray, Francisco.* **Nociones de Aplicación del Cálculo Algebraico a la Geometría y recíprocamente.** México, Imp. Hijas de J.F.Jens, 1898.

3.-*Torres Torrija, Manuel.* **Tratado de Matemáticas Superirores. Tomo I.** México, Tipografía económica, 1914. Parra, Alfonso.

4.-*Atlas histórico de la Escuela Nacional Preparatoria . Desde su fundación hasta los momentos de celebrarse el centenario de la proclamación de la independencia.* México, Archivo histórico de la UNAM. Fondo de la escuela nacional preparatoria, 1980.

5.-*Diaz de Ovando, Clementina, García Barragan, Elisa.* **La escuela nacional preparatoria. Los afanes y los días 1867-1910. (Tomo I y II).** México, Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de investigaciones esteticas, 1972.

6.-*Nuñez,Miguel.* **La enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria. Los primeros aos (1868-1896).**Centro de investigación en ciencias sociales de la universidad de Guanajuato en los talleres de ipresora Gospa, Morelia, Mich. Agosto 2004.

7.-*Camacho, Alberto.* **Difusión de conociemientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX**. México 2009.