

Universidad Autónoma de Querétaro  
Facultad de Ingeniería  
Maestría en Matemáticas  
Aplicadas

Distancia de Banach-Mazur y aproximación de figuras convexas por  
pares de figuras homotéticas.

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

**Presenta: Tanis Villasana Barrera**

**Dirigido por: Dr. Jesús Jerónimo Castro**

Dr. Jesús Jerónimo Castro  
\_\_\_\_\_  
Presidente

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez  
\_\_\_\_\_  
Secretario

M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga  
\_\_\_\_\_  
Vocal

M.C. Iván González García  
\_\_\_\_\_  
Sinodal

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Firma

Centro Universitario  
Querétaro, Qro.  
2015  
México

---

# **Distancia de Banach-Mazur y aproximación de figuras convexas por pares de figuras homotéticas**

---

**Tanis Villasana Barrera**



# Dedicatoria

---

Este logro es dedicado a mis padres Gregorio y Elvia por su amor incondicional y el gran apoyo que me han brindado para que me siga superando.

A mis hermanos, Aldair y Yomira porque los quiero mucho.

Al Dr. Jesús Jerónimo por la motivación que siempre me ofrece, y por su ayuda en todo momento durante el desarrollo de esta tesis.

A mis amigos, Hugo, Gaby y Sergio por ofrecerme su ayuda y por motivarme para terminar este trabajo de tesis.

Doy gracias a todos y sobre todo a Dios, por permitirme seguir adelante en la vida y en mi carrera como matemático.



# Introducción

---

El Análisis Funcional Geométrico estudia estructuras lineales de dimensiones altas. Algunos ejemplos de esas estructuras son los espacios  $\mathbb{R}^n$  y de Banach, conjuntos convexos y operadores lineales en dimensiones altas. Una pregunta central del Análisis Funcional Geométrico es: ¿A qué se parece una típica estructura  $n$ -dimensional conforme  $n$  tiende a infinito? Una de las principales herramientas del análisis funcional geométrico es la teoría de la concentración de medida, la cual ofrece una visión geométrica sobre los teoremas límite de la teoría de probabilidad. El Análisis funcional geométrico por tanto junta tres áreas: Análisis Funcional, Geometría Convexa y Teoría de Probabilidad. En esta tesis nos enfocaremos en algunas relaciones que existen entre las primeras dos áreas arriba mencionadas.

En el capítulo uno se introducen las nociones básicas de Convexidad, Análisis Funcional y espacios normados. Todas estas nociones son necesarias para el desarrollo de los dos capítulos posteriores. El capítulo finaliza con el famoso y muy útil teorema de John.

En el capítulo dos se dan una serie de resultados conocidos sobre aproximación de cuerpos convexos por polígonos inscritos de área máxima y polígonos circunscritos de área mínima. El capítulo empieza con un importante teorema de A.S. Besicovitch el cual afirma que en toda figura convexa en el plano se puede inscribir un hexágono regular afín. Después, se estudia un teorema de E. Sas sobre polígonos inscritos de área máxima, posteriormente se estudia un teorema de G.D. Chakerian sobre aproximación de figuras convexas por pares de polígonos

paralelos y algunas de sus aplicaciones. En la última sección se ve un teorema de W. Kuperberg el cual mejora la cota de Chakerian sobre el área del cuadrilátero circunscrito de área mínima.

En el capítulo tres se muestra un pequeño resultado, cuya demostración es inédita, sobre la distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el cuadrilátero. Después se demuestra, a todo detalle, que la distancia de Banach- Mazur entre el triángulo y el pentágono regular es  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Es importante mencionar que aunque este resultado es conocido, no aparece en la literatura una demostración con todos los detalles necesarios. El capítulo finaliza con algunas observaciones a conjeturas existentes sobre la distancia de Banach- Mazur entre el triángulo y un cuerpo convexo en general y se enuncia un par de nuevas conjeturas.

---

# Contenido

---

<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Conceptos básicos de Convexidad y Análisis Funcional</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones básicas de espacios normados . . . . .	1
1.2. Correspondencia entre espacios de Banach y cuerpos convexos . .	3
1.3. Métrica de Banach-Mazur . . . . .	6
1.4. Distancia de Banach-Mazur al elipsoide . . . . .	9
<b>2. Polígonos de área máxima inscritos y polígonos de área mínima circunscritos</b>	<b>13</b>
2.1. Teorema de Besicovitch . . . . .	13
2.2. Teorema de Sas y aproximación poligonal de cuerpos convexos . .	15

---

2.3. Teorema de Chakerian . . . . .	18
2.3.1. Aplicaciones del Teorema de Chakerian . . . . .	20
2.4. Teorema de Kuperberg . . . . .	21
<b>3. Distancia de Banach-Mazur en el plano</b>	<b>25</b>
3.1. Distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el cuadrilátero . . .	25
3.2. Distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el pentágono regular	27
3.3. Distancia de Banach-Mazur entre cuadriláteros . . . . .	43
3.4. Conjetura de Lassak y Teorema de Fleischer . . . . .	47
<b>4. Conclusiones</b>	<b>57</b>

---

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de Convexidad y Análisis Funcional

---

### 1.1. Nociones básicas de espacios normados

Empecemos recordando brevemente algunas nociones básicas de Análisis Funcional.

**Definición 1.1.1** Una norma definida sobre un espacio vectorial lineal  $X$ , es una función  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

1. *no negatividad*:  $\|x\| \geq 0$  para toda  $x \in X$  y  $\|x\| = 0$  si, y sólo si,  $x = 0$ ;
2. *homogeneidad*:  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$  y para toda  $x \in X$ ;
3. *desigualdad triangular*:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para toda  $x, y \in X$ .

Decimos que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio normado, es decir, el espacio  $X$  dotado de una norma  $\|\cdot\|$ .

**Definición 1.1.2** Una métrica definida sobre un espacio vectorial lineal  $X$ , es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

1. *no negatividad*:  $d(x, y) \geq 0$  para toda  $x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ ;
2. *simetría*:  $d(x, y) = d(y, x)$  para toda  $x, y \in X$ ;
3. *desigualdad triangular*:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para toda  $x, y, z \in X$ .

Podemos definir una métrica (inducida por la norma en  $(X, \|\cdot\|)$ ) sobre  $X$  como  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Utilizando esta definición de métrica nos dirigimos a definir una *sucesión de Cauchy*.

Una sucesión  $\{x_n\}$  en  $X$  se dice *sucesión de Cauchy*, si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  siempre que  $n, m > N$ .

Los *Espacios de Banach* son espacios normados completos, más precisamente, son espacios normados donde toda sucesión de Cauchy es convergente.

Los siguientes son algunos ejemplos clásicos de espacios de Banach.

1. *El espacio de funciones continuas*  $C[0, 1]$  que consiste de todas las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que son continuas. Esto es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

2. Para  $1 \leq p < \infty$ , *el espacio de las funciones  $p$ -integrables*  $L_p[0, 1]$  que consiste de todas las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f|^p$  es integrable, en el sentido de Lebesgue, sobre  $[0, 1]$ . Esto es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

## 1.2 Correspondencia entre espacios de Banach y cuerpos convexos 3

3. Para  $1 \leq p < \infty$ , el espacio de las sucesiones  $p$ -sumables  $l_p$  que consiste de todas las sucesiones de números reales  $x = (x_i)$  tal que la serie  $\sum_i |x_i|^p$  converge. Esto es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Dados dos espacios de Banach  $X, Y$ , se dice que un *operador lineal* es un mapeo  $T : X \rightarrow Y$  que satisface  $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$  para toda  $x, y \in X$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . En particular, si  $Y = \mathbb{R}$ , decimos que  $T$  es un *funcional lineal*. Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es *acotado* si existe algún número  $M > 0$  de manera que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$  para toda  $x \in X$ . Al ínfimo  $M$  de entre todos aquellos números se le llama *norma* de  $T$ :

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Un operador lineal  $T$  es continuo si, y sólo si, es acotado.

## 1.2. Correspondencia entre espacios de Banach y cuerpos convexos

Un conjunto  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  se dice *convexo* si dados dos puntos de  $K$ , el segmento que los une está contenido en  $K$ . Un vector se dice una *combinación convexa* de puntos  $x_1, \dots, x_m$  en  $\mathbb{R}^n$  si tiene la forma

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Un conjunto  $K$  es un conjunto convexo si, y sólo si, contiene todas las combinaciones convexas de cualquier conjunto de puntos de  $K$ .

Algunos conjuntos convexos pueden ser construidos de conjuntos arbitrarios tomando su envolvente convexa. La *envolvente convexa* de un conjunto  $A$  en  $\mathbb{R}^n$

es el menor conjunto convexo que contiene a  $A$ , denotado como  $\text{conv}(A)$ . Equivalentemente,  $\text{conv}(A)$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de  $A$ .

Recordemos que un conjunto convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  es llamado *simétrico* si existe un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  tal que si  $x \in K$  entonces  $2p - x \in K$ .

Un conjunto convexo, acotado, con interior no vacío se llama *cuerpo convexo*.

Sea  $X$  un espacio de Banach  $n$ -dimensional. Al elegir un mapeo biyectivo  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos identificar a  $X$  con el espacio vectorial lineal  $\mathbb{R}^n$  equipado con alguna norma  $\|\cdot\|$ , a menudo denotado como

$$X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

para un arbitrario espacio de Banach  $n$ -dimensional  $X$ .

Un ejemplo clásico de un espacio dimensionalmente finito es la versión  $n$ -dimensional de los espacios  $l_p$ , la cual es denotada como  $l_p^n$ . Así  $l_p^n$  es el espacio vectorial lineal  $\mathbb{R}^n$  equipado con la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty; \quad \|x\|_\infty = \max_{i \leq n} |x_i|.$$

La siguiente proposición establece una correspondencia entre espacios de Banach dimensionalmente finitos y cuerpos convexos simétricos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.2.1** (*Espacios de Banach y cuerpos convexos simétricos*).

1. Sea  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Entonces su bola unitaria  $B_X$  es un cuerpo convexo simétrico en  $\mathbb{R}^n$ .
2. Sea  $K$  un cuerpo convexo simétrico en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $K$  es la bola unitaria de algún espacio normado  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ . Además, si consideramos el funcional de Minkowski de  $K$ , definido para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\}.$$

Entonces  $\|\cdot\|_K$  define una norma sobre  $\mathbb{R}^n$ , y  $K$  es la bola unitaria del espacio de Banach  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ .

La Figura 1.1 ilustra la definición del funcional Minkowski.

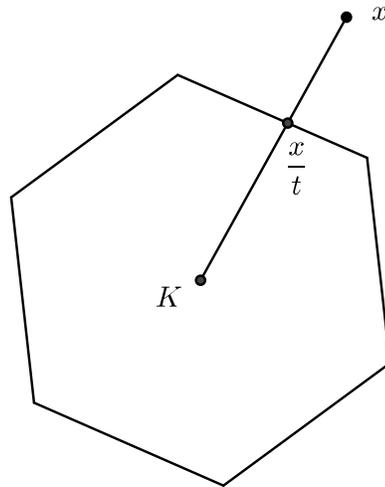


Figura 1.1: Funcional de Minkowski

La correspondencia entre los espacios de Banach y los cuerpos convexos establecida en la Proposición 1.2.1, es simple, pero es una herramienta extremadamente útil. Esto permite usar argumentos de geometría convexa en el análisis funcional y viceversa. Esta correspondencia es especialmente útil para los clásicos espacios  $l_p^n$ , donde sus bolas unitarias, denotadas por  $B_p^n$ , son fáciles de describir geoméricamente.

### Ejemplo 1.2.1

1. La bola unitaria del espacio Euclidiano  $n$ -dimensional  $l_2^n$  es la bola unitaria Euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .
2. La bola unitaria  $B_\infty^n$  de  $l_\infty^n$  con centro en el origen y lado 2.

La Figura 1.2 ilustra las formas de las bolas  $B_1^n$ ,  $B_2^n$  y  $B_\infty^n$  en dimensión  $n = 2$ .

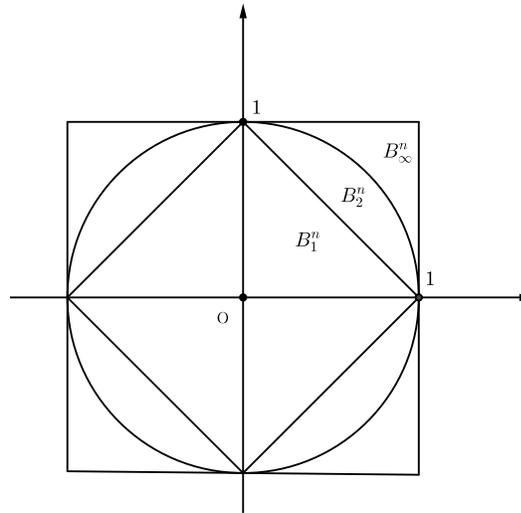


Figura 1.2: Bolas unitarias

### 1.3. Métrica de Banach-Mazur

El concepto de distancia usualmente cuantifica cuán lejos están dos objetos uno de otro. Cualitativamente, esto puede ser usado para diferenciar dos objetos entre sí. Por ejemplo, si dos puntos en el espacio tienen distancia cero uno del otro, ellos realmente son el mismo punto. La noción de distancia es una versión cuantitativa de identificación; no sólo se puede decir si los objetos son el mismo sino también medir cuán diferentes son. Cómo uno identifica matemáticamente objetos, depende de su naturaleza. Por ejemplo, en Topología, identificamos espacios usando homeomorfismos; en Álgebra, identificamos grupos usando homomorfismos; en Geometría Convexa Clásica, podemos identificar polítopos usando movimientos rígidos; en Análisis Funcional, identificamos espacios de Banach usando isomorfismos. El concepto de distancia de Banach-Mazur, la cual veremos en este capítulo, es una versión cuantitativa del concepto de isomorfismo.

Antes de dar la definición de distancia de Banach-Mazur necesitamos recordar dos conceptos matemáticos importantes. Estos son:

- (a) Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  se dice un *Isomorfismo* si es biyectivo y tanto  $T$  como  $T^{-1}$  son acotados.

- (b) Dos espacios de Banach  $X$  y  $Y$  se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

Se darán dos definiciones equivalentes de la distancia de Banach-Mazur, una en el contexto de análisis funcional y la otra en geometría convexa.

### Definición 1.3.1

1. Analítica. Sean  $X, Y$  dos espacios normados isomorfos. La distancia de Banach-Mazur entre  $X$  y  $Y$  se define como

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| : T : X \rightarrow Y \text{ es un isomorfismo} \}.$$

2. Geométrica. Denotemos a  $\mathcal{C}^n$  como la familia de todos los cuerpos convexos en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . La distancia de Banach-Mazur, también llamada por comodidad la BM-distancia, de  $D, C \in \mathcal{C}^n$ , es el número

$$d(D, C) = \inf_{a, h_\lambda} \{ \lambda : a(C) \subset D \subset h_\lambda(a(C)) \},$$

donde  $h_\lambda$  establece una homotecia con razón  $\lambda$  y  $a$  es una transformación afín.

Recordemos que una transformación afín es una transformación lineal seguida de una traslación.

La Figura 1.3 ilustra la definición de la distancia de Banach-Mazur entre un hexágono y un círculo.

Las nociones analítica y geométrica de la distancia de Banach-Mazur se conectan a través de la correspondencia entre espacios normados y cuerpos convexos simétricos. De esta forma la distancia de Banach-Mazur entre espacios  $X$  y  $Y$  es la misma que la distancia de Banach-Mazur entre sus bolas unitarias  $B_X$  y  $B_Y$ .

### Observación 1.3.1

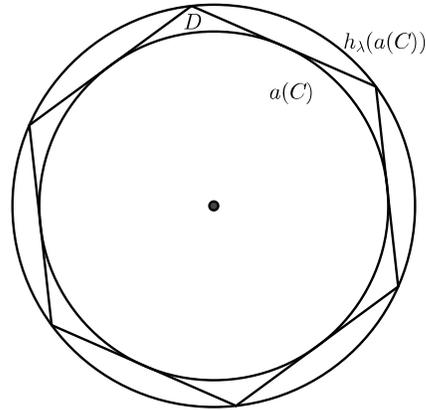


Figura 1.3: Distancia de Banach-Mazur

1. Recordemos que todos los espacios de Banach dimensionalmente finitos, de la misma dimensión, son isomorfos. Por lo tanto, la noción de distancia de Banach-Mazur está bien definida para éstos.
2. La distancia de Banach-Mazur es invariante bajo transformaciones lineales invertibles  $S$ . Esto es  $d(K, L) = d(SK, SL)$ .

Las siguientes propiedades de la distancia de Banach-Mazur se siguen de las correspondientes propiedades de los operadores lineales sobre espacios normados.

**Proposición 1.3.1** (*Propiedades de la distancia de Banach-Mazur*). Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios normados  $n$ -dimensionales. Entonces:

1.  $d(X, Y) \geq 1$ . Además,  $d(X, Y) = 1$  si, y sólo si,  $X$  y  $Y$  son isométricos;
2.  $d(X, Y) = d(Y, X)$ ;
3.  $d(X, Y) \leq d(X, Z) d(Z, Y)$ ;
4.  $d(X, Y) = d(X^*, Y^*)$ .

Recordemos que un isomorfismo  $T$  es una isometría si  $\|T\| = \|T^{-1}\|$ , o equivalentemente si  $\|Tx\| = \|x\|$  para toda  $x \in X$ . Dos espacios  $X, Y$  son isométricos

si existe una isometría  $T : X \rightarrow Y$ . También, dado un espacio normado  $X$ , tenemos que su *espacio dual*  $X^*$  consiste de todos los funcionales lineales continuos sobre  $X$ , equipado con la norma del operador. El espacio dual  $X^*$  es siempre un espacio de Banach.

Las primeras tres propiedades nos hacen recordar las condiciones de una métrica: no negatividad, simetría y desigualdad del triángulo. La única diferencia es que las propiedades que tenemos arriba están en forma multiplicativa. Para obtener la forma aditiva simplemente aplicamos el logaritmo:

**Corolario 1.3.1** (*Métrica de Banach-Mazur*).  $\log d(X, Y)$  define una métrica sobre el conjunto de todos los espacios de Banach de dimensión  $n$ . Equivalentemente,  $\log d(X, Y)$  define una métrica sobre el conjunto de todos los cuerpos convexos centralmente simétricos en  $\mathbb{R}^n$ .

Ya que  $\log d(X, Y) = 0$  para espacios isométricos  $X$  y  $Y$ , podríamos creer que todos los espacios isométricos (pero no isomorfos!) deberían ser identificados uno con el otro en el análisis funcional geométrico. Geométricamente esto significa, por ejemplo, que en  $\mathbb{R}^n$  todos los elipsoides son considerados el mismo cuerpo, los cubos y paraleltopos son considerados el mismo cuerpo, pero un elipsoide y un cubo no se consideran el mismo cuerpo.

Se puede verificar que el conjunto de todos los espacios de Banach de dimensión  $n$  equipados con la métrica de Banach-Mazur es un espacio métrico compacto. Por esta razón, este espacio es llamado el *compacto de Banach-Mazur*. Muy pocas propiedades del compacto de Banach-Mazur son conocidas, ya que usualmente es difícil calcular la distancia de Banach-Mazur entre un par dado de espacios normados. Sin embargo, cuando uno de los espacios es  $l_2^n$ , es posible dar una cota superior sobre la distancia.

## 1.4. Distancia de Banach-Mazur al elipsoide

En [7], F. John establece una desigualdad la cual es uno de los primeros resultados sobre la distancia de Banach-Mazur.

**Teorema 1.4.1** Sea  $K$  un cuerpo convexo centralmente simétrico con centro en el origen de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $D$  el elipsoide de volumen máximo contenido en  $K$ . Entonces

$$D \subseteq K \subseteq \sqrt{n}D.$$

*Demostración.* Sabemos que la distancia de Banach-Mazur es invariante bajo transformaciones lineales invertibles, por lo tanto, podemos suponer que  $D = B_2^n$  aplicando una transformación lineal apropiada a  $K$  y  $D$ . Procederemos en esta prueba por contradicción. Supongamos que  $K \not\subseteq \sqrt{n}D$ . Entonces existe al menos un  $x_0 \in K$  tal que

$$s := \|x_0\|_2 > \sqrt{n}. \quad (1.1)$$

Aplicando una rotación en  $\mathbb{R}^n$  podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el vector  $x_0$  está dado como  $x_0 = (s, 0, \dots, 0)$ . Por la simetría y convexidad de  $K$ , tenemos

$$\text{conv}\{\pm x_0, D\} \subseteq K.$$

Vamos a encontrar dentro del cuerpo convexo  $\text{conv}\{\pm x_0, D\}$  un elipsoide  $\mathcal{E}$  de volumen más grande que el de  $D$ , esto va a contradecir el hecho de que  $D$  es de volumen máximo. Podemos construir a  $\mathcal{E}$  simplemente alargando la bola  $D$  en dirección de  $s$  y comprimiendo ligeramente a  $D$  en las direcciones ortogonales, ver figura 1.4.

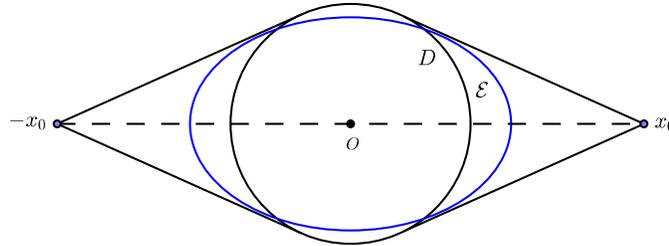


Figura 1.4: Teorema de Jhon

Para tal fin, consideremos que el elipsoide  $\mathcal{E}$  está centrado en el origen, y que sus semi-ejes están alineados en las direcciones de los ejes de coordenadas con longitudes  $(a, b, b, \dots, b)$ . Aquí  $a, b > 0$  son parámetros a determinar. Primeramente, nos gustaría que  $\text{vol}(\mathcal{E}) > \text{vol}(D)$ . Ya que  $D$  es una bola unitaria, tenemos  $\text{vol}(\mathcal{E}) = ab^{n-1}\text{vol}(D)$ , lo cual nos da la primera restricción

$$ab^{n-1} > 1.$$

En segundo lugar, debemos tener que  $\mathcal{E} \subseteq \text{conv}\{\pm x_0, D\}$ , lo anterior nos da la segunda restricción sobre  $a, b$ . Ya que los cuerpos  $\mathcal{E}$  y  $\text{conv}\{\pm x_0, D\}$  son ambos cuerpos de revolución alrededor del eje  $x_0$ , el problema se transforma en un problema bidimensional. Ahora consideremos el primer cuadrante en  $\mathbb{R}^2$ , ver figura 1.5 (a). Aquí se tiene que la bola  $D$  y el elipsoide  $\mathcal{E}$  son tangentes a la frontera de  $\text{conv}\{\pm x_0, D\}$ . Sea  $t$  la intersección con el eje  $y$  de la línea que pasa a través de  $x_0$  y es tangente a  $D$  y  $\mathcal{E}$ , simultáneamente. Al utilizar semejanza de triángulos obtenemos

$$\frac{s}{t} = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{1}. \quad (1.2)$$

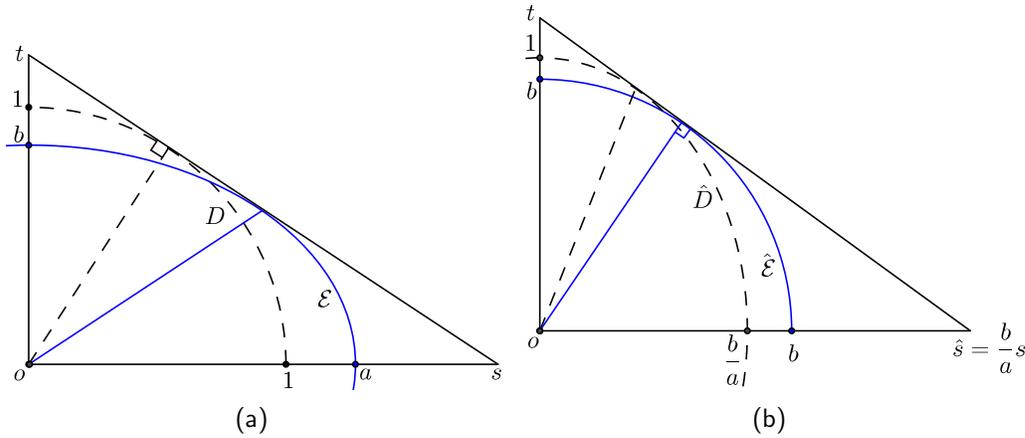


Figura 1.5: Prueba del Teorema de John

Ahora vamos a usar la tangencia de  $\mathcal{E}$  con la recta que pasa a través de los puntos  $(0, t)$  y  $(s, 0)$ . Para este propósito, vamos a contraer a  $D$  y  $\mathcal{E}$  a lo largo del eje  $x$  por el factor  $\frac{b}{a}$ , ver figura 1.5 (b). Esto transforma a  $\mathcal{E}$  en la bola Euclidiana  $\hat{\mathcal{E}}$  de radio  $b$ , y transforma a  $s$  en  $\hat{s} = \frac{b}{a}s$ . Aquí la semejanza de triángulos nos da

$$\frac{b}{\hat{s}} = \frac{t}{\sqrt{\hat{s}^2 + t^2}}.$$

Esto es equivalente a  $s^2 t^2 = b^2 s^2 + a^2 t^2$ . Dividiendo en ambos lados de la ecuación por  $t^2$  y utilizando (1.2), se tiene que  $a^2 = s^2(1 - b^2) + b^2$ . Si elegimos  $b^2 = 1 - \epsilon$  para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño; entonces  $a^2 = 1 + (s^2 - 1)\epsilon$ . Ya que en

nuestro supuesto tenemos  $s > \sqrt{n}$ , se concluye que (1.1) implica:

$$a^2 b^{2(n-1)} > (1 + (n-1)\epsilon)^2 (1 - (n-1)\epsilon) \geq 1.$$

Lo cual es una contradicción, ya que lo anterior implica que el volumen de  $D$  es menor que el volumen de  $\mathcal{E}$ .  $\square$

Como un ejemplo de aplicación del Teorema de John, veamos el siguiente.

**Teorema 1.4.2** *Sea  $X$  un espacio de Banach  $n$ -dimensional arbitrario. Entonces se tiene que*

$$d(X, l_2^n) \leq \sqrt{n}.$$

*Demostración.* Vamos a demostrar este teorema haciendo uso del Teorema de John mencionado arriba. Sea  $B_X$  la bola unitaria del espacio de Banach  $X$ , por la Proposición 1.3.1 tenemos que  $B_X$  es un cuerpo convexo centralmente simétrico. Luego, como  $B_2^n$ , la bola unitaria de  $l_2^n$ , es la bola unitaria Euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ , entonces podemos aplicar una transformación afín a  $B_2^n$  tal que resulte ser el elipsoide de volumen máximo en  $B_X$ . Aplicamos ahora el Teorema de John, de lo cual se sigue el resultado deseado.  $\square$

---

## Capítulo 2

# Polígonos de área máxima inscritos y polígonos de área mínima circunscritos

---

### 2.1. Teorema de Besicovitch

Antes que nada, introducimos algo de notación necesaria. Dado un cuerpo convexo  $K$ , denotamos el área de  $K$  como  $|K|$ . Dados dos puntos, digamos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{R}^2$ , denotamos como  $pq$  al segmento de recta que une al punto  $p$  con el punto  $q$ . La longitud de  $pq$  se denotará como  $|pq|$ . Para decir que dos segmentos son paralelos utilizamos el símbolo  $\parallel$ .

En 1948 Besicovitch en [1] probó el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.1** *Para cualquier cuerpo convexo  $K$  existen puntos  $a, b, c, d, e, f \in$*

$\partial K$ , tal que  $|ab| = |ed| = \frac{1}{2}|fc|$ ,  $ab \parallel ed \parallel fc$  y de manera que las líneas  $ad$ ,  $eb$  y  $fc$  se intersectan en el punto medio de  $fc$ .

Cualquier hexágono que satisface estas condiciones es una imagen afín de un hexágono regular. Besicovitch usó su teorema para calcular el área más grande que puede tener un cuerpo convexo centralmente simétrico inscrito en un cuerpo convexo dado.

*Demostración.* La Figura 2.1 muestra la idea gráfica. Para una dirección fija  $\theta$  se escogen puntos sobre  $\partial K$  de la siguiente manera: primero se escoge un punto arbitrario  $a$ , luego se selecciona otro punto  $b$  tal que  $ab$  tenga la dirección  $\theta$ . Entonces se elige a  $ed$  tal que  $|ed| = |ab|$  y  $ed \parallel ab$ , finalmente se escogen  $f$  y  $c$  de forma que  $fc$  es equidistante de  $ab$  y  $ed$ .

Es posible seleccionar a  $a$  de manera que  $|fc| = 2|ab|$ . Además, en las posiciones extremas de  $a$  se tiene  $|ab| = 0$  ó  $|fc| = |ab|$ , y usando continuidad junto con el Teorema del valor intermedio, tenemos que existe una posición de  $a$  donde la relación requerida se mantiene, es decir,  $|fc| = 2|ab|$ . Nótese que  $fc$  y  $ab$  son únicos para cada  $\theta$  ya que  $K$  es estrictamente convexo. Sea  $o$  el punto de intersección de  $ad$ ,  $eb$  y  $fc$ . Queremos que  $\frac{|of|}{|fc|} = \frac{1}{2}$ . Denotemos  $\frac{|of|}{|fc|} = \alpha(\theta)$ . Obviamente,  $\alpha(\theta) = 1 - \alpha(\theta + \pi)$ . Finalmente, usando la continuidad de  $\alpha(\theta)$ , existe  $\theta_0$  tal que  $\alpha(\theta_0) = \frac{1}{2}$  y en consecuencia el hexágono correspondiente  $abcdef$  es afín regular. □

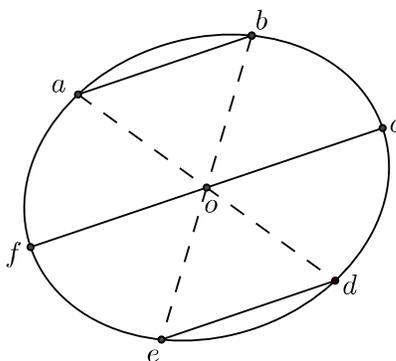


Figura 2.1: Teorema de Besicovitch

## 2.2. Teorema de Sas y aproximación poligonal de cuerpos convexos

Las Series de Fourier han sido usadas para estudiar las mejores aproximaciones, interior y exteriormente, a un cuerpo convexo  $K$  por  $n$ -ágonos convexos cuando  $n$  es un entero mayor o igual a 3. Esto se muestra en el siguiente teorema de E. Sas. El teorema es igualmente demostrado en [12].

**Teorema 2.2.1** *Sea  $K$  un cuerpo convexo de área 1. Para cualquier  $n \geq 3$ , sea  $\alpha_n(K)$  el área máxima de entre todos los polígonos convexos inscritos en  $K$ , con a lo más  $n$  vértices. Entonces,*

$$\alpha_n(K) \geq \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right), \quad (2.1)$$

la igualdad se da si, y sólo si,  $K$  es un elipse.

*Demostración.* Si  $2c$  denota el diámetro de  $K$ , claramente se puede suponer que  $(c, 0)$  y  $(-c, 0)$  son dos puntos sobre la frontera de  $K$ . Bajo esta suposición la curva frontera de  $K$  puede ser representada paraméricamente por

$$x(w) = c \cos(w), \quad y(w) = e(w) \operatorname{sen}(w) \quad (e(w) \geq 0, 0 \leq w \leq 2\pi) \quad (2.2)$$

(Obviamente  $y(0) = y(\pi) = 0$  y se puede definir  $e(0) = e(\pi) = 0$ ). Las funciones  $e(w)$ ,  $x(w)$  y  $y(w)$  son vistas como funciones sobre  $(-\infty, \infty)$  de período  $2\pi$ . Sea  $\epsilon_n = \frac{2\pi}{n}$ . Si un  $w$  es dado y es  $i$  un entero, sea  $w_i = w + i\epsilon_n$ . Ahora, si  $p(w) = (x(w), y(w))$ , y si  $P(w)$  denota al polígono en  $K$  con vértices en los puntos  $p(w_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), entonces por geometría elemental sabemos que

$$\begin{aligned} a(P(w)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x(w_i) - x(w_{i+1}))(y(w_i) + y(w_{i+1})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x(w_{i-1}) - x(w_{i+1}))y(w_i). \end{aligned}$$

Lo anterior junto con (2.2), implica que

$$a(P(w)) = c \operatorname{sen}(\epsilon_n) \sum_{i=1}^n y(w + i\epsilon_n) \operatorname{sen}(w + i\epsilon_n).$$

Por lo tanto, el valor medio de  $a(P(w))$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  está dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(P(w)) dw = c \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen}(\epsilon_n) \int_0^{2\pi} y(w) \operatorname{sen}(w) dw.$$

Si  $y_1$  denota la parte superior de  $\partial K$ , y  $y_2$  la parte inferior con respecto al eje  $x$ , entonces, sustituyendo  $x = c \cos(w)$ , encontramos

$$1 = a(K) = \int_{-c}^c (y_1(x) - y_2(x)) dx = c \int_0^{2\pi} y(w) \operatorname{sen}(w) dw.$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(P(w)) dw = \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen}(\epsilon_n).$$

De lo anterior se siguen dos posibles resultados para toda  $w$

$$a(P(w)) = \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen}(\epsilon_n) \tag{2.3}$$

ó existe un  $w^*$  tal que

$$a(P(w^*)) > \frac{n}{2\pi} \operatorname{sen}(\epsilon_n). \tag{2.4}$$

Lo anterior establece la desigualdad buscada en (2.1).

El caso de la igualdad es un poco más técnico. Si  $K$  es un disco circular, entonces el  $n$ -ágono regular inscrito en el círculo tiene área máxima, y es claro que en este caso, y por tanto también para elipses, en (2.1) se da la igualdad. Queda por demostrar que la igualdad en (2.1) implica que  $K$  es un elipse. Para este propósito pueden emplearse las Series de Fourier. Pero primero necesitamos hacer algunas observaciones respecto a la suavidad de la frontera de  $K$ , y una condición necesaria en relación a que un polígono convexo inscrito tenga área máxima. Claramente, la igualdad en (2.1) implica que (2.3) debe satisfacerse para toda  $w$  (de otro modo (2.4) sería cierta) y esto también implica que no hay ningún polígono convexo en  $K$  de a lo más  $n$  vértices cuya área sea más grande que

## 2.2 Teorema de Sas y aproximación poligonal de cuerpos convexos 17

$a(P(w))$ . De lo anterior es fácil deducir que en cada punto  $p(w)$  debe haber una línea soporte paralela al segmento de recta  $p(w - \epsilon_n)p(w + \epsilon_n)$ . Esto muestra en particular que  $\partial K$  no contiene segmentos de recta. Además, tal segmento debería contener en su interior relativo a un punto  $p(w_0)$  y, si  $\delta$  es suficientemente pequeño, otro punto  $p(w_0 + \delta)$ , lo cual es imposible ya que el segmento de recta entonces tendría que ser paralelo a  $p(w_0 - \epsilon_n)p(w_0 + \epsilon_n)$  y  $p(w_0 - \delta - \epsilon_n)p(w_0 + \delta - \epsilon_n)$ . Además, en cada punto frontera, por decir  $p(w_0)$ , el dominio puede tener sólo una línea soporte. Esto puede ser visto como sigue. Sea  $L$  la línea soporte en  $p(w_0)$  paralela a  $p(w_{-1})p(w_1)$ , y supóngase que hay otra línea soporte, digamos  $L'$ , en  $p(w_0)$ . Entonces, seleccionando  $\eta$  tal que el segmento de recta  $p(w_0 + \eta - \epsilon_n)p(w_0 + \eta + \epsilon_n)$  es paralelo a  $L'$ , uno puede inferir que  $K$  tiene líneas soporte paralelas en  $p(w_0)$  y  $p(w_0 + \eta)$ . Esto es imposible ya que  $\partial K$  no contiene segmentos de recta y  $|\eta|$  puede ser escogido arbitrariamente pequeña seleccionando  $L'$  cercana a  $L$ . Se puede mostrar ahora que la igualdad en (2.1) se da sólo para elipses. Ya que es evidente que para cualquier  $w_0$  hay un  $\alpha > 0$  tal que  $y(w)$  es monótona sobre  $w_0 + \alpha$  y  $w_0 - \alpha$  y se sigue que  $y(w)$  tiene derivadas laterales en todas partes. Ya que en cada punto de  $\partial K$  hay sólo una línea soporte, también se sigue que las dos derivadas laterales deben ser iguales. por lo tanto, para cada  $w_0$  la derivada  $y'(w_0)$  existe y debe ser igual a la pendiente del segmento  $p(w_0 - \epsilon_n)p(w_0 + \epsilon_n)$ . Ya que  $y'(w_0) = (dy/dx)x'(w)$  se sigue que para toda  $w$

$$y'(w) = \frac{y(w + \epsilon_n) - y(w - \epsilon_n)}{x(w + \epsilon_n) - x(w - \epsilon_n)} x'(w) = \frac{1}{2\text{sen}(\epsilon_n)} (y(w + \epsilon_n) - y(w - \epsilon_n)) \quad (2.5)$$

Notamos que esto muestra que  $y'$  es continua. Ahora consideremos la expansión de Fourier

$$y(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kw) + b_k \text{sen}(kw)). \quad (2.6)$$

Una evaluación obvia de los coeficientes de Fourier de  $y(w + \epsilon_n) - y(w - \epsilon_n)$  muestra que

$$y'(w) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(k\epsilon_n)}{\text{sen}(\epsilon_n)} (b_k \cos(kw) - a_k \text{sen}(kw)). \quad (2.7)$$

También se observa que (2.5) implica que

$$y'(w) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos(kw) - ka_k \text{sen}(kw)).$$

Restando esta relación de (2.7) y aplicando la identidad de Parseval, uno puede concluir que

$$2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \left( k - \frac{\text{sen}(k\epsilon_n)}{\text{sen}(\epsilon_n)} \right)^2 = 0. \quad (2.8)$$

Es necesario mostrar que para  $k \geq 2$  y  $n \geq 3$  se tiene que

$$k\text{sen}(\epsilon_n) - \text{sen}(k\epsilon_n) \neq 0. \quad (2.9)$$

Esta desigualdad, y de hecho una desigualdad más fuerte  $k\text{sen}(\epsilon) - |\text{sen}(k\epsilon)| > 0$ , puede fácilmente ser probada por inducción con respecto a  $k$ . Uno tiene sólo que notar que  $0 < \epsilon_n < \pi$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} (k+1)\text{sen}(\epsilon_n) - |\text{sen}(k+1)\epsilon_n| &= (k+1)\text{sen}(\epsilon_n) - |\text{sen}(k\epsilon_n)\cos(\epsilon_n) + \cos(k\epsilon_n)\text{sen}(\epsilon_n)| \\ &\geq (k+1)\text{sen}(\epsilon_n) - |\text{sen}(k\epsilon_n)| - \text{sen}(\epsilon_n) = k\text{sen}(\epsilon_n) - |\text{sen}(k\epsilon_n)|. \end{aligned}$$

De (2.8) y (2.9) se sigue que  $a_0 = 0$  y que  $a_k = b_k = 0$  si  $k \geq 2$ . Por lo tanto  $y(w) = a_1 \cos(w) + b_1 \text{sen}(w)$ ; por lo tanto ya que  $y(0) = 0$  debemos tener  $a_1 = 0$  y consecuentemente  $y(w) = b_1 \text{sen}(w)$ . Junto con  $x(w) = c \cos(w)$  esto implica que la frontera de  $K$  es un elipse  $(x/c)^2 + (y/b_1)^2 = 1$ .  $\square$

### 2.3. Teorema de Chakerian

Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano y sea  $p$  un polígono inscrito en  $K$ . Ahora, para cada lado  $\ell_i$  de  $p$ , consideremos el vector normal a ese lado ( $v_i$ ) y el cual apunta hacia el exterior del polígono. Ahora, consideremos la línea soporte de  $K$  la cual tiene como normal exterior a  $v_i$ . De este modo, obtenemos un polígono  $P$ , circunscrito a  $K$ , cuyos lados son paralelos a los lados de  $p$ . En tal caso diremos que  $P$  es el polígono paralelo a  $p$ . Notemos que solamente para el caso cuando  $p$  es triángulo, podemos asegurar que  $p$  y  $P$  son homotéticos. esto tendrá cierta ventaja, como veremos más adelante. Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente Teorema de G. D. Chakerian [3].

**Teorema 2.3.1** Sean  $K$  un cuerpo convexo,  $p$  un polígono inscrito en  $K$  y sea  $P$  el polígono paralelo a  $p$ , circunscrito a  $K$ . Entonces

$$|K|^2 \geq |p||P|.$$

*Demostración.* La Figura 2.2 muestra la idea geométrica. La prueba del Teorema de Chakerian depende del concepto de Minkowski del *área mixta*,  $A(K, L)$ , de dos cuerpos convexos  $K$  y  $L$ . En este caso  $p$  y  $P$  son  $n$ -ágonos paralelos,  $A(p, P)$  es fácilmente descrita como sigue. Sea  $o$  un punto interior fijo de  $P$ . Si  $l_i$  es la longitud de un lado de  $p$  y  $d_i$  la distancia de  $o$  al correspondiente lado paralelo de  $P$ . Entonces

$$A(p, P) = \frac{1}{2} \sum d_i l_i,$$

sumado sobre todos los lados de  $p$ . En [10] uno puede encontrar un tratado de las propiedades de áreas mixtas y una prueba de la siguiente desigualdad fundamental de Minkowski:

$$A(K, L)^2 \geq |K||L|.$$

Ahora consideremos un cuerpo convexo  $K$ , con un  $n$ -ágono inscrito  $p$  y un  $n$ -ágono paralelo circunscrito  $P$ . Cada lado de  $P$  contiene al menos un punto de  $K$ . Si escogemos tal punto sobre cada lado de  $P$ , entonces estos puntos, tomados juntos con los vértices de  $p$ , son los vértices de un  $2n$ -ágono  $Q$  inscrito en  $K$ . Fijado un punto  $o$  dentro de  $p$ , si  $l_i$  es la longitud de un lado de  $p$ , sea  $d_i$  la distancia de  $o$  al correspondiente lado paralelo de  $P$ . Al hacer un esbozo de la situación, nos damos cuenta de que el área de  $Q$  es dada por

$$Q = \frac{1}{2} \sum d_i l_i = A(p, P).$$

Usando el hecho de que  $Q \subset K$ , y la desigualdad de Minkowski, tenemos,

$$|K|^2 \geq |Q|^2 = |A(p, P)|^2 \geq |p||P|,$$

lo que prueba el Teorema. □

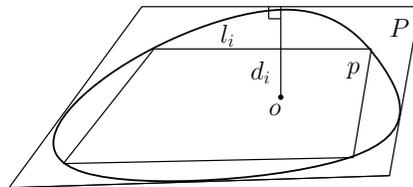


Figura 2.2: Concepto de Minkowski de área mixta

### 2.3.1. Aplicaciones del Teorema de Chakerian

Ahora se derivan un número de corolarios del Teorema de Chakerian, y todas las pruebas siguen básicamente el mismo patrón.

**Corolario 2.3.1** *Cualquier cuerpo convexo  $K$  está contenido en un triángulo con área no mayor a dos veces el área de  $K$ .*

*Demostración.* Sea  $T_0$  un triángulo de área mínima que contenga a  $K$ . Entonces por un teorema demostrado por G. D. Chakerian y L. H. Lange en [2], sabemos que los puntos medios de los lados de  $T_0$  pertenecen a  $K$ . Sea  $t$  el triángulo inscrito en  $K$  formado por los tres puntos mencionados, y sea  $T$  el triángulo paralelo a  $t$  y circunscrito a  $K$ . Tenemos que  $|t| = \frac{1}{4}|T_0|$  y  $|T| \geq |T_0|$ , por lo tanto,

$$|K|^2 \geq |t||T| \geq \left| \frac{1}{4}T_0 \right| |T_0| = \frac{1}{4}|T_0|^2,$$

entonces  $|T_0| \leq 2|K|$ , lo cual queríamos demostrar. □

El resultado del Corolario 2.3.1 es en un sentido lo mejor posible, ya que un paralelogramo  $K$  no está contenido en un triángulo de área menor que dos veces el área de  $K$ . Este resultado lo demostró Gross en [6], quien además demostró que si  $K$  no es un paralelogramo, entonces existe un triángulo  $T \supset K$  de manera que  $|T| < 2|K|$ .

**Corolario 2.3.2** *Cualquier cuerpo convexo  $K$  está contenido en un cuadrilátero  $C_0$  de área no mayor que  $\sqrt{2}$  veces el área de  $K$ .*

*Demostración.* Sea  $C_0$  un cuadrilátero de área mínima que contenga a  $K$ . De nuevo, por el Teorema de Chakerian y Lange, tenemos que los puntos medios de los lados de  $C_0$  pertenecen a  $K$ . Sea  $c$  el cuadrilátero inscrito en  $K$  formado al unir los puntos medios de los lados de  $C_0$ . Sea  $C$  el cuadrilátero paralelo a  $c$

circunscrito a  $K$ . Tenemos que  $|C| \geq |C_0|$ , es fácil ver que  $c$  es un paralelogramo con  $|c| = \frac{1}{2}|C_0|$ . Por lo tanto

$$|K|^2 \geq |c||C| \geq \left| \frac{1}{2}C_0 \right| |C_0| = \frac{1}{2}|C_0|^2,$$

entonces  $|C_0| \leq \sqrt{2}|K|$ , como se quería.  $\square$

Por otro lado, estimaciones buenas para el valor mínimo de  $n$ -ágonos inscritos, para  $n > 4$ , no son conocidas aparentemente. Sin embargo, el siguiente corolario del Teorema de Chakerian muestra como obtener una desigualdad con el  $n$ -ágono inscrito de área máxima.

**Corolario 2.3.3** *Cualquier cuerpo convexo  $K$  está contenido en un  $n$ -ágono  $P$  de área no mayor que  $\frac{2\pi}{n} \csc\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  veces el área de  $K$ .*

*Demostración.* Sea  $p$  un  $n$ -ágono de área máxima inscrito en  $K$ , y sea  $P$  el  $n$ -ágono circunscrito paralelo a  $p$ . Por el Teorema de Sas, tenemos

$$|p| \geq \left( \frac{n}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) |K|.$$

Por tanto

$$|K|^2 \geq |p||P| \geq \left( \frac{n}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) |K||P|,$$

de lo cual se sigue el resultado.  $\square$

## 2.4. Teorema de Kuperberg

En esta sección se mostrará, mediante el Teorema de Kuperberg, que en realidad la cota  $\sqrt{2}$  en el Corolario 2.3.2 nunca se alcanza.

**Teorema 2.4.1** *Todo cuerpo convexo  $K$  de área 1 está contenido en un cuadrilátero de área menor que  $\sqrt{2}$ .*

*Demostración.* Se sabe por el Corolario 2.3.2, derivado del Teorema de Chakerian, que cada cuerpo convexo  $K$  de área 1 está contenido en un cuadrilátero de área  $\leq \sqrt{2}$ . Para demostrar el teorema, supongamos por el contrario que existe un cuerpo convexo  $K$  de área 1 tal que el área más pequeña del cuadrilátero  $C_0$  circunscrito a  $K$  es  $\sqrt{2}$ . Por el Teorema de Chakerian y Lange, sabemos que los puntos medios,  $a, b, c, d$ , de los lados de  $C_0$  pertenecen a  $K$  (ver Figura 2.3). Obviamente, tales puntos forman un paralelogramo  $C$  de área  $\sqrt{2}/2$ .

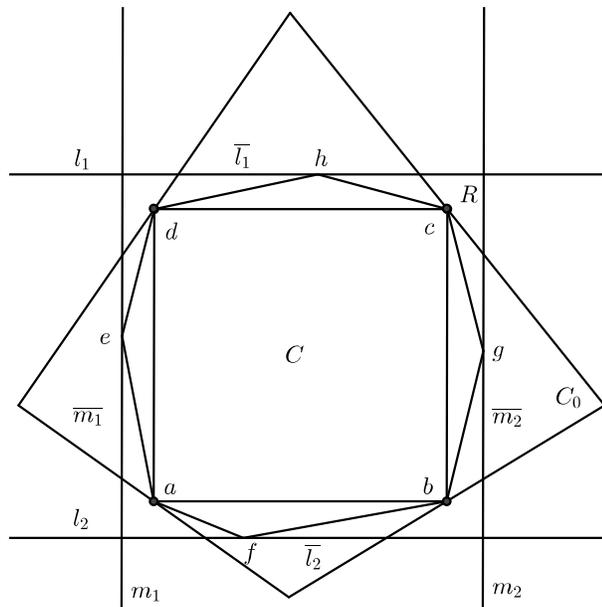


Figura 2.3: Teorema de Kuperberg

Supongamos por simplicidad que  $C$  es un cuadrado ( $C$  puede ser transformado en un cuadrado por una transformación afín que preserva áreas). Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos líneas tangentes a  $K$  en los puntos  $h$  y  $f$ , respectivamente, y además paralelas a  $ab$ , y sean  $m_1$  y  $m_2$  dos líneas tangentes a  $K$  en los puntos  $e$  y  $g$ , respectivamente, y además paralelas a  $bc$ . Esas cuatro líneas delimitan a un rectángulo  $R$  el cual contiene a  $K$ : Sean  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{m}_1, \bar{m}_2$  los lados de  $R$  con  $\bar{l}_i \subset l_i$  y  $\bar{m}_i \subset m_i$  para  $i = 1, 2$ . Sea  $K_1 = afbgchde$ , observemos

que  $|K_1| = \frac{1}{2}|ab|(|\bar{l}_1| + |\bar{m}_1|)$ . Recordemos que  $|R| \geq |C_0| = 2|C|$ , es decir,  $|\bar{m}_1||\bar{l}_1| \geq 2|ab|^2$ . Por tanto, usando el hecho de que la media aritmética de dos números es siempre al menos su media geométrica, tenemos que  $|K_1| = \frac{1}{2}|ab|(|\bar{l}_1| + |\bar{m}_1|) \geq \sqrt{|ab||\bar{m}_1||\bar{l}_1||ab|} \geq \sqrt{2}|ab|^2 = \sqrt{2}|C| = 1$ . Como  $K_1 \subseteq K$  y  $|K_1| = 1$ , entonces  $K_1 = K$ . Observemos que el perímetro de  $R$  es  $4(2)^{\frac{1}{4}}$ , y como sabemos que de entre todos los rectángulos de perímetro fijo el de mayor área es el cuadrado, y un cuadrado de lado  $(2)^{\frac{1}{4}}$  tiene área  $\sqrt{2}$ , obtenemos que  $|R| \leq \sqrt{2}$ . Por otro lado,  $|R| \geq \sqrt{2}$ , se sigue entonces que  $R$  es un cuadrado.

Notemos que cada lado de  $R$  contiene un lado de  $C$  ó toca a  $K$  en sólo un punto. Por lo tanto, uno de los lados  $\bar{l}_1$  o  $\bar{l}_2$ , digamos  $\bar{l}_i$ , toca a  $K$  en sólo un punto, y uno de los lados  $\bar{m}_1$  o  $\bar{m}_2$ , digamos  $\bar{m}_j$ , toca a  $K$  en sólo un punto (ver Figura 2.4). Estos dos puntos de tangencia son vértices de  $K$  y puntos medios de lados adyacentes de  $R$  (el Teorema de Chakerian y Lange es aplicado aquí nuevamente, ya que  $|R| = \sqrt{2}$ , el mínimo). Ahora, una rotación del lado  $\bar{l}_i$  sobre su punto medio para un ángulo positivo suficientemente pequeño transformará al cuadrado  $R$  en un cuadrilátero  $T$  el cual aún contiene a  $K$  y cuya área sigue siendo  $\sqrt{2}$ . Pero esto contradice al Teorema de Chakerian y Lange: uno de los lados de  $T$  toca a  $K$  en sólo un punto el cual no es punto medio de aquel lado.  $\square$

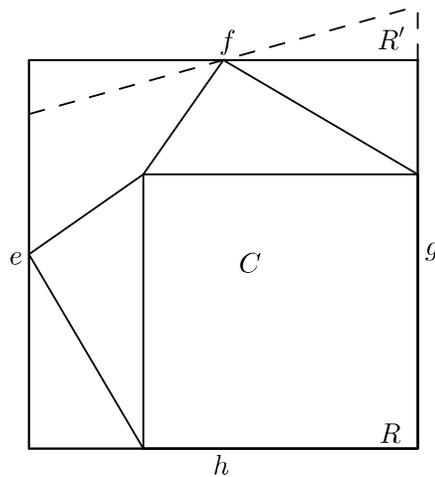


Figura 2.4: Teorema de Kuperberg



---

## Capítulo 3

# Distancia de Banach-Mazur en el plano

---

### 3.1. Distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el cuadrilátero

Mostraremos que la distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y los cuadriláteros es menor o igual a 2. Es importante mencionar que la idea de demostración es original.

**Teorema 3.1.1** *La distancia de Banach-Mazur del triángulo  $t$  a cualquier cuadrilátero  $C$  no es mayor a 2. La distancia 2 se alcanza si, sólo si,  $C$  es un paralelogramo.*

*Demostración.* Consideremos al triángulo de área mínima que contiene a  $C$ . Por el Teorema de Zalgaller en [15], se sabe que existe un triángulo  $T_0$  de área mínima

tal que al menos dos lados de  $T_0$  contienen lados de  $C$ , y además, los puntos medios de los lados de  $T_0$  pertenecen a la frontera de  $C$ .

Tenemos dos casos:

1. Sólo hay dos lados de  $C$  que pertenecen a lados de  $T_0$ .

Claramente, tales dos lados deben ser lados consecutivos de  $C$ . Sean  $a_1, a_2, a_3, a_4$  los vértices de  $C$  y sean  $a_1, b, c$  los vértices de  $T_0$  (ver Figura 3.1). Sin pérdida de generalidad, supongamos que la distancia de  $a_4$  a  $bc$  es mayor o igual que la distancia de  $a_2$  a  $bc$ , y sea  $p$  en  $a_1b$  tal que  $pa_4 \parallel bc$ . Definamos a  $t$  como el triángulo formado por los vértices  $a_1, p$  y  $a_4$ . Dado que los puntos medios de  $T_0$  pertenecen a  $C$ , tenemos que  $|t| \geq \frac{1}{4}|T_0|$ , lo que implica que la razón de homotecia de  $T_0$  a  $t$  es menor o igual que 2. Además, la igualdad se da si, y sólo si  $p = a_2$  y  $a_4$  son puntos medios de los correspondientes lados de  $T_0$ . Como también  $a_3$  es punto medio de  $bc$ , tenemos que la igualdad se da si, y sólo si  $C$  es un paralelogramo.

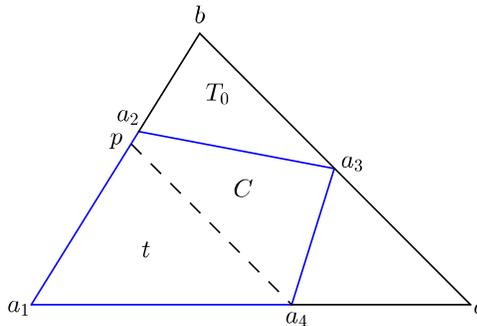


Figura 3.1: Distancia del triángulo al cuadrilátero

2. Tres lados de  $C$  pertenecen a lados de  $T_0$ .

Observemos primero que, para este caso,  $C$  no puede ser paralelogramo.

Sean  $a_1, a_2, a_3, a_4$  los vértices de  $C$ , como antes, y sean  $a_1, b, a_4$  los vértices de  $T_0$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\frac{|a_4b|}{|a_4a_3|} < \frac{|a_1b|}{|a_1a_2|} \leq 2$  (ver Figura 3.2). Sea  $p$  un punto sobre  $a_1a_4$  tal que  $pa_3 \parallel a_1b$  y definamos a  $t$  como el triángulo formado por los vértices  $p, a_3$  y  $a_4$ , entonces tenemos

que  $|t| \geq \frac{1}{4}|T_0|$ , lo que de nuevo prueba que la razón es menor o igual que 2.

Para demostrar que la distancia 2 se alcanza si, y sólo si  $C$  es un paralelogramo, hagamos lo siguiente: si  $a_3$  no es el punto medio de  $a_4b$ , entonces la razón de homotecia es menor que 2, por tanto podemos suponer que  $a_3$  es el punto medio de  $a_4b$ . Claramente  $a_2$  es también punto medio de  $a_1b$ . En este caso, sea  $t$  el triángulo formado por los vértices  $a_1, a_3$  y  $a_4$  y sea  $T_0$  el triángulo homotético a  $t$  con centro de homotecia en  $a_4$ . Luego, como  $|a_1a_2a_3| < |a_1a_3a_4|$  tenemos que la razón de homotecia de  $T_0$  a  $t$  es menor que 2. En conclusión, la distancia 2 no se alcanza para el caso 2.  $\square$

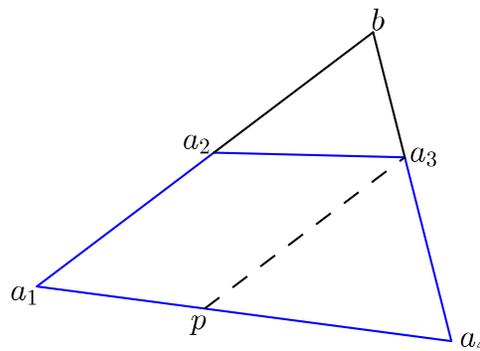


Figura 3.2: Distancia del triángulo al cuadrilátero

### 3.2. Distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el pentágono regular

Antes de mostrar cuál es la distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el pentágono (Teorema 3.2.2), se mostrarán algunos resultados previos. Observemos lo siguiente: si tenemos que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{a}{b} = \lambda$  y  $\frac{c}{d} = \lambda$  entonces  $\frac{a+c}{b+d} = \lambda$ .

**Teorema 3.2.1** *Sea  $abc$  un triángulo con vértices no colineales, y sea  $a'b'c'$  el triángulo directamente homotético al triángulo  $abc$  con razón de homotecia  $\lambda$ . Entonces la siguiente relación entre sus áreas es cierta*

$$|a'b'c'| = \lambda^2 \cdot |abc|.$$

*Demostración.* Sea  $o$  el centro de homotecia y  $cn, c'm$  las alturas correspondientes de los triángulos (ver Figura 3.3). Sabemos que  $\frac{|oa'|}{|oa|} = \frac{|oc'|}{|oc|} = \lambda$ . Ahora, como los triángulos  $oab$  y  $oa'b'$  son semejantes, al igual que los triángulos  $oca$  y  $oc'a'$ , se sigue que  $\frac{|a'b'|}{|ab|} = \frac{|c'a'|}{|ca|} = \lambda$ . También los triángulos  $nca$  y  $m'c'a'$  son semejantes, por lo que  $\frac{|c'm'|}{|cn|} = \lambda$ . De lo anterior se obtienen las siguientes dos relaciones:  $|a'b'| = \lambda \cdot |ab|$  y  $|c'm'| = \lambda \cdot |cn|$ . Al calcular las áreas de  $abc$  y  $a'b'c'$ , respectivamente, tenemos que  $|abc| = \frac{|ab| \cdot |cn|}{2}$  y  $|a'b'c'| = \frac{\lambda^2 \cdot |ab| \cdot |cn|}{2}$ . Lo anterior demuestra el resultado.  $\square$

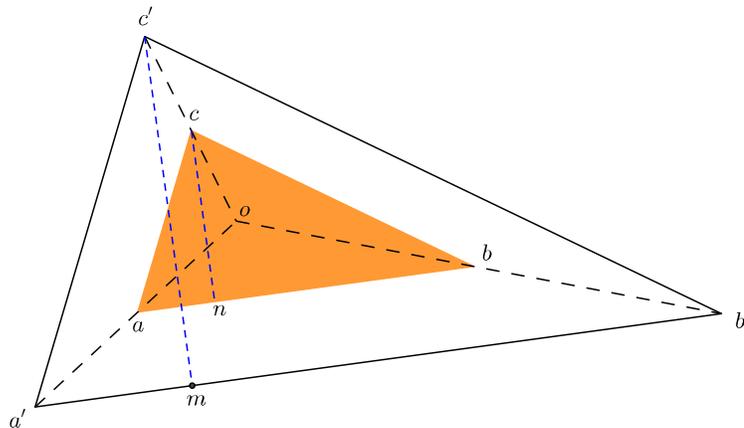


Figura 3.3: Áreas de triángulos directamente homotéticos

**Definición 3.2.1** Sea  $K \in \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo y  $abc$  un triángulo inscrito en  $K$ , es decir,  $a, b$  y  $c$  son puntos no colineales en la frontera de  $K$ . Sea  $a'b'c'$  el triángulo circunscrito a  $K$  directamente homotético a  $abc$  con  $a'b' \parallel ab$ ,  $b'c' \parallel bc$  y  $c'a' \parallel ca$ . Sean  $f \in a'b' \cap K$ ,  $g \in b'c' \cap K$  y  $h \in c'a' \cap K$ . Entonces, decimos que  $abc$  genera a un cuadrilátero, si el cuadrilátero es convexo y además tres de sus vértices coinciden con los del triángulo  $abc$  y el cuarto vértice es  $f, g$  o  $h$ .

Por último, decimos que  $abc$  genera a un hexágono, denotado por  $h(abc)$ , si el hexágono es la unión de tres cuadriláteros generados por  $abc$ , y además tres de sus vértices son  $f$ ,  $g$  y  $h$ .

Nota. Dado un triángulo  $abc$  como en la Definición 3.2.1 tenemos que  $|h(abc)|$  es constante, no importa cómo se elijan a  $f$ ,  $g$  y  $h$ .

**Ejemplo 3.2.1** Sea  $K$  un pentágono regular. Sean  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $f$ ,  $g$  y  $h$  como en la Definición 3.2.1 (ver Figura 3.4). En este ejemplo tenemos que  $abc$  genera a los cuadriláteros  $abch$ ,  $afbc$  y  $abgc$ . Por otro lado, el triángulo  $abc$  también genera al hexágono  $h(abc) = abch \cup afbc \cup abgc$ .

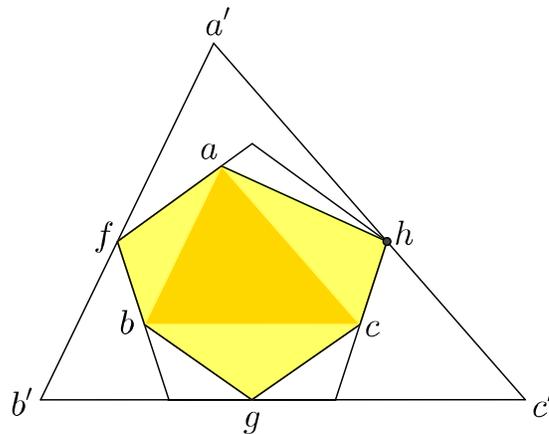


Figura 3.4: Ejemplo 3.2.1

**Lema 3.2.1** Sea  $K \in \mathbb{R}^2$  un cuerpo convexo. Sean  $abc$ ,  $a'b'c'$  y  $f$ ,  $g$  y  $h$  como en la Definición 3.2.1 (ver Figura 3.5). Si  $\lambda$  es la razón de homotecia de  $a'b'c'$  a  $abc$ , entonces

$$\lambda = \frac{|h(abc)|}{|abc|}.$$

*Demostración.* Sea  $o$  el centro de homotecia de los triángulos. Sea  $x$  el punto donde  $og$  intersecta a  $bc$ . Ahora, la razón de homotecia se calcula como  $\frac{|ob'|}{|ob|} = \frac{|og|}{|ox|} = \lambda$ . Sean  $p$  y  $n$  puntos sobre  $bc$  tal que  $op$  y  $gn$  son alturas de los triángulos  $obc$  y  $gcb$ , respectivamente. Por la semejanza que existe entre los triángulos  $xpo$  y  $xng$ , tenemos la siguiente relación entre lados,  $\frac{|gn|}{|po|} = \frac{|gx|}{|xo|}$ . Ahora, sumamos uno a cada miembro de la igualdad

$$\frac{|gn| + |po|}{|po|} = \frac{|gx| + |xo|}{|xo|} = \frac{|go|}{|xo|}.$$

Ya que  $|bgco| = \frac{|bc| \cdot (|gn| + |po|)}{2}$  y  $|obc| = \frac{|bc| \cdot |po|}{2}$ , tenemos que

$$\frac{|bgco|}{|obc|} = \frac{|gn| + |po|}{|po|} = \frac{|og|}{|ox|},$$

es decir,  $\frac{|bgco|}{|obc|} = \lambda$ .

Análogamente obtenemos que  $\frac{|ocha|}{|oca|} = \frac{|oafb|}{|oab|} = \lambda$ . Sumando las expresiones anteriores se tiene que

$$\frac{|afb| + |bdco| + |ceao|}{|aob| + |boc| + |oca|} = \frac{|h(abc)|}{|abc|} = \lambda.$$

□

Como corolario directo se obtiene el siguiente.

**Corolario 3.2.1** *El producto de las áreas de los triángulos circunscrito e inscrito en  $K$  es menor o igual que el cuadrado del área de  $K$ , esto es*

$$|a'b'c'| \cdot |abc| \leq |K|^2.$$

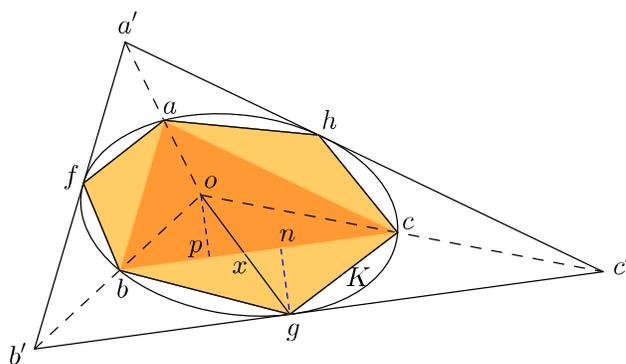


Figura 3.5: Lema 3.2.1

*Demostración.* El triángulo  $a'b'c'$  es directamente homotético al triángulo  $abc$  con razón de homotecia  $\lambda$ . Por el Teorema 3.2.1 se tiene  $|a'b'c'| = \lambda^2 \cdot |abc|$ , luego, se multiplica por el área del triángulo  $abc$  en ambos miembros de la igualdad anterior,  $|abc| \cdot |a'b'c'| = \lambda^2 \cdot |abc|^2$ , y como  $|h(abc)| = \lambda \cdot |abc|$ . Se sigue que  $|abc| \cdot |a'b'c'| = |h(abc)|^2 \leq |K|^2$ . La igualdad se da cuando el triángulo  $abc$  está inscrito en un hexágono, y cuyos vértices coinciden con los vértices alternados del hexágono.  $\square$

**Teorema 3.2.2** *La distancia de Banach-Mazur entre el pentágono regular y el triángulo es  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ .*

*Demostración.* Antes que nada, hagamos una observación muy importante para el desarrollo de la demostración.

**Observación 3.2.1** *Derivado de la demostración del Lema 3.2.1 tenemos que,  $abgc$ ,  $bcha$  y  $cafb$  son los cuadriláteros generados por el triángulo  $abc$ , y además que  $h(abc)$  es la unión de esos cuadriláteros. Entonces, se tiene que*

$$\frac{|abgc| + |bcha| + |cafb|}{|abc|} = \frac{h(abc) + 2|abc|}{|abc|} = \lambda + 2.$$

Debemos minimizar a  $\lambda$ , entonces el problema se traduce en minimizar a

$$\frac{|abgc| + |bcha| + |cafb|}{|abc|} = \frac{|abgc|}{|abc|} + \frac{|bcha|}{|abc|} + \frac{|cafb|}{|abc|}.$$

Una vez claro lo anterior, nos disponemos a desarrollar la demostración.

Analizaremos primero el caso cuando un vértice del triángulo  $abc$  es también vértice de  $P$ . Sin pérdida de generalidad, digamos que  $a = a_1$ . Por conveniencia, supongamos que  $|a_1b_1| = 1$ . La demostración de este caso se divide a su vez en los siguientes casos.

1. Analizaremos primero el caso cuando  $b \in b_1c_1$  y  $c \in d_1e_1$  (ver Figura 3.6). Observemos primero que la razón de homotecia  $\lambda$  disminuye cuando  $bc \parallel b_1d_1$ . Para ver lo anterior, supongamos que  $|c_1b| > |d_1c|$ . Sea  $b^* \in b_1c_1$  tal que  $b^*c \parallel c_1d_1$ . Tenemos que  $h(a_1bc) = a_1b_1c_1ce_1$ .

Luego, se tiene que

$$|a_1b^*c| - |a_1bc| \geq 0 \quad (3.1)$$

con la igualdad en (3.1) si, y sólo si  $c = d_1$ , el caso de la igualdad lo analizaremos después.

Ahora, como  $b^*c \parallel c_1d_1$ , se tiene que  $h(a_1b^*c) = a_1b_1c_1ce_1$ . Por lo tanto, tenemos que  $\frac{|h(a_1b^*c)|}{|a_1b^*c|} < \frac{|h(a_1bc)|}{|a_1bc|}$ , lo cual nos dice que  $\lambda$  disminuye cuando  $bc \parallel b_1d_1$ . En conclusión,  $b$  tiene que ser igual a  $b^*$ .

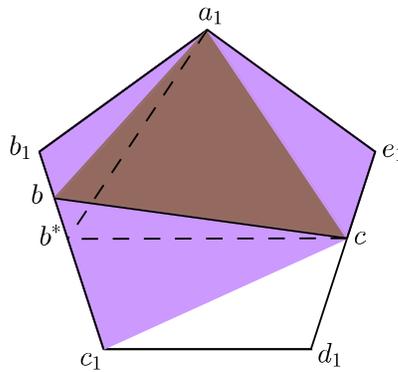


Figura 3.6: Caso 1a

Hagamos unas definiciones y observaciones que nos ayudarán a seguir con la demostración.

Sea  $k$  un punto sobre  $bc$  tal que  $c_1k$  es la altura del triángulo  $cc_1d_1$  y sea  $m$  un punto sobre  $c_1d_1$  tal que  $a_1m$  es la altura del triángulo  $a_1c_1d_1$  (ver Figura 3.7). Sean  $|c_1k| = h$ ,  $|bk| = x$  y  $|a_1m| = \eta$ . Luego, observemos que el ángulo  $\angle bc_1k = 18^\circ$  y que  $\tan(18^\circ) = \frac{x}{h}$ . Por otro lado, se sabe

$$\text{que } \text{sen}(18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ y } \text{cos}(18^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Con lo anterior ya establecido se deduce que

$$\eta = \text{sen}(72^\circ) + \text{sen}(36^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}-1)},$$

$$\text{por lo que se tiene } |a_1c_1d_1| = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}-1)} \text{ y } \frac{|a_1b_1c_1d_1e_1|}{|a_1c_1d_1|} = \sqrt{5}.$$

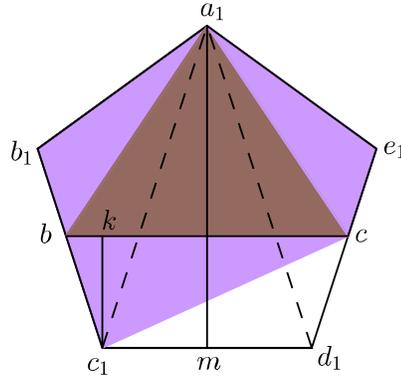


Figura 3.7: Caso 1b

Como  $\frac{x}{h} = \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{cos}(18^\circ)}$ , entonces tenemos que  $x = \frac{h(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ . Luego, se tiene que  $|a_1bc| = \frac{(1+2x)(\eta-h)}{2} = \frac{\eta}{2} + x\eta - \frac{h}{2} - xh$ . Observemos que  $x\eta = \frac{h}{2}$ , por lo que  $|a_1bc| = \frac{\eta}{2} - xh$ . Por otro lado, como  $\frac{|a_1b_1c_1d_1e_1|}{|a_1c_1d_1|} = \sqrt{5}$ , entonces  $|a_1b_1c_1d_1e_1| = \sqrt{5}|a_1c_1d_1| = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}-1)}$ , de lo cual se

deduce que

$$|h(a_1bc)| = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}-1)} - |cc_1d_1| = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}-1)} - \frac{h}{2}.$$

Ahora nos disponemos a definir la función a minimizar, esta es,

$$\lambda(h) = \frac{|h(a_1bc)|}{|a_1bc|} = \frac{\frac{\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4(\sqrt{5}-1)} - \frac{h}{2}}{\frac{\eta}{2} - xh}.$$

Para simplificar los cálculos hagamos lo siguiente: sea  $\alpha = \tan(18^\circ)$  y  $\beta = |a_1b_1c_1d_1e_1|$ , entonces tenemos que

$$\lambda(h) = \frac{2\beta - h}{\eta - 2\alpha h^2}. \quad (3.2)$$

Se sigue que, la derivada de  $\lambda$  es

$$\lambda'(h) = \frac{-2\alpha h^2 + 8\alpha\beta h - \eta}{(-2\alpha h^2 + \eta)^2}.$$

Igualando  $\lambda'$  a cero tenemos que

$$-2\alpha h^2 + 8\alpha\beta h - \eta = 0. \quad (3.3)$$

Utilizamos la fórmula general para resolver (3.3)

$$h_1 = \frac{-8\alpha\beta + \sqrt{(8\alpha\beta)^2 - 4(-2\alpha)(-\eta)}}{-4\alpha}, \quad (3.4)$$

$$h_2 = \frac{-8\alpha\beta - \sqrt{(8\alpha\beta)^2 - 4(-2\alpha)(-\eta)}}{-4\alpha}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo valores en (3.4) y (3.5) tenemos que

$$h_1 = \frac{-8\frac{\sqrt{5}}{4} + \sqrt{64\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 8\frac{1}{2}}}{-4\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}},$$

$$h_2 = \frac{-8\frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{64\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 8\frac{1}{2}}}{-4\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}.$$

Reduciendo la expresión anterior tenemos

$$h_1 = \frac{-2\sqrt{5} + 4}{-4(\sqrt{5}-1)},$$

$$h_1 = \frac{-2\sqrt{5} - 4}{-4(\sqrt{5}-1)}.$$

Por último tenemos los siguientes valores:

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approx 0,36327126.$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{85 + 38\sqrt{5}} \approx 6,518638$$

Como  $|a_1 m| = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}-1)} \approx 1,53884176$ , tenemos que descartar a  $h_2$ .

Sustituyendo  $h_1$  en (3.2) tenemos que

$$\lambda(h_1) = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 2,11803398.$$

Cuando se cumple la igualdad en (3.1) obtenemos que  $\lambda = \frac{|h(a_1bc_1)|}{|a_1bc_1|} = \sqrt{5}$ . Por lo tanto, para este caso el mínimo  $\lambda$  posible es  $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Observación 3.2.2** *En este caso hemos obtenido que existe una pareja de triángulos homotéticos que aproximan al pentágono, los cuales tienen una razón de homotecia igual a  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ , es decir, sus áreas se relacionan en la razón  $1 : \frac{9}{4} + \sqrt{5}$ . Si observamos además que el triángulo de área mínima, el cual contiene al pentágono regular, tiene área igual a  $2\sqrt{5} + 2$  veces el área de uno de los triángulos formados por tres vértices consecutivos del pentágono, concluimos que no es posible que los tres puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  estén todos contenidos en dos lados consecutivos del pentágono. Con esto, sólo es necesario analizar los casos que se muestran a continuación.*

2.  $b \in a_1b_1$  y  $c \in e_1d_1$  (ver Figura 3.8). Observemos que en este caso siempre se tiene que  $h(a_1bc) = a_1bc_1ce_1$ .

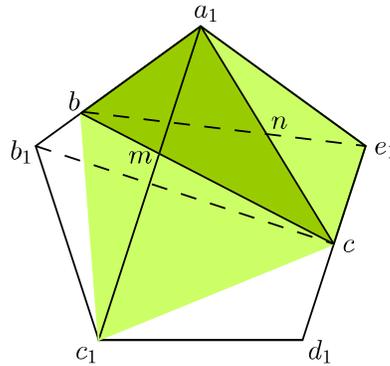


Figura 3.8: Caso 2

Fijemos el vértice  $c$ . Debemos minimizar  $\frac{|a_1bc_1c|}{|a_1bc|} + \frac{|a_1bce_1|}{|a_1bc|} = \lambda + 1$ . Sabemos que  $\frac{|a_1bc_1c|}{|a_1bc|} = \frac{|a_1c_1|}{|a_1m|}$ , donde  $m = a_1c_1 \cap bc$ , y  $\frac{|a_1bce_1|}{|a_1bc|} = 1 + \frac{|a_1ce_1|}{|a_1bc|} = 1 + \frac{|ne_1|}{|bn|}$ , donde  $n = a_1c \cap be_1$ . Debemos entonces minimizar  $\frac{|a_1c_1|}{|a_1m|} + \frac{|ne_1|}{|bn|}$ , lo cual se logra cuando  $b = b_1$  y  $c = d_1$ . En tal caso,

tenemos que  $\frac{|a_1c_1|}{|a_1m|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau$  y  $\frac{|ne_1|}{|b_1n|} = \tau - 1$ , se sigue que  $\lambda = \frac{|a_1c_1|}{|a_1m|} + \frac{|ne_1|}{|b_1n|} = \sqrt{5}$ .

3.  $b \in a_1b_1$  y  $c \in c_1d_1$  (Ver Figura 3.9). Fijemos el vértice  $c$ . Si  $|a_1b| \leq |d_1c|$  entonces  $h(a_1bc) = a_1b_1ce_1$ . Observemos que  $|a_1b_1ce_1|$  no depende de la posición de  $c$  sobre el segmento  $c_1d_1$ , sin embargo,  $|a_1bc|$  se maximiza, de manera que se mantenga la condición  $|a_1b| \leq |d_1c|$ , cuando  $b = b_1$  y  $c = c_1$ . En tal caso tenemos que  $\lambda = \sqrt{5}$ .

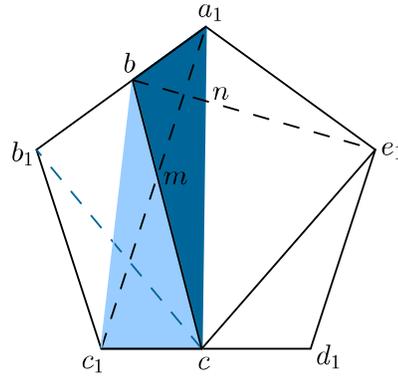


Figura 3.9: Caso 3

Si  $|a_1b| > |d_1c|$  tenemos que  $h(a_1bc) = a_1bc_1e_1$ . Debemos minimizar a  $\frac{|a_1bc_1e_1|}{|a_1bc|} = \frac{|a_1c_1|}{|a_1m|}$ , donde  $m = a_1c_1 \cap bc$ , y  $\frac{|a_1bce_1|}{|a_1bc|} = \frac{|a_1ce_1|}{|a_1bc|} + 1 = \frac{|ne_1|}{|bn|} + 1$ , donde  $n = a_1c \cap be_1$ . Debemos entonces minimizar  $\frac{|a_1c_1|}{|a_1m|} + \frac{|ne_1|}{|bn|}$  lo cual se logra cuando  $b = b_1$ , y como consecuencia  $c = d_1$ . Con lo anterior, al igual que en el caso 2, tenemos que  $\lambda = \sqrt{5}$ .

4.  $b \in b_1c_1$  y  $c \in a_1e_1$ . Este caso es análogo al caso 2.
5.  $b \in b_1c_1$  y  $c \in c_1d_1$  (ver Figura 3.10). Siempre se tiene que  $h(a_1bc) = a_1b_1c_1e_1$  sin importar donde están colocados  $b$  y  $c$ . Fijemos al vértice  $c$ . Luego, observemos que  $|a_1b_1c_1e_1|$  no cambia si movemos a  $b$  sobre  $b_1c_1$ . Por tanto, sólo debemos incrementar el valor de  $|a_1bc|$ , lo cual se logra al tener  $b = b_1$ . Se cae en el caso 2 con la pequeña diferencia de que si

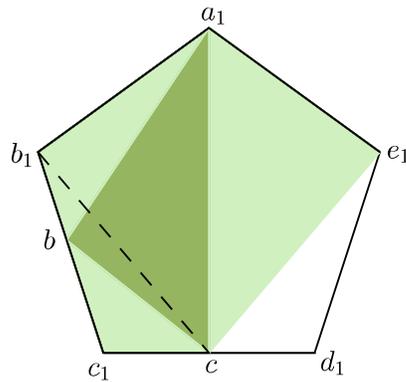


Figura 3.10: Caso 5

tenemos  $c = d_1$ , entonces  $b$  puede estar en cualquier posición sobre  $b_1c$  sin cambiar el valor de  $\lambda = \sqrt{5}$ .

6.  $b \in c_1d_1$  y  $c \in a_1e_1$ . Este caso es análogo al caso 3.
7.  $b \in c_1d_1$  y  $c \in d_1e_1$ . Este caso es análogo al caso 5.
8.  $b, c \in c_1d_1$  (ver Figura 3.11). Aquí  $h(a_1bc) = a_1b_1bce_1$ .

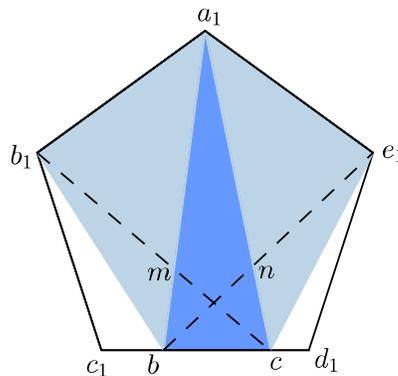


Figura 3.11: Caso 8

Debemos minimizar a

$$\frac{|a_1b_1bc|}{|a_1bc|} = \frac{|a_1b_1b|}{|a_1bc|} + 1 = \frac{|b_1m|}{|cm|},$$

donde  $m = a_1b \cap b_1c$ , y

$$\frac{|a_1bce_1|}{|a_1bc|} = \frac{|a_1e_1c|}{|a_1bc|} + 1 = \frac{|e_1n|}{|bn|},$$

donde  $n = a_1c \cap be_1$ . Debemos entonces minimizar  $\frac{|b_1m|}{|cm|} + \frac{|e_1n|}{|bn|}$ , lo cual se logra cuando  $b = c_1$  y  $c = d_1$ . En tal caso tenemos  $\lambda = \sqrt{5}$ .

Por último supongamos que ninguno de los tres vértices del triángulo  $abc$  es vértice del pentágono regular. Para este supuesto hay tres opciones.

1.  $a \in a_1b_1$ ,  $b \in a_1e_1$  y  $c \in c_1d_1$ . Sean  $a' \in a_1b_1$  y  $b' \in a_1e_1$  tales que  $a'c \parallel b_1c_1$  y  $b'c \parallel e_1d_1$ . Si  $|a_1a| \leq |a_1a'|$  y  $|a_1b| \leq |a_1b'|$ , es claro que  $h(abc) = h(a'b'c)$  y además  $|abc| \leq |a'b'c|$ . Por lo tanto, para disminuir a  $\lambda$  se debe aumentar  $|abc|$  para lo cual se debe escoger  $a = a'$  y  $b = b'$  (ver Figura 3.12 a)).

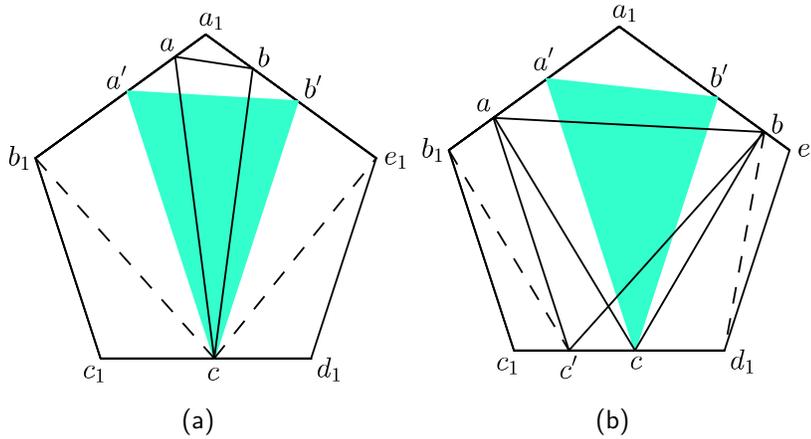


Figura 3.12: Opción 1a

Si  $|a_1a| > |a_1a'|$  y  $|a_1b| > |a_1b'|$ , entonces existe un  $c' \in c_1d_1$  con  $ac' \parallel b_1c_1$  ó  $bc' \parallel e_1d_1$  tal que  $h(abc) = h(abc')$  y además  $|abc'| \geq |abc|$  (ver Figura 3.12 b)).

Supongamos que  $bc \parallel e_1d_1$ , entonces se tiene que  $\frac{|h(abc)|}{|abc|} < \frac{|h(b_1bc)|}{|b_1bc|}$ . Para mostrar lo anterior hagamos la siguiente construcción: sea  $a' \in a_1b_1$

tal que  $a'c \parallel b_1c_1$ . Sean  $h_1$  y  $h_2$  tal que  $\text{sen}(72^\circ) + h_1 - h_2$  es la altura del triángulo  $a'bc$  desde  $a'$  (ver Figura 3.13). Sean  $h_3$  tales que  $\text{sen}(72^\circ) + h_3$  es la altura del triángulo  $a'ca$  desde  $c$  y  $h_4$  la altura del triángulo  $a'ba$  desde  $b$ . Sean  $y = |be_1|$  y  $x = |a'a|$ . Entonces tenemos lo siguiente:

$$h_1 = y\text{sen}(36^\circ), \quad h_2 = y\text{sen}(72^\circ), \quad h_3 = (1 - y)\text{sen}(36^\circ),$$

$$h_4 = (1 - y)\text{sen}(72^\circ), \text{ de donde}$$

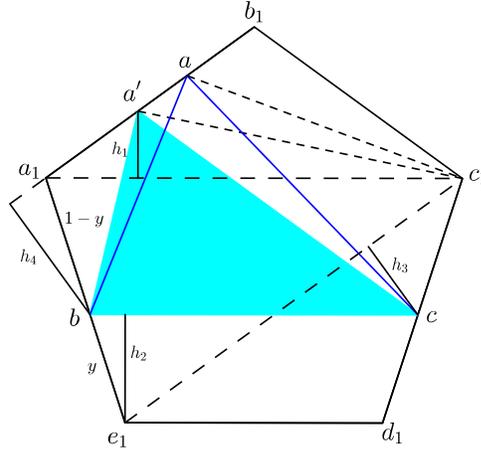


Figura 3.13: Opción 1b

$$|a'bc| = \frac{(1 + 2y\text{sen}(18^\circ))[\text{sen}(72^\circ) + y(\text{sen}(36^\circ) - \text{sen}(72^\circ))]}{2},$$

$$|h(a'bc)| = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{2} + \frac{\tau\text{sen}(72^\circ)}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{\text{sen}(72^\circ)}{2}\right),$$

$$|a'c_1a| = \frac{x\text{sen}(72^\circ)}{2},$$

$$|a'ca| = \frac{x(\text{sen}(72^\circ) + (1 - y)\text{sen}(36^\circ))}{2},$$

$$|a'ba| = \frac{x(1 - y)\text{sen}(72^\circ)}{2}.$$

Observemos que dado cualquier  $a \in a'b_1$ , se tiene que la función  $\lambda = \frac{|h(abc)|}{|abc|}$  viene dada por

$$\lambda(x, y) = \frac{|h(a'bc)| + |a'c_1a|}{|a'bc| + |a'ca| - |a'ba|}.$$

Sean  $h = |h(a'bc)|$ ,  $t(y) = |a'bc|$ ,  $\beta(y) = \frac{(\text{sen}(72^\circ) + (1 - y)\text{sen}(36^\circ))}{2}$   
 y  $\alpha = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{2}$ . Entonces la función  $\lambda$  queda como sigue:

$$\lambda(x, y) = \frac{h + x\alpha}{t(y) + x\beta(y)}.$$

Como queremos encontrar el mínimo  $\lambda$  para cada  $y$  fijo, entonces calculamos la derivada parcial de  $\lambda$  respecto de  $x$ , esto es

$$\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = \frac{\alpha t(y) - \beta(y)h}{(t(y) + x\beta(y))^2}.$$

Observemos que si  $\alpha t(y) - \beta(y)h < 0$  entonces el valor mínimo de  $\lambda$  se alcanza cuando  $a = b_1$ . Ahora, como la función  $\frac{t(y)}{\beta(y)}$  es una recta con pendiente negativa, su máximo lo alcanza en  $y = 0$ , esto es

$$\frac{T}{\beta}(0) = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Por lo tanto, tenemos que  $\frac{t(y)}{\beta(y)} < \frac{h}{\alpha} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ , para  $0 \leq y \leq 1$ . Con lo anterior se demuestra que el valor mínimo de  $\lambda$  se alcanza cuando  $a = b_1$ .

En conclusión, para esta opción caemos en el caso 1, ya que para cada  $y$  dado,  $\lambda$  alcanza su mínimo cuando  $a = b_1$ .

2.  $a \in b_1c_1$ ,  $b \in c_1d_1$  y  $c \in d_1e_1$  (ver Figura 3.14). Aquí se debe cumplir que  $|c_1a| = |d_1c|$  para tener un valor óptimo de  $|abc|$  dado  $|h(abc)|$ .

Utilizando algunas definiciones que se hicieron en el Caso 1 con respecto a la Figura 3.7, se tiene que  $|a_1bc| = \frac{\eta}{2} - xh$ , donde  $\eta = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5} - 1)}$  y

$$x = \frac{h(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = h \tan(18^\circ).$$

Por lo tanto,  $|abc| = \frac{(1 + 2x)h}{2} = h(\frac{1}{2} + x)$  y

$$|h(abc)| = |a_1bc| + |abc| + |ac_1b| + |cbd_1| = \frac{\eta}{2} - xh + h(\frac{1}{2} + x) + \frac{h}{2} = \frac{\eta}{2} + h.$$

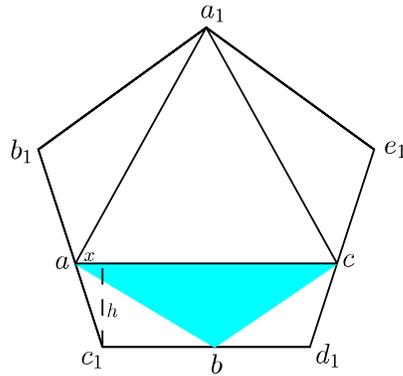


Figura 3.14: Opción 2

Entonces el objetivo es minimizar a la función

$$\lambda(h) = \frac{|h(abc)|}{|abc|} = \frac{\frac{\eta}{2} + h}{h(\frac{1}{2} + x)},$$

más explícitamente

$$\lambda(h) = \frac{\frac{\eta}{2} + h}{\frac{h}{2} + h^2 \tan(18^\circ)}.$$

Calculamos la derivada de  $\lambda(h)$

$$\lambda'(h) = \frac{-h^2 \tan(18^\circ) - \frac{\eta}{4} - h\eta \tan(18^\circ)}{\left(\frac{h}{2} + h^2 \tan(18^\circ)\right)^2}$$

Lo cual nos dice que  $\lambda'$  es negativa y por consecuencia que  $\lambda$  es estrictamente decreciente. En conclusión,  $\lambda$  toma su valor mínimo en  $a = b_1$  y  $c = e_1$ .

3.  $a \in a_1 b_1$  y  $b, c \in c_1 d_1$  (ver Figura 3.15). En esta opción dados  $a$ ,  $b$  y  $c$  siempre se tiene que  $h(abc) = ab_1 b c e_1$ . Luego, para poder minimizar a  $\lambda$ , primero se debe minimizar a  $\frac{|abce_1|}{|abc|} = \frac{|be_1|}{|bm|}$ . De lo último se deduce que

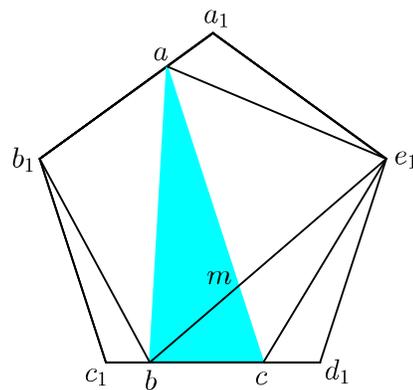


Figura 3.15: Opción 3

$c$  tiene que ser igual a  $d_1$ . Con esto último se termina la prueba, ya que siempre se cae en uno de los primeros 8 casos. Por lo tanto, la mínima lambda posible es:  $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

En conclusión, la distancia de Banach-Mazur entre el triángulo y el pentágono regular es  $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ .  $\square$

### 3.3. Distancia de Banach-Mazur entre cuadriláteros

Se dice que dos cuerpos convexos  $A$  y  $A'$  son *afínmente equivalentes*, y se escribe  $A \sim A'$ , si hay una transformación afín no singular la cual transforma a  $A$  en  $A'$  y viceversa. Claramente, si  $A \sim A'$  y  $B \sim B'$  entonces

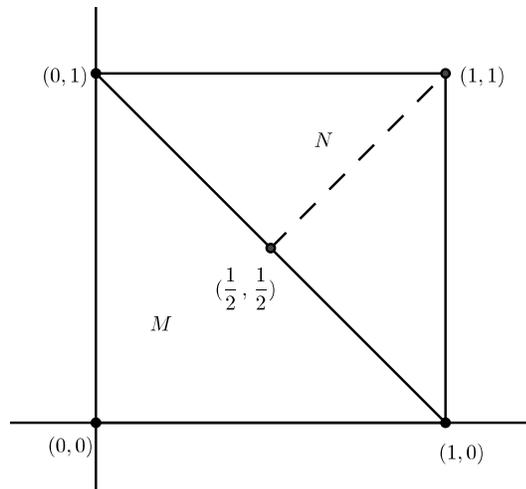
$$d(A, B) = d(A', B').$$

Esto es bastante útil para simplificar el estudio sobre la distancia de Banach-Mazur entre cuerpos convexos. Notemos además que  $A'$  y  $B'$ , no necesariamente se obtienen aplicando la misma transformación afín a  $A$  y  $B$ , es decir,  $A'$  se

pudo haber obtenido mediante una transformación afín  $\sigma_1$  y  $B'$  mediante una transformación  $\sigma_2$ .

**Lema 3.3.1** *Cada cuadrilátero convexo es afínmente equivalente a un cuadrilátero con vértices sucesivos  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , y  $(p, q)$ , el cual pertenece al triángulo  $T$  con vértices  $(1, 1)$ ,  $(1/2, 1/2)$ ,  $(1, 0)$ .*

*Demostración.* De los cuatro triángulos cuyos vértices son vértices del cuadrilátero, consideremos un triángulo  $K$  cuya área es la más grande. Apliquemos una transformación afín la cual transforme a  $K$  en el triángulo  $M$  con vértices sucesivos  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  tal que el cuarto vértice  $(p, q)$  del cuadrilátero esté en el primer cuadrante. Ya que la transformación afín no cambia la proporción de áreas, el área de  $M$  no es más pequeña que el área de cualquiera de los tres triángulos restantes cuyos vértices están en  $(0, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(p, q)$ . Esto implica que  $(p, q)$  está en el triángulo  $N$  con vértices  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ , en caso contrario uno de los triángulos restantes tendría área más grande que la de  $M$ . Al bisecar a  $N$  en dos triángulos con la línea  $y = x$ , podemos tomar uno de ellos, por decir  $T$ , y asumir que  $(p, q)$  pertenece a éste, con lo que la prueba termina.  $\square$



Observe que el cuadrilátero del Lema 3.3.1 es degenerado en un triángulo si, y sólo si,  $(p, q)$  está en el segmento que une a los puntos  $(1/2, 1/2)$  y  $(1, 0)$ , y es un paralelogramo si, y sólo si,  $(p, q) = (1, 1)$ .

**Teorema 3.3.1** *La distancia de Banach-Mazur entre dos cuadriláteros convexos es a lo más 2. La distancia 2 se alcanza si, y sólo si, uno de los cuadriláteros es un paralelogramo y el otro es un triángulo.*

*Demostración.* Sean  $a = (0, 1)$ ,  $b = (1, 1)$ ,  $c = (1, 0)$ ,  $o = (0, 0)$  y  $d = (1/2, 1/2)$ . De acuerdo al Lema 3.3.1, podemos aplicar transformaciones afines adecuadas a los dos cuadriláteros de manera que sus triángulos de área máxima respectivos se transformen en el triángulo  $aoc$ . Además, podemos suponer que los dos vértices restantes, uno en cada cuadrilátero, se transforman en los puntos  $x, y$  contenidos en el triángulo  $abd$ .

Tenemos dos casos posibles:

- 1) El cuadrilátero  $aocy$  contiene al cuadrilátero  $aocx$  (ver figura 3.16 (a)). Aplicamos una homotecia con centro en  $o$ , de manera que el segmento  $ac$  se transforma en el segmento  $a'c'$ , el cual pasa por  $y$ . Si el vértice  $x$  se transforma mediante esta homotecia en el vértice  $x'$ , es claro que el cuadrilátero  $a'oc'x'$  contiene al cuadrilátero  $aocy$ . Además, la razón de homotecia es menor o igual que 2 y la igualdad se da solamente cuando  $y = b$  y  $x$  está sobre  $ac$ , es decir, si, y sólo si, uno de los cuadriláteros es un triángulo y el otro es un paralelogramo.

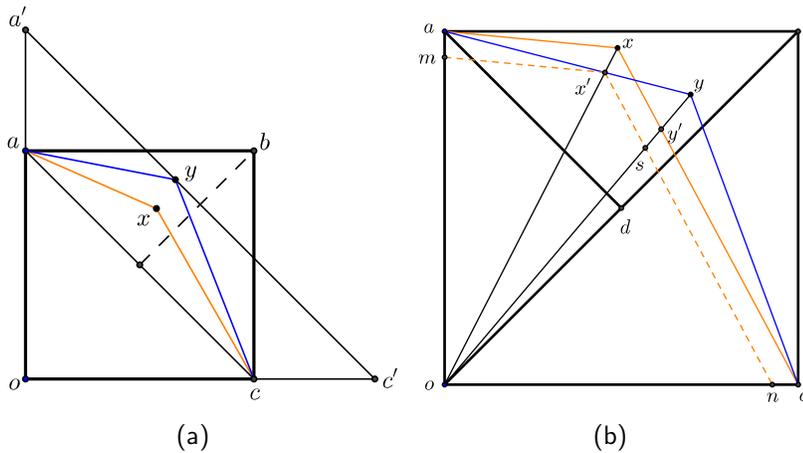


Figura 3.16: Prueba del Teorema de John

- 2) Ninguno de los cuadriláteros contiene al otro (ver figura 3.16 (b)). Supongamos que  $ox$  intersecta al segmento  $ay$  en  $x'$  y que  $oy$  intersecta a  $cx$  en  $y'$ . Aplicamos una homotecia a  $axco$  con centro en  $o$ , tal que  $x$  coincida con  $x'$ . La razón de homotecia es  $\frac{|ox'|}{|ox|}$  y  $axco$  se transforma en  $mx'no$ , como se muestra en la figura 3.16 (b). Sea  $s$  la intersección de  $oy$  con  $nx'$ . Si aplicamos una homotecia con centro en  $o$  y razón  $\frac{|oy|}{|os|}$ , tendremos que el cuadrilátero  $mx'no$  se transforma en un cuadrilátero que contiene al cuadrilátero  $ayco$ . La razón de esta segunda homotecia es  $\frac{|oy| \cdot |ox|}{|oy'| \cdot |ox'|}$ , ya que  $s = y' \cdot \frac{|ox'|}{|ox|}$ . Se sigue que la distancia de Banach-Mazur entre estos cuadriláteros es menor o igual que

$$\lambda = \frac{|oy| \cdot |ox|}{|ox'| \cdot |oy'|} = \frac{|oxy|}{|ox'y'|}.$$

Tenemos entonces que el máximo valor de  $\frac{|oxy|}{|ox'y'|}$  es una cota superior para la distancia de Banach-Mazur. Para encontrar el máximo se hace lo siguiente: Sea  $p$  en el rayo  $oy$ , de manera que  $xp \parallel x'y'$  (ver figura 3.17). Por la semejanza entre los triángulos  $xop$  y  $x'oy'$  tenemos que  $\frac{|xx'|}{|x'o|} = \frac{|py|}{|yo|} = t$ . Por lo que,  $|xx'| = t|x'o|$  y  $|py| = t|oy|$ . Ahora, como

$$|oxy'| = |ox'y'| + |x'xy'| = (1 + t)|ox'y'|$$

y,

$$|opx| = |oxy| + |pxy| = (1 + t)|oxy|,$$

tenemos que  $\frac{|opx|}{|oxy'|} = \frac{|oxy|}{|ox'y'|}$ . Se sigue que, como los triángulos  $opx$  y

$oxy'$  comparten altura desde  $x$  entonces  $\frac{|opx|}{|oxy'|} = \frac{|op|}{|oy'|} \leq 2$ , con igualdad si, y sólo si,  $p = b$  y  $y' = d$ , es decir, si, y sólo si, uno de los cuadriláteros es el cuadrado  $abco$  y el otro el triángulo  $aco$ .

Con lo que concluimos que la distancia de Banach-Mazur entre cuadriláteros es a lo más 2, con igualdad si, y sólo si, uno de ellos es un triángulo y el otro es un paralelogramo.  $\square$

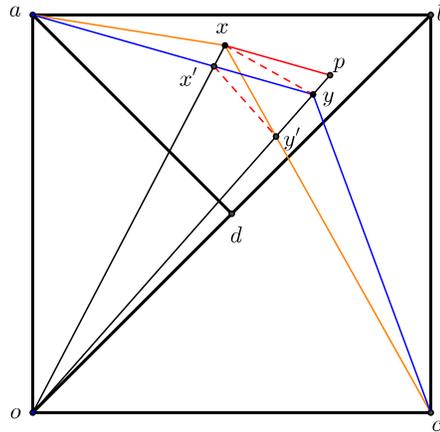


Figura 3.17: Distancia de Banach-Mazur entre cuadriláteros

### 3.4. Conjetura de Lassak y Teorema de Fleischer

Sea  $\mathcal{C}^n$  la familia de todos los cuerpos convexos y sea  $\mathcal{M}^n$  la familia de todos los cuerpos convexos centralmente simétricos, ambos en  $\mathbb{R}^n$ . Por más de siete décadas la noción de distancia de Banach-Mazur entre  $C, D \in \mathcal{M}^n$  ha jugado un papel importante en el Análisis Funcional, ya que  $C$  y  $D$  pueden ser consideradas las bolas unitarias de espacios normados. Mostraremos algunos de los resultados más importantes sobre la distancia de Banach-Mazur entre cuerpos convexos centralmente simétricos.

1. Stromquist probó en [14] que  $d(C, D) \leq \frac{3}{2}$  para arbitrarios  $C, D \in \mathcal{M}^2$ , y que la cota  $3/2$  no puede mejorarse. El caso  $d(C, D) = \frac{3}{2}$  se alcanza cuando  $C$  es un paralelogramo y  $D$  es un hexágono (ver Figura 3.18).
2. Por el célebre Teorema de John (Teorema 1.5.1) tenemos que  $d(C, B) \leq n$ , donde  $C \in \mathcal{C}^n$  es arbitrario y  $B$  es la bola unitaria del espacio Euclidiano  $n$ -dimensional. De este teorema se puede concluir fácilmente que  $d(C, D) \leq n^2$  para todo  $C, D \in \mathcal{C}^n$ .
3. Gordon, Litvak, Meyer y Pajor establecieron en [5] que  $d(C, M) \leq n$  para cada  $C \in \mathcal{C}^n$  y  $M \in \mathcal{M}^n$ .

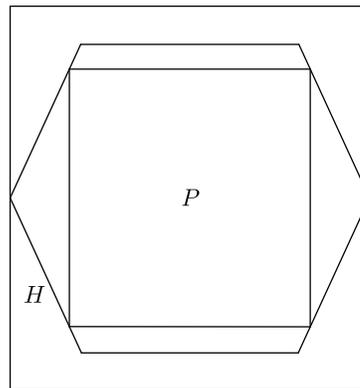


Figura 3.18: Ejemplo de Stromquist

4. Hasta donde se sabe no se ha demostrado una estimación concreta mejor que  $n^2$ . Lassak conjetura en [9] que  $d(C, D) \leq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$  ( $\approx 2,118$ ) para todo  $C, D \in \mathcal{C}^2$ , con la igualdad sólo para el triángulo  $t$  y el pentágono regular  $P$ . Para una posición de  $a(t)$  con respecto a  $P$  tal que  $a(t) \subset P \subset \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) a(t)$  podemos ver la Figura 3.19.

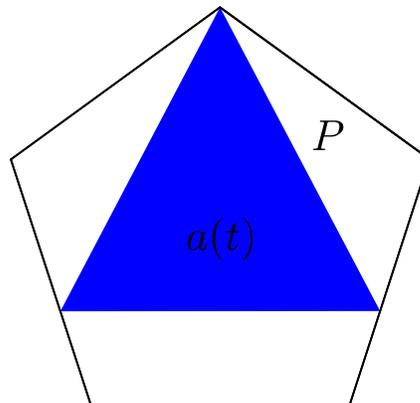


Figura 3.19: Conjetura de Lassak

5. Marek Lassak demostró en [9] que  $d(C, D) \leq 3$  para todo  $C, D \in \mathcal{C}^n$ .
6. Hasta ahora la mejor aproximación a la conjetura de Lassak, para el caso

cuando uno de los cuerpos es un triángulo, fue dada por Fleischer, Mehlhorn, Rote, Welzl y Yap en [4], donde demuestran que

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \leq d(K, t) \leq \frac{9}{4}$$

para todo cuerpo convexo  $K$  y  $t$  un triángulo. Fleischer, Mehlhorn, Rote, Welzl y Yap utilizaron el triángulo de área máxima inscrito en  $K$  para dar la cota de  $\frac{9}{4}$ . Ellos buscaron el caso extremo del cociente de áreas entre un hexágono convexo  $H$  y su triángulo  $t$  de área máxima inscrito. La importancia de esto radica en el hecho de que se tiene una cota para el cociente de áreas entre  $h(t)$  y  $t$ , donde  $t$  está inscrito a un cuerpo convexo  $K$ .

El hexágono para el cual se obtiene el caso extremo se construye de la siguiente manera: Sea  $abd$  un triángulo rectángulo isósceles con  $|ab| = |ad|$  y sea el segmento  $bc$  paralelo a  $ad$  de tal forma que  $|bc| = \frac{2}{3}|ad|$  (ver Figura 3.20). Ahora, sea  $af$  paralelo a  $bd$  y  $ed$  paralelo a  $ac$  de modo que la altura del triángulo  $adf$  desde el punto  $f$  es  $\frac{1}{2}|ab|$  y  $fe \parallel ad$ . Al hexágono formado por los vértices  $a, b, c, d, e$  y  $f$  lo denotaremos como  $H_0$ .

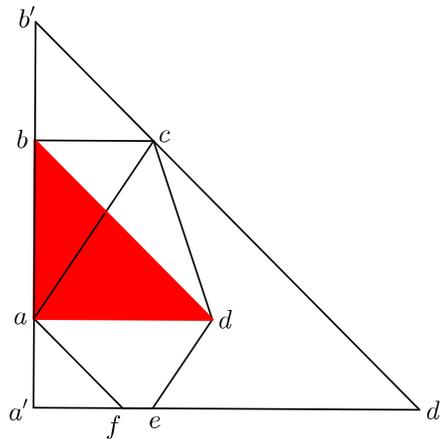


Figura 3.20: Ejemplo de Fleischer

Si  $t$  es un triángulo de área máxima inscrito en  $H_0$ , se cumple que

$$\frac{|H_0|}{|t|} = \frac{9}{4}.$$

Se puede ver que los únicos triángulos de área máxima inscritos en  $H_0$  son los siguientes: i)  $abd$  y  $acd$ , ii)  $fbd$  y  $ace$  y iii)  $bcf$  y  $bce$ . Para cada caso se obtiene un triángulo homotético con razón de homotecia  $\lambda_i) = \frac{9}{4}$ ,  $\lambda_{ii}) = \frac{13}{6}$  y  $\lambda_{iii}) = \frac{9}{4}$ , respectivamente, que contiene a  $H_0$ .

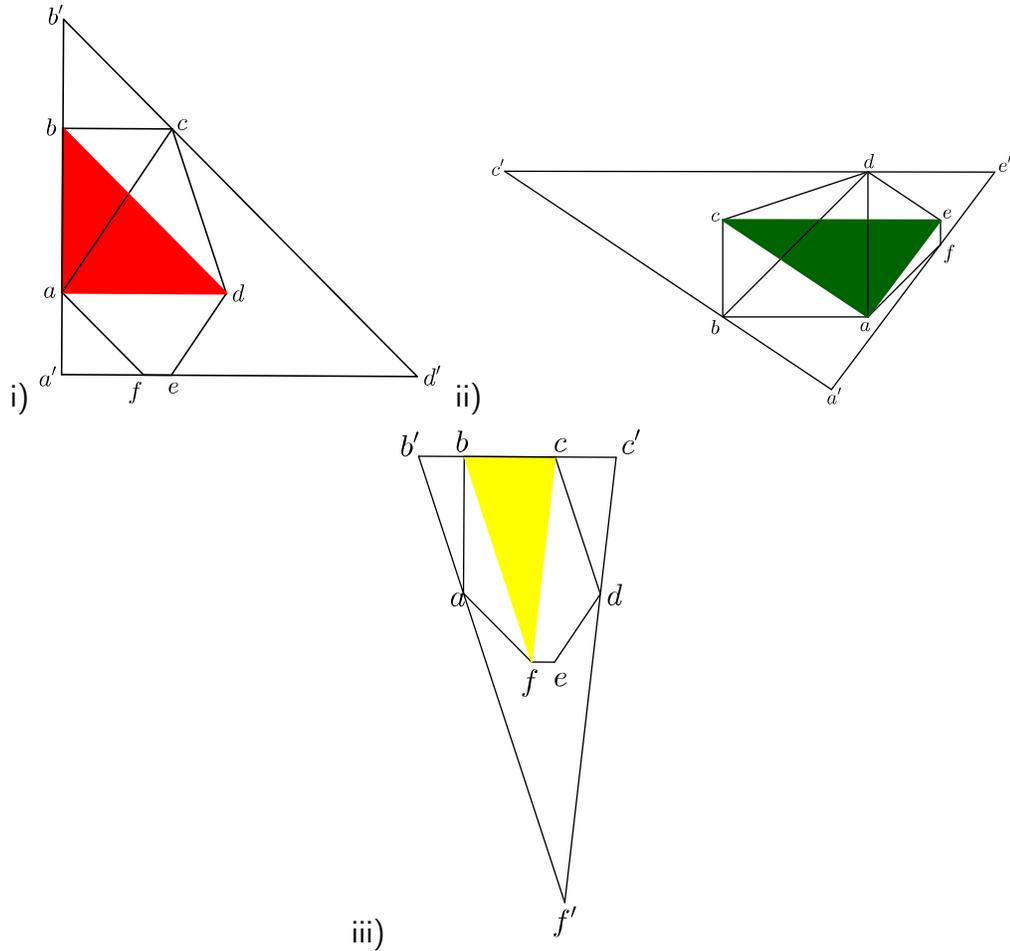


Figura 3.21: Triángulos inscritos

Ahora mostraremos una manera (diferente) de obtener la cota  $d(K, t) \leq \frac{5}{2}$ , previamente obtenida por Lassak en [8], para lo cual utilizaremos la notación

$|p, ab|$  para la distancia del punto  $p$  a un segmento  $ab$ .

**Teorema 3.4.1** *La distancia de Banach-Mazur entre el triángulo  $t$  y un cuerpo convexo  $K$  es menor o igual a  $\frac{5}{2}$ .*

*Demostración.* Sabemos que bajo una transformación afín adecuada podemos transformar a  $t$  en un triángulo equilátero  $t'$  y a  $K$  en  $K'$  conservando la razón de áreas entre  $t$  y  $K$ . Sea  $T'$  el triángulo homotético a  $t'$  el cual contiene a  $K'$  (ver Figura 3.22). Sean  $a, b$  y  $c$  los vértices de  $t'$  y  $d, e$  y  $f$  los puntos de tangencia entre  $T'$  y  $K'$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la altura de  $t'$  es 1. Sean  $h_1 = |e, ab|$ ,  $h_2 = |f, bc|$  y  $h_3 = |g, ac|$ . Sabemos que  $\lambda = \frac{|T'|}{|t'|}$ , entonces  $\lambda = 1 + h_1 + h_2 + h_3$ . Supongamos además que  $h_3 \geq h_2 \geq h_1$ . Sean  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1$  y  $f_1$  los puntos donde se intersectan las fronteras de  $T$  y  $T'$ , donde  $T$  es el triángulo inversamente homotético a  $t'$  y cuyos lados pasan por los puntos  $a, b$  y  $c$ . Como  $abc$  es un triángulo de área máxima inscrito en  $K'$ , entonces tenemos que  $|abc| \geq |efg|$ . Luego, como tenemos que  $h_3 \geq h_2 \geq h_1$ , entonces  $|efg| \geq |b_1c_1g|$ . Ya que  $|abc| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , entonces se debe cumplir  $|b_1c_1g| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , es decir,  $(h_1 + h_2)(1 + h_3) \leq 1$ . De lo anterior deducimos que  $(\lambda - 1 - h_3)(1 + h_3) \leq 1$ , con lo cual se obtiene que

$$\lambda \leq \frac{1}{1 + h_3} + 1 + h_3.$$

Es fácil ver, derivando la expresión anterior, que  $f(h_3) = \frac{1}{1 + h_3} + 1 + h_3$  es una función creciente; entonces, como el valor máximo que puede tener  $h_3$  es 1, se deduce que  $\lambda \leq \frac{5}{2}$ .  $\square$

Un resultado muy relacionado con la distancia de Banach-Mazur al triángulo, es el siguiente obtenido por E.G. Straus en [13].

**Teorema 3.4.2** *Sea  $K$  un cuerpo convexo en el plano. Supóngase que uno de los lados de un triángulo  $t$  de área máxima inscrito en  $K$ , pertenece a  $\partial K$ . Entonces  $\sqrt{5} \cdot |t| \geq |K|$ , con la igualdad si, y sólo si,  $K$  es un pentágono regular afín.*

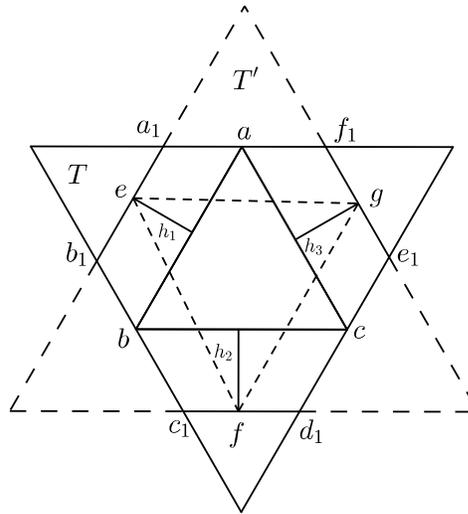


Figura 3.22: Conjetura de Lassak

Por el caso extremo dado por Fleischer, Mehlhorn, Rote, Welzl y Yap en [4] podemos ver que el teorema de Strauss, establecido como antes, es falso. Para convencernos de ésto, es suficiente con observar que (con respecto a la Figura 3.20)

$$\frac{|H_0|}{|abd|} = \frac{9}{4} > \sqrt{5}.$$

Sin embargo, si nos restringimos a considerar solamente pentágonos convexos el resultado siguiente se mantiene.

**Teorema 3.4.3** *Sea  $\mathcal{P}$  un pentágono convexo y sea  $T$  un triángulo inscrito de área máxima. Entonces*

$$\sqrt{5} \cdot |T| \geq |\mathcal{P}|,$$

*con la igualdad si, y sólo si,  $\mathcal{P}$  es un pentágono regular afín.*

*Demostración.* Sean  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1$  los vértices de  $\mathcal{P}$  en orden cíclico (ver Figura 3.23). Si los vértices de un triángulo de área máxima inscrito son vértices consecutivos de  $\mathcal{P}$ , entonces es fácil ver que  $2|T| \geq |\mathcal{P}|$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a_1 c_1 d_1$  es un triángulo inscrito con área máxima, y además, después de aplicar una transformación afín adecuada, podemos suponer

que  $a_1, c_1, d_1$  son vértices de un pentágono regular  $a_1bc_1d_1e$ . Por la maximalidad de  $|a_1c_1d_1|$  tenemos que  $b_1$  y  $e_1$  están contenidos en el trapecio  $c_1d_1gf$ , con  $fg \parallel c_1d_1$ ,  $d_1g \parallel c_1a_1$ ,  $c_1f \parallel d_1a_1$ , y los puntos  $a_1, f, g$  colineales. Supongamos que  $|e_1, a_1d_1| \geq |b_1, a_1c_1|$ , si  $|e_1, a_1d_1| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot |c_1, a_1d_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot h$  entonces

$$|a_1b_1c_1d_1e_1| \leq |a_1bc_1d_1e| = \sqrt{5} \cdot |a_1c_1d_1|.$$

Entonces, supondremos que  $|e_1, a_1d_1| > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot h$ . Sean  $m \in a_1g$  y  $j \in eg$  los puntos donde la línea paralela a  $a_1d_1$  a través de  $e_1$  interseca a los segmentos  $a_1g$  y  $d_1g$ , respectivamente. Claramente, tenemos que  $|b_1jd_1| \leq |b_1e_1d_1|$ . Ahora, sea  $k$  un punto sobre el segmento  $bc_1$  tal que  $|bk| = |je|$ ; si  $|b_1, a_1c_1| \leq |k, a_1c_1|$  entonces nuevamente tenemos que  $|a_1b_1c_1d_1e_1| \leq |a_1bc_1d_1e|$ , tal que podemos suponer que  $|b_1, a_1c_1| > |k, a_1c_1|$ . Se sigue que  $|b_1e_1d_1| \geq |b_1jd_1| > |kj d_1|$ .

Sea  $\frac{|je|}{|gd_1|} = x$ , entonces el área de  $kj d_1$  es

$$\begin{aligned} |kj d_1| &= \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} + x \right) |gd| \cdot \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} - x + 1 \right) h \cdot \frac{1}{2}, \\ &= \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} + x \right) |a_1d_1| \cdot \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} - x + 1 \right) h \cdot \frac{1}{2}, \\ &= \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} + x \right) \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} - x \right) |a_1c_1d_1|, \\ &= (1 + x - x^2) |a_1c_1d_1|. \end{aligned}$$

Ahora, ya que  $x < 1$  tenemos que  $x - x^2 \geq 0$ , y entonces  $|b_1e_1d_1| > |a_1c_1d_1|$  lo cual contradice la maximalidad de  $|a_1c_1d_1|$ . Por lo tanto, tenemos que  $|b_1, a_1c_1| \leq |k, a_1c_1|$  y entonces  $\sqrt{5} \cdot |a_1c_1d_1| \geq |P|$  con la igualdad si, y sólo si,  $b_1 = b$  y  $e_1 = e$ . Concluimos que  $\sqrt{5} \cdot |a_1c_1d_1| \geq |P|$  con la igualdad si, y sólo si,  $\mathcal{P}$  es un pentágono regular afín.  $\square$

Uno podría preguntarse si el resultado anterior se puede extender a cualquier figura convexa  $K$ . Con respecto a esto, Makeev conjetura en [11] lo siguiente.

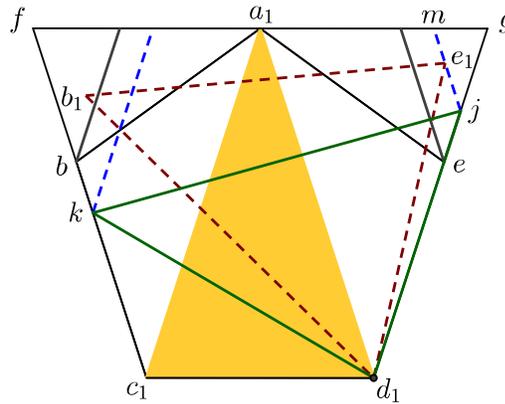


Figura 3.23: Contra ejemplo a Struass

**Conjetura 3.4.1** *Sea  $t$  un triángulo de área máxima inscrito en una figura convexa  $K$  y sea  $T$  el triángulo homotético a  $t$ , circunscrito a  $K$ . Entonces  $|T| \leq 5|t|$ .*

Sin embargo, la Conjetura 3.4.1 es falsa. El contraejemplo se obtiene al considerar el triángulo  $ace$  en  $H_0$  (ver Figura 3.24). Si  $a'c'e'$  es el triángulo homotético a  $ace$  circunscrito a  $H_0$ , entonces se tiene que  $\frac{|a'c'e'|}{|ace|} = \frac{9}{4}$ , de donde se sigue que  $|a'c'e'| = \frac{81}{16} \cdot |ace|$ . Como  $\frac{81}{16} > 5$ , ésto contradice la conjetura de Makeev.

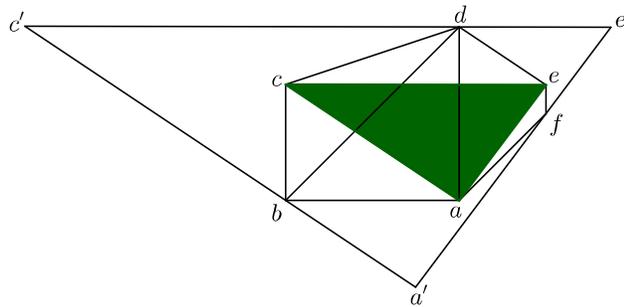


Figura 3.24:  $\sqrt{5} \cdot |a_1c_1d_1| \geq |\mathcal{P}|$

Sin embargo, creemos que lo siguiente es cierto.

**Conjetura 3.4.2** *Existe un triángulo  $t$  de área máxima en  $K$  y su homotético  $T$ , circunscrito a  $K$ , tal que  $|T| \leq 5|t|$ .*

Utilizando el caso extremo de Fleischer, tenemos que para el triángulo  $abd$ , la razón de homotecia  $\lambda$  es:  $\frac{|h(abd)|}{|abd|} = \frac{13}{6} < \sqrt{5}$ . Si  $a'b'd'$  es un triángulo homotético a  $abd$  circunscrito a  $H_0$ , tenemos que

$$|a'b'd'| = \left(\frac{13}{6}\right)^2 |abd| < 5|abd|.$$

Queda como trabajo futuro analizar si la Conjetura 3.4.2 es cierta o no.



---

## Capítulo 4

# Conclusiones

---

En este trabajo que consta de tres capítulos tratamos de entender lo que significa la métrica de Banach- Mazur desde el punto de vista de la Geometría Convexa. Se estudiaron los resultados más relevantes que actualmente existen sobre el tema. Se estudiaron y se comprendieron las técnicas utilizadas por los autores de tales resultados. Lo anterior nos ayudó a reproducir algunos de los resultados con nuestras propias técnicas y en algunos casos, a mejorarlos.

Queda mucho trabajo futuro derivado de esta tesis. En primer lugar, queda seguir estudiando los resultados de Fleischer en [4] y cómo mediante estos resultados se puede desarrollar un algoritmo que determine cuando un robot se puede mover por cierta trayectoria. Nos falta dar una prueba para la conjetura de Lassak y una prueba para la conjetura derivada de la conjetura de Makeev.

Hay más trabajo que hemos hecho sobre el tema y que hemos decidido aún no incluir en este trabajo de tesis. Seguiremos desarrollando estos temas y los resultados obtenidos formarán parte de mi tesis de maestría. Tenemos la confianza de que buenos resultados de investigación pueden salir derivados de esta tesis.



---

## Bibliografía

---

- [1] A. S. Besicovitch. *Measure of asymmetry of convex curves*, J. London Math. Soc. **23** (1948), 237 – 240.
- [2] G. D. Chakerian y L. H. Lange. *Geometric extremum problems*, Mathematics Magazin **44** ( 1971), 57 – 69.
- [3] G. D. Chakerian. *Minimum area of circumscribed polygons*, Elem. Math. **28** (1973), 108 – 111.
- [4] R. Fleischer, K. Mehlhorn, G. Rote, E. Welzl y C. Yap. *Simultaneous inner and outer approximation of shapes*, Algorithmica **8** (1992), 365 – 389.
- [5] Y. Gordon, A. E. Litvak, A. Meyer y A. Pajor, *John's decomposition in the general case and applications*, J. Differential Geom. **68** (2004), 270 – 289.
- [6] W. Gross. *Über affine Geometrie XIII: Eine Minimumeigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids*. Leipziber Ber. **70** (1918), 38 – 74.
- [7] F. John. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, (1948), Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 187 – 204.
- [8] M. Lassak, *Approximation of convex bodies by triangles*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 207 – 210.

- 
- [9] M. Lassak, *Banach-Mazur distance of planar convex bodies*, Aequationes Math. **74** (2007), 282 – 286.
- [10] L. A. Lyusternik, *Convex Figures and Polyhedra*, Moscow 1956 (Russian; English translation, New York 1963).
- [11] V. V. Makeev. *An extremal property of convex hexagons*, J. Math. Sci. **175** (2011), 554 – 555.
- [12] E. Sas. *On a certain extremum property of the ellipse*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 533 – 542.
- [13] E.G. Straus. *Some extremal problems in combinatorial geometry*, Lecture Notes in Math. **686** (1978), 308 – 312.
- [14] W. Stromquist, *The maximum distance between two-dimensional Banach spaces*, Math. Scand. **48** (1981), 205 – 225.
- [15] V. A. Zalgaller. *Minimal convex  $k$ -gons containing a given convex polygon* Journal of Mathematical Sciences **104** (2001), 1272 – 1275.