



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias

DETERMINACIÓN DE FIGURAS PLANAS MEDIANTE LA FUNCIÓN ÁNGULO Y
LA FUNCIÓN RADIAL

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

L.M.A. Magdalena García Jiménez

Dirigida por:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

SINODALES

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Presidente

Firma

Dr. Damián Vargas Vázquez

Secretario

Firma

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez

Vocal

Firma

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Firma

M. en C. Víctor A. Aguilar Arteaga

Suplente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Directora de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
México
Diciembre 2015

RESUMEN

Las figuras planas son de gran interés debido sus múltiples aplicaciones y propiedades, algunas de esas aplicaciones se dan en el procesamiento de imágenes, en algunos problemas de mecanismos y en el trazado de dibujos mediante el ordenador. Las fronteras de este tipo de figuras son curvas cerradas simples y por ende pueden ser utilizadas para caracterizar a la figura. En este trabajo se adoptan las funciones radial y ángulo para la determinación de figuras planas y se da una modificación de un modelo conocido de la clasificación de imágenes. Se propone una modificación al modelo de clasificación de formas llamado C-R, con la cual dicho modelo podría volverse invariante a rotación. La invariancia a rotación se obtiene encontrando dos puntos cuya propiedad es que no se afecten por rotaciones en un medio discreto. También, se demuestran algunas propiedades de las curvas isópticas, siendo de las más relevantes, la relación entre el área encerrada por una curva dada y el área encerrada por sus isópticas, y el hecho de que un cuerpo convexo centralmente simétrico en el espacio Euclideo n -dimensional sea una bola Euclidea si alguna de sus superficies isópticas es homotética a él, en particular cuando se trata de una figura en el plano, es un disco Euclideo si alguna de sus isópticas es homotética a él.

(Palabras clave: función radial, función ángulo, isóptica homotética, cuerpo convexo, modelo radios-centroide)

SUMMARY

Plane curves are of great interest due to their multiple applications and properties, some examples of applications are in image processing, in some mechanisms problems and in shape design. Boundary of plane curves are simple closed curves there for, they can be used to make a characterization of the curve. In this thesis the radial function and the angle function are used to determine plane curves and is analyzed a modified model for image classification. It is proposed a modification for the C-R model which give to the model the rotation invariance. The invariance is reached once it is found a pair of points which principal property is that they are not affected by rotations in a lattice. In addition, some properties of isoptic curves are proved, one of the most relevant proofs is the relation between the enclosed area by a given curve and the enclosed area by its isoptics; other relevant proof is the fact that a centrally symmetric body in the n -dimensional Euclidean space is an Euclidian ball if there is one of its isoptic surfaces which is homothetic to the body, particularly when is about a curve in the plane, is an Euclidean disc if one of its isoptics are homothetic to itself.

(Key words: radial function, angle function, homothetic isoptic, convex body, centroid-radii model)

**A aquellos que me dieron la vida
y se han asegurado que sea buena.
A mis padres porque primero pienso y luego existo.**

AGRADECIMIENTOS

En el camino por la vida lo mejor, desde mi punto de vista, es tener amor. Amor por aquellos que te rodean, amor por el lugar en el que vives, amor por aquello que haces, amor por la vida. Y gracias a Dios yo estoy rodeada de amor. Soy afortunada de contar con personas que enriquecen mi andar por la vida, por ser amada y siempre encontrar inspiración cuando la necesito. Por ello quiero agradecer a todos y cada uno de los seres que han sido parte de mi formación y mi vivir.

Quiero agradecer a mis padres, *M. Isabel Jiménez Delgado* y *Fernando García Trujillo*, por ser el cimiento de mi vida. Gracias a ustedes veo al mundo con curiosidad y entusiasmo, gracias a todos sus esfuerzos he logrado seguir mis pasiones hasta donde me han traído y he perseverado cuando parece que no se puede más. A mi hermana *Yadira*, gracias por apoyarme siempre y retarme a ser mejor constantemente. A *José Edem Reséndiz González*, porque mi felicidad se ha multiplicado desde que vives en mi corazón, gracias por unir tu camino al mío e inspirarme a dar lo mejor de mí siempre.

A mi director de tesis, *Dr. Jesús Jerónimo Castro*, por perseguirme incansablemente y mantener mi mente activa todo el tiempo. He aprendido muchas cosas de usted y agradezco profundamente cada comentario porque sin ese entusiasmo y apoyo quizá seguiría intentando terminar. Debe saber que admiro muchísimo su forma de abordar los problemas y el hecho de que no se rinde nunca y siempre está pensando en grande.

A mis sinodales, *Dr. Damían Vargas Vázquez*, *Dra. Angelica R. Jiménez Sánchez*, *Dr. Roberto A. Gómez Loenzo*, *M. en C. Víctor A. Aguilar Arteaga*, muchas gracias por guiarme durante mi trabajo con sus observaciones, correcciones y expectativas.

A mis compañeros de clase por las ideas y aportaciones realizadas a mi trabajo. A la *Ing. Diana C. Toledo P.* por la revisión ortográfica y su compañía, Gracias.

A mis amigas porque con ustedes nunca olvido sonreír. Es increíble poder contar con personas como ustedes, que escuchan, que entienden, que viven, que sueñan y no juzgan. Gracias por su amistad y amor, *Teresa Ariadna Ortíz Robles* y *Luisa Ramírez Granados*.

Y finalmente a la Facultad de Ingeniería, división de posgrado de la Universidad Autónoma de Querétaro por darme la oportunidad de desarrollar esta investigación y al CONACYT por hacerlo posible.

Gracias Dios porque sin la fe nada es posible.

Magdalena García Jiménez

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Summary	III
Dedicatoria	V
Agradecimientos	VII
Índice general	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. La función radial y el modelo C-R	1
1.1.2. Antecedentes de la función ángulo	4
1.2. Descripción del problema	5
1.3. Justificación	6
1.4. Hipótesis y objetivos	6
1.4.1. Hipótesis.	6
1.4.2. Objetivo general.	6
1.4.3. Objetivos particulares.	7
2. Fundamentación Teórica	9
2.1. El modelo C-R	10
2.2. La función ángulo para la caracterización de forma	13
2.3. Isópticas de curvas de Bézier	21
2.3.1. Las curvas de Bézier	21
3. Metodología y Resultados	25
3.1. El modelo C-R modificado	25
3.2. Una caracterización del círculo	26
3.3. Isópticas en el plano	26
3.4. Caracterización de la esfera Euclidiana	29
3.5. Isópticas y la razón de volumen cónico	29
4. Conclusiones	33

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Resumen de precisión de algunos métodos.	3
-------------------------------------------------------	---

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Diagrama del método general de Chang.	2
1.2. Comparación entre los métodos FD (Fourier Descriptors-Based-Method (Per- soon y Fu, 1986)), TA (Turning Angle Method (Arkin <i>et al.</i> , 1991)), DH (Distance Histogram Method (Fan, 2001)), CR (Centroid-Radii model) y el CRTA (Centroid-Radii and Turning Angle Method (Mocanu, 2007)). a) Pre- cisión y sensibilidad, b) tiempo de procesamiento promedio y c) tiempo de comparación promedio	3
1.3. Ejemplar utilizado en el trabajo de Romero-González y Vargas-Vázquez (2013) y la firma que describe su forma.	4
1.4. Ejemplo de figuras cuya isóptica es similar: elipse y círculo.	5
2.1. Ejemplo de forma en una imagen.	9
2.2. Representación de la función radial.	10
2.3. Representación del descriptor de forma de una imagen con el modelo C-R (Kong et al., 2007).	11
2.4. Ejemplo de una forma con intervalos tomados a partir de un ángulo de 45° . Al considerarse los puntos A, B, C y D se obtiene diferente centroide que si se consideran los A', B', C' y D' , lo que da lugar a una clasificación ineficaz.	12
2.5. Representación de la función ángulo.	13
2.6. Curva con dos círculos concentricos como isópticas es un círculo Euclidiano.	14
2.7. El origen O debe estar contenido en el interior de C	15
2.8. Función soporte de C	16
2.9. Función soporte de C	18
2.10. El camino Q, M, N', P', Q' tiene longitud mayor a la del segmento QQ'	20
2.11. Curvas de Bézier de varios grados.	22
2.12. Isópticas de 90° (negro) y 50° (morado) de un segmento.	23
3.1. Cuadrado y su rotación, note que la rotación produce una figura que a ganado o perdido pixeles.	26
3.2. La razón de volumen cónico homotético.	30
3.3. La región $-D_u$	31

1. INTRODUCCIÓN

Un gran avance en la investigación de clasificación de formas es el uso de las propiedades de las siluetas de los objetos, ya que las siluetas no tienen hoyos y son representadas por curvas cerradas simples. Una rama de las matemáticas que estudia objetos a partir de su silueta es la tomografía geométrica, cuyo objetivo principal es determinar un conjunto si se conoce alguna información parcial de éste.

En este trabajo se adoptan dos funciones, la “función ángulo” y la “función radial”, para la determinación de figuras planas a partir de su silueta. La función ángulo es tratada desde el punto de vista teórico, mientras que la función radial es analizada en busca de la mejora de un modelo de descripción de forma que ha sido utilizado para la clasificación de plantas y siluetas humanas desde hace algunas décadas, el modelo Radios-Centroide (C-R, por sus siglas en inglés (Tan *et al.* , 2000)).

1.1. Antecedentes

La tomografía geométrica cuenta con herramientas que son de gran utilidad para la descripción de forma de un objeto de manera digital. Una de estas herramientas es la función radial; esta técnica es utilizada en una gran cantidad de modelos como base para obtener el descriptor de forma, algunos de ellos son reportados por: Fan (2001), Li y Simske (2002), Kong *et al.* (2007) y Mocanu (2010).

1.1.1 La función radial y el modelo C-R

Hasta el momento se han desarrollado varios modelos para la descripción de un objeto en una imagen digital, ya sea por una cubierta rectangular, por los vértices del polinomio de aproximación, utilizando la textura o color del objeto e incluso utilizando algunas características geométricas del objeto como diámetro, ancho, excentricidad, etc. Sin embargo los modelos existentes presentan una precisión insuficiente o utilizan demasiados recursos debido a la complejidad que presentan al trabajar con transformaciones de la imagen original, ya que la imagen bajo la transformación es una aproximación de la imagen original.

El primer antecedente directo del modelo C-R es el trabajo de Chang *et al.* (1991), donde surge la idea de utilizar el centroide de los puntos en la frontera de la imagen y las distancias a los puntos característicos del objeto. Dicho modelo es invariante a traslación, escala y rotación pero para obtener los puntos característicos se requiere de bastante trabajo. La Figura 1.1 muestra el proceso del que consta, a grandes rasgos, su método.

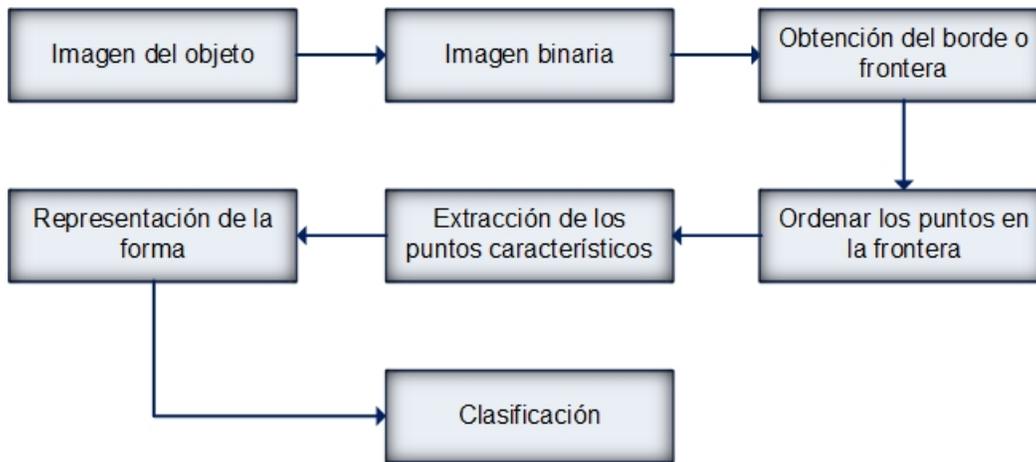


Figura 1.1: Diagrama del método general de Chang.

Tan *et al.* (2000) proponen un modelo que hasta el momento resulta de interés debido a lo sencillo que es de entender. El modelo se basa en las longitudes de los segmentos que unen al centroide con los puntos en la frontera de la forma. Si las longitudes para ángulos correspondientes son tolerablemente iguales, para un número suficiente de puntos, entonces la figura es clasificada como similar. Para la aplicación del modelo se debe tener la figura a blanco y negro, usualmente la figura blanca y el fondo negro. Cada pixel es representado por su color y así la forma de la figura puede ser representada por un vector cuyas entradas serán las longitudes de los radios que van del centroide al borde de la figura. Como medida de similitud se utiliza la distancia entre radios correspondientes.

A partir de entonces y debido a la sencillez y eficacia del modelo C-R se han propuesto diversos modelos que tratan de solucionar aquellos problemas que el C-R no es capaz de solucionar, como el hecho de no ser invariante a rotaciones y de no ser capaz de clasificar objetos no convexos. Ejemplos de ello son: Fan (2001), el cual propone utilizar el histograma de los radios para hacer la comparación robusta a rotaciones. Sin embargo existen figuras cuyo histograma es igual y las figuras no lo son lo que es un gran problema de dicho modelo. Otro trabajo basado en el C-R es el de Li y Simske (2002) que utilizan, como parte primordial en su modelo, la desviación estándar de las longitudes de los radios como una medida de la transformación aplicada a la figura y por consiguiente de la medida de similitud entre figuras. Tan *et al.* (2003) introducen una generalización del modelo CR que trabaja también con todo tipo de figuras (no convexas, formas cóncavas y con hoyos).

El procesamiento de imágenes se utiliza hoy en día para la clasificación de plantas, por ejemplo por medio del reconocimiento de sus hojas. Ejemplos de ello son el trabajo de Caballero y Aranda (2010) que representan la forma usando un descriptor de forma basado en la curvatura del contorno de la hoja. Por otro lado, Chaki y Parekh (2012) introducen el método de Superposición Binaria (B-S) para el reconocimiento de plantas que consiste en comparar las imágenes binarias de las hojas por superposición y usando la suma de los valores de los pixeles diferentes de cero resultantes como el vector de características. Chaki y Parekh (2012) realizan la validación de su modelo contrastándolo con el de Momentos Invariante (M-I) y con el modelo C-R. De dicho contraste se obtuvo la Tabla 1.1 la cual muestra un resumen de la precisión de cada método. Se puede ver no hay diferencia significativa entre el

Tabla 1.1: Resumen de precisión de algunos métodos.

Método/Clases de plantas	A	B	C	Precisión Total
<i>M-I</i>	96	100	47	81
<i>C-R</i>	97	100	47	98
<i>B-S</i>	100	100	97	99

modelo C-R y el B-S para las tres clases de plantas utilizadas: A(Arbutus Unedo), B(Betula Pendula Roth) y C(Ptosporum Tobira).

Es de gran interés el análisis del modelo C-R debido a que ha sido la base de esos modelos que han resultado útiles para la clasificación y detección de formas. Además, el modelo C-R es muy sencillo y en comparación con algunos métodos más recientes presenta un menor tiempo de procesamiento y tiempo de comparación, como se ve en la Figura 1.2.

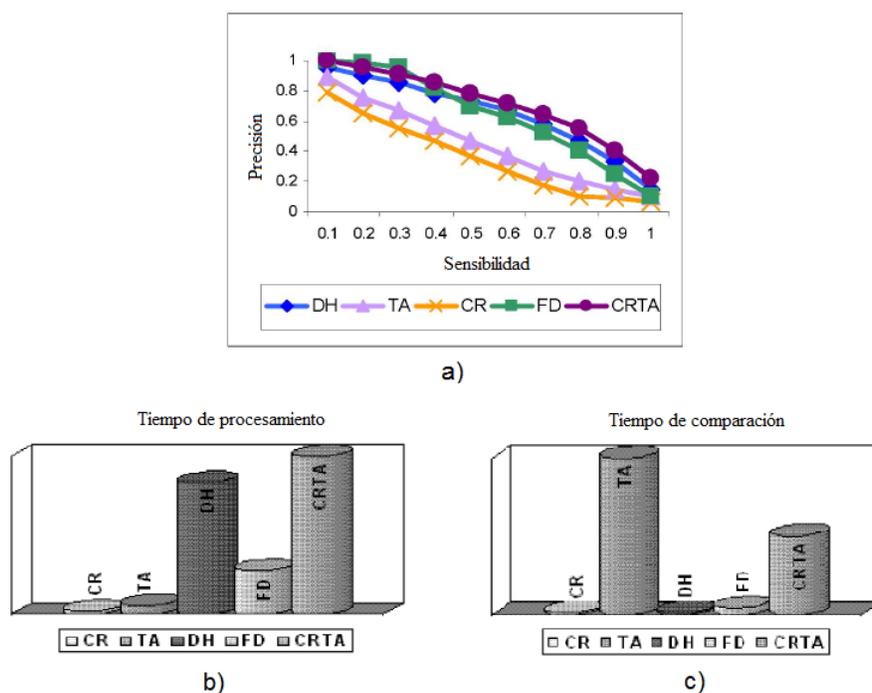


Figura 1.2: Comparación entre los métodos FD (Fourier Descriptors-Based-Method (Persoon y Fu, 1986)), TA (Turning Angle Method (Arkin *et al.* , 1991)), DH (Distance Histogram Method (Fan, 2001)), CR (Centroid-Radii model) y el CRTA (Centroid-Radii and Turning Angle Method (Mocanu, 2007)). a) Precisión y sensibilidad, b) tiempo de procesamiento promedio y c) tiempo de comparación promedio

Recientemente, Romero-González y Vargas-Vázquez (2013) desarrollaron una herramienta informática que ofrece diversa información sobre varios parámetros de las hojas (área foliar, longitud, anchura, excentricidad), para ello realizaron una combinación de distin-

tos métodos y técnicas, tales como los momentos invariantes y redes neuronales artificiales. El programa que realizaron fue creado de tal forma que pudiera ser enriquecido al incorporar nuevas especies de plantas y técnicas que mejoren la clasificación al mismo tiempo que siga siendo una alternativa económica a los productos existentes en el mercado. El programa fue implementado con 13 especies de plantas que fueron encontradas al rededor de la Facultad de Ingeniería de la UAQ, de cuatro de ellas se tomaron 50 muestras y del resto se tomaron 10. La figura 1.3 muestra la imagen de una de las hojas utilizadas y la firma que describe su forma.

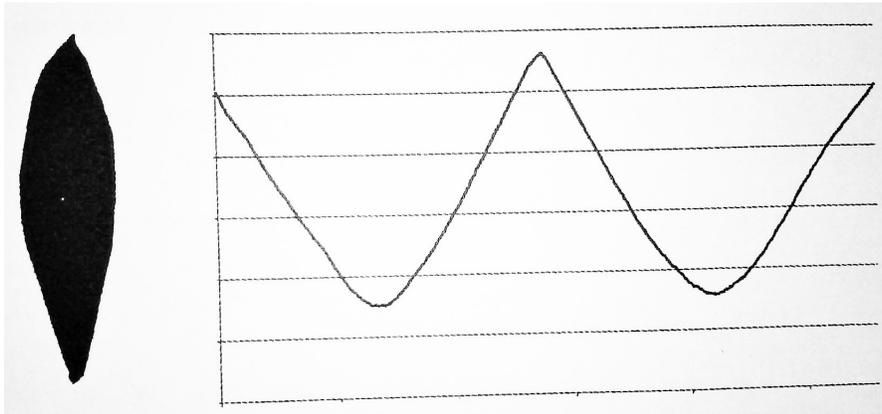


Figura 1.3: Ejemplar utilizado en el trabajo de Romero-González y Vargas-Vázquez (2013) y la firma que describe su forma.

Los métodos empleados por Vargas-Vázquez y Romero-González tienden a confundir algunas especies incluso cuando las hojas pueden ser distintivas en forma por lo que proponen como método adicional implementar como descriptor de forma las firmas de forma.

1.1.2 Antecedentes de la función ángulo

La “función ángulo” también proporciona información sobre un objeto plano, sin embargo los resultados existentes al respecto continúan siendo únicamente teóricos. Cuando la función ángulo es constante, es decir, cuando se considera el conjunto de puntos desde los que el ángulo visual es un valor fijo, estos describen una curva conocida como isóptica. Si restringimos la función ángulo de una figura K a los puntos de una de sus isópticas entonces no necesariamente se determina de manera única la figura. Por ejemplo, la isóptica con ángulo recto de una elipse es un círculo y de igual manera la isóptica con ángulo recto de un círculo es un círculo. Entonces, tenemos dos figuras distintas cuyas isópticas son iguales y por lo tanto sus funciones ángulo son iguales desde los puntos de un círculo (ver Figura 1.4).

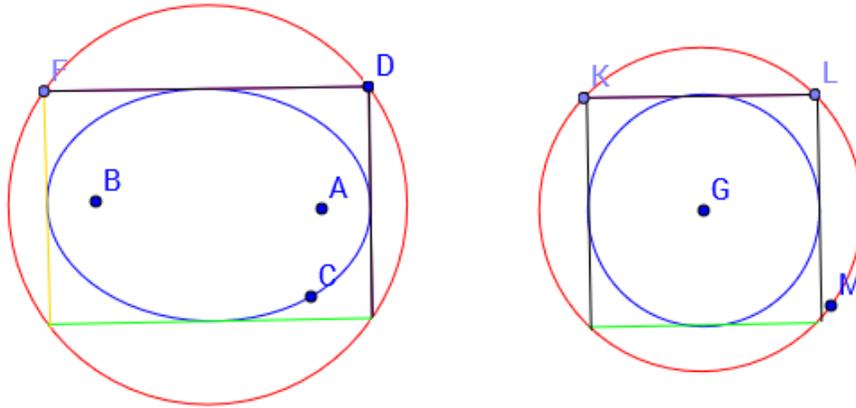


Figura 1.4: Ejemplo de figuras cuya isóptica es similar: elipse y círculo.

Sin embargo, se tienen resultados positivos en cuanto a isópticas. En 1950, John. W. Green demuestra que es posible saber si un conjunto convexo plano es círculo, mediante sus isópticas. Kurusa (2012) por su parte demostró que si dos polígonos convexos tienen funciones ángulo iguales para cada punto en el círculo unitario, entonces los polígonos son iguales. Otro resultado interesante es el que demostró Nitsche utilizando el resultado de Green, el demostró que si para una figura convexa dos de sus isópticas son círculos entonces la figura es círculo.

Aunque en general, no se puede decir mucho sobre la frontera de una figura convexa. Si conocemos alguna de sus curvas isópticas, para el caso cuando ésta coincide con alguna otra curva especial, se puede determinar alguna de las propiedades de la figura y en ocasiones se puede determinar exactamente la figura.

1.2. Descripción del problema

Dada una figura convexa K (un conjunto compacto convexo con interior no vacío), se puede determinar la frontera de ésta mediante la función radial o la función ángulo.

Un problema interesante es determinar si dos figuras son distintas o no mediante el conocimiento de su función radial, incluso en el caso de que su función radial no sea la misma. Por ejemplo, dos figuras que sólo difieren por una rotación tendrán funciones radiales distintas, de igual manera si sólo difieren por una dilatación. Entonces, nos interesa saber si dos figuras son similares aunque sus funciones radiales sean distintas.

Otro problema interesante es conocer un objeto a partir de su función ángulo, sin embargo, no es práctico utilizar la función ángulo desde todos los puntos del plano, más bien se desea encontrar conjuntos de puntos suficientemente pequeños de manera que conociendo la función ángulo para esos puntos sea suficiente para determinar de manera única al objeto.

Hablando del caso de estudio, es bien conocido que la manipulación de datos, imágenes y cualquier otro tipo de archivo en forma manual es tediosa y puede llevar a la pérdida de información por lo que llevar una base de datos de dichos documentos es de gran utilidad para la agilidad de los sistemas. Sin embargo, hoy en día, la cantidad de imágenes que pueden ser capturadas y por ende introducidas en una base de datos es inmensa por lo que crece la necesidad de mejores métodos de clasificación y detección de formas.

En años recientes, muchos métodos de recuperación basados en la forma han sido desarrollados. Sin embargo, la recuperación basada en la forma está lejos del éxito. Una razón es que las representaciones de forma existentes no son lo suficientemente precisas para implementar una recuperación efectiva. Algunos modelos existentes para la descripción de la forma de un objeto en una imagen no son invariantes a la rotación de la imagen lo que puede resultar en falsos positivos y aquellos que si lo son reportan un sacrificio en el tiempo de procesamiento.

1.3. Justificación

La mejora de los métodos existentes para la descripción de objetos de manera digital resultará en una reducción de costo o tiempo de procesamiento y es por ello que tratar de explotar al máximo las propiedades geométricas de las figuras es de gran importancia. La función ángulo y la función radial tienen propiedades muy útiles para la descripción de forma, muestra de ello es que la función radial ya ha sido utilizada con éxito para este propósito desde el año 2000. Por otro lado, la función ángulo puede ser de gran utilidad, por ejemplo estas son utilizadas para calcular curvas de bezier y en algunos problemas de mecanismos. Sin embargo, los resultados existentes sobre la función ángulo y sus propiedades no son suficientes, hay mucho material por descubrir y es por ello que se requiere de un arduo trabajo en esta área.

Debido a que la función radial ya ha sido utilizada para la descripción de forma ya que el modelo C-R es sencillo y eficaz, aún se cuenta con detalles que podrían ser mejorados (como el hecho de que no es invariante a rotación); además el incremento de las tecnologías basadas en imágenes digitales y video trae consigo una gran necesidad de desarrollo de estas, además de métodos capaces de obtener la mayor utilidad de ellas, por lo que es necesario realizar mejoras a dicho modelo.

En otro sentido, es cierto que para el reconocimiento de imágenes ya se tiene una gran cantidad de modelos, sin embargo, siempre es posible mejorar la efectividad con que se compara o la velocidad con que se procesan las imágenes. Además, se sabe que muchas veces al mejorar la capacidad del método para detectarlas o clasificarlas se puede sacrificar velocidad y el modelo C-R podría ser mejorado de tal forma que conserve o disminuya su tiempo de procesamiento.

1.4. Hipótesis y objetivos

1.4.1 Hipótesis.

A partir de la utilización de dos puntos especiales, el centroide y el centroide de la frontera de la forma, se determina de manera única el radio inicial en el modelo C-R lo que vuelve el modelo invariante a la rotación. Demostrar la siguiente conjetura: “Si para un conjunto convexo $K \in \mathbb{R}^2$, una de sus isópticas es homotética a K , entonces K es un círculo”

1.4.2 Objetivo general.

Determinar cuándo dos figuras convexas son iguales salvo por transformaciones de traslación, homotecia o rotación mediante las funciones radial y la función ángulo.

1.4.3 Objetivos particulares.

1. Desarrollar un algoritmo que sea invariante a la escala, la traslación y la rotación, para el reconocimiento de objetos sin hoyos a partir de la determinación de manera única del radio de inicio en el modelo C-R.
2. Demostrar la conjetura.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para la representación de una figura en una imagen hay dos tipos de descriptores, los que se basan en la forma de la figura en la imagen y los que se basan en el contenido de la imagen. Los descriptores más utilizados son los basados en la descripción de forma ya que las siluetas no tienen hoyos y son representadas por una curva cerrada simple. Una herramienta utilizada para la descripción de forma que aprovecha estas características de las formas es la tomografía geométrica.

La tomografía geométrica sirve entre otras cosas, para conocer la forma de un objeto de una manera no invasiva y además cuenta con muchas herramientas matemáticas que pueden ser utilizadas para la descripción de formas. Los rayos- x y la función ángulo, al igual que la función radial son ejemplos de técnicas que se utilizan para la descripción de forma de un objeto. Sin embargo, los objetos más simples para clasificar o describir en forma, son los objetos convexos.

DEFINICIÓN 2.1: Sea K un conjunto en \mathbb{R}^n . Decimos que K es un conjunto convexo si para cualesquiera dos puntos $x, y \in K$ el segmento $[x, y]$ también está contenido en K .

Computacionalmente, se piensa en una forma como un área blanca con fondo negro (o viceversa) que representa un objeto en una imagen, como en la figura 2.1. Cada pixel de la imagen es representado por su color y sus coordenadas; el contorno consiste de aquellos pixeles blancos con al menos un vecino negro.



Figura 2.1: Ejemplo de forma en una imagen.

La función radial depende únicamente de las distancias entre los puntos en la frontera y el origen, por lo que es práctico utilizarla para la descripción de forma; además, es invariante a traslación, a escala y a rotación con el origen fijo. Sin embargo, la función radial utilizada como herramienta para la descripción de forma no aporta la invariancia a rotación por sí sola.

DEFINICIÓN 2.2: Si el origen está contenido en K , para cada dirección u , la función radial en u es la distancia del origen hasta el punto donde el rayo con dirección u interseca a la frontera de K .

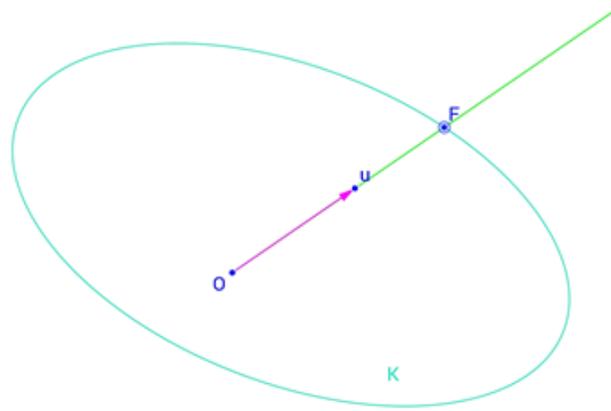


Figura 2.2: Representación de la función radial.

El modelo para descripción de forma C-R utiliza una función radial como base, y con ello adopta la invariancia a traslación y escala. Además, puede notarse que la función radial no sólo puede ser usada con objetos convexos sino estrellados.

DEFINICIÓN 2.3: Sea $A \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. El conjunto A tiene forma de estrella, o se dice estrellado en a si para cada L que pasa por a el conjunto $L \cap A$ es conexo.

2.1. El modelo C-R

En el modelo C-R las longitudes de los radios de una forma desde su centroide a intervalos regulares son las que se utilizan para describir la forma. El centroide de la forma se posiciona en (C_x, C_y) donde C_x y C_y son respectivamente, el promedio de las coordenadas x e y para todos los píxeles negros y m el número total de píxeles en la forma, como se muestra en la ecuación 2.1.

$$C_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad C_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \quad (2.1)$$

De esta manera un radio es una línea recta que une el centroide con un punto de contorno. Si (x_i, y_i) son las coordenadas del píxel en el contorno que corresponden al radio i -ésimo y (C_x, C_y) son las coordenadas del centroide, la longitud del radio correspondiente está dada

por

$$L_{i\theta} = \sqrt{(C_x - x_i)^2 + (C_y - y_i)^2}. \quad (2.2)$$

Sea θ el intervalo regular (en grados) entre cada radio. Entonces, el número de intervalos está dado por

$$K = \frac{360}{\theta}.$$

Todas las longitudes de los radios son normalizadas al dividir por la longitud del radio más grande como se muestra a continuación

$$l_{i\theta} = \frac{L_{i\theta}}{L_{max}}. \quad (2.3)$$

Además, sin pérdida de generalidad, supóngase que los intervalos son tomados en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en la dirección del eje y positivo; entonces el descriptor de forma es $S = \{l_0, l_\theta, \dots, l_{k\theta}\}$

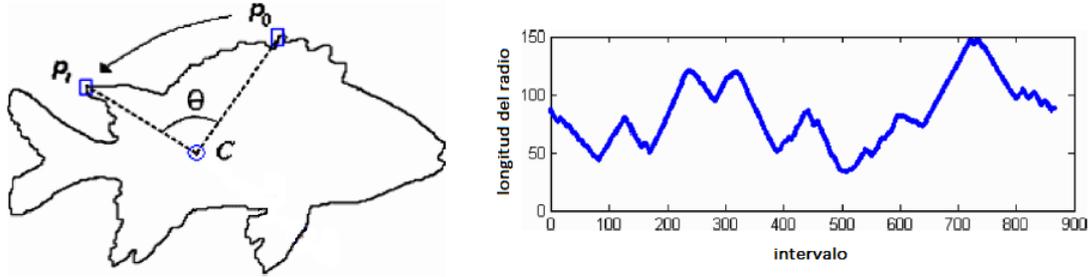


Figura 2.3: Representación del descriptor de forma de una imagen con el modelo C-R (Kong et al., 2007).

Sean $S_1 = \{l1_0, l1_\theta, \dots, l1_{k\theta}\}$ y $S_2 = \{l2_0, l2_\theta, \dots, l2_{k\theta}\}$ dos descriptores de forma de imágenes diferentes, entonces se dirá que dos imágenes son similares si se cumple la desigualdad (2.4), donde MRDT es la diferencia máxima tolerada. En el trabajo realizado por Tan et al. (2003) un MRDT de 0.15 les fue útil.

$$|l1_{i\theta} - l2_{i\theta}| < MRDT \forall i \in [0, k - 1]. \quad (2.4)$$

De esta manera, las figuras distintas pueden ser diferenciadas unas de otras con un número suficiente de radios. Sin embargo esto se restringe a figuras convexas. Para formas que son cóncavas o con hoyos, Tan *et al.* (2003) recurrieron a la introducción de m anillos imaginarios. El i -ésimo anillo es un círculo imaginario centrado en el centroide con radio igual a $1 - \frac{1}{m}$ veces la longitud del radio mayor, con $0 \leq i \leq m - 1$. El anillo cero es el radio más alejado con longitud igual a la del radio mayor. El refinamiento define un borde para cada anillo y para cada borde nuevo se aplica el mismo proceso de obtener un conjunto de radios pero en este caso la longitud del radio máximo está limitada por el radio del anillo. Hay casos en los que una línea que se extiende desde el centroide toca a 2 o más puntos frontera. Para esos casos, sólo los más largos se extraen. Debe notarse que para formas convexas sin hoyos como círculos y cuadrados, el uso de anillos es excesivo. Luego, se puede decir que un anillo

es útil si aporta más información que sus anillos exteriores. Para una forma, el anillo 0 es siempre útil ya que no tiene anillos exteriores. Para un anillo j ($0 \leq j \leq m - 1$), si la longitud del radio en el ángulo θ es igual al radio del anillo, el radio no indica la presencia de una nueva frontera.

A pesar de la generalización realizada por Tan *et al.* (2003) el Modelo C-R presenta algunos inconvenientes; no es invariante a rotación y se pierde información sobre la forma cuando el número de intervalos es pequeño, por ejemplo, en la figura 2.4 se muestra una forma con intervalos de 45° en la que las firmas generadas comenzando a partir de rotaciones de 45° son distintas, por lo que el modelo C-R las clasificaría erróneamente.

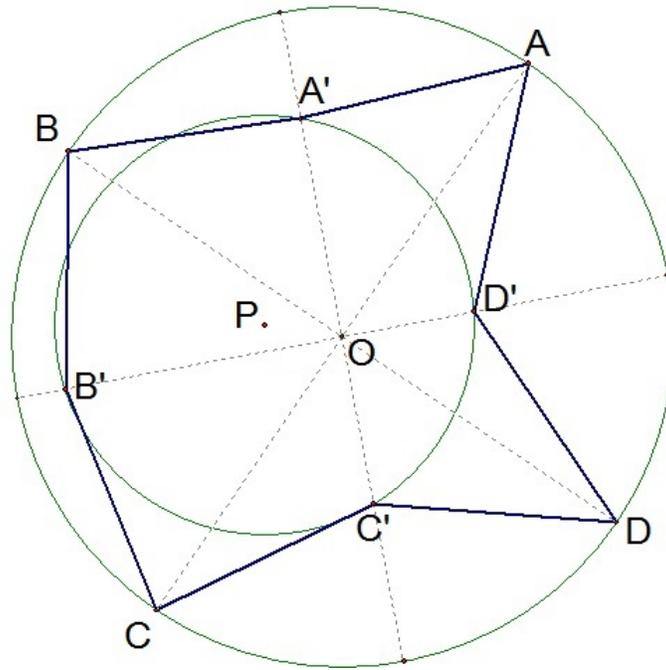


Figura 2.4: Ejemplo de una forma con intervalos tomados a partir de un ángulo de 45° . Al considerarse los puntos A, B, C y D se obtiene diferente centroide que si se consideran los A', B', C' y D' , lo que da lugar a una clasificación ineficaz.

Por otro lado, Kong *et al.* (2007) desarrollaron otro método basado en el C-R que funciona para figuras no convexas ya que asume que la frontera de la forma es una curva cerrada de un pixel de ancho y utiliza cada pixel en la frontera de manera ordenada desde el punto de partida (que puede ser el eje x o y positivo), para obtener el descriptor de forma con el modelo C-R. De esta manera se soluciona uno de los problemas que presenta el C-R ya que al considerarse cada pixel en el contorno de la forma no se pierde información y como se considera de manera ordenada se obtiene la firma del objeto sin importar si la figura es convexa o no. Además, en su trabajo realizan el experimento para diferentes resoluciones y reportan que entre mayor resolución mejor precisión. Sin embargo, es necesario señalar que siempre comparan entre imágenes con la misma resolución debido a que un cambio alteraría el número de elementos en la frontera y no sería posible la comparación. Aunque su método no funciona para formas con hoyos y resta obtener la invarianza a rotación que permita clasificar y describir objetos no convexas de manera eficiente.

2.2. La función ángulo para la caracterización de forma

Otra manera de caracterizar objetos es a partir de la función ángulo. Esta herramienta de la tomografía geométrica ha sido estudiada desde hace décadas, incluso por el famoso matemático Green (1950) quien obtuvo resultados muy interesantes desde el punto de vista teórico. A continuación se define la función ángulo.

DEFINICIÓN 2.4: Sea C una curva cerrada y convexa. Para cada punto x en el plano (fuera de C) se define la función ángulo $\alpha_C(x)$ como la medida del ángulo visual de C desde el punto x . Donde el ángulo visual es el ángulo que forman las líneas soporte que pasan por x y que son tangentes a C .

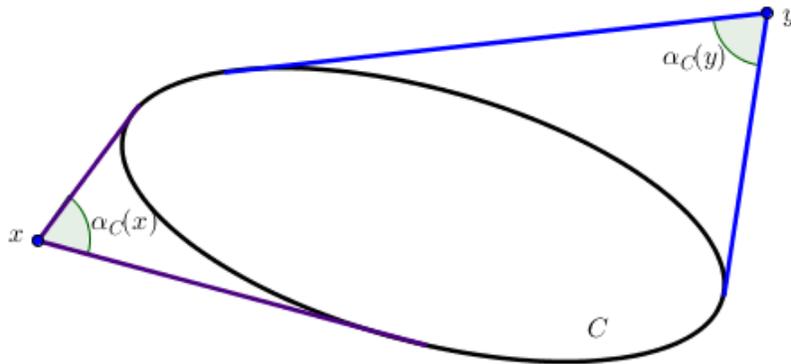


Figura 2.5: Representación de la función ángulo.

Cuando la función ángulo es constante, cuando se considera el conjunto de puntos desde los que el ángulo visual es un valor fijo, estos describen una curva conocida como *isóptica*. Debido a que una curva puede ser parametrizada por la función soporte y a que la isóptica también es una curva, esta también puede ser parametrizada por la función soporte.

DEFINICIÓN 2.5: Sea $K \in \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto convexo. La función soporte de K es $p : K \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(K, u) = \max_{x \in K} \langle x, u \rangle$$

para cada $u \in S^{n-1}$.

Entonces, la isóptica de una curva C queda parametrizada por la función soporte de la siguiente manera.

$$x = p \cos \theta - p' \sin \theta,$$

$$y = p \sin \theta + p' \cos \theta.$$

Si restringimos la función ángulo de una figura C a los puntos de una de sus isópticas entonces no necesariamente se determina de manera única la figura. A pesar de que el tema de las curvas isópticas no es nuevo en geometría de curvas, existen muchas preguntas interesantes concernientes a las propiedades de estas curvas y sus relaciones con la curva dada. Es fácil ver que isópticas de círculos (para cualquier ángulo) son círculos concéntricos.

Sin embargo, la proposición inversa no es cierta, es decir, existen curvas convexas, además del círculo, las cuales tienen círculos como isópticas. Por ejemplo, la isóptica con ángulo recto de una elipse es un círculo y de igual manera la isóptica con ángulo recto de un círculo es un círculo. Entonces, tenemos dos figuras distintas cuyas isópticas son iguales y por lo tanto sus funciones ángulo son iguales desde los puntos de un círculo.

Sin embargo, M. S. Klamkin conjeturó que si existen dos círculos concéntricos que son isópticas de una curva convexa, entonces dicha curva debe ser un círculo. Esa conjetura fue probada por Nitsche (1990) quien la probó utilizando una afirmación establecida por Green (1950).

TEOREMA 2.1. (Teorema de Green) Una curva convexa, cuya isóptica de ángulo β es un círculo concéntrico a ella, es un círculo si β es un múltiplo irracional de π o si $\beta = (\frac{m}{n})\pi$ donde m y n son primos relativos positivos y m es par.

TEOREMA 2.2. Sea C una curva convexa en el plano. Si hay dos círculos concéntricos K_1 y K_2 que son isópticas de C , entonces C es un círculo Euclidiano.

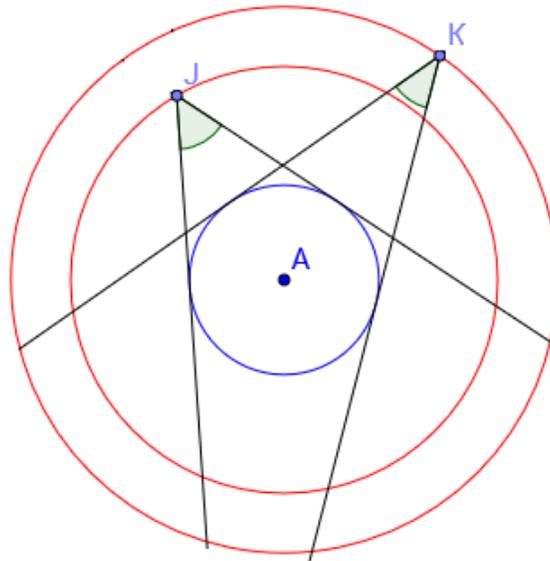


Figura 2.6: Curva con dos círculos concéntricos como isópticas es un círculo Euclidiano.

A continuación se presenta de forma detallada la demostración aportada por Nitsche.

Demostración. Sea β un ángulo bajo el cual C es vista desde cada punto de un círculo dado. De acuerdo con Green (1950), si β es un múltiplo irracional de π o si $\beta = (\frac{m}{n})\pi$, donde m y n son primos relativos y m es par, entonces C es también un círculo. De esta forma se necesitan analizar sólo los casos complementarios. Suponga que dos círculos isópticos de C tienen radios R_1 y R_2 con $R_2 > R_1$, y con centro en el origen. Los ángulos correspondientes

son $\beta_1 = (\frac{m_1}{n_1})\pi$, $\beta_2 = (\frac{m_2}{n_2})\pi$, donde $0 < \beta_1 < \beta_2 < \pi$, para $j = 1, 2$; los enteros m_j y n_j son primos relativos y m_j impar.

Es fácil ver que el origen debe ser un punto en el interior de C . Para ver esto, sea O el origen y suponga que está en el exterior de C . Considere un diámetro d del círculo el cual no interseca a C y un punto p en el círculo de tal forma que esté del mismo lado de C , como en la figura 2.7. Además, suponga que el segmento pO interseca el interior de C . Sea p' un punto en el círculo tal que pp' es un diámetro. Sean s y t los puntos de intersección de las tangentes a C desde p con el diámetro d . Ahora, considere las dos rectas paralelas a ps y pt , respectivamente, y que pasan por p' . Claramente, estas paralelas son las líneas $p't$ y $p's$. Como C está contenida en el triángulo Δpst , se tiene que $p's$ no interseca a C , de la misma forma para $p't$. Se sigue que el ángulo bajo el cual C es vista desde p' es estrictamente menor que el ángulo en el punto p . Lo que contradice el hecho de que el círculo es una isóptica de C , entonces se tiene que O debe estar contenido en el interior de C .

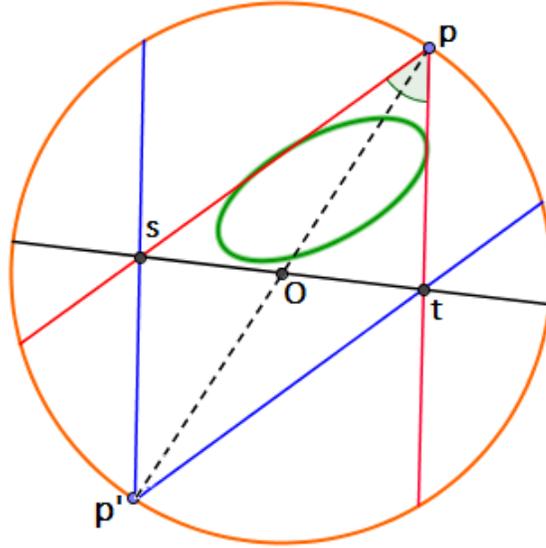


Figura 2.7: El origen O debe estar contenido en el interior de C .

Denótese por $h(\theta)$ la función soporte de C . Esta función mide la distancia entre el origen y la única línea tangente orientada hacia C la cual forma un ángulo $\theta + \frac{\pi}{2}$ con el eje x positivo. La ecuación de la línea tangente es $x \cos \theta + y \sin \theta = h(\theta)$. La curva C puede ser vista como la envolvente de sus tangentes y puede ser representada en la forma $x = h(\theta) \cos \theta - h'(\theta) \sin \theta$, $y = h(\theta) \sin \theta + h'(\theta) \cos \theta$. Entonces, la curvatura de C está dada por $[h(\theta) + h''(\theta)]^{-1}$. Se tiene que $0 < h(\theta) < R_1$, y se cumplen las siguientes relaciones, lo cual puede verse en la siguiente figura 2.8.

$$\arccos\left[\frac{h(\theta)}{R_j}\right] + \arccos\left[\frac{h(\theta + \beta_j)}{R_j}\right] = \beta_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.5)$$

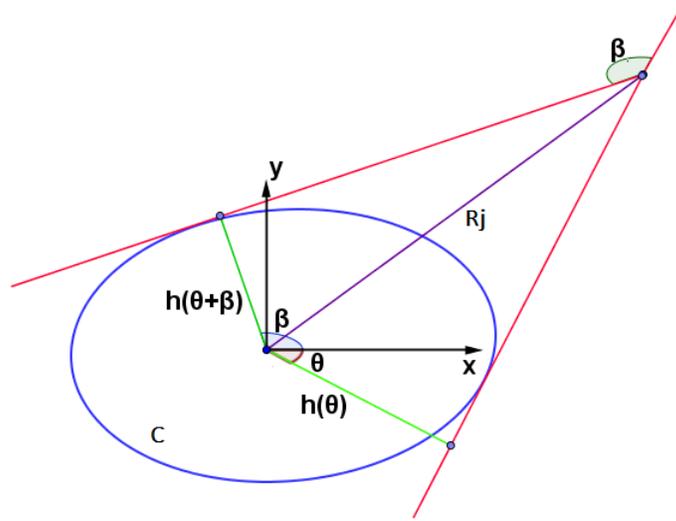


Figura 2.8: Función soporte de C .

Sumando β_j al argumento en la ecuación (2.5) y sustrayendo la relación resultante, se tiene

$$\arccos\left[\frac{h(\theta)}{R_j}\right] - \arccos\left[\frac{h(\theta + 2\beta_j)}{R_j}\right] = 0,$$

por lo que, $h(\theta + 2\beta_j) = h(\theta)$. Entonces $h(\theta)$ tiene periodos $2\beta_1$ y $2\beta_2$, además del periodo natural 2π . Como m_j y n_j son primos relativos, por teoría de números elemental se sabe que existen enteros a_j, b_j para los que $a_j m_j + b_j n_j = 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_j(2b_j) + b_j(2\pi) &= a_j\left(\frac{m_j}{n_j}\right)2\pi + b_j(2\pi) \\ &= 2\pi\left(\frac{a_j m_j + b_j n_j}{n_j}\right) \\ &= \frac{2\pi}{n_j}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Luego, se tiene que $\frac{2\pi}{n_j}$ son también periodos de la función $h(\theta)$. Como los m_j son impares, se obtiene que $h(\theta + \frac{\pi}{n_j})$, y la relación (2.5) se convierte en

$$\arccos\left[\frac{h(\theta)}{R_j}\right] + \arccos\left[\frac{h(\theta + \frac{\pi}{n_j})}{R_j}\right] = \beta_j, \quad j = 1, 2 \quad (2.7)$$

Por la ley de cosenos la expresión anterior puede transformarse en

$$h^2(\theta) + h^2\left(\theta + \frac{\pi}{n_j}\right) - 2 \cos[\beta_j] h(\theta) h\left(\theta + \frac{\pi}{n_j}\right) = R_j^2 (\sin \beta)^2, \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

Denótese el máximo común divisor de los números n_1 y n_2 , por $d(n_1, n_2)$, entonces, para algunos enteros v_1 y v_2 . Otra vez se tiene que existen enteros a y b tales que $bv_1 + av_2 = 1$ por lo que

$$\frac{2\pi}{n_1} a + \frac{2\pi}{n_2} b = 2\pi \frac{bv_1 + av_2}{dv_1 v_2} = \frac{2\pi}{N}$$

Además el número $N = dv_1v_2 = v_1n_2$ es un periodo de la función soporte. Observe que $\frac{\pi}{n_1} = \frac{pv_2}{2}$ y $\frac{\pi}{n_2} = \frac{pv_1}{2}$. De aquí se sigue que $h(\theta + \frac{\pi}{n_1})$ si v_2 es par y si $\frac{\pi}{n_1} = \frac{pv_2}{2}$ si v_1 es par. En cualquier caso, 2.7 implica que $h(\theta) = const.$, i.e. que C debe ser un círculo. Si $v_1 = 2k_1 + 1$ y $v_2 = 2k_2 + 1$, entonces $\frac{\pi}{n_2} = k_1p + \frac{p}{2}$ y la resta de las dos expresiones en 2.8 queda

$$2[\cos \beta_1 - \cos \beta_2]h(\theta)h(\theta + \frac{\pi}{N}) = (R_2)^2 \sin^2 \beta_2 - (R_1)^2 \sin^2 \beta_1$$

o, como $0 < \beta_1 < \beta_2 < \pi$, $h(\theta)h(\theta + \frac{\pi}{N}) = const.$, por lo que nuevamente C debe ser un círculo. \square

Por otro lado, Green (1951) estableció una desigualdad para la longitud de las cuerdas, de un cuerpo convexo, que son vistas bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$ (cuerdas ortópticas).

TEOREMA 2.3. (Green) Sea C una curva cerrada convexa en el plano. Siempre existe un par de líneas ortogonales que subtienden una cuerda de longitud l , $l \geq \frac{w}{\sqrt{2}}$. Si no existe una cuerda con dicha propiedad, la curva es un círculo. Donde w es el ancho de C , es decir, w es la distancia mínima entre líneas soporte paralelas de C .

Demostración. Sea R un rectángulo de lados a y b , $a \geq b$, circunscrito a C . Considere un cuadrilátero convexo Q inscrito en R tal que cada lado de R contiene un vértice de Q . Sea Q_0 el cuadrilátero para el cual su lado máximo es mínimo. Si algún vértice de Q_0 coincide con algún vértice de R , se ve que Q_0 tiene un lado de longitud $\geq b$; por lo que se puede asumir que cada vértice de Q_0 está en el interior de un lado de R .

Si se mueve un vértice de Q a lo largo del lado de R en el que descansa, incrementa uno de los lados de Q y otro decrece, de aquí se sigue que a menos de que Q_0 tenga lados iguales, su lado máximo podría decrecer. Entonces Q_0 es un rombo inscrito en R . Lados adyacentes de Q_0 tienen longitudes de las formas $\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$, y estas deben ser iguales. También, $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$ es la distancia desde $(0, 0)$ a (a, b) a lo largo de la línea quebrada $(0, 0)$, (x, y) y (a, b) .

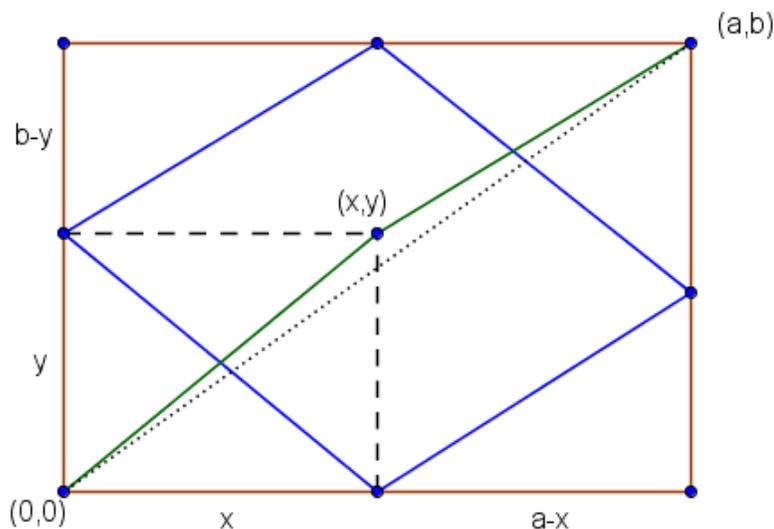


Figura 2.9: Función soporte de C .

Entonces, se tiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2ab} \geq \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Además, la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$.

Para probar el enunciado original, sea R algún rectángulo circunscrito a C . Si las longitudes de sus lados son a y b , entonces $w \leq a$ y $w \leq b$. Los cuatro puntos de contacto de los lados de R con C son los vértices del cuadrilátero descrito con anterioridad, y uno de los lados debe tener longitud $\geq \frac{b}{\sqrt{2}} \geq \frac{w}{\sqrt{2}}$. Ahora, suponga que no hay un par de líneas soporte ortogonales que subtiendan una cuerda de C de longitud $\geq \frac{w}{\sqrt{2}}$. Entonces cada rectángulo circunscrito debe ser un cuadrado de lado w . Entonces C es una curva de ancho constante w .

Sea $p(\theta)$ la función soporte de C . Se sabe que $p(\theta) + p(\theta + \pi) = w$. Por la construcción anterior, es claro que para cada rectángulo R circunscrito a C , los puntos de contacto de C con los lados de R son precisamente los puntos medios de los lados de R . Entonces, cada línea soporte de C tiene exactamente un punto de contacto con C , p tiene derivada continua y las ecuaciones paramétricas de C en términos de θ son

$$x = p \cos \theta - p' \sin \theta$$

$$y = p \sin \theta + p' \cos \theta$$

además, para cada θ , el punto (x, y) está a medio camino entre las líneas

$$x \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) + y \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = p(\theta \pm \frac{\pi}{2}).$$

La distancia de (x, y) a cada línea es $\mp x \sin \theta \pm y \cos \theta - p(\theta \pm \frac{\pi}{2})$ y son iguales, por lo que

$$2p'(\theta) = p(\theta + \frac{\pi}{2}) - p(\theta - \frac{\pi}{2}) = 2p(\theta + \frac{\pi}{2}) - w.$$

La última igualdad resulta de sumar y restar w .

Haciendo $q(\theta) = p(\theta) - \frac{1}{2}w$, la última expresión se convierte en

$$q'(\theta) = q\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta ecuación es conocida por tener como sus únicas soluciones periódicas, a las expresiones de la forma $A \cos \theta + B \sin \theta$. Entonces $p(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1}{2}w$, i.e., p es la función soporte de un círculo de diámetro w . \square

El siguiente lema interesante por si mismo será utilizado para la segunda prueba del teorema de Green.

LEMA 2.1. Sea γ una curva cerrada convexa y diferenciable tal que los puntos medios de los lados de cualquier rectángulo circunscrito pertenece a γ . Entonces γ es un círculo.

Demostración. Sea $\gamma(t)$ la curva parametrizada para $t \in [0, 2\pi]$ y sea $R(t)$ el rectángulo circunscrito a γ tal que uno de sus lados es ortogonal al vector unitario $u(t) = (\cos t, \sin t)$. Claramente, se tiene que $R(t + \pi/2) = R(t + \pi) = R(t + 3\pi/2)$. Denotense los puntos de contacto entre γ y $R(t)$ por $\gamma(t)$, $\gamma(t + \pi/2)$, $\gamma(t + \pi)$, y $\gamma(t + 3\pi/2)$, como se muestra en la figura. Note que el segmento $\overline{\gamma(t)\gamma(t + \pi)}$ es ortogonal a los lados correspondientes de $R(t)$, y se cumple para cada $t \in [0, 2\pi]$. Esto significa que cada normal de γ es una normal doble, y por un resultado conocido (ver Chakerian y Groemer (1983)) en convexidad, se tiene que γ es una curva de ancho constante.

En consecuencia podemos suponer que cada rectángulo $R(t)$ es un cuadrado con lado de longitud constante λ . Supongase que el origen 0 esta contenido en el interior de la región encerrada por γ . Sea t algún número en el intervalo $[0, 2\pi]$. Denotense por $m(t)$ y $r = \lambda/2$ el centro y radio, respectivamente, del círculo inscrito en $R(t)$. Se tiene que $m(t)$ es una función periódica y diferenciable con periodo $\pi/2$. Se expresa $\gamma(t)$, por el vector suma, como $\gamma(t) = m(t) + r \cdot u(t)$, entonces debido a

$$\langle \dot{\gamma}(t), u(t) \rangle = 0,$$

se obtiene

$$\langle \dot{m}(t) + r \cdot \dot{u}(t), u(t) \rangle = \langle \dot{m}(t), u(t) \rangle = 0. \quad (2.9)$$

De manera análoga se obtiene

$$\langle \dot{m}(t + \pi/2), u(t + \pi/2) \rangle = 0, \quad (2.10)$$

y

$$\langle \dot{m}(t + 3\pi/2), u(t + 3\pi/2) \rangle = 0. \quad (2.11)$$

De (2.9), (2.10), y (2.11) y como $m(t) = m(t + \pi/2) = m(t + 3\pi/2)$, y $\dot{m}(t) = \dot{m}(t + \pi/2) = \dot{m}(t + 3\pi/2)$ se tiene que $\langle \dot{m}(t), u(t) - u(t + \pi/2) \rangle = 0$ y $\langle \dot{m}(t), u(t) - u(t + 3\pi/2) \rangle = 0$. Ahora, como los vectores $u(t) - u(t + \pi/2)$ y $u(t) - u(t + 3\pi/2)$ son no colineales, se tiene $\dot{m}(t) = 0$, i.e., $m(t) = m$ para un vector constante m . Como los centros $m(t) = m$ y los radios r son constantes, se concluye que γ es un círculo. \square

Demostración. (Jerónimo-Castro) Sea R el rectángulo como en la prueba de Green (1951). Se probará que uno de los lados del cuadrilátero inscrito en R tiene longitud $\geq \frac{b}{\sqrt{2}}$. Sean A, B, C y D los vértices de R y sea $QMNP$ el cuadrilátero inscrito en R , con cada vértice de $QMNP$ como se muestra en la figura 2.10.

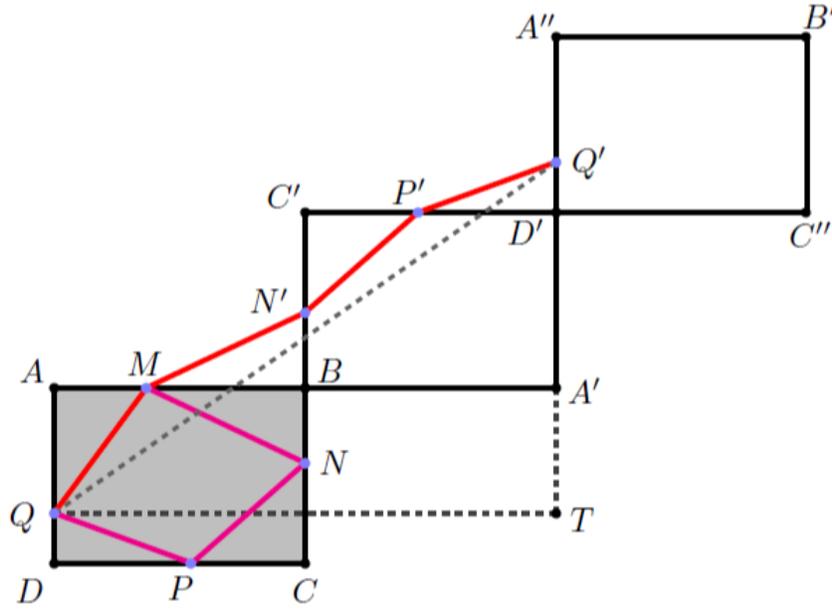


Figura 2.10: El camino Q, M, N', P', Q' tiene longitud mayor a la del segmento QQ' .

Replejese el rectángulo con respecto a R , así se obtiene el rectángulo $BC'D'A'$ y el punto P' en el lado $C'D'$. Después refleje $BC'D'A'$ con respecto al vértice D' , así se obtiene el rectángulo $Q'A''B'C''$, y el punto Q' en el lado $A''D'$. Con esta construcción se obtienen las siguientes igualdades: $MN' = MN$, $N'P' = NP$ y $P'Q' = PQ$. Entonces,

$$QM + MN' + N'P' + P'Q' = QM + MN + NP + PQ$$

y como $QM + MN' + N'P' + P'Q' \geq QQ'$, se obtiene que

$$QM + MN' + N'P' + P'Q' \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

. Como la media cuadrática es mayor que la media geométrica, con igualdad si y sólo si $a = b$, se obtiene que uno de los segmentos debe tener longitud $\geq \frac{b}{\sqrt{2}}$, con igualdad si y sólo si $a = b$. Se sigue que uno de los lados del cuadrilátero $PQMN$ tiene longitud $b \geq \frac{b}{\sqrt{2}} \geq \frac{w}{\sqrt{2}}$. Ahora, si no existe un cuadrilátero $PQMN$ tal que su lado máximo tenga longitud $\geq \frac{w}{\sqrt{2}}$, entonces cada rectángulo circunscrito es un cuadrado de lado w , por lo que C es una curva de ancho constante. Además los puntos medios de los lados de cada cuadrilátero circunscrito pertenecen a C . Se sabe que cada curva de ancho constante es diferenciable a trozos por lo que se puede usar el lema 1. Se concluye entonces que C es un círculo de diámetro w . \square

También es importante mencionar que las curvas isópticas son utilizadas en varios problemas de mecanismos (Wunderlich, 1971) y como ya se ha visto han sido estudiadas desde hace largo tiempo, por lo que se tienen resultados conocidos para curvas clásicas como las cónicas, y recientemente para las curvas de Bézier, ya que estas últimas son de gran interés debido a que son utilizadas con frecuencia en el modelado geométrico y en gran cantidad de software.

2.3. Isópticas de curvas de Bézier

Kunkli *et al.* (2013) aportaron un nuevo método para calcular curvas de Bézier de grados 4 y 5 ya que esto siempre ha sido complicado, incluso para sistemas algebraicos de computadora. En su trabajo probaron algunas relaciones geométricas de las curvas de Bézier y sus isópticas, además obtuvieron las isópticas de dichas curvas.

2.3.1 Las curvas de Bézier

Las curvas de Bézier fueron creadas a principios de los 60 por el Dr. Pierre Bézier y desde entonces han sido frecuentemente utilizadas en el modelado geométrico. La forma de una curva de Bézier depende de unos puntos llamados *puntos de control* y de unas funciones conocidas como *polinomios de Bernstein*.

DEFINICIÓN 2.6: Sean p_0, p_1, \dots, p_{n+1} los puntos de control de la curva y $B_i^n(t)$ los polinomios de Bernstein de grado n . La curva de Bézier está definida como

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^n(t) p_i$$

donde

$$B_i^n = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, i = 0, 1, \dots, n$$

y

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Note que una curva de Bézier de grado n tiene $n + 1$ puntos de control, ver figura 2.11.

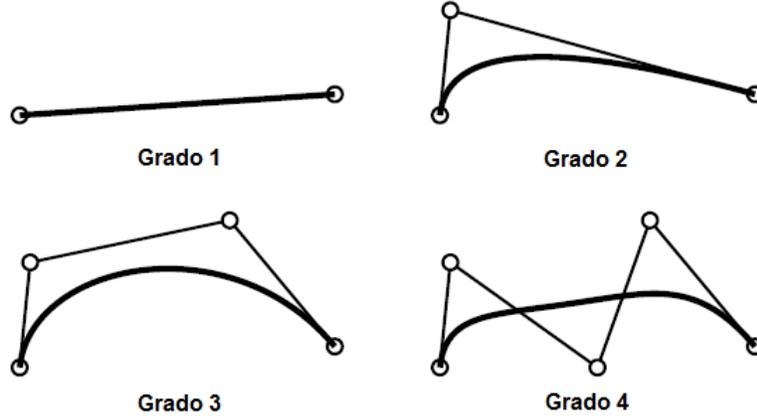


Figura 2.11: Curvas de Bézier de varios grados.

En el trabajo realizado por Kunkli *et al.* (2013) se utilizan, para la curva cuadrática, los puntos de control $p_0 = (1, 0)$, $p_1 = (x, y)$, $p_2 = (-1, 0)$ ya que una curva de Bézier con otros puntos de control puede ser transformada en esta mediante una transformación afín. Cabe señalar que las isópticas no siempre pueden ser transformadas en isópticas afines, esto debido a que las transformaciones afines no siempre preservan ángulos. La ecuación de la curva de Bézier cuadrática es $S(t) = (1 - 2t + 2t(1 - t)x, 2t(1 - t)y)$. Derivando y realizando algunos cálculos se obtienen las líneas tangentes a la curva y las líneas tangentes que además forman entre si el ángulo fijo α . Entonces, la isóptica de ángulo α de la curva de Bézier cuadrática es $S^\alpha(t) = (S_x^\alpha, S_y^\alpha)$, donde

$$S_x^\alpha = \frac{1}{2} \frac{4yt(t-1)(x \cos \alpha - \sin \alpha) + \sin \alpha(x^2 - y^2 + 1)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2} \frac{(2t-1)(x \sin \alpha(x^2 + y^2 + 1) + 2y \cos \alpha)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)}$$

$$S_y^\alpha = \frac{1}{2} \frac{4yt(t-1)(x \sin \alpha + \cos \alpha) + y(\sin \alpha(x^2 + y^2)(2t-1) + \sin \alpha(2t + 2x - 1))}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)}$$

donde $t \in [0, t^\alpha]$, con

$$t^\alpha = \frac{1}{2} \frac{2y \cos \alpha + \sin \alpha(x^2 + y^2 + 1)}{x \sin \alpha + y \cos \alpha + \sin \alpha(x^2 + y^2)}.$$

Es claro que el resultado obtenido a partir del cálculo directo es complicado, ahora imagine que tan complejo se vuelve para curvas de Bézier de grado mayor. De hecho, para las curvas de grado 3 los sistemas algebraicos de computadora tardan segundos en obtenerlo y el resultado es en extremo complejo. Kunkli *et al.* (2013) desarrollaron un método para el cálculo de las curvas de Bézier a partir de las relaciones geométricas que encontraron entre las isópticas y las curvas de Bézier.

TEOREMA 2.4. Considerese un ángulo α , una curva de Bézier convexa $S(t)$ de cualquier grado y uno de sus puntos $S(t_o)$. Entonces las curvas isópticas de ángulo α de las cuerdas

$S(t_0)S(t)$ de la curva cumplen que no tienen puntos en común con las isópticas o tienen exactamente un punto en común, donde las tangentes tienen la misma dirección. Note que las curvas isópticas de segmentos de líneas son arcos circulares.

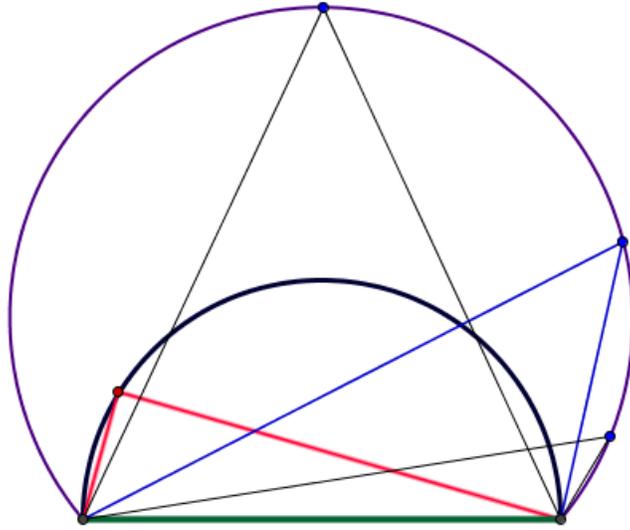


Figura 2.12: Isópticas de 90° (negro) y 50° (morado) de un segmento.

TEOREMA 2.5. La envolvente de la familia de arcos α -circulares asociada a las cuerdas $S(t_0)S(t)$ de la curva de Bézier tiene exactamente un punto en común con la curva isóptica de ángulo α de la curva de Bézier, en la cual las líneas tangentes también son comunes.

COROLARIO 2.1. Como cada punto $S(t_0)$ de la curva de Bézier genera una familia de arcos circulares y sus envolventes, la curva isóptica de la curva de Bézier puede obtenerse como la envolvente de dichas envolventes.

El cálculo de las envolventes de una familia de curvas no suele ser sencillo, sin embargo puede ser realizado por métodos algebraicos de computadora. Una alternativa menos exacta pero útil es utilizar un método de aproximación como el descrito en (Schulz y Jüttler, 2011).

Se requiere obtener las familias de envolventes de los arcos circulares α -isópticos, por lo que dado un punto $S(t_0)$ de la curva, los círculos pueden ser descritos a partir de sus centros $c(t)$ y sus radios $r(t)$. Basándose en el hecho de que es bien conocida la construcción del arco circular α -isóptico de un segmento, se puede observar que el centro de cada arco circular se puede obtener a partir del punto $S(t)$ mediante una rotación y una homotecia. Así, el radio de los círculos es $r(t) = \sqrt{(c(t) - S(t_0))^2}$ y la función implícita de la familia de curvas es

$$f(x, y, t) = (x - S_x(t))^2 + (y - S_y(t))^2 - (c_x(t) - S_x(t_0))^2 - (c_y(t) - S_y(t_0))^2 = 0$$

De geometría diferencial se sabe que la ecuación implícita de la familia de envolventes de

esos círculos puede ser obtenida al eliminar t del sistema como sigue

$$f(x, y, t) = 0; \quad \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = 0$$

lo cual puede ser realizado utilizando algún sistema algebraico de computadora. Otra forma de hacerlo es calcular las envolventes de las familias de círculos de sus ecuaciones paramétricas. Después de realizar los cálculos de las envolventes de las familias de arcos circulares α -isópticos, la envolvente de esas envolventes se pueden obtener de forma similar, pero debido a la complejidad de las curvas obtenidas la envolvente final suele ser calculada sólo por métodos de aproximación.

3. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

3.1. El modelo C-R modificado

Debido a que el método original, el C-R, no está siendo modificado en sus componentes principales este nuevo método desarrollado conserva la invariancia a traslación, homotecias. De esta manera se cubre parte del objetivo general.

En cuanto a la parte de determinar de manera única el radio inicial en el modelo C-R, se ha propuesto la utilización del centroide de la frontera del objeto como otro punto especial que conserva la invariancia a transformaciones geométricas y que cuando es diferente del centroide del objeto determina de manera única el radio inicial. Pero, ¿para qué figuras podrían ambos puntos coincidir? ¿qué condiciones deben cumplir dichas figuras?

Para responder a las preguntas anteriores suponga que ambos centroides fueran iguales y que el total de pixeles en el objeto está dado por n y el total de pixeles en la frontera de dicho objeto por r , entonces:

$$C - S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{r} = 0, \quad r \leq n$$

que después de realizar algunas operaciones algebraicas queda

$$\frac{x_1, x_2, \dots, x_r}{r} = \frac{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n}{n - r}, \quad r \leq n$$

Lo que significa que para que S y C fueran iguales el centroide del interior del objeto debe ser igual al centroide de la frontera. Es evidente que existen figuras que cumplen esta propiedad, por ejemplo el círculo.

De hecho, si se tiene una región R en el plano (Thomas, 2006). Su centroide queda determinado por

$$(\bar{C}_x, \bar{C}_y) = \left(\frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R dA}, \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R dA} \right) \quad (3.1)$$

Por lo que una transformación de traslación, rotación y homotecia no afectaría al centroide de la región. Sin embargo, cuando se piensa en regiones en un medio discreto esto no es así. La rotación de una imagen de manera computacional produce el fenómeno conocido como diente de sierra. Es decir, los segmentos de los que consta la figura pierden o ganan pixeles tras la rotación, lo cual produce una figura que sólo es similar a la original, esto se puede apreciar en la figura 3.1.

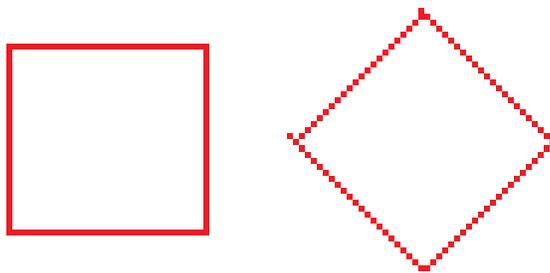


Figura 3.1: Cuadrado y su rotación, note que la rotación produce una figura que a ganado o perdido pixeles.

Luego, el centroide de la frontera de la forma no es invariante a la rotación y debido a ello no es útil para ser utilizado como el segundo punto en el modelo C-R modificado. Sin embargo, la idea de encontrar esos dos puntos que sean invariantes a la rotación aportaría grandes beneficios al procesamiento de imágenes.

3.2. Una caracterización del círculo

Considere un disco Euclidiano B en el plano, con centro en O y un disco B' concéntrico con B y con mayor radio. Es fácil ver que el disco B es visto bajo un ángulo constante desde cada punto $x \in \partial B'$ y que dicho ángulo sólo depende del radio de B' . La α -isóptica de un cuerpo convexo, es decir, un conjunto convexo y compacto con interior no vacío, es denotada por K_α y es una curva cerrada no necesariamente convexa. Si K_α es convexa y homotética a ∂K para algún $\alpha \in (0, \pi)$, entonces se esperaría que K sea un conjunto convexo especial. De hecho, como se verá más adelante, la respuesta es que K debe ser un disco Euclidiano.

Hay muchos problemas y resultados interesantes sobre las relaciones entre curvas dadas y alguna de sus curvas asociadas. Por ejemplo, el caso plano de una conjetura de C. Schütt y E. Werner en (Schütt y Werner, 1990) y (Schütt y Werner, 1994) dice que una curva convexa γ debe ser una elipse cuando la frontera de alguno de sus *cuerpos convexos de flotación* es homotética a γ . Otra curva interesante que se puede asociar con γ , es el *evolutoide de ángulo* α . El cual se define como la envolvente de líneas formando un ángulo α en sentido de las manecillas del reloj con respecto a las líneas tangentes y a través del punto de contacto. En (Jerónimo-Castro *et al.*, 2015) se probó que una curva estrictamente convexa y cerrada γ es un círculo si alguno de sus evolutoides es homotético a γ .

TEOREMA 3.1. Sea K una figura convexa en el plano y sea $\alpha \in (0, \pi)$. Si K_α es homotética a ∂K entonces K es un disco Euclidiano.

3.3. Isópticas en el plano

Sea K un cuerpo convexo (i.e. un conjunto compacto con interior no vacío) en el plano, y sea ∂K su frontera. Para cada $t \in [0, 2\pi]$ sea $\ell(t)$ la línea soporte de K con vector normal exterior $u(t) = (\cos t, \sin t)$, y sea $p(t)$ la distancia con signo desde el origen 0 a $\ell(t)$. La función $p(t)$ es conocida como función soporte de K (∂K), así la frontera de K es

parametrizada por la función soporte por

$$\gamma(t) = p(t)u(t) + \dot{p}(t)\dot{u}(t),$$

for $t \in [0, 2\pi]$. En términos de la función soporte p , el área y perímetro de K puede ser calculado con el uso de dos formulas aportadas por W. Blaschke y A. Cauchy (Valentine, 1964), respectivamente. De hecho, hay muchos resultados interesantes sobre curvas convexas cuyas pruebas se basan en la expansión en series de Fourier de p . El lector interesado puede consultar el libro de H. Groemer (Groemer, 1996) para más información sobre el uso de series de Fourier en geometría de convexos.

Para probar el resultado principal, se probarán primero los siguientes dos lemas. Es importante mencionar que la prueba del lema 3.2 se realiza utilizando series de Fourier.

LEMA 3.1. Sea K una figura convexa en el plano y sea $\alpha \in (0, \pi)$. Si K_α es homotética a ∂K entonces la razón de homotésia es $(\sin(\alpha/2))^{-1}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el centro de homotécia es el origen O . Sea $d \in \partial K$ un punto cuya distancia de O es máxima y sea Γ el disco con centro en O y radio $\|d\|$. Claramente, $\partial\Gamma$ es tangente a K en d . Sea z el punto en el rayo \overrightarrow{Od} tal que Γ es visto desde z bajo el ángulo α . Como $K \subseteq \Gamma$, se tiene que el punto z' desde el que K es visto bajo el ángulo α debe estar contenido en el segmento dz . Se sigue que $\frac{\|z'\|}{\|d\|} \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$.

Considérese ahora el punto más cercano de ∂K a O , llámese e , se puede probar de forma análoga que existe un punto w en el rayo \overrightarrow{Oe} tal que K es visto desde w bajo un ángulo α y tal que $\frac{\|w\|}{\|e\|} \geq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$. Por un argumento de continuidad se tiene que existe un punto $x \in K_\alpha$ tal que $\frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$, donde y es el punto donde el segmento Ox interseca a ∂K . Como la razón de homotésia debe ser constante, se tiene que este debe ser igual a $\frac{1}{\sin(\alpha/2)}$. \square

LEMA 3.2. Sea K una figura convexa en el plano y sea $\alpha \in (0, 2\pi/3]$. Entonces

$$A(K_\alpha) \geq \frac{1}{(\sin \frac{\alpha}{2})^2} \cdot A(K),$$

con igualdad si y sólo si K es un disco Euclidiano.

Demostración. Sea p la función soporte de K y sea

$$p(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

la expansión en series de Fourier de p (Groemer, 1996). Como fue probado por Michalska en Michalska (2003)

$$\begin{aligned} A(K_\alpha) &= \frac{1}{(\sin(\pi-\alpha))^2} [2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &\quad - \cos(\pi - \alpha) (2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n(\pi - \alpha)) \\ &\quad - \sin(\pi - \alpha) \cdot \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \sin n(\pi - \alpha)], \end{aligned}$$

o equivalente,

$$\begin{aligned} A(K_\alpha) &= \frac{1}{(\sin(\alpha))^2} [2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &\quad + \cos(\alpha) (2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n(\pi - \alpha)) \\ &\quad - \sin(\alpha) \cdot \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \sin n(\pi - \alpha)]. \end{aligned}$$

Haciendo algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} A(K_\alpha) &= \frac{1}{(\sin(\alpha))^2} [2\pi a_0^2 (1 + \cos \alpha) \\ &\quad + \pi \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) (1 + \cos \alpha \cdot \cos n(\pi - \alpha) - n \cdot \sin \alpha \cdot \sin n(\pi - \alpha))]. \end{aligned}$$

Y como el área de K puede calcularse en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de $p(t)$ como (Groemer (1996))

$$A(K) = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2),$$

$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ y $(\cos \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} A(K_\alpha) &= \frac{1}{(\sin \frac{\alpha}{2})^2} \cdot \{A(K) \\ &\quad + \frac{\pi}{4(\cos \frac{\alpha}{2})^2} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) ((1 + \cos \alpha)(n^2 - 1) + 1 + \cos \alpha \cos n(\pi - \alpha) \\ &\quad - n \sin \alpha \sin n(\pi - \alpha))\}. \end{aligned}$$

Sea $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(\alpha) = (1 + \cos \alpha)(n^2 - 1) + 1 + \cos \alpha \cos n(\pi - \alpha) - n \sin \alpha \sin n(\pi - \alpha),$$

para un número natural fijo $n \geq 2$. Derivando f se obtiene $f'(\alpha) = (n^2 - 1) \sin \alpha [\cos n(\pi - \alpha) - 1]$. Como una condición necesaria para un extremo de f es que $f'(\alpha) = 0$, se tiene que los extremos de f se obtienen en $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$. Debido a que $f(0) = 2(n^2 - 1) + 1 + \cos n\pi \geq 0$, $f(\pi) = 0$, y $f'(\alpha) < 0$ en el intervalo $(0, \pi)$, se obtiene que f tiene un mínimo en $\alpha = 0$ y es estrictamente positiva en $(0, \pi)$. Se ha probado que para cada $n \geq 2$ y cada $\alpha \in (0, \pi)$ se cumple

$$(1 + \cos \alpha)(n^2 - 1) + 1 + \cos \alpha \cos n(\pi - \alpha) - n \sin \alpha \sin n(\pi - \alpha) > 0,$$

por lo que

$$A(K_\alpha) \geq \frac{1}{(\sin \frac{\alpha}{2})^2} \cdot A(K),$$

con igualdad si y sólo si $a_n = b_n = 0$ para cada $n \geq 2$. En otras palabras, hay igualdad si y sólo si

$$p(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

es decir, si y sólo si p es la función soporte de un círculo. \square

Prueba del teorema 3.1. Por el lema 3.1 se tiene que K_α es homotética a K con razón de homotecia $(\sin(\alpha/2))^{-1}$, lo que significa que $A(K_\alpha) = \frac{1}{(\sin \frac{\alpha}{2})^2} \cdot A(K)$. Ahora, aplicando el lema 3.2 se concluye que K es un disco Euclidiano.

3.4. Caracterización de la esfera Euclidiana

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, i.e., un conjunto compacto y convexo con interior no vacío. Se dice que un cuerpo convexo $L \subset \mathbb{R}^n$ toca a K si $L \cap K \neq \emptyset$ y $\text{int}(L) \cap \text{int}(K) = \emptyset$, donde $\text{int}(\cdot)$ denota el interior de un conjunto. Suponga que K tiene centro de simetría en el origen O . Recientemente, Yu (2012) estableció una caracterización de la bola Euclidiana en términos de la medida de ángulo sólido bajo la cual cada copia trasladada $K + x$, que toca a K , es vista desde O . De forma más específica, él probó que si cada copia trasladada $K + x$ que es tangente a K es vista desde el origen bajo un ángulo sólido, entonces K es una bola Euclidiana.

Además, como K es un conjunto centralmente simétrico, se puede ver lo siguiente: si $K + x$ toca a K entonces hay un punto $z \in K \cap (K + x)$ tal que z es el punto medio del segmento $[O, x]$. Por otro lado, si w es un punto frontera común de K y $K + x$ entonces $K + 2w$ también toca a K . De estas dos observaciones se puede ver que para cada $z \in \partial K$ el cuerpo K es visto desde $2z$ bajo un ángulo sólido constante. En otras palabras, la frontera de $2K$ es una *superficie isóptica* de K , es decir, $\partial(2K)$ es una superficie bajo la cual K es vista bajo un ángulo sólido constante. Esto motiva la pregunta siguiente: suponga que existe un número $\lambda > 1$ tal que $\partial(\lambda K)$ es una superficie isóptica de K , ¿será cierto que K es una bola Euclidiana centrada en el origen?

La respuesta para un $\lambda = 2$ es sí, como lo demostró Yu en Yu (2012); sin embargo, la respuesta es "sí", en cualquier caso, esto se verá más adelante. Otra caracterización interesante de un disco Euclidiano, relacionada a *curvas isópticas* es la conjeturada por M.S. Klamkin Klamkin (1988) y probada por J. Nitsche Nitsche (1990), la cual dice: *un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^2$ es un disco Euclidiano si hay dos círculos concéntricos que sean isópticas de K* . Recientemente, Á. Kurusa y T. Ódor Kurusa (2015) establecieron la versión n -dimensional del teorema de Klamkin-Nitsche.

TEOREMA 3.2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un cuerpo convexo centralmente simétrico centrado en O y sea $\lambda > 1$ un número positivo tal que $\partial(\lambda K)$ es una superficie isóptica de K . Entonces K es una bola Euclidiana.

3.5. Isópticas y la razón de volumen cónico

Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n con el origen en su interior y sea λ un número positivo fijo. Para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, sea $\mu > 0$ tal que $\lambda K + \mu u$ toca a K . Siguiendo la notación dada en Yu (2012) se llamará al cono generado $\lambda K + \mu u$, un cono de empaquetado de λK respecto a u y será denotado por $\text{cone}_\lambda(K, u)$. Entonces se define la razón de volumen cónico homotético como

$$r_\lambda(K, u) = \frac{\text{vol}(\text{cone}_\lambda(K, u) \cap B^n)}{\text{vol}(B^n)}, \quad (3.2)$$

donde B^n denota la bola Euclidiana n -dimensional. Note que $r_\lambda(K, u)$ es nada más que la medida del ángulo sólido bajo el cual K es vista desde el origen.

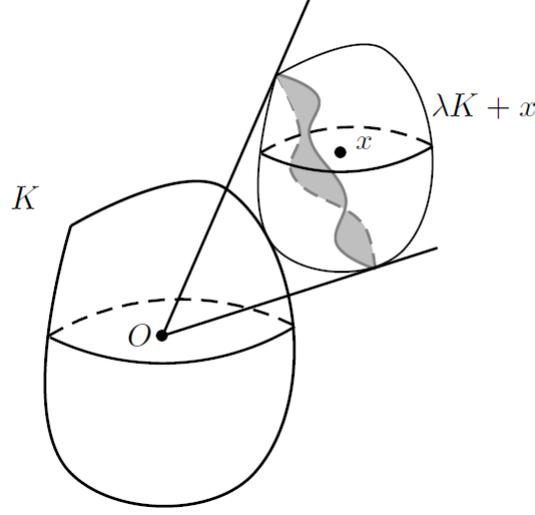


Figura 3.2: La razón de volumen cónico homotético.

Sea K un cuerpo convexo centralmente simétrico centrado en el origen O , y sean μ y η los radios de las bolas Euclidianas máxima y mínima centradas en O y tales que $\mu B^n \subseteq K$ y $K \subseteq \eta B^n$. Si $u \in \partial K \cap \mu B^n$ se dirá que u es un punto de contacto de K , y que $v \in K \cap \partial(\eta B^n)$ es un punto distancia. Finalmente, dado cualquier vector $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ y cualquier número $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $\alpha_n(\lambda) = r_\lambda(B^n, u)$.

Como resultados auxiliares se probarán los siguientes lemas los cuales son versiones extendidas de las proposiciones 3.2, corolario 3.3, y lema 4.3 en (Yu, 2012).

LEMA 3.3. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo centralmente simétrico centrado en el origen O , sea u un punto de contacto de K y sea v un punto distancia de K . Entonces, se tiene que $r_\lambda(K, u) \geq \alpha_n(\lambda)$ y $r_\lambda(K, v) \leq \alpha_n(\lambda)$, donde u_0 y v_0 son vectores unitarios en la dirección de u y v , respectivamente.

De aquí en adelante, se supondrá que la bola Euclidiana unitaria B^n es la bola maximal centrada en el origen O y contenida en K .

Demostración. Como u es punto de contacto de K , $\lambda K + (1 + \lambda)u$ toca a K y el cono generado por $\lambda K + (1 + \lambda)u$ es $\text{cone}_\lambda(K, u)$. Además, se tiene que $\lambda B^n + (1 + \lambda)u$ toca a B^n en u . Debido a que $\lambda B^n + (1 + \lambda)u \subset \lambda K + (1 + \lambda)u$, el cono generado por $\lambda B^n + (1 + \lambda)u$ esta contenido en $\text{cone}_\lambda(K, u)$, y

$$r_\lambda(K, u) = \frac{\text{vol}(\text{cone}_\lambda(K, u) \cap B^n)}{\text{vol}(B^n)} \geq \frac{\text{vol}(\text{cone}_\lambda(B^n, u) \cap B^n)}{\text{vol}(B^n)},$$

es decir,

$$r_\lambda(K, u) \geq \alpha_n(\lambda).$$

La prueba para $r_\lambda(K, v) \leq \alpha_n(\lambda)$ es análoga. \square

COROLARIO 3.1. Si existe un número $\alpha > 0$ tal que $r_\lambda(K, u) = \alpha$ para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, se tiene que $\alpha = \alpha_n(\lambda)$, i.e., $r_\lambda(K, u) = \alpha_n(\lambda)$.

Demostración. Si u es un punto de contacto de K , por el lema 3.3 se tiene que $r_\lambda(K, u) \geq \alpha_n(\lambda)$, es decir, $\alpha \geq \alpha_n(\lambda)$. Por otro lado, para un punto distancia v de K se tiene que $\alpha = r_\lambda(K, v_0) \leq \alpha_n(\lambda)$, donde v_0 es un vector unitario en la dirección de v . Luego, $\alpha = \alpha_n(\lambda)$. \square

Dado cualquier $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ se define $D_u = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle x, u \rangle = \frac{\lambda}{1+\lambda}\}$.

LEMA 3.4. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo centralmente simétrico centrado en el O y sea $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ un punto de contacto de K . Si $r_\lambda(K, x) = \alpha_n(\lambda)$ para cada $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces todos los puntos en $D_u \cup -D_u$ son puntos de contacto de K .

Demostración. Se sabe que $\lambda B^n + (1+\lambda)u \subset \lambda K + (1+\lambda)u$, entonces $\text{cone}_\lambda(B^n, u) \subset \text{cone}_\lambda(K, u)$ y como $r_\lambda(K, u) = \alpha_n(\lambda)$, se tiene que $\text{cone}_\lambda(B^n, u) = \text{cone}_\lambda(K, u)$.

Sea ℓ un rayo que inicia en O y es tangente a $\lambda K + (1+\lambda)u$ y sea $\ell' := \{y \in \mathbb{R}^n : y \in \ell \cap (\lambda K + (1+\lambda)u)\}$. Por la convexidad de K se tiene que ℓ' es un punto o un segmento contenido en $\partial(\lambda K + (1+\lambda)u)$, se sigue que $\partial(B^n + (1+\lambda)u) \cap \text{cone}_\lambda(B^n, u)$ esta contenido en $\partial(\lambda K + (1+\lambda)u)$, en otras palabras, $\lambda(-D_u) + (1+\lambda)u$ esta contenido en $\partial(\lambda K + (1+\lambda)u)$. Se ha probado que todos los puntos en $-D_u$ son puntos de contacto de K y como K es centralmente simétrico se tiene que todos los puntos en D_u son puntos de contacto (ver 3.3). \square

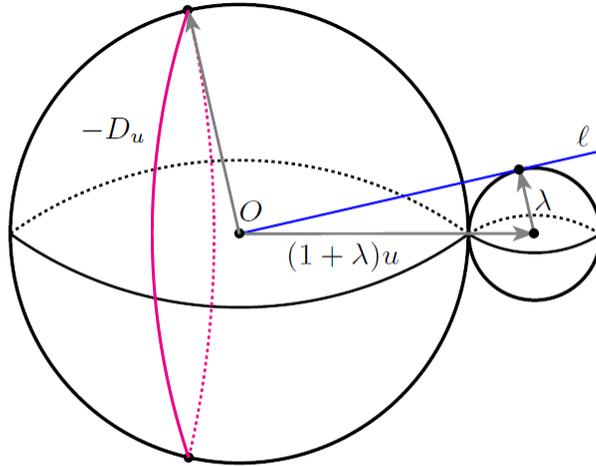


Figura 3.3: La región $-D_u$.

TEOREMA 3.3. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un cuerpo convexo centralmente simétrico centrado en O y sean α y λ números positivos tales que $r_\lambda(K, u) = \alpha$ para cada $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces K es una bola Euclidiana.

Demostración. La prueba para el caso $n = 2$ se sigue directamente del resultado probado en 3.1.

Sea K un cuerpo convexo en el plano y sea α cualquier número en $(0, \pi)$. Si la isóptica de K de ángulo α es homotética a ∂K , entonces K es un disco Euclidiano.

Con el fin de probar el teorema para el caso $n \geq 3$ es suficiente con probar que todos los puntos en \mathbb{S}^{n-1} son puntos de contacto de K . Sea u cualquier punto de contacto de K y considérese $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\langle x, u \rangle \geq \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Por la forma en que se escogió a x se tiene que $D_u \cap D_x \neq \emptyset$. Sea y un punto en $D_u \cap D_x$, y como todos los puntos en D_u son puntos de contacto (por el lema 3.4), se sigue que todos los puntos en D_y son puntos de contacto. Como $x \in D_y$, se obtiene que x es un punto de contacto de K , y como x es un punto de contacto en la región cerrada definida por $R_u := \{z \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle z, u \rangle \geq \frac{\lambda}{1+\lambda}\}$, se obtiene que todos los puntos en R_u son puntos de contacto de K . Como \mathbb{S}^{n-1} es un conjunto compacto, sólo se requiere un número finito de regiones R_u para cubrir toda la esfera \mathbb{S}^{n-1} . Entonces, K es una bola Euclidiana. \square

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se propuso una modificación al modelo C-R, con la cual éste se vuelve invariante a rotación, convirtiéndolo en un descriptor de forma más completo. Parte de la propuesta de mejora del método es la utilización de dos puntos especiales con los que se determina el radio inicial del modelo, y así poder comparar figuras bajo transformaciones afines con una mayor precisión. Sin embargo, no fue posible dar una propuesta favorable de los puntos especiales ya que ésta era utilizar el centroide de la figura y el centroide de su frontera, a pesar de que estos puntos funcionan perfectamente en el plano, no funcionan de manera discreta. De ahí que en un trabajo futuro podría pensarse en otros puntos que para fines prácticos mejoren el modelo C-R.

También, en este trabajo se estudiaron algunas propiedades de las curvas isópticas y se demostraron las siguientes afirmaciones: 1) una curva cerrada y convexa es un círculo Euclideo si alguna de sus isópticas es homotética a ella, 2) un cuerpo convexo centralmente simétrico en el espacio Euclideo n -dimensional, es una bola Euclidea si alguna de sus superficies isópticas es homotética a él. Además, se estableció una desigualdad entre el área encerrada por una curva y el área encerrada por una de sus isópticas y se dio una demostración más simple a la desigualdad para las longitudes de las cuerdas ortópticas propuesta por Green y se planteó la relación existente entre la razón de volumen cónico y las superficies isópticas dada por L. Yu.

BIBLIOGRAFÍA

- Arkin, E. M., Chew, L. P., Huttenlocher, D. P., Kedem, K., y Mitchell, J. S. B. (1991). An efficiently computable metric for comparing polygonal shapes. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 13:209–216.
- Caballero, C. y Aranda, M. C. (2010). Plant Species Identification Using Leaf Image Retrieval. In *Proceedings of the ACM International Conference on Image and Video Retrieval, CIVR '10*, pages 327–334, New York, NY, USA. ACM.
- Chakerian, G. y Groemer, H. (1983). *Convex bodies of constant width*.
- Chaki y Parekh (2012). Plant Leaf Recognition using Gabor Filter. 56(10):26–29.
- Chang, C. C., Hwang, S. M., y Buehrer, D. J. (1991). A shape recognition scheme based on relative distances of feature points from the centroid. *Pattern Recognition*, 24(11):1053–1063.
- Fan, S. (2001). Shape representation and retrieval using distance histograms. Technical Report TR-01-14, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
- Green, J. W. (1950). Sets subtending a constant angle on a circle. *Duke Math. J.*, pages 263–267.
- Green, J. W. (1951). A note on the chords of a convex curve. *Portugaliae Mathematica*, 10(3):121–123.
- Groemer, H. (1996). *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. Cambridge Univ., press, cambridge edition.
- Jerónimo-Castro, J., Aguilar-Arteaga, A., González-García, I., y Ayala-Figueroa, R. (2015). On evolutooids of planar convex curves II. *Aequationes mathematicae*.
- Klamkin, M. S. (1988). Conjectured isoptic characterization of a circle. *Amer. Math.*, 95:845.
- Kong, X., Luo, Q., Zeng, G., y Lee, M. H. (2007). A new shape descriptor based on centroid–radii model and wavelet transform. *Optics Communications*, 273(2):362–366.
- Kunkli, R., Papp, I., y Hoffmann, M. (2013). Isoptics of Bézier Curves. *Comput. Aided Geom. Des.*, 30(1):78–84.
- Kurusa, r. (2012). Visual distinguishability of polygons. *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, 54(2):659–667.

- Kurusa, r. (2015). Isoptic characterization of spheres. *J. Geom.*
- Li, D. y Simske, S. (2002). Shape retrieval based on distance ratio distribution. *HP laboratories Palo Alto.*
- Michalska, M. (2003). A sufficient condition for the convexity of the area of an isoptic curve of an oval. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. The Mathematical Journal of the University of Padova*, 110:161–169.
- Mocanu, I. (2007). Image Retrieval by Shape Based on Contour Techniques A Comparative Study. In *4th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, 2007. SACI '07*, pages 219–223.
- Mocanu, I. (2010). From content-based image retrieval by shape to image annotation. *Advances in Electrical and Computer Engineering*, 10(4):49–56.
- Nitsche, J. (1990). Isoptic Characterization of a Circle (Proof of a conjecture of M. S. Klamkin). pages 45–47.
- Persoon, E. y Fu, K. S. (1986). Shape discrimination using fourier descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7:388–397.
- Romero-González, A. y Vargas-Vázquez, D. (2013). Medición de parámetros y características geométricas en especies de hojas mediante procesamiento de imágenes y redes neuronales. In *Investigación aplicada sobre Gestión de Tecnología*. Ediciones de la Noche, Querétaro, Qro., primera edición.
- Schütt, C. y Werner, E. (1990). The convex floating body. *Math. Scand*, pages 275–290.
- Schütt, C. y Werner, E. (1994). Homothetic floating body. *Geom. Dedicata*, pages 335–348.
- Schulz, T. y Jüttler, B. (2011). Envelope computation in the plane by approximate implicitization. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 22(4):265–288.
- Tan, K.-L., Ooi, B. C., y Thiang, L. F. (2000). Indexing shapes in image databases using the centroid–radii model. *Data & Knowledge Engineering*, 32(3):271–289.
- Tan, K.-L., Ooi, B. C., y Thiang, L. F. (2003). Retrieving Similar Shapes Effectively and Efficiently. *Multimedia Tools and Applications*, 19(2):111–134.
- Thomas, G. B. (2006). *Cálculo: varias variables*. Pearson Educación.
- Valentine, F. A. (1964). *Convex sets*. McGraw-Hill, New York.
- Wunderlich, W. (1971). Contributions to the geometry of cam mechanisms with oscillating followers. *Journal of Mechanisms*, 6(1):1 – 20.
- Yu, L. (2012). Conic volume ratio of the packing cone associate to a convex body. *Geom. Dedicata*, pages 219–228.