Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

El juego como recurso para la enseñanza de la matemática en el nivel secundaria

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Presenta

Mario Hernández Sánchez

Santiago de Querétaro, Qro. Marzo de 2014

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

El juego como recurso para la enseñanza de la matemática en el nivel secundaria

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Presenta
Mario Hernández Sánchez

Dirigido por:
Mtro. Arturo Corona Pegueros

Sinodales

Mtro. Arturo Corona Pegueros Presidente	firma
Dr. Víctor Larios Osorio Secretario	firma
Dra. Teresa Guzmán Flores Vocal	firma
Mtra. Carmen Sosa Garza Suplente	firma
Mtra. Teresa de Jesús Valerio López Suplente	firma

Dr. Aurelio Domínguez González Director de la facultad	Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Marzo 2014
México

Resumen

Esta tesis, parte reconociendo graves problemas existente en las instituciones educativas; reprobación, deserción escolar, bajo rendimiento en pruebas internas, nacionales e internacionales, bajo dominio de procesos y simbolización matemática, poca motivación para el aprendizaje de esta ciencia, ignoradas herramientas de los profesores para librarse de la enseñanza tradicional, un desarrollo de habilidades cognitivas reducido y mas. La propuesta, aquí descrita, es un trabajo de investigación bibliográfica minuciosa sobre el valor que la matemática recreativa tiene dentro del desarrollo de la matemática misma, desde un punto de vista histórico, procedimental, epistemológico, educativo, estratégico, cultural, social… ofrece una alternativa para motivar a los alumnos al aprendizaje y a los profesores en mejorar la enseñanza y con ello colaborar en la solución de los problemas señalados anteriormente. Este reconocimiento lúdico de la matemática permite un mejor conocimiento de esta ciencia, una visión mas completa sobre las complicaciones propias del aprendizaje en ambientes educativos y posibles soluciones. Para ello se revisan múltiples experiencias sociales (libros, revistas, eventos…), pero sobretodo educativas (planes y programas en instituciones de varios niveles, materiales, informes de investigación…), mostrando los resultados positivos sobre el uso de actividades lúdicas. Después de un recorrido bibliográfico se presentan 40 secuencias didácticas, justificadas en base a las mas recientes teorías; situaciones didácticas de Guy Brosseau, constructivismo de Lev Vigotsky, epistemología genética de Jean Piaget. Estas secuencias didácticas se clasificaron en 4 capítulos; **magia**, **juegos individuales**, **juegos colectivos** y uso de la tecnología por medio de **software libre** para PC. De cada uno de los 4 apartados de la clasificación, se diseñaron 10 secuencias didácticas con la siguiente estructura; objetivo, reglas del juego/truco, material necesario y un conjunto de actividades que van de una manipulación física o virtual a una formalización de conocimientos o habilidades matemáticas escolares del nivel secundaria. Juego, manipulación, diversión, sorpresa, competencia, estrategia, interés, descubrimiento… y las propias habilidades de la matemática; razonamiento, conjetura, deducción, inferencia, reversibilidad, simbolización, generalización, todo ello dentro de un juego, ofreciendo una visión para cambiar la imagen de la matemática y con ello mejorar su aprendizaje.

(**Palabras Clave**: Matemática recreativa, juego, magia, problema, motivación, aprendizaje, diversión, software libre, secuencia didáctica.)

FAC. DE LENGUAS Y LETRAS
U A Q
ENLAZAR CULTURAS POR LA PALABRA
SECRETARÍA
ACADÉMICA

SUMMARY

This thesis begins with recognition of the serious problems that exist in educational institutions in the area of education in mathematics: failing grades, desertion, poor results on tests, national and international, poor understanding of mathematic processes and symbolization, little motivation to learn this science, tools for breaking away from traditional teaching ignored by teachers, reduced development of cognitive abilities and others. The proposal set forth is a detailed bibliographic study on the value that recreational mathematics has within the development of mathematics itself from the historical, procedural, epistemological, educational, strategic, cultural and social point of view. It offers an alternative for motivating students to learn and teachers to improve their teaching and thus cooperate in solving the problems mentioned above. This recognition of play within mathematics leads to a better knowledge of this science, a more complete vision of the complications involved in learning in educational environments and possible solutions. Multiple social experiences were reviewed (books, magazines, events and others), but most especially educational experiences (plans and programs in institutions at various levels, materials and research reports), showing positive results in the use of play activities. After a bibliographic review, 40 didactic sequences are presented, justified by the most recent theories; didactic situations by Guy Brosseau, Lev Vigotsky's constructivism, Jean Piaget's genetic epistemology. These sequences were classified in 4 chapters: **magic, individual games, collective games** and the use of technology with **free software** for PCs. From each of these 4, 10 didactic sequences were designed with the following structure: objective, rules of the game/trick, necessary material and a group of activities that range from physical or virtual manipulation to the formalization of knowledge and abilities in scholastic mathematics. Play, manipulation of materials, fun, surprise, competence, strategy, interest, discovery, as well as the abilities related to mathematics such as reasoning, conjecture, deduction, inference, reversibility, symbolization, generalization, all within a game, offer a vision for changing the image of the study of mathematics.

(**Key words:** Play, magic, problem, didactic sequence, motivation, learning, fun, recreational mathematics, play software)

FAC. DE LENGUAS Y LETRAS
U A Q
ENLAZAR CULTURAS POR LA PALABRA
SECRETARÍA
ACADÉMICA

Agradecimientos

Al mejor Maestro…

Por permitirme un poco del conocimiento de esta ciencia llamada matemática y gracias a Él puedo confirmar la más grande ley enunciada:

$$\lim_{s,\,a \to \infty} \text{sabiduría }(s) + \text{amor }(a) = \text{Dios}$$

A Macrina, mi madre…

Por sus enseñanzas no escolarizadas y poco didácticas pero muy significativas, por ser un ejemplo para mi ser y mi vida…

Gracias a ella puedo formular un teorema que no necesita demostración para aceptarlo:

Mi madre existe y es única

A mis matemáticos preferidos

Airy, Andrey y Amelie que son el motivo de mi existencia.

…Gracias hijos por estar en mi vida y darme vida.

A Claudia, mi amiga…

Porque gracias a ella estoy de pie, además, porque en mi vida tiene una función continua, creciente y discreta… y no tiene límite.

A mis profesores de la maestría.

Maestro Arturo Corona, gracias por su asesoría.

A mis sinodales y profesores, por colaborar en mi formación personal y profesional.

Índice

Resumen		i
Summary		ii
Agradecimientos		iii
Índice		iv
introducción		1
Objetivos		8
Marco referencial		9
Marco referencial teórico		18
Marco referencial histórico		22
I.	Un poco de historia	23
II.	Matemática recreativa al interior de la matemática misma	27
III.	Matemática recreativa en la didáctica matemática	28
IV.	Matemática recreativa alrededor del mundo	29
Capítulo 1. El juego y el desarrollo de habilidades		32
1.1	Un acercamiento a la definición de juego	33
1.2	Características del juego	34
1.3	Beneficios del juego	35
1.4	El juego en la educación	35
1.5	Clasificación del juego	38
1.6	Paralelismo entre juego y matemáticas	39
1.7	El juego y el desarrollo de habilidades matemáticas	41

Capítulo 2. La literatura de matemática recreativa y su influencia en los sistemas escolares 45

2.1 Autores que recrean la matemática 46

2.2 Publicaciones que recrean la matemática 49

2.3 Instituciones que recrean la matemática 51

Capítulo 3. Actividades recreativas: Justificación y secuencias didácticas 55

3.1 Matemagia 56

3.2 Juegos individuales 93

3.2 Juegos colectivos 122

3.2 Software recreativo 147

Relación curricular 186

Conclusiones 189

Bibliografía 193

Introducción

> *La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces*
>
> Puig Adam 1958.

La educación matemática es una gran preocupación dentro y fuera de los sistemas educativos de todas la sociedades actuales; mayores presupuestos, exámenes estandarizados, investigaciones, reformas a los planes y programas de estudio, metodologías, libros de texto… son sólo algunos factores donde se nota a nivel nacional e internacional el esfuerzo que los gobiernos y organizaciones no gubernamentales ponen en la educación matemática.

En nuestro país, a pesar de todos estos esfuerzos, los resultados no son los esperados, en diciembre del 2010 se publicaron los resultados de la prueba PISA, aplicada a 33 países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), resultados que nuestro país esperaba con gran expectación. Una vez más… desilusión, México ocupó el último lugar de la lista, aunque se rescata que hubo un pequeño avance en los resultados de matemáticas con respecto a los obtenidos del 2006.

La enseñanza actual de la matemática no se ha podido desprender de siglos de rutinas y contenidos donde se privilegian las técnicas y algoritmos transmitidos unilateralmente por el profesor (enseñanza tradicional). En nuestro país estos cambios se empiezan a notar lentamente; las publicaciones especializadas, los congresos, las carreras de profesionalización en didáctica matemática, son ejemplos de la importancia que en estos últimos años se le ha dado a la educación matemática.

La matemática lleva dentro de sí dificultades epistemológicas y estructurales. No es una ciencia fácil de origen; su lenguaje, método y estructuración axiomática es producto de un razonamiento lento (siglos de evolución), sistemático y formal. Intentar reproducirlo en el aula genera una enorme crisis al momento en que las instituciones estructuran los saberes y los alejan de procesos históricos, epistemológicos y de aplicación, presentándolo como conjuntos rígidos, únicos e imposibles de entender, mucho menos de construir. Además, un gran número de profesores nos conformamos con llevar al aula una mera reproducción mecánica de algoritmos que nos ayudan a resolver ejercicios rutinarios sin sentido y que a la larga forma individuos con alto grado de frustración y aversión a la matemática, convirtiéndose, con el tiempo, en una visión social generalizada. Esta situación ha sido observada desde hace varias décadas, como lo podemos confirmar en trabajos de Polya (1965, pág. 5)

> *Si [el profesor] dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad.*

Y más recientemente Schliemann (1991, pág. 92)

> *Sin embargo, trabajos anteriores en el área de las operaciones aritméticas revelan que la instrucción escolar se limita con frecuencia a la transmisión de procedimientos, y no al análisis de problemas. Observaciones no sistemáticas en las clases demuestran que la enseñanza escolar se limita casi siempre al entrenamiento en el uso de fórmulas o algoritmos, sin que los alumnos deriven estos procesos a partir de la manipulación de los elementos.*

¿Sería este enfoque escolar suficiente para promover la comprensión de las relaciones implícitas en tareas matemáticas?

Se ha de reconocer que esta es la situación en la que se encuentran a menudo los alumnos de nuestro sistema educativo, desde la educación inicial hasta el nivel universitario. En muchas instituciones, el estudio de la matemática no suele estar ligado a una verdadera necesidad originada en los alumnos, para utilizar las matemáticas como respuesta a cuestiones que se les plantean o para llevar a cabo una tarea problemática que no saben cómo realizar. Así, no cabe duda de que la enseñanza de las matemáticas que se imparte en las actuales instituciones escolares responde a un proyecto social - e incluso político - que los estudiantes consideran relativamente ajeno a sus propios intereses. La enseñanza de las matemáticas les es, en gran medida, impuesta.

Para intentar mantener a los alumnos dentro del sistema escolar, las instituciones procuran protegerlos de toda desconcertación y evitarles el enfrentamiento con cualquier obstáculo para garantizar que egresen de los niveles educativos, pero sin desarrollar en ellos las competencias necesarias que les permitan razonar, analizar situaciones, identificar problemas y proponer soluciones para transformar su entorno.

La postura anterior es contraria a los propósitos de educación actual, ya que como se puede apreciar en el programa de estudios 2011, la metodología didáctica de los programas de Matemáticas está orientada al desarrollo de estas competencias, y por eso exige dejar atrás la postura tradicional, que consiste en ***dar la clase*** explicando paso a paso lo que los alumnos deben hacer y preocupándose por simplificarles el camino que por sí solos deben encontrar. Programa de estudio matemáticas (2011, pág. 19)

> *El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.*

Además de los problemas inherentes a la matemática y a su institucionalización, los alumnos, de manera general, carecen de interés no sólo por la matemática, sino por el conocimiento escolarizado, lo que nos lleva a un problema didáctico relacionado con la psicología: la motivación. Chevallard (1998, pág. 128)

> *En realidad es muy difícil que los alumnos sientan, a nivel individual, la necesidad de estudiar matemáticas. Podríamos incluso decir que, hoy en día, es perfectamente posible tolerar la ignorancia matemática. Incluso entre personas consideradas socialmente cultas se agotan muy rápidamente las matemáticas consideradas como suficientes para vivir, para desarrollar una profesión, para tener un nivel de cultura mínimo, etc.*
>
> *Aunque la falta de ganas de estudiar pueda ser considerada como un fenómeno escolar general, cabría preguntar, hasta qué punto algún aspecto de este fenómeno podría ser explicado a partir de la especificidad del saber matemático y de las características propias de las matemáticas escolares. En otras palabras, cabría preguntarse si la falta de ganas de estudiar matemáticas podría ser considerada también como un fenómeno didáctico.*

Matemática (ciencia), semiótica (lenguaje), institucionalización, didáctica, políticas educativas, motivación y un largo etcétera, son problemas inherentes en el proceso enseñanza-aprendizaje contra los que el profesor intenta enfrentar, en la mayoría de los casos, sólo con pizarrón y gis.

Conviene, al reconocer los distintos obstáculos que la matemática tiene dentro del proceso educativo, preguntarnos como educadores responsables:

- ¿Tenemos perdida nuestra batalla?
- ¿Tendremos que conformarnos con la transmisión y retransmisión dogmática de los conocimientos matemáticos?

- ¿Tendremos que aceptar que la matemática sea exclusiva para un pequeño porcentaje de nuestros alumnos?

Muchos profesores no aceptamos respuestas pesimistas a estas preguntas, por lo que se han desarrollado diversas teorías y propuestas para ganar terreno en la batalla. Se suma a este interés la propuesta didáctica que aquí se plantea para aprender y desarrollar conocimientos y habilidades de pensamiento lógico, sistemático y analítico por medio de la matemática recreativa, no sólo como distracción o pasatiempo, sino bajo una planeación didáctica que favorezca un aprendizaje significativo.

Numerosas propuestas se han hecho para todos los niveles y para todas las ramas que el estudio de la matemática tiene, aunque en nuestro país falta una mayor cobertura y difusión de ellas, además de compromiso de gran parte de los docentes. Este trabajo pretende colaborar con un aspecto un tanto olvidado y poco aprovechado para enseñar esta ciencia: El componente lúdico que la matemática tiene de manera histórica y epistemológica.

Hace 16 años, impartiendo clase a un grupo de 5º grado de primaria, se trabajó una lección en el *Libro de Matemáticas 5°* (SEP 1993) llamada *Feria matemática*, una secuencia didáctica para trabajar operaciones con números naturales y decimales desde una visión lúdica. Gustó tanto la idea de una *Feria matemática* que se decidió montar una feria en el patio de la escuela con los alumnos del grupo. Cada equipo formado diseñó una actividad y junto con algunos juegos que ya se conocían se llevó a cabo la 1ª Feria de matemáticas (de la que en ese momento se tenía noticia). Fue grandioso ver el interés de los niños antes y durante el evento; toda la escuela participó, incluidos los padres de familia, al verlos ahí, jugando y aprendiendo con las matemáticas, permitió darle un interés (consciente) a este tipo de actividades. Desde entonces el juego ha ocupado un lugar importante en el desarrollo de las clases, muchas ferias de matemáticas se han montado en diferentes niveles escolares, con excelentes resultados, además de introducir juegos durante el desarrollo de las clases cotidianas.

Con el paso del tiempo y con un poco de investigación sobre el tema, se cayó en cuenta que este tipo de actividades se han llevado a cabo, incluso mucho tiempo antes de esta primer experiencia con la feria de matemáticas, y que si ya de por sí el juego es interesante, llevarlo a cabo de manera intencionada es más enriquecedor.

Por supuesto que la experiencia no es suficiente para convencer de la importancia de este proyecto, por lo que se explicará a continuación cuáles son algunas razones psicológicas, históricas y didácticas que lo justifican.

Como primera evidencia se cita el *Libro del Maestro* que edita la Secretaria de Educación Pública (SEP) y se distribuyó a los docentes de matemáticas a nivel secundaria en nuestro país con la reforma de 1993. SEP (1994, pág. 19)

> *Jugar es una actividad interesante para las personas de diferentes edades y es una parte importante en la vida de los adolescentes. En la educación secundaria se pueden aprovechar diversos juegos para favorecer el aprendizaje de las matemáticas.*
>
> *Pero hay que estar atentos, pues si bien los juegos son situaciones que resultan divertidas e interesantes para los alumnos, no todos los juegos favorecen la construcción de conocimientos matemáticos.*
>
> *Para aprovechar las posibilidades que ofrecen algunos juegos, el profesor debe cuidar de no convertirlos simplemente en situaciones recreativas para pasar el rato y mucho menos para perder el tiempo. Cuando los estudiantes juegan, se divierten, platican, discuten y hacen ruido, pero no hay que perder de vista el propósito que se persigue al plantear determinado juego, y así lograr hacer matemáticas de una manera agradable. Algunos padres de familia y profesores se preocupan de que los estudiantes jueguen durante la clase debido a que desconocen las ganancias que se obtienen, por ejemplo, el juego implica competencia, y en el afán de ganar los estudiantes tienden a ser autónomos, construyen sus propias estrategias y analizan cuidadosamente sus resultados*

Es claro que las autoridades educativas, reconocen la importancia de los juegos, incluso hasta institucionalizarlos, promoverlos dentro de los programas de estudio y sugerirlos en la planeación de clase. En 1993, se editaron ficheros de actividades para todos los grados de educación básica, material complementario que contiene numerosas actividades lúdicas.

Esta propuesta está acorde con las tendencias actuales en didáctica de la matemática al permitir al alumno ser partícipe de su aprendizaje, que se involucre con el objeto de conocimiento para lograr aprendizajes que le sean significativos, mientras que el profesor deja de ser el protagonista en el proceso.

Cuando se considera el estudio como el objetivo principal del proceso didáctico, resulta mucho más fácil traspasar al alumno una parte de la responsabilidad matemática asignada tradicionalmente al profesor. Este nuevo reparto de responsabilidades asigna al profesor el papel de *director de estudio*, posibilita que los alumnos reconozcan al profesor como matemático. Chevallard (1997, pág. 203)

El maestro es encargado de diseñar *situaciones didácticas* planeadas exactamente con el propósito de llevar al alumno al aprendizaje de un determinado conocimiento y/o habilidad. Es claro que enfrentar al alumno con la *situación* no garantiza de hecho la adquisición, a menos que ésta no prevea, en su interior, una confrontación entre alumno y una situación a-didáctica (situación privada de la intención de enseñar, pero sí cargada de la intención de llevar a la construcción de un conocimiento) D'Amore (2002)

> *El alumno sabe que el problema ha sido seleccionado para llevarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado desde la lógica interna de la situación y que puede construir el saber esperado sin hacer referencia a las razones didácticas.*
> *No sólo él puede, pero tiene que [construirlo], porque él no habrá adquirido verdaderamente el conocimiento sino hasta cuando él no sea capaz por sí mismo de ponerlo en acción en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de toda indicación intencional.*

A lo largo de los capítulos de este trabajo se justifica el uso de la matemática recreativa por medio de situaciones y secuencias didácticas; se recuerdan pasajes históricos de cómo estas actividades han llevado a grandes matemáticos a ideas y nuevos conocimientos de esta ciencia. También se da un panorama sobre la importancia que en escuelas de todos los niveles escolares, incluso los de nivel superior, está tomando la matemática recreativa, a tal grado que forma parte de sus planes y programas de estudio de manera oficial. La extensa literatura escrita por matemáticos y no matemáticos que han destinado su talento para proponer juegos y retar a los lectores escolares y no escolares a resolverlos, también ocupa un capítulo de este trabajo. Si bien es cierto que el juego por sí mismo lleva a los participantes a desarrollar y adquirir habilidades, valores y conocimientos, estos son poco sistemáticos, por eso este trabajo va más allá al proponer secuencias didácticas que nos lleven a aprendizajes intencionados y formales, tan formales como el nivel lo permite.

Para desarrollar la propuesta de una manera objetiva y sistemática, el trabajo se dividió en 3 partes:

Primero se realizó una investigación de la matemática lúdica a lo largo de la historia de la matemática misma. A pesar de suponer que esta visión de la matemática estaría presente en gran medida en la construcción de esta ciencia, la expectativa se vio superada, ya que la investigación reveló una mayor relación y génesis de la matemática con la lúdica.

Posteriormente se llevó a cabo una investigación exhaustiva de las actividades lúdicas (juegos) en diferentes bibliografías (libros, revistas, internet…), eligiendo los más adecuados para el proyecto, junto con una investigación teórica de las justificaciones y resultados de proyectos ya desarrollados. Así mismo la investigación permitió encontrar que la matemática lúdica ha sido y es objeto de estudio de manera seria y formal en varias instituciones no sólo de nivel básico, sino incluso superior y de posgrado.

Por último se desarrollaron propuestas de secuencias didácticas de los juegos seleccionados representativos de cada área de la matemática en el nivel básico (lógica, pensamiento numérico, álgebra, geometría, combinatoria, estadística), ya que normalmente las actividades lúdicas están aisladas de una relación curricular, carecen de una sistematización que lleve al alumno a construir conceptos y procesos de aprendizaje. Buscando en la mayoría de los casos en que se utiliza la matemática recreativa, sólo entretener, se deja el aprendizaje como un proceso oculto y de manera no consciente (***caja negra***).

Estas secuencias didácticas se desarrollaran de acuerdo a la siguiente clasificación:

- Magia con matemáticas.
- Juegos individuales.
- Juegos cooperativos
- Software recreativo.

De cada uno de estos apartados se eligieron diez juegos/problemas, se ofrece una justificación del juego en el aula, así como un contexto sociohistórico; también una ficha técnica donde se encuentra información del juego, su objetivo y la solución del mismo desde un punto de vista formal matemático, tan formal como lo permite el nivel al que va dirigido. La parte más importante de la ficha técnica es la secuencia didáctica, conjunto de actividades que guiarán al profesor y al alumno para conseguir resolver la actividad pero sobre todo adquirir conocimientos y habilidades de pensamiento, estas actividades van aumentando gradualmente el nivel de complejidad y guía al usuario de forma didáctica.

OBJETIVOS DE LA PROPUESTA

- Resaltar la importancia que la matemática lúdica ha tenido en el desarrollo de:

  a) La matemática estructurada.
  b) La educación matemática escolarizada.
  c) La cultura matemática general.

- Ampliar la visión de la matemática recreativa en entornos escolarizados del nivel secundaria, no sólo como pasatiempo sino como generadora de conocimientos, desarrollo de estrategias, práctica de método lógico-analítico, desde un punto de vista histórico, epistemológico, educativo y lúdico.

- Motivar al alumno de nivel secundaria en el aprendizaje de la matemática, ofreciéndole actividades que le permitan romper la rutina de los ejercicios mecánicos y le proporcionen mayor estímulo en su aprendizaje, así como un mayor significado conceptual, estratégico, simbólico, algorítmico y contextual de los contenidos del nivel.

- Favorecer la incorporación a la actividad matemática de aquellos alumnos con bajo rendimiento escolar y/o introvertidos, por medio de actividades lúdicas que impliquen la comunicación y la socialización para lograr el objetivo individual o colectivo.

- Desarrollar actitudes de respeto, colaboración, y valores que le permitan un mejor desarrollo personal y social.

Marco referencial

> *Si la vida corriente suministra tantos modelos y situaciones aptas para la enseñanza matemática, es natural que busquemos, asimismo, modelos matemáticos en los juguetes que tan esencial papel desempeñan en la vida del niño, promoviendo su más espontánea actividad. Este acercamiento entre matemática y juguete nos suministrará, sin duda, amplias sugerencias para alcanzar la meta ideal de nuestra enseñanza, que es la de convertirla recíprocamente en un juego para el niño.*
>
> *Puig Adam 1960.*

El sustento teórico metodológico para esta propuesta ha sido tomado de los planes y programas oficiales para educación secundaria, ya que es a este nivel al cual se dirige principalmente el trabajo aquí propuesto.

A partir de 1993 los planes de este nivel se modificaron radicalmente en nuestro país y en gran parte del mundo tomando como base a las investigaciones contemporáneas, tales como el constructivismo, Heurísticas de Polya, Schoenfeld, donde el principal cambio vino en el enfoque basado en la resolución de problemas, versus, aprendizaje mecanicista y memorístico. Definición, algoritmos, ***problemas modelo*** y varios ejercicios similares, era lo que se consideraba aprendizaje de matemáticas. Los resultados de las investigaciones indicaron que un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos. El nuevo enfoque viene descrito de la siguiente manera en los programas de estudios 2011, guía para el maestro SEP (2011, pag.20)

> *El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar para* ***solucionar problemas*** *y reconstruir en caso de olvido; de ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, tanto en relación con el lenguaje como con las representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos de estudio se apoya más en el razonamiento que en la memorización.*

Si el enfoque para lograr aprendizajes significativos propios de los estudiantes y acercar la matemática al contexto de los alumnos es la resolución de problemas surge de manera inmediata la primera pregunta ¿Qué es un problema? A continuación se darán algunas definiciones de este concepto. Libro para el maestro SEP (1993, pag.16)

> *Por problema nos referimos a una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas.*

Uno de los precursores de esta teoría es Polya, quien define *problema* de la siguiente manera (Martínez, 2010); Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Charnay, citado por Alfaro y Barrantes (2008), dice que un problema puede verse como una terna situación/alumno/entorno; el problema se da sólo si el alumno percibe una dificultad (el sujeto dado que no cuenta con un algoritmo). En ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro.

Otra definición es la de Krulik y Rudnik: Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (García, nf).

Al respecto existen más definiciones, que si bien tienen sus diferencias coinciden en que existe una situación, un individuo, un objetivo por alcanzar y una estrategia no trivial. Con esta idea será suficiente para continuar hacia la tipología que García (nf) propone sobre ***problema***:

- Ejercicios
- Problemas con texto
- Puzles y juegos
- Prueba de una conjetura
- Problemas de la vida real
- Situación a problematizar

Se ve en esta clasificación que una manera de invitar a resolver problemas, actividad considerada como "el corazón de las matemáticas" Guzmán (1984), es proponer acertijos, juegos y puzles que despierten el interés de los alumnos para acercarlos a la matemática, primero de manera informal, para después sistematizar los conocimientos de manera formal, tal y como lo propone Gómez en su curso matemática básica expuesto en su libro del mismo nombre. (Gómez 1995)

> *La parte de sistemas formales presenta el concepto de sistema formal a manera de juego. Se busca que el lector descubra y maneje naturalmente*

> *los conceptos de axioma, regla de deducción, teorema y demostración. Una vez que se ha experimentado con diversos temas, se propone una herramienta general de modelaje con la cual se pretende que el lector pueda simplificar problemas complejos para analizarlos.*

Estos juegos son en su mayoría problemas para los cuales la solución no es evidente. El propósito de los mismos es el de incitar al estudiante a descubrir métodos de razonamiento y de solución de problemas, además de desarrollar habilidades de pensamiento matemático. Una buena proporción de estas actividades son de carácter verbal y lógico. En otros casos son de carácter aritmético y pretenden obligar al estudiante a desarrollar su capacidad de análisis. Al final del proceso de solución se analizan los diferentes caminos y se validan los resultados obtenidos, haciendo un paralelo con sistemas formales, tan formales como el nivel de abstracción del alumno lo permita.

En ese sentido de formalización hay que tener cuidado para no caer en el enfoque, ya superado, que Morris Kline (2005, pág. 53) estudia en su libro: *El fracaso de la matemática moderna.*

> *El hincapié en la interpretación lógica [axiomática] engaña también al estudiante en otro sentido. Le hace creer que las matemáticas han sido creadas por genios que comenzaban con axiomas y razonaban directamente desde los axiomas hasta los teoremas. El estudiante, que no puede funcionar de esta manera se siente humillado y desconcertado, pero el servicial profesor está completamente preparado para demostrar su genio en acción.*

Miguel de Guzmán (2007, pág. 26) reafirma la idea de tener cuidado con el rigor en etapas donde no se está preparado para niveles superiores de abstracción; al respecto comenta:

> *La formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estadio posterior. A cada fase de desarrollo mental, como a cada etapa histórica o a cada nivel científico, le corresponde su propio rigor.*

La misma metodología propuesta por Gómez, se sigue con los juegos propuestos de manera lúdica e informal referidos por Guzmán (1995) durante las *Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*.

> *Hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas. La resolución de problemas, puede aprovecharse de la actividad con juegos*

> *bien escogidos. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de estos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.*

Chamoso (2004), citando a Corbalán, comenta que:

> *No se pretende considerar el estudio de juegos como entretenimiento, sino como un tipo de problemas o como una fuente de problemas dentro del movimiento general de resolución de problemas, los matemáticos valoran los juegos porque se comportan siguiendo unas reglas de forma similar a como las Matemáticas lo hacen en sí mismas.*

Dado que esta propuesta pretende utilizar juegos en un ambiente escolar, parece indicado definir de qué tipo de juegos se hablará (Camus 2001)

> *Dejaré a un lado los juegos que no contienen más que un poco de astucia* ***socarrona****, oculta en el enunciado y constituyen un obstáculo para la reflexión posterior y caen en la uniformidad que genera aburrimiento, por no mencionar aquellos problemas despreciables que en verdad no requieren el menor razonamiento tampoco aquellos juegos de grupo tradicionales o de tableros donde el azar es responsable del resultado*

Dadas estas consideraciones, entonces ¿Qué tipo de juegos se propone implementar? Para contestar esta pregunta citaré algunos trabajos que orientan sobre ello.

Camus (2001, pag.12) define el juego/problema matemático como distinto, tanto del divertimento clásico de revistas ilustradas como del ***deber de matemáticas*** de la escuela, pero compartiendo la esencia de ambos. Incluye una buena diversión matemática, presentada en forma amena, siempre actual o modernizada y a la vez vasta y diversificada; pero al mismo tiempo erige una sólida estructura de reflexiones y razonamientos matemáticos, construida con criterio didáctico. (Corbalán, 2002, pág. 18)

> *Sería un cajón de sastre en el que entran actividades de tipos diversos (incluido lo que se suele entender por entretenimientos matemáticos). Nosotros, sin olvidar esa amplia perspectiva, nos detendremos con preferencia en los juegos es los que haya algo que manipular (aunque a veces esos objetos sean el papel y lápiz), y en los que haya algún objetivo tangible que alcanzar. Como sucede con los juegos que hay en las tiendas*

especializadas o en las secciones de juegos de los almacenes: un juego es algo tangible, tiene una estructura física, es un objeto manipulable

Uno de los principales referentes que, en cuanto a matemática lúdica se citan es Martin Gardner quien dice lo siguiente al respecto (Gardner, 1983, pág. 10)

> *Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones* ***prácticas****, sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el* ***juego*** *se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia.*

Finalmente en esta conceptualización de lo que es el juego en matemáticas se cita a Miguel de Guzmán (1984), quien en lugar de definir qué son los juegos en matemáticas, define lo que no son.

> *Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución de la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método. Pero, como veremos, hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.*

Tomando en cuenta estas conceptualizaciones sobre los juegos matemáticos se responderá a la pregunta ¿Qué tipo de actividades se propone implementar?

Es conveniente aclarar en este momento que durante el desarrollo de esta propuesta se hablará de manera indistinta de: matemática lúdica, matemática recreativa y juegos matemáticos, por compartir, todas estas, un componente lúdico (del latín *Ludus* que designa todo lo relativo al juego, ocio, entretenimiento o diversión).

Bajo el nombre de matemática recreativa suelen presentarse, pues, una variada serie de contenidos, recursos y estrategias que cualquier profesor, conociendo las necesidades e intereses de sus alumnos, debería utilizar para que el proceso de aprendizaje resulte grato, motivador, y sea motor de futuros aprendizajes. Por tanto, parece que todas las actividades que se realicen deben estar relacionadas con las matemáticas y tener un carácter lúdico.

De este modo, parece que no sólo debemos entender por el calificativo recreativo, los juegos matemáticos en sentido estricto, sino que también habría que hablar de todas aquellas situaciones didácticas activas en las que utilizamos las palabras (cuento matemático, adivinanza, jeroglífico, truco de magia, canción, narración, truco, etc.), la representación (papiroflexia, modelos), la construcción geométrica (rompecabezas, trazos), el material didáctico más o menos estructurado (tableros, policubos, *tangram,* ábaco, espejos, regletas, tarjeta, pentaminós), los objetos cotidianos (botones, palillos, dados), el material tecnológico (calculadoras, software), los juegos de diversa índole, las actividades de exposición (ferias, exposiciones,) o clase (biografías, noticias de prensa, curiosidades), los problemas relevantes, etc.

Si bien es cierto que existen propuestas similares que se llevan a cabo en todos los niveles escolares, esta propuesta se enfocará al nivel medio básico, por considerarlo de suma importancia no sólo por el nivel de contenidos matemáticos, sino porque la edad de los alumnos que pasan en este nivel escolar se ubica en el periodo crítico de la adolescencia, momento del desarrollo humano en que el interés escolar disminuye para enfocarlo a problemas de identidad, además de una natural rebeldía hacia lo institucionalizado (familia, escuela…).

Los alumnos, hoy no aceptan así nada más el principio de autoridad, las bases sobre las cuales se asentaba el aprendizaje de matemática y la de las otras materias era "Tú hablas, yo escucho, obedezco". Este paradigma hizo crisis en general en la escuela y los adolescentes, y ahora por suerte no aceptan esas reglas de juego. Por otro lado, los profesores de matemática sienten que en realidad hay una crisis grande en toda la sociedad por la cual los alumnos encuentran muy desvalorizado el lugar del saber y del aprender. Van a la escuela para buscar otras cosas y lo que pretenden es zafarse de las situaciones de aprendizaje (Informes periodísticos para su publicación No. 15 2003).

Otro aspecto en este nivel, es que el conocimiento se vuelve más específico y a la vez abstracto, deja de tener sentido concreto y cotidiano. En un enfoque tradicional los nuevos contenidos de la matemática, generalizaciones, ecuaciones, gráficas, trigonometría, son algunos contenidos que ya no son cotidianos, ya no son ***útiles*** para desenvolverse en sus contextos. Si bien es cierto que dan mayor oportunidad de entender procesos más técnicos y prepararse para el siguiente nivel, los alumnos no se convencen con estos argumentos. “¿Por qué debo aprender fórmulas y teoremas, reglas y algoritmos carentes de sentido?”. Los profesores nos esforzamos por darle sentido a la matemática, un sentido cotidiano y práctico, pero en ese afán sólo logramos que parezca más grotesca y tediosa. El resultado es una lucha de autoridad en donde indiscutiblemente el docente saldrá ganador con ayuda de todo el sistema educativo.

No es la intención en este momento continuar en sentido de la política educativa, ni con las influencias psicologías, sociológicas o culturales; no se intenta tampoco sugerir que esta propuesta tiene por objeto solucionar estas situaciones, pero es importante mencionarlo para darle peso a la propuesta del uso de juegos en este nivel, donde la materia no sea una obligación vertical, sino un contrato horizontal que motive al alumno a participar en el proceso enseñanza-aprendizaje propio de las instituciones educativas.

Al respecto, existen investigaciones donde los resultados son alentadores respecto a utilizar matemáticas lúdicas, y de cómo este enfoque aumenta el interés y la motivación (actitud) hacia la matemática.

- *La motivación y el interés aumenta en el alumnado al aprovechar su inclinación hacia el juego.*
- *La actividad deja de ser puramente escolar y académica y se transforma en una actividad lúdica. Lo rutinario pasa a ser entretenido. Lo aburrido es divertido.*

Estas conclusiones sólo son una muestra de los resultados que tuvo una experiencia llevada a cabo en la asignatura de Matemáticas con alumnos de 1º y 2º de ESO de Logroño durante el curso 2002-2003. Con esta experiencia se obtuvo el 1er lugar en innovación e investigación educativa, a cargo de la Profra. Rita Jiménez Igea, quien además es miembro del equipo que diseñó el proyecto Descartes.

Las conclusiones de una experiencia en una escuela en Barcelona desarrollada por Mercé Edo y Jordy Deulofeu (nf) sobre aprendizaje de matemáticas en un contexto de juego se muestran a continuación.

> *Todo esto nos lleva a concluir que el contexto de juego en el marco escolar facilita la construcción de conocimiento matemático cuando se plantea en un entorno constructivista de interacción entre todos los participantes.*

Por otro lado, desde un punto de vista didáctico, el término motivación hace referencia a que los alumnos realizan sus actividades en el aula si existe algo que los atraiga, ya sea con la vinculación del contenido a la realidad que se vive en el aula o a eventos que ocurren en su hogar. En este sentido, dentro de las exigencias actuales en el ejercicio de la docencia se requiere que el educador despierte necesariamente el interés del alumno por aprender y adquirir nuevos conocimientos. La motivación, la puede lograr el docente a través de la experiencia en vía de obtener la efectividad en la estimulación del desarrollo de nuevos conocimientos y la enseñanza aprendizaje se mantenga en el alumno (Mendoza 2005).

Contreras y Meléndez (2006) en su trabajo "La motivación e interacción del niño y educador dentro del enfoque constructivista de la educación", explican la importancia que Ausubel daba a este componente:

> *Hemos de considerar la motivación como un factor fundamental para que el alumno se interese por aprender, ya que el hecho de que el alumno se sienta contento en su clase, con una actitud favorable y una buena relación con el maestro, hará que se motive para aprender.*

La diferencia con las propuestas existentes y la propia radica principalmente en que otras no contienen diseño de secuencias didácticas que conlleven al alumno al aprendizaje, más bien son experiencias sobre un tema específico con una estructura diferente a la que se propone en este trabajo: Nombre del juego, reglas, y desarrollo, secuencia didáctica, en algunos casos variantes y muestra de la solución en capítulos particulares.

Las diferencias, dentro de la bibliografía consultada, las señalo a continuación:

- Sin relación escolar y/o curricular:

No se relacionan con programas curriculares específicos, queda abierto el grado y el contenido a abordar, en el mejor de los casos. Por otro lado una gran cantidad de libros y revistas más sobre el tema sólo proponen actividades lúdicas, pero aisladas incluso de un contexto escolar, más bien para un público general.

Matemáticas re-creativas, libro donde Susana Aranega compila varios textos sobre el tema, sólo se dividen por nivel, no por grado, ni existe relación sobre contenidos curriculares.

Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato, libro donde Fernando Corbalán propone varios juegos, quedando también la duda sobre grado y contenido curricular donde se pueden utilizar.

Otros más de Martin Gardner, Yákovlevich Perelman, Henri Camous, entre los más destacados, son ejemplo de bibliografía para todo público.

- Sin propuesta sobre secuencia didáctica para formalizar los conocimientos utilizados:

No se olvide que el uso de esta propuesta no tiene como fin el juego, sino más bien éste se toma como el medio para interesar al alumno y permitirle que sea partícipe de la construcción de su conocimiento, toda vez que con cada juego se propone hacer una reflexión dirigida para sistematizar y formalizar los contenidos o estrategias abordados en el mismo.

En el documento *Aprender matemáticas jugando* de Rita Jiménez Igea (2003), se menciona, dentro de su reporte de investigación que los alumnos contaron, junto con las actividades lúdicas propuestas, con unas fichas de trabajo que pueden llamarse albaranes, libros de cuentas etc. En ellas el alumno plantea el problema y realiza las operaciones, que se entiende, eran actividades que guiaban al alumno en el juego. Esto es lo más parecido a la propuesta que sugiero y que se explicará más adelante.

> *Un juego tiene para el alumno una finalidad en sí misma como consecuencia lógica del carácter del mismo, pero si lo utilizamos en la enseñanza de la matemática es porque consideramos que tiene importancia dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello tiene que estar claramente enmarcado en una programación de la asignatura, sea dentro del temario de contenidos o de procedimientos o técnicas de resolución de problemas* (Corbalán 2002).

En México esta propuesta no ha tenido mucho eco; da la impresión de que los profesores restan importancia a los juegos por ser juegos, en ocasiones sólo lo ven como un pasatiempo, algo para mantenerlos ocupados, pero sin exprimir la actividad de manera intencionada. Esto a pesar de que, desde los cargos más altos de autoridades reconocidas, se ha invitado a esta propuesta, así lo ve el Dr. Fernando Brambila, presidente de la Sociedad Matemática Mexicana (2004-2006), quien con motivo del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) celebrado en nuestro país en 2008 dijo en conferencia de prensa (UANL 2008)

> *Si el maestro tiene miedo de enseñar las matemáticas, porque no entiende algunos temas, transmite el miedo a través de su actitud y gestos; y aunado a ese miedo, la metodología de enseñanza de las matemáticas es aburrida; la idea es cambiar hacia un modelo lúdico, donde los juegos intervengan para el aprendizaje y actitud hacia las matemáticas, en Singapur cuando inician las clases de matemáticas es la hora del juego y eso los ha colocado hoy como los mejores en el mundo.*

Marco referencial teórico

Es dentro de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, donde encontramos las explicaciones sobre diferentes conceptos que se manejan en esta propuesta, tales como, situación didáctica y secuencia didáctica SD, institucionalización y contrato didáctico.

Según la definición de Brousseau, citada por Gálvez (1994)

> *Una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo eventualmente, instrumentos y objetos, y un sistema educativo (el profesor) con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución... el trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes.*

Toda situación didáctica es regida por un determinado tipo de contrato didáctico, o sea un conjunto de obligaciones implícitas y explícitas relativas a un saber interpuesto entre el profesor y los alumnos.

La Situación Didáctica, por otra parte, comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento. El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuestas a las exigencias del medio.

La teoría de las situaciones didácticas es muy amplia; está conformada por muchos aspectos y aquí no se pretende explicar cada uno de ellos, sino de manera general dar un panorama amplio de ella y tomar elementos necesarios para esta propuesta. En ese sentido la conceptualización de secuencia didáctica (SD) es necesaria. A continuación se citan algunas definiciones

De acuerdo con Zabala Vidiella, citado por Rodríguez (2007), la SD implicará entonces

> *Una sucesión premeditada (planificada) de actividades (es decir un orden), las que serán desarrolladas en un determinado período de tiempo (con un ritmo). El orden y el ritmo constituyen los parámetros de las SD; además algunas actividades pueden ser propuestas por fuera de la misma (realizadas en un contexto espacio- temporal distinto al aula).*

Las secuencias didácticas constituyen el corazón de la didáctica, el aquí y el ahora, el momento de la verdad en que se pone en juego el éxito o el fracaso del proceso de enseñanza- aprendizaje; implican la planificación de corto plazo, que durante su ejecución confluye con la de largo plazo.

Las actividades de las SD deberían tener en cuenta los siguientes aspectos esenciales o propósitos generales:

- Indagar acerca del conocimiento previo de los alumnos y comprobar que su nivel sea adecuado al desarrollo de los nuevos conocimientos.
- Asegurarse que los contenidos sean significativos y funcionales y que representen un reto o desafío aceptable.
- Que promuevan la actividad mental y la construcción de nuevas relaciones conceptuales.
- Que estimulen la autoestima y el autoconcepto.
- De ser posible, que posibiliten la autonomía y la metacognición.

La definición de SD tomada del diccionario de términos clave de ELE dice:

> *Se entiende por secuencia didáctica una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí. Esta serie de actividades, que pretende enseñar un conjunto determinado de contenidos, puede constituir una tarea, una lección completa o una parte de ésta. Las actividades no siempre aparecen en una lección vinculadas con otras; en estos casos se consideran como actividades aisladas, es decir, que no forman parte de una secuencia didáctica.*

En la teoría de las situaciones didácticas confluyen distintas teorías que se entrelazan de una manera evolutiva, es decir cada una de ellas sirve de base para generar una nueva manera de entender los procesos mediante el cual el alumno adquiere su conocimiento, primeramente la teoría de la epistemología genética, tal como la define su fundador, Jean Piaget (1896-1980), citado por Cusicanqui (2006).

Es una teoría del desarrollo del conocimiento, que trata de descubrir las raíces de los distintos tipos de conocimiento desde sus formas más elementales y seguir su desarrollo en los niveles ulteriores, inclusive hasta el pensamiento científico, Piaget parte de la convicción de que el conocimiento es una construcción continua, y de que la inteligencia no es más que una adaptación del organismo al medio, a la vez que el resultado de un equilibrio entre las acciones del organismo sobre el medio y de éste sobre el organismo. De aquí que el núcleo central de la epistemología genética consista en una explicación del desarrollo de la inteligencia como un proceso según fases o génesis, cada una de las cuales representa un estadio del equilibrio que se produce entre el organismo y el medio, a través de determinados mecanismos de interrelación, como son la asimilación y la acomodación, a la vez que un momento o fase de adaptación del organismo al medio. Estas diversas fases de equilibrio se caracterizan como estructuras, porque organizan o estructuran la conducta del organismo en el trayecto de su adaptación.

La teoría de las situaciones didácticas considera que un individuo aprende en la medida que construya o resignifica un concepto incorporándolo a su estructura cognitiva. Es decir, acepta que un individuo se adapta, mediante los procesos de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Es precisamente el papel del maestro, provocar con toda intención estos desajustes, que de manera gradual y bien planeados ayudan al alumno a aprender.

En la presente propuesta didáctica, estos desequilibrios vienen dados primeramente por un objetivo a conseguir. Sin embargo, conforme se vaya logrando, se irá aumentando el nivel de complejidad de muchas de las actividades, así como el reconocimiento de los saberes (estrategias y conocimientos) adquiridos con las actividades propuestas a través de las secuencias didácticas.

Otro aspecto que la matemática recreativa toma de Piaget es el reconocimiento de los estadios por los que los seres humanos pasamos en nuestra madurez evolutiva, y que sin embargo nunca nos abandonan, cada una de las actividades lúdicas nos invitan a pasar de una u otra manera por dichas etapas, permitiendo que cada uno de los alumnos avance a su propio ritmo a través de ellas.

Dichas etapas, a manera de breve explicación son:

- Estadio sensoriomotor.

En esta etapa se manipulan los objetos para reconocer sus formas y sus propiedades, el movimiento y los sentidos son la principal fuente para obtener información de los objetos y actividades.

- Estadio preoperatorio.

Es posible pasar de la manipulación, movimiento y reconocimiento sensorial a la simbolización de los objetos y conceptos. Esta nueva forma de pensamiento, llamada pensamiento simbólico conceptual, consta de dos componentes: simbolismo no verbal y simbolismo verbal.

- Estadio de operaciones concretas.

Se hace cada vez más lógico, se adquiere capacidad de efectuar actividades mentales basadas en las reglas de la lógica. Sin embargo, en este periodo se utilizan la lógica y realizan operaciones con la ayuda de apoyos concretos. Aquí procesan la información de manera más ordenada, se analizan percepciones, se advierten pequeñas, pero a menudo importantes diferencias entre los elementos de un objeto o acontecimiento, el sujeto estudia los componentes específicos de una situación y puede establecer una diferencia entre la información relevante y la irrelevante en la solución de problemas.

- Estadio de operaciones formales.

Se refiere al pensamiento altamente lógico sobre conceptos abstractos e hipotéticos, así como también concretos. Es el estadio final del desarrollo cognitivo según la teoría de Piaget. Él afirmó que el desarrollo cualitativo alcanza su punto más alto en este estadio. Una vez dominadas las operaciones formales sólo se produce un desarrollo cuantitativo. En otras palabras, una vez que se han aprendido operaciones precisas para resolver problemas abstractos e hipotéticos el aprendizaje posterior se refiere únicamente a cómo aplicar estas operaciones a nuevos problemas.

Claramente se puede hacer una analogía entre la propuesta de matemática lúdica y las etapas piagetianas. La mayoría de las actividades que se proponen se ubican primeramente en la etapa sensoriomotora. En ésta se permite al alumno manipular fichas, tarjetas, y en general material del juego. En otras se parte de información simbólica o verbal y el alumno comienza su interacción con ésta; es decir, se comienza en la etapa preoperatoria. Ambas etapas corresponden a una matemática informal, pero como ya se dijo, el juego tiene por objeto formalizar los saberes trabajados. La formalización corresponde a las últimas dos etapas de la clasificación de Piaget.

Aunque Piaget sugiere edades para ir alcanzando las características de cada uno de estos estadios, lo cual teóricamente no se contrapone en esta propuesta, no se intenta decir que un alumno del nivel medio básico, ubicado entre los 11 y 16 años no haya adquirido ya la madurez de las operaciones formales; más bien se propone que un recorrido por los estadios anteriores le hará tener un mayor significado del propósito y por supuesto de la estrategia de solución, y por lo tanto la construcción de su conocimiento, siendo una tarea del maestro facilitarle el recorrido por los cuatro estadios.

Otra corriente utilizada en esta propuesta es el constructivismo, preferentemente social, para ello primeramente se define este enfoque según Sanhueza (nf).

Básicamente puede decirse que el constructivismo es el modelo que mantiene que una persona, tanto en los aspectos cognitivos, sociales y afectivos del comportamiento, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción de estos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, esta construcción se realiza con los esquemas que la persona ya posee (conocimientos previos), o sea con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

Larios (2000) utiliza el concepto de constructivismo, según Kilpatrick, quien basa sus resultados en dos premisas principales:

- *El conocimiento es activamente construido por el sujeto cognoscente, no pasivamente recibido del entorno.*
- *Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencial de uno; no se descubre un independiente y preexistente mundo fuera de la mente del conocedor."*

Para Lev Vygotsky, máximo representante del constructivismo social, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico. Es la interacción entre individuos que permite confrontar los procesos para validarlos o rechazarlos, de esta manera el aprendizaje depende del grupo, no del maestro. (García 2007).

Son estos referentes teóricos los que sustentan la presente propuesta didáctica de manera interconexa, pero claramente separados.

Marco referencial histórico

Tal parece que la propuesta para trabajar en clase de matemáticas con juegos no lograría remediar nada a un problema tan grande; sin embargo los estudios teóricos de Chevallard (1997) apuntan en otra dirección como refiere en la siguiente cita:

No es posible, ni para el matemático profesional ni para los alumnos de una clase de secundaria, actuar matemáticamente con verdadera eficacia sin entender lo que se está haciendo. Pero tampoco se puede entender en profundidad una organización matemática determinada si no se lleva a cabo simultáneamente una práctica matemática eficaz. No hay praxis sin logos, pero tampoco hay logos sin praxis. Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de praxeología: para

> *responder a un determinado tipo de cuestiones matemáticas hay que elaborar una praxeología matemática constituida por un tipo de problemas determinado, una o varias técnicas, su tecnología y la teoría correspondiente.*

Esta praxeología ha estado siempre presente en la evolución e innovación de la matemática como tal. Para poder entender más claramente la fuerza de la postura de construir matemáticas desde la praxis y más específicamente sobre una praxis lúdica, en los apartados siguientes se mostrará el peso que ésta ha tenido y tiene al interior de la educación matemática y de la matemática misma.

En el primer apartado se hace un recorrido histórico de la matemática lúdica, mostrando varios ejemplos de cómo muchos de los matemáticos más sobresalientes tomaban la matemática recreativa con gran interés y seriedad, incluso les permitieron ahondar en sus estudios e incluso encontrar nuevos conocimientos.

En el segundo apartado se hace un bosquejo de cómo las diferentes ramas de estudio que conforman la matemática no están exentas de participar o proponer juegos matemáticos de mucho interés.

El tercer apartado es más específico en lo que a educación matemática se refiere. Se ejemplifica la forma en la que algunos investigadores han utilizado el componente lúdico de la matemática para formular sus teorías.

Finalmente se muestran varios ejemplos sobre la importancia que a la matemática recreativa se le ha dado a nivel internacional a través de congresos, ferias, cursos y un sinfín de actividades que pretenden despertar el gusto por la matemática con alumnos y población general. Además, en este apartado se mencionan algunos de los escasos pero valiosos intentos que en nuestro país se han hecho en ese sentido.

I. Un poco de historia

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado *problema bovino de Arquímedes*, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. *Euclides* fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada *Pseudaria*

(Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media *Leonardo de Pisa* (ca.1170-ca.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como *Stupor Mundí*.

En la Edad Moderna *Gerónimo Cardano*, el mejor matemático de su tiempo, escribió el *Líber de ludo aleae*, un libro sobre juegos de azar con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré a Pascal. De la correspondencia entre éste y Fermat a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

A Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, quien en 1612 publicó su obra de vanguardia en este campo *Problémes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, se debe también la publicación en francés de *Diophanti*, traducción de un texto griego sobre teoría de números que ejerció un gran influjo sobre la historia de la matemática, principalmente a través de Fermat. El libro de recreaciones de *Bachet* estaba basado sobre todo en propiedades aritméticas y contiene los problemas más clásicos sobre juegos de cartas, relojes, determinación del número de pesas para pesar 1, 2, 3,..., 40 kilos, problemas de cruces,...

En 1624 un jesuita francés, *Jean Leurechon*, escribió bajo el seudónimo de *van Etten*, una obra, *Recréations Mathématiques*, fuertemente basada en la de Bachet, pero que tuvo mucho más éxito que la de éste, alcanzando las 30 ediciones ya en 1700. La obra de *van Etten* fue modelo para sus continuadores *Claude Mydorge* (1630), en Francia, y *Daniel Schwenter*, en Alemania. Este último, profesor de hebreo, lenguas orientales y matemáticas, añadió gran cantidad de material copilado por él mismo. Su obra póstuma apareció en 1636 con el título *Deliciae PhysicoMathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden*, y la reedición de ella en 1651-1653 fue por algún tiempo la obra más completa en su género.

En Inglaterra *William Leybourn* publica en 1694 un libro a medio camino entre el texto y la recreación, con la intención de “apartar a la juventud de los vicios propios a los que es inclinada". Su título fue *Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds...*

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783) escuchó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona (curva del descenso más rápido) como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli, Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que *Hamilton* (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones, que consistió precisamente en un juego matemático, comercializado con el nombre de *Viaje por el Mundo*. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular (las ciudades de ese mundo), un viaje que no repitiese visitas a ciudades, circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan que el *Princeps Mathematicorum (príncipe de las matemáticas)* era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Al final del siglo XIX aparecen los cuatro volúmenes de *Edouard Lucas*; especialista en teoría de números, titulados *Recreaciones matemáticas*, que pasa a ser la obra clásica durante algún tiempo. Contemporáneo de Lucas es Lewis

Carroll, el autor de *Alicia en el País de las Maravillas*, gran aficionado a los puzles lógicos y juegos matemáticos, quien publicó, entre otras cosas, *Problemas de almohada y Un cuento de enredos*.

Hilbert (1862-1943), uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo, es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado Teoría de *Juegos y Conducta Económica*. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de *minimax*, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Guzmán (1984) comenta que según Martin Gardner, Albert Einstein (1879-1955) tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

Una rama matemática, Teoría de juegos, nació en 1944 para el estudio de un tipo de juegos en particular. Los juegos estudiados por esta teoría están bien definidos por objetos matemáticos. Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (o estrategias) disponible para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias. Un poco de historia al respecto:

En 1950, aparecieron las primeras discusiones del dilema del prisionero, y se emprendió un experimento acerca de este juego en la corporación RAND. Alrededor de esta misma época, John Nash desarrolló una definición de una estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores donde el óptimo no se había definido previamente, conocido como equilibrio de Nash. Este equilibrio es suficientemente general, permitiendo el análisis de juegos no cooperativos además de los juegos cooperativos. También Nash es coautor de un juego muy interesante, desde el punto de vista matemática, llamado Hex.

En 1965, Reinhard Selten introdujo su concepto de solución de los equilibrios perfectos del subjuego, que más adelante refinó el equilibrio de Nash. En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos. Él, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganaron el Premio Nobel de Economía en 1994.

En la década de 1970 la teoría de juegos se aplicó extensamente a la biología, en gran parte como resultado del trabajo de John Maynard Smith y su concepto estrategia estable evolutiva. Además, los conceptos del equilibrio correlacionado, la perfección del temblor de la mano, y del conocimiento común fueron introducidos y analizados.

En el 2007, Roger Myerson, junto con Leonid Hurwics y Eric Maskin, recibieron el premio Nobel de Economía por "sentar las bases de la teoría de diseño de mecanismos."

Estos son numerosos hitos de la historia que tienen relación directa con la matemática recreativa, señalando que durante su análisis, los matemáticos no diferenciaban entre una y otra (matemática y matemática recreativa).

II. Matemática recreativa al interior de la matemática misma

No existe rama de las matemáticas donde no pueda encontrarse un espacio para la matemática recreativa ya que ésta se presenta en todas ellas, incluso de manera involuntaria. La siguiente lista ilustra, a manera de ejemplo, cómo las distintas ramas de la matemática se ven involucradas en la lúdica de las matemáticas.

La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números...

La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración, en juegos emparentados con el *Nim.*

La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante...

El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas**...**

La teoría de grupos*,* en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se ***come*** al saltar al modo de las damas.

La teoría de grafos es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Königsberg, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos del llamado *Locura Instantánea...*

La teoría de matrices está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos.

Diversas formas de **topología** aparecen tanto en juegos de sabor antiguo —el de las tres granjas y tres pozos, por ejemplo— como en juegos más modernos entre los que cabe destacar los relacionados con la banda de Möbius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambres y anillas... *La teoría del punto fijo* es básica en algunos acertijos profundos y sorprendentes como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar...

La geometría aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas, poliominós planos y espaciales**...**

La probabilidad es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació.

La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

III. Matemática recreativa en la didáctica matemática

No sólo la matemática pura y aplicada se ha visto beneficiada con los juegos, la misma didáctica matemática ha visto como partiendo del juego se ha logrado avanzar en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: (Gómez 1993)

Una de las investigaciones de Jean Piaget usa como recurso la torre de Hanói. Tal estudio forma parte de un conjunto de experiencias destinadas a determinar de qué manera niños y adolescentes toman conciencia de las acciones que realizan ante distintas situaciones o problemas (Gómez, 1993 p. 23).

Piaget, de acuerdo con su método corriente, aplicó esta prueba a niños y adolescentes. Distinguió en este caso tres estadios de los cuales el último es el de los adolescentes o preadolescentes. Son éstos los que consiguen éxitos más amplios y completos y también los que usan las palabras claves que permiten reconocer las estructuras intelectuales necesarias para entender el problema.

También el mejor referente actual de la didáctica matemática, Guy Brousseau, ha utilizado juegos para formular su teoría de las situaciones didácticas según refiere Ramírez (2009).

*Un ejemplo característico de estos juegos es **carrera a 20**, diseñado por Guy Brousseau.*

> *Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número x menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor: x + m (con m < 3). Gana el jugador que dice 20 por primera vez.*

Nota: Este juego guarda una estrecha relación con un juego clásico llamado Nim. Juego antiguo de origen chino.

IV. Matemática recreativa alrededor del mundo.

Además existen varios proyectos que han comenzado a utilizar esta idea alrededor del mundo:

Alsina (2004) cita varios eventos dentro y fuera de España, donde el centro de todas las actividades es el acercamiento a la matemática por medio de actividades lúdicas. A continuación algunas de ellas:

- En 1994 se llevaron a cabo la I Xornada de matemática recreativa organizada por el Centro de Formación Continua de Profesorado (CEFOCOP), ubicado en Galicia, España. A este evento asistieron unas 400 personas que participaron en talleres, conferencias, mesas redondas y exposiciones.

- En el Matemagnum de Barcelona (1999) se vieron brillantes propuestas sobre cómo se puede hacer magia y cálculo mental (Barba y Segarra), o aprovechar unas colonias para practicar las matemáticas.

- En el Congreso de Educación Matemática (CEM) 2000 Mataró, en España, se presentaron experiencias de cuentos y matemáticas, exposiciones de materiales atractivos, trabajos de arte y geometría, desde grados de preescolar hasta sexto de primaria, destacando el trabajo de Carme Alemany con enormes cajas en las que, desde su interior, los niños y las niñas podían ver el efecto fotográfico.

- En la Feria Matemática de Igualada, en Barcelona España muchos niños enseñaban a otros sus talleres de figuras, de tiendas, de euros, de laberintos.

- En el 9° Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME), en Japón, se presentaron mesas llenas de niños y niñas haciendo juegos de papiroflexia *(origami),* utilizando materiales interactivos, aprendiendo números y al mismo tiempo la escritura de los signos japoneses, lo que la Asociación AMI japonesa denomina clases divertidas y que se basan en la idea de que, pedagógicamente, el aspecto emocional y actitudinal de las clases es el primer obstáculo que debe resolverse.

Los medios de comunicación digitales nos han permitido conocer y compartir esfuerzos por una mejor cultura matemática escolar y no escolar, y podemos enterarnos de varios eventos en diferentes estados del país, a continuación se citan algunos de estos eventos:

- En Atlixco, Puebla, la Feria de matemáticas es un evento de divulgación de la ciencia que lleva 16 ediciones, enmarcado en los esfuerzos que promueven y difunden el conocimiento matemático para los niveles de educación básica, y que sirve de apoyo al trabajo docente para motivar una mejor enseñanza aprendizaje de esta ciencia.

- El *Noticiero matemático*, Periódico digital de noticias acerca de las matemáticas, informa que en la Escuela primaria *Pensador Mexicano*, en la ciudad de Tijuana, BCN, Mx., se realizó la ***Feria de las Matemáticas*** con la participación de más de 350 alumnos. A través de una dinámica en el que las matemáticas fueron abordadas por medio de juegos y acertijos, lo que coadyuva en una mejor comprensión de los temas revisados.

- La Sección de Difusión y Divulgación del Instituto de Matemáticas (IM) tiene como uno de sus objetivos desarrollar una serie de proyectos de comunicación de la ciencia; el Festival Matemático es uno de ellos. En el año 2012 se presentó este evento en el jardín Hidalgo en la delegación de Coyoacán, D.F para mejorar la concepción que tiene la gente de las matemáticas y difundir ideas a un público amplio, al mismo tiempo que se promueve la imagen del IM fuera de la comunidad universitaria mediante el contacto directo con la población.

  El IM promueve en diferentes lugares de nuestro país este festival, en 2012 en el marco del XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizado en el estado de Querétaro, Mx. Se presentó este evento.

- Con el lema “Las matemáticas también son patrimonio de la Humanidad, por eso las presentamos en el centro histórico de Morelia”, el Centro de Ciencias

Matemáticas de la UNAM Campus Morelia realizo en noviembre de 2013 La Feria de Matemáticas de esta ciudad.

- En el municipio de Amealco, Qro., la Secundaria General “Moisés Sáenz Garza” cada año (desde hace más de 10 años), organiza una feria matemática, coordinada por quien sustenta esta tesis, donde cientos de alumnos, profesores y público en general se divierten y aprenden con esta propuesta lúdica; rompecabezas, sesiones de magia, concursos, talleres, son parte del evento. Esta feria se ha presentado, bajo invitación, en diferentes niveles educativos del municipio, del estado y del pais, con buena participación y excelentes comentarios.

Sirvan estos eventos para ejemplificar el interés por brindar una cultura matemática escolar y al público en general a través de ambientes lúdicos.

Capítulo 1.

El juego y el desarrollo de habilidades

El juego y el desarrollo de habilidades

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

Miguel de Guzmán 1998.

1.1 Un acercamiento a la definición de juego.

El juego es una actividad presente en todos los seres humanos, el que se manifiesta en todas las culturas alrededor del mundo es el mejor indicativo de la función primordial que debe cumplir a lo largo del ciclo vital de cada individuo; subrayando que el juego no es un rasgo predominante de la infancia, donde se le asocia comúnmente, sino un factor básico en el desarrollo a lo largo de toda la vida del hombre.

Popularmente se le identifica con recreación, satisfacción y ocio, como actividad contraria a la actividad laboral, que normalmente es evaluada positivamente por quien la realiza. Pero su trascendencia es mucho mayor, ya que a través del juego las culturas transmiten valores, normas de conducta, resuelven conflictos, educan a sus miembros jóvenes y desarrollan múltiples facetas de su personalidad.

Al ser una actividad muy amplia que abarca muchos procesos es difícil lograr una definición que se ajuste completamente, conviene analizar varias definiciones que sobre el juego proponen algunos autores:

José Huizinga en su libro Homo Ludens (1987), define el concepto de juego como una acción u ocupación libre, que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas, acción que tiene su fin en sí misma y va acompañada de un sentimiento de tensión y alegría y de la conciencia de ser de otro modo en la vida corriente.

Otro teórico, Roger Callois (1958) define y caracteriza el juego como aquella actividad libre (que el jugador ejecuta voluntariamente), separada (ya que siempre se hace en un espacio y un tiempo prefijados), incierta (ya que el jugador no conoce previamente el resultado de su desarrollo), improductiva (no crea riqueza ni bienes nuevos de ninguna clase) y reglamentada (es decir, sometida a unas normas que no son ordinarias, sino propias).

1.2 Características del juego

El juego provoca una satisfacción personal, pero además una gratificación grupal y esto es lo que permite conocer mejor a las personas a través de algo tan ***simple*** como un juego. En él no importan las diferencias políticas, clases sociales, religión y color, lo único que importa es el juego, ya que en éste somos todos iguales, debido a que es una relación horizontal. Definitivamente nos produce una mirada distinta del mundo.

El juego presenta unas cuantas características peculiares (Huizinga 1987)

- Es una actividad libre, es decir, una actividad que se ejercita por sí misma, no por el provecho que de ella se pueda derivar.
- Tiene una cierta función en el desarrollo del hombre; el cachorro humano, como el animal, juega y se prepara con ello para la vida. También el hombre adulto juega y al hacerlo experimenta un sentido de liberación, de evasión, de relajación.
- No está relacionado con la broma: el peor ***revientajuegos*** es el que no se toma en serio su juego.
- Produce placer a través de su contemplación y de su ejecución, como la obra de arte.
- Se ejercita separado de la vida ordinaria en el tiempo y en el espacio que previamente se ha fijado para su práctica. En general, después de un número finito de movimientos o acciones, tienen un final que se corresponde con la consecución o no del objetivo propuesto...
- Se acompaña de tensión y alegría: tensión por ganar, cuya liberación y catarsis causan gran placer y alegría por jugar.
- Carácter competitivo, aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes.
- Origina lazos especiales entre quienes lo practican.
- Crea un nuevo orden, una nueva vida llena de ritmo y armonía a través de sus reglas.
- Son inciertos ya que al empezar cualquier juego no se conocen ni su resultado ni la situación en un momento determinado de su desarrollo. Esta característica hace a éstos más atractivos pues libera la imaginación de los jugadores y les invita a hacer predicciones.

En resumen, el juego se caracteriza por ser una actividad humana lúdica, libre, reglada, limitada espacial y temporalmente, competitiva, improductiva y de resultado incierto.

1.3 Beneficios del juego.

El juego es importante no sólo en una función recreativa del ser humano, sino porque, además, desarrolla la capacidad intelectual, potencia otros valores humanos como son la afectividad, sociabilidad, motricidad entre otros. El conocimiento no puede adquirirse realmente si no es a partir de una vivencia integral en la que se comprometa toda la personalidad del que aprende, Montañés (2000).

Para facilitar el análisis de las diversas aportaciones del juego al desarrollo psicomotor, intelectual, imaginativo, afectivo social, se presenta una tabla, en la que si bien aparece cada aspecto por separado, es importante señalar que el juego nunca afecta a un sólo aspecto de la personalidad humana sino a todos en conjunto, y es esta interacción una de sus manifestaciones más enriquecedoras y que más potencia el desarrollo del hombre (Montañés, 2000).

Desarrollo cognitivo	Desarrollo social	Desarrollo emocional
Estimula: • La atención. • La memoria. • La imaginación. • La creatividad. • La discriminación de la fantasía y la realidad. • El pensamiento científico y matemático. **Desarrolla:** • El rendimiento. • La comunicación y el lenguaje. • El pensamiento abstracto.	**Mejora**: • Procesos de comunicación y cooperación con los demás. • Conocimiento del mundo del adulto. • Preparación para la vida laboral. • Estimulación del desarrollo moral. **Favorece** la comunicación, la unión y la confianza en sí mismos. **Potencia** el desarrollo de las conductas prosociales. **Disminuye** • Las conductas agresivas y pasivas. • La discriminación.	**Controla**: • La ansiedad. • La expresión simbólica de la agresividad. **Desarrolla** la subjetividad del niño. **Produce** satisfacción emocional. **Facilita** la resolución de conflictos.

1.4 El juego en la educación

Según la UNESCO, jugar es necesario para el correcto desarrollo infantil. Los diferentes estudiosos del juego apuntan a la incidencia del juego en diferentes ámbitos del desarrollo: motor, cognitivo, afectivo, social y de la personalidad. Estos estudios nos invitan a valorar el juego como algo más que un entretenimiento infantil o un recurso didáctico, atendiendo a su sentido y valor para el desarrollo personal y grupal de los niños, a su valor educativo (López 2005).

Los juegos deben considerarse como una actividad importante en el aula de clase, los juegos permiten orientar el interés del participante hacia las áreas que se involucren en la actividad lúdica. El docente hábil y con iniciativa propone juegos que se acoplen a los intereses, a las necesidades, a las expectativas, a la edad y al ritmo de aprendizaje. Los juegos complicados le restan interés a su realización.

La didáctica considera al juego como entretenimiento que propicia conocimiento. En este sentido el juego favorece y estimula cualidades morales (valores) de quienes lo practican tales como: el domino de sí mismo, la honradez, la seguridad, la atención se concentra en lo que hace, la reflexión, la búsqueda de alternativas para ganar, el respeto por las reglas y por el adversario, la creatividad, la curiosidad, la imaginación, la iniciativa, el sentido común y la solidaridad con sus compañeros, con su grupo, pero sobre todo el juego limpio, es decir con todas las cartas sobre la mesa, La competitividad se introduce en la búsqueda de aprendizaje no para estimular la adversidad ni para ridiculizar al contrincante, sino como estímulo para el aprendizaje significativo.

Esto no sólo nos permite ver la conveniencia de usar el juego como estrategia didáctica con los niños, sino también en las aulas de educación superior. Como el juego parte de espacios no formales, recoge las formas de expresión propias de las poblaciones, y al introducir el juego en el aula de clase estamos intentando establecer un diálogo entre las lógicas populares y las lógicas escolares. Como docentes podemos aprovechar esta relación y conseguir mejores resultados de aprendizaje con los estudiantes (Arminta, Delgado, 2006).

Para aprovechar las posibilidades que ofrecen algunos juegos, el profesor debe cuidar de no convertirlos simplemente en situaciones recreativas para pasar el rato y mucho menos para perder el tiempo. Cuando los estudiantes juegan se divierten, platican, discuten y hacen ruido, pero no hay que perder de vista el propósito que se persigue al plantear determinado juego, y así lograr hacer matemáticas de una manera agradable. Algunos padres de familia y profesores se preocupan de que los estudiantes jueguen durante la clase debido a que desconocen las ganancias que se obtienen. Por ejemplo, el juego implica competencia, y en el afán de ganar, los estudiantes tienden a ser autónomos, construyen sus propias estrategias y analizan cuidadosamente sus resultados.

En la educación se pueden aprovechar diversos juegos para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Pero hay que estar atentos, pues si bien los juegos son situaciones que resultan divertidas e interesantes para los alumnos, no todos los juegos favorecen la construcción de conocimientos matemáticos.

Estas son algunas recomendaciones sobre juegos educativos (Corbalán 1994):

- Un buen juego debe tener pocas reglas y sencillas de entender.
- Un buen juego dura poco tiempo.
- Un buen juego debe tener una presentación motivadora, que apetezca jugar con ellos.
- Los contenidos abordados deben ser adecuados para los alumnos.

Algunas sugerencias antes de realizar los juegos

- No juegue por pasar el tiempo, es decir, cubrir el horario.
- Revisar y analizar las áreas del nuevo diseño curricular y ajuste el contenido a la técnica del juego.
- Relacionar los ejes transversales y los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a los objetivos del juego.
- Adaptar el juego a la edad, interés, necesidad y expectativas de los alumnos; no a los suyos.
- Cambiar la actividad cuando se observe que el grupo se cansa.
- Todo material que se use debe ser atractivo, funcional y durable. Esto incentiva la participación del jugador.
- Establecer las reglas del juego. Ajustarlas con los estudiantes para fomentar la comunicación, la participación, la conducta exigida, los movimientos, el tiempo de juego, entre otros.
- Evaluar justa y objetivamente la satisfacción personal de cada uno y la del grupo, el qué y para qué se aprende con ese juego.
- Preguntar sobre la forma de cómo hacer un análisis crítico de la sesión realizada.
- Practicar el juego antes de llevarlo a los jugadores, si los alumnos descubren detalles que no se tomaron en cuenta, se pierde la autoridad y respeto.
- Preparar todo antes de realizar el juego, cualquier detalle corta la motivación para ejecutar el juego.

Luis Ferrero aporta algunas sugerencias didácticas para llevarlas a cabo durante la práctica de los juegos:

- Graduar la dificultad del juego en función de los alumnos a los que va dirigido.

- Sobre un mismo material de juego se pueden idear juegos distintos modificando adecuadamente las normas.
- Cuando dominen un juego hay que animarles a que lo adapten a su gusto variando alguna norma.
- Cuando la estrategia ganadora resulte difícil, es aconsejable que ensayen casos más simples.

1.5 Clasificaciones del juego

Para clasificar los juegos algunos autores toman en cuenta el material utilizado, otros la cantidad de jugadores, también se organizan por el área de la matemática que privilegian o el lugar que ocupan en el proceso enseñanza-aprendizaje. Sirvan de referencia 3 ejemplos:

Para Piaget citado por Torres (2002) las actividades lúdicas tienen las categorías siguientes: Juegos de ejercicio, Juegos simbólicos, Juegos de reglas, Juegos de construcción y los asocia con la etapas de desarrollo psicogenético:

Podemos considerar el juego de reglas simples como característico de la Etapa de las Operaciones concretas (7-12 años). En esta etapa de desarrollo las operaciones concretas del pensamiento, ya esbozadas en el nivel precedente bajo la forma de simples manipulaciones, se organizan y se coordinan, pero sólo actúan sobre objetos concretos.

En la etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años) el adolescente se interesa por los juegos de reglas complejas, de estrategias elaboradas, de montajes técnicos o mecánicos precisos y minuciosos que llevan planos, cálculos, reproducciones a escala, maquetas elaboradas.

Corbalán (1994) propone una clasificación de tres tipos de juegos: **Juegos de conocimiento, de estrategia y de azar**.

Se denominan **juegos de conocimiento** aquellos que utilizan en su desarrollo uno o varios de los tópicos habituales existentes en la currícula de Matemáticas. Su objetivo es alcanzar, afianzar o repasar determinados conceptos o procedimientos matemáticos de un modo más atractivo.

Por **juegos de estrategia** se entienden aquellos en los que para conseguir su objetivo el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático (Gallagher, 1980). El modo en que se procede cuando se quiere encontrar una estrategia ganadora en un juego es similar al proceso de resolución de un problema: una primera etapa de comprensión, otra de exploración y planificación, una tercera de ejecución y una última de revisión (Fases de resolución de un problema de Polya, 1984). Tienen la gran ventaja de que, al requerir escasos o nulos conocimientos matemáticos previos, permiten centrar la atención en las habilidades que se quieren desarrollar. No todos los juegos tienen estrategia ganadora pero, descubrir esto, también es importante.

Los **juegos de azar** se caracterizan por tener un desarrollo completamente aleatorio. Depende del resultado que se consiga al lanzar un dado o extraer cartas de una baraja. Son juegos que resultan familiares a los alumnos y proporcionan oportunidades para buscar regularidades, realizar recuentos sistemáticos y asignar probabilidades.

También se clasifican por el momento en que se introducen durante el desarrollo de planeación de clase: preinstruccionales, coinstruccionales o postintruccionales.

Las actividades recreativas que en esta propuesta se desarrollan tienen la siguiente clasificación:

- Trucos de magia.
- Juegos individuales.
- Juegos colectivos.
- Juegos (software) de computadora.

No existe una razón específica para esta clasificación, por mero convencionalismo se propone de esta manera, agrupando las actividades seleccionadas en categorías que permitan un orden, partiendo de que una clasificación no supone ventajas sobre otras.

1.6 Paralelismo entre juego y matemáticas.

En realidad analizar un juego y buscar su solución es una actividad que se asemeja mucho a la manera en que trabajan los matemáticos. Es más, gran cantidad de personas piensan que la matemática es una disciplina que exige una tremenda seriedad y, sin embargo, la mayor parte de los matemáticos consideran que además de otras cosas, la matemática es un apasionante juego, con muchas ramificaciones y numerosas aplicaciones a otras disciplinas.

La actividad matemática ha tenido desde siempre una componente lúdica, la cual ha dado lugar a una buena parte de las creaciones más interesantes que en ella han surgido. La matemática y los juegos han entreverado sus caminos muy frecuentemente a lo largo de los siglos. Es frecuente en la historia de las matemáticas la aparición de una observación ingeniosa, hecha de forma lúdica, que ha conducido a nuevas formas de pensamiento. Se puede citar en este contexto a Fibonacci, Cardano, Fermat, Pascal, Leibniz, Euler, Daniel Bernoulli,... referidos en el marco referencial.

El matemático experto comienza su aproximación a cualquier cuestión de su campo con el mismo espíritu explorador con el que un niño comienza a investigar un juguete recién estrenado, abierto a la sorpresa, con profunda curiosidad ante el misterio que poco a poco espera iluminar, con el placentero esfuerzo del descubrimiento (OIE nf).

La matemática es un grande y sofisticado juego que, además, resulta ser al mismo tiempo una obra de arte intelectual, que proporciona una explicación en la exploración del universo y tiene grandes repercusiones prácticas. Posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como un juego bien escogido.

Autores como Guzmán (2007) van más allá de un simple parecido y plantean una analogía entre estas dos actividades.

- Un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática.
- Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros.
- Quien desea avanzar en el dominio del juego va adquiriendo unas pocas técnicas simples que, en circunstancias que aparecen repetidas a menudo, conducen al éxito. Estos son los hechos y lemas básicos de la teoría que se hacen fácilmente accesibles en una primera familiarización con los problemas sencillos del campo.
- Una exploración más profunda de un juego con una larga historia proporciona el conocimiento de los caminos peculiares de proceder de los que han sido los grandes maestros en el campo. Estas son las estrategias de un nivel más profundo y complejo que han requerido una intuición especial puesto que se encuentran a veces bien alejadas de los elementos iníciales del juego. Esto corresponde en matemáticas a la fase en la que el estudiante trata de asimilar y hacer profundamente suyos los grandes teoremas y métodos que han sido creados a través de la historia.

- Más tarde, en los juegos más sofisticados, donde la reserva de problemas nunca se agota, el jugador experto trata de resolver de forma original situaciones del juego que nunca antes han sido exploradas. Esto corresponde al enfrentamiento en matemáticas con los problemas abiertos de la teoría.
- Finalmente hay unos pocos que son capaces de crear nuevos juegos, ricos en ideas interesantes y en situaciones capaces de motivar estrategias y formas innovadoras de jugar. Esto es paralelo a la creación de nuevas teorías matemáticas, fértiles en ideas y problemas, posiblemente con aplicaciones para resolver otros problemas abiertos en matemáticas y para revelar niveles de la realidad más profundos que hasta ahora habían permanecido en la penumbra.

También Winter y Ziegler citados por Garin (1990, pág. 112) han establecido la correspondencia que hay entre estas dos actividades como se ve en el siguiente esquema:

Juego	**Matemática**
Reglas del juego	Reglas de construcción, lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones, lo ***dado***.
Jugadas	Construcciones, deducciones.
Figuras de juego	Medios, expresiones, términos.
Estrategias de juego	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos como fórmulas.
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos.

1.7 El juego y el desarrollo de habilidades matemáticas

El estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria persigue propósitos esencialmente formativos que consisten en:

- Desarrollar habilidades.
- Promover actitudes positivas.
- Adquirir conocimientos matemáticos.

Estos propósitos forman un todo, es decir, que el avance o retroceso de uno de ellos repercute de alguna manera en otro.

La propuesta de utilizar los juegos como herramienta didáctica consiste en que se incorpore el juego como un factor motivacional importante, enmarcado en una situación integrada con la realidad, con otros aspectos de la materia de estudio y de la vida e interés del alumno, de tal manera que permita:

Adquirir conocimientos propios de la materia, primero de manera informal y con la guía de las secuencias didácticas propuestas se llegue a un proceso que formalice, pero en todo momento significativo para los alumnos, para que de esta manera vean a la matemática útil para la resolución de situaciones problema.

Desarrollar habilidades de pensamiento lógico, sistemático y formal, propio de la matemática pero utilizado en todas las ramas del quehacer humano. Deducir, inferir, generalizar, comparar, conjeturar, proponer, cuestionar, elaborar y contrastar hipótesis, comunicar, validar...

Fomentar valores sociales al interactuar con respeto, cooperación, responsabilidad, creatividad… con un grupo de compañeros o incluso consigo mismo en algunos juegos donde se compite con uno mismo.

De estos tres propósitos perseguidos en la educación, en este trabajo se abunda el desarrollo de habilidades y existen dos razones para justificar la extensión del análisis:

1. No hay mucha resistencia para utilizar juegos cuando estos tienen relación con contenidos matemáticos; de hecho con juegos o sin ellos, los profesores de matemáticas es a lo que dedican más tiempo y recursos durante la clase. Sin embargo, hay poco o nulo esfuerzo por desarrollar las habilidades matemáticas de manera intencionada, hay una tendencia a suponer que estas habilidades se desarrollan de manera automática durante el proceso, pero esta suposición queda en ***caja negra*** y no se planifica de manera sistemática, por lo que no hay evidencia de los resultados que permitan evaluar su adquisición.
   Por otro lado, la parte que se refiere a fomentar valores es cierta, aunque estos valores son más de la convivencia social, más propio en un sentido universal que de la matemática como tal.
2. Algunos de los juegos que aquí se proponen buscan únicamente este desarrollo de habilidades, propias y necesarias de la matemática, no tienen componente de conocimientos aritméticos, algebraicos, geométricos o de alguna rama de la ciencia en cuestión, es por ello que algunos profesores le restan importancia a estos juegos, ya que no ***ven*** la finalidad de su uso, al no contar con números y fórmulas son desechados sin analizar las ventajas que ofrecen para desarrollar las habilidades matemáticas.

Como se señala en el plan de estudios de 1994.

> *Con el estudio de las matemáticas en la educación secundaria se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento, para que puedan aprender permanentemente y con*

independencia, así como resolver problemas matemáticos de diversa índole.

Es frecuente que el término habilidad se confunda con los de capacidad y destreza. Para nuestros fines, hablamos de capacidades cuando nos referimos a un conjunto de disposiciones de tipo genético que, una vez desarrolladas por medio de la experiencia que produce el contacto con un entorno culturalmente organizado, darán lugar a habilidades individuales (Monereo 1998) citado en el libro para el maestro SEP (1994).

Las habilidades son las posibles variaciones individuales en el marco de las capacidades, que pueden expresarse en conductas en cualquier momento porque han sido desarrolladas por medio de su uso, y que además pueden utilizarse o ponerse en juego, tanto consciente como inconscientemente, de forma automática.

Por destreza nos referiremos a la agilidad que pueden tener los estudiantes en la aplicación de ciertas técnicas manuales.

En el Libro del maestro que edita la SEP (1994), libro que se distribuye a los docentes de matemáticas a nivel secundaria en nuestro país, se hace el siguiente listado con fines de organización y no para señalar una jerarquía.

- La habilidad de **calcular**, que consiste en establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados.
- La habilidad de **inferir**, que se refiere a la posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema.
- La habilidad de **comunicar**, que implica utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa.
- La habilidad de **medir**, que se refiere a establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masa, etcétera.
- La habilidad de **imaginar**, que implica el trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales.
- La habilidad de **estimar**, que se refiere a encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas.
- La habilidad de **generalizar**, que implica el descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados.

- La habilidad para **deducir**, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos.

Entendemos que los juegos matemáticos pueden permitir desarrollar habilidades de resolución de problemas, siempre y cuando sean trabajados con un objetivo claro y dentro de un ambiente de resolución de problemas, en donde se estimule el pensar matemáticamente para generar situaciones problemas que pertenezcan al dominio de objetivos matemáticos más generales (Abrantes 1996) citado por Edo, Baeza y otros (2008).

Capítulo 2.

La literatura de matemática recreativa y su influencia en los sistemas escolares.

La literatura de matemática recreativa y su influencia en los sistemas escolares.

Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente.

Leibniz 1715.

En este capítulo se hace un recorrido por la literatura que sobre la matemática recreativa se ha escrito, por los principales autores y revistas especializadas, para terminar en la importancia que ésta tiene, tal que, incluso varias las universidades y departamentos de educación la han incorporado como materia de estudio dentro de sus planes y programas.

2.1 Autores que recrean la matemática

Al hablar de matemática recreativa, por supuesto, tenemos que remitirnos a Yakov Perelman, quien fue un divulgador de la física, las matemáticas y la astronomía, uno de los fundadores del género de la literatura de ciencia popular. Una de sus tareas fue la elaboración de nuevos planes de estudio de física, matemáticas y astronomía, mientras que enseñaba estas materias en diversas instituciones educativas.

Algunos de los títulos de sus libros nos hablan de su visión de las ciencias y su relación con lo recreativo:

- Matemáticas recreativas
- Aritmética recreativa
- Álgebra recreativa
- Geometría recreativa
- Astronomía recreativa
- Física recreativa I
- Física recreativa II
- Problemas y experimentos recreativos
- Mecánica para todos
- ¿Sabe Ud. física?

Todos ellos basados en la idea de aprender mientras se juega o jugar mientras se aprende, tal como podemos ver en una cita del autor relacionada a la física, pero fácilmente adaptable a la matemática (Perelman 1936).

> *El objetivo fundamental de la “Física Recreativa” es el de estimular la fantasía científica, el de enseñar al lector a pensar en la esencia de la ciencia física y el de crear en su memoria numerosas asociaciones de conocimientos físicos relacionados con los fenómenos más diversos de la vida cotidiana y con todo aquello con que mantiene asiduo contacto.*

Otro referente necesario al hablar de este aspecto lúdico de la matemática es Martin Gardner. Saltó a la fama gracias a su columna mensual *Juegos matemáticos*, publicada en la revista de divulgación científica *Científica American* entre diciembre de 1956 y mayo de 1986. A lo largo de esos treinta años trató los temas más importantes y paradojas de las matemáticas modernas, como los algoritmos genéticos de John Holland o el juego de la vida de John Conway, con lo que se ganó un lugar en el mundo de la matemática merced a la evidente calidad divulgativa de sus escritos. Su primer artículo llevaba el título de *Flexágonos* y trataba en concreto sobre los hexaflexágonos.

Algunos de los títulos de sus artículos y libros son:

- Nuevos pasatiempos matemáticos.
- El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos.
- Comunicación extraterrestre y otros pasatiempos matemáticos.
- Carnaval matemático.
- Festival mágico-matemático.
- Circo matemático
- Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas.
- Los mágicos números del Dr. Matrix.
- Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas.
- Miscelánea matemática (Es un compendio de varios artículos ya publicados en Carnaval matemático, Festival mágico-matemático y Circo matemático.)
- Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas.
- Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas.
- Las últimas recreaciones I y II…

La lista de sus publicaciones continua, pero lo que salta a la vista es que, desde el título nos hace una invitación para entrar en una visión divertida de la matemática. Ese gusto por los rompecabezas matemáticos nutre buena parte de sus libros, en los que hace gala de un estilo ameno e irónico, lleno de alusiones literarias y artísticas.

> *Existe una fuerte sensación de placer, difícil de describir, cuando consideras detalladamente una comprobación elegante, e incluso un placer mayor al descubrir una comprobación que no se conocía.*
>
> *Martín Gardner*

Algunos autores más de esta rama de la matemática son:

- Édouard Lucas, matemático francés inventor en 1883 de las Torres de Hanói y que publicó entre 1882 y 1894 su serie *Récréations mathématiques*.
- W. W. Rouse Ball, autor del *Mathematical Recreations and Essays* (en español sería *Juegos matemáticos recreativos y ensayos*) publicado por primera vez en 1892 y cuya última edición es de H. S. M. Coxeter.
- Sam Loyd, norteamericano creador de numerosos rompecabezas que publicó entre 1891 y 1911, reunidos entre otros libros en *Los acertijos de Sam Loyd* y *Nuevos acertijos de Sam Loyd*.
- Henry E. Dudeney, inglés autor de numerosos rompecabezas y colaborador durante un tiempo de Sam Loyd.

Columnistas y colaboradores de la revista *Scientific American*

- Solomon W. Golomb, colaborador de la columna *Mathematical Games*. En 1953 inventó el término pentominó y en 1957 apareció un artículo sobre los mismos.
- Douglas Hofstadter, escritor entre 1981 y 1983 de la columna *Metamagical Themas*. (*Temas metamágicos*), anagrama de *Mathematical Games*.
- Alexander Keewatin Dewdney, autor entre 1984 y 1990 de la columna *Computer Recreations* (*Juegos de computador*).
- Ian Stewart, autor de la columna *Mathematical Recreations* desde 1990 hasta 2001 y de numerosos libros.

Otros

- John Horton Conway, autor en 1970 del juego de la vida.
- Clifford A. Pickover, autor de numerosos libros de matemáticas recreativas.
- Raymond Smullyan, autor norteamericano de numerosos libros de problemas lógicos.
- Hugo Steinhaus
- Malba Tahan, seudónimo de Julio César de Mello e Souza, autor de *El hombre que calculaba*.

Autores en español

- Miguel de Guzmán, matemático español autor entre otros de *Aventuras matemáticas*.
- Adrián Paenza, matemático argentino autor de *Matemática... ¿Estás ahí?*.
- Claudi Alsina

También podemos encontrar actualmente revistas especializadas en la matemática recreativa o bien espacios en ellas destinados a este tema.

2.2 Publicaciones que recrean la matemática

Carrollia. Es el órgano de comunicación del Carrollsig de Mensa España que se dedica a las Matemáticas recreativas, la Lingüística, la Literatura Experimental, lo Lógica, la Ciencia y todo aquello que hubiera gustado a Lewis Carroll.

Suma. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es una publicación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

En los artículos encontramos cualquier tema relacionado con la didáctica de las matemáticas tanto a nivel divulgativo como formativo. Publica temas sobre actividades en el aula, historia de las matemáticas, juegos, desarrollo analítico...

UNO. Es una revista de didáctica de las Matemáticas de la editorial GRAO. Todos los profesionales de la Educación, ya sea individual o colectivamente, tienen a su disposición la revista UNO como lugar de intercambio de experiencias, reflexiones, investigaciones, comentarios de libros, etc. Los trabajos pueden hacer referencia a cualquier tema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y a cualquier nivel educativo (desde infantil a enseñanza universitaria).

Xixim. Es una revista electrónica que apareció trimestralmente y donde se pueden publicar artículos, notas de clase, reportes de investigación, anuncios de eventos, entretenimientos, etcétera, relacionados con la enseñanza de la Matemática y su investigación.

Números. Es una revista de Educación Matemática, editada y publicada por la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de profesores de Matemáticas desde 1981. Tiene por objetivos:

- Elevar y actualizar el nivel profesional y pedagógico de los profesores de Matemáticas.
- Impulsar el desarrollo de las investigaciones relativas a la Didáctica de las Matemáticas, así como preocuparse por su implantación en los Centros docentes.
- Servir de nexo entre los profesores de Matemáticas para intercambiar experiencias e ideas.
- Organización de cursos y conferencias, publicación de revistas y boletines y cuantos medios contribuyan a la consecución de los fines anteriores.

Matematicalia. Esta revista se dirige a un público lo más amplio posible y pretende introducir a sus lectores en la belleza y aplicaciones prácticas de la matemática, sacando el máximo partido de Internet como medio para la publicación de materiales que contengan gráficos dinámicos y a todo color, hipervínculos internos y externos a recursos relacionados, applets en Java, Flash, Shockwave u otros lenguajes, clips de audio y video, y otras posibilidades propias de la Red. Algunos de los temas que trata son:

- Ciencia
- Comunicación
- Cultura
- Economía
- Educación
- Internacional
- Multimedia
- Nacional
- Sociedad
- Tecnología
- Pasatiempos
- Momentos matemáticos / Humor

Siproma. La Sociedad Iberoamericana para la Promoción de la Matemática (Siproma) y la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) han puesto en marcha la publicación de una revista que pretende cubrir un hueco hasta la fecha cubierto por publicaciones exclusivamente en inglés. El objetivo de la federación es promover el intercambio de experiencias e informaciones que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles y en todos los países de la comunidad iberoamericana.

Épsilon. Esta revista es un órgano de expresión de la Sociedad Andaluza de educación matemática Thales, ha asumido la tarea de mejorar la enseñanza de las matemáticas de todos los niveles educativos, colabora en esta tarea persiguiendo los siguientes objetivos:

- Dar a conocer las investigaciones en educación matemática que se realiza en el ámbito nacional.
- Promover el desarrollo de teorías relacionadas con el campo de la educación matemática; promover el conocimiento de la realidad educativa andaluza y nacional a través de la difusión de investigaciones y experiencias docentes.
- Difundir artículos internacionales que marquen nuevas perspectivas para la investigación educativa y que no hayan sido publicados en América Latina.
- Fomentar la participación de los profesores e investigadores.
- Propiciar la discusión sobre problemas de investigación educativa.

Gacetilla Matemática. Desde 1998 el objetivo de la G.M. es difundir en la red el fabuloso mundo de las matemáticas: Anécdotas, problemas, libros, enlaces, los más grandes matemáticos, etc. Todo relacionado con las matemáticas.

Matemáticas para todos. Es un boletín publicado por Educación y Desarrollo A. C. dirigido a un público en general y tiene por objetivo motivar con sencillez e ingenio el interés por la matemática como instrumento imprescindible en la educación para la vida.

A pesar de ser vasta la literatura sobre matemática recreativa, ésta tiene un carácter de esparcimiento. Las publicaciones, libros y revistas, están dirigidas a un público general y no necesariamente dentro de un contexto escolarizado, no están clasificadas por temas o niveles educativos, en el mejor de los casos los profesores interesados en el área las consultan y las implementan bajo sus propios recursos. Algunos incluso han registrado sus experiencias en reportes de investigación y foros tales como congresos, simposium, encuentros, jornadas, etc...

2.3 Instituciones que recrean la matemática.

Es cierto que en los actuales planes y programas de estudio, principalmente del nivel básico (pre-escolar, primaria y secundaria), existen muchas actividades diseñadas para adquirir competencias matemáticas a partir del juego. Sin embargo, quiero referirme en este momento a los planes y programas de estudio que no sólo tienen actividades de matemática recreativa, sino que la toman tan en serio que la ofrecen como una materia dentro de sus planes y programas de curso.

La Profra. María Asunción Sastre Rosa, quien trabaja en la Universidad Politécnica de Madrid, en la Facultad de informática, Departamento de matemática aplicada, imparte la materia **Matemática recreativa** en el primer cuatrimestre, ofrece 4.5 créditos como materia opcional.

Programa

Teoría

- **Geometría.** Tres problemas clásicos. Teorema de Pitágoras. Sección áurea.
- **Teoría de Números.** Babilonia y Egipto. Números especiales: pi, e, cero. Inducción.
- **Lógica.** Paradojas y Falacias. Lógica de Proposiciones.
- **Juegos.** Empezar por lo fácil. Juegos de fichas. Juegos combinatorios. Función de Grundy.

Resolución de problemas

- Geometría Plana.
- Geometría Espacial.
- Sección Áurea.
- Problemas numéricos.
- Cuadrados mágicos.
- Inducción.
- Paradojas y Falacias.
- Lógica de Proposiciones
- Enigmas y cuadros de doble entrada.
- Juegos combinatorios.

La Universidad Tecnológica de Pereira en Colombia, en la Licenciatura en Matemáticas y Física, tiene dentro de su programa la materia **Matemática recreativa** en el duodécimo semestre, después de haber tomado 6 cursos de matemáticas, estadística, didáctica de las matemáticas e historia de las matemáticas.

La Universidad de Alicante en España, ofrece la asignatura **Matemáticas y geometría recreativas**, aplicaciones prácticas, que tiene por objetivo:

Potenciar el uso práctico de las Matemáticas y de la Geometría a través de ejemplos sencillos, basados en experiencias cotidianas, como las aplicaciones de la Física y de la Cosmología.

- Acercar las leyes matemáticas a través de experiencias cotidianas.
- Convertir el aprendizaje de las leyes matemáticas en una metodología lúdica.
- Ejercitar la reflexión mediante el planteamiento de paradojas.
- Desarrollar la visión espacial de los elementos geométricos.
- Ejercitar los procesos de abstracción.
- Dar una visión histórica de los avances tecnológicos asociados al desarrollo de la Matemática.

Aquí un fragmento de su programa de estudio

Las matemáticas de la antigüedad

- Teorema de Tales. Pitágoras.
- Cosmología en la antigüedad. Hiparco, Eratóstenes, Aristarco.
- Arquímedes. Razón áurea.
- Juegos y pasatiempos de aplicación

El Estado Asociado de Puerto Rico, a través del Departamento de Educación, ofrece el curso **Aventuras Matemáticas**, con duración de 1 semestre y valor de ½ crédito para estudiantes del décimo semestre.

La metodología utilizada es un enfoque pedagógico centrado en la enseñanza de matemáticas hacia la solución de problemas. Específicamente, el énfasis del currículo será la solución de problemas como medio para el desarrollo integral del ser humano.

En este curso, se enfatizan los procesos matemáticos de solución de problemas, comunicación, razonamiento y prueba, representaciones y conexiones. Sin embargo, reconocemos que todos los procesos matemáticos se entremezclan en cualquier situación de aprendizaje.

La Universidad Nacional Mayor de San Marcos, en Perú, en la facultad de Ciencias Físicas, ofrece el taller **Matemáticas Recreativas**, pretende desarrollar una metodología dinámica, experimental, constructiva y de exploración en matemática, además de suscitar el interés por los pasatiempos y juegos con contenido matemático.

Entre sus objetivos están:

- Estimular la creatividad y el interés por la matemática.
- Mostrar materiales, juegos matemáticos y procedimientos de uso que ayuden a despertar y fomentar en el alumnado el interés por las matemáticas y que sirvan al docente como recurso en el aula.

También se muestra parte de su temario

- Juegos abstractos y de tablero.
- Juegos con estrategia ganadora.
- Tópicos de matemática recreativa.
- Juegos numéricos de lápiz y papel de amplia difusión.

La Universidad de Guadalajara, México, en su sistema de educación media superior, ofrece como preparación propedéutica a las licenciaturas de Informática, Matemáticas, Química y Física, la competencia genérica: pensamiento matemático que tiene cuatro unidades de aprendizaje, siendo una de ellas **matemáticas recreativas** con valor de 5 créditos en un total de 19 semanas.

Su objetivo es: Identificar problemas y centrarse en su solución, aplicando estrategias y/o modelos propios del razonamiento matemático. Esto se pretende llevar a cabo con una metodología flexible y lúdica para construir nuevos conocimientos.

La Secretaría de Educación del Distrito de Cartagena de Indias, Colombia presenta en el Plan de Formación y Cualificación de Docentes 2007-2008, el diplomado **Matemática Lúdica**, en él se pretende contribuir al mejoramiento profesional de docentes y directivos docentes y optimizar el servicio educativo. Este diplomado se fundamenta en desarrollar diversas estrategias pedagógicas que brindarán al profesor para que pueda crear y desarrollar actividades tales que dé al niño la oportunidad de jugar de diversos modos, con diferentes materiales y al mismo tiempo de desarrollar las destrezas que origina el pensamiento matemático; observar, recordar, analizar, abstraer; capacidades promotoras de la resolución de problemas conducente a la transición de pensamientos concretos al abstracto.

Su objetivo general es el diseño, aplicación y evaluación de estrategias metodológicas que desde la lúdica promuevan un aprendizaje significativo de las matemáticas en los estudiantes en el aula de clases.

Algunos de los contenidos de su programa:

- Matemática lúdica, ¿un juego o una gran oportunidad?
- La didáctica y la lúdica
- Matemáticas recreativas
- El gusto por la matemática
- Innovación en los principios metodológicos, con las siguientes actividades:
    1. Juguemos a la cotidianidad
    2. Juguemos con la fantasía
    3. Elaboremos una historia
    4. Juguemos con las matemáticas
    5. Juegos con cerillas, construcción y partición de figuras
    6. Estrellas mágicas y cuadrados mágicos
    7. Problemas de lógica
    8. Algunas paradojas lógicas
    9. Ilusiones ópticos
    10. Dominó y otros juegos.

Hay varios ejemplos de profesores con una formación pura en matemáticas, en líneas de investigación matemática o en general áreas científicas y tecnológicas de alto nivel, que implementan dentro de sus cursos regulares el uso de actividades lúdicas para reforzar los temas y la metodología del curso.

Capítulo 3.

Actividades recreativas:

Justificación y secuencias didácticas

3.1 Matemagia

Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones "práctica", sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el "juego" se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia.

Gardner 1983.

Un hombre saca una baraja de cartas, la extiende sobre la mesa y le dice a alguien: "Elige una, la que quieras, y que yo no la vea". Elegida la carta, el hombre separa los naipes en dos montoncitos y desecha uno de ellos. Repite esa operación hasta que sólo queda la carta que habían elegido sin que él la viera. *El País, 27 de Febrero de 2006. Madrid*

Esta escena no se produce en un local o en un teatro, sino en una clase de matemáticas en la que un profesor está explicando qué es un algoritmo.

Fernando Blasco, profesor de matemáticas de la Escuela Técnica de Ingenieros de Montes de la Universidad Complutense, es un enamorado de la magia y de las matemáticas, y se ayuda de la primera para enseñar la segunda.

*El uso de la magia ayuda a que no vean las matemáticas **tan duras** y a eliminar la concepción que les llega a través de sus padres de que **son un rollo**, ha manifestado. (Blasco en elmundo.es julio 2010)*

Lo anterior es un ejemplo de cómo aprovechar los recursos para despertar el interés de nuestros alumnos en clase, y lograr aprendizajes de contenidos tradicionalmente abstractos, en una ciencia con muchas dificultades para su enseñanza-aprendizaje: La matemática.

Magia y matemáticas han sido compañeros de viaje durante mucho tiempo. Tanto los magos como los matemáticos están motivados por el sentido de sorpresa que representa el misterio esencial del mundo. Los magos muestran tales hechos sorprendentes mientras que los matemáticos tratan de explicarlos: la ciencia de la ilusión versus la ilusión de la ciencia.

Esta relación entre dos aspectos, aparentemente tan distintos, no es reciente; a lo largo de la historia han compartido escenario, aquí un poco de esa historia:

En la época pitagórica, los números se relacionaban más con cualidades místicas que con el ilusionismo. Descubrimientos, como el que los tres números consecutivos 3, 4 y 5 forman un triángulo rectángulo, o que con los nueve primeros números se puede formar un cuadrado mágico, fomentaron la creencia de que algunos números tienen poderes mágicos. El gran avance en el estudio de los números y sus propiedades ha propiciado que las comunidades más cultas hayan dejado de creer en tales propiedades místicas y se conformen con utilizarlos en un ámbito más cotidiano. El remanente de épocas pasadas permite a los magos utilizar en sus presentaciones el lenguaje ocultista relativo a números de la suerte o números asociados a cada persona, operaciones con los números que corresponden al día de nacimiento, o al número de calzado, etc., para llegar a una predicción.

El matemático estadounidense David Singmaster, consultaba hace unos años un manuscrito del siglo XIX en el que aparecía una referencia a un antiguo compendio de prestidigitación del Renacimiento. La pista le llevó a los archivos de la Universidad de Bolonia, donde halló el libro que resultó ser el texto de magia más antiguo del mundo, *De viribus quantitatis* (Sobre el poder de los números), que contiene trucos de naipes y puzles numéricos, y que ha permanecido almacenado durante 500 años. Su autor, un monje franciscano, Luca Pacioli (1445-1514?/1517?) compartió alojamiento e ideas con Leonardo da Vinci, El texto acaba de ser traducido al inglés por primera vez. "Funda no sólo la magia moderna sino también los puzles numéricos".

Pacioli lo escribió en italiano entre 1496 y 1508 y contiene la primera referencia a los juegos de naipes e instrucciones para efectuar malabares, tragar fuego, introducir las manos en plomo fundido y hacer que unas monedas bailen.

El texto no se había publicado hasta ahora, y desde la Edad Media sólo lo han podido consultar unos pocos eruditos que han accedido a los archivos de la universidad. Han sido necesarios ocho años de trabajo, varios traductores y miles de libras para traducir el texto al inglés. El dinero lo ha puesto el Centro de investigación de las artes del conjuro de Nueva York. Su fundador ha señalado que el volumen de Pacioli "es el primer gran manual que se ocupa de enseñar cómo ejecutar la magia".

El volumen está dividido en problemas matemáticos, puzles y trucos, versos y proverbios. Incluye instrucciones sobre cómo escribir en código o trazar versos en los pétalos de una rosa, lavarse las manos en plomo fundido y hacer bailar un huevo sobre una mesa, y también muestra algunos de los primeros ejemplos de puzles numéricos de Europa.

> *Es un documento muy importante. Muestra cuánto le gustaban a Leonardo Da Vinci los juegos y los trucos, pero sólo si tenían una base científica,*

explica Pedretti, un destacado historiador del arte, que estudió el texto original en Bolonia en 1954 (ELPAIS.com 2007).

Uno de los primeros libros dedicados a mostrar principios matemáticos aplicados a la mecánica se debe a John Wilkins, quien en 1648 publicó Magia Matemática, siendo uno de las más fáciles, entretenidos y útiles de las matemáticas. Fue el primer trabajo sobre dispositivos mecánicos escrito en inglés, pero no un texto de mecánica en sentido tradicional. El libro consta de dos secciones:

Archimedes: O dispositivos mecánicos, que incluyen las balanzas, palancas, ruedas, poleas, cuñas, tornillos, proyectiles y catapultas.

Daedalus: O movimientos mecánicos, en los que se estudian los autómatas, carros marinos, relojes, submarinos y movimiento perpetuo (del que el propio autor dice que no parece muy probable). El objetivo del libro es el de mostrar al público profano los principios básicos en que se basan las distintas máquinas que producían movimientos mecánicos, para que no pudieran ser interpretados como basados en poderes ocultos de quienes se dedicaban a mostrarlos en público. En esa época, quien no estuviera familiarizado con las leyes de la mecánica tenía tendencia hacia lo esotérico para justificar aquellas curiosidades técnicas. Las grandes ciencias aplicadas de la antigüedad, como la astronomía, estática, mecánica y óptica, habían sido inaccesibles a todos los públicos salvo a los iniciados que las habían estudiado.

A lo largo de los tiempos algunos matemáticos han logrado explotar las propiedades de los números para sorprender y entretener a públicos profanos. En el siglo XIX Charles Dogson (más conocido por su sobrenombre Lewis Carroll) ya realizaba trucos y puzles numéricos utilizados hoy en día por los magos.

Bob Hummer fue un famoso mago estadounidense de principios del siglo XX que descubrió interesantes propiedades matemáticas en una gran variedad de efectos mágicos una recopilación de su obra se encuentra en el libro Las Obras Completas de Bob Hummer escrito por Karl Fulves.

Dentro del ámbito educativo, algunas escuelas de todos los niveles han incluido la magia como recurso para la enseñanza de las matemáticas, aquí algunos ejemplos:

En España se ha reconocido la importancia de la magia como elemento catalizador en el estudio de la matemática que hasta se ha incluido en los planes y programas de estudio; La Universidad de Burgos celebra cada año unas jornadas de ilusionismo y la Universidad de Valladolid ofrece un curso de iniciación. La Universidad Politécnica de Cataluña cuenta con Magic Andreu para impartir clases en el módulo de comunicación del MBA y la Universidad del País Vasco ha tenido una asignatura de libre elección de Iniciación al Ilusionismo, impartida por el profesor Pedro Alegría (ElPAÍS.com 2006).

Introducir trucos de magia en el aula hace las clases más atractivas y motiva a los alumnos en el aprendizaje de esta asignatura, según ha asegurado el profesor de la Universidad Politécnica de Madrid Fernando Blasco, quien ha enseñado a docentes de todos los niveles educativos a emplear estas técnicas.

Este profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes de Madrid ha declarado que la magia despierta el interés de los alumnos a los que no les gusta hacer cuentas porque aunque en algunos trucos deben realizar pequeños cálculos mentales tienen el aliciente de adivinar un número pensado por sus amigos o familiares.

Otro ejemplo de matemáticos que apuestan por el uso de magia como herramienta dentro de ámbitos educativos es Francisco González Martínez, en el aspecto profesional, se licenció en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Valencia, con grado de sobresaliente, con la tesina *"Elementos regulares, cuasi-regulares y Teorema de factorización de Weierstrass para Álgebras Normadas",* ingresó como profesor asociado en la Universidad Jaume I, donde se doctoró por esa universidad con la tesis "Homomorfismos de grupos e isomorfismo vectoriales entre espacios de funciones continuas".

Lleva 15 años uniendo la magia y las matemáticas que son sus dos amores platónicos, realizando actividades recreativas para acercar la matemática a todo el mundo, en conferencias/espectáculos en Colegios, Institutos y Universidades, en congresos para profesores de matemáticas, Olimpiadas nacionales e Iberoamericanas de matemáticas y semanas de las ciencias para público en general.

David Palomino Alva de la Unidad de Medición de la Calidad (UMC) del Ministerio de Educación matemático y mago peruano explica que la relación mágico-matemática viene de muchos años atrás y es de gran ayuda para la enseñanza de esta ciencia, porque logra de inmediato captar el interés de los alumnos.

> *Cuando le presentas un truco a un niño se activan en él capacidades de razonamiento que lo harán investigar para entender mejor dicho artificio. Al hacer ese ejercicio mental el alumno aplicará ciertas habilidades matemáticas, utilizará el pensamiento lógico y el combinatorio así como su creatividad. Entonces, cada vez que se le presente un problema de la vida cotidiana, esa persona recurrirá a los mismos métodos que le permitieron resolver el truco aprendido* (Eleducador.com 2008).

Sin embargo, David Palomino advierte que la parte lúdica no es suficiente para aprender matemática, sino que esta tiene que conectarse con el contenido pedagógico.

En la 41ª Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Taejon (Corea del Sur) en Julio de 2000 se propuso el siguiente problema que relaciona dos actividades, aparentemente alejadas, la matemática y la magia:

- *Un mago tiene cien tarjetas numeradas, del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una roja, una blanca y una azul, de tal manera que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.*
- *Un espectador selecciona dos de las tres cajas, extrae una tarjeta de cada una y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma el mago identifica la caja de la cual no se ha elegido ninguna tarjeta.*
- *¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?*

El gran Alexander, Juan Tamariz, Martin Gardner, Fernando Blasco, Arthur Benjamín, Pedro Alegría, son algunos ejemplos de matemáticos de formación y profesores por ocupación, que en su intento de mejorar la enseñanza de la matemática, han encontrado en la magia un valioso recurso que de manera didáctica logra romper esquemas tradicionales de la enseñanza de la matemática. Desafortunadamente ninguno de ellos trabaja en México, todas son experiencias Norteamericanas y españolas principalmente, en nuestro país no existe registro de su uso y son los resultados de las experiencias comentadas las que animan a difundir este enfoque de abordar la enseñanza de la matemática en nuestro país.

El objetivo de este capítulo es despertar el gusto por la matemática utilizando para ello un poco de diversión y de magia. Se proponen algunos trucos de magia que en sí, no son más que matemáticas disfrazadas, para mostrar que es posible hacer de nuestras clases algo ameno e interesante y con ello motivar a los estudiantes a estudiar y aprender matemáticas.

En esta propuesta se plantean actos de magia, algunos de ellos tan espectaculares que magos profesionales los han montado en sus presentaciones, en ellos se proponen de manera intrínseca retos para los espectadores, descubrir los principios que los hacen funcionar, porque el objetivo no es el juego por el juego mismo, ni la magia como tal, sino como un pretexto para inducir al alumno en el estudio de la matemática.

La magia actualmente es un instrumento ideal para amenizar todo tipo de eventos, bien sean de carácter profesional o lúdico, combinando animación, entretenimiento, humor y participación del público.

La magia, existe desde que el mundo es mundo. Es la delgada línea que separa la realidad y la ficción, por eso nos atrae. La magia es el equivalente al fuego en el principio de los tiempos. La magia ha formado parte de la vida del hombre desde el principio de su existencia de alguna forma u otra. En resumen podríamos decir que el hombre ha tratado desde el principio de los tiempos provocar la admiración y el temor con los fines más diversos y en ese aspecto la magia ha ocupado un papel protagonista.

Algunos matemáticos se refieren a la matemática como la ***Reina de las Ciencias*** e igual pasa con la magia, los ilusionistas dicen que es la ***Reina de las Artes***, y por aquí podríamos empezar a encontrar alguna similitud, si fuéramos capaces de encontrar una relación entre el arte y la ciencia, por ejemplo la armonía, la belleza… ¡Cuanta armonía hay en algunos juegos de manos y en algunos teoremas matemáticos!… esta es la opinión de Francisco González (MagoPaco) en entrevista que Alberto Coto realizo.

Si tenemos una actividad tan interesante como la magia y un saber tan tedioso (en una didáctica tradicional) como la matemática.

¿Por qué no unir ambas para lograr los objetivos propuestos?

Después de justificar el uso de la magia en el proceso educativo se explica la estructura de las actividades que se proponen en el siguiente apartado:

Primero se muestra el truco, las indicaciones para los participantes y los efectos que produce, posteriormente se ofrece una guía donde se explican las reglas y principios de cada uno, siendo lo más importante despertar la curiosidad para adentrarse en los secretos de cada truco, encontrando su justificación matemática, se ofrecen secuencias didácticas, conjunto de actividades diseñadas para ir de lo concreto a lo abstracto, con ello pretendemos que los alumnos con ayuda del profesor, deduzcan, a su nivel de abstracción, las reglas que hacen funcionar a los trucos y sistematicen estos conceptos para lograr aprendizajes.

Secuencia 1:	Encontrando el digito escondido.

Indicaciones:

Una persona del grupo pasa al frente y sigue las indicaciones del mago, quien por supuesto no ve ninguna de las operaciones.

- Escribe un número, no importa la cantidad de dígitos de este, escribe su inverso (es decir los mismos dígitos pero en orden inverso).
- Realiza la diferencia entre el número mayor que se formó y el menor.
- Eleva la diferencia al cuadrado.
- Escribe el resultado y borra uno de los dígitos, pon un asterisco en su lugar.
- Escribe el digito borrado en un papel.

Ahora permite que el mago lea tu mente… el dígito que borraste es el…

Por supuesto el mago con su poder telepático, ha adivinado el dígito… se puede comprobar viendo el papel donde el voluntario escribió la cifra.

Ejemplo:

- Número 38676
- Inverso 67683
- Diferencia 67683 – 38676 = 29007
- Elevarlo al cuadrado $(29007)^2 = 841406049$
- Digito escondido 84*406049

El mago en un gran acto de concentración, dice por supuesto 1.

Explicación:

Si se encuentra la diferencia entre un número y su inverso *el resultado será siempre un múltiplo de 9.*

Demostración para un número de 4 cifras:

Sea un número de 4 cifras **abcd** y su inverso **dcba**

En notación desarrollada tenemos:

$(1000\ a + 100\ b + 10\ c + d) - (1000\ d + 100\ c + 10\ b + a)$

De donde podemos asociar

$(1000\ a - a) + (100\ b - 10\ b) + (10\ c - 100\ c) + (d - 1000\ d)$

y simplificando tenemos

999 a + 90 b - 90 c – 999 d

Factorizando un 9 nos queda

9 (111 a + 10 b - 10 c – 111 d)

Por lo tanto la diferencia entre el número abcd y su inverso dcba es múltiplo de 9

Al elevar al cuadrado la diferencia la potencia sigue siendo múltiplo de 9
9*9 $(111 a + 10 b - 10 c - 111 d)^2$

Análogamente para los demás números de más cifras, incluso para una generalización, $a_1a_2a_3 \ldots a_n$ *donde* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ *son dígitos* del número.

Una característica de los múltiplos de 9 es que al sumar sus dígitos que lo conforman el resultado es 9 o múltiplo de 9, si uno de los dígitos se oculta, entonces sumamos los restantes y completamos el próximo siguiente múltiplo de 9.

Nota: Existe una posibilidad de que el voluntario quite un 0 o un 9 del resultado final, dejando a este aun siendo un múltiplo de 9 y nos deja sin saber exactamente cuál de las dos cifras quito, se recomienda que se elija una de las 2 posibilidades esperando ***atinarle***, en caso de que no sea así, inmediatamente se dice la otra, junto con una frase que no nos reste credibilidad.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Realizar una lista de múltiplos de 9 de 2 cifras.
- Sumar los dígitos de ellos y formular una conjetura del resultado de la suma.
- Generalizar con álgebra para números de 3 cifras.
- Generalizar con álgebra para números de 4 cifras.

- Esbozar la generalización para un número de *n* cifras.
- Elaborar conclusiones.

Actividad 3

- Elegir un número y encontrar su inverso.
- Realizar la diferencia entre los dos números, observar el resultado y elaborar una conjetura sobre el mismo.
- Generalizar para números de 3 y 4 cifras con ayuda del álgebra.
- Elevar al cuadrado el resultado y justificar porque el resultado sigue siendo potencia de 9.

Actividad 4

- Explicar el funcionamiento del truco.
- Permitir que algunos alumnos realicen el truco algunas veces para corregir errores o para comprobar que se ha entendido su funcionamiento.
- Examinar los casos especiales al momento de realizar el acto (caso de los dígitos 0 y 9).

Secuencia 2:	Fuego mágico

Indicaciones:

- Escribe un número de tres dígitos.
- Escribe su inverso.
- Encuentra la diferencia entre el mayor número formado y el menor.
- Escribe el inverso del resultado.
- Encuentra la suma entre la diferencia y su inverso.

En esta ocasión el fuego será nuestro aliado.

El mago enciende una vela y con unas palabras mágicas pasa un papel sobre la llama de la vela… momentos de suspenso… pero poco a poco el fuego revela la respuesta a la que llego el participante.

Explicación:

El resultado siempre será 1089

Demostración

Sea un número de tres dígitos abc y su inverso cba

En notación desarrollada tenemos su diferencia
(100 a + 10 b + c) – (100 c + 10 b + a)

Simplificando y factorizando
99 a – 99 c = 99 (a – c)

Como a y c ε ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y además a > c, tenemos los posibles resultados de
(a – c) ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Por lo tanto los posibles valores de
99 (a – c) ={99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792}

Y sus respectivos inversos
={990, 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297}

En donde todas las sumas de las diferencias y sus inversos es igual a 1089.

Si conocemos el resultado de todos los casos posibles sólo resta escribir con zumo de limón este resultado en una hoja de papel, la cual al entrar en contacto con el fuego, hace visible la ***tinta invisible***.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo.
- Observar los resultados de donde se podrá elaborar una conjetura en una segunda o tercera repetición.
- Proponer una explicación del resultado.
- Probar las conjeturas.

Actividad 2

- Generalizar la resta con ayuda del álgebra.

Secuencia 3:	**Rojo o negro**

Indicaciones:

El mago pide a 6 voluntarios que pasen a sostener 6 cartas, una cada persona, en cada una de las tarjetas está escrito un número de color negro en el anverso, y un número rojo en el reverso.

Pide a un voluntario que decida qué color de número quiere que el público vea en cada una de las cartas, seguramente algunas las pondrá en color negro, otras en rojo o probablemente decidirá que todas las tarjetas queden de un mismo color.

Una vez que el participante ha terminado, el mago pide que se realice la suma entre los números que quedan a la vista.

Todo esto se ha llevado a cabo sin que el mago pueda ver las cartas ni los movimientos del participante.

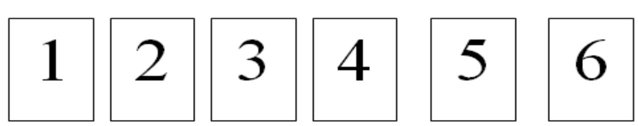
Ahora antes de adivinarle la suma, una última pregunta ¿Cuántas cartas con números rojos se ven? Esto se puede hacer más espectacular si previamente se pone de acuerdo con una persona del público, conviniendo en alguna seña discreta que indique cuantas cartas rojas son visibles.

Por ejemplo: convenir en que la persona ponga su mano sobre la cabeza del mago y de ligeros golpes con un dedo sobre su cabeza, de esta manera no se tiene que hacer evidente que el mago conoce el número de cartas rojas visibles.

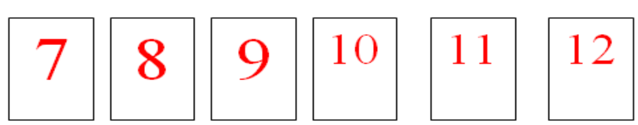
Entonces sin la menor duda, el mago dice un número… que corresponde a la suma que se calculó.

¡Sorprendidos… en realidad sólo es poder mental!

caras



dorsos



Explicación:

Las tarjetas no tienen números aleatorios, cada una de ellas tiene una diferencia de 6 entre el número del frente y el dorso, pero como se presentan en desorden, no es fácil de percatarse.

Entonces se tiene en mente la suma inicial de todos los números negros, que es 21 y se pregunta cuantas cartas rojas se ven, es fácil entonces, calcular la suma total, ya que por cada carta en rojo se aumenta un 6.

El truco se eleva de nivel, aumentando progresivamente el número de cartas.

¿Qué pasaría con 7, 8 15, 32 o n cartas?

La suma inicial se calcula con la sumatoria de gauss y se aumentan m veces la diferencia entre el frente y el dorso.

Ejemplo:

Para 32 cartas, la numeración de los frentes será 1, 2, 3… 32 y la numeración de los dorsos será 33, 34, 35… hasta 64. Por lo tanto la suma inicial será:
$(1+ 32)(32/2)= 1188$

La diferencia entre los números de una misma carta será 32, lo único que se tiene que contar es cuantas cartas rojas quedan a la vista. Un ejemplo con 12 cartas rojas nos dará un excedente de la suma inicial de
$12* 32 = 384$

Será entonces la suma total $1188 + 384 = 1572$

Si el número de cartas es n, la numeración de los frentes será 1, 2, 3… n y la numeración de los dorsos será 1+n, 2+n, 3+n... 2n. Por lo tanto la suma inicial será: $(1+n) (n/2)$

La diferencia entre los números de una misma carta será n, lo único que se tiene que contar es cuantas cartas rojas quedan a la vista. Si tenemos m cartas rojas, tendremos un excedente a la suma inicial de $(n*m)$

Será entonces la suma total $(1+n) (n/2) + (n*m)$

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Repartir un juego de cartas a cada equipo formado para que las analicen detenidamente.
- Escribir conclusiones sobre cómo se han preparado las cartas.
- Analizar por casos la actividad:

a) Caso 1: Sumar los números con 0 cartas rojas visibles.

b) Caso 2: Sumar los números con 1 cartas rojas visibles, cambiando la carta roja elegida.
Comentar conclusiones comparando la suma de 0 cartas rojas visibles y este caso.

c) Caso 3: Sumar los números con 2 cartas rojas visibles, cambiando las cartas rojas elegidas.
Comentar conclusiones comparando la suma de 0 y 1 cartas rojas visibles y este caso.

d) Deducir el funcionamiento de la actividad y probar para casos con 3, 4, 5 y 6 cartas rojas visibles.

Actividad 3

- Elaborar nuevo material ahora con 7 cartas.
- Calcular resultados con diferentes cartas visibles en una tabla como la que se propone a continuación, primero la columna de sumas predichas y posteriormente contrastarla con la suma correcta.

Total de cartas:

Suma con 0 cartas rojas visibles:

cartas visibles	suma predicha	suma real
1		
2		

3		
4		
5		
6		
7		

- Probar sus conjeturas.
- Reconocer lo que permite que sigue funcionando el truco y modificar las particularidades del caso.

Actividad 3

- Realizar las instrucciones anteriores, ahora para 8 cartas.
- Realizar las instrucciones anteriores sin elaborar las cartas, ahora para un número mayor de cartas. (15, 18, 20…)

Será necesario que se cuestione sobre un procedimiento que ayude a estimar la suma inicial con 0 cartas rojas visibles para cada caso.

Lo esperado es que los equipos recuerden el procedimiento conocido como ***suma de Gauss*** estudiado con anterioridad.

Actividad 4

- Llenar la tabla siguiente

total de cartas	cartas rojas visibles	suma predicha	suma real
15	7		
20	13		
50	34		
84	57		
122	57		
m	n		

- Enunciar en su cuaderno de notas un procedimiento que ayudo a llenar la tabla.
- Comparar con los procedimiento escritos por los equipos del grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre los distintos procedimientos.
- Corregir los procedimientos que no funcionan.

Actividad 5

- Identificar las variables **S** (suma total), **m** (total de cartas), **n** (cartas rojas visibles).
- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Compararlo con las fórmulas propuestas por los equipos del grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre las distintas fórmulas.
- Corregir las fórmulas que no funcionan.

Actividad 6

- Elaborar conclusiones de la actividad.

Secuencia 4:	Adivino la figura

Indicaciones:

Se muestra un cartel con 100 figuras donde a cada una le corresponde un número del 1 al 100.

Un participante pasa y elige un número, el mago le dice las siguientes instrucciones, todo esto sin ver lo que el participante realiza.

- Suma los dígitos del número.
- A partir del número seleccionado resta la suma de los dígitos y concéntrate en la figura a la que llegas… yo la adivinaré.

Como puedes suponer el mago acierta, sin importar cuál es el número inicial.

Explicación:

Sea el número inicial un número ab y la suma de los dígitos (a + b).

Entonces la diferencia entre ellos en notación desarrollada será:
$(10\,a + b) - (a + b) = 9\,a$

El resultado es siempre un múltiplo de 9.

Además los carteles mostrados no tienen 100 figuras diferentes, varias de ellas están repetidas, principalmente las que tienen un múltiplo de 9, siendo todas ellas las mismas, por lo tanto se puede ***predecir*** la figura a la que llegara en todos los casos.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Analizar varios casos particulares haciendo las operaciones en su cuaderno de notas.
- Elaborar una lista con los resultados obtenidos.
- Proponer una conjetura sobre los resultados de la tabla.
- Probar la conjetura (existen 2 posibilidades; hacer todos los casos, generalizar con álgebra)

Si se hacen todos los casos entonces queda demostrada la conjetura, si se opta por la generalización entonces:

Actividad 3

- Construir la estructura de los números utilizando letras y notación desarrollada.
- Realizar las operaciones algebraicas.
- Elaborar conclusiones.

En esta actividad se indica elegir un número de 2 cifras, no funciona para números de una cifra ya que si prepara el material para que sea funcional también para este caso, queda muy evidente que la figura ***adivinada*** seria la que corresponde al cero y le resta espectacularidad al truco.

Secuencia 5:	**La suma antes de la suma.**

Indicaciones:

Se pide a un voluntario que dicte un número de 3, 4, 5 o cifras que decida, también se puede pedir a varios alumnos que dicten un dígito cada uno hasta formar el número completo.

En este momento el mago escribe en un papel un número y lo guarda en un libro, cuaderno o sobre el escritorio.

A continuación se escribirán 2 números para sumar con la primer cantidad, uno de ellos lo dirá un alumno y otro muy rápidamente el mago, esto se repetirá cuantas veces, previamente, el mago haya decidido.

Se pide al participante que encuentre el resultado de la operación en el pizarrón y a los demás en su cuaderno.

Al terminar y consensar el resultado correcto el maestro saca el papel donde al principio anotó el resultado y... ¡sorprendentemente el resultado es correcto!... los aplausos y los murmullos incrédulos no se hacen esperar.

Ejemplo:

- El primer alumno dicta 3578
- El mago escribe en el papel el resultado de la suma
- El segundo alumno dicta 7241
- El mago dicta muy rápidamente + 2758
- El tercer alumno dicta 3763
- El mago dicta 6236

Se resuelve la operación y el resultado es 23576

Explicación:

La aparente predicción de una suma que no estaba propuesta, tiene la siguiente explicación

Los números que el mago coloca en la suma cumplen que completan a nueves las unidades, decenas, centenas… etc.

Cada pareja de números, a partir de la segunda cantidad (segunda y tercera, cuarta y quinta…) suman 99…9, que es una unidad menos de una potencia de 10. Por lo tanto a la primera cantidad se puede sumar con tantas **n** veces esas potencias de 10 menos 1, luego se resta n veces 1 a la primera cantidad escrita, haciendo muy fácil predecir la respuesta.

- Ejemplo

Primera cantidad	3578

El mago escribe en el papel el resultado de la suma (23 576), ya que prevé que se aumentara (2 *10000) + 3578= 23578 pero como no se aumentaron 2 veces el 1 al resultado le quitara 2 quedando 23 576

El segundo alumno dicta	7241
El mago rápidamente completa a nueves con el número	+ 2758
El tercer alumno dicta	3763
El mago completa	6236
Se resuelve la operación y el resultado es	23576

¿y el álgebra?

Se trata de encontrar una expresión que genere el resultado en todos los casos.

- Sea el primer número **m.**
- Sea **n** la cantidad de veces que se completaran los nueves.
- Sea **a** número de cifras que tenga m.
- Entonces la expresión quedara
- $[m + (n*10^a)] - n$

Ejemplo:

m = 3578 n = 2 a = 4

Sustituyendo
$[m + (n*10^a)] - n$
$= [3578 + (2*10^4)] – 2$
$= [3578 + (20000)] – 2$
$= [23578] – 2$
$=23576$

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Analizar un caso de 5 sumandos (3 propuestas por los alumnos y 2 escritas por el mago).
- Reconocer las similitudes entre el resultado y la primera cantidad.
- Analizar los números dictados por el mago.
- Reconocer la regularidad entre los pares de renglones (2 y 3, 4 y 5)

Actividad 3

- Analizar un caso de 7 sumandos, 4 propuestas por los alumnos y 3 dictadas por el mago).
- Reconocer las similitudes entre el resultado y la primera cantidad.
- Analizar los números dictados por el mago.
- Reconocer la regularidad entre los pares de renglones (2 y 3, 4 y 5, 6 y 7)
- Elaborar conclusiones.

Actividad 4

- Practicar algunas sumas en el pizarrón con alumnos que quieran fungir como mago.
- Validar con ayuda del grupo el proceso.

Actividad 5

- Reconocer las variables necesarias para desarrollar la actividad.
- Proponer ejemplos y estimar el resultado, conviniendo las variables:

a) Número inicial
b) Número de veces que se aumentaran 99..9

- Proponer la manera de conocer el múltiplo de 10 (potencia) a utilizar en cada caso (dieces, cienes, miles…) examinando el número inicial.

- Enunciar en su cuaderno de notas el orden de las operaciones entre estas tres variables (número inicial, número de veces que se aumentaran 99...9 y número de cifras que forman al número inicial).
- Probar varias veces este proceso con diferentes ejemplos.
- Validar los procesos de manera grupal y corregir posibles fallos.

Actividad 6

- Identificar las variables **S** (suma total), **m** (número inicial), **n** (número de veces que se aumentaran 99…9), **a** (cifras del número inicial).
- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Validar de manera grupal las distintas fórmulas obtenidas corrigiendo los posibles fallos.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 6:	La séptima es mágica

Indicaciones:

El mago pide la participación de un voluntario, a quien dará las siguientes indicaciones

- Escribe 2 números de 2 cifras. (Uno debajo del otro para ser sumados).
- Suma los dos números que escribiste (1° y 2°) y escríbelo como 3er sumando.
- Suma el 2° y 3er número de la suma y escríbelo como 4° sumando.
- Repite este procedimiento, hasta tener 10 números para sumar.
- Resuelve la suma y anótala en un papel.
- Ahora cuenta hasta 5 y te diré el resultado.

1… 2… 3… 4… 5, el resultado es… que todo el público aplaude cuando el mago dice la suma correcta.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 15 \\ 28 \\ 43 \\ 71 \\ +\ \ 114 \\ 185 \\ 299 \\ 484 \\ \underline{783} \\ 2035 \end{array}$$

Explicación:

El truco consiste en multiplicar la séptima cantidad por 11

En el ejemplo:

La séptima cantidad es 185 multiplicada por 11 = 2035

Generalizando para cualquiera 2 cantidades **a** y **b**

primer sumando	**a**
segundo sumando	**b**
tercer sumando	**a** + **b**
cuarto sumando	**a** + 2 **b**
quinto sumando	2 **a** + 3 **b**
sexto sumando	3 **a** + 5 **b**
séptimo sumando	5 **a** + 8 **b**
octavo sumando	8 **a** + 13 **b**
noveno sumando	13 **a** + 21 **b**
décimo sumando	21 **a** + 34 **b**

La suma de las 10 cantidades será: 55 **a** + 88 **b**

Que es igual a la séptima cantidad multiplicado por 11: 11(5 **a** + 8 **b**) = 55 **a** + 88 **b**

Lo único que se requiere es realizar de un sólo vistazo la multiplicación de la séptima cantidad por 11, operación que es muy sencilla, si multiplicamos de la siguiente manera:

10 (5 **a** + 8 **b**) + (5 **a** + 8 **b**)

En nuestro ejemplo:

(185 *10) + 185 = 2035

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Proponer un caso particular para su análisis.
- Registrar en una tabla los números iniciales, la suma total y el cociente entre la suma y cada uno de los sumandos (**n**).

1er número **(a)**	2° número **(b)**	suma total **S**	cocientes **S/n**

- Repetir algunas veces la actividad hasta apreciar las regularidades.
- Proponer una conjetura y validarla en algunos casos más.
- Formular un procedimiento para encontrar la respuesta fácilmente; 11*(7° sumando).

Actividad 3

- Generalizar la actividad con ayuda del álgebra.
- Identificar las variables **S** (suma total), **a** (1er número), **b** (segundo número).
- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Validar las diferentes fórmulas, apreciando las similitudes entre ellas y corrigiendo posibles fallos.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 7:	Bingo mágico a golpes

Indicaciones:

Se muestra un cuadro con dieciséis números en él; el alumno elige uno de los números y lo apunta en un papel sin que lo vea nadie, el mago comienza a golpear números en el cuadrado de uno en uno, mientras el voluntario mentalmente debe sumar una unidad al número elegido por cada golpe que da el mago sobre el cuadro. (Si eligió el número 11 contará… 12, 13, 14, 15…) Al llegar al número 25 el espectador debe gritar **BINGO** y descubre asombrado que, el mago está golpeando el número pensado

13	**11**	**15**	**3**
9	**1**	**7**	**15**
21	**13**	**3**	**11**
1	**9**	**21**	**7**

Explicación:

Los golpes que da el mago sobre los números del tablero, por supuesto, no son aleatorios; es más, en ningún momento el mago conoce el número elegido, sólo que al golpear lentamente sobre los números adecuados, en algún momento se dará la coincidencia de golpear el número que la persona eligió, dando así la impresión de adivinar.

Se debe comenzar a golpear encima de los números del tablero de tal manera que el número que golpea y el número de golpes que da sume 25. Los golpes que no están en la tabla los puede dar sobre cualquier número, pues no es importante.

Observa la siguiente tabla.

golpes que da el mago	número sobre el que debe golpear
4	21
10	15
12	13
14	11
16	9
18	7
22	3
24	1

Al ir golpeando lentamente, el alumno gritará **BINGO** en el momento en que el mago golpee el número elegido y mostrará al mago que es momento de detenerse pues ha adivinado.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Elaborar una tabla con los números que se pueden elegir y el número de golpes que el mago tendría que dar para llegar a 25.
- Descubrir la regularidad en los renglones de la tabla.
- Redactar el funcionamiento del truco.
- Comparar los procedimientos encontrados, apreciar las similitudes y corregir posibles fallas.

Actividad 3

- Proponer un procedimiento para encontrar el producto mentalmente.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 8:	Sistema decimal y el tiempo

Indicaciones:

El Mago da a mezclar un mazo de naipes y explica que ha descubierto una extraña relación entre números y horas (entre el sistema decimal matemático y el sexagesimal horario). Da el mazo de cartas al voluntario y le pide que elija una y lo muestre al público sin que el mago pueda conocerla, después la colocará nuevamente en el mazo. Ahora extrae 12 cartas y las coloca sobre la mesa boca abajo (doce…como las horas de un reloj) y pide al espectador que vuelva cuatro de ellas, al azar, cara arriba, las restantes ocho las regresa al mazo, ya que no se utilizarán*****. El alumno ahora debe completar, con naipes del mazo, el número de cada una de las cuatro cartas hasta llegar al número diez (base del sistema decimal).

Ejemplo:

Supongamos que el alumno voltea las cartas: 7 de corazones, 4 de tréboles, 10 de diamantes y rey de Picas.

Sobre la carta 7 de corazones se ponen tres cartas, sobre el 4 de tréboles se ponen seis cartas, sobre el 10 de diamantes y sobre el rey de Picas ninguna ya que el 10 no necesita cartas para llegará a 10 y convencionalmente las cartas que llamaremos figuras (J, Q y K) valen 10.

Acabado este proceso se suman los valores de las cuatro cartas vueltas, en nuestro ejemplo 7 + 4 + 10 + K (10) sumadas darían un total de 31.

A continuación se busca la carta que ocupa esa posición en el mazo de naipes. Se da vuelta a la carta con ese número y se comprueba que es la carta elegida al inicio del acto.

Explicación:

La baraja que el mago usa en este acto es de 52 cartas (inglesa). Después de que el alumno elige la carta, esta debe ser colocada debajo de todas las cartas del mazo, se barajan las cartas para dar la impresión que no hay truco, sin embargo, se cuida que al barajar las cartas, la carta elegida siga siendo la última del mazo (esto se consigue con un poco de práctica); posteriormente se colocan 12 cartas boca abajo y se pide que se volteen 4 para ver su valor, sobre ellas se echarán las cartas necesarias para completar el número 10. Por ejemplo, si hay un 7 se tienen que poner 3 cartas, si hay un 2, se tienen que poner 8 cartas, si hay un 10 o una figura no se pone ninguna pues vale 10; cabe aclarar que en este momento hay 40 cartas restantes en el mazo y que la número 40 (la última) es la elegida.

Uno de los casos que pueden suceder, de donde partiré para esta explicación, es que las 4 cartas volteadas sean todas figuras, por lo tanto no se pondrán cartas encima de ellas, y la suma de las 4 será 40, pues de manera convencional estas valen 10 cada una; como tenemos 40 cartas en el mazo, al contar 40 cartas llegaremos, por supuesto, a la carta elegida.

Pensemos como segunda opción que de las 4 cartas, 3 son figuras y además un 4, entonces echaremos encima de esta última 6 cartas, como eran en total 40 cartas pero echamos 6 encima del 4 nos quedan en el mazo 34, pero como nuestra carta elegida se colocó al final del mazo ocupa la posición 34 y la suma de las 4 cartas es 34 entonces no fallaremos.

Ejemplo detallado:

Carta 1: un 7, debemos echar sobre ella 3 cartas del mazo.
Carta 2: un 9, debemos echar sobre ella 1 carta del mazo.
Carta 3: un 2, debemos echar sobre ella 8 cartas del mazo.
Carta 4: una J, no debemos echar sobre ella ninguna carta del mazo.

La suma de las 4 cartas es 28, pero ya hemos echado 12 cartas sobre ellas, por lo tanto nos quedan en el mazo 28 cartas, al contar 28 cartas llegaremos a la carta elegida por el alumno al principio del acto.

En conclusión, la suma de las 4 cartas será

$$a + b + c + d = m$$

Y la suma de las cartas que echaremos encima

$$(10 - a) + (10 - b) + (10 - c) + (10 - d) = n$$

Al sumar estas 2 igualdades nos quedará

$$40 = m + n$$

Siendo $m + n$ la última carta del mazo (hasta antes de poner las 8 cartas recogidas).

***Nota importante:** el truco deja de tener espectacularidad si la carta elegida es la última del mazo, entonces es importante dar la impresión de que hay más cartas en el mazo, es por eso que las 8 cartas que no se voltearon al principio se regresen al mazo, colocándolas debajo de todas antes de comenzar a echar cartas encima de las 4 cartas volteadas (se tendrán así 48 cartas en el mazo), para que la carta 40, que es la elegida, quede cubierta.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Organizar los datos en una tabla con algunos casos particulares

Carta No. 1 **a**	Carta No. 2 **b**	Carta No. 3 **c**	Carta No. 4 **d**	Suma de las 4 cartas **m**	Cartas Necesarias **n**
figura	figura	figura	figura		
figura	figura	figura	4		
figura	2	10	7		
1	6	figura	8		
3	8	10	3		
4	7	2	9		

- En cada caso prever la posición de la carta por adivinar.
- Deducir la regla del funcionamiento del truco.
- Validarla en más casos particulares.

Actividad 3

- Desarrollar la generalización de la actividad con un lenguaje algebraico, estableciendo 2 igualdades con los valores de cartas **a**, **b**, **c** y **d** y **m** y **n**, resultado de las sumas de 4 cartas y cartas necesarias, respectivamente.
- Encontrar la diferencia entre las dos igualdades.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 9:	**Seis cartas buenas y una mala.**

Indicaciones:

Se tienen 7 cartas, seis cartas ***buenas*** (6 rojas de diamantes) y una carta mala con la que perdemos si se voltea (la reina de picas). Pasa un voluntario y lanza un dado imaginario, el participante nos dice cuántos puntos quiere que el dado marque. A continuación pasamos tantas cartas de arriba hacia abajo del mazo como puntos marco el dado, pero antes de pasar abajo la última carta de esta numeración se le da vuelta. Si es roja continuamos, si es negra hemos perdido. Repetimos la operación volviendo a pasar tantas cartas como marcaba el dado y volteamos la carta hasta que sólo nos quede una… recuerden que el mago pierde si voltea la carta negra…

A pesar de no saber cuántos puntos marcará el dado, el mago en un sorprendente acto de poder mental, logra voltear las 6 cartas rojas dejando la negra al final.

Explicación:

El secreto está en que la carta negra no se coloca en cualquier lugar del mazo (al menos no para un primer análisis, aunque estudiaremos este caso al final). La carta que nos hace perder si la volteamos debe quedar en la parte última del mazo, es decir será la número siete si empezamos a contar desde abajo. De esta manera:

Si el número que se elige del dado es el 1, entonces las cartas que se voltearán serán las primeras 6 y nos quedara sin voltear la ***carta mala***.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Si el número que se elige del dado es el 2, entonces iremos volteando las cartas de acuerdo a la siguiente tabla.

1	**2**	3	**4**	5	**6**	7
8	9	**10**	11	**12**	13	**14**

La primera que se volteará será la 2, luego la, 4, 6, 8, 10, 12, como puede verse la ***carta mala*** será la última que quede sin voltear.

Si el número que se elige del dado es el 3, entonces iremos volteando las cartas de acuerdo a la siguiente tabla.

1	2	**3**	4	5	**6**	7
8	**9**	10	11	**12**	13	14
15	16	17	**18**	19	20	**21**

La primera que se volteará será la 3, luego la 6, 9, 12, 15, 18, como puede verse la ***carta mala*** será la última que quede sin voltear.

Si el número que se elige del dado es el 4, entonces iremos volteando las cartas de acuerdo a la siguiente tabla.

1	2	3	**4**	5	6	7
8	9	10	11	**12**	13	14
15	**16**	17	18	19	**20**	21
22	23	**24**	25	26	27	**28**

La primera que se volteará será la 4, luego la 8, 12, 16, 20, 24, como puede verse la ***carta mala*** será la última que quede sin voltear.

Si el número que se elige del dado es el 5, entonces iremos volteando las cartas de acuerdo a la siguiente tabla.

1	2	3	4	**5**	6	7
8	9	**10**	11	12	13	14
15	16	17	18	19	**20**	21
22	23	24	**25**	26	27	28
29	**30**	31	32	33	34	**35**

La primera que se volteará será la 5, luego la 10, 15, 20, 25, 30, como puede verse la ***carta mala*** será la última que quede sin voltear.

Si el número que se elige del dado es el 6, entonces iremos volteando las cartas de acuerdo a la siguiente tabla.

1	2	3	4	5	**6**	7
8	9	10	11	**12**	13	14
15	16	17	**18**	19	20	21
22	23	**24**	25	26	27	28
29	**30**	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42

La primera que se volteará será la 6, luego la 12, 18, 24, 30, 36, como puede verse la ***carta mala*** será la última que quede sin voltear.

Esto sucede porque como puede verse se voltean los múltiplos de cada número del dado, pero ninguno coincide en ser múltiplo de 7 antes de que se volteen las primeras 6 cartas.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Analizar el funcionamiento del truco para cada caso posible:
- Deducir el lugar que debe ocupar la carta mala si el dado marca 1.
- Elaborar una tabla para el caso en que el dado marque 2.

Instrucciones: tachar los números que corresponden a las cartas que se voltean (ronda por ronda hasta que sólo quede 1 carta sin voltear)

Caso 2:	El dado marca 2

primer ronda	1	2	3	4	5	6	7
segunda ronda	8	9	10	11	12	13	14

- Deducir el lugar que debe ocupar la carta mala si el dado marca 2, por método de exclusión.
- Comparar con el primer caso (el dado marca 1).
- Justificar el lugar que la carta mala debe ocupar.

Actividad 3

- Elaborar una tabla para el caso en que el dado marque 3.

Instrucciones: tachar los números que corresponden a las cartas que se voltean (ronda por ronda hasta que sólo quede 1 carta sin voltear)

Caso 3:	El dado marca 3

primer ronda	1	2	3	4	5	6	7
segunda ronda	8	9	10	11	12	13	14
tercer ronda	15	16	17	18	19	20	21

- Deducir el lugar que debe ocupar la carta mala si el dado marca 3, por método de exclusión.
- Comparar con los 2 casos anteriores (el dado marca 1 o 2).
- Analizar los resultados obtenidos y proponer una conjetura para los demás casos.
- Justificar el lugar que la carta mala debe ocupar.

Actividad 4

- Elaborar tablas para los casos restantes (si es necesario)
- Reconocer el tipo de números que se tachan durante las rondas.
- Justificar el lugar que debe ocupar la carta para lograr el objetivo.
- Explicar las variaciones que el funcionamiento del truco tiene si la ***carta mala*** no se pone en el último lugar del mazo.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 10: **Suma mágica en una matriz**

Indicaciones:

Se muestra un arreglo de números (Matriz) y se siguen las siguientes reglas:

6	7	9	11
2	3	5	7
9	10	12	14
13	14	16	18

Se pide al voluntario que elija un número cualquiera de la matriz, lo encierre en un círculo y tachan la fila y la columna donde se encuentra el valor elegido, como lo muestra la siguiente figura:

6	7	~~9~~	11
~~2~~	~~3~~	5	~~7~~
9	10	~~12~~	14
13	14	~~16~~	18

De los números que quedaron sin tachar, escoge otro, lo encierran en un círculo y nuevamente se tachan fila y columna a la que pertenece el número.

Se realiza este paso hasta que sólo quede un número posible de encerrar, ahora se suman los números encerrados en los círculos... no importa cuáles son los que elige el participante, el mago haciendo uso de su poder mental adivina el resultado aun con los ojos vendados.

Explicación:

Los fundamentos matemáticos empleados en este juego están vinculados con la suma y las propiedades asociativa y conmutativa de esta operación.

Se pueden construir diversas matrices de este tipo, incluso variando las dimensiones, para ello se asigna a cada primer fila y a cada primer columna un número cualquiera (que lo denominaremos el elemento de entrada) y se construye una tabla de sumar. En el caso de la matriz dada, la tabla es la siguiente:

+	2	3	5	7
4	6	7	9	11
0	2	3	5	7
7	9	10	12	14
11	13	14	16	18

Cada elemento de la matriz es la suma del número de entrada de la fila y el número de entrada de la columna en la que se encuentra. Al seleccionar un elemento de la matriz, por ejemplo el 5 = 0 + 5 y tachar la fila y columna donde se encuentra, nos aseguramos que estos dos números ya no se sumen cuando se escoja un nuevo elemento.

El número que se obtiene al final del juego es la suma de todos los elementos de entrada (2 + 3 + 5 + 7) + (4 + 0 + 7 + 11) = 39

Las variaciones de las elecciones que se hacen, no altera el resultado ya que simplemente se modifica el orden de los sumandos y la manera en que se los asocia.

Como ya se mencionó antes, es posible construir muchas matrices como ésta, se puede modificar el tamaño, el conjunto numérico (con números negativos, con fracciones, etc.), incluso en lugar de ser una tabla aditiva puede ser multiplicativa.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Realizar el truco varias veces ante el grupo, permitiendo en cada una de ellas que los alumnos intenten encontrar el funcionamiento del acto.
- Probar las distintas hipótesis formuladas por los alumnos para comprobar si funcionan.

Actividad 2

- Realizar la actividad con la misma matriz algunas veces más, hasta que sea evidente el resultado.

Lograr que los alumnos infieran como se construyó la tabla es muy complicado, así que es necesario ayuda por parte del maestro, explicando que los números de la matriz son sumas de elementos de entrada en filas y renglones, aquí es posible colocar algunos de estos números y proponer al alumno que encuentre el resto.

A pesar de no contar con los recursos para descubrir la construcción de la tabla, es posible continuar con algunas actividades.

Actividad 3

- Construir una tabla con los sumandos expresados.
- Realizar la actividad con esta matriz algunas veces.
- Comparar las sumas con los elementos de entrada de filas y columnas.
- Justificar la razón de que las sumas sean iguales sin importar los números elegidos.
- Enunciar las propiedades de la suma a partir de algunos ejemplos bajo estas expresiones.

Actividad 4

- Descubrir y justificar la cantidad de sumas posibles.
- Construir una tabla donde el resultado sea un número **n** (31, 23, 17…)
- Resolver tablas (diseñadas por el maestro) donde falten números (elementos de entrada o sumandos)

Actividad 5

- Analizar la posibilidad de construir una tabla multiplicativa.
- Justificar su construcción.
- Construir una tabla donde el resultado sea un número **n** (31, 23, 17…)
- Analizar si es posible construir tablas de cualquier n.
- Resolver tablas (diseñadas por el maestro) donde falten números (elementos de entrada o factores).
- Elaborar conclusiones.

3.2 Juegos individuales

-¡Aaah! -dijo el diablo de los números-, ¿es eso? ¿Así que no quieres simplemente jugar con los números?, ¿Quieres saber lo que hay detrás?, ¿Las reglas del juego?, ¿El sentido de todo esto? en una palabra, te planteas las mismas cuestiones que un verdadero matemático.

Hans Magnus Enzensberger 1998.

La sociedades en las últimas décadas han entrado en un proceso acelerado de cambios que se manifiestan en todos los ámbitos del acontecer científico, cultural, social y político, generando una gran incertidumbre acerca de los conocimientos y las habilidades que requerirá el hombre del mañana para ser efectivo y mantenerse competente en un mundo en proceso de cambio permanente. Esta situación plantea a las instituciones educativas la meta de formar individuos autónomos, capaces de adquirir información por su cuenta, de juzgar la validez de dicha información y hacer, a partir de ella, inferencias racionales, lógicas y coherentes. Así que el proceso de formación en las instituciones educativas debe buscar dotar a los estudiantes con capacidades intelectuales que les permitan adaptarse a las incesantes transformaciones, a los cambiantes requerimientos del mundo laboral y a la relatividad del conocimiento. Una de estas capacidades es el aprendizaje individual permanente también llamado autodirigido.

En su significado más amplio, aprendizaje autodirigido describe un proceso por el cual los individuos toman la iniciativa, con o sin la ayuda de otros, en diagnosticar sus necesidades de aprendizaje, formular sus metas de aprendizaje, identificar los recursos humanos y materiales para aprender, elegir e implementar las estrategias de aprendizaje adecuadas y evaluar los resultados de su aprendizaje Knowles (1975).

Según Hiemstra citado por Bahamon (nf), el aprendizaje individual es en esencia cualquier forma de estudio en la cual el aprendiz tiene la responsabilidad para planear, implementar y finalmente evaluar el esfuerzo y los resultados del aprendizaje

Knowles (1975) enunció los siguientes supuestos, que han servido de base a muchas de las investigaciones actuales:

- El aprendizaje individual es requerido para lograr una evolución en las tareas a lo largo de la vida.
- En el aprendizaje individual se parte del supuesto de que los humanos crecen en capacidad y necesitan ser autoaprendices.

- Las experiencias de los aprendices son una fuente importante para el aprendizaje.
- El aprendizaje autocontrolado es motivado por varios incentivos internos, tales como la necesidad de autoestima, la curiosidad, el deseo de logro y la satisfacción de concluir una tarea.

Lograr estos objetivos es una tarea compleja y ambiciosa, sin embargo, es necesaria. Desarrollar estas competencias para los individuos dentro de un entorno escolarizado es tarea del profesor, encargado de planificar actividades que les permitan a los alumnos aprender y evaluar sus saberes aprendidos de manera autónoma en un primer momento y social posteriormente.

Estudiantes, que asuman como propia la responsabilidad de la construcción de sus conocimientos y por ende de sus estructuras mentales, que aprenden a partir de la actividad y reflexión individual, la confrontación con el grupo y el maestro, y la confrontación y verificación a través de la solución de situaciones y problemas cotidianos, han mostrado ser útiles para la vida, la ciencia y la tecnología (Ortiz 2004).

Al respecto Díaz-Barriga y Hernández (2006) afirman que uno de los objetivos más valorados y perseguidos dentro de la educación es enseñar a los estudiantes a que se conviertan en aprendices autónomos, independientes y autorregulados, capaces de aprender a aprender, puesto que los alumnos que han aprendido a aprender:

- Controlan sus procesos de aprendizaje.
- Se dan cuenta de lo que hacen.
- Captan las exigencias de la tarea y responden consecuentemente.
- Planifican y examinan sus propias realizaciones, pudiendo identificar sus aciertos y dificultades (aprenden de sus errores).
- Emplean estrategias de estudio pertinentes para cada acción.
- Valoran los logros obtenidos y corrigen sus fallas.

El conocimiento matemático no es algo que ya está preestablecido o preelaborado, se trata que el estudiante construya en una interacción con su ambiente permitiendo, que sus estructuras cognoscitivas se modifiquen a medida que va adquiriendo el conocimiento matemático, y de esta manera poder aplicarlo en la resolución de problemas. Es importante presentar al alumno un ambiente de interacción que le permita involucrarse en situaciones lúdicas que lo conllevan al conocimiento Cisneros (nf).

Estas ideas las complementa Guzmán (2007) al afirmar que un dominio efectivo de la realidad a la que se dirige busca que el estudiante logre algunas facultades que lo pongan en situación no sólo de suficiencia sino también de creatividad, se trata de considerar como lo más importante que el alumno:

- Manipule los objetos matemáticos.
- Active su propia capacidad mental.
- Ejercite su creatividad.
- Reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.
- Haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- Adquiera confianza en sí mismo.
- Se divierta con su propia actividad mental.
- Se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza? ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos? He aquí unas cuantas razones interesantes:

- Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- Porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos.
- Porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Porque es aplicable a todas las edades.

Si bien se ha justificado la importancia del aprendizaje individual, esto no significa que todo el aprendizaje debe ocurrir de manera individual y en total aislamiento de los demás, sólo se señala la importancia del aprendizaje desde una génesis individual, sus características, necesidades y ventajas del mismo, pero se reconoce así mismo, las características, necesidades y ventajas de una interacción social.

A partir del estudio de la génesis individual, Piaget establece que los mecanismos utilizados por el individuo para pasar a un estado de mayor conocimiento son funcionalmente los mismos que se identifican en la historia de las ciencias. Mecanismos de: abstracción, simbolización y generalización; construcción de la noción de objeto permanente; procesos de conocimiento centrados en el objeto (intra), en las relaciones entre los objetos (inter), o en las estructuras determinadas por las relaciones entre los objetos (transobjetal), se identifican en el individuo y en la historia de la ciencia (Ortiz 2004).

Ezequiel Ander citado por Castillo (nf) plantea el siguiente concepto que nos permite apreciar la importancia de ambos enfoques:

> *Se trata de un conjunto de personas que tienen un alto nivel de capacidad operativa de cara al logro de determinados objetivos y a la realización de actividades orientadas a la consecución de los mismos.* ***El trabajo individual*** *y colectivo se realiza con un espíritu de complementación, mediante una adecuada coordinación y articulación de tareas, y en un clima de respeto y confianza mutua altamente satisfactorio.*

El juego tomado como estrategia de aprendizaje le permite al estudiante resolver sus conflictos internos y enfrentar las situaciones posteriores con decisión con pie firme, siempre y cuando el facilitador haya recorrido junto con el ese camino, puesto que el aprendizaje conducido por medios tradicionales, con una gran obsolescencia y desconocimiento de los aportes tecnológicos y didácticos, tiende a perder vigencia (Torres 2002).

Los roles efectivos de los profesores basados en esta visión del proceso educativo son: facilitador de recursos; gestor del diálogo entre el estudiante y el objeto de estudio, entre el estudiante y el profesor y entre los estudiantes; evaluador de los resultados obtenidos; y promotor del pensamiento crítico (Bahamon nf).

Son estas teorías las que se toman en cuenta para proponer un conjunto de actividades que tienen al estudiante como centro del aprendizaje, retos individuales que provocan un desequilibrio cognitivo y que la interacción estudiante – objeto de estudio y estudiante – grupo conlleva a una asimilación de los saberes pretendidos.

Secuencia 1:	Laberinto de múltiplos

Material:

- Laberintos con múltiplos de 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9.

Laberinto de múltiplos

Atraviesa este laberinto avanzando en forma vertical u horizontal solamente por los cuadros que contengan números múltiplos de 5. Ingresa por el 60 y encontraras la salida por el 370

357	234	60	546	908	320	751	324	657	897	123	384	231	324
418	347	75	180	15	495	172	982	566	123	872	437	456	213
235	831	538	265	30	547	853	438	235	670	657	435	982	159
126	729	287	846	190	348	482	580	585	326	348	486	619	563
269	472	250	435	350	127	842	485	438	82	127	278	265	863
386	867	345	623	136	482	896	450	935	320	540	280	276	276
167	286	610	275	734	276	897	215	276	254	768	785	376	276
320	487	475	461	943	867	376	540	238	346	987	630	755	650
235	169	690	358	237	378	455	790	487	128	947	215	364	270
275	940	115	320	540	176	655	976	283	864	237	325	974	875
387	589	376	319	235	906	235	386	435	540	370	830	276	870
269	359	986	893	230	120	540	178	230	254	364	609	270	150
147	269	376	589	351	908	478	268	125	154	276	275	385	365
702	359	387	489	376	235	720	490	255	187	934	695	652	287
348	286	387	579	108	450	276	285	376	389	376	287	579	737
688	222	273	676	448	790	287	338	210	260	430	166	457	111
143	266	277	386	109	345	415	340	235	178	270	298	277	280
589	366	397	828	336	408	286	294	387	348	345	370	362	387

Laberinto de múltiplos

Atraviesa este laberinto avanzando en forma vertical u horizontal solamente por los cuadros que contengan números múltiplos de 6. Ingresa por el 90 y encontraras la salida por el 270

248	110	90	28	170	344	620	550	32	96	130	85	305	490
356	116	414	81	220	310	428	118	262	174	321	611	470	568
602	72	132	134	98	128	504	264	540	628	64	70	406	544
574	528	226	290	136	414	612	184	79	235	398	417	502	604
208	432	346	429	214	180	250	362	521	329	290	470	283	129
448	180	258	402	108	222	638	458	363	241	124	40	155	98
616	400	154	416	343	474	48	164	476	556	432	222	460	568
189	428	227	230	196	644	330	266	94	174	360	506	592	279
68	50	313	163	332	442	216	490	380	102	178	203	200	451
86	420	396	597	518	262	462	552	198	18	218	273	347	422
223	589	132	620	573	364	242	596	494	510	598	54	288	252
122	640	306	30	324	246	504	84	278	444	612	114	628	594
304	194	96	106	604	116	184	138	262	244	428	574	186	390
410	236	72	352	269	458	256	564	84	282	576	300	78	186
116	140	240	684	142	172	342	207	166	109	368	386	92	598
119	370	16	606	24	204	450	320	578	82	152	440	88	494
238	364	454	22	170	46	102	318	276	60	144	636	338	512
374	163	99	463	44	329	358	500	482	640	560	270	142	466

Indicaciones:

- **Objetivo**: Encontrar el camino que lleve de la entrada a la salida, igual que en un laberinto común, pasando sólo por casillas que contengan múltiplos de **n**.
- **Observaciones**:
- Sólo se puede avanzar a casillas adyacentes de manera horizontal o vertical.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Resolver un laberinto con **múltiplos de 9** en un tiempo de 10 min.
- Contabilizar las casillas avanzadas.
- Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos.

Actividad 2

- Resolver un laberinto con **múltiplos de 5** en un tiempo de 10 min.
- Contabilizar las casillas avanzadas.
- Analizar las estrategias utilizadas por los alumnos.
- Elaborar conclusiones.

Actividad 3

- Realizar la actividad 2 con un laberinto con **múltiplos de 2.**
- Elaborar conclusiones de ambos.

Actividad 4

- Exponer los criterios de divisibilidad más comunes. (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10).

Actividad 5

- Resolver nuevamente el laberinto con **múltiplos de 9.**
- Comparar el tiempo y procedimientos utilizado en ambos casos.
- Elaborar conclusiones.

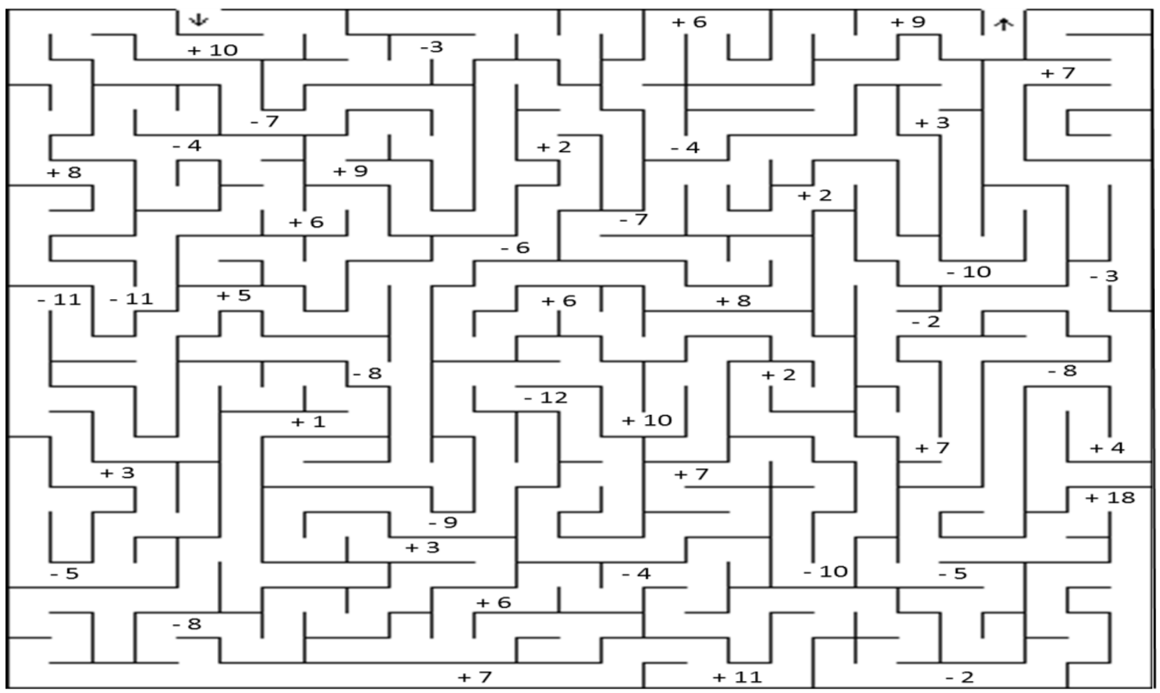
Actividad 6

- Resolver laberintos con **múltiplos de 3, 4, 6, y 8 utilizando los criterios de divisibilidad.**
- Comentar conclusiones.

Secuencia 2:	Laberinto de enteros

Material:

- Un laberinto por alumno



Indicaciones:

- **Objetivo**: Se debe encontrar el camino que le lleve de la entrada a la salida, igual que en un laberinto común, a lo largo del camino encontrara números con signo que representan monedas que un duende le entrega (si el número es positivo) o le quita (si es negativo), al finalizar el recorrido debe decir con cuantas monedas sale.
- **Observaciones:**

a) El recorrido lo inicia con cero monedas.
b) Sólo las monedas del camino correcto se contabilizan.
c) Cada duende da o quita monedas una vez. (algún alumno podría intentar pasar varias veces por un duende que le de monedas)
d) No es posible rodear a los duendes que quitan monedas para ***no pagarles***.

Secuencia didáctica

Actividad 1

- Repartir un laberinto por alumno para su solución.
- Validar la respuesta del laberinto conforme vayan terminando con la indicación: **correcto** o **incorrecto.**
- Corregir el procedimiento y la respuesta en caso de ser incorrecto.

Actividad 2

- Analizar donde reside la dificultad de la actividad.
- Exponer los procedimientos empleados de las respuestas correctas.

Actividad 3

- Definir el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$) y la notación convencional.
- Ubicar en la recta numérica el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$).
- Resolver ejercicios de suma y resta de números enteros de manera análoga sin laberinto.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 3:	Ranas y sapos

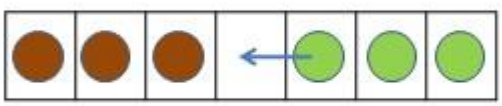
Material:

- Un tablero con 7 casillas.
- 6 fichas que representan **ranas y sapos**, 3 verdes y 3 marrón (colores opcionales).

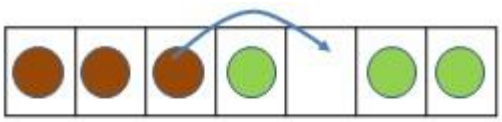
Indicaciones:

- **Objetivo:** Cambiar de posición las fichas, es decir que las verdes queden en la posición de las marrón y viceversa.
- **Observaciones:**
- Se colocan las fichas en seis espacios del tablero, dejando vacía la casilla central, agrupadas por colores (las 3 de un color del mismo lado).

- Se mueve una ficha en cada movimiento.
- Los movimientos son de dos tipos: **avanza** o **salta**, pero sólo si hay una casilla vacía.

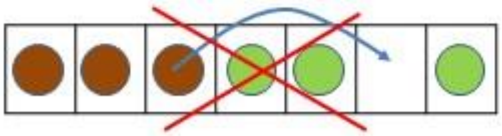


Avanza



Salto

- Los movimientos sólo son hacia adelante (no se permite regresar).
- No es posible saltar sobre 2 fichas.



Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Permitir que algunos alumnos realicen la actividad frente del grupo para entender el objetivo y familiarizarse con las reglas. (Con ayuda de un proyector y el software).

- Realizar la actividad simbolizando el juego con el material solicitado.
- Solicitar a los alumnos que logren el objetivo, una sistematización de la solución (tal que su solución no sea azarosa).

Actividad 2.

- Establecer un lenguaje convencional para simbolizar la solución y generalizarla.

Verdes:	Avanza **A**	Salta **S**
Marrón:	Avanza **a**	Salta **s**

- Utilizar el lenguaje convenido para simbolizar la solución.

Actividad 3.

- Realizar la actividad con 4 ranas de cada color y el tablero con dos espacios más.
- Realizar la actividad aumentando gradualmente, 2 ranas a la vez (una de cada color), hasta apreciar el comportamiento de la solución.
- Encontrar de manera simbólica (sin ayuda del material) la solución de la actividad con más ranas (6, 7, 8…).

Actividad 4.

- Completar la tabla con los datos obtenidos

Nota: el número de ranas es el total de fichas empleado sólo de un color.

Número de ranas	1	2	3	4	5	6	7	10	15	25	48	n
Movimientos												

Nota: Existen varias maneras de obtener la respuesta general:

a) Contar los bloques de letras (mayúsculas, minúsculas, mayúsculas…).
b) Contar la cantidad de **S's** y contar las **A's** (sin importar el tamaño).
c) Contar las mayúsculas y las minúsculas.

Actividad 5.

- Proponer generalizaciones con ayuda del álgebra.
- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Validar las fórmulas propuestas por el grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre las distintas fórmulas.

- Corregir las fórmulas que no funcionan.

Actividad 6.

- Completar la siguiente tabla.

Cantidad de ranas	Número de movimiento	Color de rana que se mueve
3	4°	
7	12°	
12	34°	
25	72°	
34	100°	
n	m	

- Proponer generalizaciones con ayuda del álgebra.
- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Validar las fórmulas propuestas por el grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre las distintas fórmulas.
- Corregir las fórmulas que no funcionan.

Actividad 7.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 4:	Teorema de Pitágoras

Material:

- Cartulina
- Juego geométrico
- Tijeras y resistol.

Indicaciones:

- **Objetivo:** armar el cuadrado de la hipotenusa con las piezas de los cuadrados de los catetos.
- **Observaciones:**
- Trazar en la cartulina un triángulo rectángulo.
- Construir cuadrados (exteriores) sobre los tres lados del triángulo.
- Realizar los siguientes trazos:

1. Trazo 1 (figura 1)

- Encontrar el centro en el cuadrado del cateto mayor.
- Trazar una paralela a la hipotenusa que pase por el punto centro.
- Trazar la perpendicular a la recta anterior que pase por el punto centro.
- Recortar las cinco piezas (4 del cateto mayor y el cuadrado del cateto menor) para formar el cuadrado de la hipotenusa.

2. Trazo 2 (figura 2)

- Construir el cuadrado interior de la hipotenusa.
- Recortar los cuadrados de los catetos y recortar las piezas en que quedaron divididas para formar el cuadrado de la hipotenusa.

3. Trazo 3 (figura 3)

- Recortar los cuadrados de los catetos y unirlos (con cinta adhesiva) de tal manera que tengan un vértice y un lado común. (Quedará un polígono con un lado que tiene por medida a+b).
- Sobre el lado a+b marcar un punto de tal manera que el lado mida b+a.
- Unir el punto anterior con los vértices opuestos de los cuadrados. (ver figura 3b).
- Recortar las 3 piezas para formar el cuadrado de la hipotenusa.

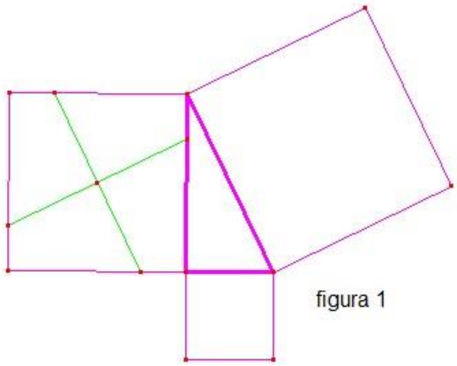


figura 1

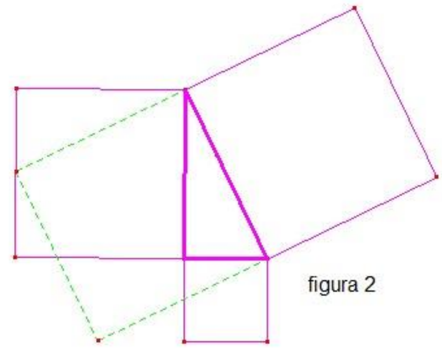


figura 2

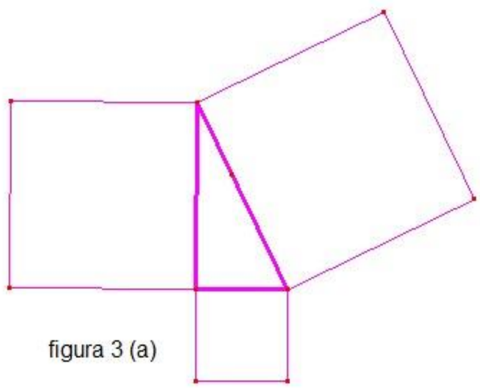


figura 3 (a)

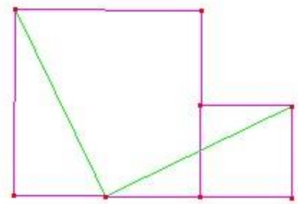


figura 3 (b)

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Exponer el triángulo, sus propiedades y notación básica.
- Realizar alguno de los trazos y recortar.
- Armar el rompecabezas (los cuadrados de los catetos en la hipotenusa y viceversa).
- Intercambiar los rompecabezas con integrantes del grupo.

Actividad 2.

- Pegar en su cuaderno de notas el rompecabezas.
- Redactar el teorema de manera informal.
- Comparar las diferentes redacciones, señalando las similitudes y corregir posibles errores de conceptos o de redacción.

Actividad 3.

- Proponer un proceso para conocer los lados de los cuadrados a partir del área con medidas numéricas.

- Solucionar ejercicios básicos con medidas dadas, utilizando el teorema de manera aritmética y con ayuda del modelo geométrico.

a) Si se conocen 2 catetos.
b) Si se conoce 1 cateto y la hipotenusa.
c) Si los catetos son de la misma medida.
d) …

Actividad 4.

- Formalizar el teorema con notación algebraica convencional.
- Solucionar ejercicios con medidas dadas utilizando el teorema de manera algebraica.
- Solucionar problemas que impliquen el uso del teorema.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 5:	**Armando cubos**

Material:

- **Rompecabezas 1** conformado por 9 piezas:

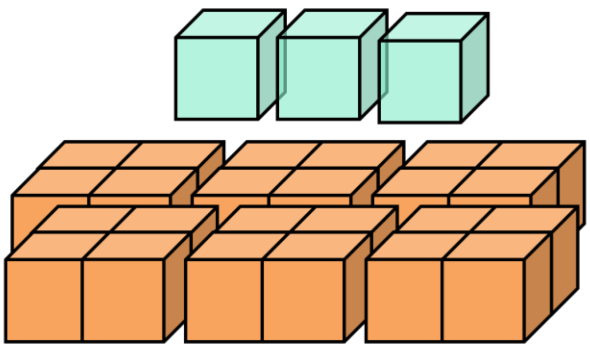
a) 3 cubos del mismo volumen (a^3).

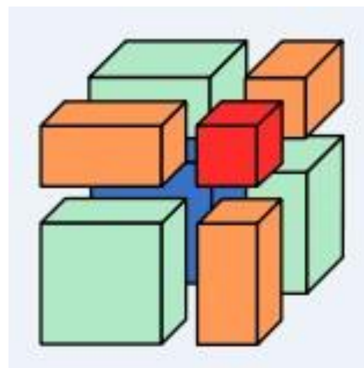
b) 6 prismas cuadrangulares de volumen equivalente a 4 cubos cada uno (**2a** x **2a** x **a**)

- **Rompecabezas 2** conformado por 8 piezas:

a) 2 cubos de volumen $\mathbf{a^3}$ y $\mathbf{b^3}$

b) 6 prismas cuadrangulares, 3 a 3 iguales en volumen ($\mathbf{a^2}$ x **b**) y ($\mathbf{b^2}$ x **a**).





Indicaciones:

- **Objetivo:** Formar cubos con las piezas.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Armar el rompecabezas 1.

Actividad 2.

- Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Es posible armar un cubo con las 9 piezas?
2. ¿Cuál es la medida de su arista?
3. ¿Cuál es su volumen?

Actividad 3.

- Asignar valores numéricos a la medida de la arista para calcular el volumen del cubo.
- Asignar valores numéricos al volumen del cubo para calcular la medida de la arista.
- Proponer una fórmula general para conocer el volumen de un cubo.
- Validar la fórmula, corrigiendo posibles fallos y señalando similitudes.

Actividad 4.

- Armar el rompecabezas 2.

Actividad 5.

- Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Es posible armar un cubo con las 8 piezas?
2. ¿Cuál es la medida de su arista?
3. ¿Cuál es su volumen?

Actividad 6.

- Construir un cuadrado de base **a + b**
- Asignar valores numéricos a los lados **a y b** del cuadrado para calcular su **área.**
- Proponer una generalización en lenguaje algebraico para conocer el **área** del cuadrado.
- Validar las expresiones algebraicas, señalando similitudes y corrigiendo posibles fallas.
- Asignar valores numéricos a la medida de la arista de los cubos $\mathbf{a^3}$ **y** $\mathbf{b^3}$ para calcular el **volumen** del cubo $\mathbf{(a + b)^3}$.
- Proponer una generalización en lenguaje algebraico para conocer el **volumen** del cubo.

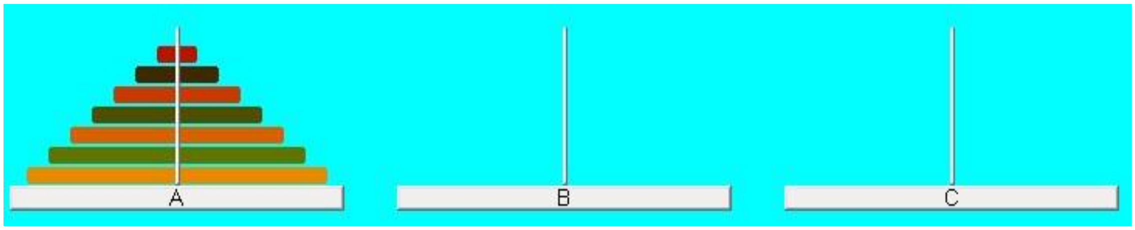
Actividad 7.

- Comentar las similitudes y las diferencias entre los 2 rompecabezas.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 6:	La torre de Hanói

Material:

- Un tablero con tres postes.
- 7 discos de diferente radio.



Indicaciones:

- **Objetivo**: Cambiar los discos de un poste a otro en el menor número de movimientos posibles.
- **Observaciones**:
- Se toma un disco en cada movimiento y se coloca sobre un poste (no puede quedarse en la mano mientras se toma otro disco).
- Un disco mayor no debe quedar sobre uno menor.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Leer la leyenda de la torre de Hanói.

Actividad 2.

- Resolver la actividad con 3 discos.
- Anotar el número de movimientos realizados.
- Aumentar gradualmente el número de discos.
- Anotar el número de movimientos realizados.

Actividad 3.

- Completar la siguiente tabla con los datos obtenidos.

Discos	1	2	3	4	5	6	7	10	23	31	n
movimientos											

- Proponer una notación para representar la solución (una letra para cada disco)

- Simbolizar las soluciones encontradas utilizando la notación convenida.
- Conjeturar el número de movimientos para más discos.
- Validar las conjeturas para algunos casos sencillos.

Actividad 4.

- Analizar la solución de casos sencillos (1, 2 y 3 discos)

Nota: Existen varias maneras de obtener la respuesta general:

a) Contar la cantidad de letras iguales que aparecen en la solución y sumarlas.
b) Notar la simetría de la solución.
c) Iterar las soluciones
   Si para 2 discos necesito 3 movimientos; para 3 discos necesito cambiar primero 2 discos (3 movimientos), sacar el 3 disco (1 movimiento) y cambiar nuevamente 2 discos (3 movimientos).
   Si para 3 discos necesito 7 movimientos; para 4 discos necesito cambiar primero 3 discos (7 movimientos), sacar el 4 disco (1 movimiento) y cambiar nuevamente 3 discos (7 movimientos)…

Actividad 5.

Será de gran ayuda notar el ***tipo de número*** que resulta ser el número de movimientos en cada caso.

- Diseñar una fórmula que modele la actividad (Cantidad de discos, movimientos).
- Validar las fórmulas propuestas por el grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre las distintas fórmulas.
- Corregir las fórmulas que no funcionan.

Actividad 6.

- Completar la siguiente tabla.

Cantidad de discos	Número de movimiento	Disco que se mueve
3	4°	
4	12°	
5	25°	
7	72°	
n	m	

- Proponer generalizaciones con ayuda del álgebra.

- Diseñar una fórmula que modele la actividad.
- Validar las fórmulas propuestas por el grupo.
- Analizar diferencias y similitudes entre las distintas fórmulas.
- Corregir las fórmulas que no funcionan.

Actividad 7.

- Elaborar conclusiones.

Anexo 1

Explicación:

A continuación se explican las sugerencias de los incisos de la **actividad 3.**

a) Contar la cantidad de letras iguales que aparecen en la solución y sumarlas.

discos/mov	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	a														
2	a	b	a												
3	a	b	a	c	a	b	a								
4	a	b	a	c	a	b	a	d	a	b	a	c	a	b	a

a's	b's	c'	d's	**total**
1				**1**
2	1			**3**
4	2	1		**7**
8	4	2	1	**15**

Es fácil conjeturar que:

discos/mov	a's	b's	c'	d's	e'	f'	**total**	**expresión**
1	1						**1**	$2^1 – 1$
2	2	1					**3**	$2^2 - 1$
3	4	2	1				**7**	$2^3 – 1$
4	8	4	2	1			**15**	$2^4 – 1$
5	16	8	4	2	1		**31**	$2^5 – 1$
6	32	16	8	4	2	1	**63**	$2^6 – 1$

Además cada número resulta ser una potencia de 2, así que

- 1 disco 2^0
- 2 discos $2^0 + 2^1$
- 3 discos $2^0 + 2^1 + 2^2$
- 4 discos $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$…
- n discos $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 \ldots 2^{n-1}$

El resultado de esta suma nos lleva a $2^n -1$

Para los incisos siguientes la solución es muy parecida.

d) Notar la simetría de la solución.
e) Iterar las soluciones.

discos	sumas	total	expresión
1 disco	1	1	$2^1 – 1$
2 discos	1 + 1 +1	3	$2^2 - 1$
3 discos	3 + 1 + 3	7	$2^3 – 1$
4 discos	7 + 1 + 7	15	$2^4 – 1$
5 discos	15 + 1 + 15	31	$2^5 – 1$
6 discos	31 + 1 +31	63	$2^6 – 1$
n discos	$(2^{n-1} – 1) + 1 + (2^{n-1} – 1)$	$2(2^{n-1} - 1) + 1$	$2^n - 1$

A continuación se explican las sugerencias de los incisos de la **actividad 5.**

disco	**Números en que se realiza un movimiento**									**estructura**	**factorizando**
a	1	3	5	7	9	11	13	15	…	2r - 1	1 (2r - 1)
b	2	6	10	14	18	22	26	30	…	4r - 2	2 (2r - 1)
c	4	12	20	28	36	44	52	60	…	8r - 4	4 (2r - 1)
d	8	24	40	56	72	88	104	120	…	16r - 8	8 (2r - 1)

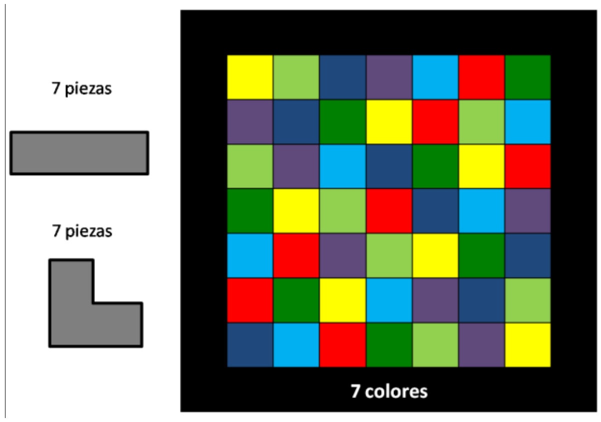
De donde podemos notar que si el disco es **n** entonces el número en que realiza un movimiento **m** es: 2^{n-1} (2r -1) donde **n** es el número de discos y **r**= {1, 2, 3, 4, 5…}

Entonces para **m** movimiento con **n** discos es necesario verificar la estructura de **m**.

Secuencia 7:	Siete colores

Material:

- Un tablero de 7 x 7 cuadrados.
- 14 piezas, 7 a 7 de área **3 cuadrados** respecto a la cuadrícula



Indicaciones:

- **Objetivo:** Colocar las 14 piezas sobre el tablero de tal manera que queden a la vista sólo las casillas de un color.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Elegir un color para todo el grupo.
- Resolver la actividad de manera individual.
- Comparar las soluciones.

Actividad 2.

- Analizar la actividad contestando las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas casillas tiene el tablero?
2. ¿Cuántas casillas cubren las 14 piezas?
3. ¿Cuántas casillas del tablero no cubren las piezas?

- Analizar la construcción de tableros de diferente tamaño, considerando la misma forma de las piezas para cubrirlo. (El tablero de juego es de 7 x 7, tiene 7 colores, 7 piezas en ele, 7 piezas rectangulares y 7 casillas sin cubrir).
- Completar la siguiente tabla.

Tamaño del tablero	Total de casillas	Piezas en ele	Piezas rectangulares	Casillas cubiertas (**a**)	Casillas sin cubrir (**b**)	**a + b**
2 x 2		2	2		2	
3 x 3		3	3		3	
4x 4		4	4		4	
5 x 5		5	5		5	
6 x 6		6	6		6	
7 x 7		7	7		7	
8 x 8		8	8		8	
9 x 9		9	9		9	
10 x 10		10	10		10	
n x n		n	n		n	

- Contestar las siguientes preguntas en base a la tabla anterior.

1. ¿Es posible construir un tablero de **n x n**, con **n** colores, **n** piezas rectangulares, **n** piezas en ele y **n** casillas sin cubrir?
2. ¿Cuál es la condición que se debe cumplir para que sea posible la elaboración del juego que cumpla con las características solicitadas?

- Demostrar que la construcción de un tablero con estas características es único para **n**=7.

Actividad 3.

- Analizar la construcción de tableros de diferente tamaño, considerando la misma forma de las piezas para cubrirlo. (Un tablero de juego de **n** x **n**, con **n** colores y **n** casillas sin cubrir, <u>pero **m** piezas en ele y **m** piezas rectangulares</u>).
- Completar la siguiente tabla.

Tamaño del tablero	Total de casillas	Casillas sin cubrir	Casillas por cubrir	Piezas rectangulares	Piezas en ele
2 x 2		2			
3 x 3		3			
4x 4		4			
5 x 5		5			
6 x 6		6			
7 x 7		7			
8 x 8		8			
9 x 9		9			
10 x 10		10			
n x n		n		m	m

- Contestar las siguientes preguntas en base a la tabla anterior.

1. ¿Es posible construir un tablero de **n x n**, con **n** colores, **n** casillas sin cubrir, pero con **m** piezas rectangulares y **m** piezas en ele?
2. ¿Cuál es la condición que se debe cumplir para que sea posible la elaboración del juego que cumpla con las características solicitadas?

- Demostrar que la construcción de un tablero con estas características es infinito.

Actividad 4.

- Construir los tableros de juego posibles menores de 7 x 7 que cumplan las reglas del juego.
- Comparar las soluciones.

Actividad 5.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 8:	**Sudoku**

Material:

- Hojas con sudokus.

				2	6	8		1
	7	2		1	5			
	8		3		7		4	2
				5			2	
		9	7	3	1		6	
3				4				
8			5	6	2	9		7
7		3		8		2	5	6
5	2	6	9	7				

nivel 1

		7	1		6			4
	3					6		
3		9	4					
					3		4	
2	4	8	6	1			7	3
		3		4	1			6
	7		3	6				
					8			1

nivel 2

4				9		7		
7				1	8	2		
		9	7					
			6					
3				8	1		2	9
	6						5	7
6		5						3
8				6				2
					2		6	

nivel 3

Indicaciones:

- **Objetivo:** Llenar la cuadrícula (sudoku) con números del 1 al 9, de tal manera que estos no se repitan en un renglón, columna o caja (sub cuadrícula de 3 x 3)
- **Observaciones**:
- El sudoku es una cuadrícula de 9 x 9 casillas, con 9 sub cuadrículas de 3 x 3 (Aunque hay sudokus de diferentes tamaños).
- Algunas de las casillas tienen números ya dispuestos (pistas).
- Cada número que se coloca en las casillas es por deducción lógica basada en las pistas.
- Existen diferentes niveles de dificultad.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Resolver el **sudoku nivel 1** de manera grupal para asegurase de la comprensión de las reglas.
- Cuestionar a los participantes ante cada opinión **“¿Por qué afirmas que el** número **va en esa casilla?”**.
- Validar la afirmación cuestionando al grupo **“¿Están de acuerdo con la afirmación?”**.

Actividad 2.

- Resolver el **sudoku nivel 2** de manera individual.
- Validar la solución señalando posibles fallas.
- Resolver el **sudoku nivel 3** de manera individual.
- Validar la solución señalando posibles fallas.

Actividad 3.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 9:	Ranas saltarinas

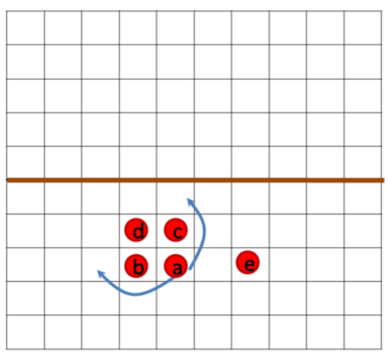
Material:

- Una cuadrícula 10 x 10 (aprox).
- 20 fichas.

Indicaciones:

- **Objetivo**: Llegar una ficha (rana) a los renglones superiores, con el mínimo de fichas posibles.
- **Indicaciones:**
- Se traza una línea horizontal que separe la cuadrícula, en la parte superior han de quedar 5 renglones.
- Las fichas saltan sólo en forma horizontal y vertical, sobre otra ficha hacia una casilla vacía y se ***comen*** (quitan del tablero) a la que se saltó.

Ejemplo: En el siguiente diagrama **a** puede saltar sobre **b** o sobre **c** pero no sobre **d** o **e.**



Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Explicar las reglas en un tablero, de tal manera que a todos los participantes les queden claros los movimientos permitidos.
- Diseñar una configuración de fichas mínimas donde una de ellas logra llegar al primer renglón por encima de la línea marcada.
- Validar las soluciones de los participantes.
- Mostrar las soluciones de la actividad.

Actividad 2.

- Diseñar una configuración de fichas mínimas donde una de ellas logra llegar al segundo renglón por encima de la línea marcada.
- Comparar las soluciones.
- Validar la solución.
- Diseñar una configuración de fichas mínimas donde una de ellas logra llegar al tercer renglón por encima de la línea marcada.
- Comparar las soluciones.
- Validar la solución.
- Completar la siguiente tabla con los datos obtenidos.

Renglón	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Fichas necesarias					

- Conjeturar sobre la respuesta para alcanzar renglón 4 y 5...
- Diseñar una configuración de fichas mínimas donde una de ellas logra llegar al cuarto renglón por encima de la línea marcada.
- Contrastar la solución con la conjetura.
- Diseñar una configuración de fichas mínimas donde una de ellas logra llegar al quinto renglón por encima de la línea marcada.

Actividad 3.

- Justificar la imposibilidad de llegar al quinto renglón.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 10:	Tiro al blanco

Material:

- Cuaderno y lápiz

Indicaciones:

- **Objetivo:** Obtener como resultado un número predeterminado realizando operaciones con subconjuntos de los seis números dados.
- **Observaciones:**
- Elegir 6 números aleatoriamente, los alumnos pueden participar (se sugiere elegir números de la siguiente manera: **3** de ellos entre **0 y 10**, **2** entre **10 y 20** y **1** entre **20 y 30**).
- Se elige un número de 3 cifras que será el objetivo a lograr.
- No necesariamente se deben utilizar los 6 números para lograr el objetivo.
- No se permite utilizar un número 2 veces.
- No se permite utilizar números que no están en la lista.
- Es posible asociar los números para tener resultados parciales y utilizarlos posteriormente.
- Es posible que después de un tiempo pertinente no se encuentre una solución que lleve al número exacto. En este caso gana el alumno que tenga el resultado más cercano.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad frente al grupo, con números seleccionados por alumnos, para asegurarse que las reglas quedan claras, por ejemplo:

Números						**Objetivo**
3	14	7	17	24	8	237

solución exacta

1.- (17*14) – (8 – 7) = 237

2.- 24 (17 – 7) – 3 = 237

3.- 8 (24 + 7) – (14 – 3) = 237

aproximación

1.- (17*7) + (14*8) + (24/3) = 239

2.- 7^3 - (14 *8) + (24 – 17) = 238

3.- 7(24 + 8)+ 14 = 238

4.- (24*8) + (3*17) - 7 = 236

5.- 8(14 + 7) + (24*3) = 240

- Proponer ejercicios para el grupo.
- Revisar las operaciones realizadas para validar el cumplimiento de las reglas y lo correcto de las operaciones.
- Mostrar al grupo las diferentes soluciones encontradas en cada ejemplo o en su defecto la mejor aproximación.

Actividad 2.

- Anotar las soluciones de manera formal, utilizando la propiedad asociativa y la jerarquización de las operaciones.
- Analizar las estrategias de los alumnos para lograr el objetivo.
- Elaborar conclusiones.

3.3 Juegos colectivos

Si [el profesor] dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad.

Polya

El aprendizaje cooperativo es una de las estrategias metodológicas que enfatizan que el alumno no aprende en solitario, que por el contrario, la actividad autoestructurante del sujeto está mediada por la influencia de los demás.

El aprendizaje de la matemática como proceso social es una idea basada en el enfoque constructivista y social de teóricos como Lev Vigotsky, quien sostiene que el desarrollo de los procesos psicológicos es consecuencia de la interacción social; el individuo toma de ella lo que necesita desechando aquello que no le es necesario, eligiendo y definiendo sus aspectos cognoscitivos y afectivos. Se puede así afirmar que la interacción social se convierte no sólo en una ayuda académica, sino también en un factor de estímulo que facilitará el desarrollo de esos procesos que aún están inmaduros (Pérez 2004).

Al respecto Piaget (1975), considera que el aprendizaje es la sumatoria de construcciones de procesos mentales por medio de la asimilación y acomodación. Cuando el individuo contrasta sus puntos de vista con los de otros y no son coincidentes, se produce un desequilibrio, lo que le conduce a buscar una explicación del porqué de esa situación, produciéndose así la construcción cognitivas más complejas.

De acuerdo con Jonhson y Jonhson (1987), podemos definir el **aprendizaje colaborativo**, como "*Un conjunto de métodos de instrucción para la aplicación en los grupos pequeños, de entrenamiento y desarrollo de habilidades mixta (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo*".

El trabajo en equipo cooperativo tiene efectos en el rendimiento académico de las participantes así como en las relaciones socioafectivas que se establecen entre ellos. Se usa el aprendizaje cooperativo como estrategia para disminuir la dependencia de los estudiantes de sus profesores y aumentar la responsabilidad de los estudiantes por su propio aprendizaje.

Se puede afirmar que al momento de resolver problemas matemáticos la interacción que se produce entre los individuos, producto del aprendizaje cooperativo *"… puede producir la subsiguiente modificación de la estructura* *cognitiva individual*" (Perret-Clermont, 1984), con lo cual un proceso que originalmente es externo, es decir social, se transforma en un proceso interno que permite al individuo enfrentar con mayores herramientas el problema en cuestión.

Por esto Gallegos (1997), sostiene que tanto la inteligencia como el desarrollo de la atención voluntaria, la formación de conceptos, la memoria lógica y la capacidad para resolver problemas se desarrollan a través del trabajo cooperativo, de la interacción entre los seres humanos.

Los enfoques sobre aprendizaje mencionados sirven de fundamento para la estrategia de aprendizaje de grupos cooperativos para la resolución de problemas matemáticos y la construcción del conocimiento a través de conflictos socio cognitivos, caracterizándose por la búsqueda y logro de objetivos individuales y grupales, distribución de roles, responsabilidad individual, igual oportunidad de éxito para todos y obligaciones compartidas.

> *Se trata de generar un ambiente de estudio en donde todos los integrantes del equipo asuman la responsabilidad de resolver juntos el problema planteado. De esta manera aprenden a relacionarse con sus compañeros, haciéndose responsables de sus propios argumentos, respetando el punto de vista de los demás, y mejor aún, ayudando a que todos entiendan y participen en el proceso de resolución del problema* (Libro del maestro SEP 1994).

En este capítulo se proponen actividades colaborativas, donde no necesariamente el término "colaborativo" tiene una connotación de ayuda, aunque sin excluir este concepto, es decir las actividades necesitan por naturaleza la interacción entre 2 o más individuos, equipos o grupos. Algunas de ellas son juegos competitivos (versus), donde el objetivo es desarrollar estrategias individuales que permitan conseguir el objetivo antes que su compañero, en otras, efectivamente, es necesario la colaboración entre los integrantes de un equipo para obtener la victoria sobre otros. La competencia vista como un proceso sano en un entorno escolar y didáctico no tiene por qué provocar sentimientos de perdedor o frustración de sus participantes, sino de respeto a las reglas y al contrincante, en este sentido las actividades permiten no sólo la adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades, sino además la formación de valores individuales y sociales.

El carácter competitivo [de los juegos] aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes (Chamoso 2004).

No podemos olvidar que el juego está muy relacionado con una competencia. Está relacionado con cosas intangibles como por ejemplo el status y la gratificación que produce jugar. Esta gratificación puede ser individual o en forma grupal. Esto va directamente relacionado con lo ayuda a ser mejor persona; a reconocer sus valores internos, logrando rescatar las reglas de la vida (Huizinga 1987).

Cuando un individuo acepta participar en actividades donde se compite, acepta intrínsecamente la posibilidad de ganar o perder y obviamente se esfuerza por ganar. Aquí será importante fomentar una competencia sana y respetuosa para conseguir el objetivo: el aprendizaje de los participantes, ya que no se compite por competir, el objetivo principal deja de ser ganar o perder, en realidad el objetivo meta es aprender aprovechando la competencia.

Si bien es cierto que en el aprendizaje cooperativo, la enseñanza, el educador, los compañeros y el contexto socioeducativo en el cual ha de experimentarse éste, son importantes, lo es también, en prioridad, el sujeto que aprende.

Citados por Murillo, Fortuny y Martin (2000), Scardamalia y Bereiter aseguran que: "*Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender cómo aprender, cómo formular preguntas y seguir líneas de investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento*".

La mayoría de las actividades que se proponen se desarrollan en un tiempo breve, permitiendo de esta manera realizarlas varias veces en una sesión, se propone que el juego no se gane sólo por una partida, sino que se convenga el número de puntos necesarios para ganar. Esto permite que los participantes aprendan de sus errores cometidos y estén más perceptivos a los errores del contrincante, cuando ambos participantes dejan de cometer estos errores, entonces es necesario concentrarse en el desarrollo de la estrategia que les permita ganar, analizando y estudiando con más detenimiento las acciones que se realizan, ya que la suerte no es un aspecto que esté presente en estas actividades, probablemente durante las primeras partidas está se haga presente, pero conforme se adquiere practica deja de ser factor y entonces se privilegia la estrategia.

Otras actividades de este capítulo son competencias entre equipos, entonces se hace necesario la colaboración entre los integrantes para ganar a los otros equipos, los participantes desarrollan una intercomunicación, delegando y aceptando roles entre los integrantes, de liderazgo, de redacción, de organización y de comunicación, entre otros. Conviene que el docente esté atento a las interacciones entre los integrantes, para lograr que en cada equipo formado, los roles sean aceptados y no impuestos o arrebatados.

Las interacciones que se producen en las relaciones establecidas en grupos de aprendizaje cooperativo para resolver problemas matemáticos, se van logrando de manera progresiva con la ayuda del docente como mediador e integrador de la actividad desarrollada y de las emociones presentes (Dewey 1998).

Una visión incorrecta de esta propuesta haría pensar ingenuamente que el profesor deja de tener responsabilidad en el proceso, y que será la interacción social la que logre los aprendizajes. Esto no es así, sólo cambia el rol tradicional que al docente se le ha asignado, cambia el papel y su función dentro del grupo, de acuerdo con Jhonson, Jhonson y Holubec (1999) sus nuevas responsabilidades en este enfoque son:

- Especificar los objetivos de la clase.
- Tomar decisiones previas acerca de los grupos de aprendizaje, el arreglo del salón y distribución de materiales dentro del grupo.
- Explicar la estructura de la tarea y de la meta a los estudiantes.
- Iniciar la clase de aprendizaje cooperativo.
- Monitorear la efectividad de los grupos de aprendizaje cooperativo e intervenir de ser necesario.
- Evaluar los logros de los estudiantes y ayudarlos en la discusión de cuán bien ellos colaboraron unos con los otros”

En las primeras 4 actividades propuestas, es posible desarrollar una estrategia ganadora (no trivial) para alguno de los jugadores, después de las primeras exploraciones del juego se pueden y deben apreciar las jugadas correspondientes para ganar.

Posteriormente un análisis más sistematizado, con registros de la información, permitirá diseñar y justificar esta estrategia, de tal manera que al volverse expertos ambos jugadores, el juego como tal pierde sentido, ya que se puede conocer al ganador del juego antes de llevarse a cabo la actividad.

Los siguientes 2 juegos son más equitativos, en el sentido que no hay una estrategia ganadora a pesar de jugadores expertos, si bien hay jugadas que llevan a la victoria, estas están basadas en la habilidad de cada jugador, igual que sucede en el ajedrez.

Finalmente las siguientes 4 actividades son ejercicios donde la intención no es aprender nuevos contenidos, sino más bien repasar los temas ya abordados en sesiones previas, sin que por ello el repaso sea monótono o mecánico.

Secuencia 1:	Al 20

Material:

- Un tablero de 15 casillas (5 x 3).
- Fichas de 2 colores diferentes (8 para cada jugador).

Al 20

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

Indicaciones:

Objetivo: Gana el primer jugador que coloca **3 fichas** de su color sobre las casillas de tal manera que los números de estas sumen 20.

Observaciones:

- Esta actividad se juega por parejas, cada jugador tiene fichas de un color.
- El primer turno se decide por suerte.
- Se coloca una ficha sobre los números de las casillas por turnos.
- Si cada jugador ha colocado 3 fichas y no hay ganador se continúan poniendo fichas hasta que alguno de ellos logre el objetivo.
- El jugador que logra el objetivo lo anuncia a su contrincante con la frase **"llego a 20"**, si no se hace se continua el juego hasta que uno de ellos lo anuncie.
- Al anunciar que se logró el objetivo se anota un punto para este jugador y se inicia una segunda partida.
- En la siguiente partida el jugador que perdió la anterior coloca la primera ficha.
- Se acuerda previo al juego cuántos puntos se necesitan para ganar.

Actividad 1. (Un módulo: **50 min**.)

- Jugar partidas **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que el objetivo y las reglas queden claros.
- Analizar de manera grupal ejemplos de partidas (varios de estos casos se presentan durante la actividad anterior).

		1er turno	2o turno	3er turno	4o turno	
a)	Jugador 1	11	14			¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	3				________________
b)	Jugador 1	6	14			¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	3				________________
c)	Jugador 1	6	11			¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	3				________________
d)	Jugador 1	6	7			¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	3				________________
e)	Jugador 1	6	9			¿Qué opinas de la acción del jugador 2?
	Jugador 2	3	10			________________
f)	Jugador 1	3	4	6		¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	12	2			________________
g)	Jugador 1	3	2			¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	12				________________
h)	Jugador 1	9	3	13		¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	12	8			________________
i)	Jugador 1	3	2	14		¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	12	15			________________
j)	Jugador 1	3	2	10		¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	12	15			________________
k)	Jugador 1	3	8	5		¿Qué opinas de la acción del jugador 2?
	Jugador 2	6	9	4		________________
l)	Jugador 1	4	5	3	8	¿Qué opinas de la acción del jugador 1?
	Jugador 2	6	11	13		________________

- Jugar partidas en casa (tarea).

Actividad 2.

- Organizar al grupo por parejas para jugar una partida a 5 puntos.
- Elaborar un rol de juego con los ganadores de la primer partida para un torneo.
- Enfrentar a los ganadores de las partidas de acuerdo al rol.
- Presentar delante del grupo las partidas con los 4 mejores alumnos de la actividad para jugar semifinal y final.

Actividad 3

- Analizar el juego para encontrar una estrategia ganadora, en base a jugadas posibles donde se elige alguna carta sin que al contrario le quede opción de ganar (jugadas obligadas).
- Formular la estrategia ganadora.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 2:	**Nim**

Material:

- 40 fichas (botones, semillas, corcholatas…)

Indicaciones:

Objetivo: Lograr que el contrincante tome la última ficha con lo que pierde la partida.

Observaciones:

- Se toma un puñado de fichas del total y se distribuyen en una superficie.
- El primer turno se decide por suerte.
- Por turnos se hacen jugadas que consisten en tomar del montón **una** o **dos** fichas.
- El jugador que gana se anota un punto.
- Se regresan las fichas al total y se toma un puñado de ellas para una segunda partida.
- El jugador que perdió la anterior ronda decide quien empieza la siguiente.
- Se acuerda previo al juego cuantos puntos se necesitan para ganar.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Jugar partidas **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que las reglas y el objetivo quede claro.
- Organizar por pares a los alumnos del grupo, para llevar a cabo la actividad.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.

Actividad 2.

- Analizar el juego para encontrar una estrategia ganadora.
- Completar la tabla bajo la siguiente información:

Si Pedro y Juan juegan Nim, considere para las respuestas que el siguiente turno es de Pedro.

total de fichas	Fichas que toma:		Ganador	
	Pedro	Juan	Juan	Pedro
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

- Deducir a partir de la tabla los números de fichas convenientes para ganar.
- Elaborar una lista con los números que convienen.
- Construir la estructura algebraica de los números convenientes.
- Completar la tabla con las deducciones logradas, suponiendo que el siguiente turno es de Pedro.

total de fichas	Ganador	
	Juan	Pedro
20		
25		
47		
74		
96		
147		
235		
n		

Actividad 3.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 3:	El juego del botón

Material:

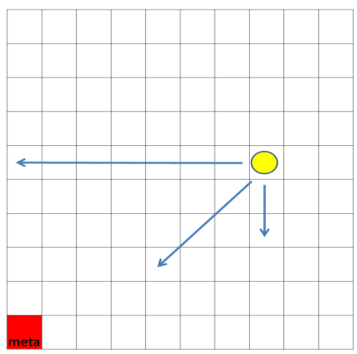
- Un botón
- Una cuadrícula de 10 x 10 con una de las casillas de la esquina marcada con rojo.

Indicaciones:

Objetivo: Llevar el botón a la casilla roja en su turno.

Observaciones:

- Es un juego para 2 personas.
- El primer turno se decide por suerte.
- En el primer turno el jugador coloca el botón en cualquier casilla de la cuadrícula.
- Por turnos moverán el botón todas las casillas que deseen sobre líneas de casillas horizontales, verticales o diagonales, en sentido de la casilla roja.



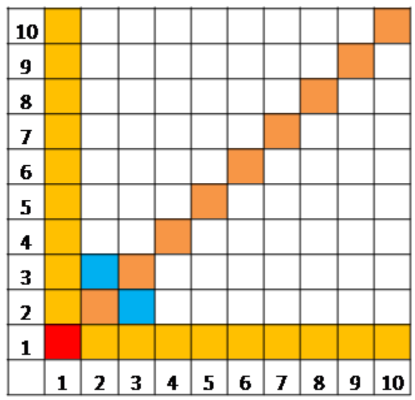
Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Jugar partidas **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que las reglas y el objetivo quede claro.
- Organizar al grupo por parejas para realizar la actividad.
- Jugar partidas a 5 puntos.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.

Actividad 2.

- Analizar el juego para encontrar una estrategia ganadora.
- Numerar las casillas horizontales y verticales partiendo de la meta (1,1)
- Colorear de **anaranjado** las casillas diagonales, donde **no conviene** colocar el botón en la primera jugada.
- Colorear de **amarillo** las casillas horizontales y verticales, donde **no conviene** colocar el botón en la primera jugada.
- Colorear de **azul** las casillas más cercanas a la meta donde **conviene** colocar el botón para ganar.



- Iterar la coloración de casillas, a partir de las casillas que convienen (casillas azules).

1. **Anaranjado**: casillas diagonales que no convienen.
2. **Amarillo**: casillas horizontales y verticales que no convienen.
3. **Azul**: casillas que convienen.

- Elaborar una lista con las coordenadas de las casillas que convienen (azules).

Actividad 3.

- Continuar la actividad (tarea) aumentando casillas en el tablero (20 x 20).
- Apreciar la simetría de las soluciones y el patrón artístico que se forma con la coloración.
- Elaborar una lista con las coordenadas de las casillas que convienen (azules).
- Encontrar la regla de correspondencia entre casillas horizontales y verticales (casillas azules).
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 4:	**El juego del factor**

Material:

- Un tablero de 10 x10 con casillas numeradas del 1 – 100
- Lápiz
- Calculadora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Indicaciones:

Objetivo: Pierde la partida quien no tenga un número para tachar.

Observaciones:

- Es un juego para 2 personas.
- El primer turno se decide por suerte.
- En el primer turno el jugador tacha un número par del tablero.
- Por turnos cada jugador debe tachar un **múltiplo** o **divisor** del número que ha elegido su compañero y que no haya sido aún tachado.
- Al proponer la comprensión de los conceptos por encima de los algoritmos se sugiere el uso de la calculadora para agilizar algunos cálculos, cuidando de no caer en el uso exagerado.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Proponer las siguientes actividades para comprender el concepto de múltiplo.

En una recta numérica con números naturales se tiene un conjunto de ranas y uno de moscas.

Las ranas se encuentran en el cero y cada una tiene un nombre que corresponde al tamaño de los saltos que da:

a) La rana 1 da saltos de 1 unidad
b) La rana 2 da saltos de 2 unidades…

Las moscas viven en casas, cada casa se localiza en un punto de la recta.

a) La mosca 1 vive en la unidad 1
b) La mosca 2 vive en la unidad 2…

- Actividades para Múltiplos.

1. Encontrar las moscas que se come cada una de las siguientes ranas al saltar:

a) Rana 2 ____
b) Rana 5 ____
c) Rana 8 ____
d) …

2. Justificar si las ranas se comen a las moscas.

a) La rana 2 puede comer a la mosca 36 ___________________________
b) La rana 3 puede comer a la mosca 56 ___________________________
c) La rana 12 puede comer a la mosca 324 ___________________________
d) …

- Actividades para Divisores.

Encontrar todas las ranas que pueden comer a las siguientes moscas.

a) Mosca 10 ____
b) Mosca 18 ____
c) Mosca 37 ____
d) …

- Definir el concepto de múltiplo y divisor a partir de las actividades anteriores.
- Definir el concepto de número primo y señalar la importancia de estos números para el juego y para la matemática general.

Actividad 2.

- Jugar partidas del juego del múltiplo **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que las reglas y el objetivo quede claro.
- Organizar al grupo por parejas para realizar la actividad en un tablero con numeración hasta 50.
- Jugar partidas a 5 puntos.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.
- Registrar en tablas las jugadas de las partidas.

Jugada	Jugador 1	Jugador 2
1		
2		
3		
…		

- Analizar las jugadas exitosas y los errores que llevan a perder el juego.
- Diseñar estrategias que permitan ganar el juego a partir de **“jugadas obligadas”**.

Nota: llamaremos **“jugada obligada”** cuando un jugador tiene sólo una opción.

Actividad 3.

- Realizar la actividad en el tablero completo (10 x 10).
- Jugar partidas a 5 puntos.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.
- Registrar en tablas las jugadas de las partidas.

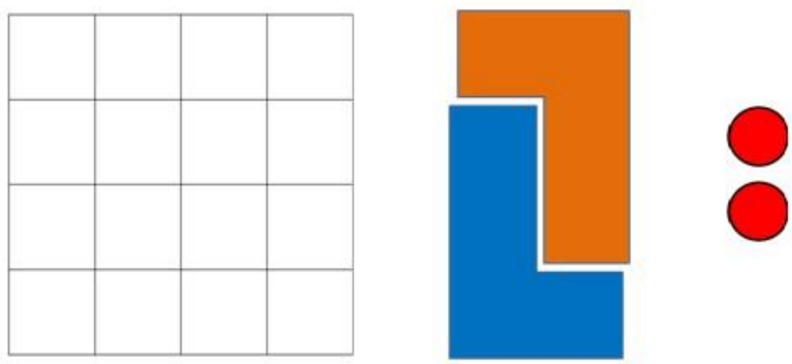
Jugada	Jugador 1	Jugador 2
1		
2		
3		
…		

- Analizar las jugadas exitosas y los errores que llevan a perder el juego.
- Diseñar estrategias que permitan ganar el juego a partir de **“jugadas obligadas”.**
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 5:	El juego de la L

Material:

- Un tablero de 4 x 4 cuadrados.
- Dos piezas en forma de ele de diferente color, cada una de las cuales cubre una superficie de cuatro cuadrados.
- Dos fichas redondas de igual color.



Indicaciones:

Este juego fue creado por Edward de Bono, medico, psicólogo y pensador maltés, con la intención de producir el juego más simple posible, que pudiera jugarse con un alto grado de habilidad donde no hubiera estrategia ganadora y con un mínimo de piezas y reglas.

Objetivo: Inmovilizar la L del contrario.

Observaciones:

- La posición inicial del juego es con las L´s en las columnas centrales y las 2 fichas en esquinas opuestas (superior derecha e inferior izquierda).
- El primer turno se decide por suerte.
- Por turnos cada jugador puede realizar dos movimientos:

1. Mover su pieza "**L**" a cualquiera de las posiciones no ocupadas del tablero. Su nueva posición tiene que diferir de la anterior por lo menos en un cuadrado.
   La pieza "**L**" se puede girar antes de colocarla en el tablero. No se permiten pruebas sobre el tablero ni rectificaciones.
2. Después de colocar la pieza "**L**", el mismo jugador si lo desea, pude mover una sola de las fichas a cualquier cuadro vacío.

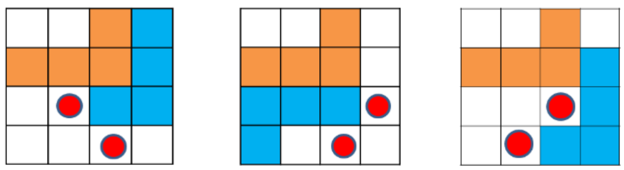
Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Jugar partidas **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que las reglas y el objetivo quede claro.
- Organizar al grupo por parejas para realizar la actividad.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.

Actividad 2.

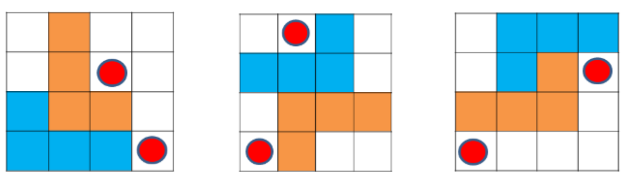
- Diseñar la partida más corta posible.
- Diseñar las posiciones ganadoras (se muestran 3 ejemplos).



- Comparar las propuestas encontradas, discriminando las soluciones idénticas, simétricas o rotadas, incluso las que muestren una pequeña variación de las fichas rojas.

Actividad 3.

- Resolver problemas de selección de mejor jugada (del tipo **azul mueve y gana**).



- Diseñar problemas de este tipo.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 6:	Gomoku

Material:

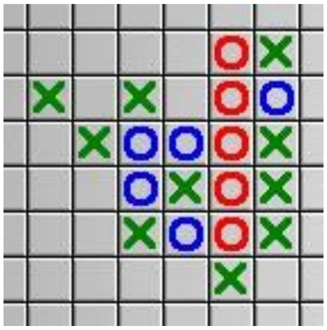
- Hojas cuadriculadas y lápiz

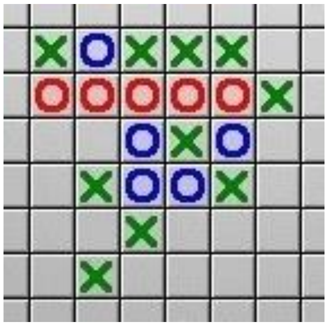
Indicaciones:

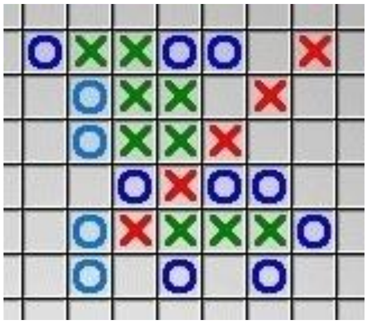
Objetivo: Colocar **5 símbolos** juntos en fila de manera horizontal, vertical o diagonal.

Observaciones:

- Esta actividad es para 2 jugadores, uno de ellos colocara sobre las casillas de la cuadrícula **x** y el otro **o.**
- El primer turno se decide por suerte.
- Por turnos se hacen jugadas que consisten en colocar, dentro de las casillas de la cuadrícula, las marcas correspondientes.







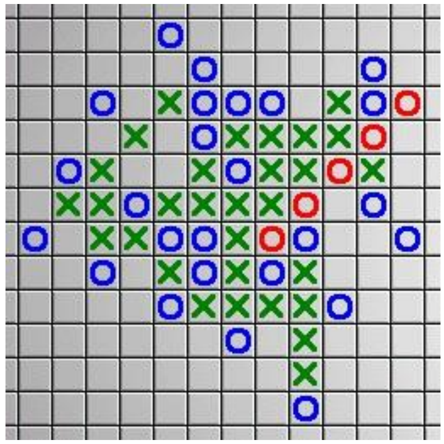
Ejemplo 1 Ejemplo 2 Ejemplo 3

- En los diagramas anteriores se ejemplifican partidas:

1. Ejemplo 1: gana **o**
2. Ejemplo 2: gana **o**
3. Ejemplo 3: gana **x**

En teoría se supone un tablero infinito (no hay tamaño), aunque una partida normalmente acaba en tableros pequeños.

La siguiente figura muestra una partida larga en la que gana **o**.



- El jugador que logra el objetivo se anota un punto.
- Previamente se acuerda el total de puntos para ganar el juego.
- El jugador que perdió la partida anterior coloca el primer símbolo en la siguiente.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Jugar partidas **profesor vs alumno** varias veces frente a todo el grupo para asegurarse que las reglas y el objetivo quede claro.
- Organizar al grupo por parejas para realizar la actividad.
- Cambiar las parejas de alumnos, conforme resulten ganadores, de acuerdo a la habilidad mostrada.

Actividad 2.

- Analizar el juego para encontrar estrategias que den mayor probabilidad de ganar.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 7:	Yo primero

Material:

- Tarjetas con contenidos a repasar.

Indicaciones:

Objetivo: Resolver ejercicios correctamente en el menor tiempo posible.

Observaciones:

- Se preparan tarjetas con ejercicios de algún tema en particular (operaciones aritméticas, áreas geométricas, ecuaciones, productos notables…)
- Los ejercicios deben ser posibles de realizar mentalmente de acuerdo al nivel del grupo.
- El juego es una competencia entre integrantes de 2 equipos (compite una persona de cada equipo).
- El coordinador muestra el ejercicio de una tarjeta a ambos alumnos que compiten, quienes intentan ser el primero en resolver mentalmente el ejercicio y dar su respuesta.
- Si la respuesta que se dio es correcta gana un punto para su equipo, en caso de ser incorrecta el punto es para el otro equipo.
- Se continúa con los siguientes integrantes.
- La respuesta de cada ejercicio se escribe en la parte de atrás de la tarjeta, de tal manera que los participantes no puedan verla, así es más ágil que el coordinador valide la respuesta y asigne el punto a quien corresponda.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Organizar al grupo en 2 equipos (por ejemplo: hombres y mujeres) y se hacen con ellos 2 filas, el coordinador es el profesor.
- Realizar la actividad.
- Asignar los puntos y obtener un equipo ganador.
- Analizar los procesos que utilizan los alumnos que aciertan.

Actividad 2.

- Elaborar un juego de 10 tarjetas sobre un tema en particular (cada alumno de tarea).
- Organizar al grupo en equipos de 3 integrantes y realizar la actividad de la siguiente manera:

1. En cada equipo un alumno será el coordinador y 2 serán los participantes.
2. El coordinador muestra las tarjetas a los participantes, quienes intentan responder mentalmente el ejercicio con rapidez.
3. Si la respuesta es correcta se entrega la tarjeta al alumno que acertó, en caso contrario se entrega al otro jugador
4. Se muestra otra tarjeta a los participantes y se sigue la misma mecánica.
5. El alumno que logre tener 5 tarjetas gana la competencia.

- Se cambian los roles de los alumnos, el coordinador competirá contra el alumno ganador y el alumno que perdió será el coordinador.

Nota: es conveniente elegir las tercias con alumnos del mismo nivel académico para lograr una buena competencia.

- Realizar la actividad varias veces intercambiando los integrantes de los equipos.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 8:	Yo lo tengo

Material:

- 30 tarjetas con contenidos a repasar.

Indicaciones:

Objetivo: Repasar conocimientos adquiridos sobre un tema en particular.

Observaciones:

- Se elaboran 30 tarjetas con preguntas de un lado y respuestas del otro.
- Cada tarjeta tiene una pregunta: **"¿Quién tiene…?"** y una respuesta: **"Yo lo tengo…"** que corresponde a la pregunta de otra tarjeta.
- Se inicia el juego con un alumno que lee su pregunta: **"¿Quién tiene…?"**
- Los alumnos del grupo revisan sus tarjetas y el que tiene la respuesta dice: **"Yo lo tengo…",** a continuación lee su pregunta, de tal manera que se forme una cadena de preguntas y respuestas.
- En caso de que se cierre la cadena se elige otro alumno que inicia una nueva cadena.
- En caso de que sobren tarjetas, se pueden repartir a algunos alumnos o tenerlas el profesor, pues tienen respuestas y preguntas que son necesarias durante el juego.
- El tema del juego puede ser cualquiera que se desee repasar.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Repartir una tarjeta por alumno.
- Realizar la actividad.
- Validar de manera grupal las respuestas.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 9:	Zoo lógico

Material:

- Pares de tarjetas (tantos como pares de alumnos se formen en el grupo).

Indicaciones:

Objetivo: Encontrar en el menor tiempo posible su pareja.

Observaciones:

- Cada par de tarjetas está formado por ecuaciones de primer grado con una variable, distintas pero con la misma solución.
- Las tarjetas se entregan a los alumnos de manera aleatoria.
- Cada participante resuelve (mentalmente) la ecuación de su tarjeta y se levanta de su lugar para encontrar a su pareja.
- Cada participante se coloca en el pecho su tarjeta para que los demás puedan verla.
- Cada participante debe resolver las ecuaciones de los demás hasta encontrar al que tenga una ecuación con la misma respuesta que la que él tiene.
- **No se permite hablar durante la actividad.**
- Se sugiere que las ecuaciones se elijan de tal manera que sean posibles de resolver mentalmente, pues lo que se pretende afianzar es el procedimiento básico.
- El tema del juego puede ser cualquiera que se desee repasar (operaciones aritméticas, geometría, factorización-productos notables…)

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Exponer el tema ecuaciones de primer grado con una variable y el procedimiento para encontrar su solución.

Nota: Aunque aquí no se detalla una secuencia didáctica para comprender el tema “Ecuaciones de primer grado con una variable”, se sugiere que se diseñe una secuencia basada en el modelo de la balanza que permita este objetivo.

- Proponer ejercicios para sistematizar el proceso.

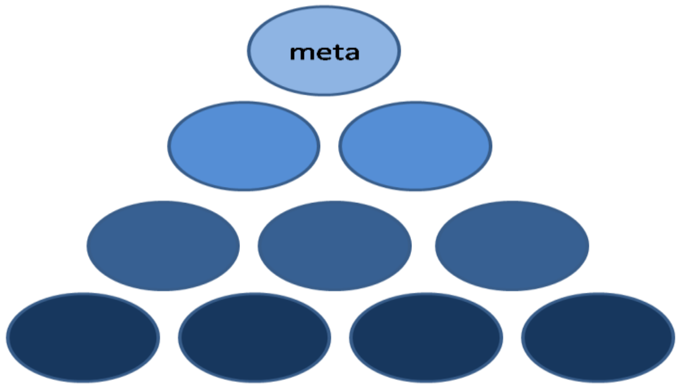
Actividad 2.

- Repartir las tarjetas.
- Realizar la actividad.
- Validar que las parejas formadas cumplan el objetivo.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 10:	Pirámide

Material:

- Un tablero en forma de pirámide.
- Fichas de colores, una para cada equipo.
- Cuestionario con preguntas y problemas del grado correspondiente.



Indicaciones:

Objetivo: Ser el primer equipo en colocar la ficha correspondiente en la casilla superior del tablero.

Observaciones:

- Es una competencia por equipos (conviene que estén conformados por 3 o 4 integrantes).
- El coordinador hace una pregunta para todos los equipos formados.
- Los integrantes de cada equipo trabajan colectivamente para dar una respuesta correcta.
- El equipo que contesta acertadamente puede elegir 2 cosas:

a) Subir su ficha un nivel.
b) Bajar la ficha de un equipo contrario un nivel.

- Al iniciar la competencia no hay fichas sobre el tablero, conforme van contestado acertadamente se colocan las fichas ascendiendo por niveles (de abajo hacia arriba).
- Se recomienda que las preguntas y problemas se elijan para que la respuesta o solución no sea inmediata, pero tampoco requiera mucho tiempo para resolverla.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Organizar al grupo en equipos de 3 o 4 integrantes cada uno.
- Realizar la actividad.
- Elaborar conclusiones.

3.4 Software recreativo

¿Por qué esta magnífica tecnología científica, que ahorra trabajo y nos hace la vida más fácil, nos aporta tan poca felicidad? La repuesta es ésta: simplemente porque aún no hemos aprendido a usarla con tino.

Albert Einstein

La computadora debe convertirse en una herramienta de aplicación cotidiana, que le ayude al docente a enseñar y al alumno a aprender, así lo afirma Sotomayor (nf) en el documento *Desarrollo de juegos de computadora*, y continua diciendo que *la utilización de la misma en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática debe llevar a cambiar, no sus contenidos formales, pero sí la forma de transmitirlos a los alumnos, consiguiendo así una mayor motivación e interés por parte de éstos en la materia.*

Con las primeras ideas que se tuvieron en el campo de la educación sobre las nuevas tecnologías y particularmente de la computadora (al ser una herramienta que realiza múltiples procesos en corto tiempo, de manera automática con una enorme precisión y sin errores) hubo varias posturas dentro y fuera de la educación:

Se pensó que el uso de la computadora supliría al maestro y por lo tanto hubo gran resistencia para utilizarlas, además en esta misma postura, se pensó que la computadora haría el trabajo que los alumnos venían haciendo en lápiz y papel; largos y tediosos ejercicios aburridos ahora se resolvían en un par de segundos, por lo tanto volvía innecesario el papel del maestro, se quitaba lo único que los profesores sabían hacer, una enseñanza tradicional basada en la repetición de algoritmos y ***trucos sorprendentes*** para ejercicios rutinarios.

Justo en el otro extremo hubo quienes lo intentaron como una manera de ahorrarse el trabajo creyendo que la computadora haría su trabajo, ya que existió una fuerte creencia de que la incorporación de la computadora en el proceso educativo mejoraría el proceso de manera automática.

Otra creencia estaba relacionada con el pensamiento de que las computadoras son para los jóvenes o para los expertos, situación que suele dificultar el acceso de los profesores al uso del equipo de cómputo como apoyo en su labor, ya que en muchos ámbitos existe un temor y resistencia a lo nuevo.

Algunos más, sólo lo vieron como moda, profesores con algunos años de experiencia y que habían visto pasar recursos didácticos y materiales novedosos que al paso de un poco de tiempo se volvían obsoletos o fuera de utilidad práctica, tuvieron la idea de que la computadora sería un recurso más de esta lista.

Hoy en día esta situación ha cambiado, en esta etapa de profundos cambios derivados de los avances científicos y tecnológicos nadie duda que el papel que la computadora ha de redefinirse dentro de la metodología actual de la enseñanza, incluso se ha realizado una gran investigación al respecto, dando como resultado una línea de estudio: La Educación Informática, campo de investigación que se ocupa más allá del uso de la computadora como tal.

En muchas políticas educativas, la incorporación de herramientas tecnológicas es un desafío que se propone alcanzar ante la presencia de nuevos paradigmas pedagógicos. Su objetivo principal es ayudar a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. La incorporación de las tecnologías en el aula de Matemáticas despierta el deseo de aprender en los alumnos y su interés por los contenidos de la materia Sotomayor (nf).

La computadora no puede ni debe sustituir al maestro en el desempeño de la función docente. En la metodología de enseñanza-aprendizaje más reciente no se considera al profesor únicamente como conocedor y transmisor de conocimientos, ni como autoridad definitiva en la clase. Se destaca en cambio, su papel de facilitar las condiciones en las que el alumno pueda responsabilizarse de su propio aprendizaje. Frente al avance de las nuevas tecnologías, y teniendo en cuenta que los alumnos conviven con herramientas informáticas en lo cotidiano, los docentes deben buscar alternativas que posibiliten mejorar la calidad de la enseñanza de la Matemática, y así contribuir a la modernización de los ambientes escolares. El maestro asume la responsabilidad de poner a disposición del alumno las ventajas que éstas pueden proporcionarle dentro del programa de estudios. Por otra parte, el cambio en el papel del profesor determina un papel más activo para el alumno, que interviene ahora directamente en los procesos de aprendizaje.

Tenemos también la oportunidad de poner énfasis en la comprensión de los procesos más que en la ejecución de rutinas, los profesores debemos estar preparados para fomentar una actividad viva, dinámica, exploratoria, ya que en esta práctica los roles de los participantes del proceso educativo se modifican sustancialmente.

Para los alumnos

- Posibilitan y motivan a que el alumno interactúe con el contenido durante mucho tiempo a voluntad propia.
- Hacen que gane confianza como ser intelectual y no sienta pena ni miedo de aprender.
- Permiten que los alumnos avancen según su desarrollo intelectual, el cual se va potenciando paulatinamente con el mismo juego.

- Desarrollan habilidades propias de la ciencia en general y de la matemática en particular, investigar modelos, formular conjeturas, validar hipótesis…
- Facilitan que el alumno se evalúe según los resultados obtenidos y que repita el juego o los niveles que no ha vencido.
- Desarrollan otras habilidades intelectuales relacionadas con el empleo de las tecnologías.

Para el maestro

- Permiten planificar nuevas formas de aprendizaje, donde el contenido es presentado por el maestro y personalizado por el alumno.
- Permiten emplear más tiempo en el estudio y búsqueda de nuevas formas y métodos de enfocar y presentar el contenido.
- Parte del tiempo destinado a hablar o a dictar contenido puede ser destinado a controlar, diagnosticar e inducir el contenido.
- Las características de los juegos y la aceptación de estos hace que la asignatura sea más amena y aceptada por el estudiante.
- Permiten explotar nuevas técnicas de evaluación, que para el estudiante pueden ser transparentes, en las que, el maestro, con sólo ver los resultados del juego percibe el nivel de conocimiento del estudiante.
- Permiten nuevas formas de estudio independiente y la extensión de este a la casa y a los centros comunitarios que prestan servicios informáticos.

Además, la tecnología introduce una nueva era de los procesos educativos basada en la visualización. Rasmussen, Erickson y Shaff (1998) indican que las computadoras permiten realidades psicológicas difíciles de desarrollar por el maestro en el aula: la visualización de imágenes, figuras, y la reproducción de sonidos. Lo que significa que trabajando con las computadoras los estudiantes pueden ***ver*** relaciones entre entes matemáticos, situación que es difícil o imposible de lograr en su ausencia.

Bajo estas reflexiones conviene preguntarnos, al respecto del uso de la computadora con un objetivo escolar intencionado, ¿De qué manera la computadora puede apoyar el aprendizaje promoviendo una adecuada actitud, fortaleciendo rasgos de carácter, centrando el estado mental al momento del aprendizaje, proporcionando ambientes para la integración de conocimientos, destrezas y hábitos y además desarrollando las habilidades de pensamiento?

Trabajos como los desarrollados por Galvis (1988) demuestran que la computadora puede asumir diversos papeles como recurso didáctico, siendo posible en consecuencia, generar ambientes de aprendizaje apoyados por la computadora de muy diversa naturaleza.

Los programas didácticos tienden a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, ya que constituyen una herramienta de apoyo para los alumnos en el proceso educativo y se transforman en herramientas efectivas para mejorar su rendimiento en el aula.

Estudios como los realizados por Maldonado (1991) han puesto de manifiesto que en las aulas en las que se desarrollan procesos de enseñanza-aprendizaje con apoyo de las computadoras:

- Existe una fuerte interacción entre tradición e innovación.
- La estructura de un aula de cómputo tiende a facilitar tipos de interacciones que no se dan en un aula tradicional.
- El trabajo con el computador sirve como estímulo a la interacción constructiva entre estudiantes.
- Se puede predecir que la existencia de tensiones diferentes a las existentes en las aulas tradicionales puede facilitar la redefinición del papel social del educador y que si se impulsan prácticas que animen a compartir experiencias y a discutir marcos de referencia nuevos, se pueden generar cambios valiosos para la educación.

Las computadoras en educación tienen el potencial de permitir la generación de aprendizajes más significativos, en el sentido planteado por David Ausubel (Trujillo 1992).

El análisis retrospectivo sobre la participación de la informática en la educación, nos muestra que se han dado en las escuelas dos aspectos. Por un lado, la Informática Educativa se ha venido desarrollando desde aquellos primeros intentos con el lenguaje de programación LOGO hasta los programas multimedia y el uso de Internet; por otro lado, las escuelas han abordado la Educación sobre Informática y han ido construyendo laboratorios de computación en los que los alumnos han aprendido lenguajes de programación y el uso de programas; principalmente, editores de texto y tutoriales.

El concepto de Informática Educativa hoy suele abarcar un variado repertorio de programas computacionales potenciales. Los tipos de programas educativos más conocidos son:

- Ejercicios y prácticas.
- CAS (sistemas de cómputo algebraico) y graficadores.
- Programas de presentación-demostración.
- Tutoriales.
- Programas de simulación.

- Sistemas expertos.
- Sistemas de diálogo.
- Juegos educativos (programas lúdicos).

Si bien es cierto que muchos de estos programas requieren el pago de una licencia de uso, también es cierto que la filosofía de ***software libre*** se ha desarrollado ampliamente en la informática, el término ***software libre*** se refiere a libertad, tal como fue concebido por Richard Stallman (2004, pág. 24) en concreto se refiere a cuatro libertades:

1. Libertad para ejecutar el programa en cualquier sitio, con cualquier propósito y para siempre.
2. Libertad para estudiarlo y adaptarlo a las necesidades propias. Esto exige el acceso al código fuente.
3. Libertad de redistribución, de modo que permita colaborar con vecinos y amigos.
4. Libertad para mejorar el programa y publicar las mejoras. También exige el código fuente.

Un programa es software libre si los usuarios tienen todas estas libertades; puede redistribuir copias al público con o sin modificaciones, gratis o cargando una tasa para distribución a cualquiera en cualquier lugar, siendo libre de hacerlo mientras que no tenga que preguntar o pagar por un permiso.

Basados en esta filosofía los programas aquí utilizados tienen esta característica, siendo posible su descarga y distribución de manera gratuita.

Juegos educativos.

Los juegos de simulación tienen la capacidad para sumergir al jugador en mundos que han sido creados artificialmente a través de unas reglas (López 2006). Al respecto de estos mundos virtuales Galvis (1991) habla de crear micromundos informáticos de modo que los alumnos, a través de la interacción con ellos, puedan tener vivencias significas para desarrollar sus capacidades o para superar sus deficiencias.

Los juegos educativos tienen mucha aplicación. El elemento lúdico suele convertir un ejercicio en un desafío motivador. El alumno considera a la computadora como un adversario al que puede vencer. Los juegos pueden tener también desventajas, tanto el alumno como el maestro pueden confiar demasiado en el funcionamiento automático de las actividades como mecanismo de aprendizaje. Para evitar el riesgo de un aprendizaje poco profundo, es conveniente que las clases incluyan actividades adicionales para consolidar lo aprendido por medio de la computadora.

Es por esto que pensar en enseñar Matemática con las computadoras, en algunas ocasiones puede resultar un gran logro didáctico, y resulta necesario que los profesores tengan en cuenta las posibilidades que estos productos informáticos ofrecen a sus alumnos y se animen a incorporar los juegos de computadora en sus clases ya que los docentes no pueden estar ausentes frente a los cambios que provoca en esta sociedad la influencia de la Informática. Así lo deja ver el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas al manifestar que "…los sistemas educativos de todo el mundo se enfrentan actualmente al desafío de utilizar las NTICs (Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación) para proveer a sus alumnos las herramientas y conocimientos necesarios para el siglo XXI" (EDUTEKA, 2003).

Características de los juegos en software.

Los juegos de computadora son un material informático que, aunque aparentemente no formen parte del denominado ***software educativo***, poseen unas características muy interesantes y perfectamente aplicables a la educación y, en concreto, a la didáctica de muchos aspectos de las matemáticas.

Las características que tienen estos juegos son:

- Presentan un problema.
- Existe un motivo, hay reto.
- Aunque las reglas son claras, tienen que experimentarse y descubrirse en la acción.
- Posibilidad de diferentes estrategias de solución.
- Posibilidad de experimentar soluciones.
- Posibilidad de identificar los elementos que forman parte de la solución y los que son distractores.
- Necesidad de estimación.
- Interacción en todo momento a partir del juego se derivan datos para la solución de problemas.

Si aceptamos que los juegos de computadora son útiles para lograr nuestros objetivos dentro de la educación, también debemos analizar cuáles son los juegos y sus características que nos lleven a dicho objetivo, ya que no se trata de entretener o el juego por el juego mismo, una correcta planeación del uso de juegos hará más eficiente el desarrollo del proceso de aprendizaje, de acuerdo con Campos (1997) algunas de estas características son:

- Cada juego debe abordar un tema específico de la materia y el nivel de estudios.
- Deben servir de apoyo en el aula.
- Su uso principal es grupal. Esto, por supuesto, no limita el hecho de que además, puedan ser utilizados en equipo o de manera individual; como apoyo en la clase o fuera de ella.
- Reconozcan el papel preponderante del factor emocional en el aprendizaje. Los pensamientos que más se asimilan, son los relacionados con sentimientos significativos y con conductas dadas en contextos.
- Consideren los intereses reales de los alumnos por los juegos computarizados.

Es importante señalar en este momento que los juegos propuestos en este trabajo no son aquellos juegos comerciales de acción, ni deportivos, son un grupo de juegos seleccionados que permiten el desarrollo de habilidades de pensamiento y contenidos de los planes y programas de un curso de matemáticas.

En este amplio abanico de programas y recursos, existe gran cantidad de juegos llamados clásicos, ya que muchas generaciones nos hemos divertido con ellos y ahora se tienen en versión para computadora.

- El solitario
- La torre de Hanói
- Tangram
- Conecta 4
- Ajedrez
- Memorama
- Mastermind
- Dominós…

El avance de la tecnología nos permite tenerlos ahora de manera digital y poder participar de ellos ahora en versión para computadora, con grandes ventajas para el ámbito educativo y particularmente para el profesor de matemáticas. Además esta tecnología ha permitido desarrollar nuevos e interesantes juegos que por sus gráficos, sonidos e interesantes reglas nos permiten pasar muchos momentos entretenidos y de manera no intencionada, incluso nos permiten aprender matemáticas informales, ejemplos de ellos tenemos:

- Sokoban
- Blobs
- Allout
- Tetravex
- Deslizzp
- Puzztrix
- Klostki
- 5 Star free lines…

El enfoque actual respecto a la enseñanza de las matemáticas es la resolución de problemas, y los juegos cumplen esta característica pero aún más interesante, ya que de entrada permiten a los alumnos interactuar una y otra vez con los ***objetos*** y sus propiedades y basta un clic para reiniciar y aprender a partir de los errores cometidos hasta lograr encontrar las pautas que nos permitan lograr el objetivo o alcanzar un mejor puntuación (record).

Estos juegos acrecentan su interés porque dadas sus reglas sencillas y diferentes niveles de complicación permiten a todo público jugar con ellos, hombres y mujeres, de todas las edades están en condiciones de intentar resolver-ganar las actividades propuestas, de manera colectiva o de manera individual, con sol o mal clima, por aprender o solamente por diversión.

Enmarcando el uso de estos juegos en educación matemática es posible después de un primer acercamiento únicamente lúdico, comenzar un análisis que nos permita generalizaciones y procesos más formales desde el álgebra, la aritmética, la geometría, el análisis, la probabilidad, es decir no escapa ninguna de las ramas de la matemática. Permitiendo iniciarlo en todos los niveles de educación básica e incluso grados de educación media superior y superior.

En un estudio realizado por Campos (1997) al interrogar y observar a 115 chicos entre 6 y 15 años jugando, concluye que cada situación presentada por las opciones del juego, implica:

- Un problema que tiene que ser resuelto.
- Existe un motivo, un deseo de resolver el problema.
- El reto estimula la búsqueda de soluciones.
- La primera vez que se juega, se desconocen todas las reglas y las posibles alternativas.
- Se pierde pronto. El error es inmediato; persiste el deseo de solución.
- Hay interés y se resiste la frustración al error; se generan posibles estrategias de solución.
- Hay flexibilidad del pensamiento en la búsqueda de soluciones; si algo no da resultado se desecha; si algo resulta, se vuelve a intentar.
- Se aplica la memoria generalizada; después de varias pruebas, se identifican los elementos que forman parte de la solución y los que son distractores.
- Se hace una clasificación completa; constantemente se hacen estimaciones de fuerzas, distancias, puntos, velocidades, direcciones, ...

Estas habilidades, independientemente de otros factores positivos o negativos que pueda tener el uso de este tipo de juego, fueron consideradas para la elaboración de las actividades que se proponen.

En un primer vistazo a las actividades se puede pensar que no hay una relación (ya que no es evidente, en la mayoría de ellos) entre los juegos seleccionados y la matemática tal y como tradicionalmente se presenta (numérica, simbólica o algorítmica), sin embargo cada uno de los juegos propicia o desarrolla de manera intencionada habilidades propias de la matemática descritas en el capítulo 2 y que en muchas de las ocasiones se dejan a un lado en la planeación de clase, confiando en que estas habilidades se logren en automático y de manera paralela a los contenidos, sin embargo el software permite abrir esa ***caja negra*** y analizar estos procesos complejos de una manera más sistemática y analítica.

Un análisis menos ingenuo permite apreciar la riqueza que se puede obtener de ellos para el logro de los objetivos de la matemática escolarizada y adquirir conocimientos y habilidades.

Algunos de los juegos seleccionados tienen el propósito de mostrar temas propios de niveles educativos superiores de una manera empírica y sin rigor, para que los alumnos conozcan un panorama más amplio de la matemática, entendiéndola como una ciencia amplia y en constante evolución.

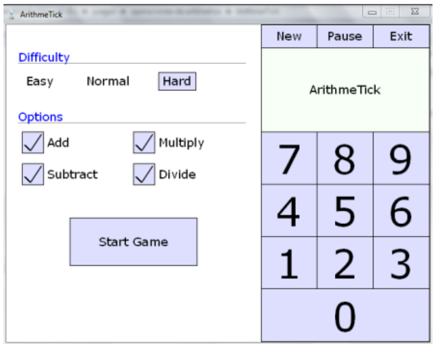
Secuencia 1:	Arithme tick

Indicaciones:

- **Software**: Arithme tick
- **Liga**: http://arithmetick.uptodown.com/
- **Guía breve**:

1. **Play:** Permite elegir nivel de dificultad y tipo de operaciones a practicar.
2. **Options:** Permite elegir si se quiere sonido o en silencio.
3. **Highscores:** Muestra el record de las puntuaciones más altas.
4. **Quit:** cierra el programa

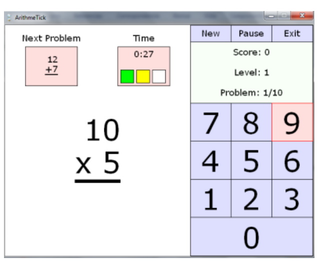
1. **Dificulty:** Selecciona nivel de dificultad.
   Easy ….. Fácil
   Normal…. Regular
   Hard….. Difícil
2. **Options:** Selecciona el tipo de operaciones que se quiere practicar
3. **Start game:** Inicia el juego.

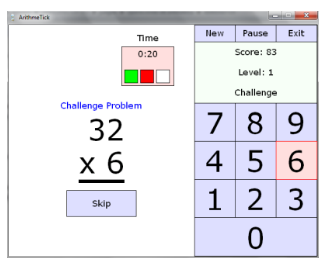


Objetivo: Resolver la mayor cantidad de operaciones para obtener la más alta puntuación posible evitando que se agote el tiempo.

Observaciones:

- Al iniciar el juego aparece una ventana con operaciones básicas, lo cual en un inicio da la impresión de ser un juego sin mucho interés, sin embargo lo interesante es darnos cuenta de que se compite contra reloj.
- El reloj inicia con 30 segundos de juego que se agotan si nos tardamos en dar respuesta a las operaciones.
- Cada operación con respuesta acertada nos regala segundos extras en el reloj.
- Es posible dar la respuesta con las teclas numéricas del teclado o haciendo clic en los números de la ventana.
- La operación cambia sólo cuando la respuesta es correcta, si la respuesta es incorrecta la operación sigue en la ventana.
- Hay operaciones difíciles que nos dan más segundos en el reloj y más puntos al marcador. Estas operaciones es posible saltarlas dando clic en **skip.**
- Si se agota el tiempo aparece una ventana donde nos indica la puntuación lograda.
- Para volver a intentarlo se hace clic en **ok.**





Secuencia didáctica

Actividad 1

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Repartir una hoja donde los alumnos anoten la puntación en cada partida jugada.
- Desarrollar la actividad en la computadora.
- Colocar en el pizarrón una lista de record conforme se vayan superando.

Actividad 2.

- Analizar la estadística de las puntuaciones anotadas (se espera que sean crecientes).

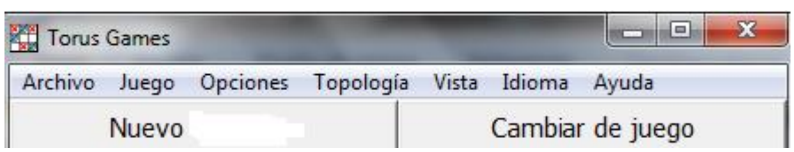
- Graficar las partidas contra las puntuaciones.
- Analizar los algoritmos utilizados para resolver las operaciones durante el juego (no necesariamente son los tradicionales).
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 2:	**Torus games**

Indicaciones:

- **Software**: Torus Games.
- **Liga:** http://www.geometrygames.org/TorusGames
- **Guía breve**:

Ventana Escoge un juego: Ofrece 9 posibilidades, un juego se selecciona haciendo doble clic sobre la imagen



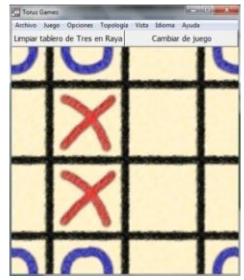
La ventana principal tiene 7 opciones:

1. **Archivo**: Permite abrir otra ventana de juego o salir del programa.
2. **Juego**: Permite elegir alguno de los 9 juegos.
3. **Opciones**: Permite elegir contra quién jugar: humano o máquina (habilitado sólo en algunos juegos), también el nivel de dificultad y el sonido.
4. **Topología**: Permite elegir el espacio donde jugar: toro o botella de Kein.
5. **Vista**: Permite elegir una de las tres posibles vistas; pantalla grande, pequeña y una teselacion del juego (repeticion multiple del juego)
6. **Idioma**: Permite configurar el idioma en que se muestran los textos.
7. **Ayuda**: Ofrece una introduccion al juego en un tablero de practica.

Objetivo: Deducir la superficie donde se desarrollan las actividades y el espacio que genera.

Observaciones:

- Aunque el software dispone de nueve juegos posibles, solamente se utilizará tres de ellos.



Laberinto: Llevar al ratón para que se coma el queso.

Billar: Golpear las bolas con el taco para meterlas en la buchaca.

Gato: Lograr una línea de tres símbolos iguales (horizontal, vertical o diagonal)

- Al inicio de cualquiera de los juegos aparece una ventana y un ***cursor mano***, con el cual manipulamos dos aplicaciones dentro del juego:

a) La superficie de juego se puede arrastrar (manteniendo clic izquierdo y moviendo en la dirección deseada el mouse)

b) Los *objetos* (taco de billar, ratón en laberinto y taches en el gato) se pueden manipular manteniendo clic izquierdo y moviendo en la dirección deseada el mouse)

- Para salir del juego se hace doble clic en la superficie de juego.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejecutar el programa seleccionando el juego **tres en raya**.
- Proponer hipótesis sobre la mecánica y estructura que posibilita los movimientos de los componentes del juego.

Actividad 2.

- Ejecutar el programa seleccionando el juego **laberinto y** topología **toro.**
- Mostrar la solución o explicar la ausencia de ella basada en la visión clásica de los laberintos.
- Apreciar la mecánica que regula el laberinto en base a la manipulación (arrastre) del campo de juego, así como del ratón.

Actividad 3.

- Ejecutar el programa seleccionando el juego **billar** (humano vs humano) y topología **toro**.
- Proponer la primera tirada basada en la visión clásica de una mesa de billar.
- Ejecutar la primera tirada y contrastar con el resultado esperado.
- Apreciar la mecánica que regula la ***mesa*** de juego en base a la manipulación (arrastre) de la superficie de juego, así como de la trayectoria de las bolas.
- Realizar la actividad varias veces.

Actividad 4.

- Proponer hipótesis sobre la estructura y mecánica que posibilita los movimientos de los componentes del juego.
- Modelar un espacio geométrico sobre el cual sea posible el funcionamiento del juego.
- Discutir y evaluar la viabilidad de los espacios propuestos Analizar el **tablero de práctica** que se encuentra en el menú ayuda.
- Analizar la lectura **Un universo enrollado** que se encuentra en el menú ayuda.
- Describir la trayectoria de un móvil en modelos reales de superficies topológicas: **Toro, Esfera, Banda de Mobiüs.**
- Realizar la actividad billar intentando anticipar la trayectoria de la bola blanca (ya con la idea de una superficie diferente).
- Realizar la actividad varias veces.

Actividad 5.

- Realizar las actividades en el espacio topológico **Botella de Klein.**
- Contrastar la mecánica de los elementos de juego en los dos espacios topológicos.

Actividad 6.

- Analizar el video sobre **geometrías no euclidianas**.
- Analizar el video **Botella de Klein.**
  Link: http://www.youtube.com/watch?v=BQayK3xtN-8
- Analizar el video **Torus.**
  Link: http://www.youtube.com/watch?v=0H5_h-RB0T8&feature=related
- Elaborar conclusiones.

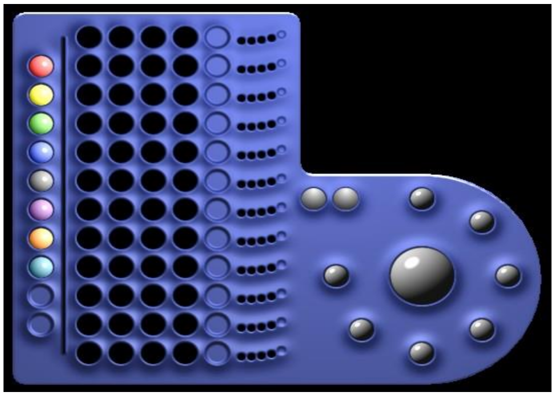
Secuencia 3:	Cibermind

Indicaciones:

- **Software**: Cibermind
- **Liga:** http://www.brothersoft.com/games/cybermind-download.html
- **Guía breve**:

El tablero consta de:

1. Una columna con bolitas de colores.
2. 12 renglones con espacios para colocar las bolitas y espacios donde aparecerán pistas.
3. Un tablero del lado derecho que contiene 9 botones que tienen las siguientes funciones.



1. **Timer**: Muestra un reloj que contabiliza el tiempo utilizado para resolver el juego.
2. **Combs**: Muestra el número de posibles combinaciones a probar.
3. **New**: inicia un nuevo juego.
4. **Options**: Permite elegir 3 opciones

   Spaces: Permite elegir el número de espacios en el tablero (4 o 5).
   Colors: Permite elegir el número de colores que se quiere utilizar (6, 8 o 10).
   Doubles: Permite elegir si se quiere que aparezcan colores repetidos en el juego.
5. **Hint**: Muestra la solución.
6. **High:** Muestra información acerca del programa.
7. **About**: Muestra los mejores records de tiempo.
8. **Help**: Muestra las reglas del juego (en inglés).
9. **Exit**: Permite salir del juego.

10. **Evaluate**: Permite evaluar las hipótesis del jugador.

Objetivo: Encontrar una combinación oculta de cuatro y hasta seis bolitas, en el orden y color correcto, que el sofware oculta, en un máximo de doce oportunidades.

Observaciones:

- Elegir en **options**: 4 espacios, 6 colores y no dobles.
- De la columna de bolitas, seleccionar 4 (una a una), haciendo clic izquierdo del mouse arrastrarla hasta un espacio del primer renglón (contando de abajo hacia arriba), esta será la primer hipótesis.
- Evaluar la hipótesis haciendo clic en el botón **evaluate** del tablero derecho.
- El programa coloca pistas en los espacios pequeños al final de cada renglón, la información que nos dan las pistas se interpreta de la siguiente manera.

a) **p** hoyitos con pista: Quiere decir que de las 4 bolitas de la hipótesis **p** de ellas están en la combinación oculta.

Ejemplo: Si 3 hoyitos tienen pista quiere decir que 3 de las bolitas de la hipótesis están en la combinación oculta.

b) Las pistas pueden ser de dos colores:
   1. **r** pistas rojas: indican que de las 4 bolitas **r** están en el lugar correcto.

En el ejemplo hay 1 pista roja; quiere decir que sólo 1 de las bolitas de la hipótesis está en el lugar correcto en la combinación oculta.

   2. **b** pistas blancas: indican que de las 4 bolitas **b** están en la combinación oculta pero no en el lugar correcto.

En el ejemplo hay 2 pistas blancas quiere decir que 2 de las bolitas de la hipótesis están en la combinación oculta pero no en el lugar correcto.

Luego de evaluar la hipótesis del ejemplo, podemos concluir que 3 de las bolitas están en la combinación oculta, 1 en el lugar correcto y 2 están en la combinación oculta pero en lugar incorrecto.

Importante: El orden de las pistas **NO** corresponde al orden de las bolitas de la hipótesis.

- Probar otra hipótesis basados en la información de las pistas.
- Evaluar la nueva hipótesis, interpretar la información de las pistas y proponer una siguiente hipótesis hasta encontrar la combinación oculta. (se tienen 12 oportunidades para conseguir el objetivo).
- Se sabe que el objetivo se ha conseguido cuando el programa muestra la siguiente ventana.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con él).
- Desarrollar la actividad en la computadora.
- Repartir una hoja donde los alumnos anotan el número de hipótesis utilizadas en cada juego.
- Discutir de manera grupal si la cantidad de hipótesis probadas disminuye conforme se adquiere habilidad en el juego.

Actividad 2.

- Explicar las conclusiones a las que se llegan con cada una de las informaciones dadas y una acción siguiente lógica.

Información	Explicación	Siguiente acción
		
		
		
		
		

Actividad 3.

- Encontrar las combinaciones que el programa puede dar sobre el número y color de las pistas.
- Discutir y validar las respuestas.

Actividad 4.

Nota: Aunque durante el juego se aclaró que la posición de la pista no corresponde a la posición de la bolita, para efectos del análisis supondremos que esto sucede, es decir cada pista da información de la bolita en ese lugar.

- Elaborar diagramas de árbol para los siguientes casos:

a) 3 pistas rojas.
b) 3 pistas blancas.
c) 4 pistas blancas.
d) 2 pistas blancas y 2 rojas.
e) 2 pistas blancas y 1 roja.
f) 3 pistas blancas y 1 roja.

Actividad 5.

- Calcular el número de combinaciones posibles en los siguientes casos:

Pistas blancas	Pistas rojas	Combinaciones
0	0	
2	0	
3	0	
4	0	
0	1	
0	2	
0	3	
1	1	
1	3	
2	2	
3	1	

- Corregir posibles errores de concepto o de procedimiento.

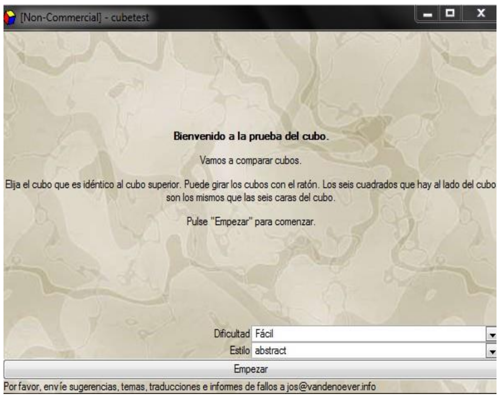
Nota: Aunque aquí no se detalla una secuencia didáctica para comprender el tema ***Combinaciones***, se sugiere que se diseñe una secuencia que permita este objetivo.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 4:	Cubetest

Indicaciones:

- **Software**: Cubetest
- **Liga:** http://cubetest.uptodown.com/descargar
- **Guía breve**:



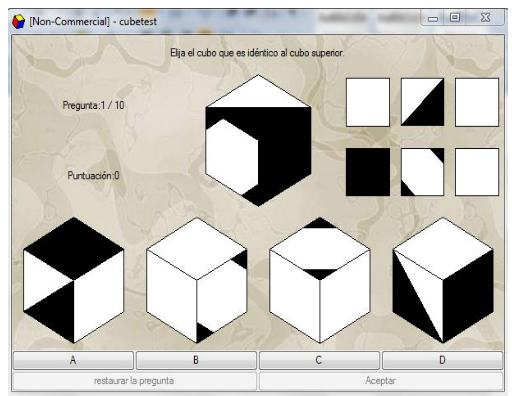
La ventana principal tiene las siguientes opciones:

1. **Dificultad**: Permite elegir el nivel de dificultad.

2. **Estilo**: Permite elegir el tipo de imágenes que decoran los cubos.

La ventana de juego presenta:

- Un **cubo muestra** en 3D y la representación plana de sus 6 caras.
- **4 cubos (A, B, C y D)** con caras similares al cubo muestra.
- **Restaurar juego**: Regresa el ítem a la vista original.
- **Aceptar**: Permite evaluar la opción



Objetivo: Comparar y seleccionar de 4 opciones el cubo que sea idéntico al **cubo muestra**.

Observaciones:

- Una partida tiene 10 ítems.
- Para apreciar mejor las caras que conforman los cubos se pueden rotar de la siguiente manera:

Colocar el cursor del mouse sobre alguno de los 5 cubos del ítem, aparecen flechas que permiten rotarlos sobre ejes horizontal y vertical, para ello se hace clic sobre el cubo y sin soltarlo se arrastra en la dirección deseada.

- Una vez seleccionado el cubo que se supone correcto, se hace clic sobre la letra que le corresponde y se hace clic sobre **aceptar**.
- El programa evalúa la respuesta y rota los cubos para compararlos desde una cara común, además muestra un texto con la indicación correcto o incorrecto (en este último caso el texto indica la respuesta correcta).
- Después de evaluar el ítem se tienen 2 opciones:
  1. Restaurar la pregunta
  2. Siguiente pregunta
- Sobre la pantalla se muestra una estadística de la partida y la puntuación lograda.
- Al final de la partida se muestra la puntuación lograda.
- Si se desea una siguiente partida se hace clic en **empezar**.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Repartir una hoja donde los alumnos anotan el número de aciertos de cada juego.
- Realizar varias veces la actividad, de preferencia en parejas para que se discutan las opiniones del tipo:

a) El inciso ___ no es porque…
b) El inciso ___ es porque…

- Analizar la estadística sobre el número de aciertos, intentando en cada siguiente juego superar los aciertos.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 5:	Puzztrix

Indicaciones:

- **Software**: Puzztrix
- **Liga**: http://www.puzztrix.de/
- **Guía breve**:

Después de hacer clic sobre la pantalla inicial se muestra el área de juego y un menú del lado derecho con las siguientes opciones:

1. **- 1 +** : Permite cambiar el nivel de juego.
2. **Undo** : Permite regresar uno a uno los movimientos equivocados.
3. **Menú:** Abre una ventana con diferentes opciones.
4. **Restart**: Reinicia el nivel.
5. **0/12** : indica la cantidad óptima de movimientos para resolver el nivel.

Opciones del menú

1. **Continue**: Regresa al modo de juego en el nivel deseado.
2. **Restart level**: Reinicia el nivel.
3. **Watch movie**: muestra en modo video la solución del nivel.
4. **Speed**: permite elegir la velocidad del modo video.
5. **Windows mode**: permite elegir el tamaño de la ventana de juego.
6. **Help**: muestra las instrucciones detalladas del programa y del juego (en inglés).
7. **Exit Puzztrix**: Salir del programa.

En la misma ventana del menú aparece un submenú del lado derecho con las siguientes opciones.

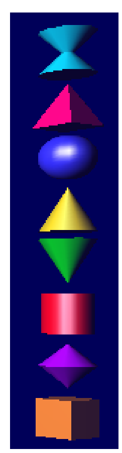
1. **Level** : permite seleccionar el nivel de juego que se quiere resolver.
2. **Author**: Mic.
3. **Rating**: da información sobre los niveles resueltos.
4. **Movie**: da información sobre la cantidad de movimientos del rating.

Objetivo: Eliminar todas las piezas de la pantalla de juego.

Observaciones :

- En las ventanas de juego se muestran algunos de los siguientes sólidos geométricos:

Sólidos	Color
2 conos unidos por el vértice	Azul cielo
Tetraedro (pirámide)	Rosa
Esferas	Azul intenso
Conos sobre su base	Amarillo
Conos sobre el vértice	Verde
Cilindros	rojo
2 conos unidos en sus bases	Morado
Exaedros (Cubos)	Naranja



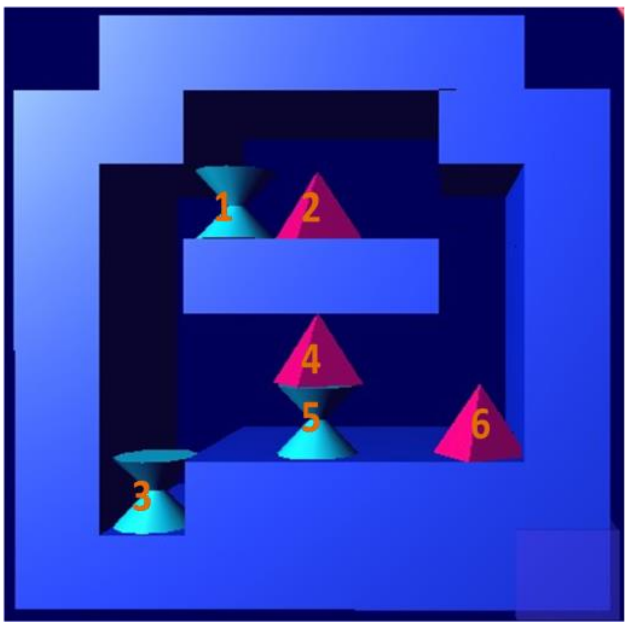
Las piezas del tablero pueden moverse de 2 maneras:

1. Seleccionando la pieza con un clic izquierdo del mouse y sin soltar, arrastrar la pieza.
2. Seleccionando la pieza con un clic izquierdo del mouse y sin soltar, moverlas con las flechas del teclado.

- El movimiento de las piezas **sólo puede ser izquierda o derecha.**
- El tablero de juego funciona con una **“fuerza de gravedad”** que hace **caer** las piezas al desplazarlas sobre los espacios vacíos de los pisos del tablero.
- Las piezas **desaparecen** del tablero al formar con ellas **grupos con posiciones contiguas** (encima, derecha o izquierda) de 2 o más piezas iguales.
- Algunos de los niveles más difíciles cuentan con bloques móviles azules que es posible moverlos pero no desaparecen, su función es ayudar o hacer más difícil la solución.

Con fines de ejemplificar numeramos las piezas.

- Si se mueve a la izquierda el **doble-cono (1)** cae sobre el **doble-cono (3)** y ambos desaparecen, pero queda sobre el tablero el **doble-cono (5)**.
- Si se mueve a la derecha la **pirámide (2)** cae sobre la **pirámide (6)** y ambas desaparecen, pero queda la **pirámide (4)**.
- Si se mueve a la derecha la **pirámide (4)** queda contigua a la **pirámide (6)** y ambas desaparecen, pero queda la **pirámide (2)**.



Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Repartir una hoja donde los alumnos anotan el número de intentos en cada ítem.
- Realizar la actividad (de preferencia en parejas para que se discutan las opiniones).

Actividad 2.

- Diseñar un diagrama con la configuración que necesitan tener 2 piezas iguales para que con una tercera desaparezcan.
- Diseñar un diagrama con la configuración que necesitan tener 3 piezas iguales para que con una cuarta desaparezcan.
- Justificar la imposibilidad de diseñar un diagrama con la configuración que necesitan tener 4 piezas iguales para que con una quinta desaparezcan.

Actividad 3.

- Redactar la solución de los primeros 5 niveles.
- Intercambiar las soluciones redactadas (entre parejas) para seguir las instrucciones y evaluar la claridad y lógica de cada una.
- Comentar de manera grupal las redacciones más claras y lógicas.
- Corregir posibles fallas en la redacción (de proceso o de redacción) de las soluciones.
- Elaborar conclusiones.

Secuencia 6:	Sokoban

Indicaciones:

Sokoban es un clásico rompecabezas inventado en Japón, normalmente implementado como un videojuego. El juego original fue creado por Hiroyuki Imabayashi, que en 1980 ganó con su juego una competición.

La simplicidad y la elegancia de las reglas han hecho de Sokoban uno de los juegos de ingenio más populares.

- **Software**: Sokoban
- **Liga:** http://javaboutique.internet.com/Sokoban/
- **Guía breve**:

icono	función
1. **<<**	: Regresa 10 niveles.
2. **<**	: Regresa un nivel.
3. **>**	: Avanza un nivel.
4. **>>**	: Avanza 10 niveles.
5. **X**	: Reinicia el ítem.

Objetivo: Conducir al alíen para que coloque las piedras encima de los diamantes.

Observaciones:

- El movimiento del alíen se controla con **las flechas del teclado**.
- La tecla **delete** permite regresar uno a uno los movimientos realizados.
- El alíen empuja las piedras. (NO puede jalarlas).

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Resolver los niveles 1-5 (De preferencia en parejas para que se discutan las opiniones).
- Elaborar conclusiones.

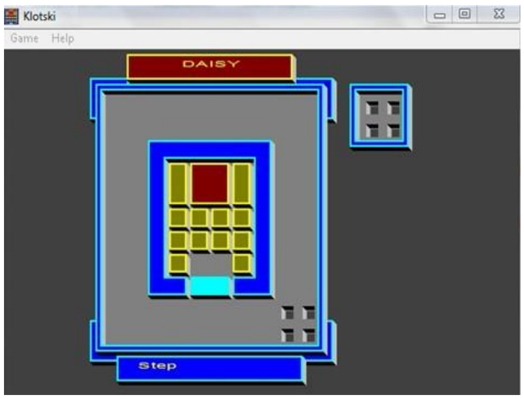
Secuencia 7:	Klotski

Indicaciones:

- **Software**: Klotski
- **Liga:** http://www.mathematicas.es/materialesn.htm
- **Guía breve**:

El menú situado en la parte superior izquierda de la ventana principal tiene las siguientes opciones:

1. **Game**: permite elegir entre 3 niveles de dificultad.
2. Cada nivel de dificultad muestra una pantalla con 8 ítems.
3. **Help**: Muestra diferentes ayudas (en inglés).



El tablero de juego tiene 4 tipos de elementos:

1. **Piezas amarillas**: Estas piezas son obstáculos que impiden conseguir el objetivo.
2. **Pieza marrón**: Es la que debe colocarse cubrir los espacios vacíos de la ventana.
3. **Pieza azul**: Es la puerta por donde debe salir la pieza marrón.
4. **Huecos**: Es la ventana a cubrir con la pieza marrón.

Objetivo: Cubrir los espacios vacíos de la ventana con la pieza marrón.

Observaciones:

- Las piezas **amarillas** y **marrón** se mueven con ayuda del mouse, colocándose sobre ellas, hacer clic izquierdo y sin soltar arrastrar la pieza hasta el lugar que se desee.
- La pieza **azul** sólo se activa cuando la pieza **marrón** está en posición de salida, entonces automáticamente cambia de aspecto y es posible retirarla.

- Al resolver cada ítem se muestra una ventana con los 10 mejores records (jugador y movimientos realizados).
- Para iniciar una nueva partida ir al menú **game.**

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Resolver el ítem 1(de preferencia en parejas para que se discutan las opiniones).
- Elaborar una estadística en el pizarrón con nombres de los alumnos y la cantidad de movimientos realizados.
- Resolver el nivel 1 en el menor número de movimientos.
- Resolver los niveles 2-8 en el menor número de movimientos posibles.
- Elaborar una estadística en el pizarrón con nombres de los alumnos y la cantidad de movimientos realizados.
- Elaborar conclusiones.

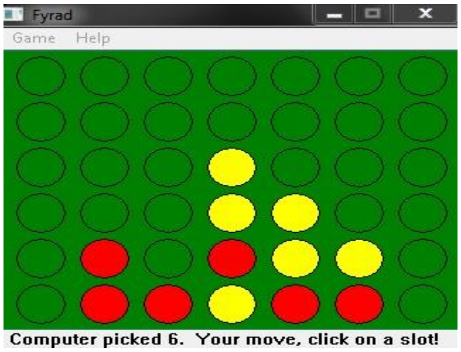
Secuencia 8:	Conecta 4

Indicaciones:

- **Software**: Fyad (conecta 4)
- **Liga:** http://hem.passagen.se/peters/fyrad/
- **Guía breve**:

El menú situado en la parte superior izquierda de la ventana principal tiene las siguientes opciones:

1. **Game** : Abre un submenú con 3 opciones:
2. **New game**: Permite elegir el tipo de jugador (human – computer) para cada color de fichas, así como el jugador que coloca la primer ficha; yellow (amarilla) o red (roja).
3. **Reset game**: reinicia la partida actual.
4. **Exit** : Finaliza el programa.
5. **Help**: Muestra información acerca del programa.



El juego está compuesto por los siguientes elementos:

a) Un tablero con 7 columnas con 6 casillas por columna.
b) Fichas rojas y fichas amarillas, para cada jugador respectivamente.

Objetivo: Formar una línea (horizontal, vertical o diagonal) con 4 fichas de su color.

Observaciones:

- Las fichas se colocan por turnos una a una.
- Las fichas que se colocan en las **casillas** de una **columna caen** hasta una **casilla vacía** (ya que el juego funciona con una **"fuerza de gravedad"**).
- No sólo se debe intentar formar una línea de 4 con las fichas, sino también evitar que el oponente lo consiga.

Secuencia didáctica

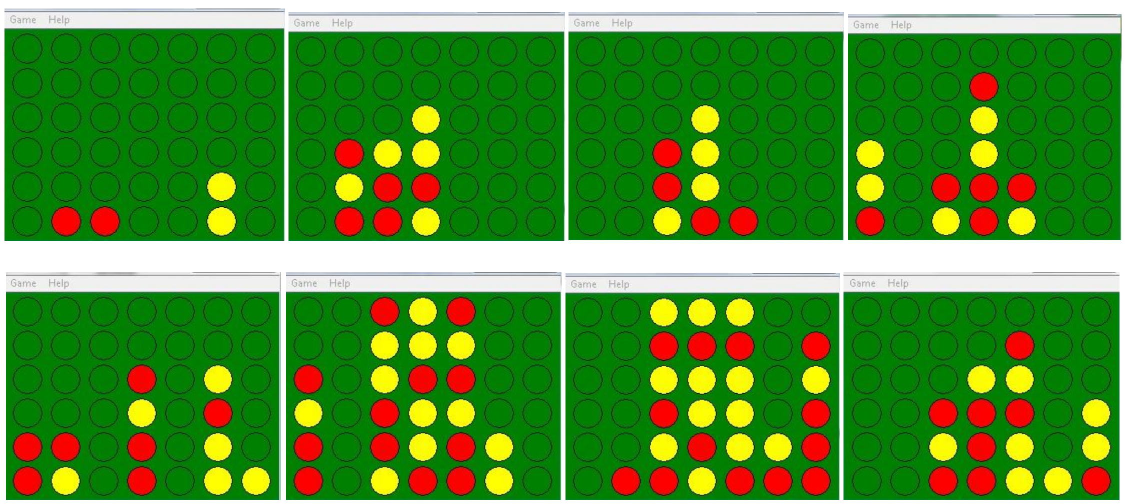
Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Configurar el programa para jugar 2 humanos.
- Jugar algunas partidas contra un compañero.

Actividad 2.

- Configurar el programa para jugar contra la computadora.
- Jugar algunas partidas contra la computadora (de preferencia en parejas para que se discutan las opiniones).
- Redactar una estrategia que da mayor posibilidad de ganar.

Actividad 3.



- Contestar la pregunta, en base a los diagramas anteriores, con un argumento logico.

  ¿Cuál debe ser la siguiente jugada de rojas?

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 9:	Blobs

Indicaciones:

- **Software**: Blobs
- **Liga**: http://blobs.softonic.com/descargar
- **Guía breve**:
- El tablero consta de una cuadrícula con platos en algunas casillas, algunos de ellos están vacíos y algunos tienen una rana.

En la parte inferior derecha está el menú que consta de 3 opciones.

1. **Level:** Permite elegir por medio de las flechas el nivel que se quiere resolver (el juego cuenta con 40 niveles).
2. **Reset:** Reinicia el nivel en juego.
3. **Help:** Muestra las instrucciones del juego (en inglés).

Objetivo: Eliminar las ranas del tablero dejando al final sólo una.

Observaciones:

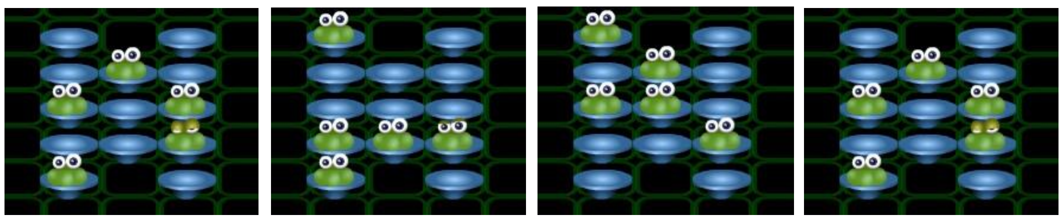
- Una rana elimina a otra si salta sobre ella (la rana eliminada desaparece del tablero).
- Una rana salta a otra si están adyacentes y hay un plato disponible en cualquier dirección (horizontal, vertical o diagonal).
- Si se consigue el objetivo automáticamente el programa pasa al siguiente nivel.
- Si no se consigue el objetivo automáticamente el programa reinicia el nivel.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

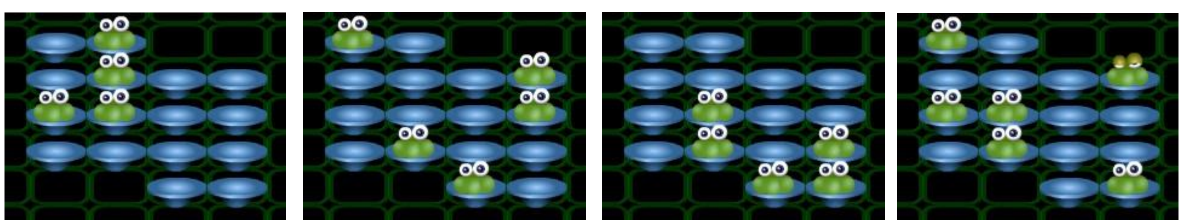
- Ejemplificar la actividad con ayuda de un proyector (si se cuenta con el).
- Resolver los niveles 1-5 (de preferencia en parejas para que se discutan las opiniones).

Actividad 2.



- Analizar en base a los diagramas si es posible lograr el objetivo.
- Redactar las razones que posibilitan o imposibilitan lograr el objetivo.
- Discutir las respuestas.

Actividad 3.



- Analizar en base a los diagramas si es posible lograr el objetivo.
- Redactar los argumentos que posibilitan o imposibilitan lograr el objetivo.
- Discutir las respuestas.

Actividad 4.

- Elaborar conclusiones.

Secuencia 10:	El juego de la vida

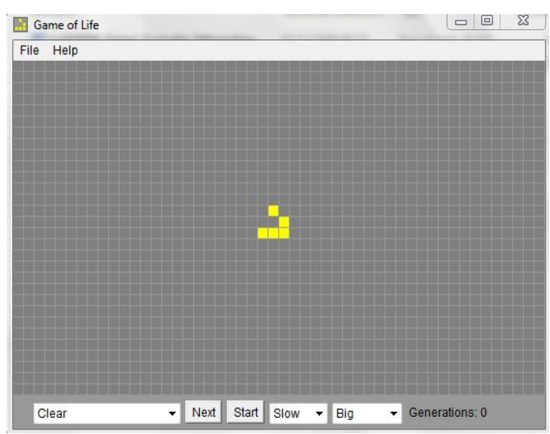
Indicaciones:

El Juego de la Vida no es su juego de ordenador típico. Se trata de un "autómata celular" y fue inventado por el matemático de Cambridge John Conway. El juego de la vida es en realidad un juego de cero jugadores, lo que quiere decir que su evolución está determinada por el estado inicial y no necesita ninguna entrada de datos posterior.

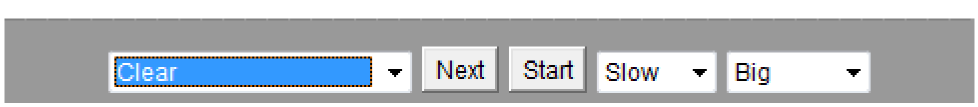
- **Software**: Game of live.
- **Liga**: http://www.bitstorm.org/gameoflife/
- **Guía breve**:

El menú situado en la parte superior izquierda de la ventana principal tiene las siguientes opciones:

1. **File**: Permite elegir 3 opciones:
   Open: Abre archivos previamente guardados.
   Save: Guarda archivos creados.
   Exit: Cierra el programa.
2. **Help**: permite elegir 3 opciones.
   Manual: Muestra las instrucciones del juego (en inglés).
   License: Muestra información sobre la licencia.
   About: Muestra información acerca del programa.



En la parte inferior de la ventana se encuentra un menú con opciones del juego.



1. **Ventana de texto**: Permite elegir entre 7 ejemplos típicos del juego y limpia la cuadrícula de juego con la opción **clear**.
2. **Next**: Muestra una siguiente generación de las células.
3. **Start/Stop**: Muestra o detiene una animación del comportamiento de las células durante **n** generaciones.
4. **Slow**: Permite elegir la velocidad de la animación.
   Slow: Lento.
   Fast: Rápido.
   Híper: Muy rápido.
5. **Big**: permite elegir el tamaño de las casillas del tablero y con ello el tamaño del tablero que se muestra en la pantalla de juego.
   Big: Casillas grandes (tablero pequeño).
   Médium: Casillas medianas (tablero mediano).
   Small: Casillas pequeñas (tablero grande).

Objetivo: Modelar sistemas no matemáticos de manera lógica, analítica y sistemática.

Observaciones:

Inicio

- El juego tiene los siguientes componentes:

1. Una malla cuadricular en teoría infinita.
2. En las casillas de la cuadrícula se representan **células** con fichas o casillas coloreadas.

- Llamaremos **vecinos** a las células adyacentes a otra en forma horizontal, vertical o diagonal (toda célula tiene 8 casillas adyacentes, aunque **no necesariamente** 8 vecinos.).
- Llamaremos **civilización** al primer acomodo de células sobre la cuadrícula.
- Llamaremos **generación** a cada arreglo de células que resulte de la aplicación de las reglas del juego.

Evolución:

- Una célula continua viva si tiene 2 o 3 células vecinas, en caso contrario muere por alguna de los siguientes causas:
  a) de soledad si tiene una o ninguna célula vecina.
  b) de hacinamiento si tiene 4 o más células vecinas.
- Nace una célula en una casilla que tiene exactamente 3 células vecinas.

Secuencia didáctica

Actividad 1.

- Ejemplificar la actividad con ayuda de 2 tableros (se sugiere colocar un sistema de coordenadas para una mejor comprensión), para ello se divide el proceso en 3 partes:
- Primer tablero (fig. 1).
  1. Colocar una primera generación.
- Segundo tablero (fig. 2)
  2. Colocar las células que continúan vivas.
  3. Colocar las células que nacen.
- Iterar este proceso en más tableros (fig. 3-5)

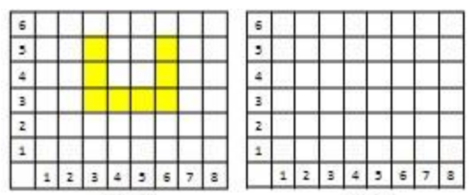


Fig. 1 Fig. 2

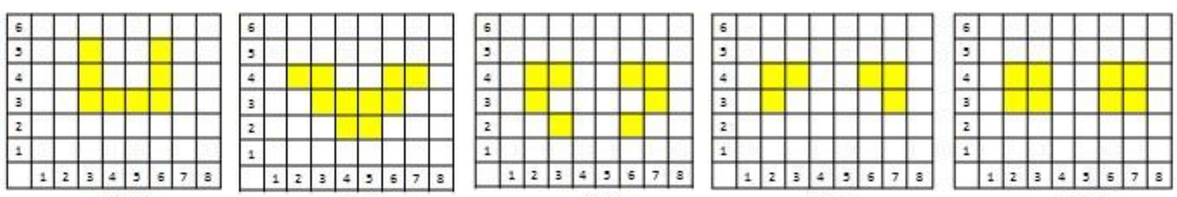


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

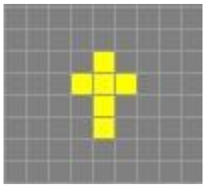
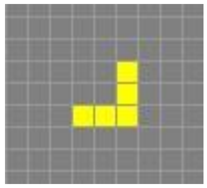
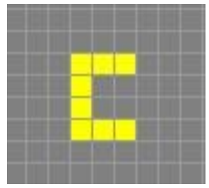
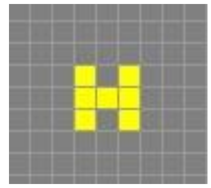
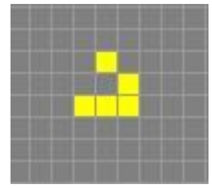
Actividad 2.

- Realizar la actividad con las siguientes configuraciones en papel y lápiz y contestar si la civilización **muere**, **se estabiliza** o es **oscilador**.

Notas:

Se sugiere que además se usen 2 tableros con fichas, en uno colocar la población inicial y en otro la siguiente configuración, luego copiar las generaciones coloreando tableros en papel.

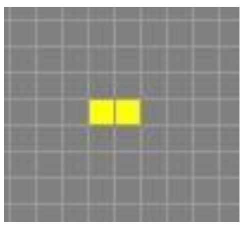
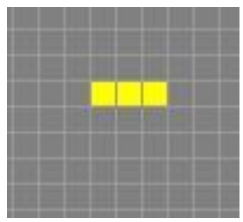
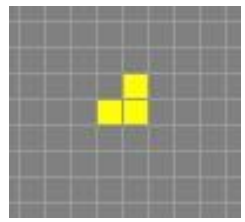
a) Una civilización **muere** cuando después de algunas generaciones todas las células desaparecen
b) Una civilización se **estabiliza** cuando ya no hay células que nacen o mueren.
c) Una civilización **oscila** cuando se repiten configuraciones a lo largo de las generaciones.

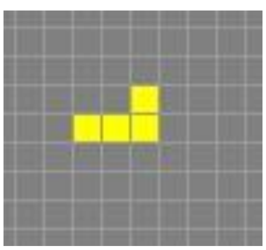
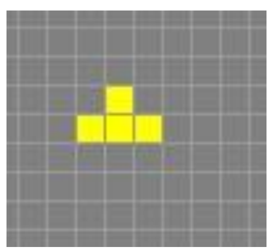
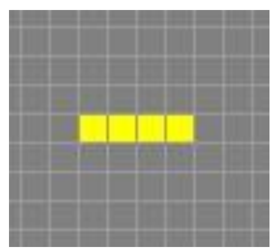
- Validar la solución en el programa.

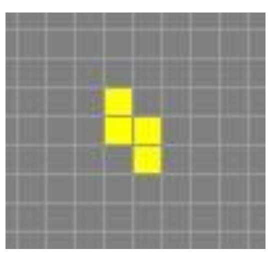
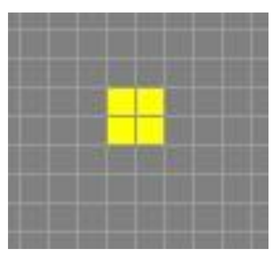
Actividad 3.

- Analizar la evolución de las posibles configuraciones de 2 células que al menos compartan un lado.
- Analizar la evolución de las posibles configuraciones de 3 células que al menos compartan un lado.

- Analizar la evolución de las posibles configuraciones de 4 células que al menos compartan un lado.

- Reconocer si la civilización **muere**, **se estabiliza** o es **oscilador.**

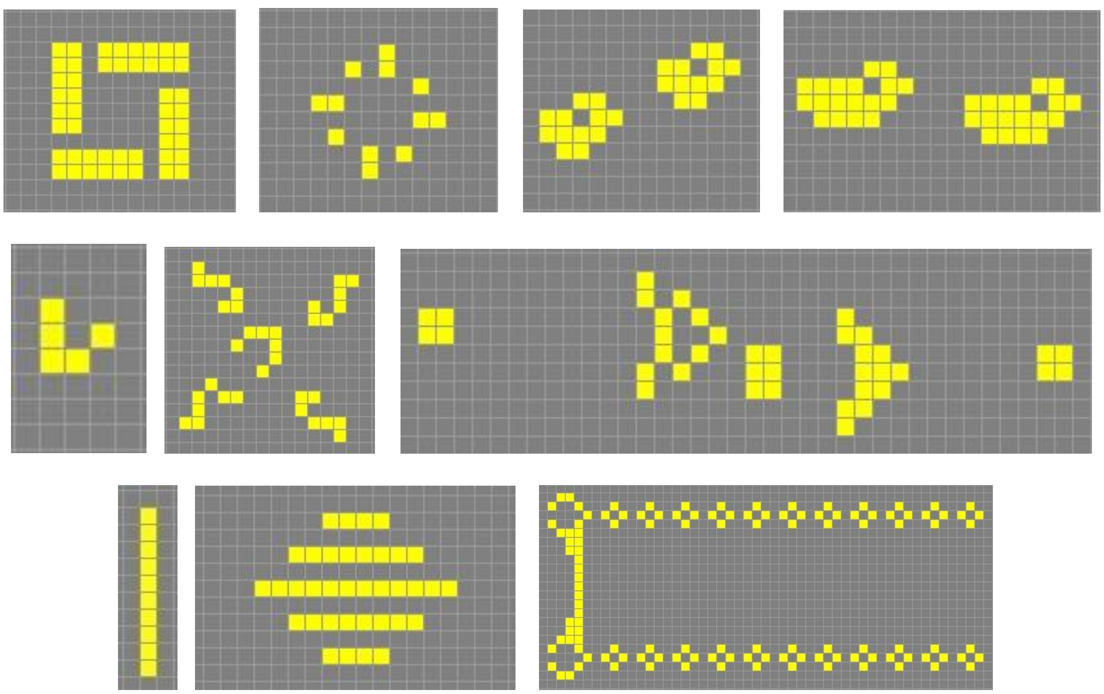
Actividad 4.

- Ejecutar los ejemplos del programa.
- Diseñar configuraciones sencillas para ejecutar en el programa.
- Completar la siguiente tabla.

Civilización	Generaciones que dura	Estado		
		Muere	Estabiliza	Oscila

Actividad 5.

- Ejecutar las siguientes configuraciones en el programa.



Actividad 6.

- Diseñar configuraciones (no aleatorias) y ejecutarlas para apreciar su desarrollo.
- Nombrar y guardar las configuraciones interesantes.

Actividad 7.

- Resolver puzles del juego **“The irRegulargame of life”**
- **Link:** http://www.minijuegos.com/The-irRegular-Game-of-Life/7301

Objetivo: Colocar **una cantidad de células indicadas** sobre el tablero para que la población se mantenga viva **el número de generaciones solicitado**.

Guía breve

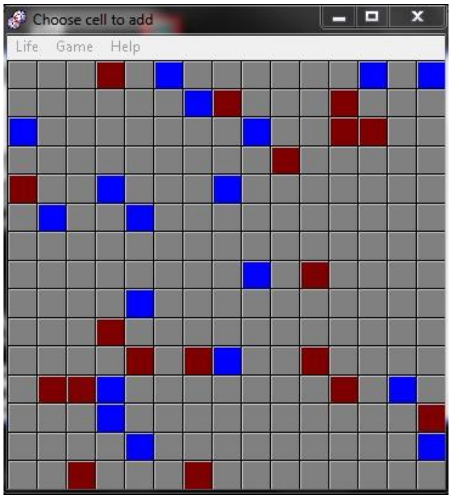
1. **Level**: Indica el nivel a resolver.
2. **Goal**: Indica el objetivo a lograr (43 células deben sobrevivir al menos 20 generaciones).
3. **Starter cell**: Indica el número de células que debemos colocar en el tablero.
4. **Start**: Evalúa nuestra hipótesis e indica el número de generaciones y la población obtenida.

Actividad 8.

- Practicar el juego **Lifegen**.
- **Link**: http://www.mediafire.com/?m2dmo2thzmy
- **Objetivo**: Eliminar las células del contrario.

Guía breve

1. **Life**: Esta opción nos permite seleccionar el modo clásico del juego de la vida.
2. **Game** : esta opción nos permite comenzar/terminar una partida así como elegir el nivel de dificultad.
3. **Help**: esta opción nos muestra ayuda respecto al juego, el objetivo y las reglas (en inglés).



- El color de fichas que pertenecen al jugador es azul, la computadora juega con las de color rojo.
- Por turnos cada jugador coloca una célula de su color sobre el tablero y elimina una del contrario, a continuación se aplican automáticamente (con sólo un clic) las reglas del juego de la vida obteniendo así nuevas generaciones de células rojas y azules.

Actividad 9.

- Analizar los videos en las siguientes direcciones electrónicas.

1. http://www.youtube.com/watch?v=9kIgfBsjMuQ&feature=related
2. http://www.youtube.com/watch?v=ZOkm867AleM&feature=related
3. http://www.youtube.com/watch?v=s92EW7jVeq0&feature=related

- Elaborar conclusiones.

Relación curricular

Los planes y programas de estudio vigentes (Reforma educativa 2011 dividen el estudio de la matemática en tres ejes:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico. (SN y PA)

Alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra: por un lado, encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito; por otro, tender un puente entre la aritmética y el álgebra, en el entendido de que hay contenidos de álgebra en la primaria, que se profundizan y consolidan en la secundaria

- Forma, espacio y medida. (FEyM)

Encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación básica. Es claro que no todo lo que se mide tiene que ver con formas o espacio, pero sí la mayor parte; las formas se trazan o se construyen, se analizan sus propiedades y se miden.

- Manejo de la información. (MI)

En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas, por ejemplo, por una función lineal, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular.

A continuación se presenta una tabla con las sugerencias de aplicación de las secuencias didácticas respecto al grado y eje donde se puede llevar a cabo cada una de ellas. Sin embargo, el docente tiene libertad para modificar el orden de las actividades, de cada SD así como el contenido a desarrollar y el nivel de profundidad al que se quiera llegar, dependiendo de los objetivos a lograr en un determinado grado.

Las SD son flexibles y perfectibles, finalmente la organización de actividades es una sugerencia, una primer manera de abordar el desarrollo de un tema. La adecuación al propósito, el desarrollo y momento de aplicación se va enriqueciendo con la experiencia de cada profesor.

Es conveniente aclarar que algunas de las actividades abordan los mismos temas por lo que no se recomienda aplicarlas todas en un mismo grupo, ya que se perderá el sentido y volverá rutinaria la dinámica de trabajo.

Matemagia							
Actividad		Grado			Eje de estudio		
No.	Nombre	1o	2o	3o	SN y PA	FEyM	MI
1	Encontrando el dígito perdido	x	x	x	x		
2	Fuego mágico	x			x		
3	Rojo o negro	x	x	x	x		x
4	Adivino la figura	x	x		x		
5	Predicción del resultado	x	x	x	x		
6	La séptima es mágica	x	x		x		
7	Bingo mágico a golpes	x	x		x		
8	Sistema decimal y tiempo	x	x		x		
9	Seis cartas buenas y una mala	x			x		
10	Suma mágica en una matriz		x	x	x		

Juegos individuales							
Actividad		Grado			Eje de estudio		
No.	Nombre	1o	2o	3o	SN y PA	FEyM	MI
1	Laberinto de múltiplos	x			x		
2	Laberinto de enteros	x			x		
3	Ranas y sapos	x	x	x	x		
4	Teorema de Pitágoras			x		x	
5	Armando cubos			x	x	x	
6	La torre de Hanói	x	x	x	x		
7	Siete colores	x	x				x
8	Sudoku	x					x
9	Ranas saltarinas	x					x
10	Llegar al blanco	x			x		

Juegos colectivos							
Actividad		Grado			Eje de estudio		
No.	Nombre	1o	2o	3o	SN y PA	FEyM	MI
1	Al 20	x			x		x
2	Nim	x	x		x		x
3	El juego del botón	x	x		x		x
4	El juego del factor	x			x		
5	El juego de la L	x	x	x			x
6	Gomoku	x	x				x
7	Yo primero	x	x	x	x	x	x
8	Yo lo tengo	x	x	x	x	x	x
9	Zoo lógico	x			x	x	x
10	Pirámide	x	x	x	x	x	x

Software recreativo							
Actividad		Grado			Eje de estudio		
No.	Nombre	1o	2o	3o	SN y PA	FEyM	MI
1	Arithme tick	x			x		
2	Torus games		x	x		x	
3	Cibermind	x	x	x			x
4	Cubetest	x	x	x		x	x
5	Puzztrix	x	x	x		x	x
6	Sokoban	x	x	x			x
7	Klotski	x	x	X			x
8	Conecta 4	x	x	x			x
9	Blobs	x	x	x			x
10	El juego de la vida			x			x

Conclusiones

Después de una amplia y exhaustiva investigación bibliográfica y su posterior análisis se concluye lo siguiente:

a) La historia de la matemática como ciencia, da fuerza y reconocimiento al uso de la matemática recreativa.

Durante el desarrollo de esta tesis, se han proporcionado diferentes evidencias que muestran la importancia que la matemática lúdica ha tenido y tiene actualmente en la evolución de la matemática, vista como un conjunto de saberes También al interior de la didáctica de la matemática en el proceso enseñanza-aprendizaje. Cada vez son más las instituciones y profesores que apuestan por incluir en los programas de estudio y en la planeación de clases actividades que desde el juego provocan interés por participar en ellos, sirviendo como pretexto para involucrar a los alumnos al estudio y construcción de la matemática.

Es por ello que en este trabajo se hizo un recorrido por la historia de la matemática para mostrar diferentes momentos en que los personajes que hicieron matemática formal y rigurosa. En muchas ocasiones, esos conocimientos fueron generados a partir de problemas con sabor a juego, acertijos y puzles. Otras veces era el juego por el juego mismo el que interesaba a no pocos matemáticos, pues apreciaban la riqueza que estos juegos tienen en su estructura, estrategia y solución.

La historia, como siempre pasa, deja una lección interesante. Si las mentes que han contribuido al desarrollo de la matemática le dieron seriedad al juego y al análisis del mismo, las nuevas generaciones de matemáticos que se forman en las instituciones de cualquier nivel necesitan conocer un panorama más amplio de la matemática, donde la matemática recreativa merece ese reconocimiento ya que a final de cuentas no son dos matemáticas distintas; la matemática recreativa es matemática también.

El rigor y formalismo en la educación, es producto de una corriente de mediados de los años 60's, (movimiento Bourbaki) que afortunadamente se está superando, dejándolo para aquellos que en su momento lo requieran, pero sin que el grueso de la población escolar la padezca. Por el contrario, es importante acercarles la ciencia en general desde distintos enfoques, incluido el formal, pero no de manera exclusiva, para mostrarles lo bello e interesante que es su estudio, para que la cultura matemática de las sociedades sea más amplia y crezca la atracción por carreras profesionales afines a las ciencias exactas.

Es necesario cambiar la percepción que se tiene sobre el juego, no sólo en el ámbito educativo, sino incluso social. Es importante notar la riqueza que hay en cada actividad lúdica y rescatar los aspectos que permitan lograr los objetivos de la enseñanza de la matemática.

Después de múltiples ejemplos no se puede volver a ver la matemática recreativa como simple pasatiempo o mera diversión, si bien ambos aspectos son parte de la matemática recreativa, ésta es mucho más que eso.

b) La matemática recreativa genera interés y motiva a los alumnos al estudio de la matemática.

Después de reconocer el papel de la matemática recreativa en la evolución del conocimiento matemático, las nuevas didácticas la han incorporado en sus investigaciones y posteriormente en las propuestas emergentes, hasta posicionarlas de manera institucional en planes y programas de estudio; elaborando ficheros, ferias, congresos… para popularizarla entre los profesores y público en general. Mucho de este trabajo se debe a los divulgadores, quienes buscan la manera de mostrar un panorama más completo de la matemática, ahora desde un punto de vista histórico, anecdótico, humano, divertido, útil; incluso en momentos erróneo, pero que sin ese componente tan humano no habría sido posible su desarrollo tal y como actualmente la conocemos.

Cuando la matemática se ve como un constructo humano, cuando además se ofrece de una manera recreativa y divertida se provoca en los estudiantes el interés por su estudio, se genera una motivación para participar de manera individual o colectiva en el estudio de la misma.

Las revistas, libros y literatura en general sobre el tema, cumple un papel importante en popularizar la matemática y acercarla al público en general. Sin embargo este acercamiento debería ocurrir dentro de las instituciones pues de esta manera se aprovecha la disposición de los alumnos para estudiar los contenidos de los programas escolares.

Es importante que el sujeto esté dispuesto a aprender y como se mostró en el desarrollo de este trabajo, este tipo de matemática logra motivar a los alumnos, primero al juego y bajo una planeación didáctica también al aprendizaje.

c) El ambiente de clase se modifica positivamente.

Las diferentes investigaciones relatadas en este trabajo, coinciden en señalar que al utilizar la matemática recreativa el ambiente de clase es más agradable, invita y propicia que los alumnos interactúen con la matemática, construyan su propio conocimiento, contrasten sus puntos de vista, fortalezcan sus hábitos y valores, pierdan el miedo a opinar y aprovechen sus primeros acercamientos a la solución corrigiendo sus hipótesis.

Las clases tradicionales ***impiden*** que todos los alumnos del grupo participen, generalmente son unos cuantos los que resuelven los problemas y ejercicios propuestos, luego el resto se conforma con escuchar pasivamente; en cambio al trabajar con estos juegos todos los alumnos participan activamente.

Es necesario aclarar que el utilizar la matemática recreativa no es la única manera de propiciar la participación de los alumnos, es más bien tarea del profesor lograr que los alumnos se involucren, aunque esta tarea se facilita en gran manera cuando se utiliza el juego en la clase pues de manera natural los alumnos deciden participar.

d) La matemática recreativa ofrece ventajas en todos los sentidos vs la enseñanza tradicional de la matemática.

Profesores y alumnos salen ganando al incorporar el juego en la clase. El profesor porque ahora el alumno está dispuesto a jugar y bien dirigido también a estudiar (analizar las actividades). Los alumnos ven una matemática que les significa su construcción del conocimiento; las reglas, estrategias, estructura, método y lenguaje particular dejan de ser un constructo abstracto y carente de sentido. Cada paso del proceso así como la simbolización de los objetos matemáticos cobra un significado cercano al alumno y de esta manera la adquisición del conocimiento se da de mayor y mejor manera.

La diversión es un componente importante en esta propuesta. Una materia socialmente aburrida se vuelve viva, interesante y llena de significado. Ni la educación en general, ni la matemática específicamente, son aburridas y tediosas por naturaleza, ni tienen por qué estar exentas del poder de divertir a profesores y alumnos mientras las llevamos a cabo.

El rol del profesor se ve modificado, siendo ahora monitor del desarrollo del trabajo; guía cada parte de las actividades, propone nuevos retos y ayuda a que los alumnos enfrenten y resuelvan sus dudas.

Es necesario también una nueva manera de asumir el trabajo por parte del profesor para no perder el control ni el objetivo a lograr; atreverse a compartir el control a los alumnos es parte de la visión de la didáctica que sustenta esta tesis, de manera que también el rol del alumno se ve modificado para bien de la educación, teniendo ahora una participación activa y social.

l.q.q.d.

Bibliografía

Alegría, P., & Ruiz, J. (2002). *La matemagia desvelada.* Recuperado el 19 de enero de 2011, de Hezkuntza: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_21/10_la_matemagia_desvelada.pdf

Alfaro, C., & Barrantes, H. (2008). *¿Qué es un problema matemático?* Recuperado el 02 de febrero de 2011, de CIMM: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/32/3

Alsina, C. (2004). *Aprender a apreciar las matemáticas.* Caracas, Venezuela: Laboratorio Educativo.

Alsina, C. (2008). *Vitaminas matemáticas.* Barcelona: Ariel.

Amenteras, P. (2005). *200 trucos y juegos de magia que puedes hacer.* México: Editores Mexicanos Unidos S.A.

Aragón, M., & Valiente, S. (1992). *En el amable mundo de la matemática.* México: Editorial Patria.

Bahamón, J. (s.f.). *El aprendizaje individual permanente: ¿Cómo lograr el desarrollo de esta capacidad de los estudiantes?* Recuperado el 23 de enero de 2011, de Eduteka: http://www.eduteka.org/pdfdir/cartilla_aprendizaje.pdf

Berrondo-Agrell, M. (2006). *100 enigmas de geometría, juegos divertidospara potenciar tu mente.* Barcelona: Ediciones Ceac.

Caillois, R. (1958). *Teoría de los juegos.* Barcelona: Seix Barral.

Camous, H. (2001). *Problemas y juegos con la matemática.* España: Gedisa.

Campos, Y. (1997). *Juegos para apoyar el aprendizaje de la matemática en computadoras.* Recuperado el 06 de marzo de 2011, de Camposc: http://www.camposc.net/tec-edu.htm

Carraher, T., & Carraher, D. (1988). *En la vida diez en la escuela cero.* México: México: Siglo XXI.

Carter Philiph, R. K. (2005). *Trucos y acertijos con números.* México: Selector.

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM. (noviembre de 2013). *Feria de las Matemáticas Morelia.* Recuperado el diciembre de 2013, de http://www.csam.unam.mx/vinculacion/index.php?option=com_content&view=article&id=263:feria-matematica-de-morelia&catid=2:general&Itemid=4

Centro Virtual Cervantes. (s.f.). *Diccionario de términos clave de ELE.* Recuperado el 29 de Mayo de 2011, de Centro Virtual Cervantes:

http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/secuenciadidactica.htm

Chamoso, J., Durán, J., & García, J. F. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma*, 47-58.

Chevallar, Y. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* España: Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP.

Cisneros, I. (2006). *El juego didáctico en el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas.* Recuperado el 11 de junio de 2011, de Universidad Lasalle Benavente: http://www.universidadlasallebenavente.edu.mx/investigacion/revista/mayoagosto06/default.html

Comas i Coma, O. (2005). *El mundo en juegos.* México: SEP: RBA Océano.

Contreras, A. M., & Meléndez, K. A. (2006). *La motivación e interacción del niño y educador dentro del enfoque constructivista de la educación.* Recuperado el 22 de enero de 2011, de Biblioteca usac: http://biblioteca.usac.edu.gt/tesis/13/13_2237.pdf

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid: Síntesis, S.A.

Cruz, Y. (2007). *Un juego instructivo en la computadora para el aprendizaje de la adición y la sustracción en las primeras edades.* Recuperado el 14 de abril de 2011, de Revista Iberoamericana de Educación: http://www.rieoei.org/experiencias140.htm

Cusicanqui, E. (2006). *Epistemología genética.* Recuperado el 12 de abril de 2011, de Cusicanquifloreseddy: http://cusicanquifloreseddy.galeon.com/aficiones1498042.html

D´Amore, B. (2002). *Un acercamiento al triángulo de la didáctica.* Recuperado el 02 de marzo de 2011, de http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/443%20triangulo%20de%20la%20didactica.pdf

De Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza. Actas de las IV Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Recuperado el 10 de abril de 2011, de Universidad complutense: http://sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf

De Guzmán, M. (2007). La enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de educación*, 44. Obtenido de http://www.horno3.org/Ensenanza%20de%20las%20ciencias%20y%20la%20matematica.pdf

Delgado, J., & Arminta, J. (2006). *Jugando ¿Aprendo matemáticas?, una experiencia para valorar y aprender las matematicas desde el mundo del cotidiano.* Lima: Tarea Asociación de tareas educativas.

Dewey, J. (1998). *Como pensamos.* España: Paidos.

Díaz Barriga, F., & Hernández, G. (2006). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* Recuperado el 13 de febrero de 2011, de Antropología.uady: http://www.antropologia.uady.mx/avisos/frida_gerardo.pdf

Edo, M., & Deulofeu, J. (2005). *Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos: una invetigación sobre una práctica educativa.* Recuperado el 21 de junio de 2011, de http://funes.uniandes.edu.co/1310/1/Edo2005Juegos_SEIEM_187.pdf

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J., & Badillo, E. (junio de 2008). *Estudio del paralelismo entre las fases de la resolución de un juego y las fases de resolución de un problema.* Recuperado el 13 de agosto de 2011, de Revista Iberoamericana de Educación Matemática: http://www.fisem.org/web/union/revistas/14/Union_014_009.pdf

El EDUCADOR.com. (30 de mayo de 2008). Recuperado el 20 de febrero de 2011, de El Educador.com: http://www.eleducador.com/per/contenido/contenido.aspx?catID=236&conID=889

El PAÍS.com. (27 de febrero de 2006). Recuperado el 28 de enero de 2011, de El PAÍS.com: http://www.iescarrus.com/edumat/prensa/art2006/art2006_01.htm

El PAÍS.com. (11 de abril de 2007). Recuperado el 07 de abril de 2011, de El PAÍS.COM: http://www.elpais.com/articulo/cultura/texto/magia/antiguo/mundo/elpepucul/20070411elpepucul_1/Tes

ELPAÍS.COM. (27 de febrero de 2006). *La magia de los números.* Recuperado el 14 de agosto de 2010, de http://elpais.com/diario/2006/02/27/educacion/1140994809_850215.html

ELPAÍS.COM. (11 de abril de 2007). *El texto de magia más antiguo del mundo.* Recuperado el 17 de agosto de 2010, de http://cultura.elpais.com/cultura/2007/04/11/actualidad/1176242401_850215.html

Feria de las matemáticas. (s.f.). Recuperado el 25 de junio de 2011, de http://wn.com/feria_de_las_matematicas

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática.* Recuperado el 04 de Marzo de 2011, de Madrid La Muralla, S.A.: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/taller/aspectosweb/aspectosweb.htm

Flores, G. (1987). *Nuevos juegos mentales.* México: Selector.

Gallegos, A. (1997). *La interacción social temprana y variada: Factor de Desarrollo Psicológico.* Cuadernos de educación UCAB.

Gálvez, G. (1994). *La didáctica de las matemáticas.* Buenos Aires: Paidós Educador.

Galvis, Á. (1991). *Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria.* Recuperado el 11 de mayo de 2011, de Revista Informática Educativa: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-127396_archivo.pdf

García, H. (2007). *Ausubel, Piaget y Vygotsky.* Recuperado el 02 de julio de 2011, de Monografías.com: http://www.monografias.com/trabajos43/piaget-ausubel-vygotsky/piaget-ausubel-vygotsky2.shtml

García, J. A. (s.f.). *La Didáctica de las Matemáticas: una visión general.* Recuperado el 22 de marzo de 2011, de Gobierno de canarias: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

García, L. (2006). *La sonrisa de Pitágoras.* Barcelona: Debate.

Gardner, M. (1983). Circo matemático. En M. Gardner, *Circo matemático* (pág. 10). España: Alianza editorial.

Gardner, M. (1983). *Circo matemático.* España: Alianza editorial.

Gardner, M. (1989). *Diversiones matemáticas.* México: Selector.

Gardner, M. (2002). *Damas, parábolas y más mitificaciones matemáticas.* España: Gedisa.

Gardner, M. (2002). *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas.* España: Gedisa.

Garín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educar*, 105-118.

Gómez, G. (1993). *Una aventura matemática.* Argentina: Troqvel.

Gómez, P. (1995). *Matemática básica.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, P. (1995). *Matemática Básica.* México: Grupo editorial Iberoamericana S.A. de C.V.

Holt, M. (1989). *Matemáticas recreativas II.* México: Roca.

Huizinga, J. (1987). *Homo Ludens.* Madrid: Alianza.

Informes periodísticos para su publicación. (2003). *Cómo se enseña matemática.* Buenos aires: AVM.cl.

Instituto de Matemáticas [IM]. (2012). *Festival Matemático Coyoacán, D.F.* Recuperado el febrero de 2013, de http://festival.matem.unam.mx/festival/

Jhonathan, C. (s.f.). *El aprendizaje cooperativo en la enseñanza de matemática.* Recuperado el 10 de agosto de 2011, de Monografías.com: http://www.monografias.com/trabajos4/aprend_mat/aprend_mat.shtml

Jiménez, R. (2003). *Aprender matemáticas jugando.* Recuperado el 27 de marzo de 2011, de Ebookbrowse: http://ebookbrowse.com/premio-aprende-matematicas-jugando-pdf-d19897975

Johnson, D., & Roger, J. (1984). *Qué es el aprendizaje cooperativo.* USA: Association for Supervision and Curriculum Develompment, USA.

Johnson, D., Johnson, R., & Holubec, E. (1999). *El Aprendizaje Cooperativo en el Aula.* Buenos Aires. : Editorial Paidos.

Kasner Edward, N. J. (2007). *Matemáticas e imaginación.* México: Sociedad Matemática Mexicana.

Klein, M. (2005). *El fracaso de la matemática moderna .* México: Siglo XXI editores.

Knowle, M. S. (1975). *Aprendizaje autodirijido.* Recuperado el 17 de Agosto de 2011, de Cambridge Book Company: http://users.dsic.upv.es/asignaturas/fade/oade/download/Self-directed.pdf

Langdon Nigel, S. C. (1991). *El fascinante mundo de las matemáticas.* México: Limusa.

Lara, M. (1990). *Lecturas universitarias. Antología de matemáticas.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Larios, V. (marzo-abril de 1998). *El constructivismo en tres patadas.* Recuperado el 18 de abril de 2011, de Gaceta COBAQ: http://www.uaq.mx/matemáticas/vlarios/xart04.html

Leclerc, C. (2005). *La magia como herramienta de enseñanza.* México: Selector.

Leclerc, C. (2007). *Magia... ¡con matemáticas!* México: Selector.

Long, L. (2006). *No te compliques con las gráficas y estadísticas: actividades y pasatiempos para aprender jugando.* México: Limusa Wiley.

López, F. (2006). *Del juego antiguo al juego de computadora. Papel histórico del juego en el desarrollo de la tecnología digital.* Recuperado el 01 de marzo de 2011, de Creatividad y sociedad: http://www.creatividadysociedad.com/articulos/10/Creatividad%20y%20Sociedad.%20Del%20Juego%20Antiguo%20al%20Juego%20de%20Computadora.pdf

López, M. (2005). *El juego, instrumento de transformación social.* Recuperado el 17 de mayo de 2011, de Jugar y jugar: http://www.jugarijugar.com/articles/instrumento_transformacion.pdf

Lorda, M. (1989). *En busca de la solución.* Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.

Maldonado, L. (1991). *Procesos de interacción en un aula computarizada.* Recuperado el 09 de marzo de 2011, de Revista Informática Educativa: http://www.colombiaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-127451_archivo.pdf

Martín, J. M., & Fortuny, J. (2000). *El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática.* Recuperado el 03 de abril de 2011, de http://www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf

Martínez, J. A. (2010). *Resolución de problemas en matemáticas.* Recuperado el 21 de julio de 2011, de Cuadernos de educación y desarrollo: http://www.eumed.net/rev/ced/15/jamp.htm

Mendoza, E. (2005). *La motivación escolar en el aprendizaje de contenidos matemáticos.* Recuperado el 30 de mayo de 2011, de Sabetodo.com: http://www.sabetodo.com/contenidos/EEkkuFFkZZoAQRHMdv.php

Muller, R. (1996). *Matemágicas.* México: Tikal.

Noticiero matemático. (24 de Marzo de 2011). Recuperado el 18 de Mayo de 2011, de Periódico Digital de Noticias Acerca de Las Matemáticas : http://noticiariomatematico.blogspot.mx/2011/03/en-tijuana-mexico-realizan-una-feria-de.html

OEI. (s.f.). *El papel del juego en la educación matemática.* Recuperado el 09 de febrero de 2011, de OEI: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Ortiz, M. (2004). *Aprendizaje y Didáctica de las Matemáticas en la perspectiva de la Epistemología Genética.* Recuperado el 27 de marzo de 2011, de Aprendes.org: http://www.aprendes.org.co/Aprendizaje-y-Didactica-de-las-matematicas.html

Paenza, A. (2006). *Matemática... ¿Estás ahí?* Buenos Aires: Siglo XXI.

Perelman, Y. (1936). *Física Recreativa.* Recuperado el 01 de febrero de 2011, de Libros Maravillosos: http://www.librosmaravillosos.com/fisicarecreativa2/index.html

Perelman, Y. (1991). *Matemáticas recreativas I.* México: Roca.

Pérez, J. (2002). *Galería matemática.* México: Grupo editorial Iberoamericana.

Pérez, R. (2004). *La resolución de problemas matemáticos en grupos de aprendizaje cooperativo.* Recuperado el 26 de abril de 2011, de Revista Educación y Ciencias Humanas: http://132.248.9.1:8991/hevila/pdf-ariel/La%20resoluaci%F3n%20de%20problemas%20matem%E1ticos%20en%20grupos%20de%20aprendizaje%20cooperativo.pdf

Piaget, J. (1975). *Psicología y pedagogía.* Barcelona: Ariel.

Pickover, C. (2002). *El prodigio de los números.* Barcelona: Manon troppo.

Polya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Poskitt, K. (2000). *Esas endiabladas mates.* Barcelona: Editorial Molino.

Ramírez, M. (02 de agosto de 2009). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.* Recuperado el 15 de abril de 2011, de Educación Matemática: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40516672008.pdf

Rasmussen, E. y. (1998). *Problemáticas de tecnología en la formación de educadores.* Recuperado el 08 de julio de 2011, de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesN12000/Meza1_archivos/SobreElPapeldelCmputador.htm

Recaman, B. (2000). *A jugar con números.* México: Selector.

Ricotti, S. (2008). *Juegos y problemas para Construir Ideas Matemáticas. Interconexiones Contenidos Curriculares y soluciones para la clase de matemáticas.* Buenos Aires: Centro de publicaciones y material didáctico.

Rodríguez, C. (2007). *Didáctica de las ciencias económicas.* Recuperado el 06 de agosto de 2011, de Eumed.net: www.eumed.net/libros/2007c/322

Rodríguez, J. M. (2000). El juego en el medio escolar. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 235-260.

Romero, M. (2007). *Juego, juguetes y desarrollo infantil.* Recuperado el 18 de septiembre de 2011, de Revista Crítica: www.sepbcs.gob.mx/sepanmas/Descargas/El%20JUEGO.doc

Salazar, L. (s.f.). *Tic´s, Software librey educación matemática.* Recuperado el 24 de junio de 2011, de Colombiadigital.net: http://www.colombiadigital.net/newcd/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=1255&Itemid

Sanhueza, G. (s.f.). *Constructivismo.* Recuperado el 09 de marzo de 2011, de Monografías.com: http://www.monografias.com/trabajos11/constru/constru.shtml

Sardar, Z., & Ravetz, J. (2005). *Matemáticas para todos.* Barcelona: Paidós.

Schliemann, A. l. (1991). La comprensión del análisis combinatorio: desarrollo, aprendizaje escolar y experiencia diaria. En T. Carraher, D. Carraher, & A. L. Schliemann, *En la vida diez en la escuela cero.* México: Siglo XXI.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (1993). *Matemáticas Quinto grado.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (1994). *Libro para el maestro.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2006). *Programa de estudio de Matemáticas.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. México: SEP.

Secundaria General "Moisés Sáenz Garza". (s.f.). *Feria Matemática Amealco, Qro.* Recuperado el 2013, de http://secumoisessaenz.blogspot.mx/2008/12/feria-de-matematicas-para-300-nios-de.html

SEP. (1993). *Matemáticas Quinto g.* México: SEP.

SEP. (1994). *Libro para el maestro.* México: SEP.

SEP. (2006). *Programa de estudio de Matemáticas.* México: SEP.

Sotomayor, V., López, M., Petris, R., & Pelozo, S. (s.f.). *Desarrollo de juegos de computadora para la enseñanza de la matemática en el nivel secundario.* Recuperado el 28 de agosto de 2011, de Portal Chapingo: http://portal.chapingo.mx/dga/planes/memoria/docs/MEMORIA3/sotomayor_v_m_et_al_argentina_r3.pdf

Stallman, R. (2004). *Software libre para una sociedad libre.* Recuperado el Marzo de 2011, de Traficante de sueños: http://www.homines.com/noticias/2007_04_12.htm

Stewart, I. (2010). *Baúl de tesoros matemáticos.* Barcelona: Crítica.

Tahan, M. (1990). *El hombre que calculaba.* México: Limusa.

Tahan, M. (2006). *Matemática divertida y curiosa.* Buenos Aires: Pluma y papel ediciones.

Tahhan, M. (1990). *El hombre que calculaba.* México: Limusa.

Torres, C. (2002). *El juego como estrategia de apendizaje en el aula.* Recuperado el 03 de septiembre de 2011, de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/17543/2/carmen_torres.pdf

Torres, C. (2002). *El juego: una estrategia importante.* Recuperado el 10 de mayo de 2011, de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/356/35601907.pdf

Trujillo, C. (1992). Informática para apoyar el mejoramiento de la educación. *Revista Informática Educativa*.

Universidad Autónoma de Nuevo León. (2008). *Portal de la UANL*. Recuperado el 2011, de Universidad Autónoma de Nuevo León: http://redalyc.uaemex.mx/pdf/356/35601907.pdf

VanCleave, J. (2002). *Matemáticas para niños y jóvenes.* México: Limusa Wiley.

Zalavsky, C. (2005). *Juegos y actividades matemáticas de todo el mundo.* México: Selector.