

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS**

**“UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA  
DE LA GEOMETRÍA FRACTAL EN EL  
BACHILLERATO”**

**TESIS**

**Que para obtener el Grado de  
MAESTRA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS**

**PRESENTA:**

**Ing. Dulce María Hernández Méndez**

**QUERÉTARO, QRO.**

**1999**

No. Adq. H59644

No. Título \_\_\_\_\_

Clas. 5/6.07

H557p



Universidad Autónoma de Querétaro  
 Facultad de Ingeniería  
 Maestría en Docencia de las Matemáticas

**UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA  
 GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de  
 Maestra en Docencia de las Matemáticas

**Presenta:**

Ing. Dulce María Hernández Méndez

**Dirigido por:**

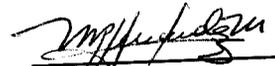
Dr. Alejandro Díaz Barriga Casales

**SINODALES**

Dr. Alejandro Díaz Barriga Casales  
 Presidente

  
 Firma

M D M. María Rosa Hernández Mondragón  
 Secretario

  
 Firma

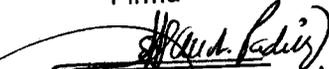
Dr. Sithanathan Kanthimathinathan  
 Vocal

  
 Firma

M C. Roberto Torres Hernández  
 Suplente

  
 Firma

M C. Alejandro Padilla González  
 Suplente

  
 Firma

  
 Dra. Ma. Guadalupe Bernal Santos  
 Directora de Investigación y Posgrado

  
 M. Jesús Hernández Espino  
 Director de la Facultad de Ingeniería

# RESUMEN

El propósito de este trabajo de tesis es presentar una propuesta para integrar la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato. Esta propuesta se estructura por medio de la presentación de una metodología y un material didáctico dirigido al profesor a través del cual se desarrollan los conceptos básicos con los cuales trabaja la Geometría Fractal. Se presentan así mismo los fundamentos matemáticos que sustentan la construcción de los elementos con los que esta Geometría trabaja, formalizándola así desde un enfoque puramente matemático. Es objetivo del trabajo el desarrollar y fundamentar los elementos, en cuanto a contenido y metodología, contenidos en un manual para el profesor suficientes para diseñar un curso. No es parte de los objetivos del mismo el diseño riguroso del curso ni su implementación, lo cual queda como recomendación para futuros trabajos. Para sustentar esta propuesta, se utilizan los elementos fundamentales del constructivismo, por lo que en su diseño se incluyeron actividades que van mediando la construcción de conceptos tales como el de dimensión fractal, proceso iterativo y autosemejanza. Se presenta como resultado un *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato* en el que se han concentrado y filtrado los sustentos matemáticos y teóricos que permiten ubicar a la Geometría Fractal en el contexto educativo del Estado, basado en una revisión bibliográfica y de paquetes computacionales que además, sintetiza textos originales de los creadores de esta Geometría. Se presentan además los lineamientos generales para orientar el diseño formal de un curso, basados en la investigación bibliográfica realizada sobre el tema y adecuados al material elaborado.

(Geometría Fractal, enseñanza, bachillerato)

# SUMMARY

A teacher manual is presented as part of a proposal for the introduction of Fractal Geometry in the math curricula of High School. This material was designed according to a constructivist approach that encourages the integral participation of the student and a change of role of the teacher. Since all formative processes in mathematics needs a formal support, it is included a special chapter containing the mathematical construction and discussion of the elements of the Fractal Geometry through Iterated Function Systems. General guiding for the design and implementation of a complete course are given as well as a brief software review.

(Fractal Geometry, teaching, high school)

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer el apoyo recibido por el ITESM Campus Querétaro y sus autoridades, por haber recibido de ellos la oportunidad de superarme como profesora y como persona pues la realización de este trabajo de tesis requirió del desarrollo de un sinnúmero de habilidades, actitudes y valores, adicionales a la excelente formación académica recibida.

Se merecen mi más profundo reconocimiento el Doctor Alejandro Díaz Barriga, la Maestra Ma. Rosa Hernández Mondragón y el Doctor Kanthimathinathan Citanathan Sithanathan por su dedicación, por el tiempo que invirtieron en la realización de este trabajo y principalmente por la confianza y la fe que me tuvieron en todo momento, sin su ayuda esta tesis no hubiera sido posible.

Un reconocimiento especial para el profesor Angel Balderas Puga por las horas dedicadas a la revisión exhaustiva de este documento. Sus comentarios fueron muy valiosos para el cumplimiento de mis objetivos.

Agradezco el apoyo brindado por mis compañeros profesores, y en especial doy las gracias Eugenia Olivera Fox, Carmen Espinosa, Gabriela Corral, Gabriela Pérez, Celia Robles, José Luis González y Julio Noriega por sus consejos y su amistad incondicional.

Finalmente quiero dedicar este trabajo a mi familia, en especial a mi hijo Odón Sánchez Hernández, agradeciéndoles la paciencia y el apoyo que me dieron durante todo este tiempo.

# ÍNDICE

<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Summary</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iii</b>
<b>Indice</b>	<b>iv</b>
<b>Indice de figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Indice de tablas</b>	<b>vii</b>
<b>1 ANTECEDENTES</b>	<b>1</b>
<b>2 MARCO TEÓRICO</b>	<b>4</b>
<b>2.1 Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática</b>	<b>4</b>
<b>2.2 El Constructivismo en la Enseñanza</b>	<b>9</b>
<b>2.3 El Constructivismo en la Enseñanza de las Matemáticas</b>	<b>10</b>
<b>2.4 La Geometría Fractal desde una Perspectiva Constructivista</b>	<b>12</b>
<b>2.5 Revisión de los Trabajos Previos Realizados en el Área</b>	<b>14</b>
<b>2.6 Beneficios para el alumno que participa en un Curso de Geometría Fractal</b>	<b>18</b>
<b>3 PROBLEMA</b>	<b>20</b>
<b>3.1 Planteo del Problema</b>	<b>20</b>
<b>3.2 Cuestionamientos a los que Responde la Investigación</b>	<b>21</b>
<b>3.3 Hipótesis</b>	<b>22</b>
<b>3.4 Limitaciones</b>	<b>23</b>
<b>3.4.1 Limitaciones del trabajo</b>	<b>23</b>
<b>3.4.2 Limitaciones del trabajo en cuanto a su posible implementación</b>	<b>24</b>
<b>3.5 Suposiciones del Trabajo</b>	<b>25</b>
<b>3.6 Definición de Términos</b>	<b>26</b>
<b>3.7 Justificación de la Investigación</b>	<b>27</b>
<b>4 METODOLOGÍA</b>	<b>29</b>
<b>4.1 Investigación Bibliográfica</b>	<b>29</b>
<b>4.2 Justificación Educativa</b>	<b>30</b>

4.3	Elaboración del Manual	30
4.4	Estructura Matemática de la Construcción Formal de un Fractal	32
5	RESULTADOS	33
5.1	Descripción del Manual	35
5.2	Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato	38
5.3	Propuesta de Implementación de un Curso de	
	Geometría Fractal en el Bachillerato	246
5.3.1	Tipo de Curso en cuanto a extensión	246
5.3.2	Actividades del Alumno	247
5.3.3	Población a la que puede dirigirse	247
5.3.4	Rol del Profesor	248
5.3.5	Forma de Evaluación	248
6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	249
7	BIBLIOGRAFÍA	251

## ANEXOS

ANEXO 1.	CARACTERÍSTICAS GENERALES EN UN CURSO DE GEOMETRÍA FRACTAL DE ACUERDO CON LA BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA	255
ANEXO 2.	RELACIÓN ENTRE CONCEPTOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS	266

# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
1 Características Didácticas encontradas en trabajos previos sobre la Enseñanza de la Geometría Fractal	16

# ÍNDICE DE TABLAS

<b>TABLA</b>		<b>PÁGINA</b>
1	Características Generales de la Propuesta para la Enseñanza de la Geometría Fractal en el Bachillerato	17
2	Conceptos del Curriculum de Matemáticas del Bachillerato relacionados con los temas de la Geometría Fractal tratados en el Manual para el Profesor	34
3	Características Generales de la Propuesta para la Enseñanza de la Geometría Fractal en el Bachillerato	246

# 1 ANTECEDENTES

Desde tiempos inmemorables, el hombre ha mostrado una necesidad de entender e interpretar los fenómenos naturales tales como la lluvia y el fuego, así como un asombro por el mundo que le rodea incluyendo las estrellas, el sol y la luna. Dicha necesidad y asombro lo llevó a la creación y veneración de dioses tales como el dios de la lluvia o el dios del fuego, y a la incansable observación y estudio de la naturaleza. Para buscar una comunicación con sus dioses se construyeron magníficos templos los cuales también sirvieron para la observación de las estrellas y en los que se crearon y aplicaron los conocimientos matemáticos de la antigüedad.

Con el acelerado desarrollo tecnológico de la humanidad que se dio a partir del Renacimiento y después de mil años de oscurantismo en Europa, los descubrimientos en la física, las matemáticas y la ingeniería se interrelacionaron, adelantándose constantemente los unos a los otros y demandando la generación de más y más saber, proceso que ha resultado ser irreversible.

Las matemáticas, desde sus inicios, se han constituido como una ciencia cuya importancia se manifiesta, en el ámbito mundial, al observar que prácticamente no hay curriculum a nivel medio o medio superior que no incluya temas matemáticos. Fundamentalmente, en lo que respecta a las ramas de las matemáticas como el álgebra, la geometría, la trigonometría y el cálculo, la relevancia de las matemáticas se hace evidente cuando se trata de interpretar y modelar el mundo que nos rodea mediante un lenguaje universal.

Por otro lado, y contrastando con el hecho de que su importancia está reconocida en ámbitos científicos, parece ser que nos encontramos ante una creciente desvalorización de las matemáticas entre los estudiantes. En el caso de preparatoria, en general, prevalece la idea de que las matemáticas son una ciencia “muerta” y “vieja” que no tiene aplicaciones

prácticas a corto plazo. Es decir, los estudiantes perciben que lo que están estudiando en sus cursos de matemáticas son conocimientos generados en la época de los Griegos en el siglo III AC (si están estudiando álgebra) o en el siglo XVII principalmente (si ya van en cálculo), y los cuales no van a aplicar de una manera práctica a menos que cursen una carrera en ciencias “exactas” o alguna ingeniería. Desgraciadamente, en cierta forma, su percepción es correcta, ya que un estudiante de preparatoria que en su carrera no estudie o aplique las matemáticas, difícilmente encontrará otra ocasión para conocer y apreciar un poco más de esta maravillosa ciencia y por lo tanto, perderá la oportunidad de aplicarla en su profesión y en su vida.

Los responsables de esta desvalorización son, en gran parte, los programas escolares, los cuales no incluyen material contemporáneo, y un tremendo desconocimiento del proceder actual de esta ciencia en ámbitos educativos a todos los niveles. La actual tendencia hacia la globalización de la educación media superior y superior ha generado una demanda de profesionistas en áreas de trabajo tales como la electrónica, el análisis de materiales y la comunicación, lo que nos conduce a pensar que es importante dar al estudiante la oportunidad de apreciar las matemáticas como una ciencia “viva” y “dinámica” donde, día a día, se van generando conocimientos nuevos, algunos con aplicaciones inmediatas, al menos en estas áreas. Es notable que algunos de estos nuevos conocimientos sean totalmente accesibles al estudiante de preparatoria, ya que se podría pensar que estos “frescos” conocimientos están fuera del alcance de nuestros alumnos o, más aún, de los mismos profesores; sin embargo, existe una matemática desarrollada en épocas recientes, parte de la cual se puede entender y trabajar con tan sólo los conocimientos tradicionales de un alumno de bachillerato.

Una parte de esta ciencia “viva” y “dinámica” es la llamada “Geometría Fractal” cuyos orígenes, como rama de las matemáticas, se ubican en el siglo XX (más específicamente en la segunda mitad de la década de los setentas) y que aún se encuentra en una etapa inicial de desarrollo. Más aún, una parte muy importante de la Geometría Fractal, la aleatoriedad, juega un papel central en el crecimiento de estructuras tales como la de las células nerviosas, túneles de termitas, cultivos de bacteria, sistemas de raíces, propagación de fuegos en los bosques, distribuciones galácticas, cordilleras de montañas, deltas de ríos, formación de nubes, así como en el crecimiento de la secuencia de nucleótidos en el DNA, el

de la coliflor y el del brócoli, el de los pulmones y los riñones, así como el del sistema nervioso y el del cardiovascular (Buldyrev et al, 1994). El campo nuevo de la Geometría Fractal extiende la geometría clásica (euclídeana) de tal forma que se pueden modelar objetos del mundo real tales como montañas, nubes y paisajes (Jones, 1993). Este es un tipo de geometría al que se puede acceder con conceptos matemáticos estudiados en el bachillerato como serían el de función, proceso, iteración, límite y número complejo.

El propósito de este trabajo de tesis es presentar una propuesta que facilite la integración de la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato. Esta propuesta se estructura por medio de la presentación de una metodología y un material didáctico dirigido al profesor a través del cual se desarrollan los conceptos básicos con los cuales trabaja la Geometría Fractal. Se presentan así mismo los fundamentos matemáticos que sustentan la construcción de los elementos con los que esta geometría trabaja, formalizándola así desde un enfoque puramente matemático.

La propuesta se basa en un análisis detallado de las experiencias que se han tenido en otros países tales como Estados Unidos de América y Canadá, en un análisis bibliográfico sobre el tema y en una correlación entre algunos de los conceptos matemáticos que aparecen en los planes analíticos del bachillerato y temas típicos de la Geometría Fractal. Es objetivo del trabajo el desarrollar y fundamentar los elementos, en cuanto a contenido y metodología, suficientes para diseñar un curso. No es parte de los objetivos del mismo el diseño riguroso del curso ni su implementación, lo cual quedará como recomendación para futuros trabajos.

## **2 MARCO TEÓRICO**

### **2.1 Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática**

Se pueden identificar dos elementos involucrados con la enseñanza de las matemáticas; éstos son, por un lado, el área que comprende la investigación en educación y, por el otro, la enseñanza en el aula junto con todos los aspectos que la rodean: pedagógicos, contextuales, administrativos, académicos y curriculares, es decir, el proceso vivo de enseñanza – aprendizaje.

A lo largo del desarrollo de la ciencia, se observa frecuentemente una ruptura entre los descubrimientos y posturas teóricas planteadas a través de la investigación y, la aplicación y experiencia fuera de ambientes controlados. La relación, o falta de ésta, entre la investigación de la forma de aprender (investigación en educación matemática) y aquellos otros que tienen que ver con los métodos de enseñanza de las matemáticas (didáctica de las matemáticas), no es una excepción, y hasta hace algunos años la brecha entre la teoría en educación matemática (surgida de la investigación) y la didáctica de las matemáticas (surgida de la experiencia en el aula) era considerable. Una de las razones de esta situación tiene que ver con el hecho de que la investigación en educación matemática se encontraba en el proceso de formalización como un área reconocida de estudio, lo que hacía difícil, aun para los investigadores, integrar sus avances en una estructura organizada. Y, por el otro lado, la didáctica de la educación matemática vivía sus propias discusiones pedagógicas y curriculares acerca de su relación con la matemática como cuerpo teórico y el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Afortunadamente, en años recientes, pareciera ser que esta distancia se ha ido salvando. Actualmente se observa mejor comunicación e integración entre la investigación enfocada al aprendizaje de las matemáticas (principalmente desde la psicología) y el trabajo en el aula. Hay autores que opinan que las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático ejercen una influencia determinante sobre la educación matemática en la actualidad (Moreno y Waldegg, 1992), entendiendo por ésta, la labor que realiza el profesor dentro del salón de clase, en conjunto con aquellos otros factores que intervienen y que hacen posible que las matemáticas se enseñen y se aprendan; estos factores son, por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza, las teorías del aprendizaje y la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa. En general, los autores se refieren a que, si bien no todo profesor de matemáticas pertenece oficialmente a alguna escuela filosófica, frecuentemente los profesores obedecen a tendencias o modas de corrientes internacionales que se anexan a sus propias opiniones y experiencias y que llegan a ellos a través de exposiciones en congresos, revistas especializadas u otros canales de comunicación en el área.

De acuerdo con Steffe y Kieren (1994) y a Fischbein (1990), entre otros, quienes analizan las tendencias actuales de la educación matemática, la perspectiva filosófica más aceptada y con mayor influencia en este campo en nuestros días es el constructivismo. Esta postura reconoce la matemática como una actividad esencialmente abstracta, en donde la abstracción reflexiva constituye el eje de la actividad y donde la interiorización de las acciones es su punto de partida hacia su aprendizaje, es decir, basa sus supuestos en una concepción sobre el aprendizaje de las matemáticas que requiere de procesos reflexivos en los individuos. No se trata de concretarse a recibir información con los procesos de asimilación que conlleva; se trata de que el participante, en el proceso de aprendizaje, se haga consciente de su proceso de aprendizaje, de qué aprende y cómo lo aprende.

Este paradigma tiene sus raíces en la filosofía, la educación y, principalmente, en la psicología. Su idea central es que el aprendizaje se construye, es decir, que las personas construyen nuevo conocimiento sobre los fundamentos de conocimiento previo; desde esta perspectiva, los alumnos se enfrentan a situaciones de aprendizaje con el conocimiento ganado mediante experiencias previas como una herramienta inicial que va a influenciar el

conocimiento nuevo o modificado, el cual podrá generar en cada nueva experiencia a través de actividades de aprendizaje.

Se van a utilizar los elementos fundamentales del constructivismo para sustentar la propuesta metodológica de este trabajo. Es necesario, sin embargo, describir primero algunas otras posturas que, mediante su comparación, hagan evidentes las bondades de esta postura cognitiva.

Se analizarán primeramente las concepciones sobre los objetos de estudio en matemáticas. Hay tres formas de concebir los objetos matemáticos y su conocimiento desde una postura filosófica (Malone & Taylor, 1992). Conforme a la concepción realista, nosotros descubrimos los objetos matemáticos y éstos objetos **preexisten** en la realidad. De acuerdo con la concepción idealista, nosotros inventamos los objetos matemáticos y estos objetos se **aplican** a la realidad. Conforme a la concepción constructivista, nosotros construimos los objetos matemáticos y estos objetos **estructuran** la realidad; es decir, la realidad no esta dada, es también una construcción humana.

Conviene hacer una breve reflexión alrededor de la estructura de la clase que se vive en las escuelas y determinar las consecuencias que cada una de éstas posturas tiene en el aprendizaje de las matemáticas y, por supuesto, en su enseñanza.

Tanto bajo la concepción idealista como en la realista, la matemática puede ser vista como un “objeto de enseñanza”, el cual se descubre por el matemático que lo justifica en una estructura formal para que luego sea enseñado por el profesor en un contexto de descubrimiento y justificación. Desde esta perspectiva, el profesor se debe a la tarea de mostrar, ejemplificar y justificar; si la matemática es un “objeto de enseñanza”, la tarea del alumno es recibir y decodificar. La evaluación en este enfoque queda definida de manera clara: los contenidos que el profesor transmite deben ser repetidos por el alumno fielmente y éste no tiene posibilidad de modificarlos.

Al exponer las bondades de la postura constructivista, no debe entenderse que no se valore la importancia de las otras concepciones cognitivas. Sin embargo, a diferencia del realismo y del idealismo, el constructivismo implica una visión activa del alumno que, continuamente, durante su proceso de aprendizaje, quedará involucrado en procesos de reflexión y análisis, buscando cambiar la conceptualización de las matemáticas como un “objeto de aprendizaje”.

Antes de pasar al detalle de estos procesos, se analizarán algunas de las corrientes en educación matemática que han ido influenciando los procesos de enseñanza – aprendizaje. Se ha dicho que, a lo largo del camino en el cual se han construido teorías de la educación matemática, la enseñanza de las matemáticas se ha ido influenciando por posturas diversas. Todas estas posturas han provocado efectos en la educación matemática y han modificado los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gadanidis, 1994). Por ejemplo, se pensaba que los alumnos aprenderían mejor mediante el ejercicio y la práctica, pero luego se descubrió que, a pesar de que los alumnos sí adquirirían rapidez en el cálculo, eso no garantizaba que aprendieran a utilizar procedimientos maduros para resolver problemas; surgía en ese momento la necesidad del conocimiento significativo que enfatizara el entendimiento de patrones y principios matemáticos en una forma integral. Durante los años entre las dos guerras mundiales, se argumentó a favor del aprendizaje incidental de las matemáticas, es decir, aprender matemáticas resolviendo situaciones muy específicas en disciplinas separadas. Como resultado de esta postura, se dividió el curriculum en áreas de estudio y se enfocó la enseñanza de solución de problemas en lugar de la enseñanza de contenido específico; aunque generalmente aceptada, no dejó de haber opositores a este movimiento.

En la década de los setentas, algunas teorías del aprendizaje alcanzaron su auge. Por ejemplo, las teorías conductistas en los Estados Unidos de América, que proponían una serie de técnicas diseñadas bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocadas por un programa de enseñanza basado en la relación estímulo-reforzamiento (Moreno y Waldegg, 1992). Desde este punto de vista conductista, el conocimiento se visualizaba como un “objeto” que se transmite y que se adquiría mejor o peor, dependiendo del vehículo que lo transportara; la concepción realista seguía siendo el eje director.

El efecto que el conductismo tuvo en la educación matemática repercutió fuertemente en el diseño de material didáctico del tipo estímulo - respuesta, es decir, la preocupación se centraba en la forma en la que se transmitían los conceptos matemáticos y el papel del alumno no pasaba de ser estrictamente un receptor. Si los resultados obtenidos no eran los deseados, se cuestionaba el método y se buscaba otro.

La concepción conductista dominó en algunos países a la educación matemática durante el presente siglo, hasta que surge un nuevo modelo basado en la tesis Kantiana y en

las investigaciones de Jean Piaget sobre el aprendizaje (Moreno y Waldegg, 1992). Este modelo visualiza al conocimiento como algo inherente a las personas, que se produce y construye mediante un proceso continuo de asimilaciones. Esta es una perspectiva constructivista, y la actividad del sujeto que aprende resulta primordial, a diferencia del conductismo, no hay un “objeto de enseñanza” sino un “objeto de aprendizaje”.

A pesar de que hay varias posturas sobre lo que el constructivismo realmente es, en general existe acuerdo en dos principios: (1) el conocimiento es construido mediante procesos activos por el que aprende y (2) llegar a aprender algo es un proceso de organización y adaptación del mundo conforme lo va experimentado el que aprende (Kilpatrick 1987, Vergnaud 1987).

Concretamente, en lo que respecta al aprendizaje de las matemáticas, Fischbein (1990) expresa su postura de la siguiente forma:

Aprender matemáticas es construir matemáticas . . . La tarea del profesor es crear un ambiente que requiera de una actitud matemática, conceptos matemáticos, y soluciones matemáticas . . . el ambiente debe de ser programado de tal forma que sea problemático para inspirar a los estudiantes a la búsqueda de soluciones (pág. 7).

Esta perspectiva sobre el aprendizaje contrasta en forma tajante con aquella en la que la persona aprende mediante la transmisión pasiva de la información de un individuo a otro, y donde la clave es la recepción y no la construcción. Para el constructivismo, el rol del que aprende es **activo**, de tal forma que durante el proceso de aprendizaje sus ideas se fortalecen en cuanto a complejidad y poder; es decir, los alumnos aplican sus conocimientos actuales, notan los elementos relevantes que surgen durante las nuevas experiencias de aprendizaje, juzgan la consistencia de conocimiento previo y del que está surgiendo y, basados en su propio juicio, pueden modificar su aprendizaje (Fischbein, 1990).

## **2.2 El Constructivismo en la Enseñanza**

Visualizar una clase bajo la mirada del constructivismo invita a la reflexión y al cambio; por lo que a continuación se discuten algunas de las implicaciones que el constructivismo tiene en la enseñanza.

En primera instancia, la enseñanza ya no puede ser vista como la transmisión de conocimiento del que lo tiene hacia el que no; por el contrario, los maestros actuarían ahora

como *guías* proporcionando a los alumnos oportunidades para probar la efectividad de su conocimiento actual.

En segunda instancia, dado que el aprendizaje está basado en conocimiento previo, entonces los profesores se darían ahora a la tarea de generar ambientes de aprendizaje que desafíen el conocimiento previo para dar la oportunidad de construir el nuevo.

En tercer lugar, si los alumnos se dan ahora a la tarea de aplicar su conocimiento actual en situaciones nuevas para poder construir nuevo conocimiento, entonces es también tarea del profesor el de motivar a sus alumnos hacia el aprendizaje incorporando problemas que tengan relevancia para ellos, es decir, que les sean significativos.

Finalmente, si se trata de que se construya conocimiento en forma activa, se necesita tiempo para lograrlo. La bondad de dar tiempo a los alumnos radica en que, de esta manera ellos, tienen la oportunidad de reflexionar sobre sus nuevas experiencias, sobre cómo llegaron a ellas y sobre cómo las superaron.

Para Gadanidis (1994), la personalidad teórica de la educación matemática actual es el constructivismo. Muchos otros autores opinan que la filosofía que dirija los cambios en el curriculum, y en general en la educación matemática, debe de ser la constructivista, una teoría de crecimiento cognitivo y aprendizaje que ha ganado fuertes seguidores en los últimos años (Forman y Pufall, 1988; Newman, Griffin y Cole, 1989; Piaget, 1973; Resnick, 1989; Vygotsky, 1978).

## **2.3 El Constructivismo en la Enseñanza de las Matemáticas**

Conviene ahora enfocar la atención al salón de clase de matemáticas, que tiene similitudes y diferencias con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de otras áreas del conocimiento y que, por lo tanto, requiere de ciertos elementos particulares adicionales.

Las implicaciones constructivistas para el salón de clase de matemáticas demandan un cambio en los actuales métodos de enseñanza. Esto se refiere a que el salón de clase debe de ser un espacio que permita que el alumno trabaje en un ambiente de descubrimiento de relaciones matemáticas donde, mediante actividades de aprendizaje diseñadas por el profesor, sean construidos conceptos nuevos. Lograr esto requiere explorar la incorporación

de elementos adicionales a una clase tradicional, tales como el uso de la tecnología, la introducción de “manipulativos” (tales como cubos, palitos y hojas de papel), actividades de discusión e investigación individuales y por equipo, y brindar oportunidades de reflexión para los alumnos y el profesor. En el salón de clase, los maestros deberán proporcionar oportunidades para que los estudiantes representen su conocimiento en una variedad de formas en el transcurso de la lección, ya sea escribiendo, dibujando, usando símbolos o asignando lenguaje a lo que es conocido (Malone y Taylor, 1992). Se trata de presentar problemas que el estudiante pueda entender, pero que requieran de la construcción de nuevo conocimiento para resolverse y que, en consecuencia, se promueva la creación de conflictos cognitivos; de proveer de múltiples oportunidades para la construcción de conocimiento, no esperar resultados instantáneos; y de permitir a los estudiantes independencia en la construcción de conocimiento, no intervenir a menos que sea necesario (CMESG, 1991).

De acuerdo con este mismo reporte del Grupo Canadiense de Estudio para la Educación Matemática (CMESG, 1991), las ideas filosóficas centrales sobre las matemáticas, compatibles con el constructivismo son que las matemáticas deben de ser vistas como un proceso, no como un producto, y las matemáticas deben tener significado.

Como cualquier actividad intelectual, la actividad matemática es dependiente de una enorme variedad de restricciones motivacionales, afectivas, imaginativas y lingüísticas, entre otras. La perspectiva constructivista ha permitido una visión diferente sobre el aprendizaje de las matemáticas que involucra conceptos tales como el infinito, límite, función y gráfica. El alumno aprende matemáticas, no mediante una absorción de conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, sino mediante la construcción de éstos a través de esfuerzos intelectuales propios. Con la introducción del constructivismo en la investigación en educación matemática ya no es requisito el usar experimentación controlada con énfasis en pruebas estadísticas para probar hipótesis y generalizaciones empíricas para poder decir que se está trabajando científicamente (Stefee y Kieren, 1994). En el constructivismo, no se estudia la realidad sino la construcción de la realidad, lo cual significa que, en educación matemática, se estudia la construcción de la realidad matemática del estudiante dentro del espacio de su experiencia. Es posible ahora reunir ambos ambientes y diseñar investigaciones en educación con enfoque constructivista sin tener que salir del aula y sin generar grupos

especiales de estudio, lo cual abre las posibilidades para que los educadores se involucren en nuevos diseños educativos.

El constructivismo enfatiza la importancia de entender las ideas matemáticas del alumno. Por otro lado, está siendo reconocido el hecho de que los profesores también construyen ideas, ideas acerca de las matemáticas, de la habilidad de sus estudiantes para hacer matemáticas y de las formas más efectivas de enseñanza de las matemáticas (Cooney, 1994).

Ya que el investigador-profesor constructivista ha buscado formas por medio de las cuales los estudiantes puedan construir sus propias estructuras de conocimiento matemático, uno de los productos de tales investigaciones ha sido la descripción de una variedad de construcciones (por ejemplo, unidades de estudio de varios tipos y niveles relativas a los números naturales, números racionales y proporciones) y mecanismos constructivistas (por ejemplo, operaciones de unicidad, operaciones de partición, operaciones de proporcionalidad, unidades de composición y descomposición). Tales descripciones pueden servir al profesor en dos formas. Primero, ofrecen guías para escuchar y observar a los estudiantes. Segundo, ofrecen fuentes potenciales para el contenido y organización de algunos programas de matemáticas (Steffe y Kieren, 1994).

## **2.4 La Geometría Fractal desde una Perspectiva Constructivista**

El constructivismo enfoca su atención a la manera en la que una persona aprende; sugiere que el conocimiento matemático es el resultado de la formación de modelos que surgen en respuesta a las preguntas y a los retos que son planteados por problemas matemáticos en ambientes activos de aprendizaje. El reto consiste, entonces, en crear experiencias que involucren al alumno y le permitan apoyar sus procesos de construcción, evaluación, comunicación y aplicación de modelos matemáticos necesarios para dar significado a las experiencias de aprendizaje.

La enseñanza de la Geometría Fractal permite introducir a los alumnos a un ambiente de aprendizaje activo con elementos tales como:

- ☆ El uso apropiado de la tecnología en prácticas que involucren el uso de calculadora, calculadora graficadora o computadora.
- ☆ El diseño de procesos activos en los cuales los alumnos participan en la solución de problemas, discusiones grupales y la elaboración de proyectos.
- ☆ Actividades que promuevan la reflexión de los alumnos acerca de sus procesos de aprendizaje, tales como el uso de reflexiones escritas y discusiones grupales.
- ☆ El uso de técnicas constructivistas donde los alumnos demuestren el dominio de un concepto matemático mediante la investigación histórica de sus raíces, experimentando con distintas técnicas de solución a un problema y trabajando en forma colaborativa.

Parece ser evidente entonces que el ambiente constructivista es un ambiente natural en el cual enseñar la Geometría Fractal (Hanna y Harrison, 1994).

Se ha dicho que el constructivismo tiene implicaciones importantes en la enseñanza. En primera instancia, la enseñanza ya no puede ser vista como la transmisión de conocimiento del que lo tiene hacia el que no; por el contrario, se esperaría que los maestros actúen ahora como *guías* que proporcionen a los alumnos oportunidades para probar la efectividad de su conocimiento actual.

La propuesta planteada en este trabajo contempla este aspecto, por lo que se han diseñado actividades que van mediando la construcción de conceptos tales como el de dimensión fractal, proceso iterativo y autosemejanza. La sección “construcciones” proporciona al profesor los elementos necesarios para que éste guíe a los alumnos hacia la construcción del concepto mediante discusiones grupales, preguntas que invitan a la reflexión, actividades en equipo, tal y como se recomienda en los *Estándares* del NCTM de 1989 (Hanna y Harrison, 1994).

En segunda instancia, dado que el aprendizaje está basado en conocimiento previo, entonces se busca que los profesores se den ahora a la tarea de generar ambientes de aprendizaje que desafíen el conocimiento previo para dar la oportunidad de construir el nuevo. En la enseñanza de la Geometría Fractal, tienen lugar actividades variadas que se ajustan a esta perspectiva: el uso de la computadora como una herramienta para la investigación y experimentación alrededor del proceso iterativo en funciones en el plano real

y en el complejo, tal y como lo plantea la experiencia previa en salones de clase de universidad, bachillerato y secundaria (Devaney, 1989; Hanna y Harrison, 1994; Solomon, 1989; Harrison, 1991; Buldyrev et al, 1994; Talanquer e Irazoque, 1993; Bannon, 1991; Cibes, 1990; Barton, 1990), el uso de “manipulativos” que facilitan al alumno la construcción del concepto de autosemejanza entre otros (Simmt y Davis, 1998; Ching et al, 1994; Coes III, 1993; Esbenshade Jr, 1991) y discusiones grupales sobre propiedades particulares de los objetos fractales, como por ejemplo el hecho de que un perímetro infinito encierre un área finita en el llamado Copo de Nieve.

En tercer lugar, si los alumnos se dan ahora a la tarea de aplicar su conocimiento actual en situaciones nuevas para poder construir nuevo conocimiento, entonces es también función del profesor motivar a sus alumnos hacia el aprendizaje, incorporando problemas que tengan relevancia para ellos, es decir, que les sean significativos. En etapas avanzadas de la enseñanza de la Geometría Fractal, el alumno puede llegar a diseñar sus propios programas computacionales que generen figuras fractales; en este proceso, el fractal generado adquiere un significado especial para los alumnos. Aunque la mayoría de los problemas de aplicación que involucran conceptos de la Geometría Fractal tienen que ver con sistemas dinámicos (Cibes, 1990; Devaney, 1989), en su mayoría físicos, el hecho de que estos sistemas se relacionan en muchas formas con la realidad, da relevancia para el alumno.

Como ya se ha mencionado, se trata de que se construya conocimiento en forma activa. Es importante considerar que la propuesta puede integrarse a los cursos de matemáticas de diversas maneras y que el contacto de los profesores con el diseño constructivista de la misma podrá ser transferido a un diseño similar en sus clases al enseñar otros conceptos. Si bien un taller de tres o cuatro semanas tal vez no es tiempo suficiente para profundizar en todos los temas, el presentar a los alumnos conceptos de matemática moderna con este enfoque generará inquietudes que los llevarán a la construcción de los conceptos a través de actividades e investigaciones propias, dándoles la oportunidad de reflexionar sobre sus nuevas experiencias, sobre como llegaron a ellas y sobre como las superaron. Lo fundamental es dejar en ellos la inquietud por nuevo conocimiento.

La propuesta metodológica de este trabajo se ha desarrollado tomando una perspectiva constructivista, basada en lo expuesto anteriormente, y haciendo énfasis en el

diseño de la parte que corresponde al manual de Geometría Fractal para el profesor de bachillerato y a las actividades para los alumnos, las cuales se describen con detalle en el apartado de Metodología.

## **2.5 Revisión de Trabajos Previos Realizados en el Área**

El desarrollo de este trabajo consta de cuatro etapas que se describen en el apartado de Metodología; cada una tiene un producto específico. En relación con la segunda etapa del trabajo se analizaron 30 publicaciones, que se refieren a las experiencias en otros países al integrar Geometría Fractal en sus cursos de bachillerato. Dicho análisis se ha realizado desde tres enfoques distintos: se buscaron diferencias y semejanzas de tipo didáctico, se analizó el contenido específico de cada artículo en cuanto a Geometría Fractal se refiere y, finalmente, se estudiaron las características generales, observaciones y resultados obtenidos en dichos cursos.

Es importante mencionar que en todos los trabajos analizados se menciona la alta motivación observada en los participantes del curso, en que este representó algo diferente por su estructura y el uso de material didáctico aún a pesar de tratar temas matemáticos avanzados. Se enfatiza así mismo, en la mayoría, que el papel del profesor cambió, dejando de ser un expositor para convertirse principalmente en un guía o facilitador en las experiencias de aprendizaje. El diseño más común observado de estos cursos fue la integración de temas de Geometría Fractal en cursos de álgebra y cálculo en preparatoria y, la asignación de 2 o 3 semanas terminales dentro de un curso de cálculo, exclusivas para tratar temas de Geometría Fractal. En cuanto a la evaluación, se realizaron fundamentalmente presentaciones finales por parte de los alumnos, sin embargo este es un tema que no se profundiza lo suficiente en la literatura revisada y el cual será tratado más adelante.

A continuación se muestran, en la Figura 1, a manera de cuadro sinóptico las características didácticas encontradas en dichos trabajos, estas incluyen el tipo de curso, los conceptos introducidos, la audiencia a quien fue dirigido, el material utilizado, las actividades que realizaron los participantes, el papel del profesor expositor y la forma de evaluación.

Se observa una gran diversidad en las aproximaciones de distintas escuelas en el manejo de la Geometría Fractal. Algunos han sido cursos completos con duración de un semestre, otros insertan ciertos temas dentro de cursos tradicionales de matemáticas mediante talleres, prácticas de laboratorio, como actividad adicional o en la ejemplificación o introducción de un nuevo concepto.

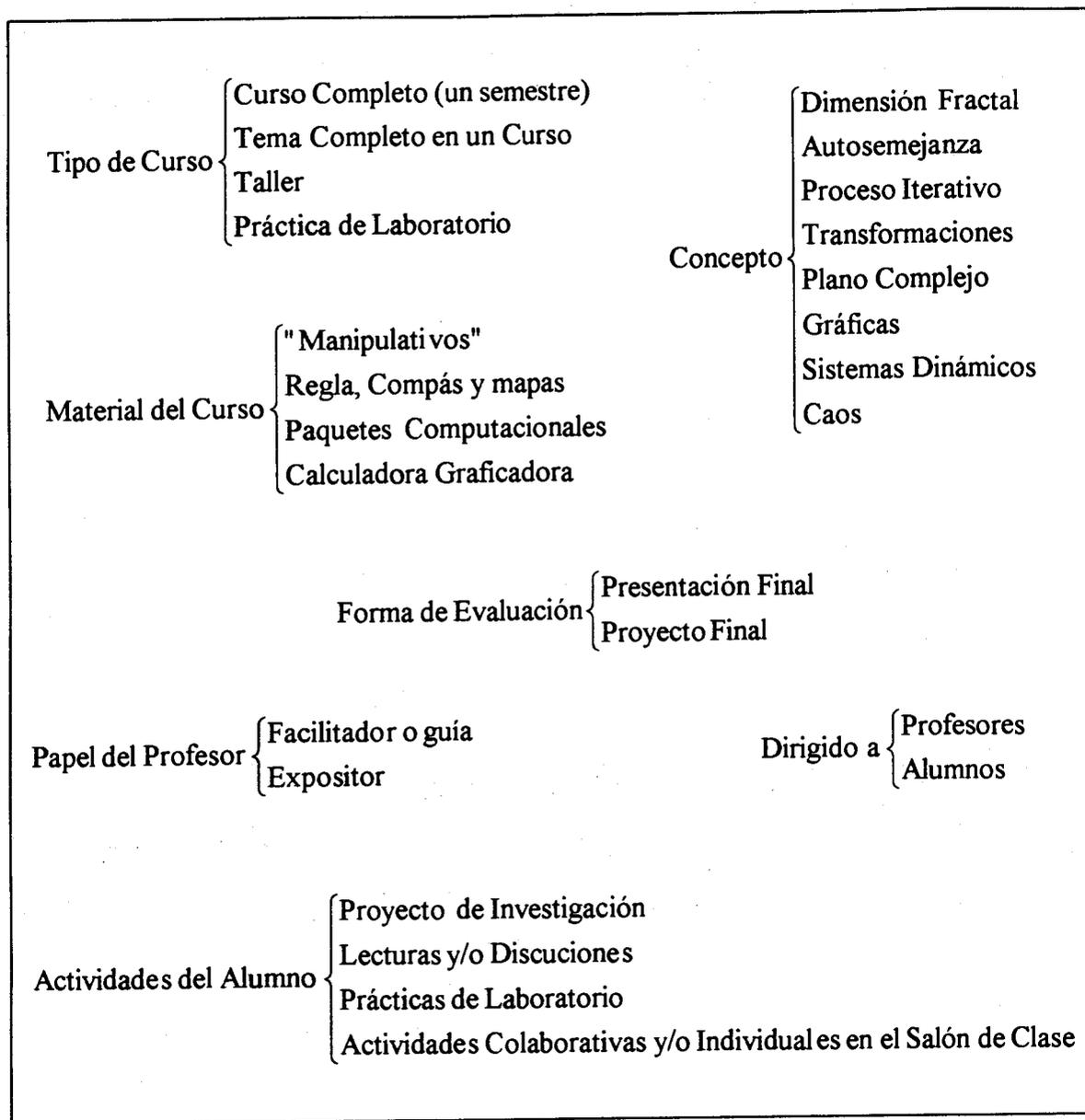


Figura 2.4.1 Características didácticas encontradas en trabajos previos sobre la enseñanza de la Geometría Fractal

Es importante mencionar que, los trabajos analizados, representan en su mayoría situaciones particulares de ciertas escuelas o proyectos académicos de algunos profesores, lo

que se refleja por un lado en la gran diversidad de propuestas y por el otro en una notable particularización de temas, actividades y forma de evaluación.

En el Anexo 1, se describen las características generales y el tema o temas de la Geometría Fractal de cada artículo revisado, entre los cuales se encuentran las experiencias acerca de la enseñanza de la Geometría Fractal en ámbitos más generales, no solamente confinados al bachillerato. En este anexo, se observa que se sigue dando una gran importancia al aspecto motivacional del alumno que participa en estos cursos y su papel activo en el proceso de aprendizaje. Es también digno de mencionarse el enfoque metodológico propuesto en estos artículos, el cual incluye aspectos constructivistas tales como la participación en discusiones y trabajos en equipo, el uso de problemas significativos, por ejemplo en Buldyrev (1994), simulaciones de situaciones reales, como en Ching (1994), el uso de la tecnología, ejemplificado en Talanquer y Irazoque (1993). Para mayor detalle de estas actividades, consultar el Anexo 1.

Tomando en consideración los trabajos analizados se diseñó la propuesta que este trabajo propone, la cual se resume en la tabla No. 1 y que será discutida ampliamente en la sección de Resultados. Esta propuesta debe considerarse como un lineamiento general para el diseño de un curso cuya estructura deberá particularizarse por el profesor o grupo de profesores a la situación específica de cada institución.

<b>Tipo de curso en cuanto a extensión</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- De 2 a 3 semanas en el cierre del último curso de Matemáticas del Bachillerato, de ser este Cálculo.</li> <li>- De no ser Cálculo, se detalla una opción en la sección de Resultados.</li> </ul>
<b>Actividades del alumno</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lecturas y posteriores discusiones en clase.</li> <li>- Prácticas de Laboratorio.</li> <li>- Proyectos de investigación o simulación en Equipo.</li> <li>- Construcción de material didáctico.</li> </ul>
<b>Población a quién va dirigido</b>	Los alumnos a través del profesor.
<b>Papel del profesor</b>	Facilitador o guía del proceso.
<b>Forma de evaluación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proyecto de investigación de una aplicación de la Geometría Fractal y exposición grupal de resultados en clase.</li> <li>- Desarrollo y entrega de material didáctico enfocado a la enseñanza de la Geometría Fractal elaborado bajo criterios específicos.</li> </ul>

Tabla No. 1 Características generales de la propuesta para la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato

Como conclusión de esta sección, a continuación se resume el impacto que puede tener sobre el aprendizaje de las matemáticas del alumno el participar en un curso de Geometría Fractal. Esta lista está basada en el análisis de los trabajos previos realizados en el área (Solomon, 1989; CMESG, 1991; Hanna y Harrison, 1994; Gura y Lindley, 1994; Harrison, 1991; Lewis y Kaye, 1990).

## **2.6 Beneficios para el alumno que participa en un curso de Geometría Fractal**

Según la revisión bibliográfica realizada y tras un análisis detallado de trabajos en el área, se enuncian algunos de los beneficios para el alumno que participe en un curso de Geometría Fractal.

El alumno, a lo largo de su proceso de aprendizaje,

- adquirirá la idea de que las matemáticas están vivas y son dinámicas ya que esta matemática tiene sus orígenes, como rama de las matemáticas en el siglo XX,
- tendrá la posibilidad de “ver” objetos matemáticos nuevos tales como los Conjuntos de Julia, el Conjunto de Mandelbrot, el Helecho de Barnsley y muchos más que no han sido designados con un nombre específico,
- reunirá varios conceptos matemáticos en una aplicación, como por ejemplo en la construcción de los Conjuntos de Julia donde se integran los conceptos de número complejo, plano complejo, evaluación de funciones de variable compleja, iteración de funciones de variable compleja, órbita de un punto, convergencia, divergencia y límite, además de todos aquellos que normalmente están incluidos en los programas analíticos del bachillerato,
- tomará un papel activo en su aprendizaje, ya que el papel del profesor cambia de expositor a guía o facilitador al disminuir el énfasis en procedimientos de mecanización o memorización individuales para enfatizar en solución de problemas en equipo,
- tendrá enfoques nuevos en el aprendizaje de ciertos temas tales como número y plano complejo, solución de ecuaciones de variable real o compleja, entre otros,

- reunirá varias disciplinas en una actividad como sería en el caso de la programación para resolver ecuaciones polinomiales de variable compleja.

El impacto en el desarrollo de un alumno que logre estos objetivos a lo largo de un curso que ha sido planeado para dar oportunidad a ello se reflejará no solamente en su desempeño académico, sino, además, en sus actitudes hacia las matemáticas y hacia la vida misma.

## **3 PROBLEMA**

### **3.1 Planteo del problema**

Hay suficiente evidencia de que la Geometría Fractal ha sido enseñada con éxito en ámbitos educativos a nivel bachillerato y que esto ha sido provechoso para el profesor y para el estudiante; con relación a esta afirmación, pueden consultarse los trabajos de Gura y Lindley (1994), Harrison (1991), Lewis y Kaye (1990). Las experiencias a este respecto se ubican principalmente en el sistema educativo estadounidense y canadiense. Es, por esto mismo, que el material disponible sobre el cual se han diseñado estos cursos, la teoría y las actividades prácticas se encuentran todas ellas adecuadas a estos sistemas educativos, es decir, acordes a los programas curriculares norteamericanos y en el idioma inglés principalmente.

Por otro lado, se ha observado que la mayoría de los profesores de nivel medio y medio superior no tienen conocimiento de esta geometría debido a distintas causas; entre éstas la dificultad del idioma, la poca disponibilidad de materiales adecuados a su contexto y, la falta de tiempo para profundizar en el tema; esto representa uno de los obstáculos que como consecuencia limitan el acceso de los alumnos de bachillerato a este tipo de matemática.

Se observa entonces que el material, tanto en lo que se refiere a accesibilidad del idioma así como en cuanto a diversidad y profundidad, no es adecuado para utilizarse en forma inmediata en los cursos de bachillerato.

Dadas estas circunstancias, y siendo uno de los objetivos de este trabajo el de sentar bases suficientes para el diseño formal de un curso de Geometría Fractal, es importante poner este material al alcance del profesor promedio de bachillerato. Es por ello

que uno de los principales propósitos de este trabajo es el de concentrar y filtrar los sustentos matemáticos y teóricos que permitan ubicar la Geometría Fractal en el contexto educativo del Estado, para lo cual se realiza una revisión bibliográfica y de paquetes computacionales; se adecuan partes de los textos originales de los creadores de esta geometría; se analizan cursos, talleres, otras propuestas y experiencias en este campo en contextos educativos de países como Estados Unidos de América y Canadá, y se reúne todo este material en una propuesta metodológica y conceptual que ha sido adecuada al contexto de la enseñanza de las matemáticas del bachillerato en algunas escuelas de Querétaro, es decir, elaborada de tal forma que el lector pueda hacer uso del material a lo largo de uno o varios cursos de matemáticas; en el cierre del último curso de matemáticas del bachillerato o, bien, en un curso o taller adicional.

Este trabajo no pretende hacer un análisis curricular de la educación media en México; lo importante es crear la posibilidad de la enseñanza de esta matemática en el bachillerato. Tampoco pretende diseñar un curso de Geometría Fractal para el bachillerato, sino, sentar las bases metodológicas y conceptuales y, plantear los lineamientos generales para que ésto ocurra en un futuro.

### **3.2 Cuestionamientos a los que responde la Investigación**

La mayoría de los planes curriculares del bachillerato en México comprenden las áreas matemáticas de álgebra, trigonometría, geometría euclideana, geometría analítica y cálculo, que representan parte de los conocimientos matemáticos gestados por el hombre desde las civilizaciones Egipcia y Babilónica hasta los trabajos sobre la fundamentación del cálculo realizados en el siglo XVIII. De ninguna manera se pretende desvalorizar la tremenda importancia de este cúmulo de conocimientos y sus valiosas implicaciones en el desarrollo tecnológico de cualquier sociedad. Sin embargo, desde una visión holística de las matemáticas, esta estructura curricular podría dejar la impresión de que las matemáticas han sido descubiertas o creadas en su totalidad cuando, por el contrario, son una ciencia viva y en permanente descubrimiento o creación. Es por esto por lo que podemos comenzar a pensar en la posibilidad de integrar parte de la matemática moderna a los planes curriculares y, de esta forma, contribuir a una revalorización de esta ciencia tanto por profesores como por alumnos. El primer cuestionamiento que surge es, entonces, sobre la factibilidad de

enseñar matemática moderna a estudiantes de bachillerato. La siguiente pregunta que habría que responder sería la parte de la matemática moderna más adecuada para este propósito.

Dentro de lo que se conoce como “Matemáticas Modernas”, encontramos la teoría del caos, la Geometría Fractal, las matemáticas discretas y la teoría de redes, entre otras. Es la Geometría Fractal la que se quiere hacer llegar a nuestros alumnos por lo llamativo de los objetos con los que trabaja y porque es posible conocer parte de ella con los conocimientos matemáticos que ya poseen. La factibilidad de introducirla al contexto educativo de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato en México, y más específicamente en Querétaro, es una de las preguntas a las que este trabajo da respuesta. Responde también a la cuestión de definir la forma en la que esta matemática puede introducirse en la enseñanza de las matemáticas, sus implicaciones y su impacto en alumnos, profesores e instituciones educativas. Se analiza y se propone, asimismo, el material que los profesores pueden utilizar en la implementación de estos temas en sus clases, y se propone una metodología surgida del análisis de las experiencias que se han tenido en la implantación de temas similares en otros sistemas educativos.

### 3.3 Hipótesis

El diseño experimental de este trabajo podría ser clasificado por su grado de aplicación, el cual se ubica dentro del tipo de *investigación generalizable a ambientes educativos*; es un diseño del tipo *investigación y desarrollo* que por sus características busca desarrollar productos efectivos para su uso en la escuela como materiales de entrenamiento para profesores y materiales de aprendizaje (Gay, 1996). Por lo tanto es un diseño que no permite enunciar hipótesis verificables mediante un experimento, sin embargo sí es posible enunciar a manera de hipótesis las expectativas del proyecto:

1. Se postula que es posible concentrar en forma de material didáctico dirigido a profesores del bachillerato y adecuado al contexto educativo del país los supuestos teóricos y conceptuales de la Geometría Fractal.

Este material será desarrollado considerando tres factores principales:

- i. Su aplicabilidad al contexto educativo de la enseñanza de las matemáticas del bachillerato para que su implementación pueda ser inmediata, sin interferir con la evolución natural de los planes de estudio en la preparatoria.
- ii. Su integración al curriculum de tal forma que la conexión entre los temas nuevos y los que ya se enseñan sea natural.
- iii. Su adaptabilidad a la infraestructura que impere en cualquier escuela preparatoria con el objetivo de que la disponibilidad de equipo no sea un impedimento para la posible implantación.

Se esperaría que los profesores de bachillerato resultaran ser altamente motivados a interesarse en la Geometría Fractal para enseñarla a sus alumnos y como una alternativa para la enseñanza y/o ejemplificación de algunos conceptos matemáticos. Que sean motivados para entenderla e introducirla a sus estudiantes bajo un modelo constructivista aprovechando que ésta les será presentada en su idioma (español), con un diseño especial para ellos y adecuada al nivel de profundidad acorde a su preparación; sin embargo, esta hipótesis queda solamente como una posibilidad futura del trabajo.

## **3.4 Limitaciones**

### **3.4.1 Limitaciones del Trabajo**

El origen de las fuentes bibliográficas consultadas, las cuales corresponden a los países de Estados Unidos de América y Canadá, puede considerarse como una limitante del trabajo por generar una posible visión particularizada a éstos sistemas educativos únicamente. Las razones tienen que ver primeramente con la accesibilidad del idioma (inglés) y, en segundo lugar, con la relativa semejanza de estructuras de enseñanza que existe entre el sistema mexicano y el sistema de estos dos países. Un tercer elemento que influyó la decisión sobre las fuentes de consulta lo constituye la accesibilidad del material relacionado con el tema, el cual incluso, fue adquirido personalmente en universidades canadienses y norteamericanas.

Una segunda limitante de este trabajo es que éste llega hasta una propuesta general, sin considerar su implementación dentro del mismo. Se ha dejado esto para que sea

tratado en forma particular por los profesores o instituciones interesadas y forma parte de las recomendaciones finales.

### **3.4.2 Limitaciones del Trabajo en cuanto a su posible implementación**

Ya que existe evidencia de que la enseñanza de la Geometría Fractal es posible a estudiantes de bachillerato (Gura y Lindley, 1994; Harrison, 1991; Lewis y Kaye, 1990), lo que este trabajo busca es elaborar un manual que proporcione al profesor el material suficiente y necesario para dar un curso de, o incluir en su curso de matemáticas, temas de Geometría Fractal en donde se aprecie la relación y aplicación existente entre los conocimientos adquiridos tradicionalmente y los conocimientos de la Geometría Fractal.

Desde esta perspectiva, el trabajo contempla posibles limitaciones. Por un lado, se encuentra una posible reserva o actitud negativa de los profesores y/o estudiantes hacia lo nuevo o hacia el cambio, lo cual va de la mano con la saturación de temas encontrada en los programas analíticos del bachillerato. Un profesor puede no tener tiempo ni deseos de “estudiar” o “aprender” matemáticas modernas para sus estudiantes; aun si, este material se le da completamente diseñado y adecuado para su entendimiento y su uso en el salón de clase.

Por otro lado, si el profesor desea estudiar y aprender temas nuevos con los cuales “tentar” a sus estudiantes hacia las maravillas recientemente descubiertas de las matemáticas, entonces puede ser que el profesor se encuentre con que una gran parte (casi todo) del material bibliográfico no está ni en su idioma ni a un nivel matemático apropiado para su rápida comprensión. Por citar un ejemplo, podemos mencionar que, de los 30 artículos revisados, fueron encontrados sólo 2 en español, los cuales nos hablan de los conceptos de la Geometría Fractal, sin hacer mención de la didáctica involucrada en la enseñanza de dicha ciencia.

Una de las principales razones por las que la Geometría Fractal ha tenido tanto auge ha sido el desarrollo tan grande de la tecnología computacional que hay hoy en día. Mandelbrot (1982) mismo apunta su importancia en el sentido de que, gracias a ella, las teorías matemáticas y físicas son transformadas y enriquecidas debido a la generación de patrones infinitamente complicados, los cuales son ahora visibles; en sus propias palabras

“visto desde muy cerca, el papel de las computadoras gráficas cubre un amplio rango. [...] fundamentalmente permiten una *visualización*“ (Mandelbrot, en el prólogo de *Fractals for the Classroom*, Peitgen et al, 1992). Luego entonces es de esperarse que, en la enseñanza de dicha ciencia, se dé un gran uso de equipo computacional; una última limitante es la falta de equipo computacional adecuado. Sin embargo, el diseño de las actividades para el alumno del producto de esta investigación no está basado en el uso de la tecnología, ya que se incluyen actividades con papel y tijeras, compás y regla, y papel y lápiz.

### **3.5 Suposiciones del trabajo**

Este estudio asume que todo profesor de matemáticas desea ser mejor profesor cada día, por lo que está dispuesto a invertir parte de su tiempo en “conocer, comprender y enseñar” cualquier rama de las matemáticas que le permita tener más conocimientos para seducir a sus estudiantes a enamorarse de las matemáticas.

El entendimiento de los conceptos básicos de la Geometría Fractal, tales como dimensión fractal, autosemejanza y proceso iterativo, requiere del dominio de conceptos matemáticos tales como función, composición de funciones y semejanza. Partimos del supuesto de que los alumnos han recibido una preparación mínima en sus cursos de matemáticas de bachillerato, por lo que cuentan con las herramientas necesarias para la construcción de los conceptos de la Geometría Fractal. En el Anexo 2, se describe detalladamente la relación entre cada uno de los conceptos fractales y los conocimientos matemáticos previos necesarios.

### **3.6 Definición de términos**

En este trabajo, se entiende por *propuesta* la fundamentación teórica y conceptual de un material elaborado para el profesor de bachillerato donde se proveen los conceptos, ejemplos y ejercicios necesarios para la enseñanza de la Geometría Fractal a nivel bachillerato, la cual ha sido diseñada considerando tres partes principalmente: la matemática, la educativa y la práctica.

Se entiende por *manual* el producto principal de esta propuesta, el cual fue totalmente diseñado para que el profesor de bachillerato lo use en sus clases. Incluye los temas básicos de la Geometría Fractal relacionándolos con los algunos temas que se cubren en el programa del bachillerato, una serie de “construcciones” de cada uno de estos temas, la fundamentación matemática de la Geometría Fractal y una revisión del software relacionado con el tema.

Por *fundamentación matemática* se entienden aquellos sustentos puramente matemáticos que constituyen la base matemática para la Geometría Fractal como una rama de las matemáticas; éstos incluyen la definición y ejemplificación de espacio métrico, introducción de las ideas topológicas básicas para la descripción de subconjuntos de espacios, la presentación de un espacio métrico cuyos elementos son los subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico, el teorema del punto fijo y el concepto de sistemas de funciones iterables (SFI) y cómo es que éste puede definir un fractal.

Por otro lado, la *fundamentación educativa* incluye aquellos sustentos educativos que constituyen la justificación educativa del proyecto, la discusión acerca del estado de la educación matemática en épocas recientes hasta nuestros días, sobre el constructivismo en la enseñanza de las matemáticas, sus características en el salón de clase y su aplicación en la enseñanza de la Geometría Fractal.

A lo largo de este trabajo, se han considerado los *Estándares* del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés), los cuales se han tomado como guía para el diseño de la propuesta, ya que se adecuan perfectamente a la postura constructivista y, además, conjugan las observaciones ganadas a través de la experiencia en la enseñanza de las matemáticas.

Otra de las principales fuentes de información mencionada en el presente trabajo es el Centro de Información de Recursos Educativos (*ERIC* por sus siglas en inglés), el cual es un sistema de información nacional estadounidense que actúa como una red de “bodegas”; cada una de estas proporciona una colección de materiales para un área educativa específica. Los documentos que forman la colección del ERIC provienen de diferentes fuentes, las cuales incluyen proyectos de investigación y desarrollo con fondos federales, sistemas de escuelas y otras agencias educacionales, conferencias y reuniones, publicaciones educativas y publicaciones personales.

### **3.7 Justificación de la Investigación**

Hay muchos temas dentro del dominio de los fractales que se adecuan al currículum de matemáticas del bachillerato de tal forma que su inclusión se hace en una forma natural (Hanna y Harrison, 1994). En forma adicional, el uso de la computadora como una herramienta de apoyo en algunos cursos de matemáticas es un tema ampliamente discutido y que ha provocado un cambio de consideración en los métodos actuales de la enseñanza. Por lo tanto, el introducir la enseñanza de la Geometría Fractal apoyada en estas herramientas complementa, diversifica y enriquece la presencia de la computadora en la clase de matemáticas, es decir, que en ciertos contextos, ya se cuenta con el medio necesario para desarrollar este nuevo aprendizaje.

Los temas de la Geometría Fractal permiten una mayor riqueza y variedad a ciertos temas que actualmente se enseñan en el bachillerato y, por su estructura, inyecta una nueva vitalidad a las clases de matemáticas.

Esta propuesta es provechosa para los alumnos porque les permitirá conocer parte de lo que se conoce como matemáticas modernas y darse cuenta de que las matemáticas son una disciplina “viva” y “dinámica”, la cual continúa su desarrollo hasta nuestros días y cuyas aplicaciones siguen siendo cada vez más vastas; así mismo, les permitirá maravillarse el saber que estas matemáticas son tan, o quizá más, accesibles que las que usualmente estudian en el salón de clase y que no tendrán que esperar a llegar a su licenciatura para ver algunas aplicaciones.

La experiencia con estudiantes, según lo reporta la literatura revisada, ha mostrado que éstos se involucran inmediatamente con la Geometría Fractal a tal grado que superan el estado de observación para convertirse en creadores y descubridores. En la creación y exploración de los fractales puros hay una gran posibilidad de que surjan hechos matemáticos que los alumnos descubren a través de las actividades de aprendizaje (Hanna y Harrison, 1994). El enfoque constructivista puede resultar de gran beneficio para los alumnos ya que, además, adquirirán experiencia en el manejo de procesos reflexivos y autodidactas, en el escuchar y exponer ideas, y en organizar sus conocimientos para utilizarlos para la generación de otros; también esto permitirá desarrollar habilidades y actitudes que no obtienen desde un papel pasivo en una clase con un enfoque tradicional.

Desde el punto de vista de los profesores, esta propuesta es provechosa ya que les permitirá explorar nuevas formas de enseñanza o de ejemplificación de temas clásicos del currículum matemático del bachillerato, mostrar y enseñar a los alumnos parte de lo que se trabaja hoy en día en las matemáticas, trabajar con ellos en un tema interdisciplinario en el salón de clase (computación, biología, física y matemáticas), experimentar con computadora y con manipulativos en la clase de matemáticas. Ellos mismos contarán con las posibilidades de exploración en matemáticas y reforzarán sus propias ideas y bases matemáticas. Al mismo tiempo, la estructura expuesta permite el desarrollo de nuevas habilidades en los profesores tales como la integración de los elementos de la enseñanza constructivista enunciados anteriormente, las experiencias en el escuchar y permitir la participación de los alumnos, y aprender a desarrollar modelos de entendimiento (CMESG, 1991).

# 4 METODOLOGÍA

El diseño experimental de este trabajo, clasificado por su grado de aplicación, cae dentro del tipo de *investigación generalizable a ambientes educativos*. Es un diseño del tipo *investigación y desarrollo* que por sus características busca desarrollar productos efectivos para su uso en la escuela como materiales de entrenamiento para profesores y materiales de aprendizaje (Gay, 1996).

El desarrollo de este trabajo consta de cuatro etapas; y dentro de cada una de éstas fueron generados productos específicos.

## 4.1 Investigación Bibliográfica

Se trabajó, en primer lugar, en una investigación bibliográfica para reunir material. Esta investigación se llevó a cabo utilizando medios electrónicos como la base de datos ERIC y la red mundial de comunicaciones (World Wide Web, Internet). También se trabajó en forma presencial, principalmente en la biblioteca de la *Universidad de Calgary* en Canadá, la del *Instituto de Matemáticas* de la *UNAM*, la de la *Universidad de Chicago* en Estados Unidos, y la del *ITESM Campus Querétaro*, obteniéndose alrededor de 40 publicaciones representativas. También se incluye la asistencia al 75o y 76o Congreso Anual de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en Minesota, y Washington, D.C., Estados Unidos de América, donde se asistió a conferencias relacionadas con el tema. Una vez reunido material suficiente, se procedió a su análisis y clasificación en dos grupos: matemático formal y educativo.

## 4.2 Justificación Educativa

La segunda etapa del trabajo consistió en la justificación educativa del proyecto para lo cual se analizaron 30 de las publicaciones sobre las experiencias en Estados Unidos y Canadá, integrando la Geometría Fractal a sus cursos de bachillerato. Asimismo, se determinó la estructura metodológica a seguir para el diseño del proyecto.

Se encontraron semejanzas importantes durante este análisis, principalmente en lo que se refiere a los temas introducidos y al nivel escolar en el cual los cursos fueron implantados.

## 4.3 Elaboración del Manual

La tercera etapa del trabajo consistió en la elaboración de un manual dirigido al profesor de bachillerato y que incluye los temas:

- *El Porqué de la Geometría Fractal en el Bachillerato*
- *Integración Curricular de la Geometría Fractal en el Bachillerato*
- *Introducción a la Geometría Fractal*
- *Antecedentes Históricos sobre el Desarrollo de la Geometría*
- *Primeros Fractales (El Conjunto de Cantor, la Curva de Koch, la Curva Llena Espacio de Peano, el Triángulo de Sierpinski)*
- *Autosemejanza*
- *Dimensión Fractal (Dimensión Autosemejante, Dimensión por Compás, Dimensión por Cuadrícula)*
- *Proceso Iterativo*
- *Comparación entre la Geometría Euclideana y la Geometría Fractal*
- *Introducción a los Fractales modernos*
- *Los Conjuntos de Julia*
- *El Conjunto de Mandelbrot*
- *Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales*
- *Construcciones (de los Primeros Fractales, de los conceptos de Autosemejanza, Dimensión Fractal, y Proceso Iterativo, de los Conjuntos de Julia, del Conjunto de Mandelbrot y de Fractales como solución de ecuaciones polinomiales)*

- *Definiciones Generales*
- *Sugerencias para una posible implementación de un Curso de Geometría Fractal*
- *Matemáticas Subyacentes a la Construcción de los Fractales*
- *Revisión del Software relacionado con los Fractales*
- *Bibliografía*

En todas y cada una de estas secciones se incluye la bibliografía que respalda el contenido, destacan los trabajos de:

- Mandelbrot en *“The Fractal Geometry of Nature”*
- Devaney en *“Chaos, Fractals and Dynamics”*
- Barnsley en *“Fractals Everywhere”*
- Peitgen et al en *“Fractals for the Classroom”*
- McGuire en *“An Eye for Fractals”*

Dentro de la estructura del manual, se incluye material listo para que el profesor trabaje directamente con sus alumnos. Este material ha sido diseñado con un enfoque constructivista por lo que se enfatiza la creación de un “ambiente de aprendizaje” que ayude a los alumnos a crear esquemas adecuados para el entendimiento de las matemáticas, en este caso, de los conceptos relacionados con la Geometría Fractal.

El material dirigido al profesor define los conceptos de la Geometría Fractal y le proporciona una opción para que sean discutidos con sus alumnos de tal forma que el conocimiento sea activamente construido mediante procesos de organización y adaptación adecuados.

El diseño de este manual se hizo conforme a una análisis previo de las experiencias en la enseñanza de la Geometría Fractal en otros países, principalmente en Estados Unidos de América y Canadá.

## 4.4 Estructura Matemática de la Construcción Formal de un Fractal

En la cuarta etapa del trabajo, se formalizó en una estructura matemática la construcción de los elementos con los que trabaja la Geometría Fractal. Esta parte se presenta para proporcionar un soporte estrictamente matemático que sustenta a la Geometría Fractal como parte de la teoría matemática; ésta sección se sustenta en los trabajos de Barnsley (1988) en *“Fractals Everywhere”*, Edgar (1990) en *“Measure, Topology and Fractal Geometry”*, Devaney (1992) en *“A First Course in Chaotic Dynamical Systems”* y Christie (1976) en *“Basic Topology”* y se trabajan los conceptos dentro de un cuerpo axiomático formal.

El trabajo, en su conjunto, va dirigido a profesores de matemáticas del bachillerato con una preparación mínima de licenciatura en alguna ingeniería o en matemáticas y con la inquietud hacia la mejora continua. Se toma como contexto educativo el observado en los colegios de bachilleres (COBAQ), tomándolo como una muestra representativa de una institución de gobierno a nivel nacional, y en la preparatoria del ITESM Campus Querétaro, considerando a esta como una muestra representativa de las instituciones particulares a nivel nacional.

Por ser un trabajo de tipo investigación y desarrollo, el producto final esperado es un manual para el profesor, adecuado para la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato, y no su implementación, la cual quedará como una alternativa de trabajo, estudio y análisis para el futuro.

## 5 RESULTADOS

Se ha planteado, en este trabajo, como uno de los objetivos principales, el de concentrar en forma de material didáctico dirigido a profesores de bachillerato y adecuado al contexto educativo del país, los supuestos teóricos y conceptuales de la Geometría Fractal.

El material desarrollado consiste de un *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato* que no solamente concentra la información relevante, sino que ésta se presenta conforme a una postura constructivista, la cual permite el desarrollo de habilidades y actitudes adicionales al aprendizaje de los temas de la Geometría Fractal presentados en este manual.

Este material didáctico ha sido desarrollado considerando tres factores principales: su aplicabilidad, su integración al currículum y su adaptabilidad en cuanto a infraestructura. En cuanto a su aplicabilidad, se refiere a que éste sea congruente con el contexto educativo de la enseñanza de las matemáticas del bachillerato, para que su implementación pueda ser inmediata sin importar la evolución natural de los planes de estudio de la preparatoria. Se ha buscado que su integración al currículum permita una conexión entre temas inherentes a la Geometría Fractal y aquellos otros que ya pertenecen a los planes analíticos del bachillerato. Estos temas se presentan en forma desglosada en la Tabla 2.

<b><u>Temas:</u></b>	<b><u>Conceptos aplicados:</u></b>
Primeros Fractales	Transformaciones geométricas, límite, infinito, razones, semejanza, convergencia, series y sucesiones.
Autosemejanza	Triángulo de Pascal, congruencia, proporción, semejanza, límite.
Dimensión Fractal	Geometría, dimensión, logaritmos, longitudes, áreas, volúmenes, semejanza, función lineal, escala.
Proceso Iterativo	Composición de funciones, función lineal, función cuadrática, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, evaluación de funciones, iteración, plano cartesiano, gráfica de funciones, series y sucesiones, convergencia, límite.
Los Conjuntos de Julia	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
El Conjunto de Mandelbrot	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, funciones cuadráticas.
Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, funciones polinomiales, raíces de funciones polinomiales.

Tabla No. 2 Conceptos del currículum de matemáticas del bachillerato relacionados con los temas de la Geometría Fractal tratados en el *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato*

Su adaptabilidad en cuanto a infraestructura se ha pensado de tal forma que no sea indispensable el contar con equipo computacional para aprovechar el contenido de las actividades propuestas.

## 5.1 Descripción del *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato*

La primera parte del manual contiene la teoría necesaria para que el profesor pueda impartir el curso junto con una serie de “construcciones” o “prácticas de laboratorio” dirigidas al estudiante, las cuales se recomienda sean trabajadas dentro del enfoque constructivista con el que fueron diseñadas.

Esta es la sección principal, pues es aquella con la que se espera que, invariablemente, se trabaje, ya sea por parte de los profesores o de los alumnos, en un curso completo o tomándolo por secciones para combinarlo con un curso de matemáticas. Esta parte consta de varias secciones.

La sección de *Antecedentes Históricos sobre el Desarrollo de la Geometría* tiene por objetivo el ubicar al lector en el contexto del desarrollo histórico de la geometría para mostrar que, aparte de la Geometría Fractal, se han generado muchas otras geometrías a lo largo del crecimiento de las matemáticas, las cuales han permitido descubrimientos impresionantes para la humanidad. Un ejemplo es la geometría analítica, cuya importancia para el desarrollo del cálculo es reconocida, y otro es la creación de la geometría elíptica usada por Einstein para desarrollar su teoría de la relatividad. Esta sección es importante porque, a través de esta contextualización histórica, se pretende que el lector abra su mente a nuevas áreas de aprendizaje lo cual, se espera, generará una actitud positiva ante el descubrimiento de temas nuevos.

Una vez concluida esta parte se introducen al lector los *Primeros Fractales* de tal forma que se analiza su origen en el tiempo y su construcción. Durante esta última parte se introducen dos de los principales conceptos de la Geometría Fractal como son el de autosemejanza y el de proceso iterativo. Asimismo se explica el impacto que tuvo, en su época, el descubrimiento de estos objetos matemáticos. Con los *Primeros Fractales* se busca que el lector construya en su mente una noción intuitiva de lo que es un fractal, lo que forma una parte de la creación de un ambiente mental que servirá de base para la construcción de una definición posterior.

Antes de seguir adelante con la descripción, construcción y definición de los *Fractales Modernos*, se construyen tres conceptos fundamentales de la Geometría fractal:

*Autosemejanza, Dimensión Fractal, y Proceso Iterativo.* Esta sección es importante porque estos conceptos forman parte de la definición misma de un fractal y es, a través de ejemplos y ejercicios, que se prepara al lector para una definición formal de lo que es un fractal.

En el siguiente capítulo, se hace una *Comparación entre la Geometría Euclideana y la Geometría Fractal.* La intención educativa de esta sección es la de recalcar las características de los objetos de la Geometría Fractal a través de una comparación con objetos familiares como son los de la geometría euclideana y se enfatiza la gran aplicabilidad de la Geometría Fractal para la modelación de objetos naturales.

Enseguida, se hace una *Introducción a los Fractales Modernos* en donde se da al lector una noción intuitiva de lo que son los primeros fractales algebraicos. En este capítulo se enuncia una definición de un objeto fractal utilizando los conceptos previamente construidos en secciones anteriores. El objetivo de esta sección es introducir históricamente a los *Conjuntos de Julia* que son los precursores de los fractales modernos. Estos conjuntos son sumamente importantes ya que se construyen en el plano complejo y a través de procesos iterativos en funciones muy simples. Su estudio integra todos los conceptos tratados hasta este momento en el manual y los cristaliza finalmente en figuras de gran belleza.

La conclusión natural en la presentación de los conjuntos de Julia es la construcción y descripción del fractal descubierto por quien le dio nombre a esta geometría: *El Conjunto de Mandelbrot.* Con esta parte se puede dar por concluido un recorrido completo a través de las bases de la Geometría Fractal; se esperaría que, en este punto, el lector cuente con una definición de lo que es un fractal y con la posibilidad de describir las propiedades que lo definen. Hasta aquí se ha hecho también mención de los alcances y las aplicaciones de esta geometría en la modelación de importantes fenómenos físicos.

Se hace necesario hacer mención de los sistemas dinámicos caóticos, con el objetivo de introducir apropiadamente los Conjuntos de Julia y el Conjunto de Mandelbrot, sin profundizar en la teoría ni en las aplicaciones físicas por quedar estas fuera de los propósitos del presente manual.

Antes de entrar a la sección de construcciones de los fractales y conceptos antes mencionados (prácticas de laboratorio), se generarán algunos *Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales* en donde se podrá observar la relación existente entre el punto

inicial, para la aproximación de las raíces en el método Newton-Raphson, y la raíz a la cual finalmente converge.

En el siguiente capítulo, *Construcciones*, se acompaña al alumno hacia la construcción de los primeros fractales, de los conceptos de autosemejanza, dimensión fractal y proceso iterativo, de los conjuntos de Julia y el de Mandelbrot y, finalmente, de los fractales como solución de ecuaciones polinomiales. Se incluyen preguntas, actividades e investigaciones que permiten al alumno tomar un papel activo en su aprendizaje, trabajar en equipo, reflexionar acerca de lo que está haciendo, aplicar conocimientos previos y generar nuevos.

A lo largo del manual se menciona una sección llamada *Definiciones Generales* cada que se hace referencia a un concepto no definido aún. En esta sección se conjugan las definiciones de todas las secciones previas con el fin de dar flexibilidad al profesor que desee tomar sólo parte del manual.

El manual ahora adquiere un enfoque hacia la didáctica que resume las razones que apoyan su introducción en el bachillerato, el cómo introducirla y la experiencia propia y de otros en esta aventura. El objetivo de este capítulo, *Implementación de un Curso de Geometría Fractal*, es el de crear un ambiente de confianza en los profesores lectores que les muestre que las posibilidades de implementación de este tipo de cursos son muy grandes. Dada la gran importancia que tiene el hacer sentir al profesor confianza para introducir la Geometría Fractal en sus cursos, los detalles acerca de la forma en la que se puede aprovechar con garantía de máximos beneficios el contenido del manual, se ha dedicado un espacio de esta sección a la implementación más adelante.

La segunda parte del manual muestra las *Matemáticas Subyacentes a la Construcción de los Fractales* para dar al profesor una visión completa de esta matemática; no se espera que estos temas sean tratados con los alumnos, pero sí se considera importante que el profesor profundice en ellos.

Esta parte fue diseñada para proporcionar la oportunidad de conocer el sustento matemático formal de esta geometría, el tratamiento de los conceptos se hace aquí desde una perspectiva puramente matemática (teorema-demostración), pero enunciada y desarrollada verbalmente; a lo largo de este capítulo se construye el espacio en el que viven los fractales

que, vistos desde esta perspectiva, son conjuntos de puntos que cumplen con ciertas condiciones específicas.

Por último, el Manual incluye una revisión del software que existe alrededor del tema, así mismo se proporcionan dos ejemplos de programas utilizados en el manual.

En el capítulo *Revisión del software* se le da al profesor una visión general del software disponible en el mercado en relación con la Geometría Fractal, anexando una descripción detallada de las capacidades de cada paquete. El objetivo de proporcionar esta descripción es el de abrir una gama de opciones para que el profesor diseñe su curso de acuerdo con sus intereses y necesidades.

La revisión del software se apoya en la siguiente bibliografía:

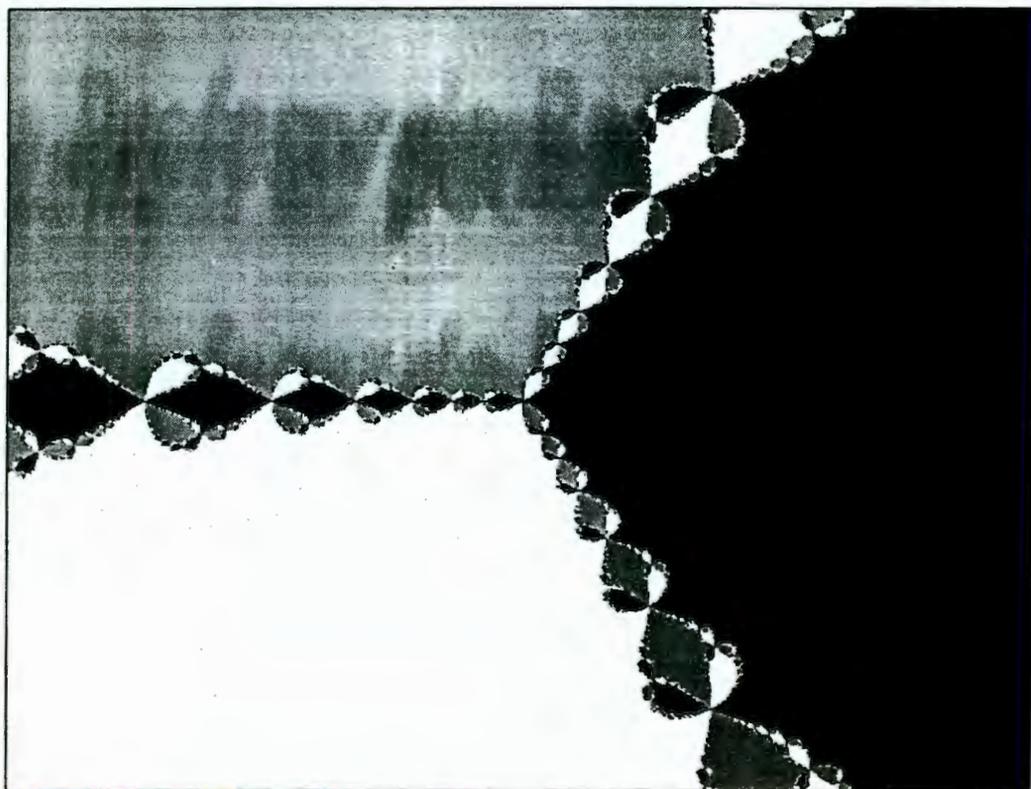
- Wegner (1992) en "*Fractals for Windows*"
- Wahl (1995) en "*Exploring Fractals on the Macintosh*"
- Devaney (1990) en "*Chaos, Fractals and Dynamics*".

Y en los paquetes "*Fractals for Windows*", "*Fractint*", "*Fractland*", "*Fractal Design*", "*Fractal Vision*", "*Chaos*", "*Fractals for the Macintosh*" y "*Exploring Fractals on the Macintosh*".

El manual se presenta en su versión completa a continuación.

## **5.2 Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato**

***Manual de Geometría Fractal***  
***para el***  
***Profesor de Bachillerato***



Dulce Hernández Méndez

Junio de 1998

# ÍNDICE

<b>1. Prefacio</b>	<b>41</b>
<b>2. El Porqué de la Geometría Fractal en el Bachillerato</b>	<b>42</b>
<b>3. Integración Curricular de la Geometría Fractal en el Bachillerato</b>	<b>43</b>
<b>4. Introducción a la Geometría Fractal</b>	<b>45</b>
<b>5. Antecedentes Históricos sobre el Desarrollo de la Geometría     como parte de las Matemáticas</b>	<b>47</b>
<b>6. Primeros Fractales</b>	<b>50</b>
<b>6.1 El Conjunto de Cantor</b>	<b>50</b>
<b>6.2 La Curva de Koch</b>	<b>54</b>
<b>6.3 La Curva Llena Espacio de Peano</b>	<b>61</b>
<b>6.4 El Triángulo de Sierpinski</b>	<b>63</b>
<b>7. Autosemejanza</b>	<b>72</b>
<b>8. Dimensión Fractal</b>	<b>79</b>
<b>8.1 Dimensión Autosemejante</b>	<b>80</b>
<b>8.2 Dimensión por Compás</b>	<b>86</b>
<b>8.3 Dimensión por Cuadrícula</b>	<b>92</b>
<b>9. Proceso Iterativo</b>	<b>98</b>
<b>10. Comparación entre la Geometría Euclideana y la Geometría Fractal</b>	<b>108</b>
<b>11. Introducción a los Fractales Modernos</b>	<b>110</b>
<b>12. Los Conjuntos de Julia</b>	<b>113</b>
<b>13. El Conjunto de Mandelbrot</b>	<b>124</b>
<b>14. Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales</b>	<b>128</b>

<b>15. Construcciones</b>	<b>139</b>
<b>15.1 Construcción de los Primeros Fractales</b>	<b>139</b>
<b>15.1.1 El Conjunto de Cantor</b>	<b>139</b>
<b>15.1.2 La Curva de Koch</b>	<b>141</b>
<b>15.1.3 La Curva Llena Espacio de Peano</b>	<b>143</b>
<b>15.1.4 El Triángulo de Sierpinski</b>	<b>145</b>
<b>15.2 Construcción del Concepto de Autosemejanza</b>	<b>149</b>
<b>15.3 Construcción del Concepto de Dimensión Fractal</b>	<b>153</b>
<b>15.3.1 Dimensión Autosemejante</b>	<b>153</b>
<b>15.3.2 Dimensión por Compás</b>	<b>160</b>
<b>15.3.3 Dimensión por Cuadrícula</b>	<b>162</b>
<b>15.4 Construcción del Concepto de Proceso Iterativo</b>	<b>167</b>
<b>15.5 Construcción de los Conjuntos de Julia</b>	<b>172</b>
<b>15.6 Construcción del Conjunto de Mandelbrot</b>	<b>177</b>
<b>15.7 Construcción de Fractales</b>	
<b>como Solución de Ecuaciones Polinomiales</b>	<b>178</b>
<b>16. Definiciones Generales</b>	<b>180</b>
<b>17. Sugerencias para una posible</b>	
<b>Implementación de un Curso de Geometría Fractal</b>	<b>183</b>
<b>18. Matemáticas Subyacentes a la Construcción de los Fractales</b>	<b>186</b>
<b>19. Revisión del Software Relacionado con los Fractales</b>	<b>242</b>
<b>20. Bibliografía</b>	<b>244</b>

# 1 Prefacio

La finalidad de este *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato* es la de proporcionar al profesor de Bachillerato material suficiente para impartir un curso completo o un taller de Geometría Fractal, o para la ejemplificación o introducción de algunos conceptos propios del curriculum de matemáticas del bachillerato; y está dirigido principalmente a estudiantes que cursen alguno de los últimos dos semestres de su bachillerato, aunque es posible adaptar el material a otros niveles del mismo. Uno de los objetivos del presente manual es el de proporcionar al profesor elementos para que pueda mostrar al estudiante de preparatoria una pequeña parte de la matemática del Siglo XX, es decir, temas de matemáticas cuyos orígenes, como matemática formal, se encuentran en este siglo. Con estos nuevos conocimientos el estudiante podrá apreciar que las matemáticas no son una disciplina muerta sino una ciencia “generalmente acumulativa” cuyo desarrollo continúa hasta nuestros días y entonces tendrá elementos que amplíen su concepción sobre lo que son las matemáticas y sus alcances. Una vez logrado lo anterior, es de esperarse que modifique sus actitudes hacia la materia y su aprendizaje.

El manual consiste de tres partes principales. La primera contiene la teoría necesaria para que el profesor pueda impartir el curso junto con una serie de “construcciones” o “prácticas de laboratorio” dirigidas al estudiante las cuales se recomienda sean trabajadas dentro del enfoque constructivista con el que fueron diseñadas. En la segunda parte se muestra la construcción de los fractales desde un enfoque formal, para dar al profesor una visión completa de esta matemática, no se espera que los temas de esta sección sean tratados con los alumnos, pero sí se considera importante que el profesor profundice en ellos. Y por último se incluye una revisión del software que existe alrededor del tema, así mismo se proporciona el código de los programas utilizados en el manual.

Se hace necesario hacer mención de los sistemas dinámicos caóticos, con el objetivo de introducir apropiadamente los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot, sin

profundizar en la teoría ni en las aplicaciones físicas por quedar estas fuera de los propósitos del presente manual.

## 2 El porqué de la Geometría Fractal en el Bachillerato

*“ . . . los fractales y el caos, para el estudiante, han sacado a las matemáticas del reino de la historia antigua colocándola en el siglo XXI. Y para el maestro proveen una oportunidad única e innovadora para ilustrar la dinámica de las matemáticas y sus muchos vínculos interconectados.”*

(Peitgen, et al., 1992)

La importancia del estudio de la Geometría Fractal en el bachillerato radica principalmente en que:

- permite el refuerzo, la aplicación e integración de conceptos curriculares del bachillerato,
- ofrece la posibilidad de la introducción de la computadora como una herramienta para la experimentación en matemáticas,
- logra un enfoque integral de la enseñanza de las matemáticas tomando en cuenta la teoría, la experimentación y la simulación,
- ofrece la posibilidad de introducir a los alumnos a un ambiente de investigación científica,
- refuerza en el estudiante la idea de que las matemáticas no son totalmente abstractas e “independientes” de los fenómenos y objetos de la vida real,
- muestra al estudiante que las matemáticas son una disciplina “viva” y “dinámica” en la cual se sigue trabajando día a día,
- fomenta la interacción del alumno con contenidos matemáticos mediante actividades que lo motivan y estimulan,

y en que le permite apreciar al estudiante que:

- el desarrollo de las matemáticas no termina con Newton y Leibniz, como podría pensar al estudiar cálculo, sino que continúa hasta nuestros días. El estudiante podrá conocer parte del trabajo de personas como Mandelbrot, Peitgen, Jürgens, Saupe, Falconer y Barnsley, entre otros, quienes trabajan en actualmente en investigación en diversos campos de las matemáticas relacionados con la Geometría Fractal,
- las matemáticas, como profesión, no sólo llevan a la enseñanza; sino a la investigación, desarrollo y aplicación de nuevas teorías,
- existen áreas en las matemáticas contemporáneas las cuales son accesibles desde la preparatoria,
- es posible “experimentar” con las matemáticas,
- las matemáticas son “bellas”, belleza que sólo es mencionada y pocas veces, o nunca, mostrada,
- las matemáticas son una disciplina ordenada y estructurada con muchas ramas relacionadas entre sí,
- las matemáticas tienen aplicaciones en la vida real, y no es necesario esperar a terminar una carrera para poder verlo,
- estudiar matemáticas no significa memorizar fórmulas y procedimientos para tratar de aplicarlos en algún problema en particular.

## **3 Integración Curricular de la Geometría Fractal en el Bachillerato**

Dentro de la Geometría Fractal se encuentran conceptos y temas relacionados con las matemáticas estudiadas en el bachillerato, por lo que presentan una excelente alternativa para introducir o ejemplificar algunos temas o conceptos. A continuación se presenta, a manera de tabla, una relación entre los temas del presente manual y los conceptos aplicados en la enseñanza o en la ejemplificación de los mismos:

<b><u>Temas:</u></b>	<b><u>Conceptos aplicados:</u></b>
Primeros Fractales	Transformaciones geométricas, límite, infinito, razones, semejanza, convergencia, series y sucesiones.
Autosemejanza	Triángulo de Pascal, congruencia, proporción, semejanza, límite.
Dimensión Fractal	Geometría, dimensión, logaritmos, longitudes, áreas, volúmenes, semejanza, función lineal, escala.
Proceso Iterativo	Composición de funciones, función lineal, función cuadrática, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, evaluación de funciones, iteración, plano cartesiano, gráfica de funciones, series y sucesiones, convergencia, límite.
Los Conjuntos de Julia	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, Funciones Lineales, funciones cuadráticas, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
El Conjunto de Mandelbrot	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, funciones cuadráticas.
Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales	Números complejos y sus operaciones, plano complejo, evaluación de funciones complejas, gráfica de funciones, funciones polinomiales, raíces de funciones polinomiales.

Tabla No. 3.1 Conceptos del curriculum de matemáticas del bachillerato relacionados con los temas de la Geometría Fractal tratados en el *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato*

# 4 Introducción a la Geometría Fractal

*“ . . . una geometría que trasciende de los puntos, las rectas y los planos de Euclides para atrapar y describir las formas de los árboles, las montañas y las nubes. Complejidad y simplicidad son partes complementarias de su todo. La geometría es llamada Geometría fractal.”* (McGuire, 1991)

Una excelente noción intuitiva de lo que es la Geometría Fractal es encontrada en las palabras de Jürgens, et al: “La Geometría Fractal es, en primer término, un nuevo lenguaje que puede ser usado para describir las formas complejas encontradas en la naturaleza. Pero sus elementos no se derivan de la intuición directa, lo que los distingue esencialmente de los elementos de la geometría euclideana, como la recta, la circunferencia o la esfera. La Geometría Fractal se expresa por medio de algoritmos, es decir, por medio de reglas e instrucciones de procedimiento, que requieren ayuda de una computadora para convertirse en formas y estructuras. Una vez que se domina este nuevo lenguaje, la descripción de una nube, por ejemplo, se hace tan precisa y simple como lo sería la de una casa mediante el plano de un arquitecto en el lenguaje de la geometría tradicional.” (Jürgens, et al., 1990). Para ejemplificar esto, se muestra en la figura 4.1 algunas figuras construidas con métodos de la Geometría Fractal:

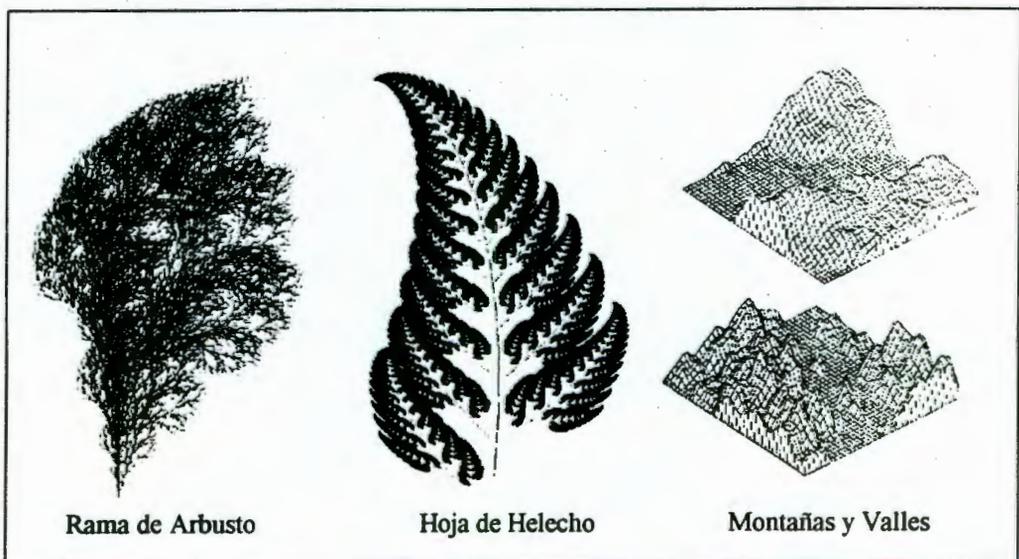


Fig. 4.1 Ejemplos de Modelos Naturales creados con la Geometría Fractal.

Es decir que, mediante el uso de algoritmos matemáticos y métodos repetitivos, se pueden reproducir, con más facilidad que con la geometría euclídeana, figuras que asemejan a la naturaleza que nos rodea, tales como árboles, plantas, montañas, etc. Sin embargo, a pesar de ser ésta una primera razón para incursionar en la Geometría Fractal, sus aplicaciones llegan más allá en la modelación de fenómenos naturales, principalmente dinámicos, como se verá más adelante.



Fig. 4.2 Karl Weierstrass

Los inicios de la Geometría Fractal, como matemática formal, se remontan alrededor de un siglo cuando Weierstrass (1815–1897), Cantor (1845-1918), y otros matemáticos descubrieron algunas curvas y conjuntos altamente irregulares los cuales, en parte, precipitaron a una crisis en matemáticas que fue resuelta en su mayor parte hasta hace aproximadamente sesenta años. Estas curvas y conjuntos presentaban grandes irregularidades y por eso no caían en modelos entonces conocidos por lo que fueron relegados al llamado “closet de las pesadillas” de los matemáticos como imaginaciones horribles, sin interés para los matemáticos, ni para los científicos, y definitivamente no para los artistas. Entonces apareció Benoit Mandelbrot, en la década de los setentas, con conocimientos acerca de este tipo de curvas y conjuntos irregulares, y con un interés en una colección ecléctica de fenómenos irregulares como los registros de flujo del río Nilo, fluctuaciones del precio de mercancías y las formas de las líneas costeras, logrando de esta manera hacer una conexión entre aquellas curvas y conjuntos con estos fenómenos dinámicos (McGuire, 1991).

Desde ese momento, y hasta la fecha, la Geometría Fractal se ha venido desarrollando fuertemente, impulsada por el auge y los grandes avances en las ciencias computacionales ya que la naturaleza de sus procesos involucra la recursividad a grandes niveles.

# 5 Antecedentes Históricos sobre el Desarrollo de la Geometría como Parte de las Matemáticas

La geometría Euclideana recibe su nombre en honor de Euclides, quien publicó sus “Elementos” alrededor del año 300 A.C. Los “Elementos” son un conjunto de 13 libros que contienen casi todo el conocimiento generado hasta ese momento en geometría plana, geometría sólida, teoría de números y álgebra geométrica. Euclides recopiló, organizó, estructuró y presentó su trabajo en una forma lógica y formal, lo cual fue quizá más importante aún que el contenido mismo; tanto así que ha llegado a ser el prototipo de la estructura de la matemática moderna. A esta forma de estructurar el conocimiento (términos no definidos, definiciones, postulados y teoremas) se le conoce hoy día como “método deductivo”, el cual dio lugar a lo que se conoce como la axiomática. El primer libro de los “Elementos” se basa completamente en 5 postulados (verdades obvias), de los cuales el 5° causó una gran controversia por muchos siglos. Dicho postulado afirma que, dada una recta y un punto que no pertenezca a la recta,



Fig. 5.1 Euclides



Fig. 5.2 Nikolay Lobachevsky

puede ser dibujada una recta única que pase por el punto y sea paralela a la recta dada.

Muchos matemáticos trataron, sin éxito, de demostrar este postulado para convertirlo así en un teorema (verdad demostrable) pero no fue sino hasta el año de 1829 (dos mil años más tarde de haber sido enunciado) que Lobachevsky (1792-1856), matemático ruso, quien en lugar de tratar de demostrarlo, desarrollara una geometría en la cual este 5°. postulado

no necesariamente existiera. Esto dio lugar al desarrollo de las geometrías no euclidianas, las cuales satisfacen todos los postulados excepto el de las paralelas (5°). Lobachevsky clasificó entonces a la geometría euclidea como un caso especial de una geometría más general. Es decir que el 5° postulado es verdadero para un plano no-curvo infinito y que las geometrías generadas sin el 5o. postulado son válidas para un plano curvo (esférico, elíptico, hiperbólico u otro), tales como la esférica, la elíptica, la hiperbólica y otras. Es importante mencionar que todas estas geometrías (incluyendo la euclidea) tratan con objetos generados mediante una regla y un compás tales como líneas rectas, círculos, arcos, triángulos, entre otros.

Hasta el siglo XVII, el desarrollo de la geometría se venía dando en forma independiente al desarrollo del álgebra, fue Descartes (1596-1650), filósofo francés cuya obra "*La Géométrie*", quien unificó el álgebra y la geometría dando lugar así a la geometría analítica (o cartesiana, en su honor). La posibilidad de obtener la representación gráfica de una expresión algebraica complicada y la de obtener la representación algebraica de figuras geométricas en el plano cartesiano, hicieron posible la creación de formas más complejas. Dentro de estas formas complejas



Fig. 5.3 René Descartes

encontramos las llamadas "curvas suaves" con tan sólo algunos puntos "difíciles" llamados "puntos singulares", es decir, curvas que a veces dan giros muy repentinos que forman esquinas o ángulos puntiagudos. Usualmente se dividía la curva en cada "punto singular" de tal forma que los segmentos resultantes tuvieran un "buen comportamiento" y se estudiaban estos segmentos ignorando los puntos singulares. Esto funcionó muy bien hasta el siglo XIX cuando los matemáticos comenzaron a encontrar curvas que sólo consistían de "puntos singulares", las que llamaron "monstruos matemáticos", ya que no se podía trabajar con ellas de la misma forma que con las curvas suaves pues ¿cómo separar una curva que está llena de "puntos singulares"?

En el siglo XIX los matemáticos comenzaron a construir nuevas y extrañas curvas usando una técnica diferente, basada en un proceso recursivo (ver *Definiciones Generales*), el cual es uno de los conceptos fundamentales en la construcción de un fractal (ver *Definiciones Generales*) un ejemplo de esto está en las creaciones de Gastón Julia y sus llamados “Conjuntos de Julia” (ver Sección 12), pero no fue sino hasta el siglo XX cuando, con la aparición de los trabajos de Benoit Mandelbrot y los impresionantes avances en el desarrollo de la computación que pudieron materializarse aquellas construcciones creadas por algunos matemáticos de épocas anteriores.

Gracias a un desarrollo paralelo de la matemática detrás de estos fractales y la computadora como una herramienta poderosa, se han modelado fenómenos y objetos naturales tales como el crecimiento de estructuras de:

- células nerviosas,
- túneles de termitas,
- cultivos de bacteria,
- sistemas de raíces,
- propagación de fuegos en los bosques,
- distribuciones galácticas,
- cordilleras de montañas y deltas de ríos,
- formación de nubes,
- la secuencia de nucleotidos en el DNA,
- la coliflor y el brócoli,
- los pulmones y los riñones,
- así como del sistema nervioso y del cardiovascular (Buldyrev et al, 1994).

El campo nuevo de la Geometría Fractal extiende la geometría clásica (euclideana) de tal forma que se pueda trabajar con objetos del mundo real como montañas (Jones, 1993). Este es un tipo de geometría que permite modelar, en una forma más realista, tales fenómenos y que además es posible de entender, hasta un cierto nivel, con conceptos matemáticos estudiados en el bachillerato tales como el de función, proceso, iteración y número complejo.

# 6 Primeros Fractales

Para poder apreciar en toda su magnitud la belleza de este tipo de construcciones complejas, es necesario analizar las características básicas y la construcción de algunos de los primeros fractales creados por el hombre.

## El Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor fue publicado por primera vez en 1883, es uno de los primeros fractales en la historia, uno de los más conocidos y su construcción es muy sencilla. Ahora se sabe que el conjunto de Cantor juega un papel importante en muchas ramas de las matemáticas, en especial en los sistemas dinámicos caóticos (ver *Definiciones Generales*).



Fig. 6.1 Georg Cantor

Georg Cantor (1845 - 1918) creó la teoría de conjuntos e introdujo el concepto de los números infinitos, lo que abrió un campo totalmente nuevo en la investigación matemática. Veinte años después de que fuera demostrada la existencia de los números trascendentales (ver *Definiciones Generales*), Cantor mostró que, en cierto sentido, “casi todos” los números reales son trascendentales. En su tiempo recibió fuertes críticas sobre su trabajo, principalmente de su propio maestro Kronecker, pero hoy en día sus ideas han sido aceptadas aunque la polémica en torno al infinito sigue siendo una de las más persistentes de todas las matemáticas. Actualmente la teoría de conjuntos de Cantor ha penetrado en casi cualquier rama de las matemáticas, y ha demostrado ser de particular importancia en la topología (ver *Definiciones Generales*) y en los fundamentos de la teoría de las funciones reales.

El conjunto de Cantor está formado por un conjunto infinito de puntos en el intervalo unitario  $[0,1]$  y su construcción es de la siguiente manera:

Dado el intervalo unitario  $[0,1]$ ,

- se divide en tres partes iguales,
- se remueve el tercio central (sin los extremos),
- se divide cada uno de los intervalos restantes en tres partes iguales,
- se remueve el tercio central de cada uno (nuevamente sin los extremos),

este proceso se repite un número infinito de veces.

Una ilustración gráfica de este proceso se muestra en la figura 6.2, mas es imposible dibujar el conjunto completo (con detalle infinitesimal), ya que el conjunto de Cantor se obtiene después de remover los tercios centrales un número infinito de veces. Por lo tanto podemos decir que el Conjunto de Cantor es la figura límite resultante cuando el proceso de construcción se repite un número infinito de veces.

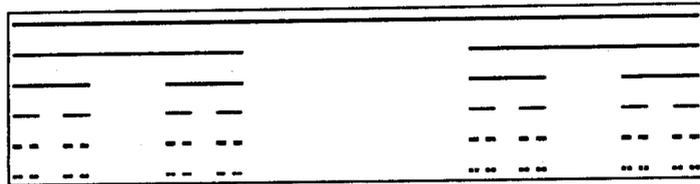


Fig. 6.2 Ilustración gráfica de la construcción del conjunto de Cantor

A primera vista puede parecer que se ha removido tanto del intervalo  $[0,1]$  durante la construcción que nada sobra, pero, de hecho, el conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que “sobran” después de remover el tercio central del intervalo  $[0,1]$ , sin incluir los extremos, y de cada uno de los tercios restantes, un número infinito de veces. Es decir, un punto  $x$  pertenece al conjunto de Cantor si se puede garantizar que, sin importar cuantas veces se repita el proceso,  $x$  nunca será removido. Podemos comenzar a listar los primeros elementos del conjunto conforme se va iterando, ya que se puede garantizar que los extremos de los intervalos creados en cada iteración nunca van a ser removidos:

$$\text{Conjunto de Cantor} = \left\{ 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{8}{27}, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, \frac{26}{27}, \dots \right\}$$

En el primer paso de su construcción, los únicos elementos pertenecientes al conjunto de Cantor son los puntos  $0$  y  $1$ , ya que estos están en los extremos del segmento original. Una vez removido el tercio central, los elementos  $0$ ,  $1$ ,  $1/3$ , y  $2/3$  por ser elementos de los extremos. Y así sucesivamente.

Esto podría llevar a pensar que el conjunto de Cantor sólo está formado por extremos de los intervalos que se van generando en cada iteración, lo cual es incorrecto ya que se pueden mostrar elementos del conjunto que no son extremos. No se incluye la demostración de la afirmación anterior, pero se invita al lector a revisar el trabajo de Peitgen et al, *Fractals for the Classroom*, pág. 81.

Es posible afirmar que la cardinalidad del conjunto de Cantor es igual a la cardinalidad del intervalo  $[0,1]$  y para demostrarlo es necesario mostrar cómo es que a cada punto en el intervalo  $[0,1]$ , le corresponde un punto del conjunto de Cantor:

- se sabe que cada punto en el intervalo  $[0,1]$  tiene una expansión binaria,
- cada expansión binaria corresponde a una ruta en el árbol binario para decimales binarios,
- cada una de éstas rutas tiene una ruta correspondiente en el árbol terciario para el Conjunto de Cantor,
- cada ruta en el árbol terciario del Conjunto de Cantor identifica un único punto en el Conjunto de Cantor por medio de una dirección en expansión triádica.

Por lo tanto, para cada número en el intervalo, existe un número correspondiente en el conjunto de Cantor. Para diferentes números, hay diferentes puntos. Luego entonces, la cardinalidad del conjunto de Cantor debe de ser al menos tan grande como la cardinalidad del intervalo. Pero, por otro lado, no puede ser mayor ya que el conjunto de Cantor es un subconjunto del intervalo. Por lo que se afirma que las cardinalidades son iguales. No se incluyen los detalles de la demostración de la afirmación anterior, pero se invita al lector a revisar el trabajo de Peitgen et al, *Fractals for the Classroom*, pág. 88.

Las características generales del conjunto de Cantor son:

- i) Está formado por pequeñas réplicas de sí mismo ya que, si se toma una parte del conjunto de Cantor y se le da una amplificación suficiente, entonces se encuentra una figura que es igual al conjunto original. Tal característica, más adelante, se definirá como “autosemejanza” (ver *Definiciones Generales*).
- ii) Tiene una estructura con infinito detalle, es decir, se ve detalle a escalas arbitrariamente pequeñas; mientras más se agranda el conjunto, más intervalos vacíos se hacen visibles al ojo.
- iii) Su definición es muy simple a pesar de tener una estructura con infinito detalle (algunas veces se refiere a este conjunto como “Polvo de Cantor”).
- iv) Se genera mediante un proceso infinito y repetitivo en forma especial, llamado “proceso iterativo” (ver *Definiciones Generales*). Especial porque una vez aplicado el proceso (dividir y remover), al resultado del mismo (los segmentos resultantes) se le aplica de nuevo (dividir y remover), una y otra vez. Cada una de estas aplicaciones se conoce como “iteración”.
- v) Su geometría no se puede describir fácilmente en términos clásicos, es decir, no es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una condición geométrica simple, ni tampoco es el conjunto de soluciones de cualquier ecuación simple.
- vi) La geometría local del conjunto es tosca de describirse; cerca de cada uno de los puntos hay un gran número de otros puntos, separados por huecos de longitud variable.
- vii) A pesar de que el conjunto es, en alguna forma, un conjunto muy grande, no numerable (infinito) (ver *Definiciones Generales*), su tamaño no está cuantificado por las medidas usuales como la longitud. Por cualquier definición razonable, el conjunto tiene longitud cero.

# La Curva de Koch

Karl Weierstrass (1815- 1897) precipitó una crisis menor en las matemáticas en 1872 con el descubrimiento de una curva que no tiene derivada en ninguno de sus puntos, un segundo ejemplo de este tipo de curvas es la curva de Koch que fue publicada por primera vez en 1904.

Helge Von Koch (1879-1924) fue un matemático sueco cuyos principales resultados en matemáticas fueron en el tema de un número infinito de ecuaciones lineales con un número infinito de variables. Construyó una curva continua que no contiene rectas o segmentos de recta uniformes en el sentido de que se puedan ver como una recta cuidadosamente doblada. Esta curva tiene una complejidad comparada a la que se ve en una costa natural, con dobleces y dobleces dentro de dobleces.



Fig. 6.3 Helge von Koch

Después de un número infinito de pasos se construyó una curva que tiene un número infinito de esquinas las cuales resultan ser todas ellas puntos singulares. Por lo tanto se tiene una curva continua no diferenciable (ver *Definiciones Generales*) en ninguno de sus puntos.

Su construcción es de la siguiente manera:

Dado un segmento de recta inicial,

- se divide en tres partes iguales,
- se remueve el tercio central,
- se substituye por un triángulo equilátero sin base como se muestra en la figura 6.4.

A esta curva se le llama "curva generadora".

- cada uno de los segmentos resultantes se reemplaza por la curva generadora, este proceso se repite un número infinito de veces.

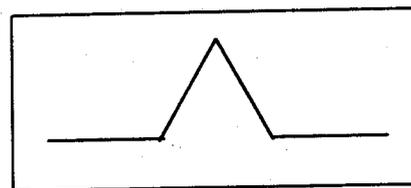


Figura 6.4 Curva generadora de la curva de Koch

Una ilustración gráfica de este proceso de construcción se muestra en la figura 6.5, aunque, otra vez, es imposible dibujar el conjunto con todo detalle, porque el conjunto final se obtiene después de un número infinito de iteraciones (ver *Definiciones Generales*).

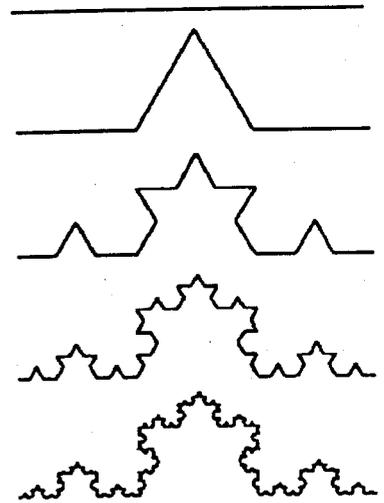
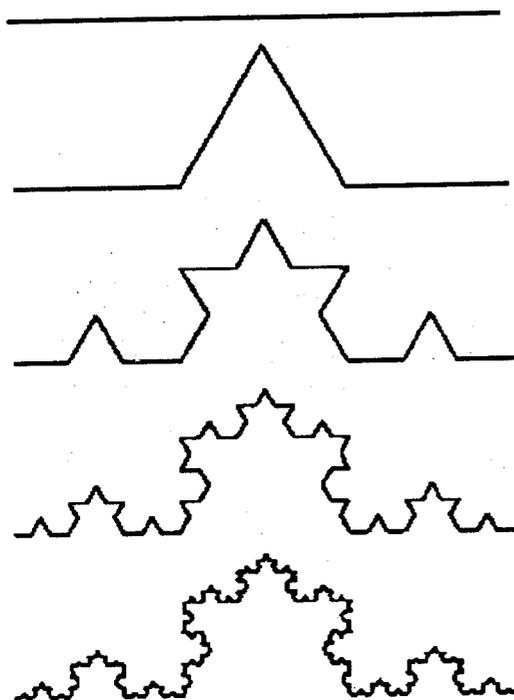


Figura 6.5 Ilustración gráfica de la construcción de la curva de Koch

Por lo tanto se dice que la curva de Koch es la figura límite resultante cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

Al medir la longitud de la curva en cada uno de los pasos de su construcción, se aprecia que esta longitud crece por un factor de  $4/3$ , después de un número infinito de pasos en su construcción se puede ver que la longitud tiende a infinito:



Segmento Original	Longitud = 1
1a. Iteración	Longitud = $\frac{4}{3} \approx 1.33$
2a. Iteración	Longitud = $\frac{16}{9} \approx 1.78$
3a. Iteración	Longitud = $\frac{64}{27} \approx 2.37$
4a. Iteración	Longitud = $\frac{256}{81} \approx 3.16$

y así sucesivamente.

Organizando estos perímetros en forma de sucesión, se ve que se incrementan formando una sucesión geométrica (ver *Definiciones Generales*) que tiende a infinito conforme el número de iteraciones (variable  $n$ ) tiende a infinito:

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^0, \left(\frac{4}{3}\right)^1, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \dots \right\} \\ &= \left\{ 1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots, \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \dots \right\} \end{aligned}$$

¿Cómo es posible que la longitud de un segmento de recta, cuyos extremos son conocidos, sea infinita? Por otro lado, la curva de Koch no ocupa área en el plano así que, ni la longitud, ni el área, nos permiten describir el tamaño de ésta curva. Lo cual la hace una curva singular.

La curva de Koch tiene características similares a las del conjunto de Cantor:

- i) Está formado por pequeñas réplicas del conjunto original. Se pueden apreciar 4 réplicas o 16 réplicas o 64 réplicas, dependiendo de la división que se tome. Lo que significa que este fractal también tiene la propiedad de ser “autosemejante” (ver *Definiciones Generales*).
- ii) Tiene una estructura con infinito detalle, es decir, se ve detalle a escalas arbitrariamente pequeñas; mientras más se agranda el conjunto, más esquinas se hacen visibles al ojo.
- iii) Su definición es muy simple a pesar de tener una estructura compleja.
- iv) Se genera mediante un proceso infinito y repetitivo en forma especial, llamado “proceso iterativo” (ver *Definiciones Generales*).
- v) Su geometría no se puede describir fácilmente en términos clásicos, es decir, no es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una condición geométrica simple, ni tampoco es el conjunto de soluciones de cualquier ecuación simple.

Es importante mencionar que si el proceso se detiene en un paso cualquiera antes del infinito, entonces no se tiene la curva de Koch ya que ésta mostraría segmentos rectos bajo suficiente amplificación, lo cual haría que no estuviera formada por pequeñas réplicas de sí misma, que su longitud no fuera infinita y que tuviera derivada en alguno de sus puntos.

Una variación interesante de éste fractal ocurre cuando el proceso se inicia con un triángulo equilátero, donde en cada uno de sus lados se forma una curva de Koch. A ésta figura, 6.6, se le conoce como “copo de nieve” por su parecido con los cristales de nieve, figura 6.7.

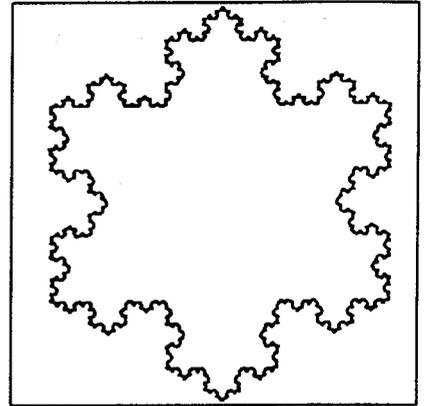


Fig. 6.6 Copo de nieve de Koch

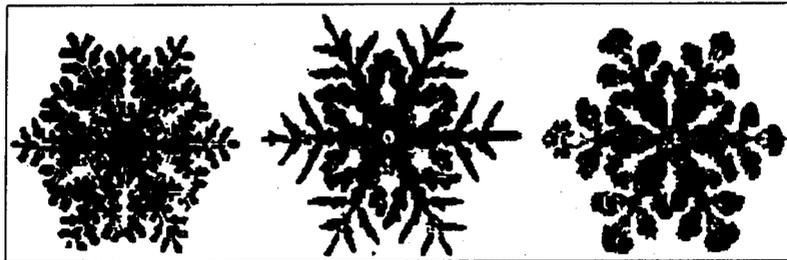


Fig 6.7 Estructuras naturales de copos de nieve

¿Qué sucede con el área encerrada por estas curvas en el copo de nieve? Ya que la curva de Koch tiene longitud infinita, como anteriormente se explicó, se mostrará que el copo de nieve es un objeto en el cual un perímetro infinito encierra un área finita. Para demostrarlo hay que medir el área del copo de nieve en cada uno de los pasos de su construcción.

Se comenzará calculando la altura de un triángulo equilátero de lado  $a$ , ya que será necesaria para el cálculo de todas las áreas.

Recordando que :

Área de un triángulo =  $\frac{1}{2}$  (base x altura).

Usando la figura 6.8, se encuentra que el área de un triángulo de lado  $a$  es:

$$\text{Area}(a) = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Ahora se calcula el área del copo de nieve de Koch en los primeros pasos de su construcción. Tomando un triángulo equilátero de lado 1 (Fig. 6.9) y calculando su área:

El área de la figura inicial ( $a = 1$ ) es:

$$A_0 = \frac{1}{2}(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

El área en la primera iteración de acuerdo a la figura 6.10, es igual al área del triángulo equilátero más el área de los tres nuevos triángulos pequeños:

$$\begin{aligned} \text{Area}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

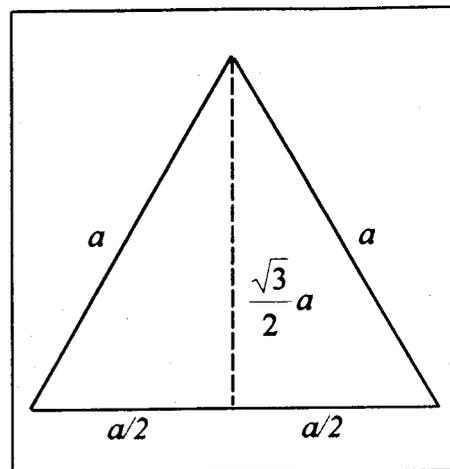


Fig. 6.8 Triángulo Equilátero de lado  $a$

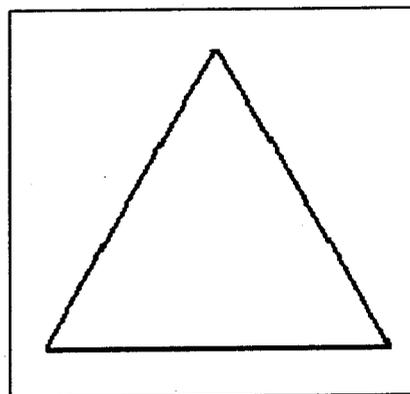


Fig. 6.9 Triángulo Equilátero de lado 1

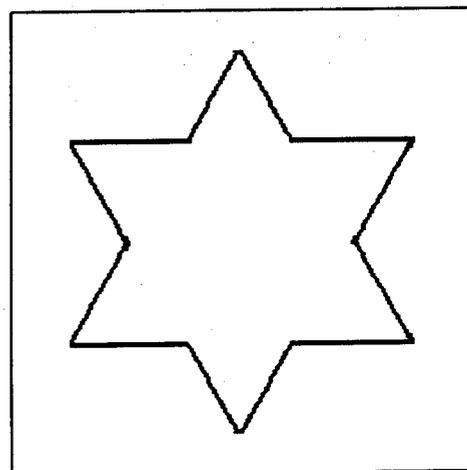


Fig. 6.10 Primera Iteración en la construcción del Copo de Nieve

El área de la segunda iteración (Fig. 6.11) es igual al área anterior más el área de los 12 nuevos triángulos pequeños:

$$\begin{aligned} \text{Area}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 12\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{27}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + (3)(4)\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

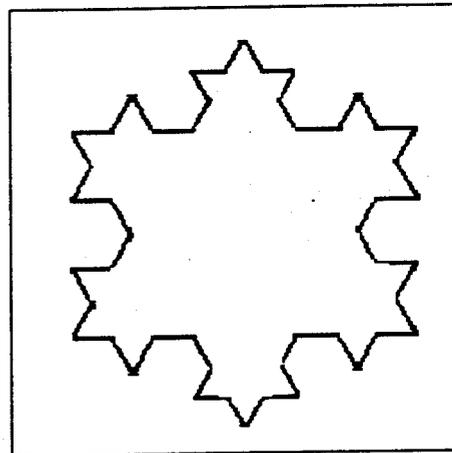


Fig. 6.11 Segunda Iteración en la construcción del copo de nieve.

El área en la tercera iteración es:

$$\text{Area}_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2$$

y en la cuarta iteración,

$$\text{Area}_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^4(3)(4)^3$$

Generalizando se obtiene que el área en la  $n$ -ésima iteración es:

$$\text{Area}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}(3)(4)^{n-2}$$

Factorizando se encuentra que:

$$\text{Area}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ 1 + \left(\frac{1}{9}\right)(3) + \left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4) + \left(\frac{1}{9}\right)^3(3)(4)^2 + \dots + \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}(3)(4)^{n-2} \right]$$

Simplificando ahora:

$$\text{Area}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ 1 + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-2} \right) \right]$$

Donde se puede ver que  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-2}$  es una serie geométrica,

donde  $a = 1/3$  y  $r = 4/9$

Por lo tanto  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-2} = \frac{1/3}{1 - 4/9}$ ,

Luego entonces  $\text{Area}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ 1 + \frac{1/3}{1 - 4/9} \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{8}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

Por lo que se puede afirmar que el área del copo de nieve es  $\text{Area} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ . Se ve entonces que el área contenida por el perímetro es finita.

Esta relación mostrada entre el proceso geométrico y la serie geométrica lleva a preguntarse si no habrá un “lenguaje” que permita describir matemáticamente la suma áreas de formas cada vez más y más pequeñas, como se ve en la construcción del copo de nieve, en exactamente la misma forma en la que se discute la suma de números cada vez más pequeños, como sucede en una serie. De hecho, sí existe este lenguaje y es una combinación de lo que se conoce como *topología del punto fijo* y el concepto de *distancia Hausdorff*, la cual es una generalización del significado de distancia entre dos puntos hacia el concepto de distancia entre dos conjuntos de puntos. Esta unión provee el marco teórico donde podemos encontrar una analogía perfecta entre, el proceso infinito de sumar números en una serie geométrica con su comportamiento límite por un lado y, el proceso infinito de sumar áreas de triángulos más y más pequeños en la construcción del copo de nieve con su comportamiento límite, por el otro. De hecho este lenguaje describe igualmente los procesos

de construcción discutidos para el conjunto de Cantor y la curva de Koch y se profundiza al respecto en la Sección 15 del presente manual.

Una variación muy interesante de la construcción de la curva de Koch se muestra en la figura 6.12, nótese la semejanza con las formaciones hexagonales de un panal de abejas.

El proceso de construcción es muy parecido al de la curva de Koch, es decir, se comienza con un segmento de recta inicial, se establece la “curva generadora”, y se sustituye ésta en sí misma, una y otra vez. Se invita al lector a construir otros diseños

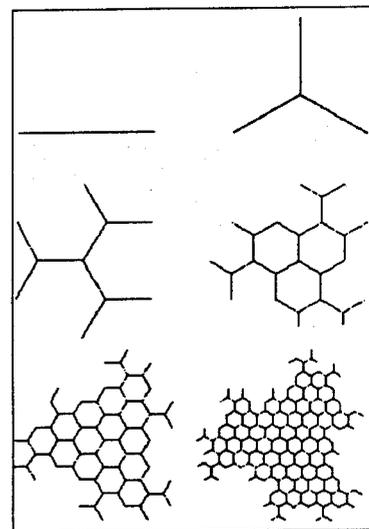


Fig. 6.12 Formaciones hexagonales

## Curva Llena Espacio de Peano

Hasta el momento se han discutido construcciones de figuras fractales que involucran un proceso iterativo y se ha visto que los conjuntos resultantes tienen ciertas características particulares. Antes de introducir el siguiente fractal es necesario comentar un concepto que resultará fundamental en el estudio de la Geometría Fractal, el de dimensión. Hablando de dimensiones en una forma intuitiva, las curvas son percibidas como típicos objetos de una dimensión y los planos como típicos objetos de dos dimensiones, en el sentido geométrico de dimensión. Sin embargo, éste no se adecua a todo tipo de curvas. En 1890 Giuseppe Peano e inmediatamente después, en 1891, David Hilbert, discutieron acerca de curvas que viven en el plano, acerca de curvas que “llenan el espacio”, es decir que dada una parte de un plano, existe una curva que toca todos y cada uno de los puntos en dicha parte del plano (Peitgen et al, 1992).

Peano (1858-1932) fue el fundador de la lógica simbólica y su interés se centro en la fundamentación de las matemáticas y en el desarrollo de un lenguaje lógico formal.

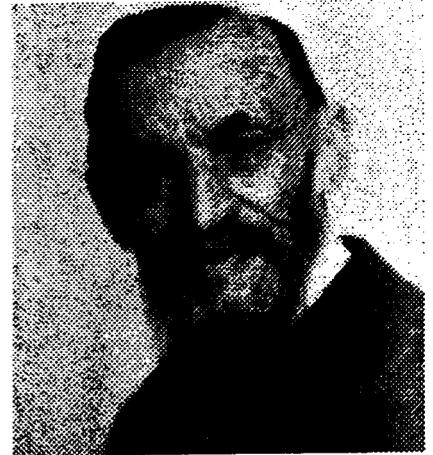


Fig. 6.13 Giuseppe Peano

El siguiente fractal se conoce como la curva llena espacio de Peano la cual es una curva que consiste totalmente de puntos singulares, es decir, de puntos con una característica especial. Durante su construcción, esta curva se dobla tantas veces que termina ocupando un área en el plano, pues pasa por todos los puntos de su interior. El problema inicial al construir tal curva, estaba en que una curva, por definición, no tiene ancho; por lo tanto no puede ocupar un área en el plano y es por eso que la curva llena espacio de Peano pasó a ser una singularidad matemática.

Su construcción es similar a la construcción de la curva de Koch:

Dado un segmento de recta inicial,

- se substituye por la curva generadora, mostrada en la figura 6.14, la cual, si se genera en la dirección indicada por las flechas, se intersecta a sí misma en dos puntos,
- cada uno de los segmentos resultantes se reemplaza por la curva generadora,

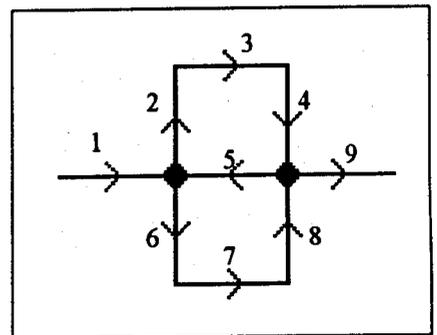


Fig. 6.14 Curva generadora de la curva llena espacio de Peano

este proceso se repite un número infinito de veces.

Una ilustración gráfica de este proceso se muestra en la figura 6.15, aunque una vez más, es imposible dibujar el conjunto con todo detalle, porque el conjunto final se obtiene después de un número infinito de iteraciones (ver *Definiciones Generales*), es decir, que la curva llena espacio de Peano es la figura límite resultante cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

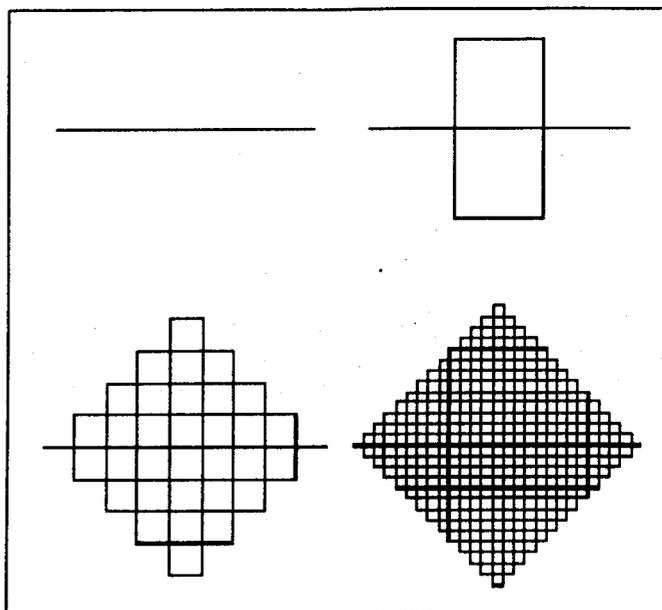


Fig. 6.15 Ilustración gráfica de la construcción de la curva llena espacio de Peano

La invención de curvas llena espacio fue un gran evento en el desarrollo del concepto de dimensión. Ellas cuestionaron la percepción intuitiva de curvas como objetos unidimensionales, ya que llenan el plano (el cual es un objeto intuitivamente percibido como bidimensional). Esta contradicción formó parte de una discusión que duró varias décadas al principio de éste siglo. La curva llena espacio de Peano es un ejemplo de una figura unidimensional que a lo largo de un proceso iterativo se convierte en una figura bidimensional, tras un número infinito de iteraciones.

## El Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski fue introducido en 1916 y es tal vez uno de los fractales más populares por la diversidad de formas en las que se puede generar y por su relación con el triángulo de Pascal. Este fractal es aproximadamente 40 años más joven que el Conjunto de Cantor. El triángulo fue nombrado en honor a Waclaw Sierpinski (1882-1969), figura 6.16, matemático polaco, quien fue uno de los matemáticos más

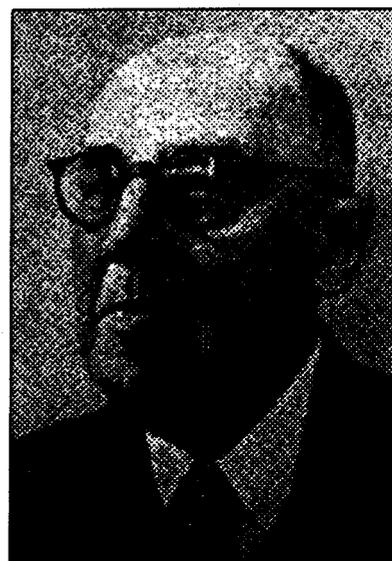


Fig. 6.16 Waclaw Sierpinski

influyentes de su tiempo en Polonia y cuya reputación era conocida a nivel mundial. Curiosamente uno de los cráteres de la luna lleva su nombre.

Se construye de la siguiente manera:

Dado un triángulo equilátero en el plano,

- se localizan los puntos medios de cada lado,
- se forma un triángulo cuyos vértices sean estos puntos, quedando determinados cuatro triángulos congruentes como se muestra en la figura 6.17,
- se remueve el triángulo central,

este proceso se repite un número infinito de veces.

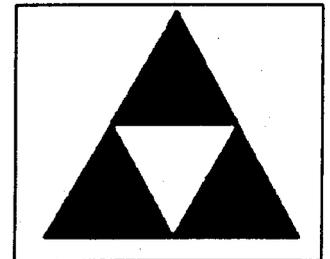


Fig. 6.17 Primera iteración en la construcción del triángulo de Sierpinski

Una ilustración gráfica de este proceso se muestra en la figura 6.18, aunque una vez más, es imposible dibujar el conjunto con todo detalle, porque el conjunto final se obtiene después de un número infinito de iteraciones (ver *Definiciones Generales*):

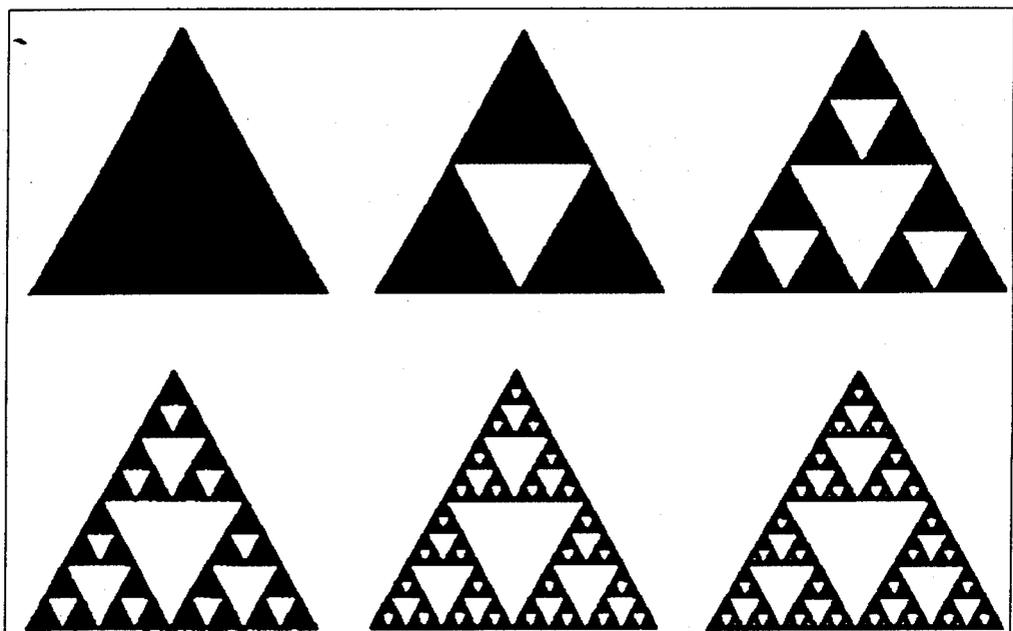


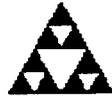
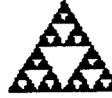
Fig. 6.18 Ilustración gráfica de la construcción del triángulo de Sierpinski

Al igual que en los fractales anteriores, el triángulo de Sierpinski es la figura límite resultante cuando el número de iteraciones tiende a infinito, es decir, es el conjunto de puntos en el plano que sobran después de remover los triángulos centrales un número infinito de veces.

El triángulo de Sierpinski tiene características similares a las de la curva de Koch y a las del conjunto de Cantor:

- i) Está formado por pequeñas réplicas del conjunto original: 3 réplicas o 9 réplicas o 27 réplicas o . . . Lo cual nos lleva una vez más al concepto de “autosemejanza”, que se definirá más adelante.
- ii) Tiene una estructura con infinito detalle, es decir, se ve detalle a escalas arbitrariamente pequeñas; mientras más se agranda el conjunto, más triángulos se hacen visibles al ojo.
- iii) Su definición es muy simple a pesar de tener una estructura con infinito detalle.
- iv) Se genera mediante un proceso infinito y repetitivo en forma especial, llamado “proceso iterativo” (ver *Definiciones Generales*).

Al medir el área del triángulo de Sierpinski en cada uno de los pasos de su construcción, se aprecia que esta área disminuye por un factor de 3/4, después de un número infinito de pasos se puede ver que el área tiende a cero. A continuación se muestra este proceso.

	Triángulo Original	Area = 1
	1a. Iteración	Area = $\frac{3}{4} = 0.75$
	2a. Iteración	Area = $\frac{9}{16} = 0.5625$
	3a. Iteración	Area = $\frac{27}{64} = 0.421875$
	4a. Iteración	Area = $\frac{81}{256} = 0.31640625$

y así sucesivamente.

¿Tiene realmente área el triángulo de Sierpinski? Cuando el número de iteraciones tiende a infinito el área desaparece, pero de alguna forma esta ocupando un espacio bidimensional. ¿Es posible que este triángulo este entre una y dos dimensiones?

El triángulo de Sierpinski es un ejemplo de una figura bidimensional que a lo largo del proceso se convierte en una figura unidimensional después de un número infinito de iteraciones, así como la curva de Peano es un ejemplo de una figura unidimensional que a lo largo de un proceso iterativo infinito se convierte en una figura bidimensional.

Existen notas interesantes que involucran al triángulo de Sierpinski y que fomentan la curiosidad e invitan a la reflexión. Un ejemplo se encuentra en la tabla triangular de números, figura 6.19, que es conocida como el triángulo de Pascal, la cual fue llamada así en honor al gran matemático y científico francés Blaise Pascal (1623-1662) poco después de la composición de su famoso *Traité du triangle arithmétique*, publicado después de su muerte en 1665. Se sabe que este triángulo aritmético apareció en China alrededor de 1303, pero el que Pascal lo aplicara para resolver problemas relacionados con probabilidad y su gran contribución a la teoría de este triángulo, fue lo que finalmente decidió su nombre.

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Fig. 6.19 Los primeros 5 renglones del triángulo de Pascal

Una relación entre el triángulo de Sierpinski y el triángulo de Pascal se encuentra, por ejemplo, al sombrear los números impares y dejar en blanco los pares, la figura resultante asemeja al triángulo de Sierpinski, como se puede ver en la figura 6.20.

Otras relaciones interesantes se pueden encontrar al sombrear los números divisibles por 3, o los divisibles por 5, o los divisibles por 9. Se invita al lector a dibujar éstos patrones y a investigar otros posibles.

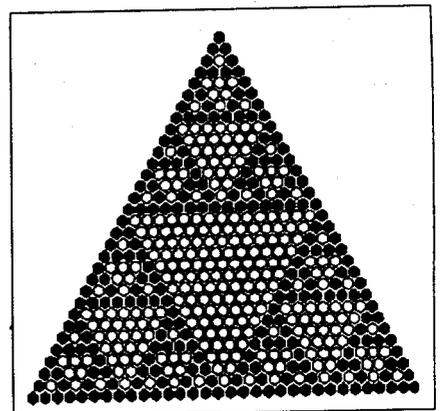


Fig. 6.20 Figura resultante al sombrear los números impares en el triángulo de Pascal hasta el renglón 32

Cada una de estas figuras resultantes tiene hermosas regularidades y autosemejanzas las cuales describen propiedades básicas de la teoría de números del triángulo de Pascal.

Aparte de estas relaciones discutidas, el triángulo de Sierpinski depara otras sorpresas: Una forma extremadamente interesante de generarlo es el “juego del Caos”. Para jugarlo es necesario tener: un dado cuyas 6 caras estén marcadas con los números 1, 2 y 3 (o asignar 1 al 4, 2 al 5 y 3 al 6), una hoja de papel, un lápiz y una regla. Lo primero que hay que hacer es marcar tres puntos en la hoja de papel con los números 1, 2 y 3 formando un triángulo como se muestra en la figura 6.21 (no es necesario que el triángulo sea equilátero). El juego comienza con la selección de un punto al azar en la hoja de papel, figura 6.22, el cual se marca como  $p_0$  (este punto puede estar dentro, fuera o en el triángulo). Se lanza el dado y la posición del nuevo punto  $p_1$ , se localiza a la mitad del segmento determinado por los puntos  $p_0$  y el vértice que marcó el dado (1, 2 ó 3). El proceso se ejemplifica en las siguientes dos figuras. En la figura 6.23, el dado marcó 3, por lo que el nuevo punto se ubica a la mitad de la distancia entre el punto anterior y el vértice 3. Este proceso continúa un número infinito de veces. En la figura 6.24, el siguiente tiro del dado ha marcado 1, por lo que el siguiente punto se ha colocado a la mitad de la distancia del punto previo y el vértice 1. Y así sucesivamente.

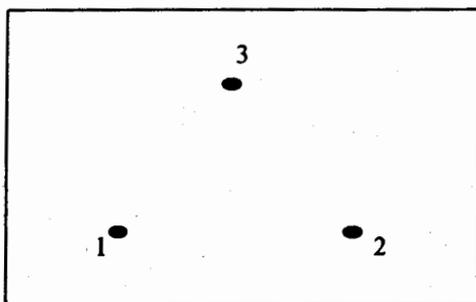


Fig. 6.21 Inicio del Juego del Caos. Marcado de los puntos.

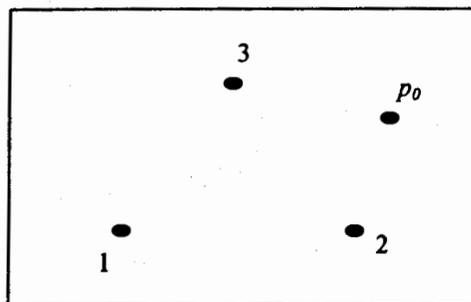


Fig. 6.22 1er. Paso en el Juego del Caos.

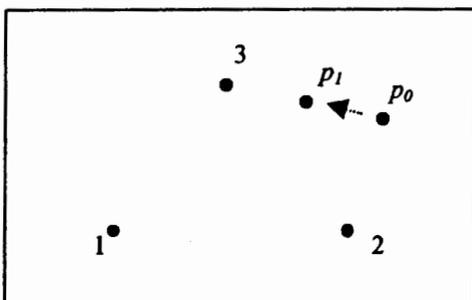


Fig. 6.23 2do. Paso en el Juego del Caos.

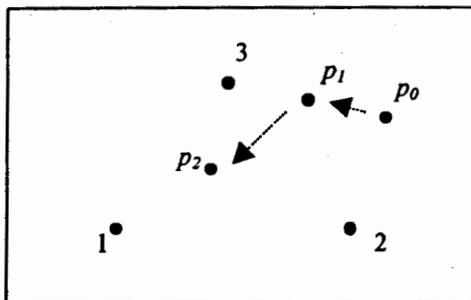


Fig. 6.24 3er. Paso en el Juego del Caos.

El proceso anteriormente descrito va a generar, a la larga, una figura muy semejante al triángulo de Sierpinski como se muestra en la figura 6.25 en la cual se puede observar el juego después de 100, 500, 1000 y 2000 tiradas. Se dice muy semejante porque habrá algunos puntos, los primeros, que no pertenecerán al triángulo pero, conforme el número de tiradas aumenta, los puntos caerán siempre en el triángulo de Sierpinski. Para efectos prácticos, y con la ayuda de la computadora, puede observarse un bonito resultado con alrededor de 3,000 tiradas si se usa un programa computacional o puede generarse usando una hoja electrónica de cálculo, como en la figura 6.25.

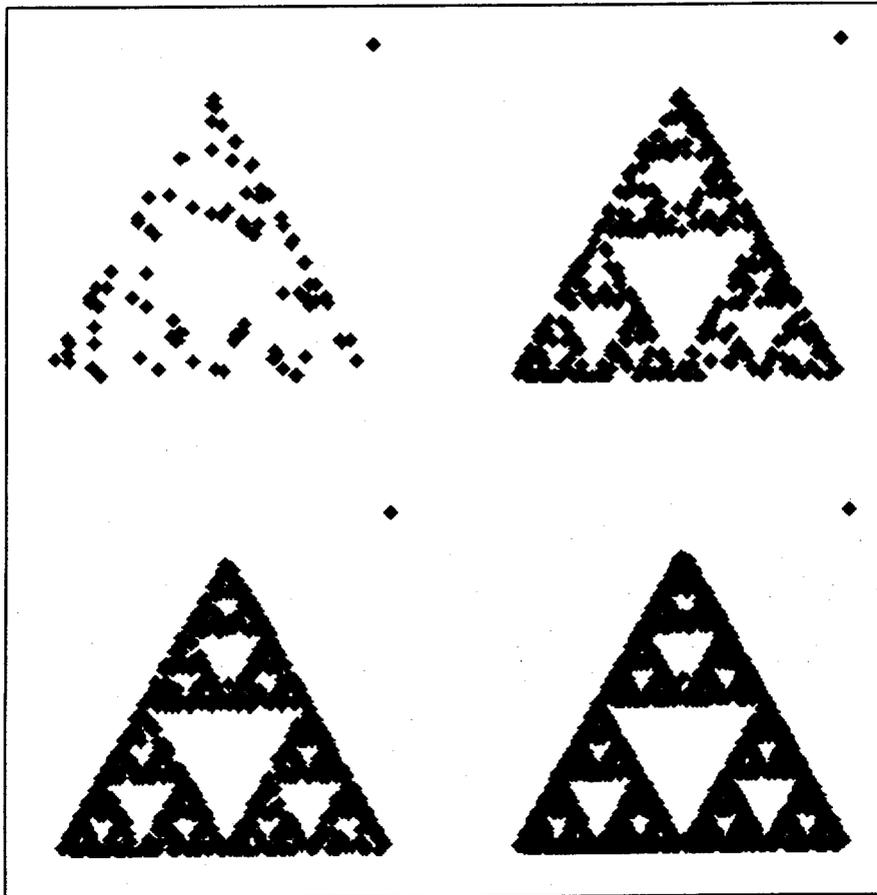


Fig 6.26 El juego del Caos después de 100, 500, 1000 y 2000 tiradas.

Se acaba de construir el triángulo de Sierpinski por medio de un proceso aleatorio, es decir, usando la aleatoriedad se construyó una figura perfectamente determinada. ¿Cómo es posible esto? ¿Qué pasa si se cambia a un dado “cargado”? ¿Se volvería a construir la misma figura? ¿Existen otros fractales que se puedan construir por medio de un proceso aleatorio?

La respuesta a la última pregunta es sí, sí existen muchos otros fractales generados por medio de variaciones al “Juego del Caos” y se recomienda al lector interesado consultar el trabajo de Peiten et al, 1992.

Para entender el funcionamiento del Juego de Caos, es decir, cómo es que el jugarlo siempre genera la misma figura, es necesario el uso de ciertos conceptos aún no definidos, por lo que esta explicación se dejará para más adelante.

Se han construido distintos fractales que en su construcción guardan semejanzas importantes. Antes de concluir con la presente sección, se invita al lector a rescatar su espíritu aventurero para descubrir otros patrones geométricos con comportamientos semejantes.

Como último ejemplo, se muestra una variación muy interesante del triángulo de Sierpinski, usualmente conocido como la “alfombra de Sierpinski”, la cual es lograda al realizar el mismo proceso a partir de un cuadrado. Se muestran los primeros pasos de su construcción en la figura 6.26.

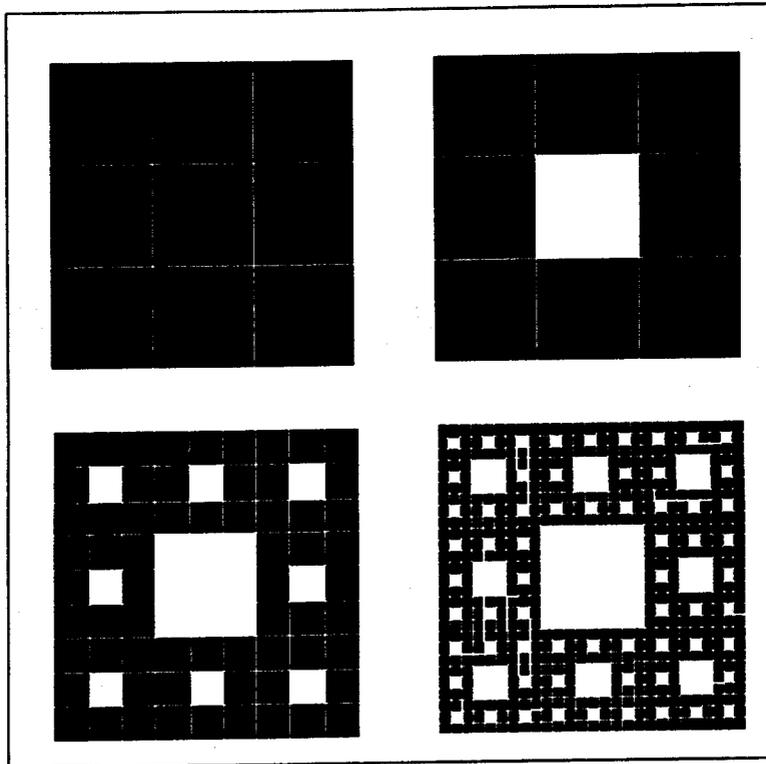


Fig. 6.26 Ilustración gráfica de la construcción de la alfombra de Sierpinski

Todos los ejemplos anteriores (el conjunto de Cantor, la curva de Koch, la curva llena espacio de Peano y el triángulo de Sierpinski) son conjuntos a los que nos podemos referir usualmente como *fractales*, lo cual da una buena idea de lo que es un fractal,

pero, ¿QUÉ ES UN FRACTAL?

El término “fractal” fue inventado por Benoit Mandelbrot para describir figuras y formas geométricas muy “fracturadas”. La definición formal que Mandelbrot dio en 1977 es:

*Un fractal es un conjunto para el cual la dimensión Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica.*

La cual es un poco complicada para lo que se ha visto de fractales hasta ahora. Más adelante se regresará a esta definición para estudiarla un poco mejor. Por lo pronto se dará una definición de acuerdo a los fractales estudiados:

**Un fractal es una estructura, no necesariamente matemática, visualmente compleja, la cual está formada por pequeñas réplicas de sí misma a cualquier escala y su construcción involucra un proceso iterativo infinito.**

Nuestra definición no involucra el concepto de dimensión, como la de Mandelbrot, ya que aun no se ha estudiado la dimensión de los fractales ya vistos. Sin embargo es importante mencionar desde ahora que las propiedades fundamentales de los fractales son:

1. Autosemejanza, es decir, formado por pequeñas réplicas de sí mismo.
2. Dimensión fractal (fraccionaria), es decir, usualmente no es un número entero.
3. Proceso iterativo infinito involucrado en su construcción.

Los fractales vistos hasta ahora son ejemplos de fractales que cumplen las tres propiedades mencionadas pero, como se verá más adelante, no es necesario que una figura cumpla con todas ellas para poder considerarse un fractal, como por ejemplo la curva de Peano tiene dimensión 2 y sí es un fractal. Más adelante se construirán fractales con la propiedad de autosemejanza sólo hasta cierto punto.

Antes de construir y analizar los fractales contemporáneos, es necesario ver formalmente los conceptos de autosemejanza, dimensión fractal y proceso iterativo, los cuales son fundamentales para el entendimiento de los siguientes fractales.

# 7 Autosemejanza

El concepto de autosemejanza es clave en el estudio de la Geometría Fractal y para entenderlo mejor es necesario recordar el concepto de semejanza en la geometría euclídeana:

*Dos polígonos son semejantes si tienen la misma forma, sin importar su tamaño. Es decir, si hay una correspondencia entre sus vértices tal que los ángulos correspondientes sean congruentes (tengan la misma medida) y los lados correspondientes sean proporcionales (hayan aumentado o disminuido en la misma proporción).*

Por ejemplo, en la figura 7.1 se observan dos triángulos semejantes ya que sus ángulos correspondientes son congruentes y la proporción entre sus lados correspondientes es constante. Por lo tanto se cumple que

$$\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C'$$

y que

$$\frac{a}{ka} = \frac{b}{kb} = \frac{c}{kc} = \frac{1}{k}$$

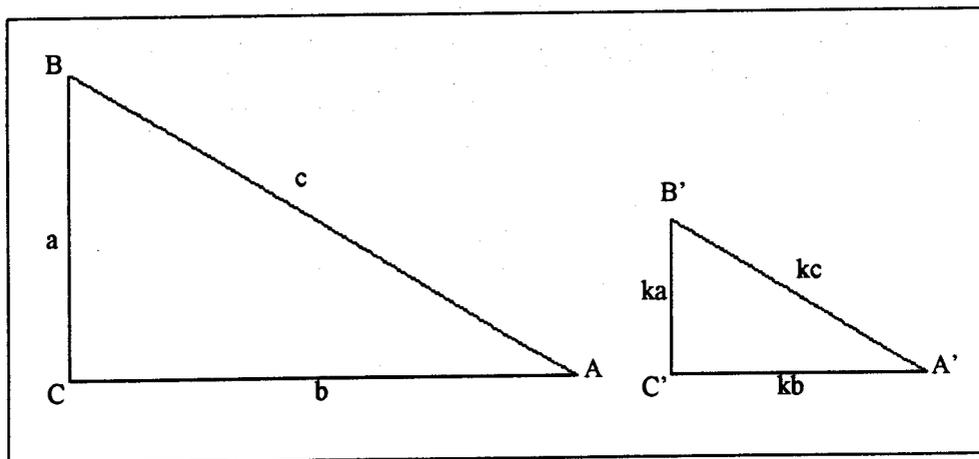


Fig. 7.1 Concepto de semejanza en geometría euclídeana.

El concepto de autosemejanza es más exigente en cuanto a las condiciones que deben de mantenerse entre dos o más objetos:

*De acuerdo a los fractales ya construidos afirmamos que: un objeto geométrico es autosemejante si consiste de una colección arbitraria de pequeñas réplicas de sí mismo.*

Es importante hacer notar que una figura autosemejante no necesariamente es un fractal, como por ejemplo un segmento de recta, o un cuadrado o un cubo, ya que su dimensión, como se verá más adelante, no es fraccionaria.

Un buen acercamiento intuitivo al entendimiento del concepto de autosemejanza incluye la habilidad de aplicar una regla iterativa en un ambiente geométrico como se hizo en la construcción de los primeros fractales (el conjunto de Cantor, la curva de Koch, la curva llena espacio de Peano y el triángulo de Sierpinski) en los cuales se comenzó con una regla que da un método para dividir repetidamente un polígono o segmento inicial en polígonos o segmentos semejantes pero más y más pequeños. En cada iteración del proceso, la regla es aplicada a todos y cada uno de los polígonos o segmentos que componen la figura. Las siguientes iteraciones continúan generando cada vez más y más pequeños polígonos o segmentos semejantes ya que el proceso es repetido una y otra vez, sin parar. Nuestro interés se centra en las propiedades que presenta la figura después de un número infinito de iteraciones, es decir, en la “figura límite”.

Se puede clasificar la autosemejanza dependiendo de las características de los objetos a los que se aplica. Por ejemplo, si las réplicas son exactas con respecto al todo, entonces se dice que la figura es estrictamente autosemejante. Se discutirán además, la autosemejanza estadística, y la autosemejanza en un punto.

La autosemejanza estricta se ejemplifica fácilmente en el conjunto de Cantor, figura 7.2, porque éste conjunto puede ser visto como una colección de pequeñas piezas, cada una de las cuales es una **versión exacta** del conjunto completo reducido a una cierta escala. Esto

se debe a que los elementos del conjunto de Cantor son los extremos de ciertos intervalos de números reales que siempre contienen un número infinito de elementos.

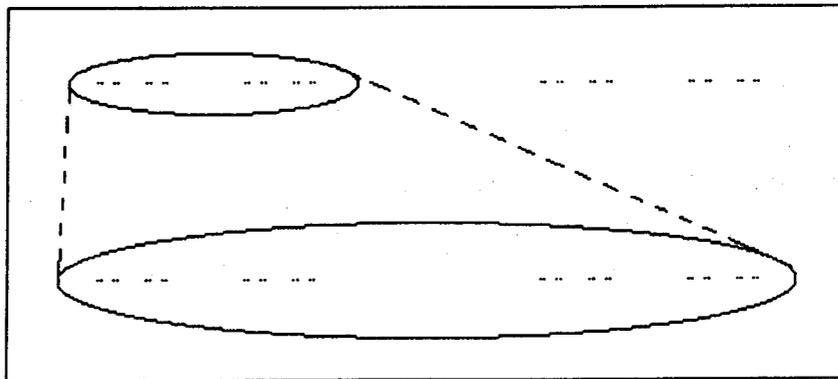


Fig. 7.2 Autosemejanza en el Conjunto de Cantor

La curva de Koch, figura 7.3, y el triángulo de Sierpinski, figura 7.4, son también ejemplos de fractales estrictamente autosemejantes, ya que se pueden encontrar pequeñas réplicas del conjunto completo dentro del conjunto mismo.

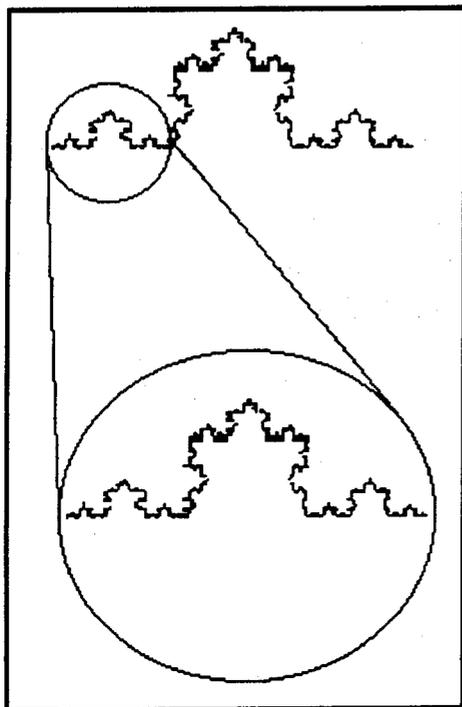


Fig. 7.3 Autosemejanza en la Curva de Koch.

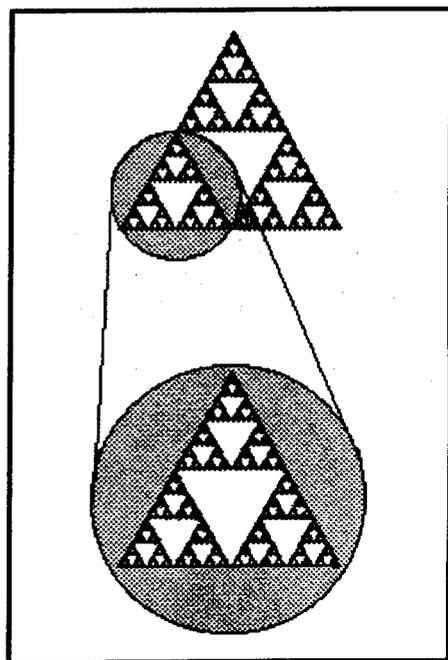


Fig. 7.4 Autosemejanza en el Triángulo de Sierpinski.

Cuando consideramos los fractales donde pequeñas copias parecidas al todo tienen variaciones, tenemos la llamada autosemejanza estadística. Ésta se refiere a que se mantiene una misma distribución en términos estadísticos entre los agrandamientos de pequeñas partes con respecto al todo.

Cuando se consideran los fractales donde pequeñas copias parecidas al todo tienen variaciones, se tiene la llamada autosemejanza estadística. Ésta se refiere a que se mantiene una misma distribución, en términos estadísticos, entre los agrandamientos de pequeñas partes con respecto al todo.

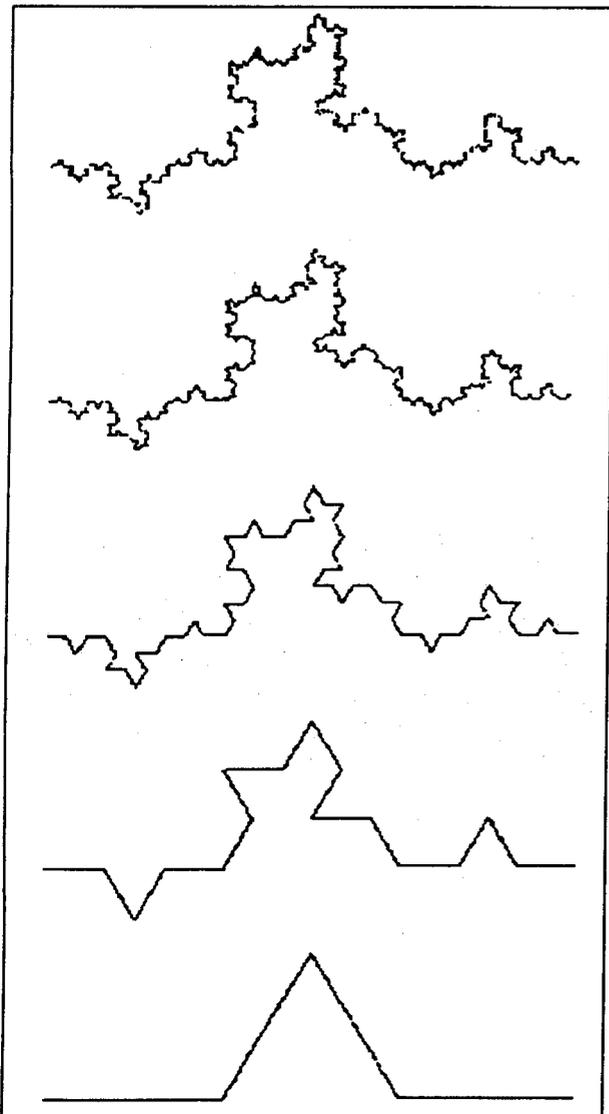


Fig. 7.5 Ejemplo de Autosemejanza Estadística en la Curva de Koch modificada mediante un Proceso Aleatorio

Por ejemplo, si en la construcción de la Curva de Koch, en lugar de reemplazar el segmento por una curva generadora como se explicó anteriormente, ahora se introduce un factor aleatorio (como el lanzar una moneda) que determinará si ésta curva se inserta en posición normal o invertida. Esto genera, después de varias iteraciones, una curva que es en cierta forma como la Curva de Koch pero no exactamente igual, como se aprecia en la figura 7.5. Es decir que si se agranda una fracción de la misma, no se observa al todo reflejado en forma perfecta. Sin embargo, la relación entre el intervalo pequeño y el todo estará dada por una distribución estadística constante.

Este tipo de fractales se llaman aleatorios porque muestran aleatoriedad a cualquier escala, es decir, en cada paso de

su construcción existe un elemento aleatorio. Al relacionar el tamaño de las variaciones aleatorias a la escala, el fractal es autosemejante estadísticamente en el sentido de que el agrandamiento de pequeñas partes del conjunto tiene la misma proporción estadística que el conjunto completo.

Aún en figuras autosemejantes, se pueden encontrar también distintos grados de autosemejanza al buscar puntos con la propiedad de poder identificar cerca de ellos pequeñas réplicas del todo a cualquier grado de amplificación.

Si se observa la figura 7.6 vemos que el triángulo de Sierpinski es autosemejante en cualquier parte que se tome de él, ya que se pueden encontrar pequeñas reducciones del todo en cada punto. Por otro lado, el árbol de dos ramas, en donde se ve un tronco y dos copias reducidas del todo, es autosemejante sólo en las ramas y no en el tronco. Y en los rectángulos, donde se observan uno dentro de otro, son autosemejantes únicamente en un punto en particular, el centro, que es aquel en el cual el tamaño del rectángulo tiende a cero, ya que en ninguna otra región se observa una réplica de la figura completa a escala debido a la rotación de los rectángulos.

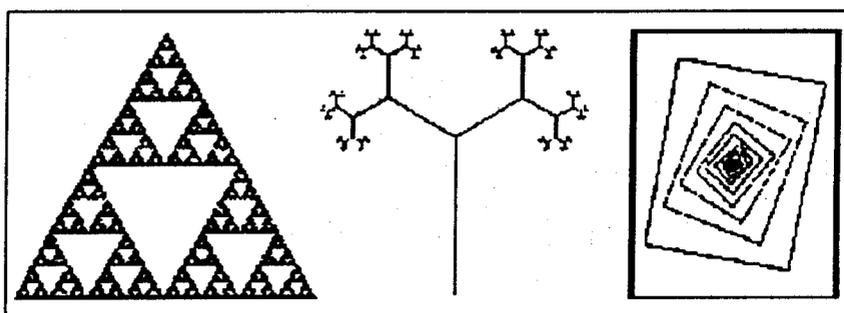


Fig. 7.6 Ejemplificación de autosemejanza estricta, parcial y en un punto.

La propiedad de autosemejanza es inherente a los fractales y se puede presentar en distintos grados dependiendo de las características individuales de cada objeto. En objetos naturales tales como el brócoli, la coliflor y ciertos arboles, la propiedad de autosemejanza no es estricta ya que ésta se observa solamente hasta cierto punto. Por ejemplo, si se desprende una parte de un brócoli, ésta será una pequeña réplica del todo, e incluso puede

desprenderse una segunda parte a la anterior en la que se observe lo mismo, pero el proceso no puede extenderse indefinidamente pues llegará el momento en el que partes de otras partes ya no semejen al objeto original.

Para dar un significado operacional a la propiedad de autosemejanza, es necesario restringir las figuras límite (aquellas que se forman cuando el número de iteraciones tiene a infinito) a aproximaciones finitas en las cuales ya no se note diferencia al pasar de un paso a otro de la construcción. Esta autosemejanza es “calculada” usando el método llamado autosemejanza en una cuadrícula donde las mediciones son hechas en una iteración finita usando cuadrículas de varios tamaños. La idea básica es que, en algún paso finito en la generación de la figura autosemejante, es alcanzado un punto en el que a partir de ahí las revisiones con cuadrícula más pequeña no detectarán diferencias adicionales en la figura.

En el siguiente ejemplo se aplica el concepto de autosemejanza en una cuadrícula, y para apreciarlo de una mejor manera se ejemplificará con tres tamaños diferentes de cuadro. El proceso consiste en colocar una cuadrícula sobre el objeto y sombrear todos aquellos cuadros que lo cubran, aún lo que sólo lo cubran parcialmente. Decimos que un objeto es autosemejante cuando, a partir de cierta iteración, el número total de cuadros sombreados se mantenga constante para ese tamaño de cuadro en particular.

En la figura 7.8 se muestra el proceso para las primeras cuatro iteraciones de la construcción del triángulo de Sierpinski. Para la cuadrícula más grande vemos que el número de cuadrículas no varía, es decir, la figura fue autosemejante desde un principio.

Por supuesto, se puede aplicar una cuadrícula tan fina como se desee, mientras más fina la cuadrícula, más precisión en la medición de autosemejanza.

Si una figura es autosemejante entonces, para cualquier tamaño de cuadrícula y suficientes pasos en su proceso de construcción, la aproximación de las cuadrículas que cubran a la figura completa y la amplificación de éstas mismas secciones parecerán ser exactamente las mismas si se comparan.

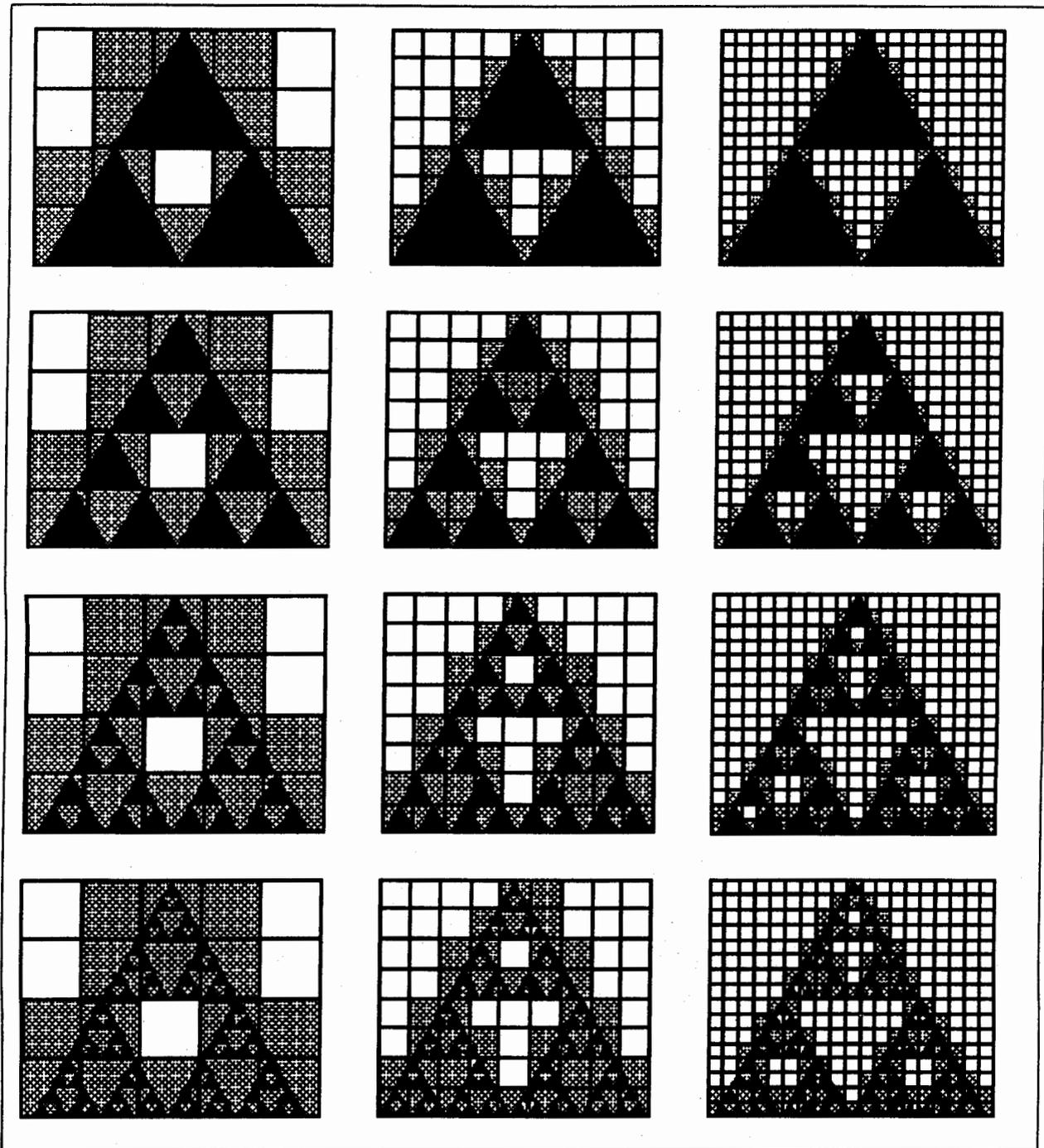


Fig. 7.8 Primeras cuatro iteraciones de la construcción del triángulo de Sierpinski en tres tamaños de cuadrícula diferentes.

# 8 Dimensión Fractal

*“Los fractales empaquetan un infinito en un grano de arena.*

*Este infinito aparece cuando uno trata de medirlos”*

McGuire, 1991

Los métodos de la geometría clásica y del cálculo no son apropiados para el estudio de los fractales por lo que son necesarias técnicas alternativas. La herramienta principal de la Geometría Fractal es la dimensión en sus muchas formas.

A finales del siglo pasado y principios del presente, uno de los mayores problemas en matemáticas fue el determinar el significado de “dimensión” y cuales propiedades tiene. Desde entonces la situación ha empeorado de alguna forma ya que los matemáticos han establecido cerca de diez diferentes nociones de dimensión: dimensión topológica, dimensión Hausdorff, dimensión fractal, dimensión autosemejante, dimensión por cuadrícula, dimensión por capacidad, dimensión por información, dimensión Euclideana, entre otras. Aunque todas ellas están relacionadas, todas son formas especiales de la dimensión fractal de Mandelbrot, la cual a su vez está basada en el trabajo de Hausdorff (1919), algunas sólo tienen sentido en ciertas situaciones, y no tienen sentido en otras, en algunos casos todas tienen sentido en la misma situación y son iguales. Algunas veces algunas tienen sentido pero no concuerdan. En el presente manual se presentarán tres de estas dimensiones: la dimensión autosemejante, dimensión por compás y dimensión por cuadrícula.

A pesar de que los matemáticos han desarrollado diferentes nociones de dimensión, como ya se mencionó, la más comúnmente usada, a la cual se referirá como dimensión euclideana, es la que involucra el número direcciones o grados de libertad mostrados por un objeto y se mide en términos de longitud, área y volumen. Usando esta noción, todos los objetos de la geometría euclideana tienen dimensión entera no negativa. Por ejemplo, se dice que un punto es 0-dimensional; una recta uni-dimensional y se mide en términos de longitud;

un cuadrado bi-dimensional y se mide en términos de área; y un cubo tri-dimensional y se mide en términos de volumen.

## 8.1 Dimensión Autosemejante

Como su nombre lo indica, esta dimensión se aplica a figuras con la propiedad de autosemejanza. Se dice que una estructura es estrictamente autosemejante si puede ser dividida en partes más pequeñas, cada una de las cuales es una pequeña réplica de la estructura completa.

Una de las principales características de un fractal es su dimensión fraccionaria, como ya se mencionó anteriormente, y para entender cómo es que a los fractales se les puede asignar una dimensión fraccionaria basada en la dimensión euclídeana, es necesario expandir la noción de dimensión euclídeana analizando cómo los segmentos, los cuadrados y los cubos pueden ser divididos en cierto número de figuras autosemejantes a la original.

Para ejemplificar esta situación, se dividirán como se muestra en la figura 8.1, en piezas cuya dimensión lineal sea  $1/n$  veces el tamaño de la original, de esta forma obtenemos  $n$  piezas para el segmento,  $n^2$  piezas para el cuadrado y  $n^3$  piezas para el cubo:

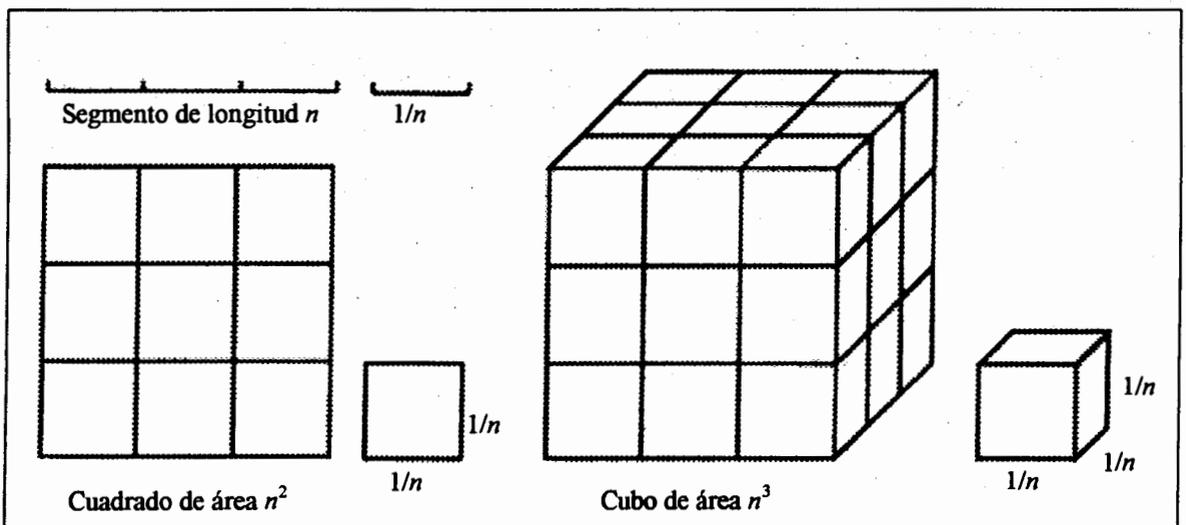


Fig. 8.1 División de un segmento, un cuadrado y un cubo en piezas autosemejantes cuya dimensión lineal sea  $1/n$  el tamaño de la original

Es posible notar que los exponentes del número de piezas ( $n$ ,  $n^2$  y  $n^3$ ) indican la dimensión del objeto:

para el segmento (dimensión 1)	$número\ de\ piezas = n^1,$
para el cuadrado (dimensión 2)	$número\ de\ piezas = n^2,$
para el cubo (dimensión 3)	$número\ de\ piezas = n^3,$

por lo que buscaremos despejar este exponente.

Aplicando la función logaritmo a ambos lados de la igualdad se obtiene:

para el segmento	$\log(número\ de\ piezas) = \log(n^1),$
para el cuadrado	$\log(número\ de\ piezas) = \log(n^2),$
para el cubo	$\log(número\ de\ piezas) = \log(n^3).$

Ahora se aplican propiedades de los logaritmos para convertir el exponente en coeficiente:

para el segmento	$\log(número\ de\ piezas) = 1 \log (n),$
para el cuadrado	$\log(número\ de\ piezas) = 2 \log (n),$
para el cubo	$\log(número\ de\ piezas) = 3 \log (n).$

Obsérvese que todas las piezas son autosemejantes puesto que el agrandar o aumentar  $n$  veces una pieza cualquiera nos devolverá el objeto original. Por lo tanto

$$\log(número\ de\ piezas) = \log(n^D) = D \log (n)$$

donde  $D$  es la dimensión y  $n$  es la amplificación necesaria para obtener el objeto original.

Finalmente se despeja  $D$  para obtener una fórmula que nos dé la dimensión de cualquier estructura autosemejante, siempre que se tengan el número de piezas

autosemejantes y la amplificación necesaria para obtener el objeto original de cualquiera de éstas piezas:

$$D_{\text{Autosemejante}} = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{amplificación})}$$

Una forma equivalente de expresar esta fórmula es en función de la escala usada para obtener cada pieza del objeto original:

$$D_{\text{Autosemejante}} = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log\left(\frac{1}{\text{escala}}\right)} = \frac{\log n}{\log \frac{1}{s}}$$

Aplicando la primera fórmula a las figuras estudiadas se observa que es coherente con los datos conocidos:

para el segmento  $D = \frac{\log(n^1)}{\log(n)} = \frac{1\log(n)}{\log(n)} = 1,$

para el cuadrado  $D = \frac{\log(n^2)}{\log(n)} = \frac{2\log(n)}{\log(n)} = 2,$

para el cubo  $D = \frac{\log(n^3)}{\log(n)} = \frac{3\log(n)}{\log(n)} = 3.$

Ahora se usará esta fórmula para encontrar la dimensión de los fractales construidos en la sección 6. Recuérdese que todos estos fractales fueron autosemejantes.

### Dimensión Fractal del Triángulo de Sierpinski.

Para calcular la dimensión del triángulo de Sierpinski, es necesario dividir la figura en piezas autosemejantes y encontrar la amplificación necesaria para que cada una de éstas piezas sea igual al original. Si se divide la figura como se muestra en la figura 8.2, se

obtienen 3 partes iguales y se necesita una amplificación de 2 en cada una de ellas para obtener la original:

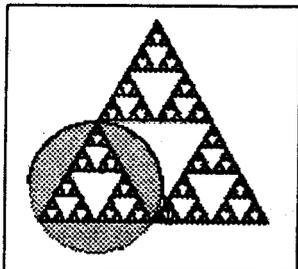


Fig. 8.2 División del triángulo de Sierpinski en 3 piezas autosemejantes

$$D = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{amplificación})} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584962\dots$$

**La dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski es aproximadamente 1.585**

### Dimensión Fractal de la Curva de Koch.

En la figura 8.3 se puede ver que es posible dividir la curva de Koch en 4 partes iguales y cada una de las cuales necesita un factor de amplificación 3 para ser igual a la original:

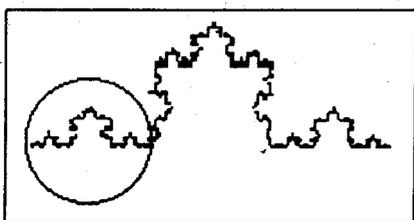


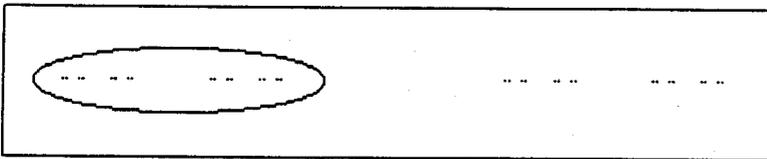
Fig. 8.3 División de la Curva de Koch en 4 piezas autosemejantes

$$D = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{amplificación})} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.261859\dots$$

**La dimensión fractal de la Curva de Koch es aproximadamente 1.262**

## Dimensión Fractal del Conjunto de Cantor.

Existen fractales cuya dimensión fractal está entre 0 y 1. Uno de éstos es el conjunto de Cantor, análogo unidimensional del Triángulo de Sierpinski, donde encontramos 2 piezas, como se ve en la figura 8.4, cada una de las cuales necesita una ampliación de 3 para obtener el original:



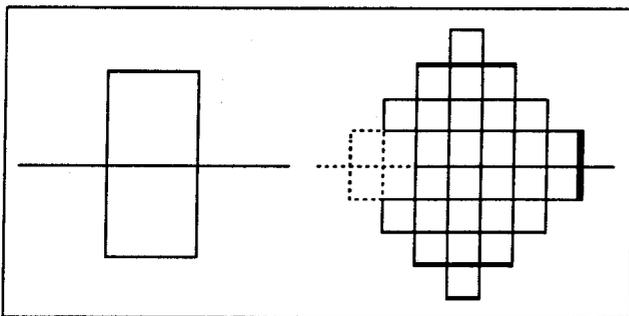
$$D = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{ampliación})} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.630929\dots$$

Fig. 8.4 División del Conjunto de Cantor en 2 piezas autosemejantes

**La dimensión fractal del Conjunto de Cantor es aproximadamente 0.631**

## Dimensión Fractal de la Curva llena espacio de Peano.

También existen fractales cuya dimensión es un número entero, como la curva llena espacio de Peano. En la figura 8.5 se observa la curva generadora y la primera iteración, donde se ha señalado con línea punteada una división posible. Dada esta división, se encuentran 9 piezas iguales las cuales necesitan una ampliación de un factor de 3 para obtener el original:



$$D = \frac{\log(\text{número de piezas})}{\log(\text{ampliación})} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2$$

Fig. 8.5 División de la curva llena espacio de Peano en 9 piezas autosemejantes.

**La dimensión fractal de la Curva Llena Espacio de Peano es 2**

Pero ¿cuál es el significado de estos números? ¿Qué se puede concluir de un 1.585, de un 1.262, de un 0.631 y de un 2?

Una figura fractal en un plano tiene una dimensión fractal entre 1 y 2. Mientras más cerca esté del límite superior (2), más llenará el espacio en el que está (el plano). Esto se ve también en superficies en un espacio tridimensional: mientras más cerca esté la dimensión fractal del límite superior (3), más llenará el espacio en el que está (el espacio tridimensional). Una figura fractal cuya dimensión fractal esté entre el 0 y el 1, mientras más cerca esté del límite superior (1) más se acercará a una recta.

Las dimensiones calculadas en esta sección fueron relativamente fáciles de calcular porque el factor de agrandamiento o amplificación siempre se incrementó (o, en el caso equivalente, la escala siempre se redujo) a la misma razón que el número de piezas en la figura y porque se trabajó con figuras autosemejantes. Este no es el caso para muchos fractales. Por ejemplo, algunos de los fractales conocidos como “Los conjuntos de Julia”, figura 8.6, usualmente tienen una dimensión fraccionaria, pero es muy difícil de calcular, de hecho, para muchos conjuntos de Julia, la dimensión exacta es desconocida. (Devaney, 1992)

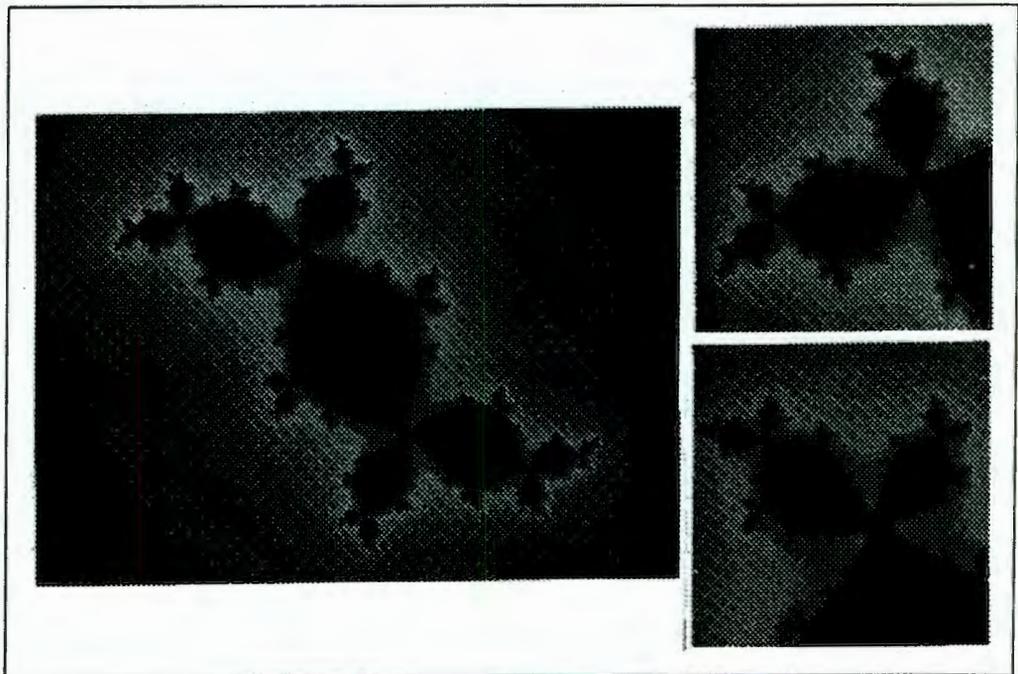


Fig. 8.6 Ejemplos de conjuntos de Julia

## 8.2 Dimensión por Compás

Existen fractales en cuya construcción no se involucra una fórmula o un proceso específico como es el caso de algunos fractales naturales como una línea costera o una frontera natural (como sería un río). Una forma de calcular su dimensión es por medio de mediciones sucesivas con una herramienta de medición cada vez más precisa, proceso desarrollado por Lewis Fry Richardson, meteorólogo inglés, cuyo trabajo llevó a Mandelbrot, entre otros, a hacer la famosa pregunta ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?

Para encontrar la dimensión fractal del perímetro de la línea costera de una isla, de un estado o de un país, se necesitan un buen compás, un mapa con la escala señalada, papel milimétrico o logarítmico, calculadora, papel y lápiz. El proceso es el siguiente: se toma el compás y se fija en cierta abertura de acuerdo a la escala del mapa (se verá un caso específico en el ejemplo), luego se coloca el punto del compás en el punto inicial (de preferencia una esquina o extremo) y se “camina” el compás cuidadosamente a lo largo de la línea costera asegurándose de “pisar” siempre sobre ésta. Es importante mencionar que, al caminar sobre la línea costera, no se toman en cuenta islas (aunque éstas formen parte de la isla, estado o país) pero sí penínsulas, bahías y demás. Una vez contados el número de pasos y establecida la longitud correspondiente a dicha abertura, se repite el proceso con una menor abertura del compás y se vuelven a contar los pasos y a registrar los datos. Este proceso se lleva a cabo con menores aberturas del compás mientras sea aún práctico “caminar” sobre la línea costera.

Una vez registrados todos los datos, se tienen dos opciones: graficar en papel logarítmico (escala logarítmica en sus ejes) o graficar en papel milimétrico una vez calculado el logaritmo de todos los datos, lo cual es equivalente. Esto es posible ya que los datos se relacionan entre sí a través de una función potencia. El uso del papel logarítmico, o el equivalente, es necesario, ya que, por un lado, en uno milimétrico sería muy difícil debido a la disparidad de los datos a graficar y, por el otro, la curva generada no sería una línea recta, como se muestra en la figura 8.7.

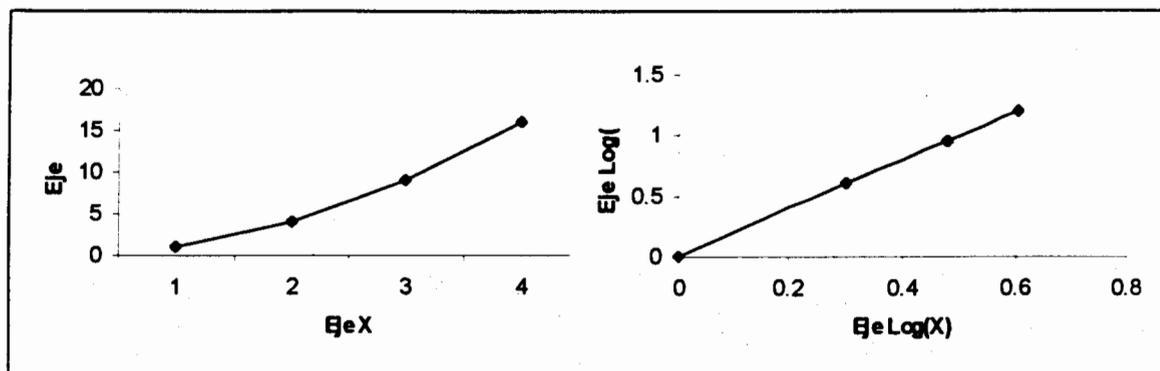


Fig. 8.7 Gráfica de la función  $f(x) = x^2$  en ejes convencionales y en ejes logarítmicos.

Para ejemplificar la anterior afirmación, se graficará la función potencia  $f(x) = x^2$ , en ambos ejes, el convencional y el logarítmico. Primero se aplicará la función logaritmo base 10 en ambos lados de la igualdad:

$$\text{Log } y = \log x^2$$

Después se aplicarán las propiedades de los logaritmos para finalmente llegar a una función lineal de la forma  $y = mx + b$ :

$$\text{Log } y = 2 \log x$$

donde se aprecia que la pendiente de la recta en la gráfica lineal es 2 y la ordenada al origen es 0.

Retomando el proceso de encontrar la dimensión por compás, en el eje horizontal se marca el inverso de la medida del compás ( $1/\text{apertura compás}$ ) para que sea creciente la numeración de dicho eje. Esta cantidad puede interpretarse como la precisión de la medición: mientras más pequeña sea la apertura, más precisa es la medición. El eje vertical es para los logaritmos de la longitud total. Se tomará base 10 para trabajar fácilmente con la calculadora en el uso de los logaritmos, pero es posible utilizar otra base de igual forma. La gráfica logarítmica mostrará siempre como la longitud total de la línea costera ( $\log(\text{longitud total})$ ) cambia con un incremento en la precisión ( $\log(1/\text{apertura compás})$ ).

Se puede observar, gráficamente, que los puntos en la gráfica se pueden aproximar a una recta de la forma  $y = mx + b$  donde  $y = \text{longitud total}$  y  $x = 1/\text{apertura compás}$ . Dicha

aproximación a una recta puede hacerse por el método “mínimos cuadrados” o usando la calculadora o computadora. Luego entonces la relación entre la *longitud total* y la escala o el tamaño de la *abertura del compás* puede ser expresada por

$$\log(\text{longitud total}) = m \cdot \log \frac{1}{\text{abertura compás}} + b$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta encontrada y  $b$  la intersección con el eje vertical. Dicha relación expresa cómo cambia la *longitud total* cuando la *abertura del compás* cambia, siempre que la gráfica en el papel logarítmico pueda ser aproximada a una línea recta. La pendiente  $m$  es la clave para encontrar la dimensión fractal del objeto.

¿Cuál es la relación entre la dimensión autosemejante,  $D_{\text{autosemejante}}$ , y la función potencia obtenida de las mediciones de longitud usando diferentes aberturas de compás? Tomando la relación logarítmica *longitud total – apertura del compás* (página actual) de la dimensión por compás por un lado, y la relación, también logarítmica, *número de piezas – 1/escala* de la dimensión autosemejante (página 100) por el otro. Es necesario hacer la conexión entre la *longitud total* y el *número de piezas* para poder obtener una fórmula que las relaciones. Si se asume que al tener una *escala = 1* se mide una *longitud total = 1*, esta conexión se da por *longitud total = número de piezas x escala* ya que cuando se mide a diferentes escalas  $s$ , el objeto completo está compuesto de pequeñas copias de tamaño  $s$  cada una de las cuales tiene una longitud total de *número de piezas veces escala*.

Si se aplica la función logaritmo base 10 a la ecuación

$$\text{longitud total} = \text{número de piezas} \times \text{escala}$$

se obtiene:

$$\log(\text{longitud total}) = \log(\text{número de piezas}) + \log(\text{escala}).$$

Si se substituye  $\log(\text{longitud total})$  y  $\log(\text{número de piezas})$  de las relaciones logarítmicas anteriores y se toma la *abertura del compás* de la dimensión por compás como la *escala*:

$$m \log (1/\text{escala}) = D_{\text{autosemejante}} \log(1/\text{escala}) + \log(\text{escala})$$

donde la ordenada al origen de la dimensión por compás es cero ya que la función potencia no tiene término independiente.

Ya que  $\log(1/\text{escala}) = -\log(\text{escala})$  se obtiene:

$$-m \log (\text{escala}) = -D_{\text{autosemejante}} \log(\text{escala}) + \log(\text{escala})$$

Finalmente, se divide entre  $\log(\text{escala})$  y se despeja  $D_{\text{autosemejante}}$

$$D_{\text{autosemejante}} = 1 + m.$$

Por lo que la dimensión autosemejante se puede calcular usando la pendiente de la gráfica logarítmica de la *longitud total* y la precisión *1/abertura compás*

$$D_{\text{autosemejante}} = 1 + m,$$

y la dimensión por compás se define como

$$D_{\text{compás}} = 1 + m$$

Se calculará ahora la dimensión por compás de la costa del pacífico de la República Mexicana. Primero se fija la abertura de nuestro compás, para lo que es necesario referirse a la escala del mapa, 1:12,500,000. Es decir, 1 cm equivale a 12,500,000 cm o a 125 Km. Por lo que se harán mediciones con cuatro aberturas diferentes: 4 cm, 3cm, 2cm y 1cm.

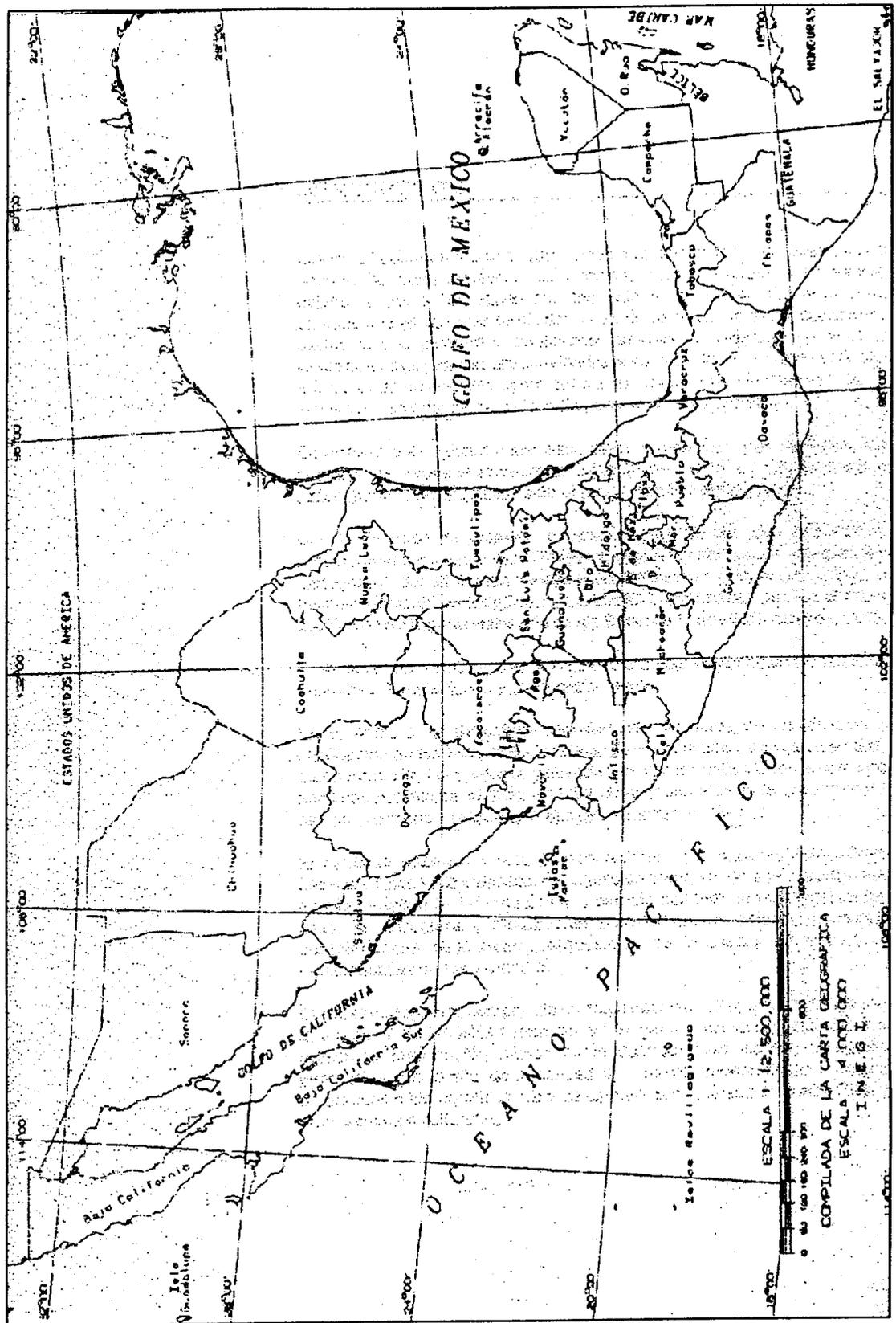


Fig. 8.7 Mapa de la República Mexicana

Una vez contados los pasos y calculadas las distancias, obtenemos la siguiente tabla:

Abertura Real del Compás (cm)	Abertura Equivalente del Compás (Km)	Longitud Total (Km)	Log(1/Abertura)	Log(Longitud Total)
4 cm	500 Km	3500 Km	-2.699	3.544
2 cm	250 Km	4250 Km	-2.398	3.628
1 cm	125 Km	4750 Km	-2.097	3.677

Tabla 8.1 Datos registrados para calcular la dimensión por compás de la línea costera del pacífico de la República Mexicana

La siguiente gráfica muestra la relación existente entre el logaritmo de la precisión de la medición ( $\log(1/abertura)$ ) y el logaritmo de la longitud total en una gráfica logarítmica ( $\log(longitud\ total)$ ):

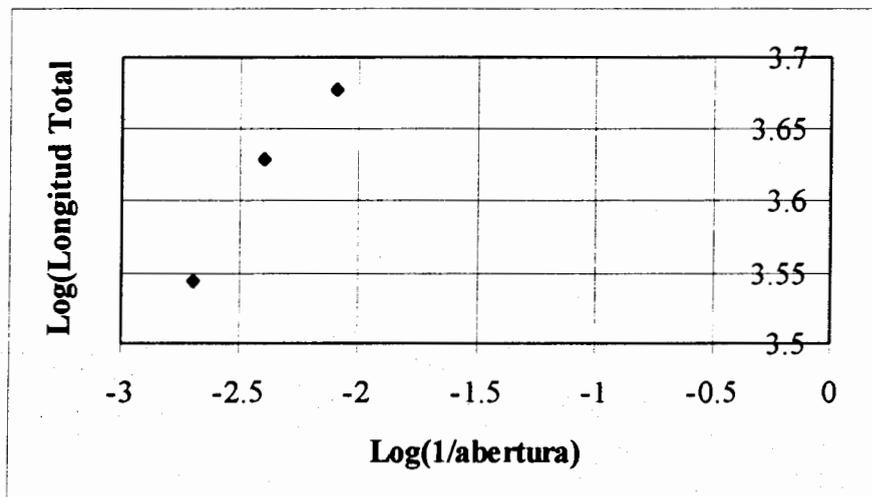


Fig. 8.9 Gráfica logarítmica de los datos registrados

Ahora podemos aproximar a una recta los puntos dados usando el método de mínimos cuadrados o usando la computadora y encontrar la pendiente de dicha recta a la cual se le suma 1 y es la dimensión fractal de nuestro país. Usando una hoja electrónica de datos, encontramos que la pendiente de la recta aproximada es 0.22, por lo que dimensión fractal (por compás) de la costa del pacífico de México es 1.22

## 8.3 Dimensión por Cuadrícula

Esta dimensión es muy apropiada para estructuras que nos sean autosemejantes y que no se puedan medir por medio de un compás, tales como polvo, olas de mar y nubes, además es aplicable a cualquier estructura en el plano y puede ser fácilmente adaptada a estructuras en el espacio, lo cual la hace muy popular aunque no sea muy precisa.

El procedimiento es relativamente sencillo, tanto como el de la dimensión por compás, siempre que se pueda colocar el objeto dentro de cuadrados, si es una imagen, o de cubos, si es un objeto. Para calcular la dimensión fractal de imágenes en el plano, primero se coloca una cuadrícula cubriendo totalmente la imagen y se cuenta el número de cuadrículas que la contienen. Este número va a depender, por supuesto, del tamaño de cuadrícula que se haya escogido. Una vez registrados los datos anteriores, se cambia el tamaño de la cuadrícula a uno más pequeño (se recomienda que se reduzcan las cuadrículas por un factor de 2), se vuelve a contar el número de cuadrículas que contienen a la estructura y se registran estos datos. Este proceso se repite con varios tamaños más de cuadrícula y el radio o proporción entre el tamaño de cuadrícula y el número de cuadrículas que contienen la figura es la dimensión fractal de ésta. Por lo que la dimensión por compás se define como

$$D_{\text{cuadrícula}} = m = \text{pendiente de la recta}$$

Para encontrarla se grafican los resultados en una gráfica logarítmica:  $\log(\text{número de cuadrículas})$  para el eje vertical y  $\log(1/\text{tamaño cuadrícula})$  para el eje horizontal o en papel logarítmico. Después se encuentra la pendiente  $m$  de la recta a la cual se aproximan los puntos por el método de mínimos cuadrados o con el uso de la computadora.

Se calculará ahora la dimensión por cuadrícula de la Costa del Pacífico de la República Mexicana. Se comenzará por colocar la primera cuadrícula sobre nuestro mapa, que en este caso es de 11 cuadros x 11 cuadros (por cuestiones de espacio, sólo se colocan parte de la cuadrícula, lo cual no afecta en el cálculo de la dimensión pues sólo se toman en cuenta las cuadrículas sombreadas) y se cuenta el número de cuadrículas que la cubren, para después hacer lo mismo con varias cuadrículas más pequeñas cada vez, usualmente se usa la mitad del tamaño que la anterior, y se grafican estos datos en un papel logarítmico o el equivalente:

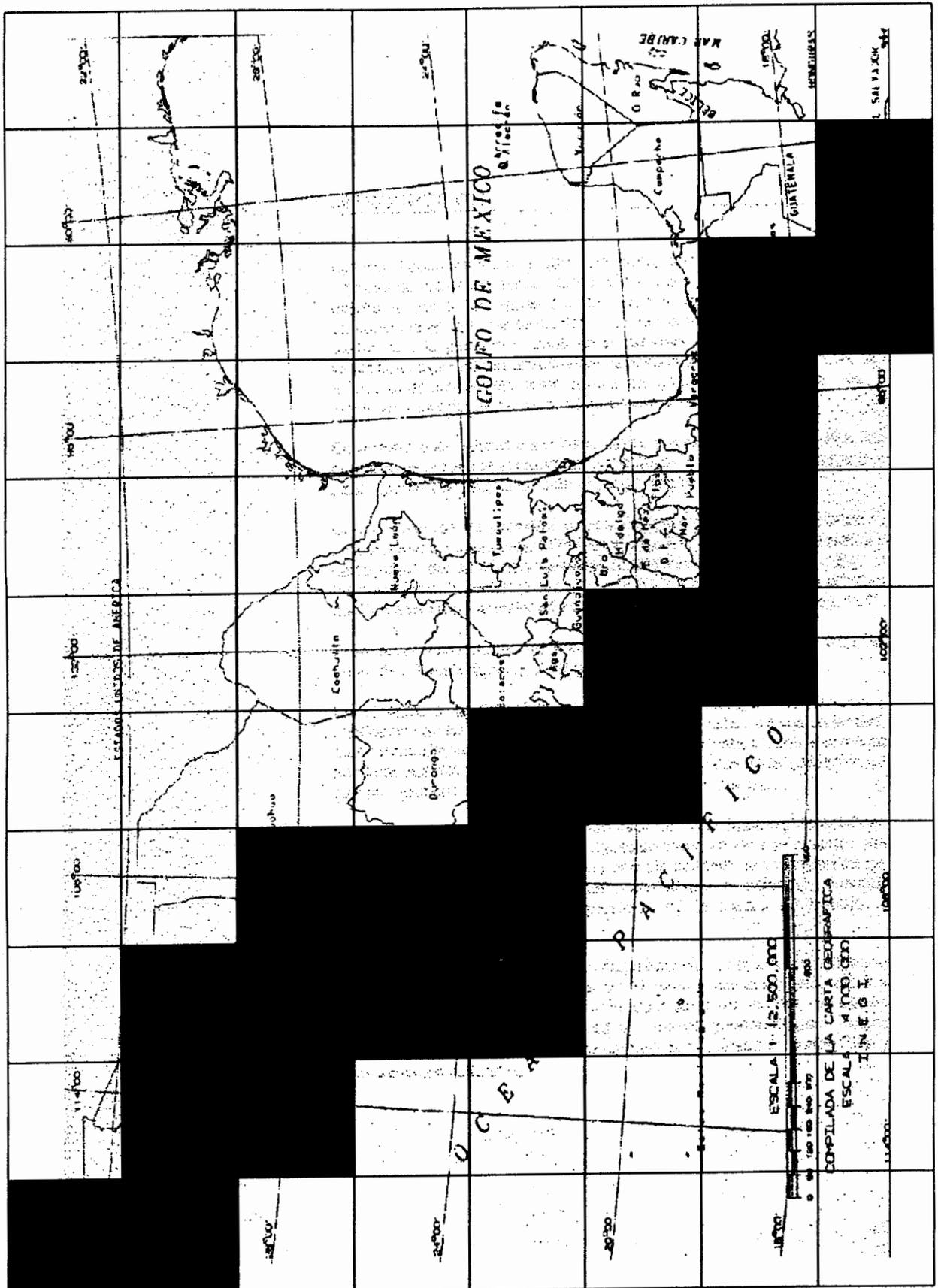


Fig. 8.10 Mapa de la República Mexicana con la Primera Cuadrícula

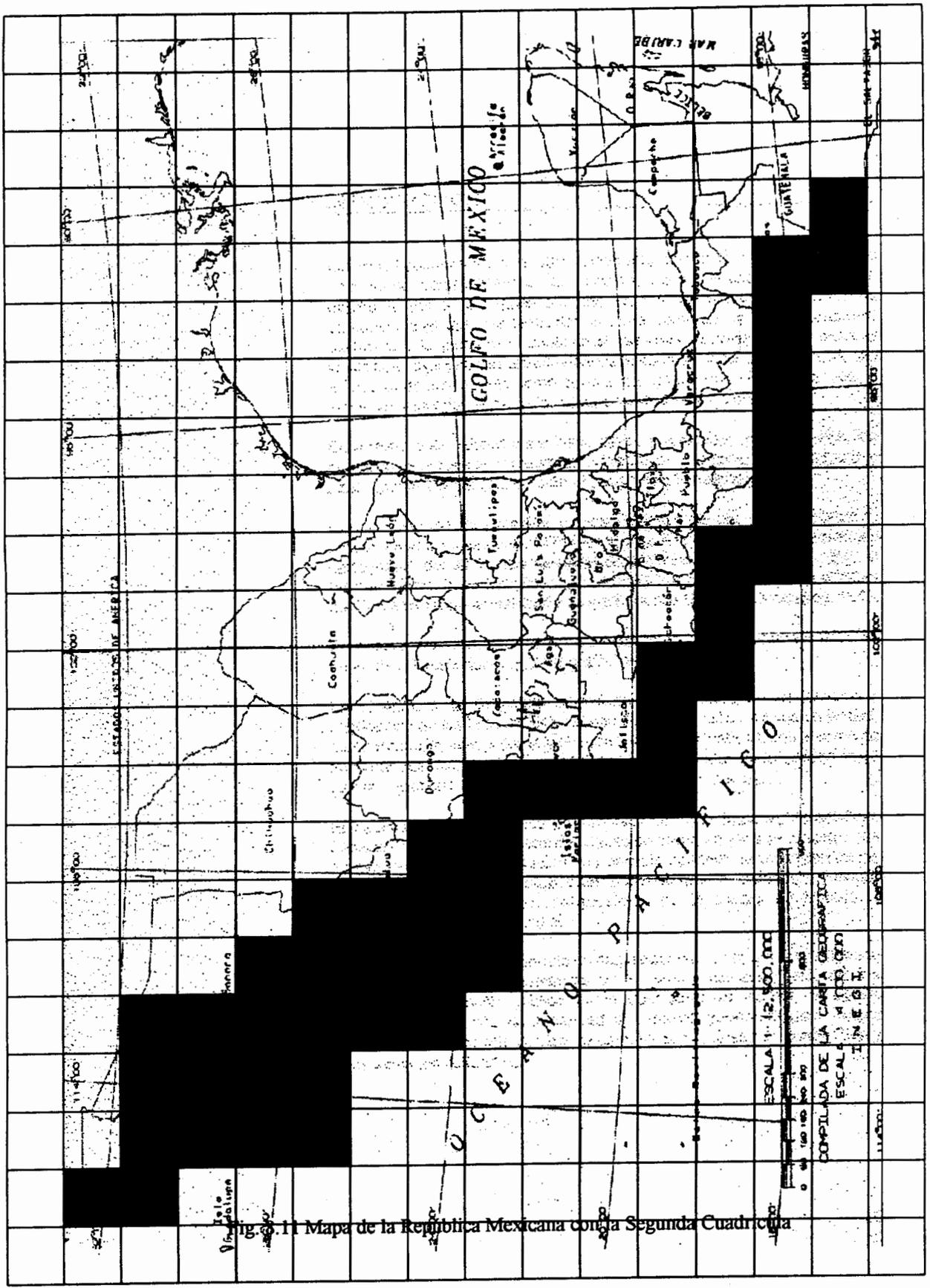


Fig. 8.11 Mapa de la República Mexicana con la Segunda Cuadrícula

Fig. 8.11 Mapa de la República Mexicana con la Segunda Cuadrícula

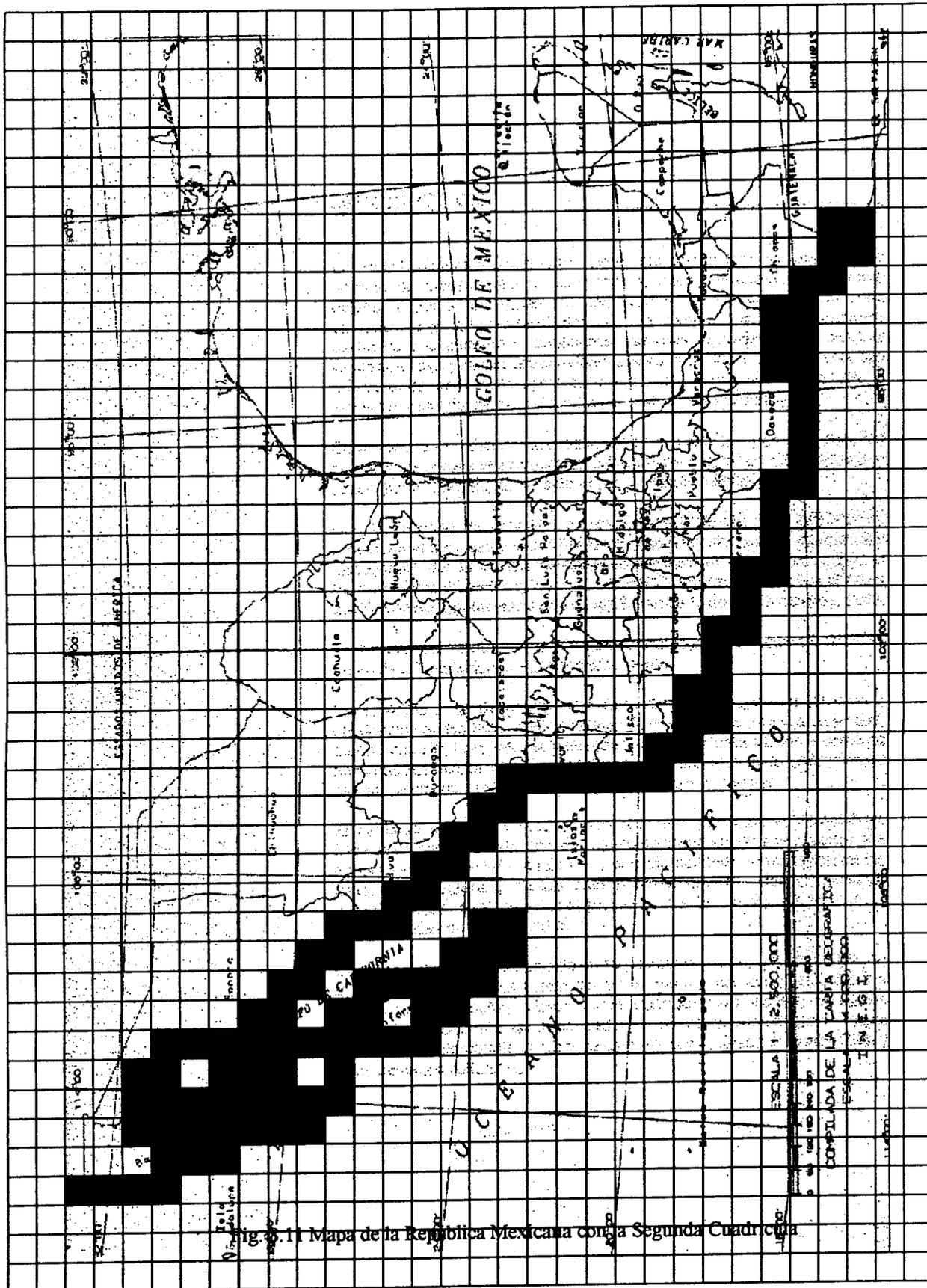


Fig. 8.11 Mapa de la República Mexicana con la Segunda Cuadrícula

Fig. 8.12 Mapa de la República Mexicana con la Tercera Cuadrícula

Una vez contadas las cuadrículas, obtenemos la siguiente tabla donde la escala de la cuadrícula es igual a  $1/(\text{número de cuadrículas por renglón})$  que sería igual a  $1/(\text{número de cuadrículas por columna})$  de haber podido colocar la cuadrícula completa:

1/ Escala Cuad.	Número de Cuadrículas Sombreadas	Log(1/ Escala Cuad.)	Log(Núm. De Cuad. Somb.)
11	20	1.041	1.301
22	44	1.342	1.643
44	105	1.643	2.021

Tabla 8.2 Datos registrados para calcular la dimensión por cuadrícula de la línea costera del pacífico de la República Mexicana

La siguiente gráfica muestra la relación existente entre el logaritmo del número total de cuadrículas y el logaritmo del número de cuadrículas sombreadas:

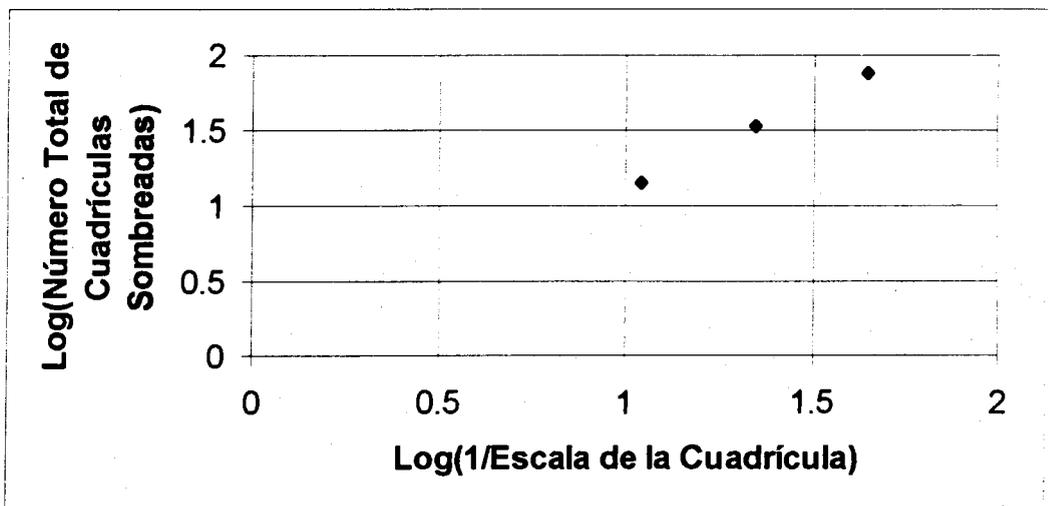


Fig. 8.14 Gráfica logarítmica de los datos registrados

Ahora aproximamos una recta por el método de mínimos cuadrados y encontramos la pendiente de dicha recta, 1.21 la cual es la dimensión fractal (por cuadrícula) de la costa del Pacífico de nuestro país.

¿Hubo diferencia entre la dimensión por compás y la dimensión por cuadrícula? ¿Por qué?

Es importante hacer notar que, en el plano, la dimensión por cuadrícula nunca excederá 2, a comparación de la dimensión autosemejante, la cual fácilmente puede exceder el 2 para una curva en el plano. Esto es debido a que la dimensión por cuadrícula ignora las partes que se empalman, lo cual no sucede con la dimensión autosemejante.

La dimensión por cuadrícula es una de las más usadas para mediciones en todas las ciencias ya que es fácil de programar en una computadora tanto para objetos en rectas (usando segmentos), como para objetos en el plano (usando cuadrículas) y para objetos en el espacio (usando cubos).

Como ya se mencionó anteriormente Mandelbrot, en su ensayo original, definió a un fractal como *un conjunto con una dimensión Hausdorff estrictamente mayor que su dimensión topológica*. El problema de esta definición es que excluía a un número de conjuntos que evidentemente eran fractales por lo cual resultó insatisfactoria. De cualquier forma, es importante mencionarla ya que es incluida en gran parte de la bibliografía relacionada con los fractales.

# 9 Proceso Iterativo

Durante la construcción de los *Primeros Fractales* fue introducido el concepto de *Proceso Iterativo* en figuras geométricas como un proceso infinito y repetitivo en forma especial, especial porque una vez aplicado el proceso al resultado del mismo se le aplica de nuevo y así sucesivamente. Este proceso iterativo geométrico fue aplicado en la construcción del conjunto de Cantor, la curva de Koch, La curva llena espacio de Peano y el triángulo de Sierpinski.

Ahora es necesario analizar lo que es un proceso iterativo en funciones algebraicas reales y complejas para la construcción de los siguientes fractales. Se comenzará con algunas definiciones importantes las cuales se han tratado de adaptar, junto con los ejemplos y ejercicios, al uso de la computadora y/o calculadora. Esto es importante pues más adelante se verá que sin el uso de la computadora no hubiera sido posible el desarrollo de la geometría fractal ni la construcción de los fractales contemporáneos.

Definición.

Una función es una “regla” o “proceso” que convierte ciertos números en otros, posiblemente diferentes, con la restricción de que cualquier número de entrada genera uno y sólo un número de salida. Algunas veces se compara una función con una máquina, figura 9.1, la cual “procesa” el dato de entrada convirtiéndolo en otro, posiblemente diferente, de salida.

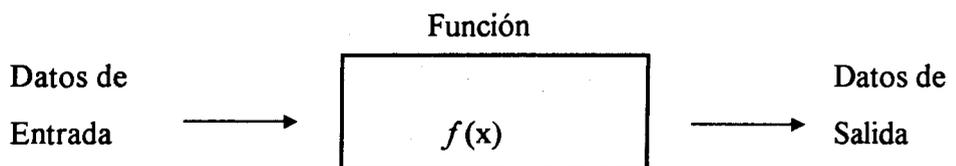


Fig. 9.1 Representación del concepto de función como una máquina

### Ejemplo.

Considerando la función raíz cuadrada, la cual, como ya se sabe sólo acepta, como datos de entrada, números no negativos. En la figura 9.2 se puede ver la representación de esta función como una máquina, donde si se ingresa el número natural 4 como dato de entrada, la función “produce” el número natural 2.

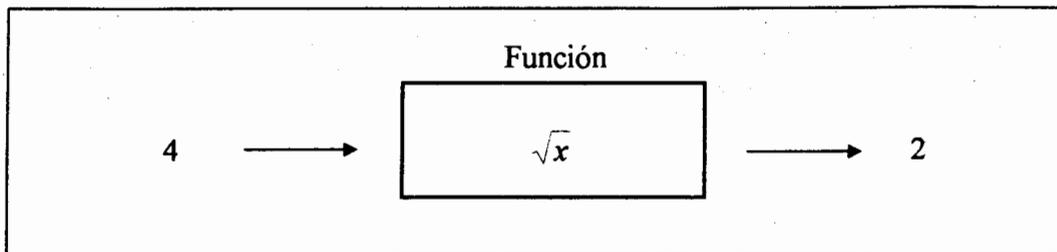


Fig. 9.2 Ejemplo de representación de una función específica como una máquina

### Definición.

Una iteración es el proceso de evaluar una función repetidamente, tomando cada dato de salida como el nuevo dato de entrada. Si se continúa con la analogía de la máquina como función, entonces la máquina se convierte en iteración cuando es alimentada con los datos de salida, como se puede ver en la figura 9.3.

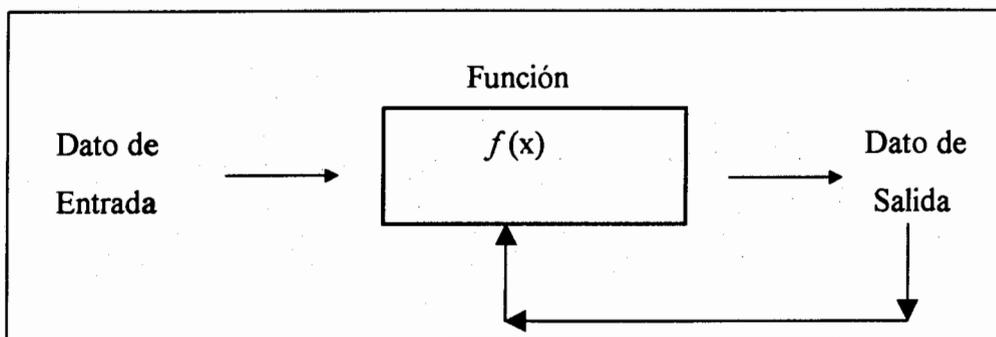


Fig. 9.3 Representación de iteración por medio de una máquina.

### Notación.

Es importante fijar una notación para identificar el número de iteraciones realizadas:

Primera iteración  $F^1(x) = f(x)$

Segunda iteración  $F^2(x) = f(f(x))$

Tercera iteración  $F^3(x) = f(f(f(x)))$ , y así sucesivamente.

Tomando la función del ejemplo anterior:

$$\text{Sea } f(x) = \sqrt{x}$$

Primera iteración

$$F^1(x) = \sqrt{x}$$

Segunda iteración

$$F^2(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

Tercera iteración

$$F^3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

**Definición.**

La órbita de  $x_0$  es el conjunto formado por las iteraciones sucesivas de ese número. La notación para representar la órbita de  $x_0$  para la función  $f(x)$  es:

$$\text{órbita de } x_0 = \{f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots\}$$

Continuando con el ejemplo:

Se tiene la función  $f(x) = \sqrt{x}$  y el punto  $x_0 = 256$ ,

entonces la órbita de  $x_0$  es

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sqrt{256}, \sqrt{\sqrt{256}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}, \dots \right\} \\ &= \{16, 4, 2, 1.4142\dots, 1.1892\dots, 1.0905\dots, 1.0442\dots, \dots\} \end{aligned}$$

la cual se observa que tiende o converge a 1.

Es decir, que conforme el número de iteraciones crece, los valores dentro de la órbita se acercan más a 1.

De hecho, para esta función, la órbita de cualquier número positivo tiende a 1

¿Por qué?

¿Será porque conforme el número de iteraciones crece, el exponente tiende a cero?

**Definición.**

Un punto fijo es aquel número para el cual la órbita se mantiene constante. Es decir,  $x_0$  es un punto fijo si  $F^1(x) = F^2(x) = F^3(x) = F^4(x) = \dots = F^n(x) = \dots$

Ejemplo.

Sea la función  $f(x) = \sqrt{x}$  y el punto  $x_0 = 0$ ,

entonces se puede ver que la órbita de  $x_0$  es  $x_0 = \{0,0,0,\dots\}$

Luego entonces  $x_0 = 0$  es un punto fijo.

Definición Intuitiva.

Un análisis de órbita es el proceso de “entendimiento” de todas las órbitas de un sistema dinámico dado, es decir, el proceso de caracterización de todas las órbitas de un sistema dinámico.

Definición Intuitiva.

Un sistema dinámico es un proceso en movimiento. Por ejemplo el movimiento de las estrellas y galaxias en el espacio, las casas de bolsa, el clima, el incremento o decremento de poblaciones y el movimiento de un péndulo. Los sistemas dinámicos son estudiados con el fin de predecir hacia dónde se dirige el sistema.

Uno de los más grandes descubrimientos del siglo XX en Matemáticas es que sistemas muy simples, aún aquellos que dependen de una sola variable, pueden ser tan impredecibles como el clima y la razón de este comportamiento impredecible ha sido llamada “Caos”.

Definición Intuitiva.

La teoría del caos es la rama de las matemáticas que trata de explicar el hecho de que sistemas sensibles a condiciones iniciales tengan resultados complejos e impredecibles. Un ejemplo muy común es el conocido como “efecto mariposa”, el cual dice que, en teoría, el aleteo de una mariposa en China puede afectar el clima en Nueva York, que está a miles de millas de distancia. En otras palabras, es posible que un pequeño cambio produzca resultados impredecibles, y algunas veces drásticos, al disparar una serie de eventos cada vez más significativos.

Definición.

Una órbita periódica (o ciclo) es aquella que eventualmente regresa a donde empezó, es decir, la órbita de  $x_0$  es periódica si  $F^N(x_0) = x_0$  para un entero  $N$ .

Si el punto  $x_0$  es periódico entonces el entero positivo más pequeño,  $N$ , para el cual  $F^N(x_0) = x_0$  se le llama periodo.

Ejemplo.

Para la función  $f(x) = -x^3$ , con el punto  $x_0 = -1$ .

La órbita de  $x_0 = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$  y su periodo es 2.

Existen también órbitas llamadas eventualmente periódicas (o eventualmente fijas) que, al principio, están formadas por puntos no periódicos pero a lo largo de la órbita aparecen puntos fijos o periódicos.

## Análisis gráfico de un proceso iterativo

Existe un procedimiento geométrico para describir el comportamiento de órbitas usando solamente la gráfica de la función  $f(x)$ . El graficar las iteraciones de la función nos puede ayudar también a entender mejor el proceso de iteración.

Primero se grafica la función dada, por ejemplo  $f(x) = x^2$ , después se incorpora la gráfica de la recta  $y = x$ , la cual forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $X$  y el eje  $Y$ , como se puede ver en la figura 9.4. La importancia de esta recta radica en que se puede pensar en ella, como un espejo que va a reflejar el valor del dato de entrada, ya evaluado, para que sea el próximo valor a iterar.

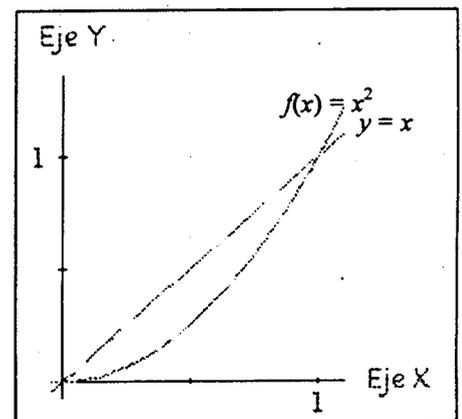
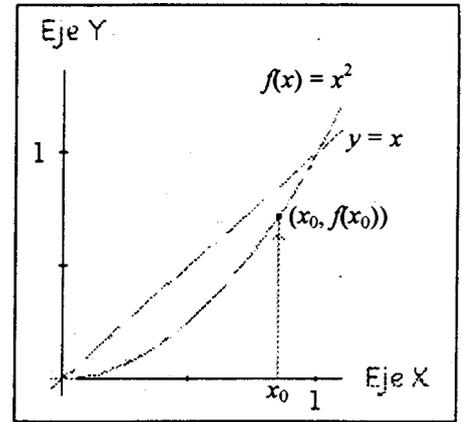


Fig. 9.4 Análisis Gráfico (Paso 1)

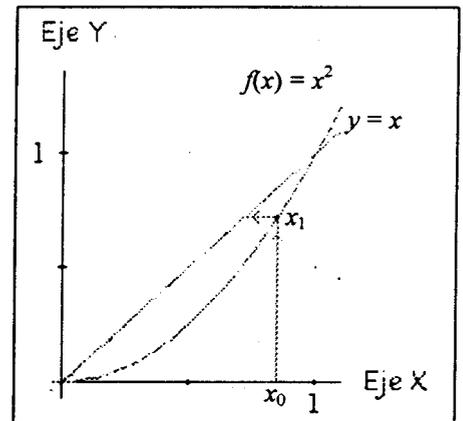
Ahora se localiza el punto inicial  $x_0$  en el eje  $X$  y se traza una recta vertical del punto  $x_0$ , sobre el eje  $X$ , al punto  $(x_0, f(x_0))$ , sobre la gráfica de la función, como se ve en la figura 9.5.

El primer elemento de la órbita de  $x_0$  es el número  $x_1 = f(x_0)$  y la gráfica de la función permite leer este número, ya que  $(x_0, f(x_0))$  es el punto en la gráfica directamente arriba o abajo de  $x_0$ .



Una vez que se marca el primer elemento  $x_1$  de la órbita de  $x_0$  en nuestro plano, es necesario evaluar de nuevo la función, pero con éste primer elemento  $x_1$  como dato de entrada.

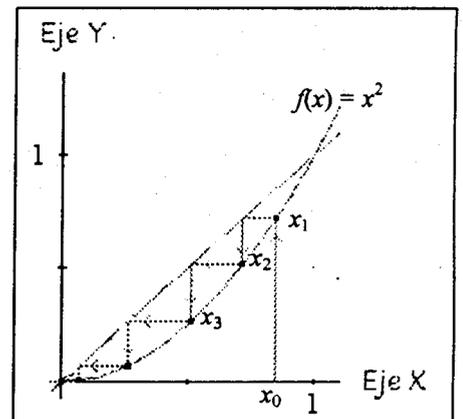
Para lograr esto gráficamente, se traza una recta horizontal del punto  $(x_0, f(x_0))$  a la recta diagonal  $y = x$ , como se muestra en la figura 9.6, es decir, se va al punto  $(f(x_0), f(x_0))$ , lo cual hará que estemos sobre el punto  $x_1 = f(x_0)$ .



Ahora, si se traza una recta vertical de este punto a la función original, se llega al punto  $(f(x_0), f(f(x_0)))$ , en donde se encuentra el segundo elemento de la órbita de  $x_0$ , el número  $f(f(x_0))$ . Y así sucesivamente.

Es decir, los puntos,  $x_n$ , que se toquen y que estén sobre la función  $f(x)$  son los elementos de la órbita de  $x_0$ :

$$\{f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \Lambda\} = \{x_1, x_2, x_3, \Lambda\}$$



Ejemplo:

Análisis gráfico de la función  $f(x) = x^2$  para dos puntos, uno en el intervalo  $(0,1)$  y el otro en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

Por medio de este análisis gráfico, figura 9.8, es relativamente fácil encontrar que  $-1, 0$  y  $1$  son los puntos fijos de la función, que la órbita de cualquier punto en los intervalos  $(-1,0)$  y  $(0,1)$  tiende a cero y que la órbita de cualquier punto en los intervalos  $(-\infty,-1)$  y  $(1, +\infty)$  tiende a infinito.

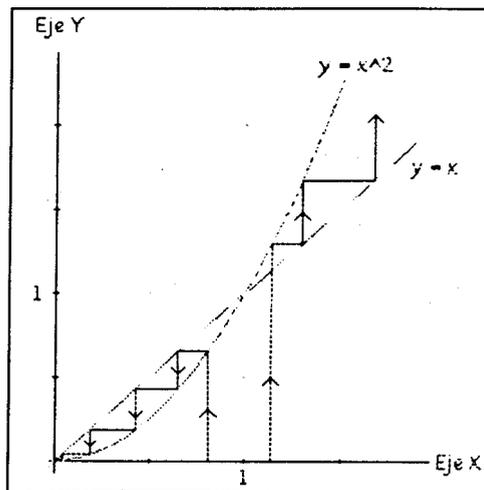


Fig. 9.8 Análisis Gráfico de la función  $f(x) = x^2$

Ejemplo:

Análisis gráfico de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  para dos puntos, uno en el intervalo  $(0,1)$  y el otro en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

Una vez más se puede observar, figura 9.9, que es relativamente fácil el “ver” que esta función tiene dos puntos fijos: el 0 y el 1, y que la órbita de cualquier punto, no cero, en el dominio de la función tiende a 1.

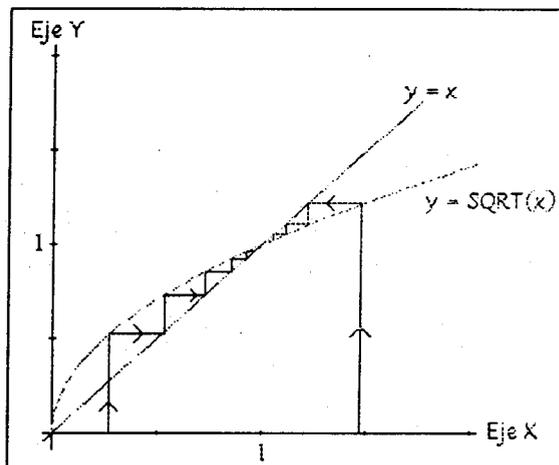


Fig. 9.9 Análisis Gráfico de la Función  $f(x) = \sqrt{x}$

**Definición.**

Supongamos que una función  $f(x)$  tiene un punto fijo  $p$ . El punto  $p$  es un punto atractor si todos los puntos “cercaños” a  $p$  tienen órbitas que conducen a  $p$ . Es decir, que un punto  $p$  es atractor si existe un intervalo que lo contenga tal que las órbitas de sus puntos tienden a  $p$ .

**Ejemplo:**

El punto fijo  $x = 0$  es un punto atractor para la función  $f(x) = x^2$  ya que todos los puntos del intervalo  $-1 < x < 1$  (sin incluir los puntos extremos) tienen órbitas que tienden a cero, como se muestra en la figura 9.10.

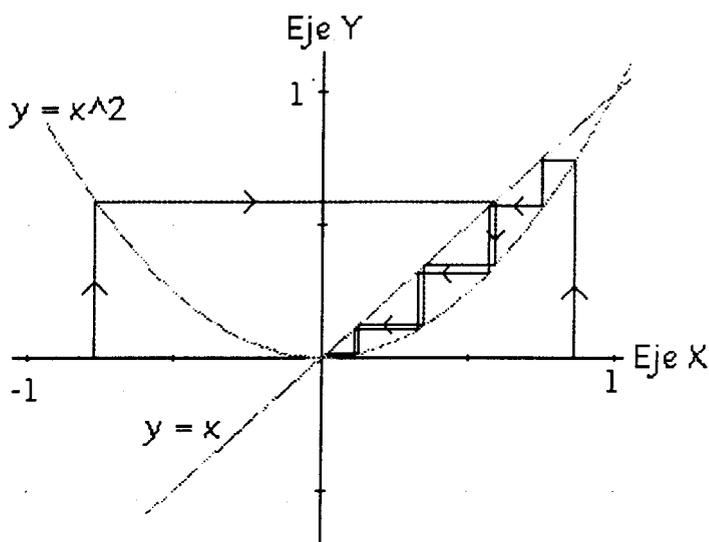


Fig. 9.10 Intervalo atractor del punto fijo 0 para la función  $f(x) = x^2$

El análisis gráfico de órbita ayuda a resolver el problema de localizar el intervalo  $a < x < b$  para el cual el punto  $p$  es atractor.

**Definición.**

Supóngase que una función  $f(x)$  tiene un punto fijo  $p$ . El punto  $p$  es un punto repulsor si todos los puntos cercaños a  $p$  tienen órbitas que se alejan de  $p$ .

Ejemplo:

El punto fijo  $x = 1$  es un punto repulsor para la función  $f(x) = x^2$  ya que todos los puntos en el intervalo  $1/2 < x < 3/2$  (sin incluir los puntos extremos ni el punto fijo 1) tienen órbitas que eventualmente salen del intervalo, como se puede ver en la figura 9.11.

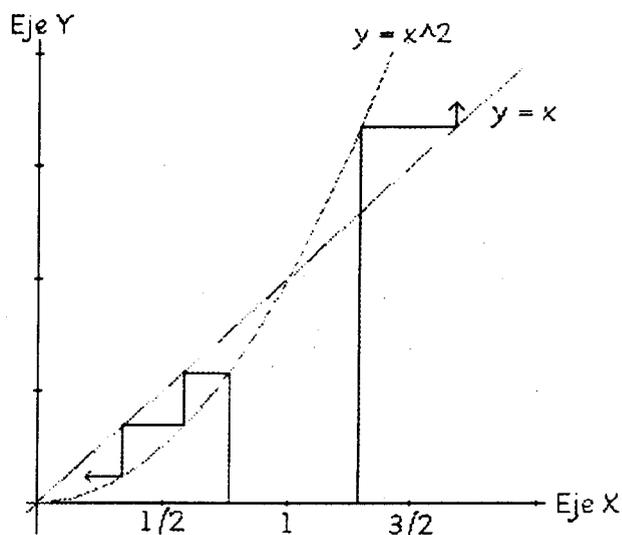


Fig. 9.11 Análisis Gráfico para el intervalo del punto repulsor 1.

Ejemplo:

Análisis gráfico de  $f(x) = x^2 + x - 4$ . Esta función tiene dos puntos fijos,  $x = 2$  y  $x = -2$ , ambos son repulsores ya que si se selecciona un punto inicial lo suficientemente cercano a cualquiera de ellos, la órbita eventualmente se aleja del punto.

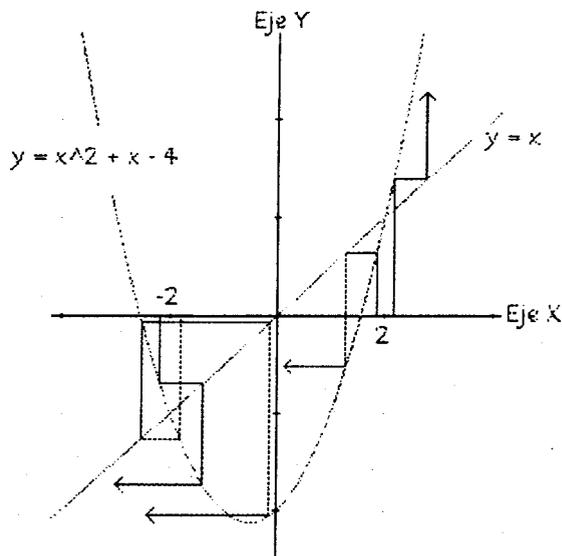
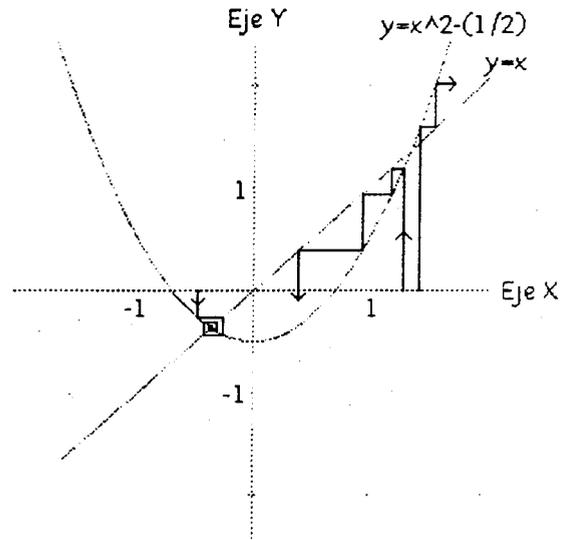


Fig. 9.12 Análisis Gráfico de la función  $f(x) = x^2 + x - 4$

Los puntos fijos atractores pueden ser “vistos” fácilmente en la computadora a comparación de los repulsores. Se puede ver que el comportamiento típico de las órbitas es que tienden al punto fijo atractor o a infinito. Si no existe un patrón después de miles de iteraciones, se dice que los resultados son caóticos.

Ejemplo:

Análisis gráfico de la función  $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ . Esta función tiene dos puntos fijos,  $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$  y  $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ , el primero es atractor ya que si se selecciona un punto inicial lo suficientemente cercano a éste, la órbita tiende al punto; y el segundo es repulsor ya que si se selecciona un punto inicial lo suficientemente cercano a éste, la órbita eventualmente se aleja del punto.



Definición.

Se dice que una órbita en un sistema dinámico es estable si tiene la propiedad de que, si el punto inicial es cambiado ligeramente, el comportamiento de la nueva órbita es semejante al comportamiento de la órbita original. Una órbita es inestable cuando órbitas de puntos cercanos presentan comportamientos muy diferentes al comportamiento de la órbita original.

La órbita de un punto atractor siempre es estable mientras que la de un punto repulsor nunca lo es. También es cierto que cualquier punto en el intervalo de atracción de un punto atractor o periódico es estable.

Las órbitas periódicas pueden ser atractoras o repulsoras, como los puntos fijos.

Una sucesión de iteraciones puede representar una gran variedad de situaciones reales tales como las amortizaciones. Una amortización es el proceso de pago de un préstamo a través de pagos iguales en determinado tiempo. En un préstamo amortizado, el dinero de cada pago consiste en un pago de interés y un pago a capital. Después de descontar los intereses, el resto del pago es abonado a capital.

# 10 Comparación entre la Geometría Euclídeana y la Geometría Fractal

A pesar de que los inicios de la Geometría Fractal se encuentran a finales de siglo XIX, los fractales son definitivamente una invención moderna y han sido reconocidos como útiles para los científicos naturales dentro de los últimos diez años.

Mientras que las formas estudiadas en la geometría euclídeana tienen uno, o cuando mucho algunos tamaños característicos o escalas de longitud tales como el radio de una esfera o el lado de un cubo; los fractales estudiados en la Geometría Fractal como la curva de Koch o una línea costera no tienen un tamaño característico.

La geometría euclídeana provee descripciones concisas y precisas de objetos hechos por el hombre, pero no es muy apropiada para describir formas naturales ya que nos lleva a descripciones imprecisas y pesadas. Es muy posible que esta limitación de nuestro lenguaje tradicional de formas sea en parte responsable de la gran diferencia cualitativa entre los objetos producidos en masa y las formas naturales. Los fractales, por otro lado, proveen una excelente descripción de muchas formas naturales y han dado un nuevo sabor al lenguaje figurativo computacional.

Finalmente, mientras que las formas euclídeanas son descritas usualmente por una fórmula algebraica simple (e.g.  $r^2 = x^2 + y^2$  define un círculo de radio  $r$ ), los fractales, en general, son el resultado de un proceso de construcción o de un algoritmo usualmente recursivo que le sienta a la perfección a las computadoras.

Podemos decir que la geometría es, a grandes rasgos, un lenguaje matemático para describir, relacionar y manipular formas y que las diferencias básicas entre ésta y la geometría fractal son las descritas en la figura 10.1.

<b>Geometría Euclídeana</b>	<b>Geometría Fractal</b>
* tradicional (más de 2000 años)	* moderna (~ 10 años)
* basada en un tamaño característico o escala	* sin tamaño o escala específica
* apropiada para objetos hechos por el hombre	* apropiada para formas naturales
* figuras descritas por fórmulas	* figuras descritas por algoritmos ( iterativo o recursivo)

Fig. 10.1 Diferencias básicas entre la Geometría Fractal y la Geometría Euclídeana.

El foro ideal para la geometría euclídeana está en la descripción de posiciones relativas y en cómo se mueven las cosas. Las elipses casi describen las trayectorias de los planetas alrededor del sol; y las líneas codifican el movimiento de las galaxias alejándose del centro del universo. Sin embargo, el mundo físico geométrico que realmente nos rodea, es muy distinto al de las líneas rectas, los sólidos de revolución, y demás, con los que se ha entrenado nuestro yo científico para modelar y entender el mundo físico (Barnsley, 1988).

La geometría tiene que ver con el hacer objetivas nuestras intuiciones espaciales, y la Geometría Fractal extiende este proceso. Es muy difícil al principio, y después se incrementa su facilidad para cuantificar y explotar las relaciones geométricas que se observan en el mundo físico (Barnsley, 1988).

# 11 Introducción a los Fractales Modernos

Un fractal es un objeto que cumple con ciertas características básicas como la de autosemejanza, la construcción por medio de un proceso iterativo, una estructura fina a cualquier escala y dimensión fraccionaria.

Otro tipo de fractales son los descubiertos por Gastón Julia en 1918, éstos se diferencian de los anteriores en que su construcción no es geométrica, sino que vienen de un proceso recursivo sobre una sencilla función matemática que involucra números complejos. Se puede decir que los conjuntos de Julia “viven” en el plano complejo. Su autosemejanza es de naturaleza diferente a la de los fractales de construcción geométrica tratados anteriormente, los cuales están compuestos de copias reducidas, pero semejantes, de sí mismos. Los conjuntos de Julia pueden ser “cubiertos” por copias de sí mismo, pero estas copias se obtienen mediante transformaciones algebraicas no lineales en lugar de geométricas; esto significa que no se preservan ángulos ni distancias. En la época en la que Julia desarrolló su trabajo no existía la tecnología suficiente que le permitiera “ver” aquellos conjuntos que ahora llamamos fractales, y a pesar de que Julia fue un matemático muy famoso en los años veinte, su trabajo fue esencialmente olvidado hasta que Benoit Mandelbrot lo trajo a la luz al final de los setentas a través de experimentos con las computadoras.

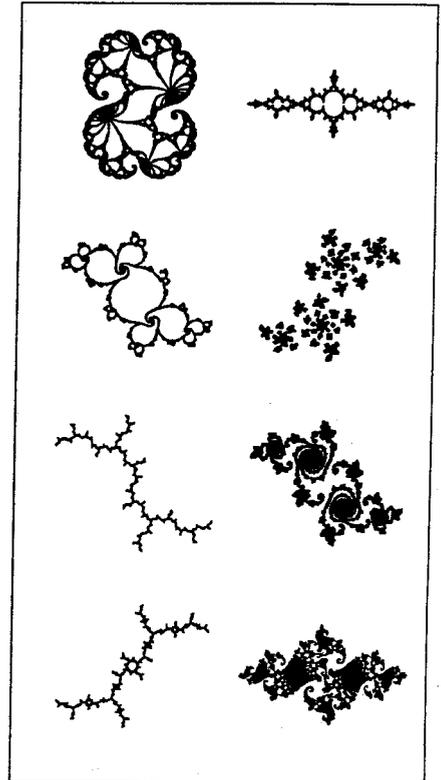


Fig. 11.1 Ejemplos de Conjuntos de Julia

El descubrimiento de curvas complejas que no podían tratarse con los métodos clásicos de la matemática de los siglos XIX y XX, provocó una crisis que obligó a los matemáticos a revisar ciertas definiciones como las de línea, curva, superficie y sólido, en

busca de la formulación de definiciones más rigurosas. Se buscó “unificar” estas nuevas definiciones bajo un marco común, que finalmente se encontró en el concepto de dimensión, y entonces se buscó una definición de dimensión que acomodara a estas curvas recién descubiertas.

Hausdorff publicó en 1919 una definición de dimensión no restringida a número enteros positivos, sino que permitía dimensiones racionales, por ejemplo, la curva “copo de nieve” de Koch tiene una dimensión Hausdorff de 1.262. Esta definición logró una mayor aceptación de aquellas curvas extrañas por parte de los matemáticos.

Todas estas nuevas ideas permanecieron dentro del mundo de los matemáticos puros hasta que en 1975 Mandelbrot comenzó a relacionarlas con objetos de la naturaleza. Él se dio cuenta de que las curvas-monstruo se acoplaban a la realidad mejor que las formas idealistas de la geometría clásica. Por ejemplo, al observar una sección de la costa de Australia obtenemos, en una primera aproximación, que mide una milla y se representaría por medio de una línea recta en un mapa, en una segunda aproximación vemos que tiene entradas y salidas y se representa entonces con una línea ondulada, y así con cada aproximación veríamos más y más complejidad, la cual trataríamos de representar con más y más precisión, hasta donde nos fuera posible, sin llegar nunca al valor definitivo de dicha longitud. Exactamente como ocurre con el cálculo del perímetro de la curva “copo de nieve” de Koch.

Mandelbrot usó el término “*fractal*” para referirse a objetos que muestran esta creciente complejidad cuando se observan más de cerca. Las curvas-monstruo y las líneas costeras son, entonces, ejemplos de fractales. Su libro “*The Fractal Geometry of Nature*” (La Geometría Fractal de la Naturaleza) publicado en 1982, fue escrito para demostrar la naturaleza fractal de la realidad: líneas costeras, montañas, nubes, . . . Mandelbrot definió un fractal como cualquier objeto cuya dimensión Hausdorff fuera estrictamente mayor que su dimensión euclídea: una curva tiene dimensión euclídea de 1, el fractal “copo de nieve” tiene dimensión Hausdorff de 1.262, y la curva llena espacio de Peano tiene dimensión Hausdorff de 2.

Mandelbrot utilizó computadoras para simular montañas, islas y líneas costeras por medio de fractales. También dedicó mucho tiempo a la exploración de fractales formados por la iteración de algunas funciones simples. En estas funciones trabajó con matemática compleja, lo que él hizo fue tomar un punto del plano complejo, evaluar la función con dicho punto y con el resultado obtenido volver a evaluar la misma función, repitiendo este proceso cientos de veces, para todos y cada uno de los puntos del plano complejo. Para la mayoría de estos puntos los valores iterados se hacían cada vez mayores; y al graficar los puntos que no se hacían cada vez mayores, descubrió que las imágenes resultantes eran fractales. Es evidente que llevar este proceso a mano tomaría años para experimentar con una sola función, y es por eso que la experiencia de Mandelbrot con las computadoras resultó crucial para sus descubrimientos.

El trabajo de Mandelbrot fue importante desde el punto de vista práctico y teórico: en su libro mostró como los científicos pueden usar fractales para describir la naturaleza en una forma más efectiva y su investigación con iteración de funciones indicó el camino para usar fractales en forma práctica. Por ejemplo, para simular el crecimiento de cristales en estudios de estructuras.

Los fractales forman parte de un campo muy nuevo llamado “teoría de los sistemas complejos”. Dicha teoría estudia la forma en que los fenómenos complejos pueden producirse de causas simples. Estudian sistemas que han resistido las teorías clásicas como la predicción del tiempo, la turbulencia, el crecimiento hormonal, etc. Las herramientas incluyen la teoría del caos, los fractales, autómatas celulares y redes neuronales. Los fractales también son usados fuera del mundo científico, existen técnicas computacionales que hacen posible simular objetos naturales, como paisajes montañosos o planetas, usando computadoras.

Ya que los algunos objetos naturales son simulados por medio de fractales, es razonable el preguntarse si la naturaleza puede ser codificada usando fractales, es decir, descrita por medio de algoritmos, lo cual haría posible la “re-creación” de la naturaleza utilizando un número finito de instrucciones.

# 12 Los Conjuntos de Julia

Ya que la construcción de los Conjuntos de Julia no es geométrica, sino algebraica, y provienen de un proceso recursivo sobre una función no-lineal que involucra números complejos, se dará un pequeño repaso antes de entrar de lleno a su construcción.

Dada la ecuación simple  $y = x^n$ . Si  $n$  tiene un valor diferente de uno, la ecuación es no-lineal. Geométricamente, si  $n = 1$  la gráfica es una línea recta, para otro valor de  $n$  la gráfica es una curva, de ahí la palabra no-lineal.

Un número real se puede representar geoméricamente por un punto en la recta real. De una forma similar, en un sentido geométrico, existe una recta en la cual se pueden representar los números imaginarios.

Definición Intuitiva.

Un número imaginario se define como la raíz cuadrada de un número real negativo. La palabra *imaginario* viene de imaginar que -1 o cualquier otro número real negativo tiene raíz cuadrada, lo cual es una suposición matemática muy útil que se desarrolló en el siglo XVII. La unidad de los números imaginarios es  $i = \sqrt{-1}$ .

Por definición,  $i^2 = -1$ .

Definición Intuitiva.

La intersección perpendicular de un eje real y un eje imaginario, crea un plano llamado el plano complejo.

Definición.

Un punto en el plano complejo es un número complejo,  $z$ , y sus coordenadas se escriben con la notación  $z = a + bi$  donde  $a$  es la coordenada para el eje real y  $b$  para el eje imaginario.

Ejemplo.

En la figura 12.1 se puede ver el plano complejo y la gráfica del número complejo  $z = -3 + 2i$ .

Es importante notar que en el plano complejo no se usan pares ordenados para identificar un punto en el plano, sino la notación especial que se definió anteriormente.

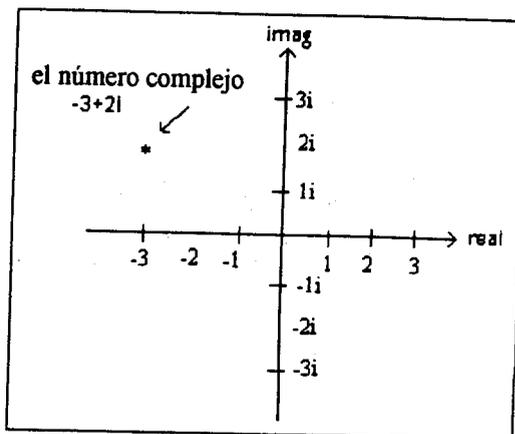


Fig. 12.1 Representación gráfica de un número complejo

Una transformación de un número complejo  $z$  consiste en aplicarle ciertas operaciones algebraicas. En el corazón mismo de la Geometría Fractal no-lineal, se usa una transformación simple de  $z$  la cual consiste en elevarlo al cuadrado y sumarle un valor constante:  $f(z) = z^2 + c$ . Donde la constante  $c$  es un punto fijo en el plano complejo y que, por lo tanto, consiste de una parte real y una parte imaginaria.

Ejemplo:

Dados los números complejos  $z = 2 - 3i$ ,  $c = 1 + 5i$

y la función  $f(z) = z^2 + c$ , se tiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= (2 - 3i)^2 + (1 + 5i) \\ &= (2 - 3i)(2 - 3i) + (1 + 5i) \\ &= (2^2 - 2(2)(3)i + 3^2i^2) + (1 + 5i) \\ &= (4 + 9i^2 + 1) + (-12 + 5i) \\ &= (4 - 9 + 1) + (-12 + 5i) \\ &= -4 + -7i \end{aligned}$$

Generalizando esta transformación por medio de variables se tiene:

Dado el número complejo  $c = a + bi$ , considere la función definida por  $f(z) = z^2 + c$  donde  $z = x + yi$  recorre los complejos. Se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + yi)^2 + (a + bi) \\ &= (x + yi)(x + yi) + (a + bi) \\ &= (x^2 + 2xyi + y^2i^2) + (a + bi) \\ &= (x^2 + y^2i^2 + a) + (2xy + b)i \\ &= (x^2 - y^2 + a) + (2xy + b)i \end{aligned}$$

donde  $x^2 - y^2 + a$  es la parte real y  $2xy + b$  la parte imaginaria.

Definición.

Otro concepto importante es el de valor absoluto de  $z$ , el cual es un número real denotado por  $|z|$  y representa la distancia del origen, o centro, del plano complejo al número  $z$ .

Ejemplo.

La expresión  $|z| = 1$  representa todos los puntos sobre el círculo de radio 1 con centro en el origen. De hecho, esta es una definición de dicho círculo.

Esto divide al plano complejo en tres regiones: la región exterior al círculo, el círculo mismo y la región interior al círculo.

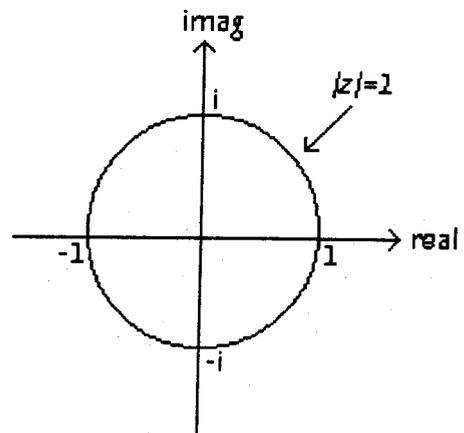


Fig. 12.2 Gráfica en el plano complejo de  $|z| = 1$ .

Se usará este mismo ejemplo para introducir las siguientes definiciones.

En el plano complejo, la función  $f(z) = z^2 + c$  tiene un comportamiento característico bajo iteraciones. Para el caso trivial,  $c = 0$ , se observan tres casos:

- cuando el punto inicial de la iteración está dentro del círculo  $|z| = 1$ , el punto atractor de la órbita es cero pues las iteraciones convergen al origen,
- cuando el punto inicial de la iteración está fuera del círculo, se dice que el punto atractor es el infinito ya que las iteraciones llevan a puntos cada vez más lejos del círculo,
- cuando está sobre el círculo, las iteraciones llevan de un lugar a otro en el círculo y es inestable para el más pequeño cambio de  $|z| = 1$ . Es decir, justo fuera del círculo y justo dentro del círculo.

La figura que resulta después de un cierto número de iteraciones se conoce como la figura atractor de dicha iteración.

El punto inicial cuyas iteraciones tiendan a infinito se llamará punto escape (en el caso del círculo, son aquellos que están fuera del mismo) y si las iteraciones no tienden a infinito ni presentan una órbita con un patrón cíclico se llamará punto prisionero (en el caso del círculo, son aquellos que están dentro del mismo). Algunos puntos iniciales no escapan ni permanecerán prisioneros, sino tendrán una órbita con un patrón cíclico (en el caso del círculo, son aquellos que están sobre el mismo).

Todos los puntos iniciales para una función en el plano complejo están divididos en estos tres conjuntos:

- aquellos que escapan llamado conjunto escape (fuera del círculo),
- aquellos que no escapan llamado conjunto prisionero (dentro del círculo)
- aquellos que forman la frontera entre los dos conjuntos anteriores llamado conjunto de Julia (sobre el círculo).

El conjunto de Julia para  $f(z) = z^2$  es el círculo y no es un fractal ya que no es autosemejante

Este análisis es mucho más interesante si se suma una constante compleja  $c \neq 0$  para tener la ecuación mencionada anteriormente,  $f(z) = z^2 + c$ , entonces es difícil encontrar suficientes adjetivos para describir la complejidad geométrica y la belleza del resultado para algunos valores de  $c$ .

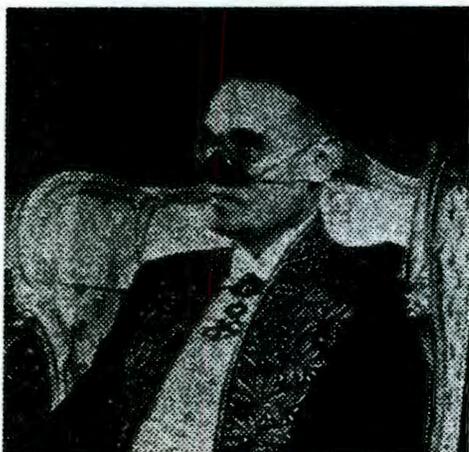


Fig. 12.3 Gastón Julia

La forma de la figura, la cual es la frontera entre puntos de atracción, ya no es un círculo (ya que  $c \neq 0$ ) sino un fractal. Y la forma de este fractal depende mucho del valor de la variable  $c$ . Estas fronteras son conocidas como Los Conjuntos de Julia en honor a Gastón Julia, matemático francés quien, junto con su contemporáneo Pierre Fatou, fue el primero en estudiar las iteraciones en el plano complejo por tiempos de la Primera Guerra Mundial. Los trabajos de Julia y Fatou son extraordinarios ya que, en ese entonces, no se tenían computadoras para obtener imágenes, y sólo se basaban en su imaginación y algunos dibujos hechos a mano.

Los Conjuntos de Julia, en el plano complejo, están todos dentro del círculo  $|z| = 2$  y son simétricos con respecto al origen. Se pueden construir tomando cada punto  $z$  en el plano complejo, iterándolo con la función  $f(z) = z^2 + c$ , y dibujando de negro aquellos puntos que, comenzando en ese valor de  $z$ , sus iteraciones no son atraídas al infinito después de cierto número de iteraciones  $n$ . Aquí es donde se puede ver la obvia necesidad de la tecnología, computadora o calculadora, para realizar las operaciones necesarias en cada iteración y para graficar los resultados en el plano complejo. Si se forman regiones negras sólidas, los conjuntos de Julia son sólo las fronteras de dichas regiones.

La forma en la que se “grafica” un conjunto de Julia es con el uso de una cuadrícula (el tamaño de la cuadrícula depende de la resolución que se desee) en la región cuadrada acotada por  $[-2, +2]$  en el eje real y  $[-2i, 2i]$  en el eje imaginario. Se toma cada cuadro como

un número complejo  $z$  y se itera un número grande de veces - generalmente a más iteraciones, mayor resolución en el resultado. Si el valor absoluto de  $z$ , la distancia del punto  $z$  al origen, se hace mayor que 2 en el proceso iterativo, entonces el valor inicial de dicho proceso iterativo,  $z_1$ , va a ser atraído al infinito, y el proceso iterativo debe detenerse. Si esto no sucede antes de que el número total de iteraciones sea alcanzado, entonces se asume que el punto está sobre o dentro del conjunto y es coloreado de, por ejemplo negro, de otra forma es coloreado de blanco.

Un perfeccionamiento de este proceso es el llevar la cuenta del número de iteraciones que le toma al valor absoluto de cada punto superar el valor de 2 y usar esto para crear un mapa de contorno cuyas "elevaciones" sean el número de iteraciones. Un mayor perfeccionamiento es el colorear este mapa de acuerdo a la elevación. Esto es especialmente útil en mapas para conjuntos que son "polvos" porque tienden a ser muy difusos de "graficar" de otra forma.

Algunos ejemplos de Conjuntos de Julia para diferentes valores de  $c$  son:

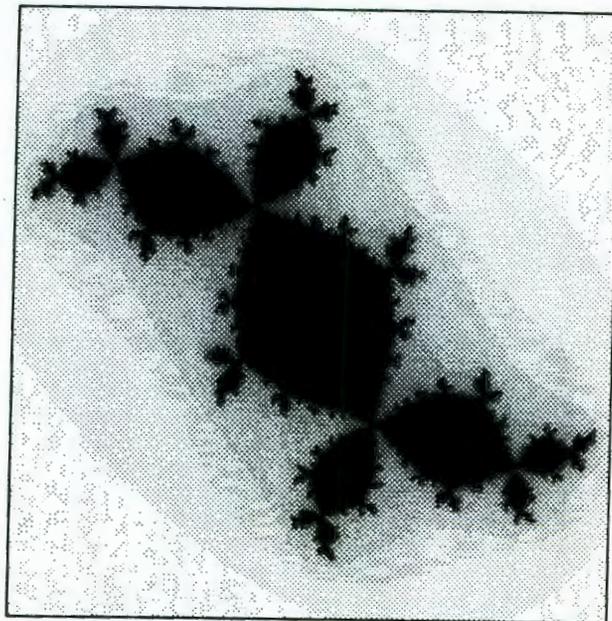


Fig. 12.4 Conjunto de Julia para  $c = -0.122+0.745i$   
"Conejo de Douady"

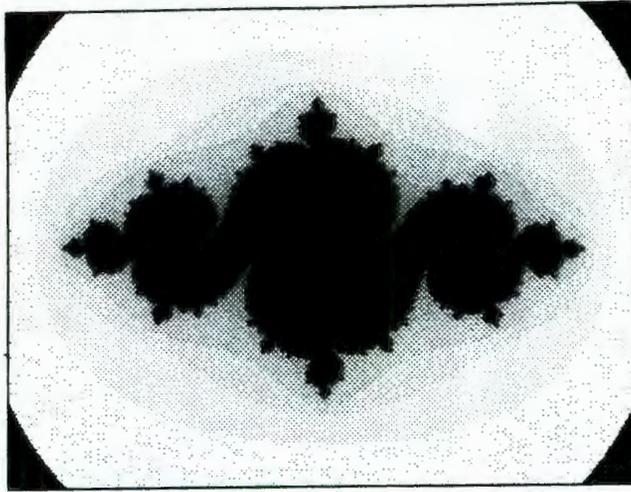


Fig. 12.5 Conjunto de Julia para  $c = -0.745 + 0.049i$ .

El número y lugar de los atractores depende del valor de  $c$ , excepto en el caso en el que el atractor es el infinito. En algunos casos no hay atractores excepto el infinito y tampoco hay “interior” para el conjunto (hay un “interior” para el círculo del caso  $c = 0$ ). Entonces se dice que el conjunto es un “Polvo Fatou”, figura 12.6, un polvo fractal como el descrito por el Conjunto de Cantor, pero con un arreglo más interesante.

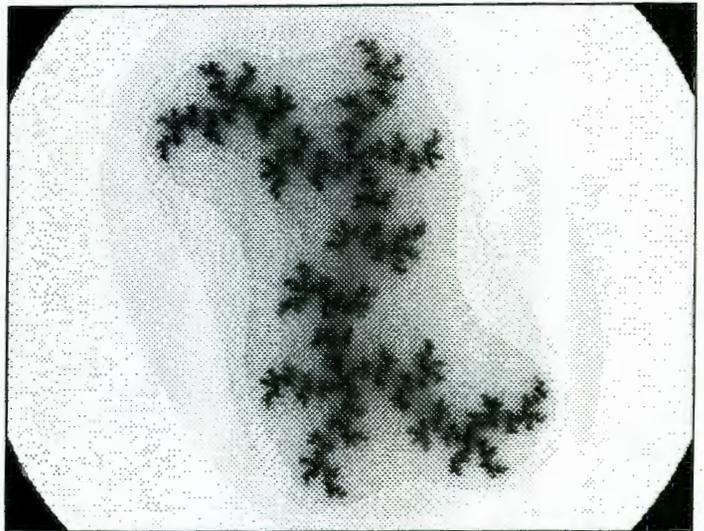


Fig. 12.6 Conjunto de Julia para  $c = 0.354 + 0.536i$   
“Polvo Fatou”

Si el punto inicial para la iteración es uno de los puntos del conjunto, la iteración brincará localmente de punto en punto dentro del conjunto. Pero si no comienza en un punto del conjunto, tarde o temprano se disparará a infinito.

Moviendo el punto inicial a lo largo de valores continuos de  $c$ , habrá un lugar donde el “polvo” se convierta en “filamento”, y después comenzará a tener un “interior”. Cuando lo tenga, habrá otros puntos de atracción aparte del infinito. La figura 12.7 muestra un fractal justo cuando se pasa de la etapa del filamento y se comienza a tener “interior”.

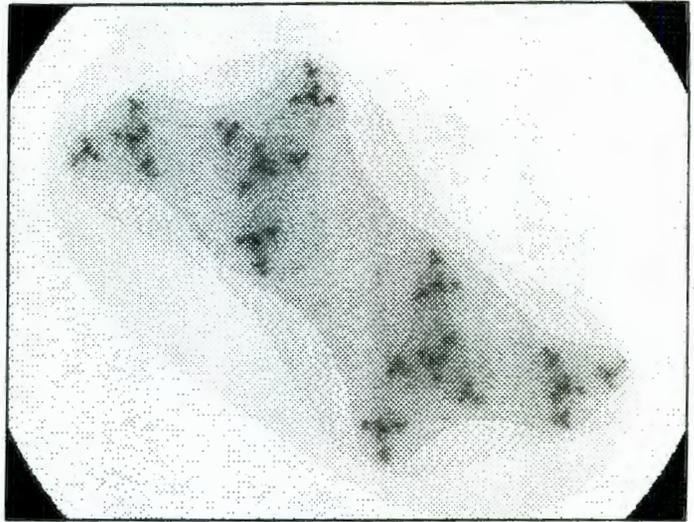


Fig. 12.7 Conjunto de Julia para  $c = -0.420 + 0.986i$ .

Por lo tanto los conjuntos de Julia pueden ser divididos en dos grupos: aquellos que tienen interior (conexos o conectados) y aquellos que no lo tienen (disconexos o desconectados). Se muestran dos ejemplos en la figura 12.8.

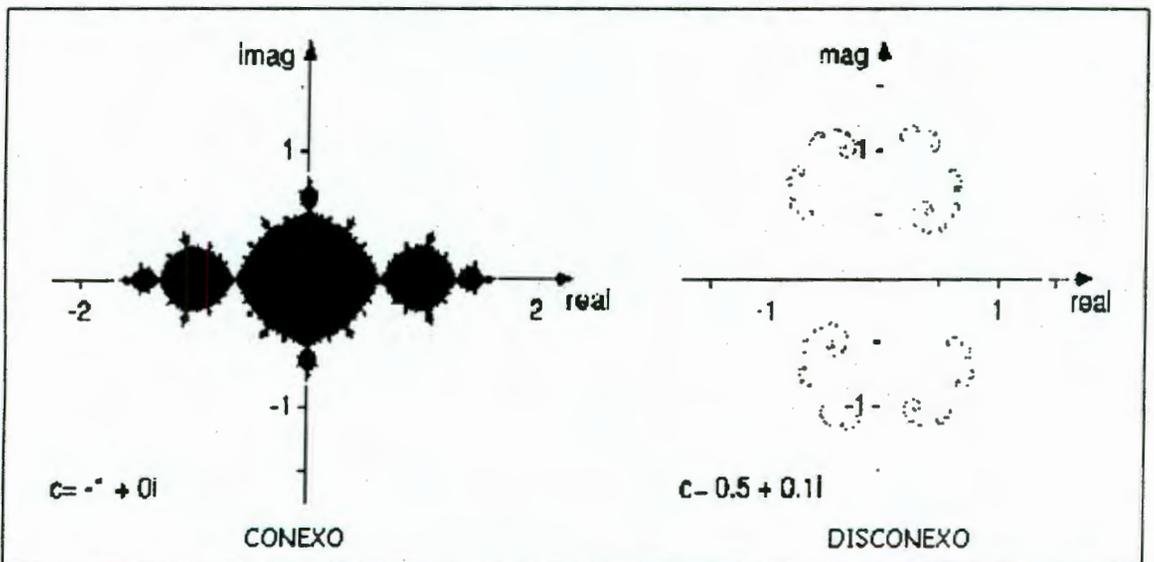


Fig. 12.8 Conjuntos de Julia: conexo y desconexo

Una prueba para determinar si un conjunto prisionero es conexo es:

Dado un número complejo  $c$ .

Si el punto inicial  $z_0 = 0 + 0i$  escapa a infinito bajo iteración de la función  $f(z) = z^2 + c$ , entonces el conjunto prisionero de esa función es desconexo ya que todos los Conjuntos de Julia son simétricos con respecto al origen.

Si  $z_0 = 0 + 0i$  no escapa a infinito, entonces el conjunto prisionero es conexo.

Ejemplo.

Dado el conjunto de Julia para  $c = -0.122 + 0.745i$  (Conejo de Douady), se determinará si es conexo o no.

De acuerdo a la prueba antes mencionada se itera la función

$$f(z) = z^2 + (-0.122 + 0.745i),$$

con el punto inicial  $z_0 = 0 + 0i$ :

$$f(z_0) = (0 + 0i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.122 + 0.745i = z_1$$

$$f(z_1) = (-0.122 + 0.745i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.662 + 0.563i = z_2$$

$$f(z_2) = (-0.662 + 0.563i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.001 - 0.001i = z_3$$

$$f(z_3) = (-0.001 - 0.001i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.122 + 0.745i = z_4$$

$$f(z_4) = (-0.122 + 0.745i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.662 + 0.563i = z_5$$

$$f(z_5) = (-0.662 + 0.563i)^2 + (-0.122 + 0.745i) = -0.001 - 0.001i = z_6$$

y así sucesivamente.

Se observa que el valor de  $z_4$  es igual al valor de  $z_1$ , y de ahí en adelante los valores de las siguientes iteraciones entran en un ciclo, por lo que se afirma que el conjunto prisionero es conexo.

Ejemplo.

Dado el conjunto de Julia para  $c = 0.354 + 0.536i$  (Polvo Fatou), se determinará si es conexo o no.

De acuerdo a la prueba antes mencionada se itera la función

$$f(z) = z^2 + (0.354 + 0.536i),$$

con el punto inicial  $z_0 = 0 + 0i$ :

$$f(z_0) = 0.354 + 0.536i = z_1$$

$$f(z_1) = 0.192 + 0.915i = z_2$$

$$f(z_2) = -0.447 + 0.888i = z_3$$

$$f(z_3) = -0.234 - 0.258i = z_4$$

$$f(z_4) = 0.342 + 0.657i = z_5$$

$$f(z_5) = 0.040 + 0.985i = z_6$$

$$f(z_6) = -0.615 + 0.615i = z_7$$

$$f(z_7) = 0.355 - 0.220i = z_8$$

$$f(z_8) = -0.431 + 0.380i = z_9$$

$$f(z_9) = 0.396 + 0.864i = z_{10}$$

$$f(z_{10}) = -0.235 + 1.219i = z_{11}$$

$$f(z_{11}) = -1.078 - 0.038i = z_{12}$$

$$f(z_{12}) = 1.514 + 0.617i = z_{13}$$

$$f(z_{13}) = 2.266 + 2.404i = z_{14}$$

$$f(z_{14}) = -0.290 + 11.433i = z_{15}$$

$$f(z_{15}) = -130.284 - 6.095i = z_{16}$$

$$f(z_{16}) = 16937.231 + 1588.808i = z_{17}$$

$$f(z_{17}) = 284345479.731$$

$$+ 53820029.572i = z_{18}$$

...

Se observa que conforme el número de iteraciones crece el valor de la función crece, por lo que el conjunto prisionero no es conexo.

Estas iteraciones pueden realizarse fácilmente en una hoja electrónica de datos como se muestra en la figura 12.9, en donde se observa el valor de la constante compleja  $c$  y los valores iniciales y finales de cada iteración.

	c =		i	
	0.354	0.536	Parte Real	Parte Imag.
z1	0.000	0.000	0.354	0.536
z2	0.354	0.536	0.192	0.915
z3	0.192	0.915	-0.447	0.888
z4	-0.447	0.888	-0.234	-0.258
z5	-0.234	-0.258	0.342	0.657
z6	0.342	0.657	0.040	0.985
z7	0.040	0.985	-0.615	0.615
z8	-0.615	0.615	0.355	-0.220
z9	0.355	-0.220	0.431	0.380
z10	0.431	0.380	0.396	0.864
z11	0.396	0.864	-0.235	1.219
z12	-0.235	1.219	-1.078	-0.038
z13	-1.078	-0.038	1.514	0.617
z14	1.514	0.617	2.266	2.404
z15	2.266	2.404	-0.290	11.433
z16	-0.290	11.433	-130.284	-6.095
z17	-130.284	-6.095	16937.231	1588.808
z18	16937.231	1588.808	284345479.731	53820029.572
z19	#####	#####	#####	#####
z20	#####	#####	#####	#####

Fig. 12.9 Primeras 20 iteraciones de la función  $f(z) = z^2 + (0.354 + 0.536i)$  con el punto inicial  $z_0 = 0 + 0i$

# 13 El Conjunto de Mandelbrot

Gastón Julia (1893-1978) fue un matemático famoso a nivel mundial en los años veintes, pero su trabajo quedó en el olvido hasta que Benoit Mandelbrot lo trajo a la luz al final de los años setentas. Fue su tío, el matemático Szolem Mandelbrojt, profesor en el Colegio de París, quien lo introdujo al trabajo de Julia. Los estudios de Mandelbrot en los trabajos de Julia, su interés en el estudio de ciertos fenómenos físicos y sus conocimientos computacionales lo llevaron a descubrir su famoso conjunto y a la creación de la Geometría Fractal.

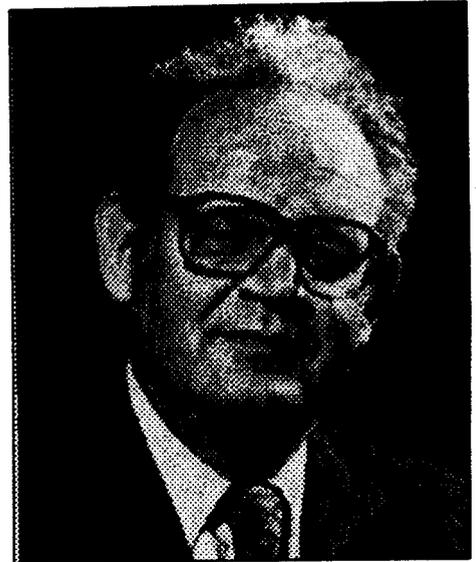


Fig. 13.1 Benoit Mandelbrot

Mandelbrot comenzó a trabajar en la investigación de los Conjuntos de Julia por medio de graficadores computacionales. Una de las preguntas que se hizo fue: ¿para qué valores de  $c$  los conjuntos de Julia tienen “substancia conectada”? La respuesta que encontró fue un principio increíblemente organizado. El Conjunto de Mandelbrot, figura 13.2, es la parte del plano

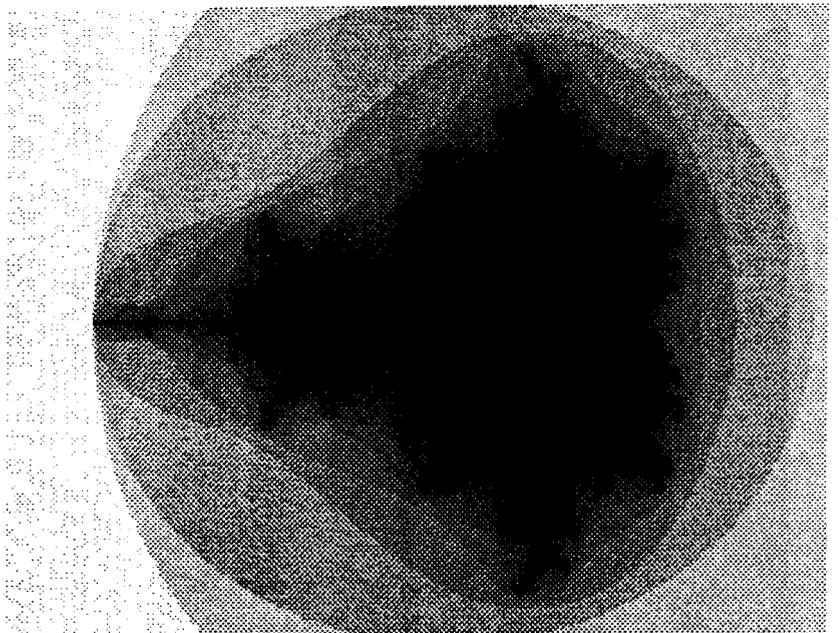


Fig. 13.2 El Conjunto de Mandelbrot

complejo donde los valores de  $c$  tienen conjuntos de Julia que nos son “polvos”. Todas las regiones contenidas en el Conjunto de Mandelbrot están conectadas; en algunos lugares,

estas conexiones son tal finas que tienen el ancho de un punto.

El Conjunto de Mandelbrot ha sido mencionado como uno de los objetos más bellos y complejos en toda la matemática. Es generado por medio de la iteración de la función  $f(z) = z^2 + c$  con  $z$  y  $c$  representando números complejos y, como los conjuntos de Julia, está contenido en la región formada por los intervalos  $[-2, 2]$  y  $[-2i, 2i]$  en el plano complejo.

A diferencia de los Conjuntos de Julia, el Conjunto de Mandelbrot se define al fijar el número complejo inicial,  $z_0 = 0 + 0i$ , y permitiendo a  $c$  que recorra los complejos. Si las iteraciones de la función  $f(z) = z^2 + c$  no tienden a infinito para algún valor específico de  $c$ , entonces éste punto  $c$  se considera dentro del conjunto de Mandelbrot. En otras palabras, si el conjunto de Julia para la función  $f(z) = z^2 + c_1$  es conexo, entonces el punto  $c_1$  pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Si se escoge un punto  $c$  que esté contenido en el conjunto de Mandelbrot para llevar a cabo las iteraciones, entonces sucederá una de las tres siguientes opciones:

- la órbita puede converger a un punto, por lo que se dice que el punto  $c$  es convergente,
- la órbita puede ser cíclica, por lo que se dice que el punto  $c$  es cíclico,
- la órbita puede oscilar en una región aparentemente aleatoria, por lo que se dice que el punto es oscilatorio.

Todos estos puntos, convergentes, cíclicos y oscilatorios, son puntos prisioneros ya que están contenidos en el conjunto de Mandelbrot.

La órbita de cualquier punto que esté fuera del conjunto de Mandelbrot tiende a infinito. Puede ser que al principio parezca punto prisionero y de repente la órbita comience a crecer rápidamente, o que desde un principio crezca muy rápido. Las bandas alrededor del Conjunto de Mandelbrot indican que tan rápido creció la órbita del punto.

La figura 13.3 muestra el conjunto de Mandelbrot y algunos ejemplos de conjuntos de Julia relacionados a algunos de los puntos interiores y exteriores del conjunto. Es importante notar que todos los conjuntos de Julia relacionados con los puntos interiores del conjunto de Mandelbrot son conjuntos conexos (conectados) ya que las iteraciones bajo éstos números no tienden a infinito, y los relacionados con los puntos exteriores son conjuntos disconexos (desconectados) ya que las iteraciones bajo éstos números tienden a infinito.

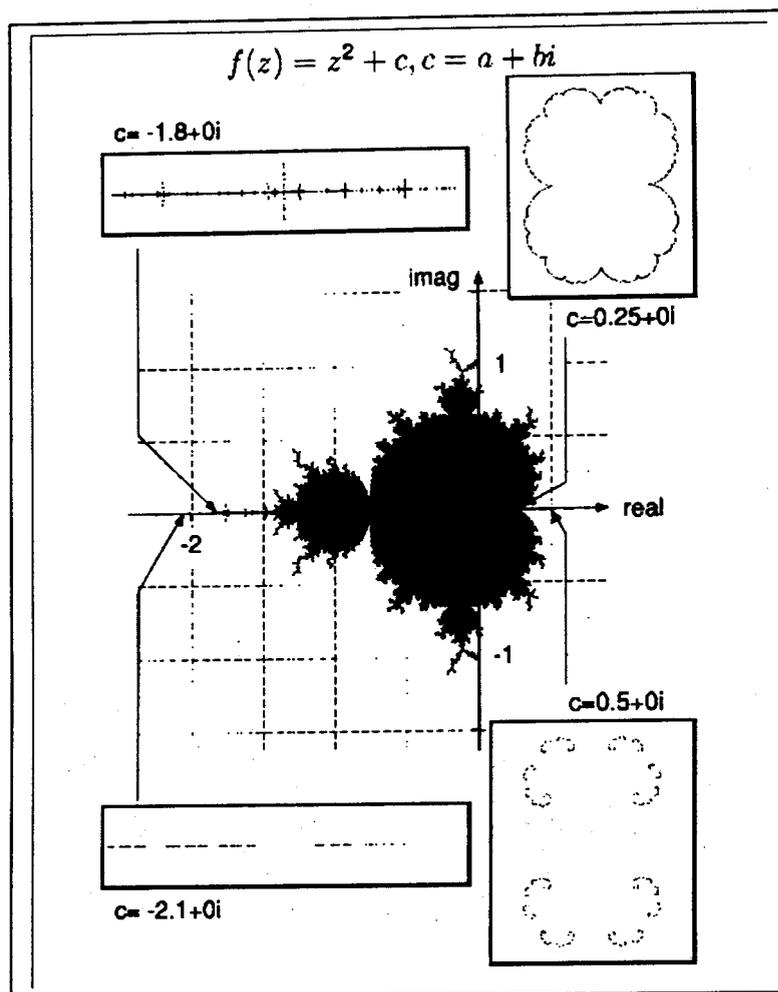


Fig. 13.3 Ejemplos de relación entre el Conjunto de Mandelbrot y algunos Conjuntos de Julia

El conjunto de Mandelbrot no es estrictamente autosemejante, pero se puede encontrar cierta autosemejanza en pequeña escala. Existen copias miniatura del conjunto en el espacio que rodea al cuerpo principal, conectado por filamentos muy delgados. Este conjunto es generalmente más interesante cerca de su frontera, y se encuentra cierta semejanza entre el

conjunto de Mandelbrot (después de varios acercamientos) y los conjuntos de Julia cuyas constantes  $c$  están en esa región.

Una prueba para determinar si un punto  $c_1$  pertenece o no al Conjunto de Mandelbrot es:

Un punto  $c_1$  pertenece al conjunto de Mandelbrot si el conjunto de Julia asociado a tal punto es conexo. Esto es, si las iteraciones de la función  $f(z) = z^2 + c_1$  no escapan a infinito, entonces el punto  $c_1$  está en el conjunto de Mandelbrot.

Recordando los dos últimos ejemplos de la sección anterior, se ve que el Conjunto de Julia llamado “Conejo de Douady” sí es conexo por lo que el punto  $c = -0.122 + 0.745i$  sí pertenece al Conjunto de Mandelbrot y que el Conjunto de Julia llamado “Polvo Fatou” no es conexo por lo que el punto  $c = 0.354 + 0.536i$  no pertenece al Conjunto de Mandelbrot.

# 14 Fractales como Solución de Funciones Polinomiales

Existen muchos problemas tanto en las matemáticas y en las ciencias en general, que involucran la determinación de las raíces de una ecuación de la forma  $f(x) = 0$ , donde  $f$  es una función diferenciable.

Todos hemos aplicado la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y  $a \neq 0$ . Se sabe que las fórmulas para resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado son muy complicadas y que no existen fórmulas para resolver ecuaciones de grado 5 o mayor. Sin embargo, existen métodos que permiten aproximar las raíces de éstas ecuaciones.

Nota: Fueron Niels Henrik Abel (1824) y especialmente Évariste Galois (1831) quienes al introducir la idea matemática de Grupo, demostraron, en forma independiente, que una ecuación polinomial de grado mayor a cuatro no tiene solución algebraica, esto significa que sus raíces no pueden ser expresadas en términos de un número infinito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces que involucren a los coeficientes del polinomio.

Uno de los más antiguos algoritmos para encontrar las raíces de una ecuación es el llamado "Método de Newton Raphson" desarrollado por Sir Isaac Newton y Joseph Raphson. El método es el siguiente:

1. Supóngase que se busca una raíz de una función analítica de la forma  $f(z) = 0$  donde  $z$  puede ser un número complejo de la forma  $z = a + bi$  donde  $a$  y  $b$  son números reales.
2. Se da una primera aproximación a la raíz:  $z_1$ . Esta primera aproximación se obtiene aproximando, adivinando o a partir de la gráfica de  $f$ .
3. Después se evalúa la expresión

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

donde  $f'$  es la derivada de  $f$ .

Pero, ¿de dónde viene dicha expresión? Si se observa, en la figura 14.1, la tangente  $L$  a la curva  $y = f(z)$  en el punto  $(z_1, f(z_1))$ , y la abscisa al origen de  $L$ , que se representa con  $z_2$ , vemos que si  $z_1$  es una aproximación a la raíz  $r$ ,  $z_2$  es una mejor aproximación puesto que su posición sobre el eje X está más cerca de la raíz  $r$ .

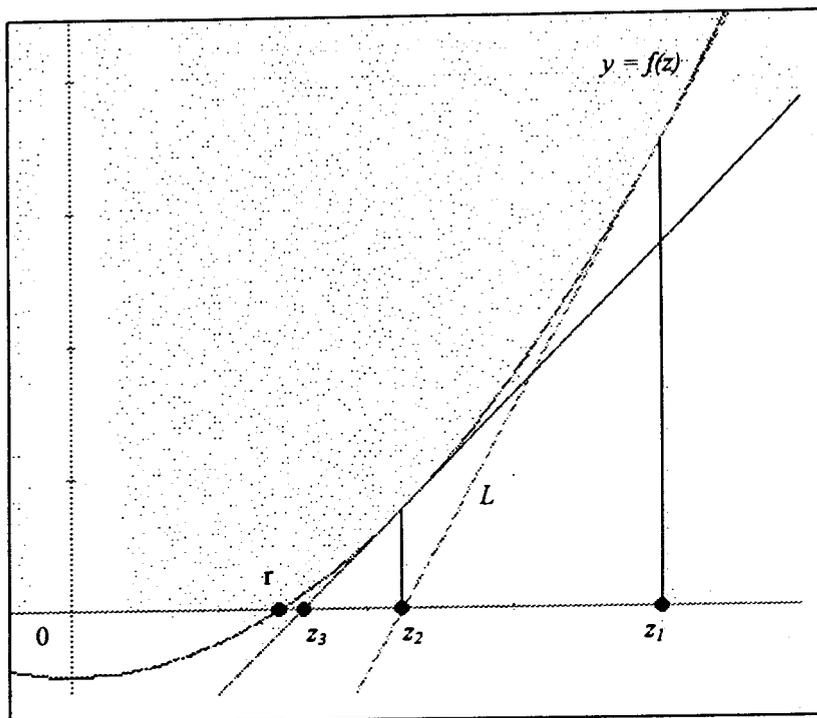


Fig. 14.1 Representación gráfica del método de Newton-Raphson

Para deducir una fórmula que exprese  $z_2$  en términos de  $z_1$ , se usará el hecho de que la pendiente de la recta  $L$  es  $f'(z_1)$ , de tal forma que su ecuación de dicha recta es

$$y - f(z_1) = f'(z_1)(z - z_1).$$

Ya que la abscisa al origen de  $L$  es  $z_2$ , igualamos  $y$  con 0 y se obtiene:

$$0 - f(z_1) = f'(z_1)(z_2 - z_1).$$

Si  $f'(z_1) \neq 0$ , entonces se puede despejar  $z_2$  de esta ecuación:

$$z_2 = z_1 - \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}$$

Si  $f'(z_1) = 0$ , entonces la recta  $L$  no cruzará el eje  $X$ , por lo que no habrá una siguiente aproximación.

Una vez encontrado el valor de  $z_2$  se repite este proceso, reemplazando  $z_1$  con  $z_2$  y empleando la tangente en  $(z_2, f(z_2))$ , para encontrar una tercera aproximación:

$$z_3 = z_2 - \frac{f(z_2)}{f'(z_2)}$$

En general, si la  $n$ -ésima aproximación es  $x_n$  y si  $f'(x_n) \neq 0$ , la siguiente aproximación será:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

4. Finalmente se repite este último paso un cierto número de veces, dependiendo de la precisión que se desee, ya que cada nuevo valor de  $z$  será una mejor aproximación de la raíz de la ecuación.

Si las aproximaciones se acercan más y más a  $r$  cuando el número de aproximaciones crece, se dice que la sucesión converge a  $r$  y se representa de la forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

Algunas veces sucede que la sucesión no converge, es decir, que cada aproximación se aleje del valor de  $r$ , entonces es muy posible que  $f'(z_1)$  se halle muy cerca de 0 o que una aproximación caiga fuera del dominio de  $f$ , como sucede en el caso de las ecuaciones:

$$z^3 - 3z + 6 = 0 \quad \text{si} \quad z_1 = 1,$$
$$z^3 - z = 0 \quad \text{si} \quad z_1 = 1, \text{ si } z_1 = 0.6, \text{ y si } z_1 = 0.57,$$

Este proceso iterativo es muy similar al que hemos usado en los capítulos anteriores para construir algunos fractales como los Conjuntos de Julia y el Conjunto de Mandelbrot.

Este método se ejemplifica en la búsqueda de una aproximación a una raíz de la ecuación polinomial  $z^2 - 2 = 0$ :

1. Ya que  $f(z) = z^2 - 2$ , entonces se tiene que la fórmula de iteración es:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 2}{2z_n}$$

2. Ahora se escoge una primera aproximación para  $z_0$ , por ejemplo  $z_0 = 10$ . Aunque esta selección es totalmente arbitraria, no es posible escoger como valor inicial el 0 ya que el denominador sería 0, lo cual haría que el término completo fuera infinito.

3. Una vez escogida la primera aproximación, se calcula la segunda:

$$z_1 = 10 - \frac{10^2 - 2}{2(10)} \approx 5.1000$$

4. Aplicando algunas veces más esta fórmula, se ve que se está aproximando a un valor en particular:

$$z_0 = 10.0000$$

$$z_1 \approx 5.1000$$

$$z_2 \approx 2.7461$$

$$z_3 \approx 1.7372$$

$$z_4 \approx 1.4442$$

$$z_5 \approx 1.4145$$

$$z_6 \approx 1.4142$$

Se observa que  $z_n$  tiende a  $\sqrt{2}$  conforme el número de aproximaciones, o iteraciones, crece.

No todos los puntos iniciales eventualmente convergen a la raíz  $\sqrt{2}$ , ya que si el punto inicial es  $z_0 = -10$  entonces las aproximaciones convergirán a la raíz  $-\sqrt{2}$ . Dependiendo del punto inicial, y en este ejemplo en particular, las aproximaciones siempre convergirán a  $\sqrt{2}$  o a  $-\sqrt{2}$ , excepto cuando el punto inicial este sobre el eje imaginario. Cada raíz tiene su "región de atracción", es decir, que existe un conjunto de puntos que converge a dicha raíz a través de las iteraciones del método.

Si se trabaja en el plano complejo, donde cada punto puede ser representado por un número complejo de la forma  $a + bi$ . Se puede asignar un color o un tono de gris a cada uno de éstos puntos, dependiendo de la raíz a la cual converge después de un cierto número de iteraciones (en el programa usado para generar las figuras de esta sección y de la portada del Manual se designaron 50 iteraciones). De esta forma se obtiene un “mapa” de las “regiones” del plano que finalmente convergirán a la raíz correspondiente y dicho “mapa”, siempre que el grado del polinomio sea mayor que dos, es un fractal.

En la figura 14.1 se muestra el mapa de regiones que corresponde a la ecuación polinomial  $z^2 - 1 = 0$  y representa, como se mencionó anteriormente, las “regiones” del plano complejo que convergirán a una raíz correspondiente. En este caso hay dos raíces 1 y -1, las cuales se localizan sobre el eje real  $X$ , por lo que el plano ha quedado dividido en dos regiones, una que representa a aquellos números complejos que al ser iterados en el Método de Newton-Raphson convergirán a la raíz 1 (lado derecho del plano) y otra que representa a aquellos números complejos que convergirán a la raíz -1 (lado izquierdo del plano).

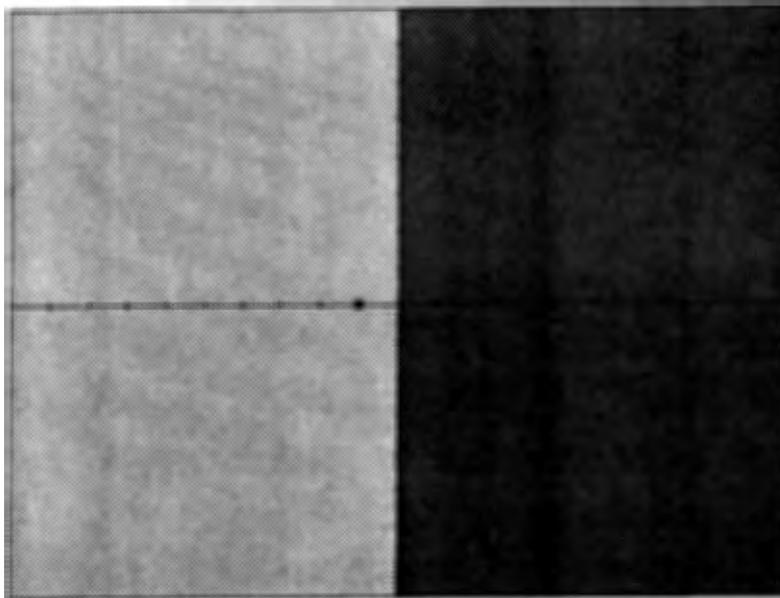


Fig. 14.2 Representación Gráfica del Método Newton-Raphson para la ecuación  $f(z) = z^2 - 1$

Sir Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglés, publicó en 1879 una descripción del comportamiento global del método de Newton-Raphson para ecuaciones cuadráticas. Mostró que existen dos regiones de atracción en el plano complejo, divididas por el bisector

perpendicular al segmento de recta que conecta las dos raíces de la ecuación cuadrática y que se observa un comportamiento caótico en la recta divisoria, es decir, si se toma como punto inicial un punto que esté sobre la recta divisoria no se verá convergencia alguna, en cambio si se toma uno a la izquierda o a la derecha de la recta divisoria se verá una convergencia a una de las dos raíces complejas

¿Se podría esperar entonces el mismo comportamiento para tres o más raíces? ¿Se podría pensar que las regiones de atracción de una ecuación polinomial de tercer grado dividan el plano en tres partes iguales partiendo del origen? La respuesta se muestra en la figura 14.2 donde se pueden observar las regiones de atracción de las tres raíces de la ecuación polinomial  $z^3 - 1 = 0$ .

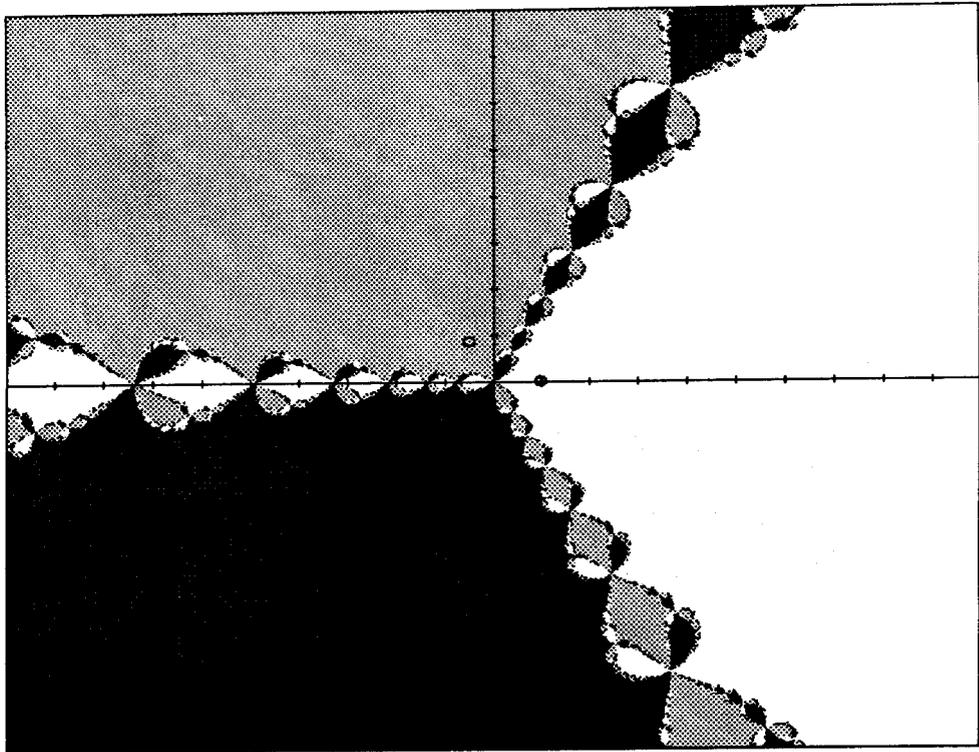


Fig. 14.3 Representación Gráfica de las “regiones” convergentes a cada raíz para la ecuación  $z^3 - 1 = 0$  usando el método Newton-Raphson.

Se muestran también las tres raíces complejas de la ecuación, las cuales son los vértices de un triángulo equilátero y se localizan dentro de lleno de la región que les corresponde. Cualquier punto en la gráfica representa un número complejo que puede ser

usado como punto inicial para el método de Newton-Raphson y su coloración, o tono de gris, representa la raíz a la cual converge bajo las iteraciones del método, por lo que es posible apreciar que es relativamente fácil escoger un punto inicial que convergirá a una cierta raíz sin importar que tan lejana esté de él.

Si se hacen acercamientos a fractal resultante, figura 14.4, se puede observar aparece una y otra vez una figura que semeja la original, por lo que decimos que es autosemejante.

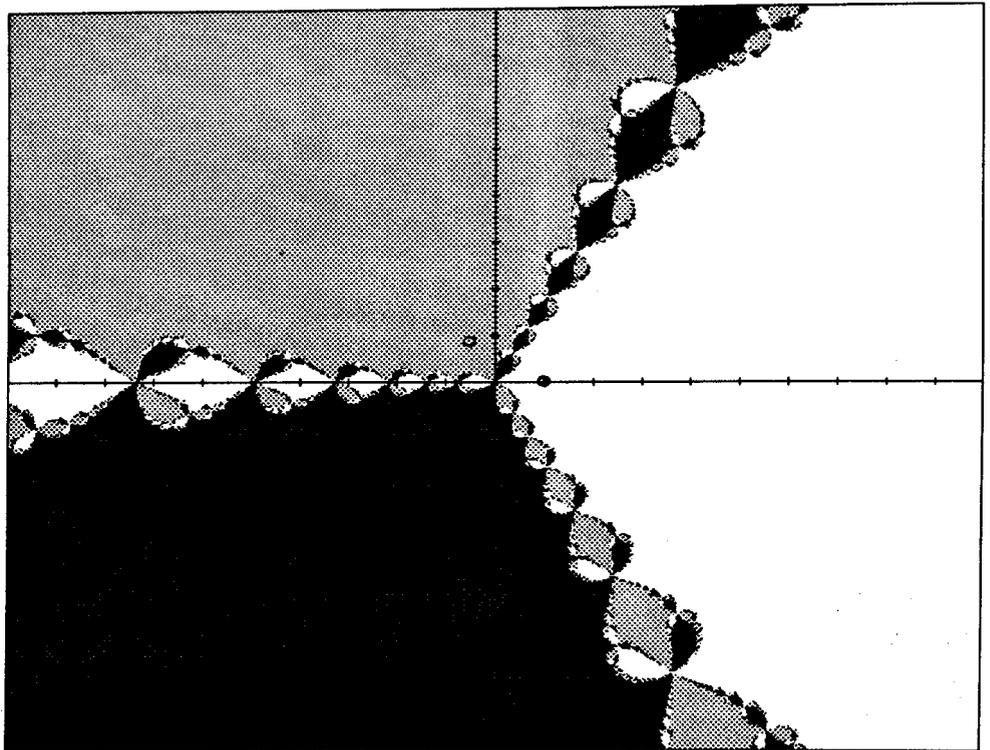


Fig. 14.4 Amplificación de una parte de la gráfica de las "regiones" convergentes a cada raíz para la ecuación  $z^3 - 1 = 0$  usando el método Newton-Raphson.

En la figura 14.2 se pueden observar las regiones de atracción de las cuatro raíces de la ecuación polinomial  $z^4 - 1 = 0$ .

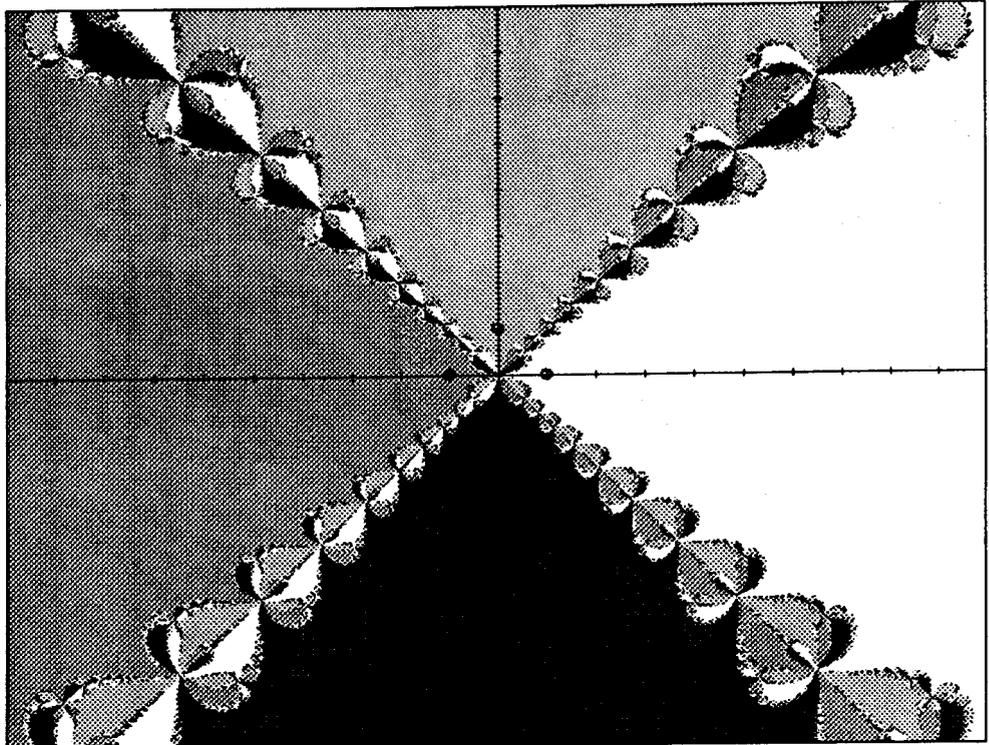


Fig. 14.5 Representación Gráfica de las “regiones” convergentes a cada raíz para la ecuación  $z^4 - 1 = 0$  usando el método Newton-Raphson.

Se pueden observar las cuatro raíces complejas de la ecuación, las cuales se encuentran en los vértices de un rombo y se localizan dentro de lleno de la región que les corresponde. Una vez más es importante mencionar que cualquier punto en la gráfica representa un número complejo que puede ser usado como punto inicial para el método de Newton-Raphson y su coloración, o tono de gris, representa la raíz a la cual converge bajo las iteraciones del método, por lo que es posible apreciar que es relativamente fácil escoger un punto inicial que convergirá a una cierta raíz sin importar que tan lejana esté de él.

Este proceso de encontrar las regiones que convergen a cada raíz se ha podido ejemplificar muy bien con el uso del lenguaje computacional “Lenguaje C” y el desarrollo del siguiente programa computacional.

```

#include <graphics.h>
#include <conio.h>
#include <dos.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <dos.h>
#include "editgraph.h"
#define VGA 0xa000
#define Negro 16
#define size 5
#define tol 0.0000001
#define ite 50
#define pi 3.141592654
Coord Pos;
typedef double ld;
typedef ld distvect[size-1];
typedef ld comp;
typedef comp cx[2];
typedef ld poli;
typedef cx roots[size-1];
typedef cx polc[size];
typedef ld polr[size];
typedef int clr[size];
typedef struct
{
    polc poc; int deg;
}polyc;
void xy_plane()
{
    int ij; setcolor(BLACK);
    line(0,0,639,0);
    line(639,0,639,479);
    line(0,479,639,479);
    line(0,479,0,0);
    line(320,0,320,639);
    line(0,240,639,240);
    j=0;
    for(i=0;i<=20; i++)
        {
            line(j,238, j,242);
            j=j+32;
        }
    j=0;
    for(i=0;i<=16; i++)
        {
            line(318,j, 322,j);
            j=j+30;
        }
}
void lines(float x1, float y1,float x2 , float y2)
{
    line(32*x1+320,-30*y1+240,32*x2+320,-
30*y2+240);
}
void circl( float x, float y, float rad)
{

```

```

int i; float xini,xfin,yini,yfin, param,del;
del=2*pi/200; param=0;
setcolor(BLACK);
for(i=0; i<=200; i++)
    {
        xini=x+rad*cos(param);
        yini=y+rad*sin(param);
        xfin=x+rad*cos(param+del);
        yfin=y+rad*sin(param+del);
        lines(xini,yini,xfin,yfin);
        param=param+del;
    }
}
void cs(cx z1,cx z2, cx out)
{
    out[0]=z1[0]+z2[0];
    out[1]=z1[1]+z2[1];
}
void cr(cx z1,cx z2, cx out)
{
    out[0]=z1[0]-z2[0];
    out[1]=z1[1]-z2[1];
}
void cm(cx z1,cx z2, cx out)
{
    out[0]=z1[0]*z2[0] - z1[1]*z2[1];
    out[1]=z1[0]*z2[1] + z1[1]*z2[0];
}
void conj(cx z1, cx out)
{
    out[0]=z1[0];
    out[1]= -z1[1];
}
void complexify(ld x, cx out)
{
    out[0]=x;
    out[1]=0.0;
}
ld absolute(cx z)
{
    return(sqrt((z[0]*z[0])+(z[1]*z[1])));
}
void cd(cx z1, cx z2, cx out)
{
    out[0]=(z1[0]*z2[0]
z1[1]*z2[1])/((z2[0]*z2[0])+(z2[1]*z2[1]));
    out[1]=(-z1[0]*z2[1]
z1[1]*z2[0])/((z2[0]*z2[0])+(z2[1]*z2[1]));
}
void complex_poli(polr inp, polc outp)
{
    int i;
    for(i=0; i<=size-1; i++)
        {
            outp[i][0]=inp[i];
            outp[i][1]=0;
        }
}

```

```

void cxrnd(ld a, float b, cx out)
{
    out[0]=a+(b-a)*(((float)rand())/32767.0);
    out[0]=a+(b-a)*(((float)rand())/32767.0);
}
void derive(polc p, polc outp, int degin , int
*degout)
{
    int i;
    *degout = degin - 1;
    for(i=degin; i>=0; i--)
    {
        outp[degin-i][0]=(p[degin-i][0])*i;
        outp[degin-i][1]=(p[degin-i][1])*i;
    }
}
void div_sint(cx val, polc inp , polc outp,int
degin , int *degout)
{
    int i; cx z;
    *degout=degin;
    outp[0][0]=inp[0][0];
    outp[0][1]=inp[0][1];
    for(i=0; i<= degin-1; i++)
    {
        cm(outp[i],val,z);
        cs(z, inp[i+1], outp[i+1]);
    }
}
void eval_polyc(cx val, polc inp, int deg_inp ,
cx outp)
{
    polc z1; int i;
    div_sint( val, inp, z1, deg_inp, &i);
    outp[0]=z1[deg_inp][0];
    outp[1]=z1[deg_inp][1];
}
void newt_rap(cx val, polc inp, int deg_inp, cx
outp)
{
    cx z1, z2, z3;
    polyc derivp;
    derive(inp,derivp.poc,deg_inp, &derivp.deg);
    eval_polyc(val, inp, deg_inp, z1);
    eval_polyc(val, derivp.poc, derivp.deg , z2);
    if(absolute(z2)>0.00001)
    {
        cd(z1, z2, z3);
        cr(val, z3, outp);
    }
    else
    {
        outp[0]=val[0];
        outp[1]=val[1];
    }
}
void initializec(polc inp)
{

```

```

    int j;
    for(j=0; j<= size-1; j++)
    {
        inp[j][0]=0.0;
        inp[j][1]=0.0;
    }
}
void initializer(polr inp )
{
    int j;
    for(j=0; j<= size-1; j++)
    {
        inp[j]=0.0;
    }
}
void nr(cx val, polc inp, int deg_inp, cx outp)
{
    cx z1,z2; int i;
    for(i=0; i<= ite; i++)
    {
        newt_rap(val, inp , deg_inp, z1);
        eval_polyc(val,inp, deg_inp, z2);
        if(absolute(z2) <= tol)
        {
            outp[0]=z1[0];
            outp[1]=z1[1];
            break;
        }
        else
        {
            val[0]=z1[0];
            val[1]=z1[1];
        }
    }
    outp[0]=z1[0];
    outp[1]=z1[1];
}
void main()
{
    float real,imag; distvect dist;
    ld alfa, beta, incx,
    incy,minrsx,maxrsx,minrsy,maxrsy,aux1;
    int xosc = 200, yosc = 120;
    int Left, Righth, Top, Botton;
    roots rs; clr cl;
    int Driver, Mode, Pixels = 16;
    polyc pc1,pc2,pc;
    cx ini ,y,root,aux;
    int degr,j, l,k;
    int X,cli,paint;
    long int i;
    char far *p;
    struct REGPACK RegIn, RegOut;
    detectgraph (&Driver, &Mode);
    initgraph
    (&Driver,&Mode,"c:\\tc\\library\\lib");
    cl[0]=RED;
    cl[1]=BLUE;

```

```

cl[2]=YELLOW;
cl[3]=GREEN;
cl[4]=WHITE;
cl[5]=LIGHTGREEN;
initializec(pc1.poc);
printf(" Da los coeficientes del polinomio de
grado <= %d",size-1);
for(i=0;i<=size-1; i++)
{
printf(" Da la parte real de a[%i] ->\n ", i );
scanf("%f",&real);
pc1.poc[i][0]=real;
pc.poc[i][0]=real;
printf(" Da la parte imaginara de a[%i] ->\n
", i );
scanf("%f",&imag);
pc1.poc[i][1]=imag;
pc.poc[i][1]=imag;
}
pc1.deg=size-1;
pc.deg=size-1;
for(i=0; i<=size-2;i++)
{
ini[0]=1; ini[1]=1;
nr(ini,pc1.poc,pc1.deg,root);
rs[i][0]=root[0];
rs[i][1]=root[1];
if(pc1.deg==1)
break;
else
{
div_sint(root,pc1.poc,pc2.poc,pc1.deg,&l);
for(j=0; j<=size-1;j++)
{
pc1.poc[j][0]=pc2.poc[j][0];
pc1.poc[j][1]=pc2.poc[j][1];
}
pc1.deg=l-1;
}
}
for(i=0; i<=size-2;i++)
{
printf("%f + i %f\n", rs[i][0],rs[i][1]);
}
minrsx=rs[0][0];
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
if(minrsx<=rs[i][0])
minrsx=minrsx;
else
minrsx=rs[i][0];
}
minrsy=rs[0][1];
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
if(minrsy<=rs[i][1])
minrsy=minrsy;
else

```

```

minrsy=rs[i][1];
}
maxrsx=rs[0][0];
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
if(maxrsx>=rs[i][0])
maxrsx=maxrsx;
else
maxrsx=rs[i][0];
}
maxrsy=rs[0][1];
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
if(maxrsy>=rs[i][1])
maxrsy=maxrsy;
else
maxrsy=rs[i][1];
}
minrsx=-10; maxrsx=10;
minrsy=-8; maxrsy=8;
alfa=minrsx-.5;
beta=maxrsy+0.5;
incx=maxrsx-minrsx+1;
incy=maxrsy-minrsy+1;
zoom:
for(k=0; k<=480; k=k+1)
for(l=0; l<=640; l=l+1)
{
ini[0]=alfa+(l*(incx)/640.0);
ini[1]=(beta)-(k*(incy)/480.0);
nr(ini, pc.poc, pc.deg, y);
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
cr(rs[i],y,aux);
dist[i]=absolute(aux);
}
cli=size-1;
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
if(dist[i]<=0.00001)
{cli=i;
break;}
else
cli=cli;
}
paint=cl[cli];
putpixel (l,k , paint);
}
xy_plane();
for(i=0;i<=size-2;i++)
{
circl(rs[i][0],rs[i][1],.1);
}
}
getch();
}

```

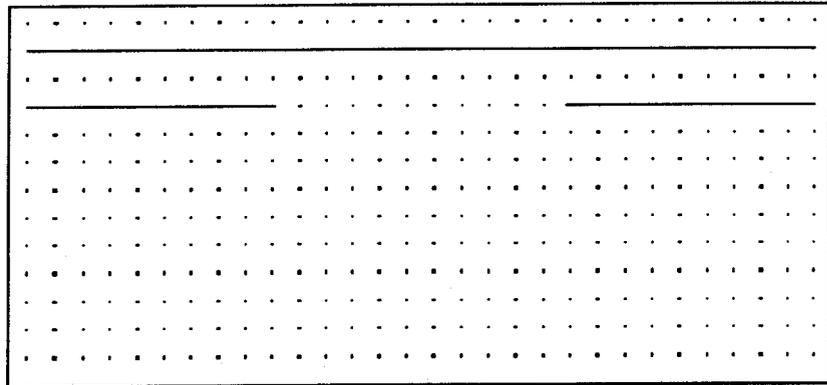
(Kanthimathinathan, 1996)

# 15 Construcciones

## 15.1 Construcción de los *Primeros Fractales*

### 15.1.1 El Conjunto de Cantor

En la siguiente figura se muestra el segmento original y la primera iteración del proceso de construcción del Conjunto de Cantor. Realiza unas iteraciones más, cuenta los puntos evidenciados con mucho cuidado y responde las siguientes preguntas:



Durante la construcción del Conjunto de Cantor:

- ¿Cuántos elementos del Conjunto de Cantor se encuentran en la primera iteración?  
¿Cuáles son?
- ¿Cuántos elementos del Conjunto de Cantor se encuentran en la segunda iteración?  
¿Cuáles son?
- ¿Cuántos elementos del Conjunto de Cantor se encuentran en la tercera iteración?  
¿Cuáles son?
- ¿Cuántos elementos del Conjunto de Cantor se encuentran en la cuarta iteración?  
¿Cuáles son?
- ¿Cuántos elementos del Conjunto de Cantor se encuentran en la  $n$ -ésima iteración?  
¿Cuáles son?

De acuerdo a la información anterior,

¿Cuántos elementos tiene el Conjunto de Cantor?

¿Cuáles son?

Describe con tus propias palabras lo que es el Conjunto de Cantor.

¿Después de cuántos pasos aparece el Conjunto de Cantor?

¿Es posible dibujar el Conjunto de Cantor en tu cuaderno? ¿Por qué sí o por qué no?

¿El Conjunto de Cantor está formado por segmentos o por puntos? ¿Por qué?

Si amplificamos mucho una parte del Conjunto de Cantor, ¿qué encontraremos? ¿Por qué?

¿Cuál es la cardinalidad del Conjunto de Cantor?

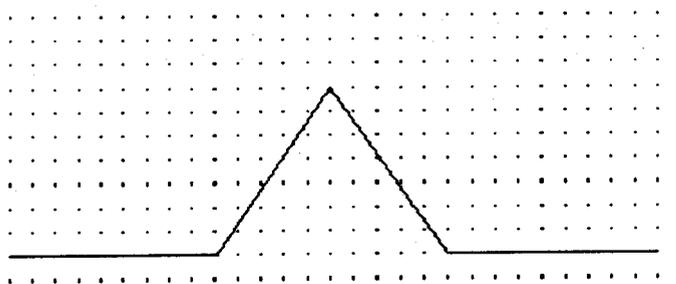
¿Cómo es posible que la cardinalidad del Conjunto de Cantor sea igual a la cardinalidad del conjunto generador  $[0,1]$  si hemos removido segmento tras segmento un número infinito de veces?

¿Por qué decimos que el Conjunto de Cantor está formado por pequeñas replicas del Conjunto de Cantor?

¿Cuál es la longitud del Conjunto de Cantor?

### 15.1.2 Construcción de la Curva de Koch

En la siguiente figura se muestra la primera iteración en la construcción de la Curva de Koch. Realiza unas iteraciones más, cuenta los puntos evidenciados con mucho cuidado y responde las siguientes preguntas:



Describe con tus propias palabras lo que es la Curva de Koch.

Suponiendo que la longitud del segmento original sea 1,

¿Qué longitud encontramos en la primera iteración del proceso de construcción de la Curva de Koch?

¿Qué longitud encontramos en la segunda iteración del proceso de construcción de la Curva de Koch?

¿Qué longitud encontramos en la tercera iteración del proceso de construcción de la Curva de Koch?

¿Qué longitud encontramos en la cuarta iteración del proceso de construcción de la Curva de Koch?

¿Qué longitud encontraremos en la  $n$ -ésima iteración del proceso de construcción de la Curva de Koch?

De acuerdo a la información anterior,

¿Qué longitud tiene la Curva de Koch?

¿Después de cuántas iteraciones aparece la Curva de Koch?

¿Es posible dibujar la Curva de Koch en tu cuaderno? ¿Por qué sí o por qué no?

¿La Curva de Koch está formada por segmentos, por puntos o por qué? ¿Por qué?

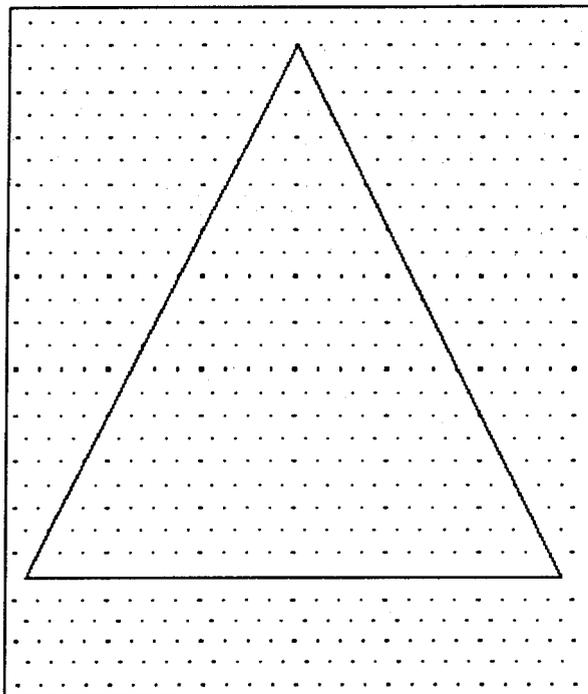
Si amplificamos mucho una parte de la Curva de Koch, ¿qué encontraremos? ¿Por qué?

¿Qué es una serie geométrica? ¿Qué significa “tiende a infinito”?

¿Cómo es posible que la longitud de un objeto matemático con extremos definidos sea infinita?

¿Por qué decimos que la Curva de Koch está formado por pequeñas replicas de la Curva de Koch?

En la siguiente figura se muestra un triángulo equilátero para la construcción del fractal conocido como el Copo de Nieve de Koch. Realiza unas iteraciones, cuenta los puntos evidenciados con mucho cuidado y responde las siguientes preguntas:



Suponiendo que cada lado del triángulo mide 1 unidad

¿Cuánto mide el perímetro de la figura formada en las primeras 4 iteraciones del proceso de construcción del Copo de Nieve de Koch?

¿Cuánto mide el área de la figura formada en las primeras 4 iteraciones del proceso de construcción del Copo de Nieve de Koch?

De acuerdo a la información anterior:

¿Cuánto mide el perímetro de la figura “copo de nieve”?

¿Cuánto mide el área de la figura “copo de nieve”?

¿Qué conclusiones puedes obtener basándote en los resultados del perímetro y el área de la curva de Koch?

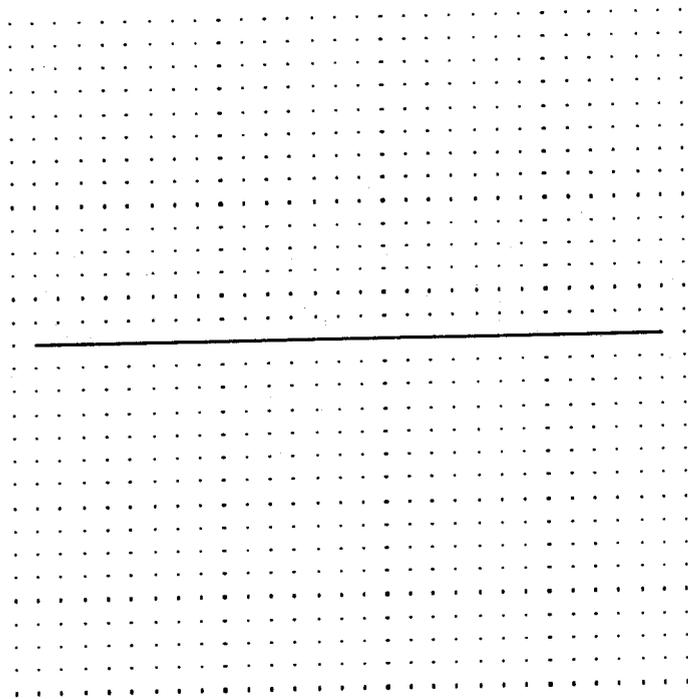
¿Cómo es posible que una figura con perímetro de longitud infinita encierre un área finita?

Describe con tus propias palabras lo que es el “Copo de Nieve” de Koch.

### **15.1.3 La Curva Llena Espacio de Peano**

Hablando de dimensiones en forma intuitiva, ¿percibimos a los puntos como objetos de qué dimensión?, ¿a las rectas?, ¿a los planos? y ¿a los sólidos?

En la siguiente figura se muestra el segmento inicial para la construcción de la Curva-llena-espacio de Peano. Realiza unas iteraciones más, cuenta los puntos evidenciados con mucho cuidado y responde las siguientes preguntas.



Describe con tus propias palabras lo que es la Curva-llena-espacio de Peano.

¿Cuántas iteraciones son necesarias para dibujar la Curva-llena-espacio de Peano?

¿Es posible dibujar la Curva-llena-espacio de Peano en tu cuaderno?

¿Qué significa “figura límite”?

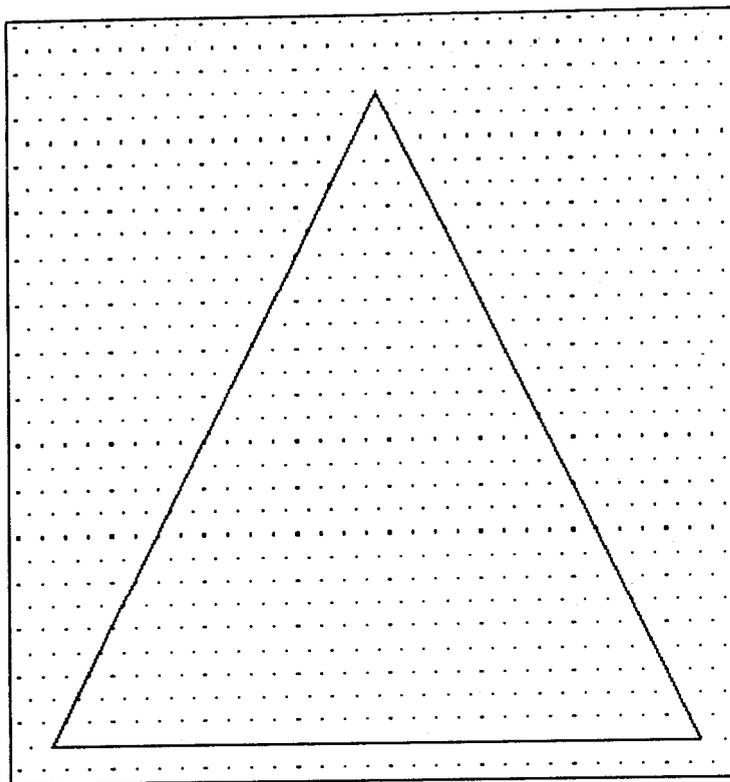
¿Qué significa “figura unidimensional”? ¿“figura bidimensional”? Da un ejemplo.

¿Cómo es posible que una “figura unidimensional” se convierta en una “figura bidimensional”?

¿En la construcción de qué fractal se realizó el proceso que llevó a una figura a convertirse de una recta a puntos?

### 15.1.4 El Triángulo de Sierpinski

En la siguiente figura se muestra el triángulo equilátero inicial para la construcción del Triángulo de Sierpinski. Realiza unas iteraciones más, cuenta los puntos evidenciados con mucho cuidado y responde las siguientes preguntas.



Describe con tus propias palabras lo que es el Triángulo de Sierpinski.

¿Cuál es el área del triángulo original si la longitud de cada uno de sus lados es 1?

Suponiendo que el área del triángulo original sea 1,

¿Cuál es el área de la figura formada en la primera iteración del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski?

¿Cuál es el área de la figura formada en la segunda iteración del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski?

¿Cuál es el área de la figura formada en la tercera iteración del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski?

¿Cuál es el área de la figura formada en la cuarta iteración del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski?

¿Cuál es el área de la figura formada en la  $n$ -ésima iteración del proceso de construcción del triángulo de Sierpinski?

De acuerdo a la información anterior:

¿Cuál es el área del Triángulo de Sierpinski?

¿Después de cuántas iteraciones aparece el Triángulo de Sierpinski?

¿Es posible dibujar el Triángulo de Sierpinski en tu cuaderno? ¿Por qué?

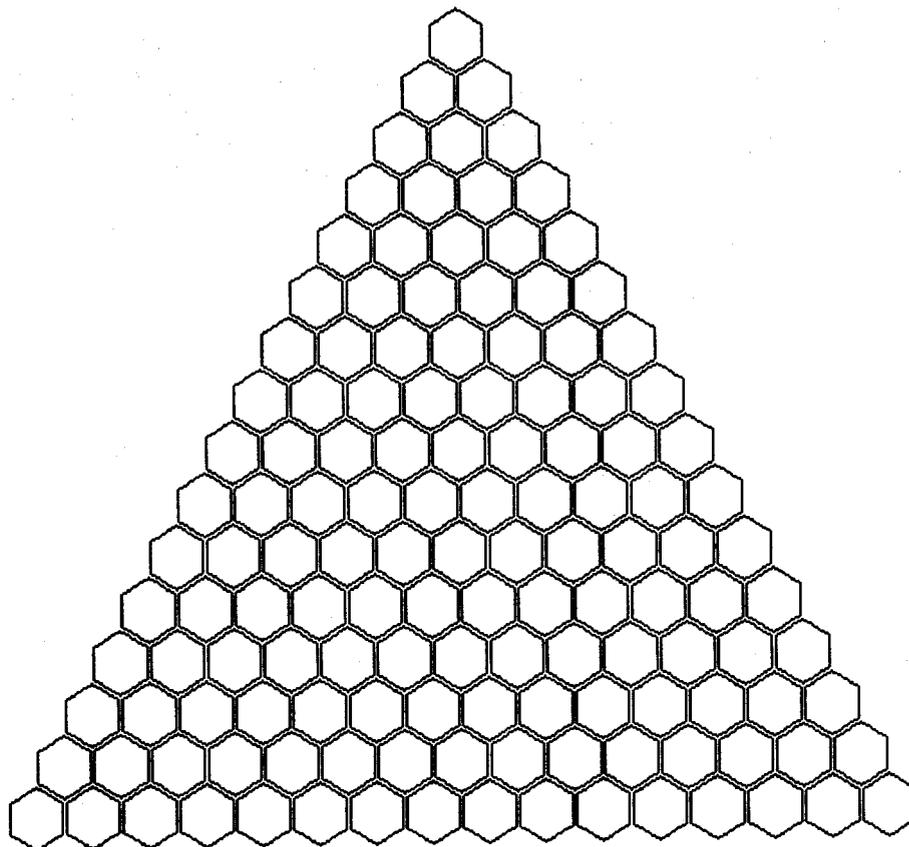
¿El triángulo de Sierpinski está formado por planos, por segmentos, por puntos o por qué?  
¿Por qué?

¿Por qué decimos que el Triángulo de Sierpinski está formado por pequeñas replicas del Triángulo de Sierpinski?

¿Tiene realmente área el Triángulo de Sierpinski? ¿Es posible que este triángulo este entre una y dos dimensiones?

¿Por qué decimos que el triángulo de Sierpinski es un ejemplo de una figura bidimensional que a lo largo del proceso se convierte en una figura unidimensional después de un número infinito de iteraciones?

¿Qué es el Triángulo de Pascal? A continuación se muestra un triángulo compuesto por “celdas” en las cuales puedes escribir los números del triángulo de Pascal, para luego sombrear todas aquellas celdas con número impar, a las de número par bórrales el número.



¿Encuentras un patrón geométrico en el triángulo?

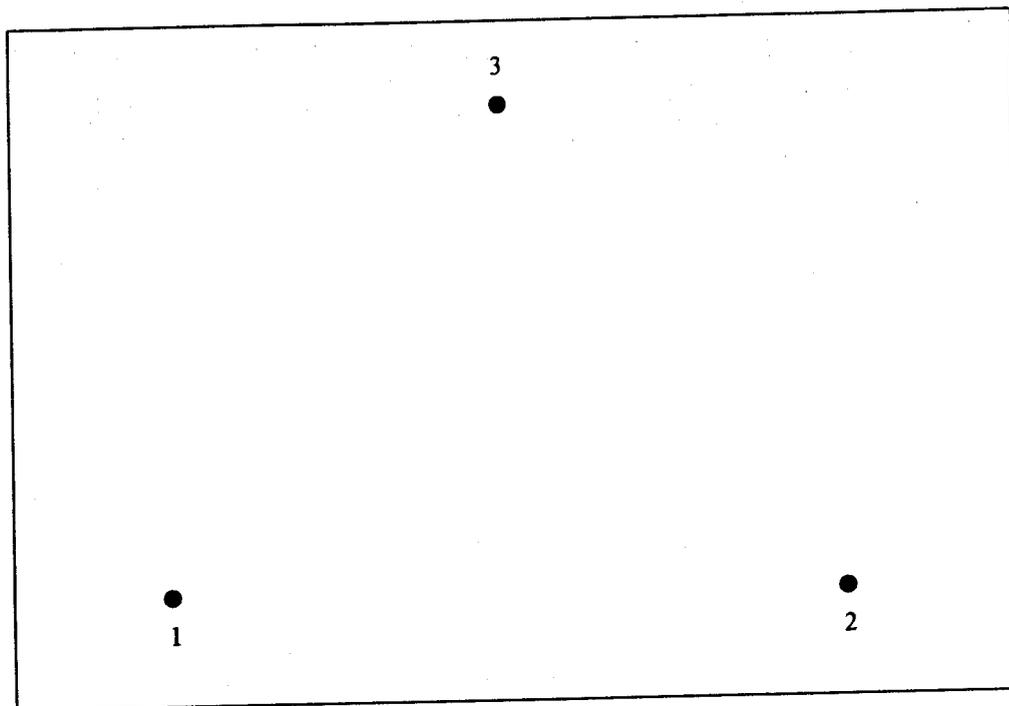
¿Cuál es su relación con el Triángulo de Sierpinski?

¿Qué crees que sucedería si sombreamos sólo las celdas de números múltiplos de 3? ¿De 5?

¿De 9?

¿Crees que funcione para múltiplos de cualquier número?

Ahora veremos un juego conocido como el “Juego del Caos”. El juego es muy simple, sólo necesitamos el tablero que presentamos a continuación, el cual tiene 3 puntos con los números 1, 2 y 3, un dado con sólo 3 números (o asignemos 1 al 4, 2 al 5 y 3 al 6 en un dado normal), un lápiz, y una regla.



Las instrucciones son muy sencillas: escoge un punto inicial ( $p_0$ ) al azar, tira el dado, marca un punto ( $p_1$ ) a la mitad del camino del punto inicial ( $p_0$ ) al punto ( $p_1$ ); ahora vuelve a tirar el dado y a marcar puntos. ¿Es posible que este proceso genere una figura en particular? ¿Cuántas iteraciones serían necesarias para contestar la pregunta anterior?

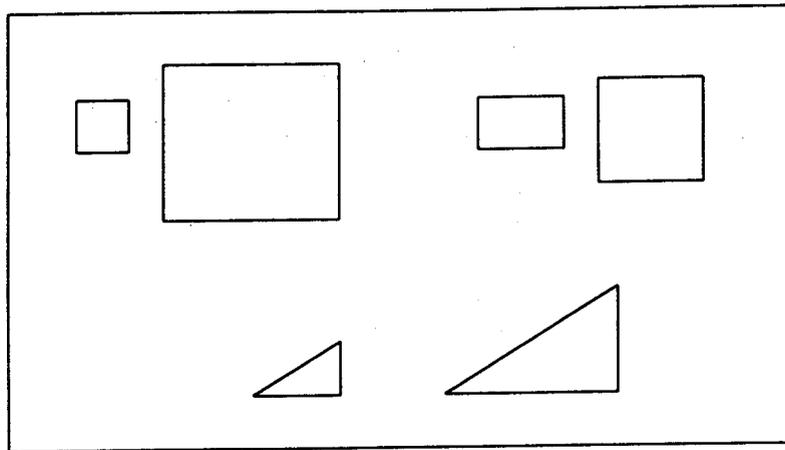
Si tienes acceso a una computadora, puedes simular el juego en una hoja electrónica de datos, si no, tu profesor te puede mostrar la figura generada después de 500, 1000 y 1500 iteraciones ¿Puedes pensar en alguna explicación a lo anterior?

### Conclusión:

Todos los ejemplos anteriores son conjuntos a los que nos podemos referir usualmente como *fractales*, lo cual nos da una buena idea de lo que es un fractal. Entonces ¿cómo definirías hasta ahora lo que es un fractal? ¿Cuáles serían sus principales características? ¿Puedes pensar en alguna otra estructura, matemática o de la naturaleza, que presente alguna de éstas características?

## 15.2 Construcción del Concepto *Autosemejanza*

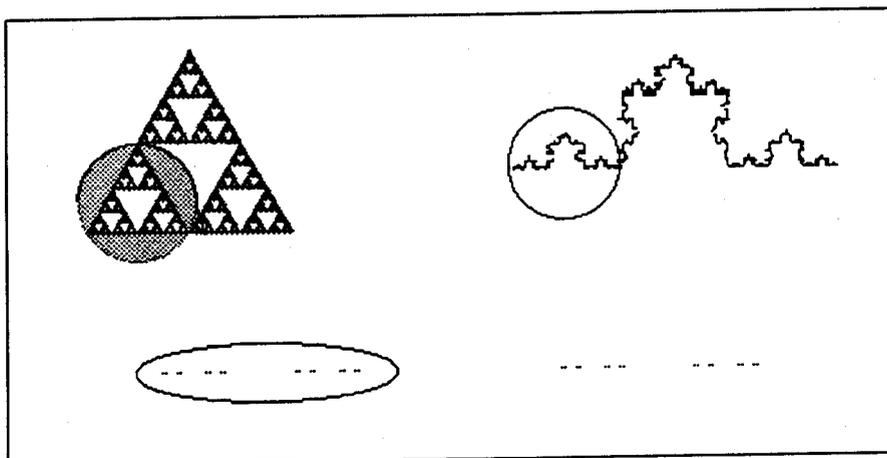
Observa detenidamente los siguientes pares de figuras:



Si se sabe que los cuadrados y los triángulos son “figuras semejantes” y que los rectángulos no lo son ¿Qué puedes concluir acerca del concepto “figuras semejantes”? ¿Cuándo dos figuras son semejantes? Explica con tus propias palabras lo que entiendes por “semejanza”.

¿Puedes pensar en algún objeto natural que presente esta característica?

Ahora observa detenidamente los tres fractales en siguiente figura y sus partes seleccionadas:



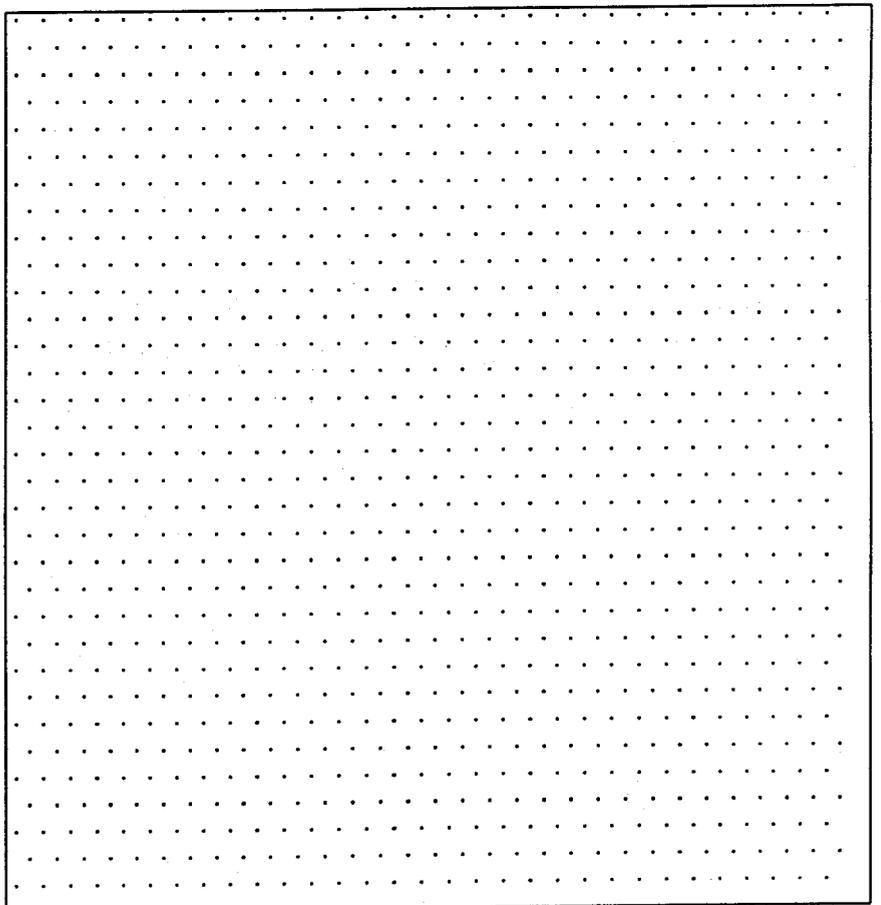
Si sabemos que los tres fractales de la figura anterior son autosemejantes, que cada una de las partes seleccionadas, al ampliarlas lo suficiente, es exactamente igual a la figura original y que esta figura original está formada totalmente por partes que cumplen con esta misma característica. Explica con tus propias palabras lo que entendiste por “autosemejanza”.

¿Puedes pensar en algún objeto natural que presente esta característica?

### Autosemejanza estadística

Para construir una figura con autosemejanza estadística es necesario incluir un elemento aleatorio en su construcción, como por ejemplo el lanzar una moneda. Para ejemplificar esto incluiremos este elemento aleatorio en la construcción de la curva de Koch: en lugar de reemplazar el segmento original por una curva generadora como se explicó en la Sección 6, ahora el factor aleatorio determinará si ésta curva se inserta en posición normal o invertida.

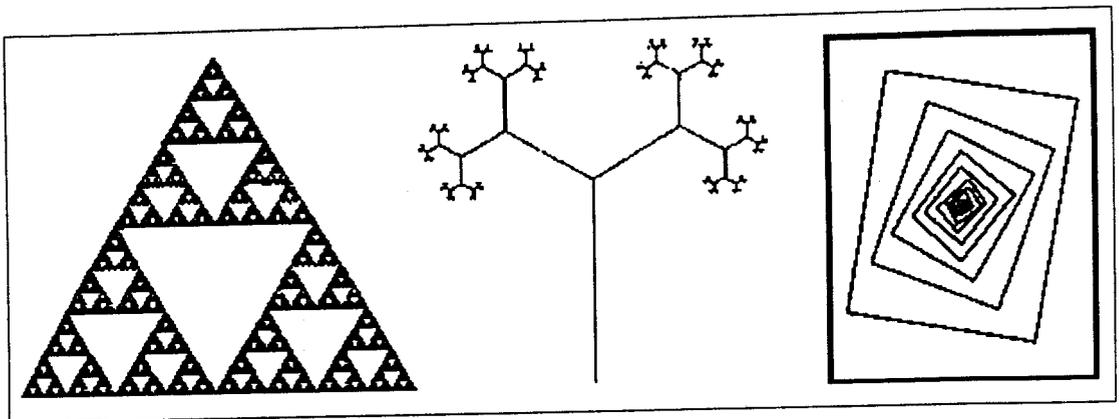
Construye las primeras cinco iteraciones para que puedas apreciarlo.



¿Qué tipo de curva se generará después de un número infinito de iteraciones? ¿Se parecerá en alguna forma a la Curva de Koch original? Si amplificamos una parte de la figura ¿encontraremos la figura original? ¿Porqué?

### Diferentes Grados de Auto semejanza

Las siguientes tres figuras presentan diferentes tipos de auto semejanza: auto semejanza estricta, auto semejanza parcial y auto semejanza en un punto, respectivamente. ¿Cuál sería la diferencia entre cada una de éstas auto semejanzas?



¿Cuáles son los llamados “fractales naturales”? ¿Puedes dar algunos ejemplos?

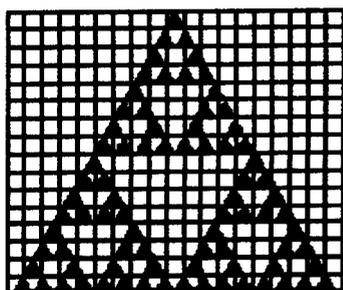
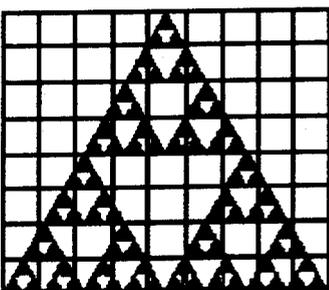
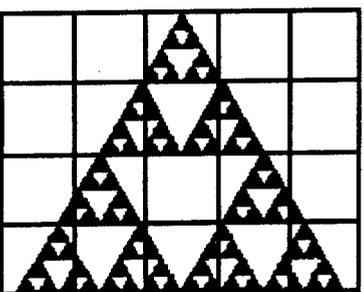
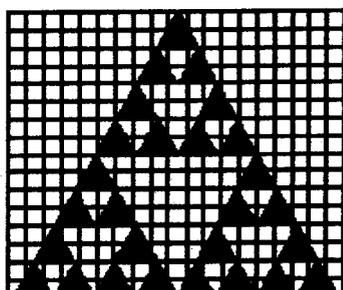
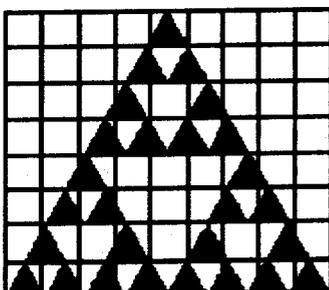
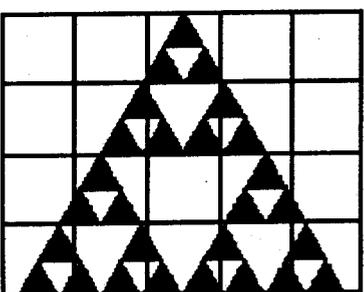
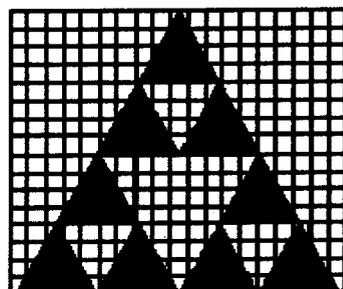
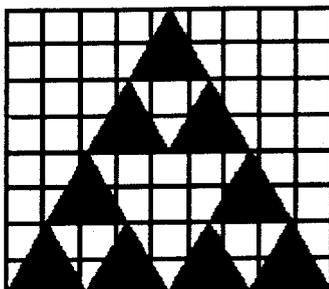
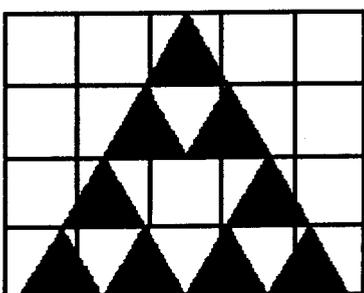
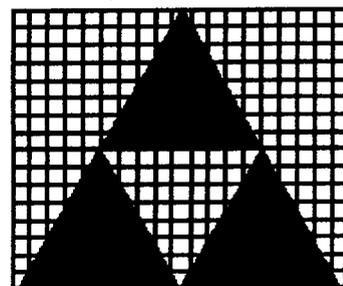
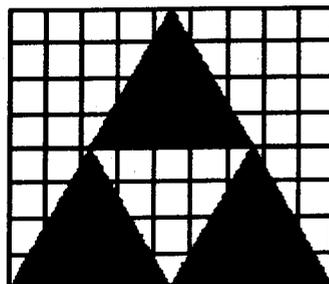
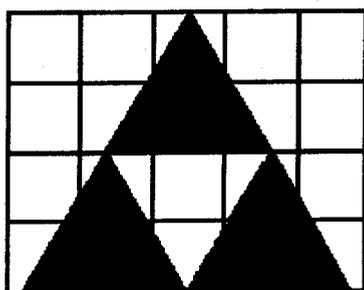
¿Qué tipo de auto semejanza encontramos en los fractales naturales?

¿Cómo compararías una parte de la coliflor con la coliflor completa? ¿En qué forma son parecidos? ¿Son esencialmente auto semejantes? ¿Puedes nombrar otro vegetal dicha propiedad?

### Auto semejanza en Cuadrícula

¿Qué significa hacer “operativa” a la auto semejanza? ¿Por qué es importante?

Sombrea cada cuadro que cubra cada una de las siguientes figuras y determina en qué paso de su construcción podemos decir que el triángulo de Sierpinski es autosemejante, para las tres diferentes cuadrículas:



## 15.3 Construcción del Concepto de *Dimensión Fractal*

Explica con tus propias palabras lo que entiendes por “dimensión”.

Da ejemplos de objetos matemáticos de dimensión 0, 1, 2 y 3.

Da ejemplos de las unidades en las que podrían medirse los siguientes objetos matemáticos: un segmento, un cuadrado y un cubo.

¿Son autosemejantes estos objetos matemáticos? ¿Por qué?

¿En cuántas partes iguales los podrías dividir?

### 15.3.1 Construcción del concepto de *Dimensión Autosemejante*

Dado un segmento de recta de longitud uno,

---

Segmento de longitud 1

Divídelo en  $n$  partes iguales y expresa el número de partes en la forma:  $n^a$

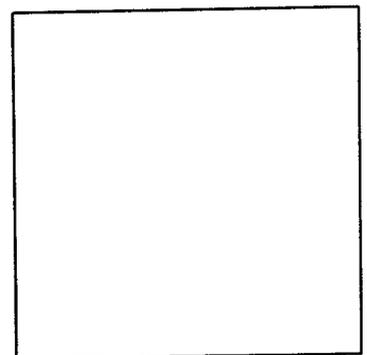
¿Cuánto mide cada una de estas partes?

Toma sólo una de esas partes y observa que es semejante al segmento original, ¿por qué factor de amplificación hay que multiplicarla para que tenga el mismo tamaño del segmento original?

Ahora hagamos el mismo análisis con un cuadrado:

Dado un cuadrado de lado de longitud uno.

Divide sus lados en  $n$  partes iguales.



Cuadrado de lado 1

¿Cuántas partes (cuadraditos) hay en total?

Expresa el número de partes en la forma:  $n^a$

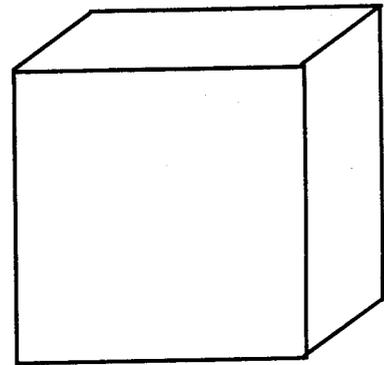
¿Cuánto mide de lado cada una de estas partes?

Toma una de esas partes ¿Es semejante al cuadrado original? ¿Por qué factor de amplificación hay que multiplicarla para darle el tamaño del cuadrado original?

Ahora analicemos un cubo:

Dado un cubo de aristas de longitud uno.

Divide cada uno de sus lados en  $n$  partes iguales.



Cubo de Arista 1

¿Cuántas partes (cubitos) hay en total?

Expresa el número de partes en la forma:  $n^a$

¿Cuánto mide de lado cada una de estas partes?

Toma una de esas partes (un cubito) ¿Es semejante al cubo original? ¿Por qué factor de amplificación hay que multiplicarla para darle el tamaño del cubo original?

Analizando los datos encontrados, trataremos ahora de encontrar una fórmula para encontrar la dimensión de las figuras anteriores.

¿Qué relación encuentras entre el exponente del número partes y la Dimensión Euclideana de cada una de las figuras anteriores?

¿Existe alguna forma de despejar este exponente?

¿Podemos generalizar esta forma de determinar la dimensión de un objeto autosemejante?

¿Qué datos necesitaríamos para calcular esta dimensión?

Completa la siguiente tabla para resumir tus conclusiones:

<b>Objeto</b>	<b>Número de piezas (forma <math>n^a</math>)</b>	<b><math>D</math> Dimensión</b>	<b>Relación entre el número de piezas y la dimensión.</b>	<b>Despeje de la dimensión</b>
recta				
cuadrado				
cubo				

Con la información anterior, construye una fórmula general para encontrar la Dimensión Autosemejante.

¿Qué necesitamos saber para poder calcularla?

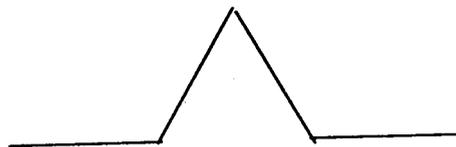
¿Sirve para cualquier objeto o existe alguna restricción?

Ahora apliquemos nuestra fórmula a las figuras fractales que ya construimos anteriormente.

## Curva de Koch

Asumiendo que el segmento original en la construcción de la curva de Koch fuera de longitud uno.

En la primera iteración,



Curva Generadora de la Curva de Koch

¿Cuántos segmentos hay en total?

¿Cuánto mide cada uno de ellos si el segmento original mide 1 unidad?

Toma una de esas partes ¿Es semejante al segmento original?

¿Cuál es el factor de amplificación necesario para que cada uno de estos segmentos sea del tamaño del original?

Con los datos anteriores, encuentra la dimensión de la Curva de Koch.

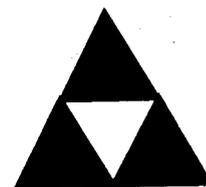
## Triángulo de Sierpinski

Asumiendo que el triángulo original en la construcción del triángulo de Sierpinski fuera de área uno.

En la primera iteración,

¿Cuántos triángulos sombreados hay en total?

¿Qué área tiene cada uno de ellos?



Primera Iteración en la  
Construcción del  
Triángulo de Sierpinski

Toma una de esas partes ¿Es semejante al triángulo original?

¿Cuál es el factor de amplificación necesario para que cada uno de triángulos sea como el original (considerado como un triángulo totalmente relleno)?

Con los datos anteriores, encuentra la dimensión del triángulo de Sierpinski.

### Conjunto de Cantor

Asumiendo que el segmento original en la construcción del Conjunto de Cantor es de longitud uno.

En la primera iteración,  
¿Cuántos segmentos hay en total?

Primera Iteración en la Construcción del Conjunto de Cantor

¿Cuánto mide cada uno de ellos?

Toma una de esas partes ¿Es semejante al segmento original?

¿Cuál es el factor de amplificación necesario para que cada uno de estos segmentos sea del tamaño del original?

Con los datos anteriores, encuentra la dimensión del Conjunto de Cantor.

### Curva llena Espacio de Peano

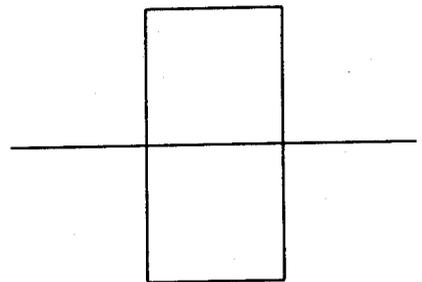
Asumiendo que el segmento original en la construcción de la Curva llena espacio de Peano es de longitud uno.

En la primera iteración,

¿Cuántos segmentos hay en total?

¿Cuánto mide cada uno de ellos?

Toma una de esas partes ¿Es semejante al segmento original?



Primera Iteración en la Construcción de la Curva llena espacio de Peano

¿Cuál es el factor de amplificación necesario para que cada uno de estos segmentos sea del tamaño del original?

Con los datos anteriores, encuentra la dimensión de la Curva llena espacio de Peano.

Completa la tabla para resumir tus conclusiones:

Objeto	Número de piezas (forma $n^a$ )	Factor de amplificación	$D = \frac{\log(\text{num. de piezas})}{\log(\text{fact. de amplific})}$
Curva de Koch			
Triángulo de Sierpinski			
Conjunto de Cantor			
Curva llena espacio de Peano			

¿Qué diferencia encuentras entre las dos tablas de dimensiones?

¿Qué tipo de dimensión tienen los fractales?

¿Qué significa que un fractal tenga dimensión entre 0 y 1?

¿Qué significa que un fractal tenga dimensión entre 1 y 2?

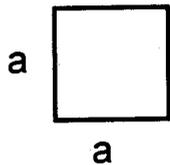
¿Qué significa que un fractal tenga dimensión entre 2 y 3?

¿Podemos encontrar la dimensión de todos los fractales?

¿Cómo definió Mandelbrot un fractal? ¿Por qué hubo problemas con esta definición?

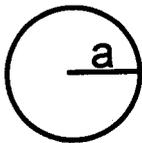
Duplicación de dimensión de longitud en figuras fractales y no fractales

¿Qué pasa con el área de cada figura si duplicamos su longitud?



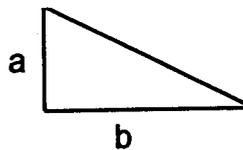
Area =

Area de la figura duplicada =



Area =

Area de la figura duplicada =



Area =

Area de la figura duplicada =

¿Qué crees que pase con el área del triángulo de Sierpinski, en algún paso de su construcción, al duplicar sus dimensiones?

Asumiendo, en bien de la operatividad, que la figura de la derecha sea el Triángulo de Sierpinski, su área sería la suma de las áreas de todos los triángulos sombreados.

Número total de triángulos =

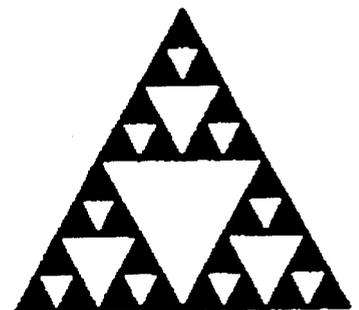


Figura Representativa del Triángulo de Sierpinski

¿Qué crees que pasará con el área al duplicar sus dimensiones? ¿Se duplica? ¿Se triplica?  
¿Se cuadriplica? ¿No hay relación?

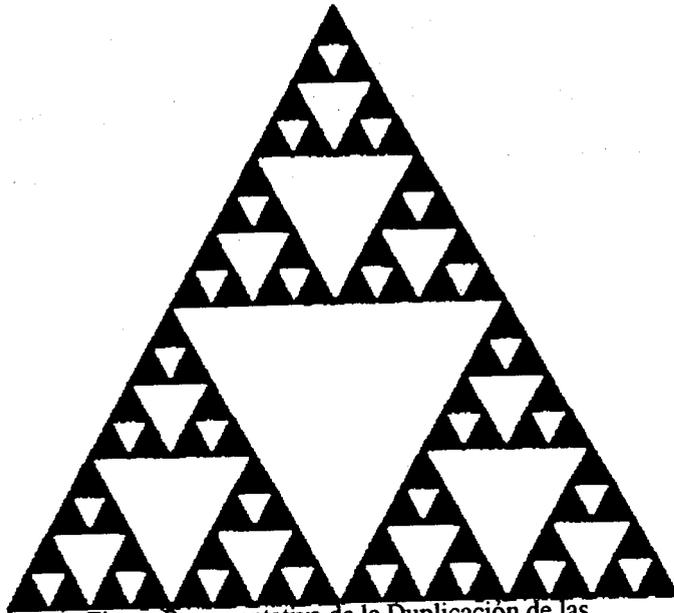


Figura Representativa de la Duplicación de las Dimensiones del Triángulo de Sierpinski

¿Cuál es el número total de triángulos el nuevo triángulo?

En comparación con el resultado obtenido al duplicar las dimensiones de las figuras no fractales, ¿Qué puedes concluir?

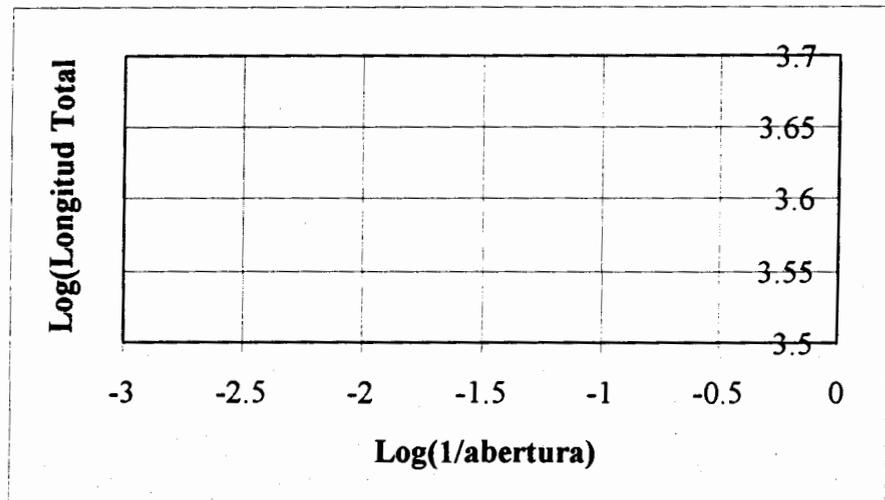
### 15.3.2 Construcción del concepto *Dimensión por Compás*

Dado el siguiente mapa de la República Mexicana, determina a cuántos kilómetros equivalen 4, 2, y 1 centímetros, luego encuentra la longitud de la línea costera del Pacífico de nuestro país con estas tres diferentes aberturas del compás:



Con los datos anteriores completa la siguiente tabla y después graficalos:

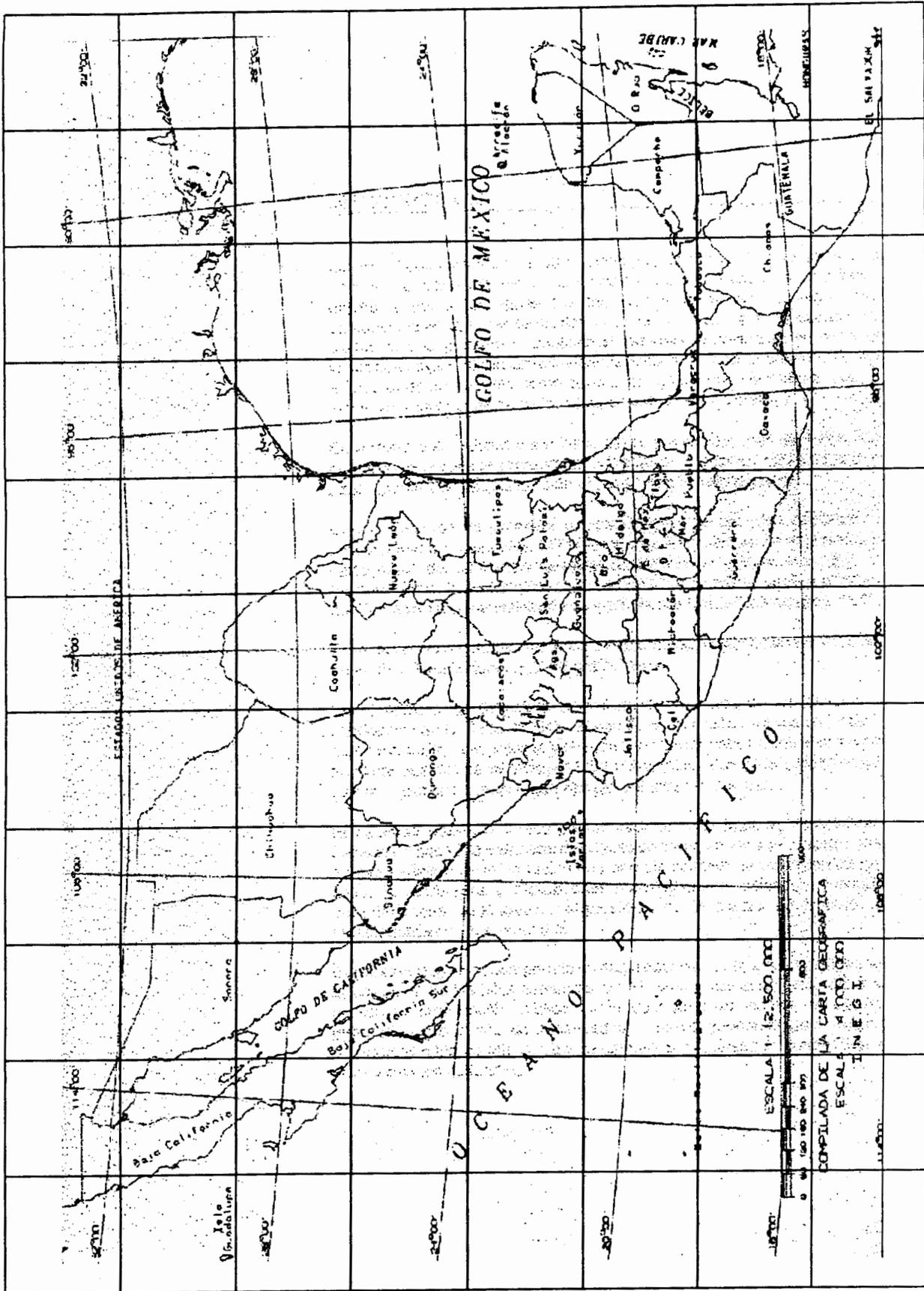
Abertura Real del Compás (cm)	Abertura Equivalente del Compás (Km)	Longitud Total (Km)	Log(1/Abertura)	Log(Longitud Total)
4 cm				
2 cm				
1 cm				

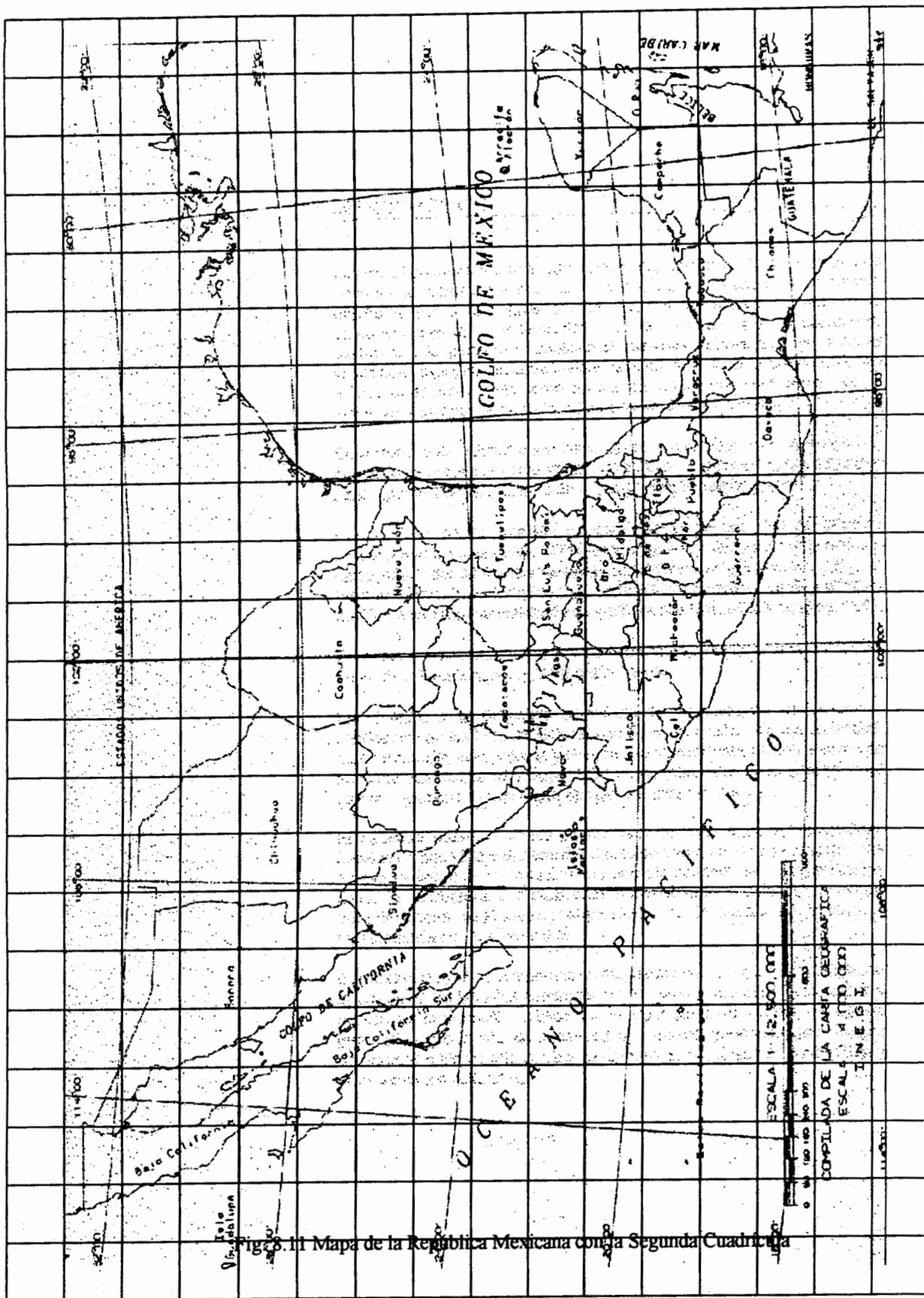


Ahora aplica el método de mínimos cuadrados o usa la computadora para encontrar la pendiente de la recta que más se aproxima a los puntos que encontraste y que es la dimensión fractal (por compás) que estamos buscando. ¿Qué conclusiones obtienes de dicho número?

### 15.3.3 Construcción del Concepto de *Dimensión por Cuadrícula*

Dado el siguiente mapa de la República Mexicana, encuentra el número de cuadrículas que cubren la línea costera del Pacífico de nuestro país con diferentes tamaños de cuadrícula:





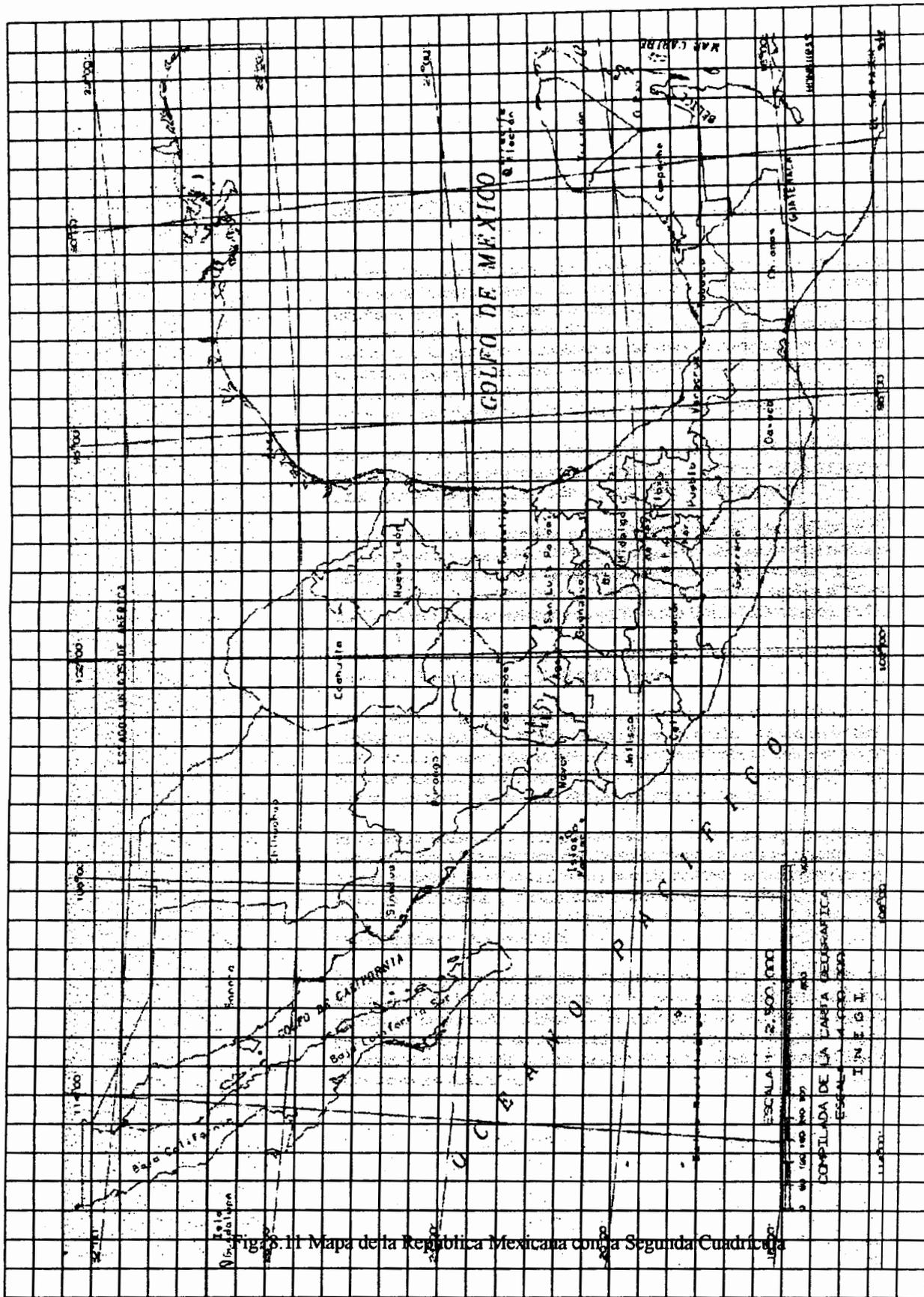
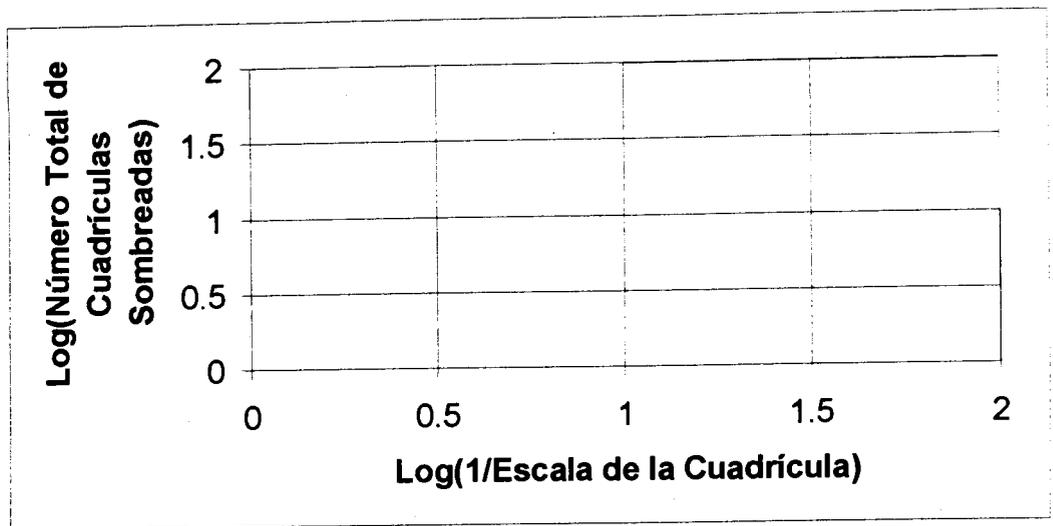


Fig. 8.11 Mapa de la República Mexicana con la Segunda Cuadrícula

Con los datos anteriores completa la siguiente tabla y después graficalos:

Número Total de Cuadrículas	Número de Cuadrículas Sombreadas	Log(Núm. Tot. Cuad.)	Log(Núm. De Cuad. Somb.)
11			
22			
44			



Ahora aplica el método de mínimos cuadrados o usa la computadora para encontrar la pendiente de la recta que más se aproxima a los puntos que encontraste y que es la dimensión fractal (por compás) que estamos buscando. ¿Qué conclusiones obtienes de dicho número?

¿Encontraste diferencia entre la dimensión por compás y la dimensión por cuadrícula? Si sí encontraste diferencia, ¿a qué crees que se deba?

¿Crees que se pueda aplicar esta dimensión a objetos fuera del plano? ¿Qué usarías en lugar de cuadrados?

## 15.4 Construcción del Concepto *Proceso Iterativo*

Describe con tus propias palabras lo que es un proceso iterativo.

¿Por qué es importante el uso de la computadora y/o calculadora?

¿Qué diferencia hay entre el proceso iterativo que vamos a realizar en esta sección y los que realizamos en la sección de *Primeros Fractales*?

¿Qué es una función? ¿Qué es una iteración?

¿Qué es una órbita? ¿Qué significa “converge a 1”? ¿Qué es un “punto fijo”?

¿Qué es una órbita periódica?

Describe con tus propias palabras lo que es un análisis gráfico del proceso iterativo de una función.

¿Es imprescindible el uso de la recta  $y = x$ ? ¿Por qué?

¿Cuál es la diferencia entre un punto atractor y uno repulsor?

¿Qué es un Sistema Dinámico?

Encuentra las primeras tres iteraciones de las funciones para los valores iniciales dados.

a)  $f(x) = 2x + 1; x_0 = 1.$

b)  $f(x) = x^2; x_0 = -1$

c)  $f(x) = x^2; x_0 = -2$

d)  $f(x) = x^3 + 1; x_0 = 1.1$

e)  $f(x) = x(3 - x); x_0 = 2.1$

Dada la fórmula recursiva (en términos de sí misma)  $t_{n+1} = 2/t_n$ . Encuentra las primeras diez iteraciones para cada valor inicial, ¿qué puedes observar en cada órbita?, ¿podrías encontrar un valor inicial para el cual todas las iteraciones de esta función fueran la misma?

a)  $t_0 = 1$

b)  $t_0 = 4$

c)  $t_0 = a$

Utiliza tu calculadora para verificar que la iteración de la función raíz cuadrada eventualmente nos lleva al número 1, siempre y cuando el número inicial sea positivo. Trata con los valores iniciales  $x = 10$ ,  $x = 0.1$  y  $x = 123$ .

Haz un análisis gráfico de algunos puntos iniciales alrededor del 1. ¿Por qué sucede esto?

Utiliza tu calculadora para investigar qué sucede cuando iteramos la función  $f(x) = x^2$ . Trata con valores iniciales positivos y negativos alrededor de  $x = -1$  y  $x = 1$ . Haz un análisis gráfico de algunos de éstos puntos iniciales. ¿Existen puntos fijos para esta función? De haber, ¿son atractores o repulsores?

Verifica que la órbita de  $x$  bajo la función seno tiende a 0 sin importar el valor inicial de  $x$ . ¿Por qué? ¿Por qué es importante trabajar en radianes y no en grados? Realiza un análisis gráfico para explicar el comportamiento general de las órbitas. ¿Pasa lo mismo con la función coseno? ¿Por qué?

Lista los primeros 15 puntos en la órbita de 0 bajo cada una de las siguientes funciones. ¿Puedes predecir qué sucederá en todas las iteraciones subsecuentes?

a)  $F(x) = x + 1$

b)  $F(x) = 2(x + 1)$

c)  $F(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$

d)  $F(x) = x^2 - 1$

e)  $F(x) = x^2 - 2$

Realiza un análisis de órbita para entender el comportamiento de todas las órbitas de las siguientes funciones:

a)  $F(x) = x/2$

b)  $F(x) = -3x$

c)  $F(x) = -x$

d)  $F(x) = x^3$

e)  $F(x) = -x^2$

Dada la función  $F(x) = -x^3$ . ¿Puedes encontrar ciclos de periodo 2?

Dada la función  $G(x) = (x+1)\left(-\frac{3}{2}x+1\right)$  ¿Es el 0 un punto periódico? De serlo, encuentra su periodo y su órbita.

Para cada una de las siguientes funciones, determina si 0 es; un punto fijo, si forma parte de un ciclo o si es eventualmente periódico.

a)  $F(x) = |x|$

b)  $F(x) = 1 - x^2$

c)  $F(x) = (x - 1)^2$

d)  $F(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)(3x + 1)$

e)  $F(x) = x^2 - 2$

f)  $F(x) = \pi \cos x$

g)  $F(x) = x^2 - 2x - 1$

Utiliza una calculadora/computadora para encontrar los primeros cinco puntos de la órbita de cada  $x_0$  para cada una de las siguientes funciones:

$F(x) = x^2 + 1, \quad x_0 = 0, 1, 2$

$G(x) = 3x - 1, \quad x_0 = 1, 0.5$

$H(x) = x/3 - 1, \quad x_0 = 3, 2, -3$

Utiliza una calculadora/computadora para iterar cada una de las siguientes funciones. ¿Puedes predecir el comportamiento de la órbita?

$E(x) = e^x$

$S(x) = 1.5 \operatorname{sen} x$

$R(x) = 1/x$

$T(x) = 1/x^2$

$U(x) = 1/\sqrt{x}$

$A(x) = \arctan x$

$Q(x) = x^2 - 1$

Utiliza una calculadora/computadora para encontrar los puntos fijos y los ciclos periódicos posibles de cada una de las siguientes funciones.

$Q(x) = x^2 - 1$

$A(x) = 2 \arctan x$

$S(x) = -1.5 \operatorname{sen} x$

$L(x) = 2 - 0.5x$

$C(x) = \cos x$

Realiza un análisis de órbita para cada una de las siguientes funciones:

$$L(x) = -x/2$$

$$N(x) = x+4$$

$$Q(x) = 2x - 1$$

$$S(x) = -x^4$$

$$M(x) = -3x$$

$$P(x) = 4/x$$

$$R(x) = x^4$$

$$T(x) = -x^3$$

Dada la función  $F(x) = x^2 - 1/2$ . Encuentra el punto atractor y el intervalo de atracción.

Determina experimentalmente y mediante un análisis gráfico los puntos de atracción y sus intervalos de atracción para cada una de las siguientes funciones:

$$T(x) = -x^3$$

$$J(x) = 2.5x(1-x)$$

$$S(x) = 1/2 \text{ sen } x$$

$$H(x) = 2x(1-x)$$

$$K(x) = x^3 + 1/4x$$

Utiliza un análisis gráfico para encontrar todos los puntos de repulsión de cada una de las siguientes funciones:

$$V(x) = 1 - 2x$$

$$T(x) = x^3$$

$$F(x) = 2x(1-x)$$

Para cada una de las siguientes funciones determina cuáles de las órbitas son estables y cuales son inestables:

$$F(x) = 2x + 1$$

$$H(x) = x^3$$

$$G(x) = 1/3x - 3$$

$$J(x) = x^4$$

Utiliza la computadora para determinar si la órbita del punto inicial dado es estable en las siguientes funciones:

$$x_0 = 0, \quad S(x) = 2 \text{ sen } x$$

$$x_0 = 0, \quad T(x) = -2 \text{ sen } x$$

$$x_0 = 1/2, \quad Q(x) = 4x(1-x)$$

$$x_0 = 0, \quad J(x) = x^2 - 3$$

$$x_0 = 1, \quad R(x) = 3x(1-x)$$

$$x_0 = 0, \quad M(x) = 2x(1-x)$$

Los puntos  $x = 0$  y  $x = -1$  forman parte de un ciclo de periodo 2 para la función  $F(x) = x^2 -$

1. Usa la computadora para determinar si su ciclo es atractor o repulsor.

Uso del paquete matemático **DERIVE** para realizar ejercicios de iteración de funciones.

Una vez abierto el paquete aparece la primera pantalla con el menú principal en la parte inferior, el cual consta de los comandos: **Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage**

**Options plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX**

Para ejecutar cualquiera de éstos, se tecldea la letra mayúscula del comando o se lleva al cursor al mismo usando la tecla de espacios y se oprime la tecla **enter** o **return**.

Ahora veamos como ejemplo la iteración de la función  $f(x) = x^2 + 1$ :

1. Definición de la función a iterar.

Ejecuta el comando **A**uthor

Tecldea: **F(X):= X^2+1** (debes definirla para cada uno de los ejercicios)

2. Construcción de la iteración.

Ejecuta el comando **D**ecclare

Ejecuta el comando **F**unction

**function name: ORB**

**definition: ITERATES(F(X),X,X<sub>0</sub>,N)**

donde *ITERATES* es un comando de derive,

$X_0$  es el valor inicial y  $N$  es el número de iteraciones deseadas.

3. Simplifica la iteraciones:

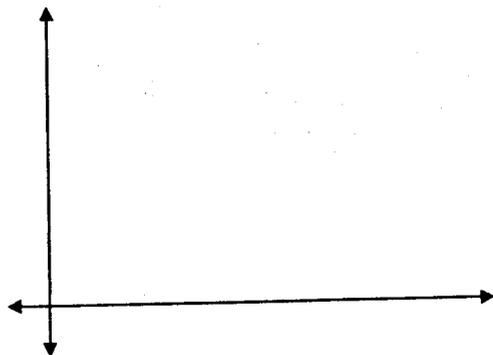
Ejecuta el comando **S**implify y especifica el número de expresión a simplificar.

4. Aproxima las iteraciones:

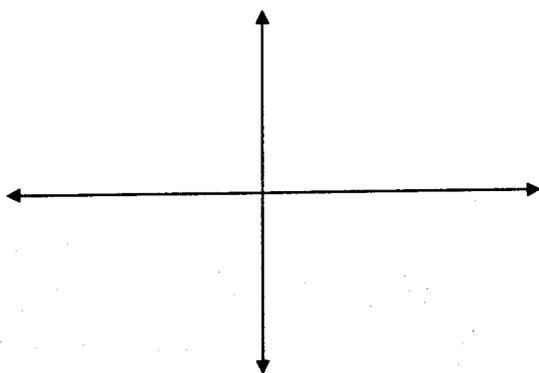
Ejecuta el comando **a**pproXimate y especifica el número de expresión a aproximar.

## 15.5 Construcción de los Conjuntos de Julia

1. Encuentra las primeras cuatro iteraciones de la función  $f(z) = 0.5z + 1$  para el valor inicial  $z_0 = 18 + 16i$ . Elabora la gráfica mostrando la órbita.



2. Dada la función  $f(z) = z^2 + c$ . Encuentra las primeras seis iteraciones para los números complejos  $z_0 = 1 + i$  y  $c = -i$ , grafica la órbita y describe el comportamiento observado.



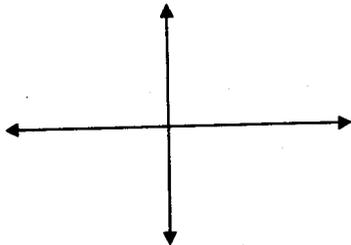
3. Encuentra las primeras cuatro iteraciones para la función  $f(z) = z^2 + c$  si

a)  $c = 2 - 3i$  y  $z_0 = 1 + 2i$

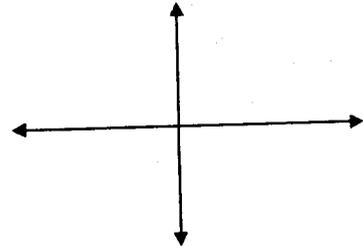
b)  $c = 5 + 3i$  y  $z_0 = i$

4. Grafica la órbita de las primeras cuatro iteraciones de la función  $f(z) = z^2 + (1+i)$  si:

$$z_0 = i$$



$$z_0 = -2$$

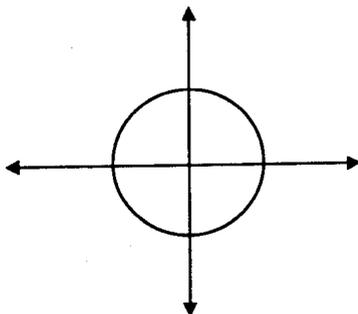


5. Si  $f(z) = z^2 + c$  es iterada con un valor inicial  $z_0 = 2 + 3i$  y  $z_1 = -1 + 15i$  encuentra el valor de  $c$ .

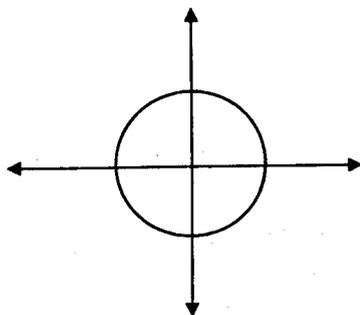
6. Encuentra las primeras cuatro iteraciones para la función  $f(z) = z^2 + c$  donde  $c = 0 + 0i$ , y los valores iniciales están dentro de las regiones  $|z_0| < 1$ ,  $|z_0| = 1$  y  $|z_0| > 1$ .

Grafica las órbitas.

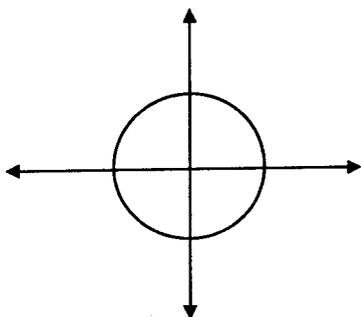
Para  $|z_0| < 1$  usa, por ejemplo,  $z_0 = 0.5 + 0.5i$



Para  $|z_0| = 1$  usa, por ejemplo,  $z_0 = 0.5 + 0.5\sqrt{3}i$

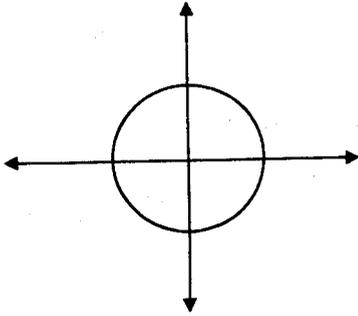


Para  $|z_0| > 1$  usa, por ejemplo,  $z_0 = 0.75 + 0.75i$



7. Determina si el conjunto de puntos prisioneros para  $f(z) = z^2 + 1 - i$  es conexo (conectado) o desconexo (desconectado). Usa  $z_0 = 0 + 0i$  y  $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

8. Encuentra las primeras cuatro iteraciones de la función  $f(z) = z^2 + c$  donde  $c = 0 + 0i$  para valores iniciales cuyos valores absolutos estén en las regiones  $|z_0| < 1$ ,  $|z_0| = 1$  y  $|z_0| > 1$ . Grafica las órbitas y describe tus resultados.



9. Determina si el conjunto prisionero para la función  $f(z) = z^2 + (1 - i)$  es conexo(conectado) o disconexo (desconectado).

10. Determina si la grafica de cada valor está en el conjunto prisionero, el conjunto escape, o en el conjunto de Julia para la función  $f(z) = z^2$ .

- |                          |                |   |
|--------------------------|----------------|---|
| a) $0.5 - 0.5i$          | b) $1 + 2i$    | c) $-0.25 - 0.2i$                       |
| d) $0.5 - 0.5\sqrt{3} i$ | e) $-1.5 + 0i$ | f) $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ |

11. Determina si el conjunto de Julia para la función  $f(z) = z^2 + 2 + 2i$  es conexo o disconexo.

12. Determina si la gráfica de cada valor está en el conjunto prisionero o escape para la función  $f(z) = z^2 + (-5 + 0i)$ .

- |             |             |                                   |
|-------------|-------------|-----------------------------------|
| a) $1 + 2i$ | b) $4 - 2i$ | c) $\frac{1 + \sqrt{21}}{2} + 0i$ |
|-------------|-------------|-----------------------------------|



## 15.6 Construcción del Conjunto de Mandelbrot

1. Para cada valor de  $c$ :

- Determina si el conjunto de Julia asociado a cada valor de  $c$  es conexo o no.
- Determina si el punto está dentro o fuera del conjunto de Mandelbrot.
- Asigna un color de acuerdo a la siguiente tabla:

Negro	si sus iteraciones no escapan a infinito
Azul oscuro	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 1 a 3 iteraciones.
Naranja	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 4 a 6 iteraciones.
Azul claro	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 7 a 9 iteraciones.
Rojo	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 10 a 12 iteraciones.
Amarillo	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 13 a 15 iteraciones.
Morado	si sus iteraciones están a 80 unidades del origen después de 16 o más iteraciones.

a)  $c = 0.8 + 0.1i$

b)  $c = -1.5 + 0.01i$

c)  $c = 0.1 + 0.05i$

2. Si una función de la forma  $f(z) = z^2 + c$  tiene un conjunto prisionero disconexo. ¿Dónde está localizada  $c$  en relación al conjunto de Mandelbrot?
3. Una de las características más interesantes de los fractales es que son autosemejantes. Es decir, encontramos pequeñas replicas del todo una y otra vez. Describe la autosemejanza que encuentras en el conjunto de Mandelbrot.

## 15.7 Construcción de Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales

¿Qué es una ecuación polinomial?

¿Qué significa resolver una ecuación?

¿Qué tipo de raíces puede tener una ecuación polinomial?

¿Cuál es la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática (de segundo grado)?

Enuncia y describe el proceso utilizado para llegar a esta fórmula.

Investiga cuales son las fórmulas para encontrar las raíces de una ecuación de tercer grado.

Investiga cuales son las fórmulas para encontrar las raíces de una ecuación de cuarto grado.

¿Existen fórmulas para resolver una ecuación de quinto grado? ¿de sexto?

Investiga cuales son los métodos para aproximar raíces de ecuaciones polinomiales.

Enuncia y describe el proceso de aplicación del método Newton-Raphson.

Da algunos ejemplos de ecuaciones polinomiales en las que no funcione este método y explica por qué.

Investiga cómo trabajar éste método en una hoja electrónica de cálculo, ya que esto te facilitará los siguientes cálculos.

Usa el método de Newton-Raphson, con la aproximación inicial  $z_1$ , para encontrar la segunda y la tercera aproximación de la raíz de la ecuación dada. Expresa tu resultado con cuatro decimales:

$$x^3 + x + 1 = 0, \quad x_1 = -1$$

$$x^5 - 10 = 0, \quad x_1 = 1.5$$

$$x^7 - 100 = 0, \quad x_1 = 2$$

Usa el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de la ecuación que se pide, con seis decimales de exactitud:

La raíz de  $x^3 - 2x - 1 = 0$ , en el intervalo  $[1, 2]$

La raíz positiva de  $2 \operatorname{sen} x = x$

La raíz de  $x^4 + x^3 - 22x^2 - 2x + 41 = 0$ , en el intervalo  $[1, 2]$

Explica por qué no es posible aproximar la raíz de la ecuación  $x^3 - 3x + 6 = 0$  con el método de Newton-Raphson si la aproximación inicial es  $z_1 = 1$ .

Si trabajamos en el plano complejo,

¿dónde se localizan las raíces de la ecuación polinomial  $z^2 - 1 = 0$ ?

¿dónde las de  $z^3 - 1 = 0$ ? ¿y las de  $z^4 - 1 = 0$ ?

Con las tres ecuaciones anteriores y siguiendo con el plano complejo,

¿qué pasa si aplicamos el método de Newton-Raphson con  $z_1 = 2$ ?

¿con  $z_1 = -2$ ? ¿con  $z_1 = 2i$ ? ¿con  $z_1 = -2i$ ?

Tomando la primera ecuación,  $z^2 - 1 = 0$ , determina cuáles puntos en el plano complejo convergen a la raíz  $1$  y cuáles a la raíz  $-1$  y, dependiendo de a cuál raíz converjan, asignales un color o tono de gris. Trata de escoger puntos representativos, es decir, aquellos que puedan darte una idea del comportamiento de los puntos a su alrededor.

Realiza el ejercicio anterior con las dos siguientes ecuaciones,  $z^3 - 1 = 0$  y  $z^4 - 1 = 0$ , y, de ser posible, usa una computadora para revisar todos los puntos del plano.

# 16 Definiciones Generales

Un *sistema dinámico* es, básicamente, un proceso en movimiento. Por ejemplo, el movimiento de las estrellas y galaxias en el espacio, las casas de bolsa, el clima, el incremento o decremento de poblaciones y el movimiento de un péndulo. Los sistemas dinámicos son estudiados con el fin de predecir hacia dónde se dirige.

La *teoría del caos* es la rama de las matemáticas que trata de explicar el hecho de que sistemas sensibles a condiciones iniciales tengan resultados complejos e impredecibles. Un ejemplo muy común es el conocido como “efecto mariposa”, el cual dice que, en teoría, el aleteo de una mariposa en China puede afectar el clima en Nueva York, que está a miles de millas de distancia. En otras palabras, es posible que un pequeño cambio produzca resultados impredecibles, y algunas veces drásticos, al disparar una serie de eventos cada vez más significativos.

La *teoría de los sistemas complejos* estudia la forma en que los fenómenos complejos pueden producirse de causas simples. Estudian sistemas que han resistido las teorías clásicas como la predicción del tiempo, la turbulencia, el crecimiento hormonal, etc.

Los *números trascendentales* son aquellos números que no son algebraicos, es decir, que no satisfacen una ecuación polinomial de la forma  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ .

La *topología* ha sido descrita como la ciencia del espacio, como las matemáticas del continuo, como la “geometría de la hoja de hule” y como un estado mental. Como la lógica y la teoría de conjuntos, la topología es tan fundamental que se infiltra en casi todas las ramas de las matemáticas. La topología y la teoría de conjuntos forman las bases del cálculo moderno; por ejemplo, los conceptos de límite, conectividad, continuidad y compacidad son de la topología.

Un objeto geométrico es *autosemejante* si consiste de pequeñas réplicas del objeto completo.

Un *proceso iterativo* es aquel que consiste de iteraciones, es decir, un proceso que involucra el tomar la figura, o dato, de salida como la figura, o dato, de entrada.

Un *conjunto numerable* es aquel que es finito o si tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los enteros positivos.

Una *curva continua no diferenciable* es aquella curva continua que no tiene derivada en ninguno de sus puntos.

Una *iteración* es el proceso de aplicar una regla repetidamente, tomando cada dato (o figura) de salida como el nuevo dato (o figura) de entrada.

Una *serie geométrica* es aquella en donde cada término se obtiene a partir del anterior, al multiplicar por la razón común  $r$  de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \Lambda + ar^{n-1} + \Lambda$$

La *dimensión topológica* de un conjunto es un entero no negativo. Si el conjunto es totalmente desconexo (desconectado) su dimensión topológica es 0; si cada punto tiene pequeñas vecindades arbitrarias con frontera de dimensión cero entonces su dimensión topológica es 1; si cada punto tiene pequeñas vecindades arbitrarias con frontera de dimensión 1 entonces su dimensión topológica es 2; y así sucesivamente.

La *dimensión Hausdorff* de un subconjunto acotado de  $\mathcal{R}^m$  es un número real que puede ser usado para caracterizar la complejidad geométrica de subconjuntos acotados de  $\mathcal{R}^m$ . Una de las razones de su importancia es que se asocia con un método para comparar los “tamaños” de conjuntos cuya dimensión fractal es la misma.

Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathcal{R}^m, \text{euclidea})$ . Para cada  $p \in [0, \infty)$  la cantidad  $\mathcal{M}(A, p)$  descrita anteriormente es llamada la medición  $p$ -dimensional Hausdorff de  $A$ .

Teorema: Sea  $m$  un entero positivo. Sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclideana})$ . Sea  $\mathcal{M}(A, p)$  la función de  $p \in [0, \infty)$  definida arriba. Entonces existe un único número real  $D_H \in [0, m)$  tal que

$$\mathcal{M}(A, p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p < D_H \text{ y } p \in [0, \infty) \\ 0 & \text{si } p > D_H \text{ y } p \in [0, \infty) \end{cases}$$

Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclideana})$ . El número real correspondiente,  $D_H$ , del teorema anterior es llamado la dimensión Hausdorff-Besicovitch del conjunto  $A$ . Este número será denotado por  $D_H(A)$ .

De acuerdo a Mandelbrot, un *fractal* es un conjunto para el cual la dimensión Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente su dimensión topológica. En términos más informales, Mandelbrot ha descrito a los fractales como formas “hechas de partes semejantes al todo en cierta forma”.

Otra posible definición es “un *fractal* es una figura geométrica que tiene dos propiedades especiales: es autosemejante y tiene una dimensión fraccionaria.

La *dimensión euclideana* es aquella que involucra el número de direcciones o grados de libertad mostrados por un objeto, y se mide en términos de longitud, área y volumen. Usando esta noción, todos los objetos de la geometría euclideana tienen dimensión entera no negativa.

La *dimensión fractal* de un objeto es un número real positivo que indica, por ejemplo, que tanto llena, dicho objeto, el lugar en que se encuentra. Este “lugar” puede ser un plano o el espacio. La dimensión fractal es importante ya que puede ser definida en conexión con el mundo real, y puede ser aproximada por medio de experimentos (como en la medición de la dimensión fractal de una línea costera).

Un *Sistema de Funciones Iterables* es una colección finita de funciones de contracción que al iterarse generan una figura.

# 17 Sugerencias para una posible Implementación de un Curso de Geometría Fractal

Tomando en consideración los trabajos analizados sobre las experiencias en otros países, principalmente Estados Unidos de América y Canadá, que integran la Geometría Fractal en sus cursos de bachillerato, se propone que el posible curso o taller se implemente considerando los aspectos resumido en la Tabla 17.1 y los cuales se discuten en las secciones a continuación.

Tipo de curso en cuanto a extensión	<ul style="list-style-type: none"> <li>- De 2 a 3 semanas en el cierre del último curso de matemáticas del bachillerato, de ser este cálculo.</li> <li>- De no ser cálculo, ver a detalle en la siguiente sección.</li> </ul>
Actividades del alumno	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lecturas y posteriores discusiones en clase.</li> <li>- Prácticas de laboratorio.</li> <li>- Proyectos de investigación o simulación en equipo.</li> <li>- Construcción de material didáctico.</li> </ul>
Población a quién va dirigido	Los alumnos a través del profesor.
Papel del profesor	Facilitador o guía del proceso.
Forma de evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proyecto de investigación de una aplicación de la Geometría Fractal y exposición grupal de resultados en clase.</li> <li>- Desarrollo y entrega de material didáctico enfocado a la enseñanza de la Geometría Fractal elaborado bajo criterios específicos.</li> </ul>

Tabla No. 17.1 Características generales de la propuesta para la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato

## **Tipo de Curso en cuanto a extensión**

Lo recomendable es destinar entre dos y tres semanas del último curso de matemáticas del bachillerato que, en el contexto descrito, corresponde a un curso de geometría analítica o de cálculo. Las ventajas de hacerlo de esta forma están en que se esperaría que, a estas alturas, se hubiesen completado la mayoría de los temas obligados, garantizando así que el alumno cuente con las bases adecuadas para el estudio de la Geometría Fractal. Sin embargo, en realidad no hay una extensión máxima, ya que el manual cuenta con material suficiente como para extender el curso hasta incluso un semestre completo. En cuanto a una extensión mínima, no se recomienda disponer de menos de dos semanas si lo que se pretende es presentar una visión general de los temas básicos de la Geometría Fractal; aunque no se descarta la posibilidad de tomar temas muy específicos y tratarlos en algunas clases de matemáticas de otros niveles como, por ejemplo, cuando se introducen los números complejos o el concepto de función.

## **Actividades del Alumno**

Dado que el manual ha sido elaborado con un enfoque constructivista, se requiere involucrar al alumno en su proceso de aprendizaje mediante una serie de actividades diversas, tales como lecturas, ensayos, discusiones, investigaciones, trabajo en prácticas y reportes, actividades individuales y en equipo. Es importante considerar que la asignación y el monitoreo de cada una de estas actividades propuestas debe planearse y prepararse cuidadosamente antes de ser puesta en práctica con un grupo de alumnos, ya que el éxito o el fracaso estará en gran medida en función de la maestría y el cuidado que el profesor ponga en su diseño.

## **Población a la que puede dirigirse**

A pesar de que, en parte de la bibliografía analizada, la población a la que fue dirigida un curso o taller de Geometría Fractal fueron profesores o alumnos de niveles distintos al bachillerato, es natural que, por las características de este trabajo, se esté pensando en un curso en el cual la población consistirá de adolescentes entre 15 y 18 años principalmente. Más en lo particular, aquellos que ya hayan cursado los primeros cursos de

matemáticas del bachillerato en cualquier programa en donde, será responsabilidad del profesor o grupo de profesores, el adecuar qué temas y en qué momentos éstos deberán introducirse a los alumnos.

## **Rol del Profesor**

Por las mismas razones por las que el papel del alumno ha cambiado, el rol del profesor que trabaje este material no se espera que sea solamente el de un expositor. El profesor ahora actuará en muchas de las veces como un facilitador o guía para los alumnos, sobre todo en el manejo de discusiones grupales e individuales que conduzcan a la construcción de los conceptos de la Geometría Fractal.

## **Forma de Evaluación**

La forma de evaluación del curso dependerá en gran manera de las características con las cuales se haya implementado en una situación particular. Se propone utilizar métodos alternativos al uso de un examen de conocimientos, tales como el diseño de un proyecto, una exposición en clase, la elaboración de algún material o una investigación. Todas estas actividades debe de buscarse que sean trabajadas por los alumnos en forma grupal o por equipos.

Se recomienda consultar los Estándares del NCTM si se desea profundizar en cuanto a las posibilidades y los alcances de la forma de evaluación.

# 18 Matemáticas Subyacentes a la Construcción de los fractales

Los fractales pueden ser vistos desde dos puntos de vista. El que se presenta a un alumno de bachillerato utilizando un lenguaje accesible y familiar a él, basado en conceptos matemáticos que se le han enseñando en sus cursos de matemáticas. Y el que sustenta formalmente todas esas definiciones y conceptos desde dos teorías matemáticas: la topología y la teoría de la medida.

Históricamente la primera definición de un fractal, publicada por Mandelbrot en el año de 1977, se hizo desde un contexto puramente matemático que involucra los conceptos de dimensión topológica y dimensión Hausdorff-Besicovitch: “un fractal es aquel conjunto para el cual su dimensión Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente a su dimensión topológica”. Los conceptos involucrados con esta definición no serán presentados a los alumnos de bachillerato ya que en ese nivel académico no se cuenta con los antecedentes matemáticos suficientes para entenderlos; pero es conveniente que el profesor tenga acceso a las definiciones y teoremas que justifican la existencia de los fractales dentro de éstas dos teorías matemáticas, por que esto le va a dar los elementos suficientes para responder a las posibles inquietudes que se generen durante el trabajo con sus alumnos.

La topología métrica es el esqueleto matemático adecuado para explicar la construcción formal de un fractal y sirve para justificar y explicar, en forma matemática, el descubrimiento de los fractales. El estudio de esta matemática llevará al estudio de las técnicas y principios que Michael Barnsley, profesor de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Georgia, desarrolló y que hicieron posible el modelar objetos naturales y crear imágenes abstractas de gran complejidad y belleza. Barnsley usó el concepto de autosemejanza de los fractales en el desarrollo de un *sistema* para generar automáticamente fractales de todos tipos, desde nubes hasta objetos nunca antes vistos. El sistema está compuesto de ciertas *funciones* simples, llamadas contracciones, las cuales se van a *iterar* (evaluar repetidamente) y lo cual va a generar una imagen, que puede ser un fractal. Estos

sistemas de funciones reciben el nombre de *Sistemas de Funciones Iterables* o SFI (Iterated Function Systems o IFS) y cada uno de ellos expresa una imagen como un conjunto de funciones. La simplicidad de estas funciones permite controlar la forma de los fractales y moldearlos a la forma que deseamos.

Es debido a esta simplicidad de las funciones que SFI es la rama más comercial de la Geometría Fractal, por ejemplo en las artes gráficas, y es también una promesa en la compresión y transmisión de imágenes en la tecnología de video, lo que significa reducir la cantidad de datos necesarios para guardar la imagen ya que los parámetros que describen las funciones son mucho más pequeños, en cuanto a espacio se refiere, que una lista de todos los elementos (píxeles) de una imagen. Otras ramas de la Geometría Fractal están más orientadas a la exploración, pero SFI es muy útil cuando se sabe cómo es el fractal a generarse. El fractal generado por SFI puede ser un fractal no muy interesante, como sería un segmento de recta, o uno sumamente interesante como sería el triángulo de Sierpinski.

El fractal generado es el conjunto del plano que se mantiene sin cambio al ser evaluado por el SFI o, en otras palabras, es el conjunto invariante a la transformación del SFI. Si todas las transformaciones del SFI son contracciones, entonces cualquier punto en el plano, que pase a través de la transformación (contracción) repetidamente, eventualmente se acercará al fractal. Este hecho ha llevado a asociar a los fractales con el concepto de “atractor” de los Sistemas Dinámicos y de ahí que al conjunto de puntos que pasan por un SFI y se mantienen sin cambio se le llame “atractor” del SFI.

Finalmente, es importante mencionar que el estudio de los fractales generados por SFI desarrolla la habilidad de ver un objeto como una estructura compuesta por pequeñas copias de sí misma, lo que sucede muy a menudo en la naturaleza; y, por otro lado, provee un marco conveniente para la descripción, clasificación y comunicación de los fractales

## Introducción

El estudio de las matemáticas detrás de los fractales desarrollados por medio de sistemas de funciones a iterar comienza con la definición y ejemplificación del concepto de *espacio métrico* ya que éstos forman una base conveniente para estudiar tales sistemas de funciones. Después se introducen las ideas topológicas básicas para la descripción de subconjuntos de espacios tales como  $\mathbb{R}^2$ . Entre estos conceptos se encuentran los de *abierto, cerrado, compacidad, convergencia, completud, conexidad y equivalencia de espacios métricos*, cada una de las cuales se define y se ejemplifica.

Enseguida se presenta un espacio métrico,  $H$ , cuyos elementos son los subconjuntos no vacíos compactos de un espacio métrico, el cual, bajo ciertas condiciones es completo y es entonces cuando los objetos denominados fractales pueden ser encontrados en él. Después se establece el teorema del punto fijo y la construcción de funciones de contracción en el espacio  $H$ , lo cual lleva a la definición de los fractales como puntos fijos de funciones definidas. Finalmente se define el concepto de Sistemas de Funciones a Iterar (SFI) y cómo es que éste puede definir un fractal.

Aquí es donde termina este estudio de las matemáticas formales detrás de la construcción de los fractales, pero es importante mencionar que aún hay material por estudiar ya que se puede continuar con el estudio del problema inverso, es decir, dado un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ , que es un fractal, encontrar las transformaciones que lo generaron, lo cual está relacionado con el *teorema del "Collage"*. En seguida el concepto de "dirección" de puntos en ciertos fractales y el espacio métrico al cual pertenecen. Después la introducción los *Sistemas Dinámicos en Espacios Métricos* y la descripción de las ideas de órbitas, ciclos repulsivos y sistemas dinámicos equivalentes. El establecimiento de la equivalencia de este sistema dinámico con un sistema correspondiente en el espacio de las "direcciones" para la definición de un sistema dinámico caótico. Luego la introducción del concepto de *dimensión fractal* como un número que indica que tan densamente ocupa el espacio métrico en el que se encuentra el conjunto y la de *dimensión Hausdorff-Besicovitch* el cual es otro número que puede ser asociado al conjunto, pero menos práctico que el de

dimensión fractal. La introducción de los conjuntos de Julia como fractales determinísticos que surgen de la iteración de funciones analíticas de números complejos en números complejos (de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ ) y la construcción de mapas de ciertos espacios, espacios paramétricos, donde cada punto del espacio corresponde a un fractal. Para finalizar con el estudio de mediciones en fractales y mediciones en general (teoría de las mediciones).

Los temas que esta teoría involucra son los siguientes:

- Definición de ESPACIO Y PUNTO
- Definición de MÉTRICA
- Definición de ESPACIO MÉTRICO
- Definición de BOLA ABIERTA, BOLA CERRADA Y ESFERA
- Definición de MÉTRICAS EQUIVALENTES
- Teorema de Métricas
- Definición de MÉTRICA DISCRETA
- Definición de CONJUNTO ABIERTO Y CONJUNTO CERRADO
- Teorema de Métricas y Conjuntos Abiertos
- Propiedades de los Conjuntos Abiertos
- Definición de TOPOLOGÍA
- Definición de ESPACIO TOPOLÓGICO
- Definición de TOPOLOGÍA INDUCIDA POR UNA MÉTRICA
- Teorema: Métricas Equivalentes inducen una misma topología
- Definición de SUCESIÓN DE PUNTOS
- Definición de SUCESIÓN CONVERGENTE
- Interpretación de la convergencia en términos de bolas
- Teorema de Unicidad de Límite
- Definición de PUNTO LÍMITE
- Definición de PUNTO AISLADO
- Lema: Un punto límite es límite de una sucesión
- Definición de SUCESIÓN CONSTANTE
- Definición de SUCESIÓN DE CAUCHY

- Definición de CERRADURA DE UN CONJUNTO
- Teorema de Cerradura
- Definición de CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN
- Definición de CONJUNTO IMAGEN
- Teorema de Continuidad
- Propiedades Equivalentes de Continuidad
- Definición de ESPACIO COMPLETO
- Definición de ISOMETRÍA
- Definición de FUNCIÓN SOBREYECTIVA
- Definición de ESPACIOS ISOMÉTRICOS
- Definición de CONJUNTO DENSO
- Definición de ENCAJE
- Teorema de COMPLETACIÓN
- Definición de CUBIERTA DE ABIERTOS
- Definición de CONJUNTO COMPACTO
- Definición de CONJUNTO ACOTADO
- Teorema de Bolzano-Weistrass
- Definición de CONJUNTO SUCESIONALMENTE COMPACTO
- Lema: Compacto implica Completo
- Teorema del PUNTO FIJO
- Teorema: Imagen Continua de un Compacto es Compacto
- Definición de DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN CONJUNTO
- Definición de DISTANCIA ENTRE DOS CONJUNTOS
- Definición de DISTANCIA HAUSDORFF
- Definición de DILATACIÓN DE UN CONJUNTO
- Teorema de Compactos
- Definición de ESPACIO DE CONJUNTOS COMPACTOS
- Teorema de Contracciones
- Definición de SISTEMA DE FUNCIONES ITERABLES

# TOPOLOGÍA MÉTRICA

*La Geometría Fractal te hará ver todo diferente. Hay peligro al seguir leyendo. Tienes el riesgo de perder tu visión de la infancia acerca de las nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, rocas, montañas, torrentes de agua, alfombras, ladrillos, y muchos otros más. Nunca más tu interpretación de estos objetos será la misma.*

*Michael F. Barnsley*

Definición.

Un espacio es un conjunto no vacío cualquiera.

Los puntos del espacio son los elementos del conjunto.

Ejemplos de espacios:

El conjunto de los números reales =  $\mathcal{R}$ .

Los puntos del espacio son los números reales.

El conjunto de todas las funciones reales continuas del intervalo  $[0,1]$  a  $\mathcal{R}$ ,

Los puntos del espacio son las funciones continuas del intervalo  $[0,1]$  a  $\mathcal{R}$ .

El conjunto de todos los puntos en el Plano Cartesiano =  $\mathcal{R}^2$ .

Los puntos del espacio son puntos en el Plano Cartesiano

Definición.

Dado un espacio  $X$ . Se define una métrica  $d$  como una función que va del producto cartesiano de puntos del espacio a los reales no negativos  $d : X \times X \rightarrow \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$  y que cumple con los siguientes axiomas:

1.  $d(x, y) \geq 0$   $\forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$   $\forall x, y \in X$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$   $\forall x, y \in X$
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$   $\forall x, y, z \in X$

Una métrica “mide” la distancia entre pares de puntos del espacio  $x$  y  $y$  siempre cumple que:

1. La distancia nunca es negativa.
2. La distancia sólo es cero si los objetos entre los cuales estamos midiendo la distancia son el mismo.
3. La distancia de un objeto a otro es la misma que la distancia del segundo objeto al primero. Propiedad Simétrica.
4. La distancia entre dos puntos es menor o igual a la suma de las distancias del primer objeto a un tercero y la del tercer objeto al segundo. Desigualdad del Triángulo.

Definición.

Un espacio métrico  $(X, d)$  es un espacio  $X$  con una métrica  $d$ .

Ejemplo de una métrica  $d$  en el espacio  $X = \mathcal{R}$ .

Sean  $A, B$  y  $C$  puntos del espacio  $X$  donde  $A = x_1, B = x_2$  y  $C = x_3$ .

Definimos la función  $d(A, B) = |x_1 - x_2|$ .

Ahora demostramos que  $d$  es una métrica:

$$d(A, B) \geq 0 \quad |x_1 - x_2| \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \quad |x_1 - x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$d(A, B) = d(B, A) \quad |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) \quad |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$$

Como  $d$  es una métrica en el espacio  $X$ , decimos que  $(\mathcal{R}, d)$  es un espacio métrico.

Ejemplos de métricas (distancias) en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$ :

Sean  $A$  y  $B$  puntos del espacio  $X$  donde  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$

Definimos las siguientes funciones:

- Métrica “del Taxista” (suma de catetos)

La distancia entre dos puntos del espacio esta dada por la suma de las distancias horizontal y vertical (catetos) del triángulo formado:

$$d_1(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Algunas veces se refiere a esta métrica como Métrica Manhattan ya que es la distancia que tendría que recorrer un taxi en Manhattan, NY para del punto  $A$  al punto  $B$ , como se puede apreciar en la figura 18.1.

- Métrica Euclideana (hipotenusa)

La distancia entre dos puntos del espacio está dada por la distancia directa (hipotenusa) entre los dos puntos (fórmula Pitagórica):

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ver figura 18.1.

- Métrica del Máximo (valor del mayor cateto)

La distancia entre dos puntos del espacio es la mayor de las distancias horizontal o vertical:

$$d_\infty(A, B) = \text{Max} \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$$

Ver figura 18.1.

Las tres funciones anteriores cumplen con los cuatro axiomas (la demostración de una de ellas sigue en el ejercicio), por lo tanto  $(X, d_1)$ ,  $(X, d_2)$  y  $(X, d_\infty)$  son espacios métricos.

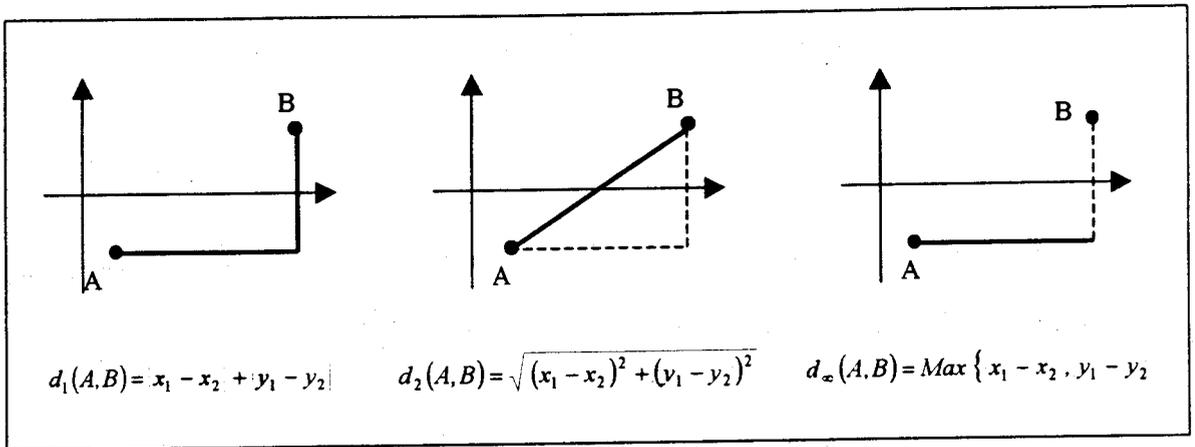


Fig. 18.1 Representación gráfica de la métrica del taxista, la métrica euclídeana y la métrica del máximo.

Ejercicio. Demostración de que  $d_1$  es una métrica en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$ :

Sean  $A, B$  y  $C$  puntos del espacio  $X$ , con  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  y  $C = (x_3, y_3)$ .

1er. Axioma:  $d_1(A,B) \geq 0$

$d_1(A,B) \geq 0$  ya que  $|x_1 - x_2|$  y  $|y_1 - y_2|$  son no negativos

2do. Axioma:  $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$        $d_1(A,B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponemos  $d_1(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$ .

Como  $|x_1 - x_2|$  y  $|y_1 - y_2|$  son no negativos, entonces cada uno es igual a cero. Por lo tanto  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ . Por lo tanto  $A = B$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponemos  $A = B$ .

Entonces  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ ,

Por lo tanto  $x_1 - x_2 = 0$  y  $y_1 - y_2 = 0$ . Por lo tanto  $d_1(A,B) = 0$

3er. Axioma:  $d_1(A,B) = d_1(B,A)$       Propiedad Simétrica.

$$\begin{aligned} d_1(A,B) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |-(x_2 - x_1)| + |-(y_2 - y_1)| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d_1(B,A) \end{aligned}$$

4to. Axioma:  $d_1(A,B) \leq d_1(A,C) + d_1(C,B)$       Desigualdad del Triángulo.

i) Sean  $a, b \in$  reales.

Afirmamos que  $|a + b| \leq |a| + |b|$       Desigualdad del Triángulo

Demostración:  $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$$

Si  $a, b$  son del mismo signo, entonces  $(a + b)^2 = (|a| + |b|)^2$ .

Si  $a, b$  son de signos opuestos, entonces  $(a + b)^2 < (|a| + |b|)^2$ .

En cualquier caso  $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

Por lo tanto  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Consecuencia:  $|a - b| = |a - c + c - b| \leq |a - c| + |c - b|$

$$\begin{aligned} \text{ii) } d_1(A, B) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\ &= d_1(A, C) + d_1(C, B). \end{aligned}$$

Observación.

Aunque  $d_2$  y  $d_\infty$  cumplen con los axiomas de la definición de métrica en forma similar a  $d_1$ , la demostración de esto es un poco más complicada y preferimos no incluirla.

Definiciones.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x_0$  un punto de  $X$  y  $r$  un número real positivo.

Una Bola Abierta con centro en  $x_0$  y radio  $r$  es  $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ .

Es decir, una bola abierta esta formada por todos los puntos del espacio que estén a una distancia menor que  $r$  de un punto  $x_0$ .

Una Bola Cerrada con centro en  $x_0$  y radio  $r$  es  $C(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ .

Lo que significa que una bola cerrada esta formada por todos los puntos de una bola abierta más aquellos que estén a una distancia igual a  $r$  del punto  $x_0$ .

La diferencia entre una bola abierta y una cerrada son solamente los puntos que se encuentren en la frontera marcada por la distancia.

Una Esfera con centro en  $x_0$  y radio  $r$  es  $E(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ .

Por lo que una esfera sólo está formada por aquellos puntos que estén a exactamente la distancia  $r$  del punto  $x_0$ , que es la frontera marcada por la distancia.

Las tres definiciones anteriores involucran el concepto de distancia o métrica, por lo que es importante especificar siempre cuál métrica, de las definidas anteriormente, es la involucrada. Se usará la notación ejemplificada a continuación:

$$B_1(x_0, r) = \{x \in X \mid d_1(x, x_0) < r\}$$

que representa una bola abierta con centro en  $x_0$ , radio  $r$  en la métrica  $d_1$ ,

$$C_2(x_0, r) = \{x \in X \mid d_2(x, x_0) \leq r\}$$

que representa una bola cerrada con centro en  $x_0$ , radio  $r$  en la métrica  $d_2$ , y

$$E_\infty(x_0, r) = \{x \in X \mid d_\infty(x, x_0) = r\}$$

que representa una esfera con centro en  $x_0$ , radio  $r$  en la métrica  $d_\infty$ .

Antes de continuar con los ejemplos es importante mencionar que, aunque las anteriores definiciones involucran las palabras “bola” y “esfera”, su representación geométrica no necesariamente involucra una de éstas en la forma en la que uno está acostumbrado. Su representación depende del tipo de métrica en la que sea definida, lo cual se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplos de bolas en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$  con las métricas ya definidas:

Considere el espacio métrico  $(X, d_2)$ , el punto  $(0,0) \in X$  y un número real positivo  $r$ .

Una bola abierta con centro en  $(0,0)$  y radio  $r$  está formada por todos los puntos del espacio que están a una distancia menor que  $r$  del punto  $(0,0)$ . Es decir,  $B((0,0), r) = \{(x, y) \mid d_2((0,0), (x, y)) < r\}$  es una bola abierta con centro en el origen y radio  $r$ .

Lo cual representa un disco con centro en  $(0,0)$  y radio  $r$  como se puede ver en la figura 16.2:

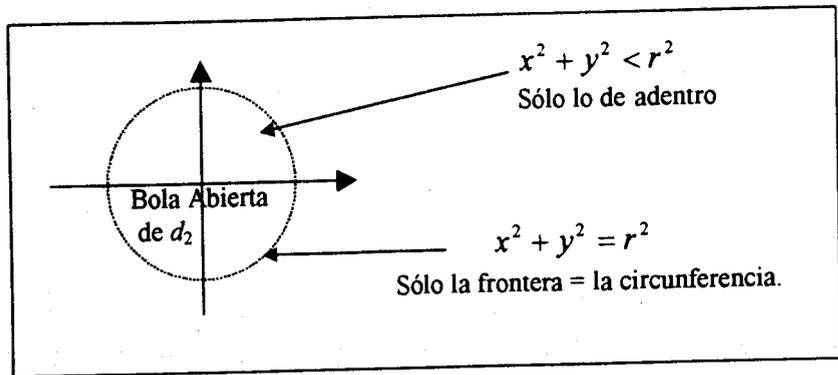


Fig. 18.2 Representación gráfica de una bola abierta en la métrica euclídeana.

Entonces  $d_2((0,0), (x,y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\sqrt{x^2 + y^2} < r$

Si no se incluye la frontera se tiene una bola abierta, y una bola cerrada si se incluye como se ve en la figura 16.3:

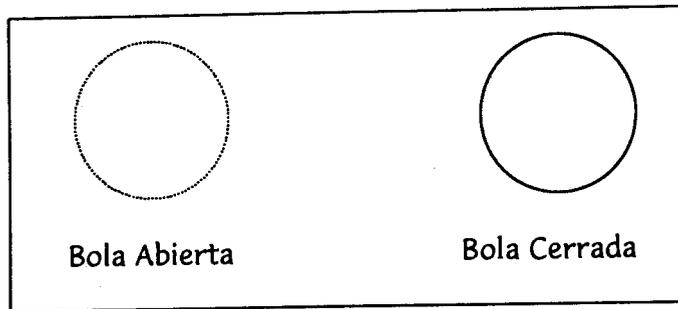


Fig. 18.3 Comparación gráfica entre una bola abierta y una cerrada en la métrica euclídeana.

Ahora considere el espacio métrico  $(X, d_1)$ , el punto  $(0,0) \in X$  y la distancia  $r = 1$ .

Una bola abierta con centro en  $(0,0)$  y radio  $r$  está formada por todos los puntos del espacio tal que la suma de sus distancias horizontal y vertical al punto  $(0,0)$  sea menor que 1. Es decir,  $B_1((0,0), 1) = \{(x,y) \mid |x-0| + |y-0| < 1\}$  es una bola abierta con centro en el origen y radio 1.

Lo cual representa un rombo, como se muestra en la figura 18.4, con centro en  $(0,0)$  y lado de longitud  $\sqrt{2}$ :

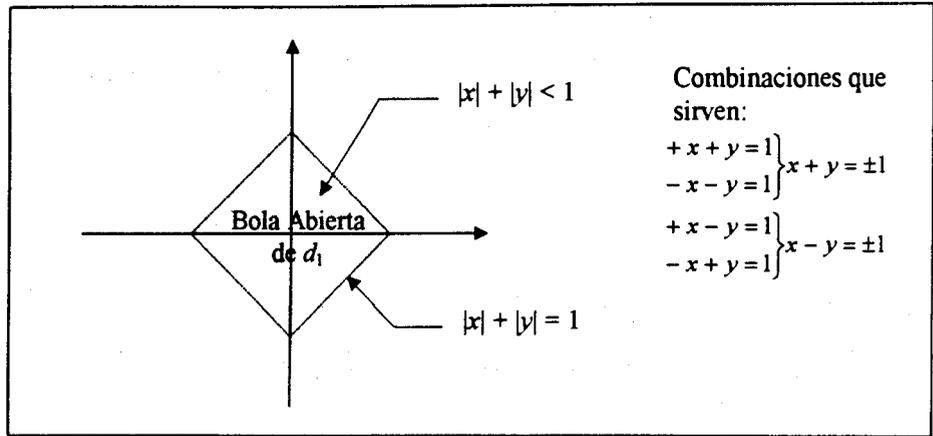


Fig. 18.4 Representación gráfica de una bola abierta en la métrica del taxista

De igual forma, si la bola es abierta no se incluye la frontera, y si es bola cerrada sí se incluye.

Finalmente considere el espacio métrico  $(X, d_\infty)$ , el punto  $(0,0) \in X$  y el valor  $r = 1$ .

Una bola abierta con centro en  $(0,0)$  y radio 1 está formada por todos los puntos del espacio tal que la máxima distancia (horizontal o vertical) al punto  $(0,0)$  sea menor que 1.

Es decir,  $B_\infty = ((0,0), 1) = \{(x, y) \mid \text{Max}\{x-0, y-0\} < 1\}$  es una bola abierta con centro en el origen y radio 1.

Lo cual representa un cuadrado, como se ve en la figura 18.5, con centro en  $(0,0)$  y lado de longitud 2:

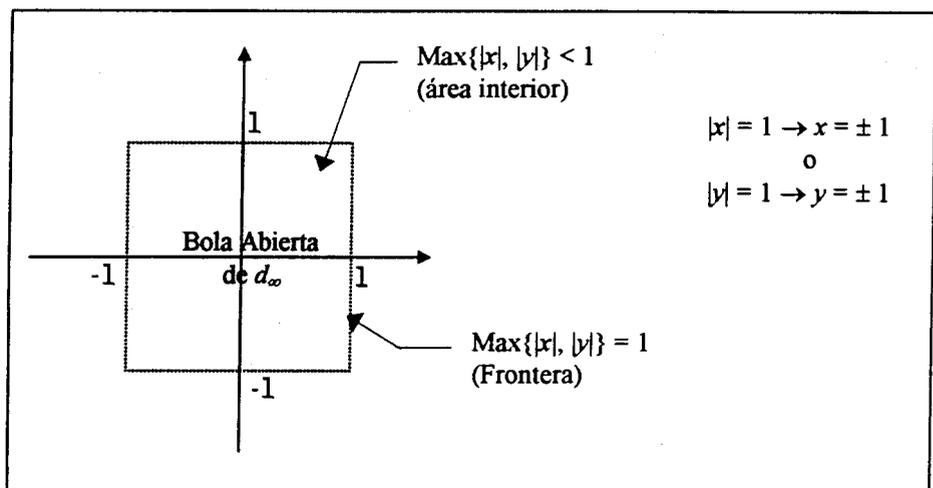


Fig. 18.5 Representación gráfica de una bola abierta en la métrica del máximo.

De igual forma, si la bola es abierta no se incluye la frontera, y si es bola cerrada sí se incluye.

Si se grafican las bolas cerradas (o abiertas) en el espacio  $X = \mathcal{H}^2$  correspondientes a las tres métricas o distancias ya vistas se tiene:

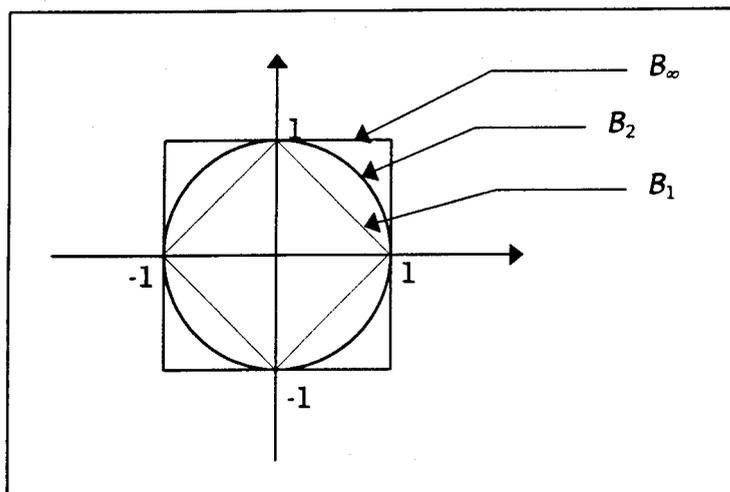


Fig. 18.6 Representación gráfica de las bolas cerradas con centro en el origen y radio 1 en las tres métricas vistas.

**Definición.**

Sea  $X$  un espacio y sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas en  $X$ .

Se dice que  $d_1$  y  $d_2$  son métricas equivalentes,  $d_1 \sim d_2$ , si existen dos números  $\alpha, \beta > 0$  tal que

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Es decir, dos métricas,  $d_1$  y  $d_2$ , son equivalentes si existen dos números positivos,  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que  $\alpha$  veces la métrica  $d_1$  es menor o igual a la métrica  $d_2$ , y a su vez esta última métrica es menor o igual a  $\beta$  veces la métrica  $d_1$ .

Más adelante veremos que dos métricas también son equivalentes cuando definen el mismo espacio topológico.

### Teorema de Métricas Equivalentes.

Sea  $X$  un espacio y sean  $d_1, d_2$  y  $d_3$  tres métricas en  $X$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{a) } d_1 \cong d_1 \quad \text{Propiedad Reflexiva}$$

$$\text{b) } d_1 \cong d_2 \Rightarrow d_2 \cong d_1 \quad \text{Propiedad Simétrica}$$

$$\text{c) } d_1 \cong d_2, d_2 \cong d_3 \Rightarrow d_1 \cong d_3 \quad \text{Propiedad Transitiva}$$

Demostración.

$$\text{a) } d_1 \cong d_1 \quad \text{Propiedad Reflexiva}$$

Si tomamos  $\alpha = \beta = 1$ , esto da lugar a  $d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ .

Con lo cual queda demostrado.

$$\text{b) } d_1 \cong d_2 \Rightarrow d_2 \cong d_1 \quad \text{Propiedad Simétrica}$$

Por hipótesis  $d_1 \cong d_2$ , entonces existen  $\alpha, \beta > 0$  tal que

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Por demostrar: que existen  $\alpha', \beta' > 0$  tal que

$$\alpha' d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta' d_2(x, y):$$

Se toma la desigualdad:  $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$ ,

se separa y despeja:  $d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, y)$  y  $\frac{1}{\beta} d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ ,

de donde se obtiene:  $\frac{1}{\beta} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, y)$ .

Por lo que se toma  $\beta' = \frac{1}{\alpha}$  y  $\alpha' = \frac{1}{\beta}$ ,

por lo tanto  $\alpha' d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta' d_2(x, y)$ .

$$\text{c) } d_1 \cong d_2, d_2 \cong d_3 \Rightarrow d_1 \cong d_3 \quad \text{Propiedad Transitiva}$$

Por hipótesis  $d_1 \cong d_2$ , entonces existen  $\alpha, \beta > 0$  tal que

$$\text{i) } \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Por hipótesis  $d_2 \cong d_3$ , entonces existen  $\alpha', \beta' > 0$  tal que

$$\text{ii) } \alpha' d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq \beta' d_2(x, y).$$

Por demostrar: que existen  $\alpha', \beta' > 0$  tal que

$$\alpha' d_1(x, y) \leq d_3(x, y) \leq \beta' d_1(x, y):$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \text{ por } i \\ \alpha' d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \text{ por } ii \end{array} \right\} \Rightarrow d_2(x, y) \leq \frac{1}{\alpha'} d_3(x, y)$$

$$\text{Por lo tanto } \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \frac{1}{\alpha'} d_3(x, y)$$

$$\Rightarrow \alpha d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha'} d_3(x, y) \Rightarrow \alpha \alpha' d_1(x, y) \leq d_3(x, y).$$

$$\left. \begin{array}{l} d_3(x, y) \leq \beta' d_2(x, y) \text{ por } ii \\ d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \text{ por } i \\ \Rightarrow \beta' d_2(x, y) \leq \beta' \beta d_1(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow d_3(x, y) \leq \beta' \beta d_1(x, y)$$

Combinando los dos últimos resultados se tiene que

$$\alpha \alpha' d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \beta' d_1(x, y).$$

Por lo tanto  $d_1 \cong d_3$ .

Ejercicio.

Demostración de que  $d_1 \cong d_2$  en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$ .

Sean  $A, B$  puntos del espacio  $X$ , donde  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$ .

Recordando que  $d_1(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  y

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por demostrar: que existen dos números  $\alpha, \beta > 0$  tal que

$$\alpha d_1(A, B) \leq d_2(A, B) \leq \beta d_1(A, B) \quad \forall A, B \in X:$$

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$$

Sumando estas dos desigualdades se tiene:  $2d_2(A, B) \geq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = d_1(A, B)$

$$2d_2(A,B) \geq d_1(A,B) \Rightarrow d_2(A,B) \geq \frac{1}{2}d_1(A,B) \Rightarrow \frac{1}{2}d_1(A,B) \leq d_2(A,B).$$

Por lo que se toma  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$d_1(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\begin{aligned} [d_1(A,B)]^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2|x_1 - x_2||y_1 - y_2| \\ &\geq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = [d_2(A,B)]^2 \end{aligned}$$

Por lo que  $d_1(A,B) \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d_2(A,B)$ .

Por lo tanto  $d_2(A,B) \leq d_1(A,B)$ .

Por lo que se toma  $\beta = 1$ .

$$\text{Por lo tanto } \frac{1}{2}d_1(A,B) \leq d_2(A,B) \leq d_1(A,B).$$

Luego entonces  $d_1 \cong d_2$ .

En la figura 18.7 se puede ver, geoméricamente, que sucede si se toma una bola (cerrada) de radio 1 para ambas métricas en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$ .

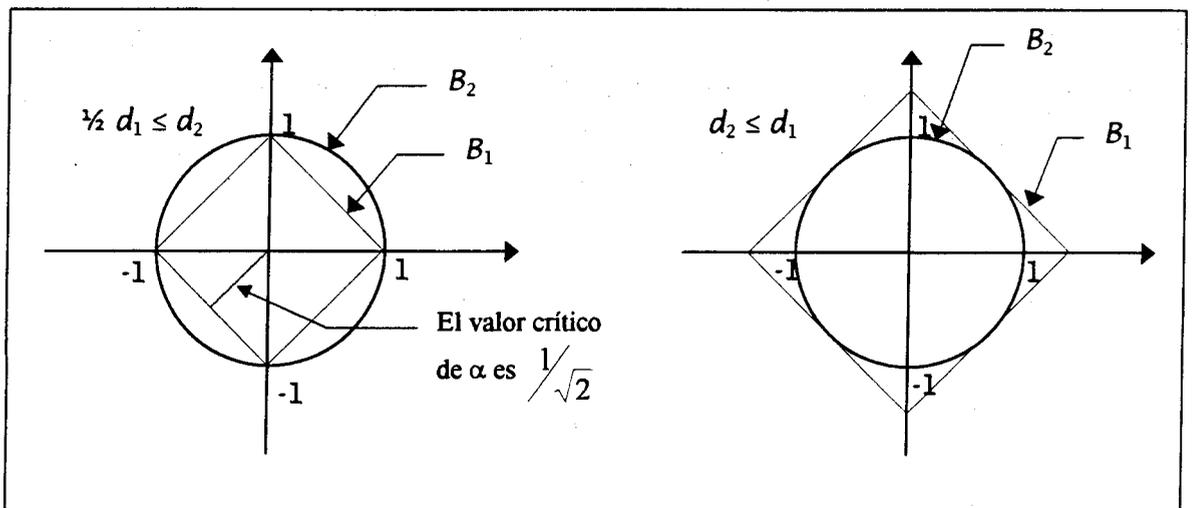


Fig. 18.7 Representación gráfica de las desigualdades  $\frac{1}{2}d_1 < d_2$  y  $d_2 < d_1$ .

El valor crítico de  $\alpha$  es el valor máximo de la mitad de la longitud del lado del más grande rombo (bola en  $d_1$ ) que cabe en el círculo (bola en  $d_2$ ) de radio 1. En la figura 16.7, en la parte izquierda se puede ver que, dada una bola en  $d_2$  con radio uno y centro en el origen, se necesitaría multiplicar a una bola en  $d_1$ , con el mismo radio y centro, por un factor de  $\frac{1}{2}$  para poder “introducirla” en la primera. Y en la parte derecha se ve que no hay necesidad de modificar el radio de la bola en  $d_2$  pues con el mismo radio y centro es posible que “incluya” a la bola original.

La desigualdad  $\frac{1}{2} d_1(A, B) \leq d_2(A, B) \leq d_1(A, B)$  significa entonces que, dada una bola en  $d_2$ , se puede “meter” una bola en  $d_1$  con un factor de  $\frac{1}{2}$  y, por otro lado, una bola en  $d_1$  es capaz de incluir a la bola en  $d_2$  con un factor de 1. Como se puede ver en la figura 18.8.

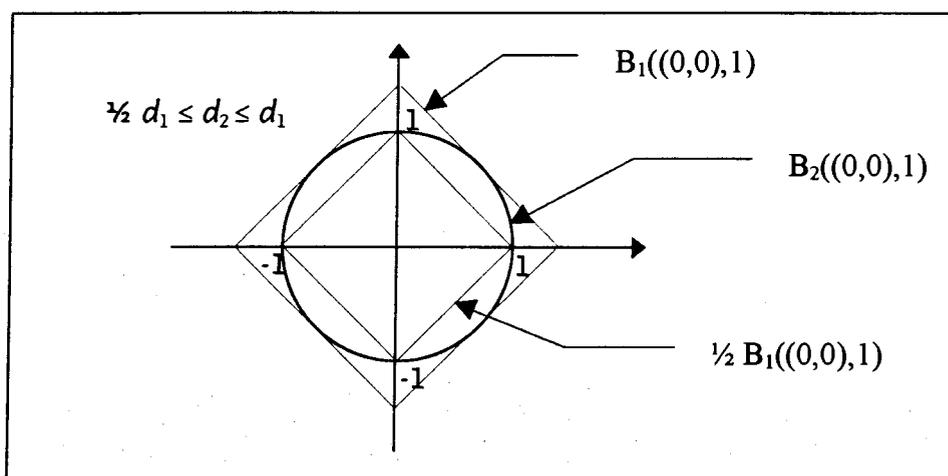


Fig. 18.8 Representación gráfica de la desigualdad  $\frac{1}{2} d_1 < d_2 < d_1$ .

Ejercicio.

Demostración de que  $d_2 \cong d_\infty$  en el espacio  $X = \mathcal{R}^2$ .

Sean  $A, B$  puntos del espacio  $X$ , donde  $A = (x_1, y_1)$  y  $B = (x_2, y_2)$ .

Recordemos que  $d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  y

$$d_\infty(A, B) = \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Por demostrar: que existen  $\alpha, \beta > 0$  tal que  $\alpha d_2(A, B) \leq d_\infty(A, B) \leq \beta d_2(A, B)$ :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq (x_1 - x_2)^2 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow d_2(A, B) \geq |x_1 - x_2|$$

En forma similar:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq (y_1 - y_2)^2 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow d_2(A, B) \geq |y_1 - y_2|$$

Por lo tanto  $d_2(A, B) \geq \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

$$\Rightarrow d_2(A, B) \geq d_\infty(A, B) \Rightarrow d_\infty(A, B) \leq d_2(A, B).$$

Entonces se toma  $\beta = 1$ .

Por otra parte  $|x_1 - x_2| \leq \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

$$\Rightarrow [ |x_1 - x_2| ]^2 \leq [ \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} ]^2$$

y  $|y_1 - y_2| \leq \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

$$\Rightarrow [ |y_1 - y_2| ]^2 \leq [ \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} ]^2$$

Sumando los dos últimos resultados se tiene:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 2 [ \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} ]^2$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{2} [ \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} ]$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{2} \text{Max}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_2(A, B) \leq \sqrt{2} d_\infty(A, B) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(A, B) \leq d_\infty(A, B).$$

Se toma  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$\text{Luego } \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(A, B) \leq d_\infty(A, B) \leq d_2(A, B).$$

Por lo tanto  $d_2 \cong d_\infty$ .

Nota. Con base a los dos últimos ejercicios y la propiedad transitiva del teorema de métricas equivalentes, se puede afirmar que las tres métricas ya vistas,  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ , son equivalentes en el espacio  $\mathcal{R}^2$ .

Definición.

Sea  $X$  un espacio y sean  $x, y \in X$ .

La métrica discreta sobre  $X$  se define como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Es importante hacer notar que en la definición anterior se cumplen con los cuatro axiomas de la definición de métrica para la métrica discreta. Ya que los tres primeros son obvios, sólo se trabajará con el cuarto:

1.  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
3.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

Si  $d(x, y) = 0$  no hay nada que demostrar ya que se cumple la desigualdad.

Si  $d(x, y) \neq 0$  entonces  $d(x, y) = 1$ , por lo que se puede decir que  $x \neq y$ , por lo que  $z \neq x$  o  $z \neq y$ . Lo que concluye que al menos uno de  $d(x, z)$  y  $d(z, y)$  es igual a 1, así  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Ejemplo de bolas con la métrica discreta:

$$\text{Dado } x_0 \in X, \text{ se define } B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r < 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

$$\text{Por ejemplo, si } r = \frac{1}{2} \text{ se tiene } B\left(x_0, \frac{1}{2}\right) = \left\{x \mid d(x, x_0) < \frac{1}{2}\right\} = \{x_0\}.$$

$$\text{y si } r = 2 \text{ se tiene } B(x_0, 2) = \{x \mid d(x, x_0) < 2\} = X.$$

Por lo tanto una bola de radio  $\frac{1}{2}$  es igual a una bola de radio  $\frac{1}{4}, \dots$ , es decir, todas tienen los mismos elementos siempre y cuando  $0 < r < 1$ .

Por otro lado, una bola de radio 2 es igual a una bola de radio 5,  $\dots$ , todas tienen los mismos elementos sin importar el radio cuando  $r > 1$ .

En esta métrica sólo hay dos tipos de bolas: las formadas por un solo elemento  $\{x_0\}$  y las formadas por todo el espacio  $X$ .

Como los puntos de este espacio son bolas abiertas (de *radio* menor 1), la métrica se llama métrica discreta.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Una topología es una topología discreta si todos los conjuntos unitarios (un sólo punto) son abiertos. La métrica discreta induce la topología discreta.

**Definición.**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\Omega \subseteq X$  un subconjunto.  $\Omega$  es un conjunto abierto si para cada  $x$  en  $\Omega$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ .

Es decir, si  $\Omega$  es subconjunto de un espacio métrico, entonces es un conjunto abierto si para cada  $x$  en  $\Omega$ , siempre habrá una bola abierta de radio  $\varepsilon$  y centro en  $x$  que no se salga de  $\Omega$ .

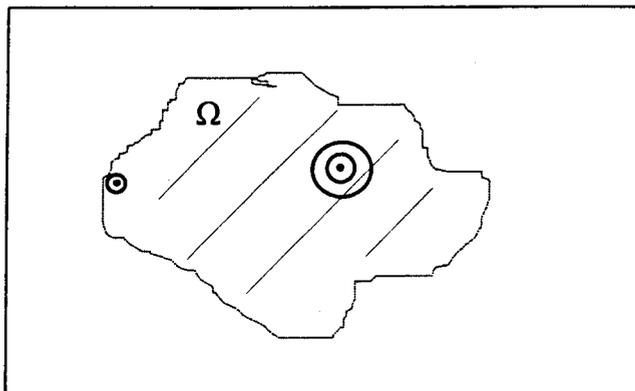


Fig. 18.9 Ejemplificación gráfica de un conjunto abierto

**Ejemplo.**

Considere el espacio métrico  $(\mathcal{R}^2, d_2)$  y los conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , donde  $\Omega_1$  es el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano que forman los cuadrantes I y II excluyendo al eje  $X$  y  $\Omega_2$  el conjunto de todos los puntos que forman los cuadrantes I y II incluyendo al eje  $X$ .

Se puede observar la diferencia básica entre estos dos conjuntos,  $\Omega_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$  y  $\Omega_2 = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ , en la representación geométrica de la figura 18.10.

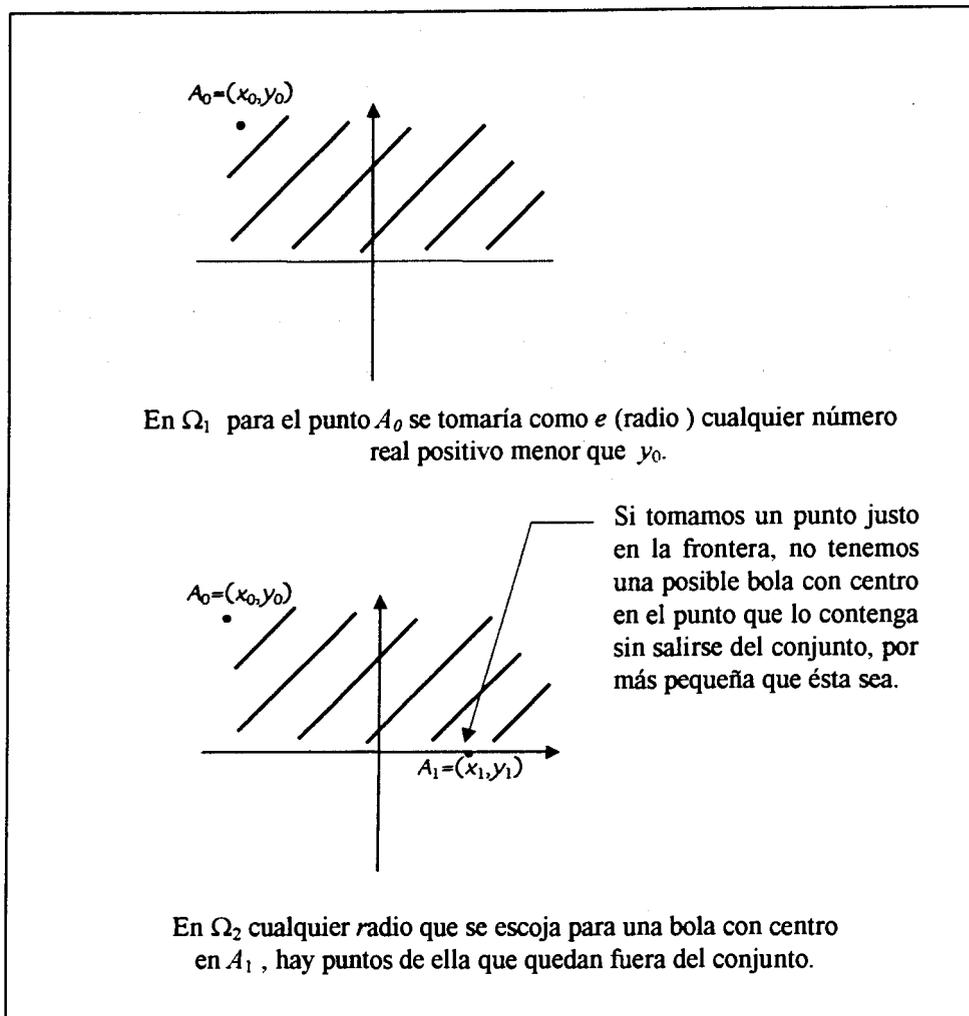


Fig. 18.10 Ejemplificación gráfica de los conjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Por lo tanto, se puede afirmar que  $\Omega_1$  es abierto y  $\Omega_2$  no es abierto

**Teorema.**

Sea  $X$  un espacio y sean  $d_1$  y  $d_2$  métricas en  $X$ .

Si  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes,  $d_1 \cong d_2$ , entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

**Afirmación 1.**

Si  $B_1(x_0, r)$  es cualquier bola abierta en  $x_0$ , radio  $r$  y métrica  $d_1$ , entonces existe un radio  $r'$  tal que  $B_2(x_0, r') \subseteq B_1(x_0, r)$ .

En forma más precisa tenemos que  $B_2(x_0, \alpha r) \subseteq B_1(x_0, r)$ .

Demostración: Sea  $x \in B_2(x, \alpha r)$

$$\alpha d_1(x_0, x) \leq d_2(x_0, x) < \alpha r$$

$$\Rightarrow d_1(x_0, x) < r$$

$$\Rightarrow x \in B_1(x_0, r)$$

Por lo tanto,  $\alpha d_1 < d_2$  implica  $B_2(x_0, \alpha r) \subseteq B_1(x_0, r)$ .

Afirmación 2.

Si  $B_2(x_0, r)$  es cualquier bola abierta en  $x_0$ , radio  $r$  y métrica  $d_2$ , entonces existe un radio  $r'$  tal que  $B_1(x_0, r') \subseteq B_2(x_0, r)$ .

En forma más precisa  $B_1\left(x_0, \frac{r}{\beta}\right) \subseteq B_2(x_0, r)$

Demostración:  $x \in B_1\left(x_0, \frac{r}{\beta}\right)$  implica que  $d_1(x_0, x) < \frac{r}{\beta}$ .

$$\frac{1}{\beta} d_2(x_0, x) < d_1(x_0, x) < \frac{r}{\beta}$$

$$\Rightarrow d_2(x_0, x) < r$$

$$\Rightarrow x \in B_2(x_0, r)$$

Por lo tanto  $d_2 < \beta d_1$  implica  $B_1\left(x_0, \frac{r}{\beta}\right) \subseteq B_2(x_0, r)$ .

La importancia de estas afirmaciones radica en que, dado un espacio  $X$  con métricas  $d_1$  y  $d_2$ , equivalentes entre sí, cualquier bola abierta con la métrica  $d_1$  contiene a cualquier bola abierta con la métrica  $d_2$  y viceversa.

Por ejemplo, si el centro de las bolas está en el origen de un sistema cartesiano, se podría dar la interpretación gráfica de la figura 18.11.

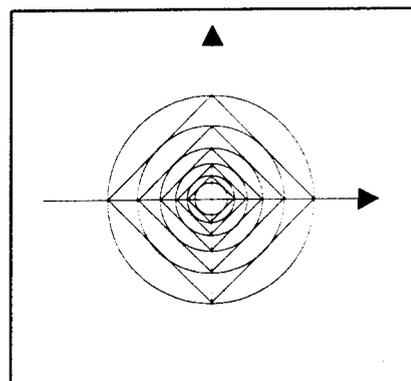


Fig. 18.11 Interpretación gráfica de métricas equivalentes.

Conclusión:

Dado un espacio  $X$  dotado con las métricas  $d_1$  y  $d_2$  las cuales son equivalentes entre sí.

Sea  $\Omega \subseteq X$  abierto en  $(X, d_1)$  se tiene que:

Si  $x_0 \in \Omega$  entonces existe un  $r > 0$  tal que  $B_1(x_0, r) \subseteq \Omega$ .

Y luego existe  $r' > 0$  tal que  $B_2(x_0, r') \subseteq \Omega$  por lo que  $\Omega$  es abierto en  $(X, d_2)$  y viceversa.

Es decir, abiertos en  $(X, d_2)$  son abiertos en  $(X, d_1)$  y viceversa. Fig. 18.12.

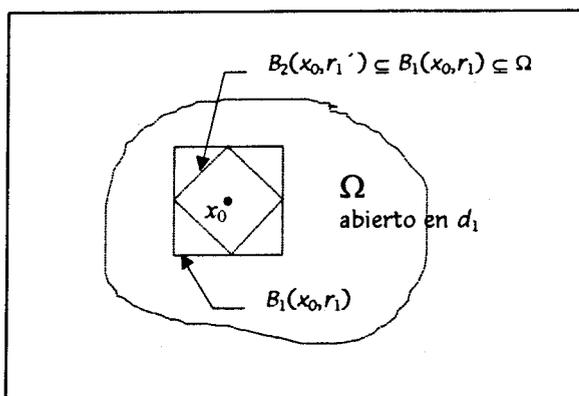


Fig. 18.12 Representación gráfica de una bola en  $d_2$  contenida en una bola en  $d_1$  contenida a su vez en el conjunto abierto  $\Omega$ .

Teorema:

Dado un espacio  $X$  dotado con dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  que son equivalentes entre sí.

Si  $\Omega \subseteq X$  es un conjunto abierto en la métrica  $d_1$ , entonces  $\Omega$  es también abierto en la métrica  $d_2$ , y viceversa. Es decir, los conjuntos abiertos de la métrica  $d_1$  son los mismos conjuntos abiertos de la métrica  $d_2$ , siempre que  $d_1$  y  $d_2$  sean equivalentes entre sí.

Demostración:

Sea  $\Omega \subseteq X$  un conjunto abierto en la métrica  $d_1$ , entonces para cada  $x \in \Omega$  existe una bola abierta en la métrica  $d_1$  tal que  $B_1(x, r) \subseteq \Omega$ .

Como  $d_1$  y  $d_2$  son equivalentes existe  $B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r)$ . Por lo tanto  $\Omega$  es abierto en  $d_2$ .

Propiedades de los Conjuntos Abiertos:

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

1. El conjunto vacío  $\emptyset$  y el espacio métrico  $X$  son conjuntos abiertos.

En el caso del conjunto vacío  $\emptyset$ , como no hay elementos, la implicación se cumple trivialmente por vacuidad. Mientras que para el espacio métrico  $X$  se cumple por definición.

2. Sean los conjuntos  $U, V \subseteq X$ .

Si  $U$  y  $V$  son conjuntos abiertos, entonces el conjunto  $U \cap V$  es abierto.

$(U, V \text{ abiertos} \Rightarrow U \cap V \text{ abierto})$

Consecuencia de esto es la siguiente implicación:

$U_1, U_2, \dots, U_n$  son abiertos  $\Rightarrow U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$  es abierto.

Es decir que la intersección finita de abiertos es abierta.

Por otro lado, se puede ver que, en el espacio del Conjunto de los Números reales, que la intersección infinita de abiertos no necesariamente es abierta:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = [0, 1]$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( 0, 1 + \frac{1}{n} \right) = (0, 1]$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, 1 \right) = [0, 1)$$

Sean los conjuntos  $\{U_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  abiertos y el conjunto  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ .

Por demostrar,  $U$  es abierto.

Sea  $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow x \in U_i \forall i$ :

$x \in U_1$  y  $U_1$  es abierto  $\Rightarrow \exists B(x, r_1) \subseteq U_1, r_1 > 0$ ,

$x \in U_2$  y  $U_2$  es abierto  $\Rightarrow \exists B(x, r_2) \subseteq U_2, r_2 > 0, \dots$

$x \in U_n$  y  $U_n$  es abierto  $\Rightarrow \exists B(x, r_n) \subseteq U_n, r_n > 0$ .

Sea  $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  entonces  $r > 0$ .

Se afirma que  $B(x, r) \subseteq U$

Si  $y \in B(x, r)$  entonces  $d(x, y) < r < r_1 \Rightarrow y \in U_1$ ,

$d(x, y) < r < r_2 \Rightarrow y \in U_2, \dots$

$d(x, y) < r < r_n \Rightarrow y \in U_n$ ,

como está en todos, está en la intersección.

3. Sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia cualquiera de abiertos,

entonces  $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  es abierto. Es decir, una unión arbitraria de abiertos es

abierta.

Sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de abiertos:  $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Por demostrar: que  $U$  es abierto.

Sea  $x \in U \Rightarrow x \in U_{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0$ .

Por lo tanto  $\exists r_{\alpha_0}$  tal que  $B(x, r_{\alpha_0}) \subset U_{\alpha_0}$ .

Pero  $U_{\alpha_0} \subset U$ . Por lo tanto  $B(x, r_{\alpha_0}) \subseteq U$ .

Por lo tanto  $U$  es abierto.

**Definición.**

Una colección  $\tau$  de subconjuntos de un espacio  $X$  es una topología para  $X$  si se cumplen los siguientes axiomas:

1. El conjunto vacío y el espacio completo  $X$  son elementos de  $\tau$

$$\emptyset, X \in \tau.$$

2. Una intersección finita de elementos de  $\tau$  es también un elemento de  $\tau$ .

i.e. Si  $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ .

3. Una unión arbitraria de elementos de  $\tau$  es también un elemento de  $\tau$ .

i.e. Sea  $I$  un conjunto de índices y sea  $U_\alpha \in \tau \forall \alpha \in I$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ .

Definición.

La combinación  $(X, \tau)$ , donde  $\tau$  es una topología para el espacio  $X$ , es un Espacio Topológico.

Nota.

El concepto de *Topología* arriba mencionado no tiene una injerencia directa en el desarrollo de la presente tesis ya que el concepto de fractales y su construcción pueden ser manejados totalmente usando sólo el concepto de *Espacio Métrico*. Sin embargo, los conceptos de *Conjunto Abierto* y *Conjunto Cerrado* y un tanto los de *Conjunto Compacto* y *Conjunto Conexo* son propios de los *Espacios Topológicos*, por lo que brevemente se mencionarán algunos aspectos elementales de un *Espacio Topológico*.

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

Se define una topología en  $X$  inducida por  $d$  como el conjunto de subconjuntos de  $X$  que son abiertos en  $(X, d)$ .

Es decir, una topología en  $X$  inducida por  $d$  es el conjunto:

$$\tau_d = \{U \mid U \subseteq X \text{ y } U \text{ es abierto de } d\}$$

Teorema.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. El espacio  $X$  y la topología en  $X$  inducida por  $d$  forman un espacio topológico  $(X, \tau_d)$ .

Es decir, sea  $\tau_d = \{U \mid U \subseteq X, U \text{ es abierto de } d\}$ , entonces  $(X, \tau_d)$  es un espacio topológico.

Nota.

Es importante hacer énfasis en que la equivalencia topológica permite que haya mucho más “alargamientos” y “compresiones” que las permitidas en la equivalencia métrica. Una vez definido el concepto de dimensión fractal, el cual provee una medida de la complejidad geométrica del conjunto, se puede ver que dos conjuntos

métricamente equivalentes tienen la misma dimensión fractal, mientras que si sólo son topológicamente equivalentes, su dimensión fractal puede ser diferente. Por ejemplo, un segmento de recta y la curva de Koch, son equivalentes topológicamente hablando pero tienen diferente dimensión fractal.

**Teorema.**

Sean  $(X, d_1)$  y  $(X, d_2)$  espacios métricos. Si  $d_1 \cong d_2$  entonces  $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ .

Es decir, si dos métricas en un mismo espacio  $X$  son equivalentes entre sí, entonces el conjunto de subconjuntos abiertos en una métrica es igual al conjunto de subconjuntos abiertos en la otra métrica.

**Ejemplo.**

Sea el espacio  $X = \mathbb{R}^2$  y los puntos  $A, B \in X$ .

La "distancia", medida con la métrica  $d_1$  o con la métrica  $d_2$ , entre los puntos  $A$  y  $B$  es la misma, topológicamente hablando, ya que estas métricas sean equivalentes.

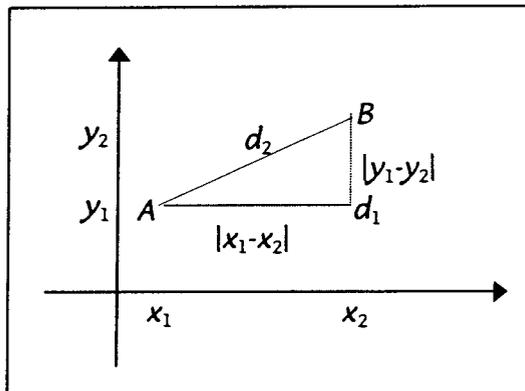


Fig. 18.13 Representación gráfica de distancias equivalentes topológicamente hablando

**Definición.**

Una sucesión de puntos en el espacio  $X$  es una función del conjunto de los enteros positivos, o sea los naturales, al espacio  $X$ :

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$$

Y se puede expresar de la siguiente manera:  $f: \{1, 2, \dots\} \rightarrow X$ ,

donde  $f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3, \dots, f(n) = x_n, \dots$

Ejemplo.

Considere el espacio formado por los números Racionales:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

Como dicho conjunto es numerable, puede ser tomado como una sucesión:

$$Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

y se puede expresar como una función de los Enteros Positivos (Naturales) al conjunto  $Q$ :

$$f: N \rightarrow Q.$$

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{x_n\}_{n \in N} \subseteq X$  una sucesión de puntos del espacio.

Se dice que  $\{x_n\}_{n \in N}$  es una sucesión convergente a  $x$  (o que converge a  $x$ ), donde  $x \in X$ , si dado un  $\varepsilon > 0$  existe un entero positivo  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  para todo  $n > N$ .

El punto  $x \in X$  al cual la sucesión converge, se conoce como el límite de la sucesión, y se usa la notación:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Lo cual significa, que la sucesión de puntos se acerca cada vez más al punto  $x$ , es decir, dada  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  es suficientemente grande cuando la distancia entre el elemento de la sucesión,  $x_n$ , y el punto  $x$  es más pequeña que el número positivo  $\varepsilon$  cuando.

El límite  $x$  de una sucesión convergente tiene la propiedad de que una bola abierta con radio  $\varepsilon > 0$  y centro en  $x$  contiene todos los puntos  $x_n$  después de algún índice  $N$ . Típicamente  $N$  se hace más y más grande conforme  $\varepsilon$  se hace más y más pequeño.

Interpretación de la convergencia en términos de bolas:

Dada una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y un número  $\varepsilon > 0$ , el cual sirve como radio para la bola. Si la sucesión converge a  $x$  entonces todos los elementos de la sucesión después del número  $N$  están dentro de la bola abierta con centro  $x$  y radio  $\varepsilon$ . Es decir, todos los elementos de la sucesión salvo un número infinito están en dicha bola.

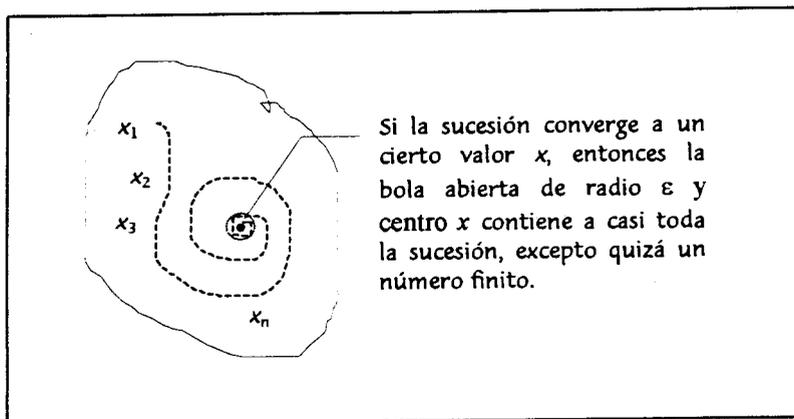


Fig. 18.14 Representación gráfica de convergencia en términos de bolas

Teorema.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  entonces  $x$  es único.

Demostración:

Supóngase que  $x$  y  $y$  son dos límites tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ .

Por demostrar:  $x = y$ .

Supóngase que  $x \neq y$ , sea  $\alpha = d(x, y) > 0$ , y se escoge  $0 < \varepsilon < \alpha/2$

entonces existe  $N_1$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon$  si  $n > N_1$

y existe  $N_2$  tal que  $d(x_n, y) < \varepsilon$  si  $n > N_2$ .

Se toma una  $n > \max\{N_1, N_2\}$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < \alpha = d(x, y)$$

O sea  $d(x, y) < d(x, y)$ , la cual es una contradicción.

Por lo tanto  $x = y$ .

Ejemplo de una sucesión que no converge en el espacio  $X = \mathfrak{R}$ :

Si se define la sucesión de la forma  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ,

entonces  $x_1 = 0, x_2 = 3/2, x_3 = -2/3, x_4 = 5/4, \dots$

Por lo que se tiene la sucesión  $\{x_n\} = \{0, 3/2, -2/3, 5/4, \dots\}$  donde se puede ver que cuando  $n$  tiende a infinito,  $x_n$  brinca de estar cerca de  $-1$  a estar cerca de  $1$ , por lo tanto el límite no existe, es decir la sucesión no es convergente.

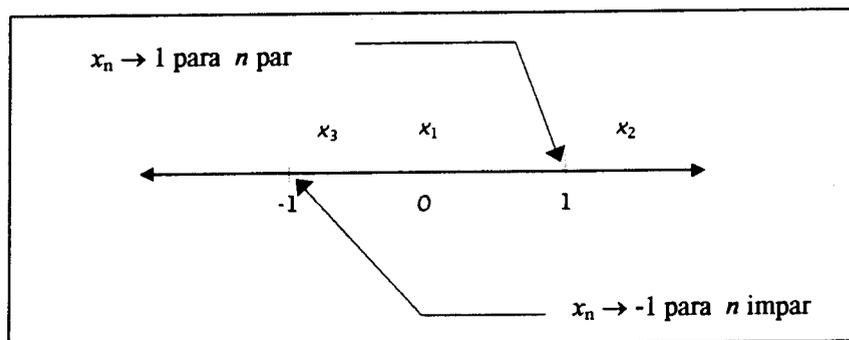


Fig. 18.15 Ejemplo de sucesión no convergente.

El límite de una sucesión convergente es único, pero el ejemplo anterior muestra que una sucesión puede tener varios puntos límite en el sentido de la siguiente definición.

**Definición.**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $A \subseteq X$ .

Si la intersección de toda bola abierta de radio  $\varepsilon$  y centro  $x$  con el conjunto  $A$  tiene elementos distintos a  $x$ , entonces se dice que  $x$  es un punto límite de  $A$ .

En otras palabras,  $x$  es un punto límite de  $A$  si  $B(x, \varepsilon) \cap A$  contiene otros puntos aparte de  $x$ , para toda  $\varepsilon > 0$ . Es decir, si  $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$  para toda  $\varepsilon > 0$ , entonces  $x$  es un punto límite de  $A$ .

### Definición.

Si la intersección de alguna bola abierta de radio  $\varepsilon$  y centro  $x$  con el conjunto  $A$  esta formada sólo por el punto  $x$ , entonces decimos que  $x$  es un punto aislado de  $A$ .

Es decir, si  $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$  para algún  $\varepsilon > 0$ , entonces  $x$  es un punto aislado de  $A$ .

### Ejemplo.

Dado el espacio  $X = \mathfrak{R}$  y el subconjunto  $A$  formado por la sucesión  $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{R}$ , el punto límite de  $A$  es  $x = 0$  ya que  $x_n$  tiende a 0 conforme  $n$  tiende a infinito.

Lo cual es fácil de observar al listar algunos elementos de la sucesión:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

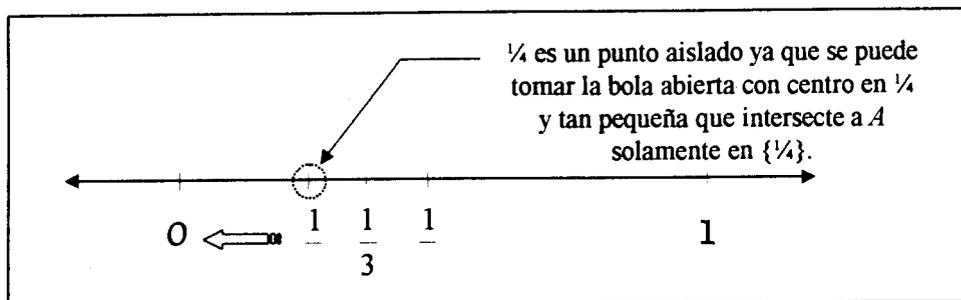


Fig. 18.16 Ejemplo de punto aislado.

### Lema.

Sea  $X$  un espacio y  $A \subseteq X$  un subconjunto.

$x$  es un punto límite de  $A \iff$  existe  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A - \{x\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = x$ .

Es decir,  $x$  es un punto límite de  $A$  si y sólo si existe una sucesión de elementos de  $A$  distintos de  $x$  tal que  $x$  sea el límite de dicha sucesión.

### Demostración:

( $\Rightarrow$ )

Si  $x_0 \in X$  y  $x_0$  es un punto límite de  $A$ , entonces  $(B(x_0, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ ,

si se toma  $r = 1$ , entonces  $x_1 \in (B(x_0, 1) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ,

si se toma  $r = 1/2$ , entonces  $x_2 \in (B(x_0, 1/2) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ,

...  
si se toma  $r = 1/n$ , entonces  $x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ .

Se afirma que  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ .

Por demostrar: dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N$  entero tal que  $d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \forall n > N$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\exists N$  tal que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .

Sea  $n > N$ , entonces  $x_n \in \left( B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) - \{x\} \right) \cap A \subseteq B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ .

Por lo tanto  $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n > N$ .

( $\Leftarrow$ )

Supóngase que  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\{x_n\} \subseteq A$  y  $x_n \neq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Por demostrar:  $x_0$  es un punto límite de  $A$ .

Por demostrar:  $(B(x_0, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ .

Se toma un  $r > 0$ , entonces  $\exists N$  tal que  $d(x_0, x_n) < r$ , si  $n > N$ .

Por lo que  $d(x_0, x_n) < r$ . Por lo tanto  $x_n \in B(x_0, r)$ .

Pero  $x_n \in A$  y  $x_n \neq x$ , entonces  $x_n \in (B(x_0, r) - \{x\}) \cap A$ .

Por lo tanto  $x_0$  es punto límite.

Definición.

Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se llama sucesión constante si  $x_n = x_{n+1}$  después de cierto valor de  $n$ .

Ejemplo de una sucesión constante en el espacio  $X = \mathfrak{R}$ .

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 100 \\ 1 & \text{si } n > 100 \end{cases} \text{ es una sucesión constante.}$$

Definición.

Una sucesión de Cauchy es una sucesión de puntos,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , en un espacio métrico  $(X, d)$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  para toda  $n, m > N$ .

Lo cual significa que mientras más lejos se llegue en la sucesión, más cerca estarán los puntos entre sí. Es importante mencionar que el hecho de que los puntos se estén acercando entre sí cada vez más, no significa que exista un punto al cual convergan.

Por lo tanto, una sucesión de Cauchy no siempre es una sucesión convergente, pero una sucesión convergente siempre es una sucesión de Cauchy.

Ejemplos de sucesiones de Cauchy:

Sea el espacio de los números racionales  $Q$ , la métrica  $d = |x_2 - x_1|$  y la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Q$  donde  $x_1 = 1$  y  $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n!}$ .

Entonces se tiene que  $\{x_n\} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{41}{24}, \dots \right\}$ .

Es relativamente fácil demostrar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy que converge al número  $e$ , pero el demostrar que su límite no pertenece a  $Q$  es bastante complicado. De hecho su límite es  $e$  un número trascendente que es la base del logaritmo natural:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ .

Se puede incluir este número  $e$  en el espacio métrico  $X$ , quedando ahora como  $X = Q \cup \{e\}$ , con lo que estaríamos “ampliando” el espacio. A esta forma de ir ampliando el dominio, de racionales a reales, se llama proceso de completación (topológica) de  $Q$  y lo abordaremos más adelante con mayor detalle.

**Definición.**

Sea  $A \subseteq (X, d)$  un conjunto.

Se define la cerradura del conjunto  $A$  como la unión del conjunto  $A$  con sus puntos límite. Y su notación es  $\bar{A} = A \cup \{\text{puntos límite de } A\}$ .

Ejemplo:

Dado el espacio  $X = \mathbb{R}$  y el conjunto  $A = (1, 2) \subseteq X$ .

La cerradura del conjunto  $A$  esta dada por  $\bar{A} = A \cup \{1\} \cup \{2\} = [1, 2]$ .

Definición.

Sea  $A \subseteq (X, d)$ .  $A$  es cerrado si el complemento de  $A$ ,  $A^c$ , es abierto.

Teorema.

Sea  $A \subseteq (X, d)$ .  $A$  es cerrado  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ .

Es decir, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límite.

( $\Leftarrow$ ) Supóngase  $A = \bar{A}$ .

Por demostrar:  $A$  es cerrado. Se demostrará que  $A^c$  es abierto.

Por demostrar:  $\forall x \in A^c \exists B(x, r_x) \subseteq A^c$ .

Sea  $x \in A^c$ . Por lo tanto  $x$  no es un punto límite.

Por lo que existe un radio  $r$  tal que  $(B(x, r) - \{x\}) \cap A = \emptyset$ .

Pero  $x \notin A$ . Por lo que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ .

Por lo tanto  $B(x, r) \subseteq A^c$  lo cual demuestra que  $A^c$  es abierto

( $\Rightarrow$ ) Supóngase que  $A$  es cerrado.

Por demostrar:  $A = \bar{A}$ .

$A \subseteq \bar{A}$  ( $A$  ya está dentro de  $\bar{A}$ ). Como  $A$  es cerrado,  $A^c$  es abierto.

Por lo que, si  $x \in A^c$  entonces existe  $B(x, r) \subseteq A^c$ .

Luego entonces, si  $x \in A^c$  entonces existe  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ .

Por lo tanto  $x$  no es un punto límite

Luego todos los puntos límites de  $A$  pertenecen a  $A$ .

Por lo tanto  $A = \bar{A}$ .

Consecuencia: Como  $\bar{\bar{A}}$  es cerrada para toda  $A$ , se tiene que  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ .

Definición.

Sean  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  dos espacios métricos y  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una función.

Se dice que  $f$  es una función continua en  $x_0 \in X_1$  si dado un  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .

Definición.

Sea  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una función continua y el conjunto  $U \subseteq X_1$ .

Se define el Conjunto Imagen como  $f(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$ .

Si  $U \subseteq X_2$  se define la Imagen Inversa de  $U$  como el conjunto

$$f^{-1}(U) = \{x \in X_1 \mid f(x) \in U\}.$$

Teorema.

$f: X_1 \rightarrow X_2$  es continua

$$\Leftrightarrow f^{-1}(U) \text{ es abierto cuando } U \text{ es abierto de } X_2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(C) \text{ es cerrado cuando } C \text{ es cerrado de } X_2.$$

Es decir, imágenes inversas de abiertos son abiertos y por lo tanto imágenes inversas de cerrados son cerrados.

El teorema es una aplicación directa de las definiciones y su demostración queda omitida en este trabajo.

Propiedades equivalentes de continuidad:

Sea  $f: X_1 \rightarrow X_2$  una función y los conjuntos  $U, C \subseteq X_2$ .

1.  $f$  es continua
2.  $U$  abierto en  $X_2 \Rightarrow f^{-1}(U)$  es abierto en  $X_1$ .
3.  $C$  cerrado en  $X_2 \Rightarrow f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X_1$

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

Se dice que  $X$  es un espacio métrico completo si todas las sucesiones de Cauchy,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , en  $X$  tienen un límite  $x \in X$ .

En otras palabras, existe en el espacio un punto  $x$  al cual converge la sucesión de Cauchy, es decir, si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy de puntos en el espacio  $X$  y si  $X$  es completo, entonces hay un punto  $x \in X$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  la bola  $B(x, \varepsilon)$  contiene puntos  $x_n$  para casi todos los enteros  $n$ .

Ejemplo.

El espacio formado por los números racionales no es completo ya que existen sucesiones de Cauchy cuyos límites no existen en los racionales como el que se vio en un ejemplo anterior.

Definición.

Sean  $(X, d_1)$  y  $(Y, d_2)$  dos espacios métricos, los puntos  $x, y \in X$  y una función  $T: X \rightarrow Y$ . Se dice que la función  $T$  es una isometría si  $d_2(T(x), T(y)) = d_1(x, y)$ .

Se dice que  $T$  “encaja”  $X$  en  $Y$ . Encaje es un concepto topológico definido por una inclusión  $i: X \rightarrow Y$  con la característica de que  $X$  e  $i(X)$  tienen la “misma” estructura topológica. Una isometría posee esta característica, por lo tanto se llama encaje.

Es decir, una isometría es un mapeo entre dos espacios métricos el cual respeta distancias; lo que significa que la distancia entre dos puntos del dominio es la misma que la de sus imágenes (por lo que sólo puede constar de movimientos rígidos tales como giros o translaciones).

Ejemplo:

Sea el espacio  $X = Y = \mathcal{R}^2$ , las métricas ya conocidas  $d_1$  y  $d_2$  y los puntos  $A, B \in X$ . La función  $T(x, y) = (x+3, y+2)$  es una isometría ya que la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  siempre va a ser igual a la distancia entre los puntos  $T(A)$  y  $T(B)$  como se ve en la figura 18.17.

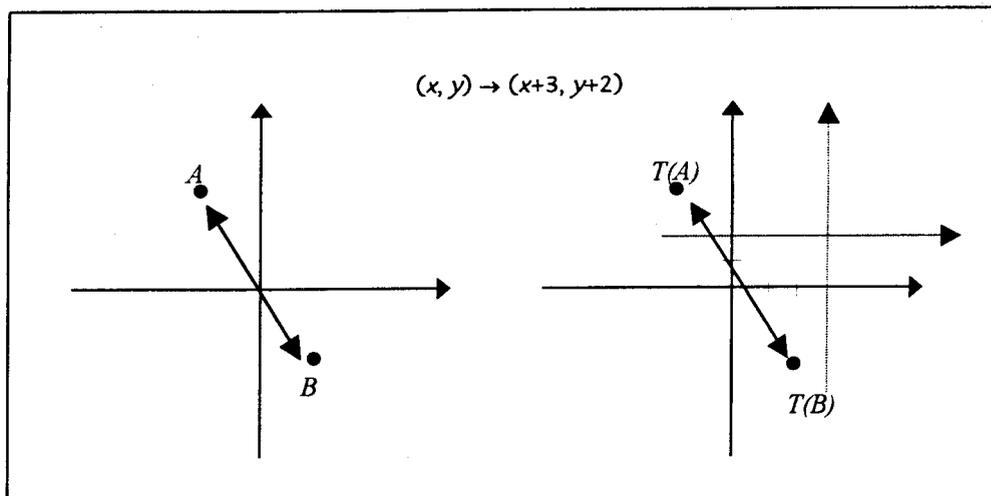


Fig. 18.17 Ejemplificación gráfica de una isometría.

Sea  $A = (x_0, y_0)$  y  $B = (x_1, y_1)$ , entonces se tiene que  $T(A) = (x_0 + 3, y_0 + 2)$  y  $T(B) = (x_1 + 3, y_1 + 2)$ .

Luego entonces  $d_2(A, B) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$

$$\text{y } d_2(T(A)-T(B)) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} .$$

Definición:

Una función  $T: X \rightarrow Y$  es una función sobreyectiva o suprayectiva si se satisface la siguiente propiedad:

para toda  $y \in Y$  existe una  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

Lo que significa que cada elemento del contradominio,  $Y$ , tiene un elemento en el dominio que bajo la función va a él.

Definición:

Si  $T: X \rightarrow Y$  es una isometría y es sobreyectiva, entonces se dice que  $X$  y  $Y$  son espacios isométricos.

Si  $T: X \rightarrow Y$  es una isometría y no es sobreyectiva entonces se dice que  $X$  está encajado isometricamente en  $Y$ .

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

Un subconjunto  $Y \subseteq X$  es denso en  $X$  si la cerradura de  $Y$  es igual a  $X$ .

Un primer conjunto es denso en un segundo conjunto si (a) el primero está contenido en el segundo, y (b) todo elemento del segundo conjunto es el límite al cual tiende una sucesión contenida en el primer conjunto.

Ejemplo.

El conjunto de los Racionales  $Q$  (subconjunto de los Reales  $\mathcal{R}$ ) es denso en  $\mathcal{R}$ , ya que para cada número real existe una sucesión de números racionales tal que el límite de dicha sucesión, es dicho número real.

Por otro lado, el conjunto de los Enteros  $I$  (subconjunto de los Reales  $\mathcal{R}$ ) no es denso en  $\mathcal{R}$ .

Teorema de Completación.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y un punto  $x \in X$ .

Existe un espacio métrico completo  $(\bar{X}, \bar{d})$  y una función llamada “encaje”  $i: (X, d) \rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$  tal que el conjunto  $i(X)$  es denso en  $\bar{X}$ . El espacio  $(\bar{X}, \bar{d})$  es único, salvo isometría.

A este espacio métrico completo,  $(\bar{X}, \bar{d})$ , se le llama la completación del espacio métrico  $(X, d)$ .

Que  $(\bar{X}, \bar{d})$  es único salvo isometría significa que si  $(\bar{X}, \bar{d})$  y  $(\bar{X}_1, \bar{d}_1)$  son dos espacios métricos cumpliendo con el requisito del teorema entonces  $(\bar{X}, \bar{d})$  y  $(\bar{X}_1, \bar{d}_1)$  son isométricos.

Este teorema es fundamental en análisis matemático. Sin embargo su demostración está fuera de los límites de esta tesis. Pero se invita al lector a revisarla en Simons.

Ejemplo.

Considera el espacio  $X = Q$  con la métrica usual.

Los encajes de  $Q$  a  $\mathcal{R}$  y de  $Q$  a  $\mathcal{R}^2$  son dos encajes isométricos de  $Q$  en dos espacios completos diferentes:

$$Q \xrightarrow{\text{encaje}} \mathcal{R} \quad \text{y} \quad Q \xrightarrow{\text{encaje}} \mathcal{R}^2,$$

pero como  $Q$  es denso en  $\mathcal{R}$  y no en  $\mathcal{R}^2$ , entonces sólo se dice que  $\mathcal{R}$  con la métrica usual es la completación de  $Q$ .

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

a) Sea el conjunto  $U = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$  una familia de conjuntos abiertos de  $X$ , donde  $I$  es un conjunto de índices.

Se dice que  $U$  es una cubierta abierta de  $X$  si  $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

Lo que significa que una cubierta abierta de un conjunto  $X$  es una familia de conjuntos abiertos tal que la unión de todos estos sea igual al conjunto  $X$ .

b) Sea  $K \subseteq X$  y  $U$  una familia de abiertos en  $X$ .

Se dice que  $U$  es una cubierta abierta de  $K$  si  $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

Definición de Compacidad.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq X$  un subconjunto.

Se dice que el conjunto  $K$  es un conjunto compacto si dada  $U = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$  una cubierta abierta de  $K$ , existe un subconjunto finito  $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  de tal manera

que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ , es decir, existe una subcubierta finita.

Por otro lado, se puede definir a los conjuntos compactos en términos de sucesiones.

## Teorema

Se dice que el conjunto  $K$  es un conjunto compacto si cada sucesión de puntos,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , en  $K$  contiene una subsucesión con límite en  $K$ .

Cuya demostración queda fuera de los propósitos de este trabajo.

## Ejemplo.

Considérese el espacio  $X = \mathcal{R}$  con la métrica usual y el intervalo  $K = (0,1)$ .

Sea  $U = \left\{ \left( 0, 1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=2}^{\infty}$  entonces  $U$  es una cubierta abierta de  $K$ .

Por lo que tenemos  $U_2 = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$ ,  $U_3 = \left( 0, \frac{2}{3} \right)$ ,  $U_4 = \left( 0, \frac{3}{4} \right)$   $\wedge$

Es intuitivamente claro que ningún subconjunto finito de  $U$  podrá cubrir a  $(0, 1)$ :

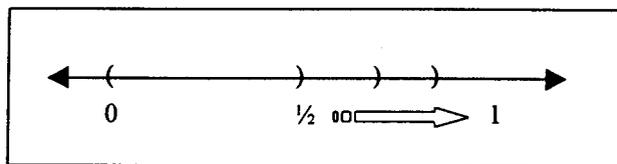


Fig.18.18 Ejemplificación gráfica de una cubierta abierta

Por lo que hay una cubierta abierta de  $K$  para la que no existe subcubierta finita.

Por lo que el intervalo  $(0,1)$  no es compacto.

Por otro lado, el intervalo  $[0,1]$  sí es compacto ya que, dada cualquier cubierta abierta de él sí es posible encontrar una subcubierta finita, lo cual no es fácil de demostrar por lo que la demostración no es incluida en este trabajo.

## Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$ .

$A$  es un conjunto acotado si existe una bola abierta,  $B(x_0, r)$ , en  $X$  que lo contenga para algún  $x_0 \in X$ ; es decir, un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $X$  es acotado si existe una bola abierta tal que  $B(x_0, r) \supset A$ .

### Teorema de Bolzano-Weistrass.

Sea un espacio métrico  $(X, d)$  y un subconjunto  $K \subseteq X$ .

$K$  es compacto si y sólo si  $K$  es cerrado y acotado.

Es decir, la compacidad en un conjunto significa que está dentro de una bola abierta lo suficientemente grande, y que toda sucesión convergente del conjunto converge a un punto que se encuentra dentro del mismo conjunto.

Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Por demostrar: Si  $A$  es compacto entonces  $A$  es cerrado y acotado.

Por demostrar:  $A$  Compacto  $\Rightarrow A$  acotado.

Se escoge un centro cualquiera  $x_0$ .  $U_n = B(x_0, n)$ .

$U = \{U_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  es una cubierta abierta anidada, es decir  $U_n \subseteq U_{n+1}$

Se tiene que  $X = \bigcup B(x_0, n) \supseteq A$ .

Como  $A$  es compacto debe existir una subcubierta finita.

La subcubierta, siendo anidada, la bola de radio mayor cubre a  $A$ . O sea

$B(x_0, n) \supseteq A$  para algún  $n$ . Por lo tanto  $A$  es acotado.

Por demostrar:  $A$  Compacto  $\Rightarrow A$  cerrado.

Se demuestra que  $A^c$  abierto.

Se toma  $x \in A^c$ .

Por demostrar que existe una  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subseteq A^c$ .

Sea  $y \in A$  arbitraria, existe  $r_1(y), r_2(y)$  tal que

$$B(x, r_2(y)) \cap B(y, r_1(y)) = \emptyset.$$

Ahora se considera  $\beta = \{B(y, r_1(y))\}$  que es un conjunto de bolas abiertas que cubre a  $A$ , porque cada punto de  $A$  está en una de éstas bolas.

Por compacidad, existen  $r_1(y_1), r_1(y_2), \dots, r_1(y_n)$  tal que

$$A \subseteq B(y_1, r_1(y_1)) \cup B(y_2, r_1(y_2)) \cup \dots \cup B(y_n, r_1(y_n)).$$

$$\text{Sea } B(X, r) = \bigcap_{i=1}^n B(X, r_2(y_i))$$

entonces  $B(X, r) \cap A = \emptyset \therefore B(X, r) \subseteq A^c \therefore A^c$  es abierto  $\therefore A$  es cerrado.

La demostración del converso de este teorema es bastante larga y está fuera de los límites de este trabajo, pero se recomienda buscar referencia en Análisis Matemático de Apostol.

**Definición.**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico.

Cualquier subconjunto de dicho espacio,  $A \subseteq X$ , es sucesionalmente compacto si cada sucesión infinita tiene una subsucesión convergente.

**Teorema.**

Sucesionalmente compacto es lo mismo que compacto.

Se utilizará este hecho pero no incluiremos la demostración.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene:

**Lema:**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $X$  es compacto entonces es completo.

**Demostración:** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de Cauchy.

$X$  siendo compacto es sucesionalmente compacto.

Por lo tanto, existe una subsucesión que converge a un elemento de  $X$ .

Por lo que,  $\{x_n\}$  converge en  $X$ . Por lo tanto  $X$  es completo.

**Definición.**

Sea  $f: X \rightarrow X$  una transformación en un espacio métrico  $(X, d)$ .

Un punto  $x_f$  es un punto fijo de la transformación siempre que  $f(x_f) = x_f$ .

Los puntos fijos son muy importantes ya que nos dicen cuales partes del espacio están fijas, no se mueven, con la transformación.

Definición.

Una transformación  $f: X \rightarrow X$  en un espacio métrico  $(X, d)$  es llamada “contractiva” o “función de contracción” si hay una constante  $0 < \alpha < 1$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \text{ para toda } x, y \in X.$$

A dicha constante se le llama factor de contracción para  $f$ .

Definición.

Sea  $S$  un subconjunto no vacío de números reales.

Entonces el ínfimo de  $S$  es  $-\infty$  si  $S$  contiene números negativos de valor absoluto arbitrariamente grande. De otra forma, el ínfimo de  $S = \max\{x \in S \mid x \leq s \text{ para toda } s \in S\}$ . El ínfimo de  $S$  siempre existe debido a la naturaleza del sistema de los números reales y se denota por  $\inf S$ .

Se define el supremo de  $S$  en forma semejante. El supremo de  $S$  es  $+\infty$  si  $S$  contiene números positivos de magnitud arbitrariamente grande. De otra forma, el supremo de  $S = \min\{x \in S \mid x \geq s \text{ para toda } s \in S\}$ . El supremo de  $S$  siempre existe y se denota por  $\sup S$ .

### Teorema del Punto Fijo.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Sea  $f: X \rightarrow X$  una función de contracción en el espacio métrico  $(X, d)$ .

Entonces  $f$  tiene exactamente un punto fijo  $x_f \in X$  y, más aún, la sucesión  $\{f^n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ , donde  $f^0(x) = f(f(\dots f(x)))$ ,  $n$  veces, converge a  $x_f$ .

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$  para cada  $x \in X$ .

Una función de “contracción” automáticamente es continua.

Demostración:

Primero se demostrará la unicidad de  $x_f$ .

Si  $x_f$  y  $x'_f$  son dos puntos fijos, entonces  $d(f(x_f), f(x'_f)) = d(x_f, x'_f)$ .

Por otro lado  $d(f(x_f), f(x'_f)) \leq \alpha d(x_f, x'_f)$  donde  $\alpha < 1$ .

$d(x_f, x'_f) \leq \alpha d(x_f, x'_f)$  lo cual es posible sólo si  $d(x_f, x'_f) = 0$ .

Por lo tanto  $x_f = x'_f$ .

Sea  $x_1 \in X$ . Se define una sucesión  $\{x_n\}$  de la siguiente manera:

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

Se demostrará que  $\{x_n = f(x_{n-1})\}$  es una sucesión de Cauchy, que, tiene su límite en  $X$  (por ser  $X$  completo) y que dicho límite es el punto fijo  $x_f$ .

Es decir,  $x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  y  $f(x_f) = x_f$ .

Ya que  $\alpha < 1$ , entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$  es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Por lo tanto la sucesión  $1, 1 + \alpha, 1 + \alpha + \alpha^2, 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3, \dots$  es una sucesión de Cauchy.

Por demostrar que la sucesión  $\{x_n = f(x_{n-1})\}$  es una sucesión de Cauchy:

Dado un  $\varepsilon > 0$  mostraremos que existe un  $N$  tal que  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , si  $n < m$  y  $n, m > N$ .

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(f(x_n))) + \dots + \Lambda \\ &\leq \alpha d(x_n, f(x_n)) + \alpha^2 d(x_n, f(x_n)) + \dots + \Lambda \\ &\leq d(x_n, f(x_n)) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n}] \\ d(x_n, f(x_n)) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, f(x_1)) \end{aligned}$$

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, f(x_1)) [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n}]$$

$$\text{Por lo tanto } d(x_n, x_m) \leq d(x_1, f(x_1)) [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \dots + \alpha^m]$$

Como  $1, 1 + \alpha, 1 + \alpha + \alpha^2, 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3, \dots$  es una sucesión de Cauchy,

$$\text{existe } N \text{ tal que } [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \dots + \alpha^m] < \frac{\varepsilon}{d(x_1, f(x_1))}$$

Por lo tanto  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  si  $n, m > N$ .

Sea  $x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Por demostrar:  $f(x_f) = x_f$ .

Como  $f$  es continua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_f$

Ejemplo.

Sea el espacio métrico completo  $(X, d)$ , donde  $X = \mathfrak{R}$  y  $d(x, y) = |x - y|$ .

Considerando la función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[-1/4, 1/4]$ .

Se dice que  $f(x) = x^2$  es una contracción en  $[-1/4, 1/4]$  ya que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| \\ &\leq (|x| + |y|) |x - y| \leq (1/4 + 1/4) |x - y| = 0.5 |x - y|, \end{aligned}$$

muestra que la constante de contracción es  $\alpha = 0.5$ ,

y que el punto fijo es cero, como se puede ver al listar algunos de los primeros elementos

$$f(1/3) = 1/9, f(1/4) = 1/16, f(1/5) = 1/25, \dots \rightarrow 0, \text{ es decir, } f(0) = 0 = x_0.$$

Teorema.

Sean  $X$  es un espacio métrico compacto,  $Y$  un espacio métrico y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua, entonces  $f(X)$  es compacto. Es decir, las imágenes bajo funciones continuas de compactos son también compactos.

La demostración de este teorema es la aplicación directa de la definición de continuidad y de compacidad y no será incluida en este trabajo.

Teorema

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto.

La función  $f: X \rightarrow \mathfrak{R}$  es continua, por lo que  $f(X)$  es compacto en  $\mathfrak{R}$ .

Por lo tanto  $f(X)$  es cerrado.

Sea el supremo de  $y$  el número  $y_{sup} = \sup \{f(x) \mid x \in X\}$

Como  $y_{sup}$  es un punto límite de  $f(X)$ , y  $f(X)$  es completo (compacto) entonces  $y_{sup} \in f(X)$ . Por lo tanto existe  $x_{sup} \in X$  tal que  $f(x_{sup}) = y_{sup}$ .

Por un argumento similar para los ínfimos se tiene que

$$\text{existen } x_{inf}, x_{sup} \in X \text{ tal que } f(x_{inf}) \leq f(x) \leq f(x_{sup}) \quad \forall x \in X.$$

Por lo que se ha demostrado que una función continua logra el máximo y el mínimo en un conjunto compacto.

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

La distancia entre un punto  $x \in X$  y  $A \subseteq X$ , es  $d(x, A) = \text{Min}\{d(x, y) \mid y \in A\}$

Es decir, la distancia entre un punto  $x$  y un subconjunto  $A$  (compacto) es la distancia más pequeña entre el punto y cualquier punto de  $A$ . Esto se podría “medir” gráficamente: si se coloca un compás en el punto  $x$  y se va incrementando la abertura hasta que el compás toque un punto en el subconjunto por primera vez. Entonces la distancia entre los dos puntos del compás es la distancia entre el punto y el subconjunto.

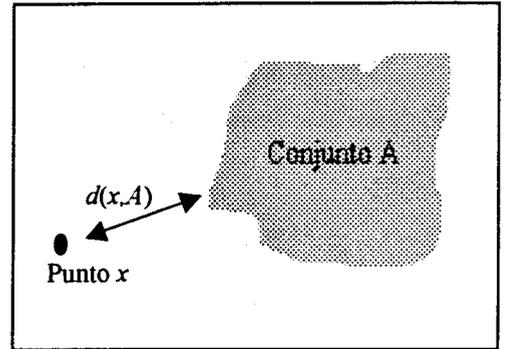


Fig. 18.19 Ejemplificación gráfica de la distancia entre un punto y un subconjunto.

La distancia entre dos conjuntos requiere de un poco más de reflexión ya que ambos conjuntos pueden tener muchos puntos en común y diferir ligeramente en sólo unos cuantos, o uno puede estar contenido en el otro. A continuación se hace el análisis dependiendo de cada caso.

Si el conjunto  $A$  está contenido en el conjunto  $B$ , entonces la distancia  $d(A, B)$  es cero.

$$d(A, B) = 0 \text{ si y solo si } A \subseteq B$$

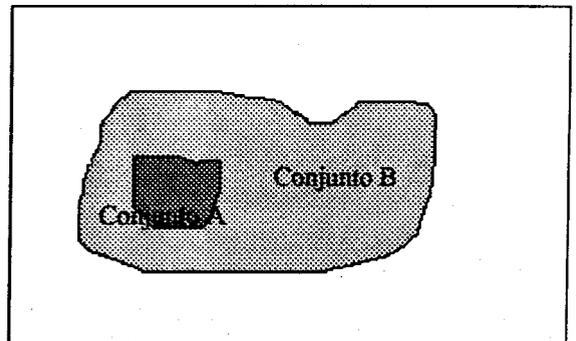


Fig. 18.20 Ejemplificación gráfica de la distancia de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  cuando  $A$  está contenido en  $B$ .

Si el conjunto  $B$  está contenido en el conjunto  $A$ , entonces la distancia  $d(A, B)$  es la mayor distancia entre dos puntos de ambos conjuntos.

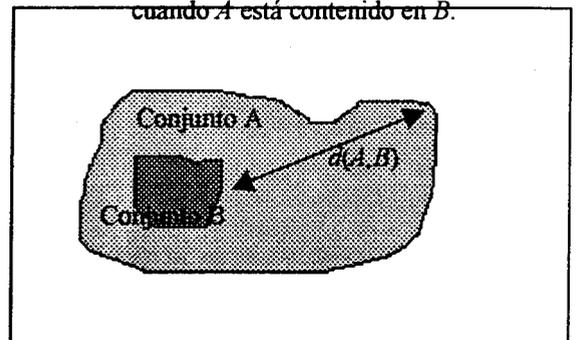


Fig. 18.21 Ejemplificación gráfica de la distancia de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  cuando  $B$  está contenido en  $A$ .

Si el conjunto  $A$  no está contenido en el conjunto  $B$ , entonces la distancia del conjunto  $A$  al conjunto  $B$ ,  $d(A, B)$ , es la distancia del punto en  $A$  más alejado del conjunto  $B$ , al punto en  $B$  más cercano al conjunto  $A$ .

$$d(A, B) = \text{Max}\{d(a, B) \mid a \in A\}$$

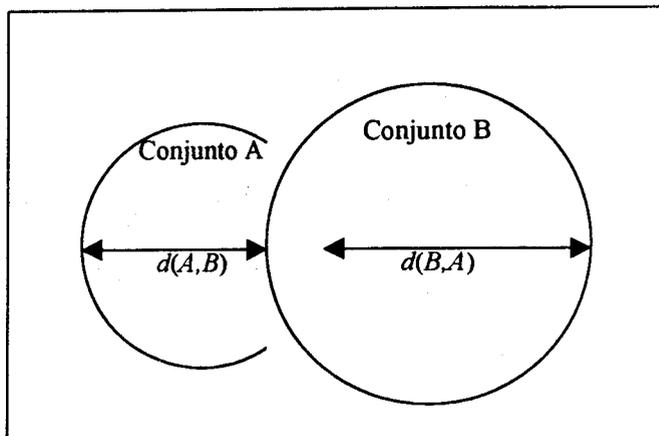
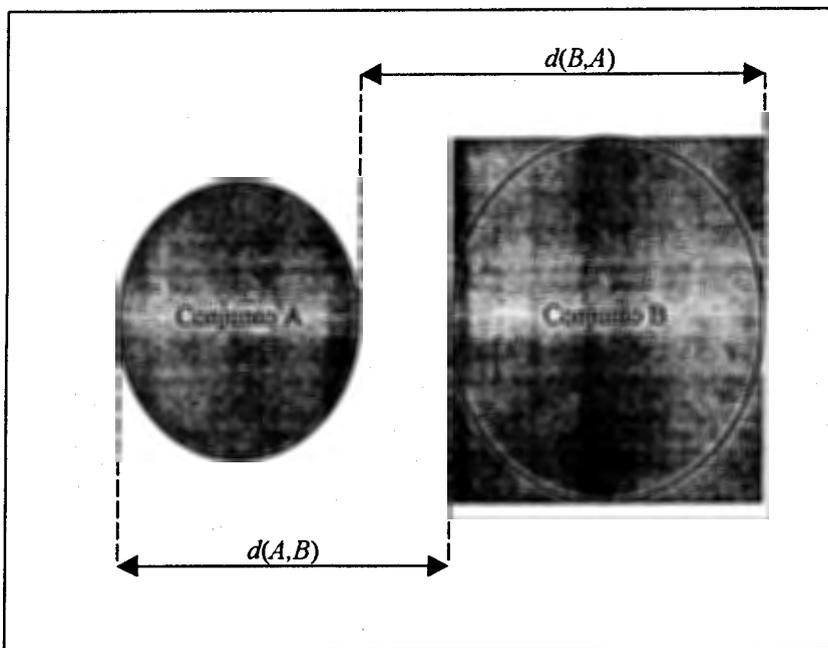


Fig. 18.22 Ejemplificación gráfica de la distancia de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  cuando éstos no se contienen pero sí se intersectan.



Lema 1.

Fig. 18.23 Representación gráfica de la distancia de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  cuando éstos no se intersectan.

Sea  $(X, d)$

un espacio métrico completo,  $A \subseteq X$  un subconjunto compacto y  $x_0 \in X$  un punto.

Si se define  $f(x) = d(x, x_0)$  para  $x \in X$  entonces  $f(x)$  es una función continua.

Como  $A$  es compacto  $f(x)$  tiene su mínimo en  $A$ , por lo tanto

existe un  $x_1 \in A$  tal que  $d(x_0, x_1) = \min\{d(x_0, x) \mid x \in A\}$ .

Lema 2.

Sea  $X$  un espacio métrico completo,  $K \subseteq X$  un subconjunto compacto.

Si se define  $f(x) = d(x, K)$  una función,

entonces  $f(x)$  es una función continua y  $f(x) = 0$  para toda  $x \in K$ .

Lema 3.

Sea  $X$  un espacio métrico completo. Sean  $K_1$  y  $K_2$  los subconjuntos compactos de  $X$ . Se escoge  $x \in K_1$ , se calcula  $d(x, K_2)$  y se maximiza,  $d(K_1, K_2) = \max(d(x, K_2))$ , para encontrar la distancia entre  $K_1$  y  $K_2$ ,

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $X$ .

La distancia Hausdorff entre  $A$  y  $B$  es  $h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ .

Es decir, la distancia Hausdorff,  $h$ , entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es la mayor de las distancias  $d(A, B)$  y  $d(B, A)$ . Y se calcula de la siguiente forma: dados los conjuntos  $A$  y  $B$ , primero se encuentra el punto en el conjunto  $A$  que este más alejado de cualquier punto en el conjunto  $B$ , y se encuentra la distancia  $D_A$  entre ese punto y el conjunto  $B$ . Luego se encuentra el punto en el conjunto  $B$  que este más alejado de cualquier punto del conjunto  $A$ , y se encuentra la distancia  $D_B$  entre este punto y el conjunto  $A$ . Finalmente se compara  $D_A$  con  $D_B$ , y la que sea mayor, será la distancia Hausdorff entre los conjuntos  $A$  y  $B$ .

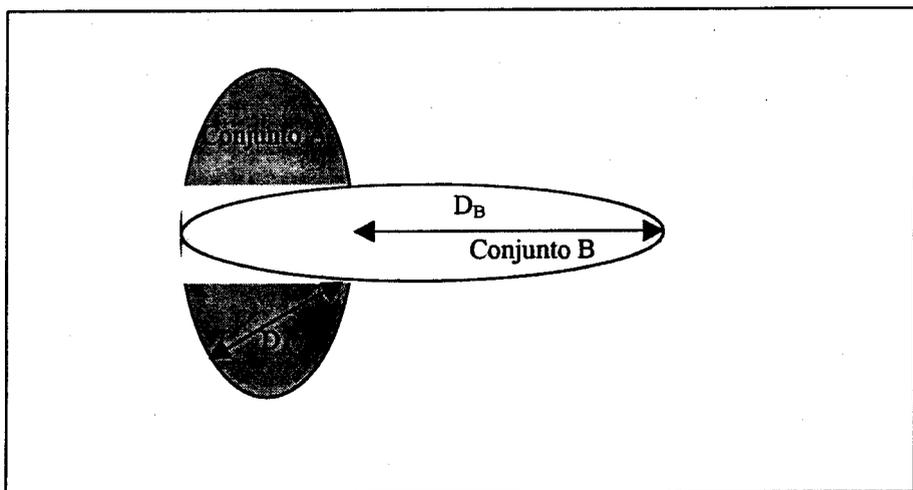


Fig. 18.24 Ejemplificación gráfica de la distancia Hausdorff.

Definición.

Sea el conjunto compacto  $B \subseteq X$  donde  $X$  es también compacto.

Se define al conjunto  $B + \varepsilon$  como el conjunto  $B$  dilatado por un factor  $\varepsilon$  si

$$B + \varepsilon = \bigcup_{x \in B} B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \text{ para algún } x \in B\}.$$

Es decir, el conjunto  $B + \varepsilon$  es el conjunto  $B$  más todos los puntos del conjunto  $X$  que están a una distancia de  $B$  menor o igual a  $\varepsilon$ .

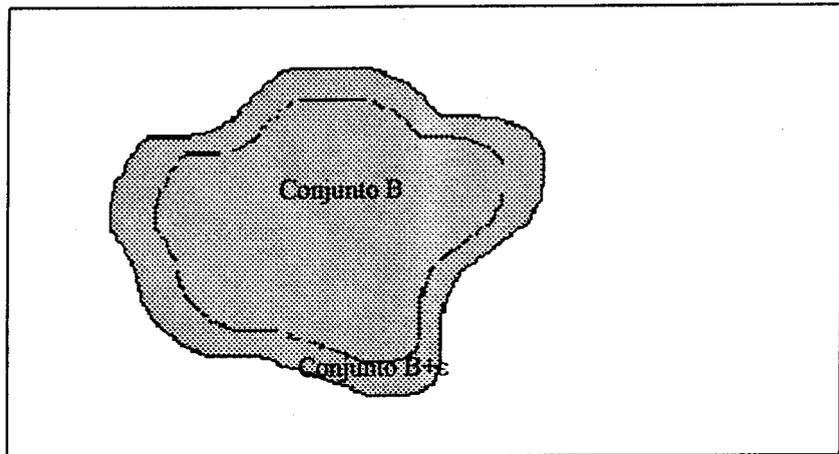


Fig. 18.25 Ejemplificación gráfica de un conjunto  $B$  dilatado por un factor  $\varepsilon$ .

Teorema.

Sean los conjuntos compactos  $A, B \subseteq X$  donde  $X$  es también compacto.

$$d(A, B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subseteq B + \varepsilon$$

Es decir, que si “la distancia entre los conjuntos  $A$  y  $B$  es menor que  $\varepsilon$ ” entonces “el conjunto  $A$  está incluido en el conjunto dilatado  $B + \varepsilon$ ” y viceversa.

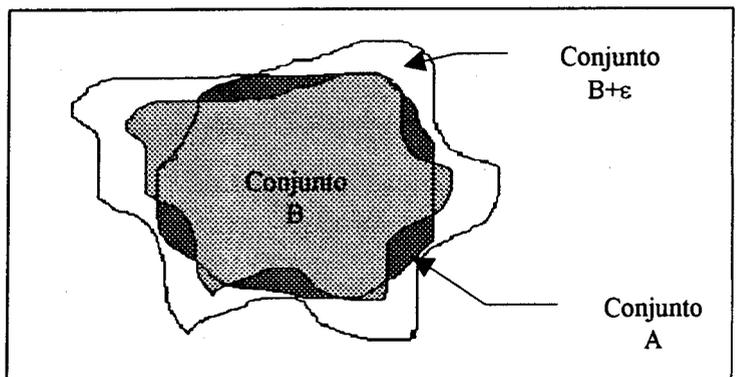


Fig. 18.26 Ejemplificación gráfica de un conjunto  $A$  incluido en un conjunto dilatado  $B + \varepsilon$ .

Demostración:

( $\Rightarrow$ ) Supóngase que  $d(A, B) < \varepsilon$ . Por demostrar que  $A \subseteq B + \varepsilon$ .

Se sabe que  $d(A, B) = \text{Max}\{d(a, B) \mid a \in A\} < \varepsilon$ .

Sea  $a_0 \in A$ . Por demostrar que  $a_0 \in B + \varepsilon$ .

Suponiendo que no:  $a_0 \notin B + \varepsilon$ , lo que quiere decir que para toda  $b \in B$ ,  $d(a_0, b) > \varepsilon$ .

Por lo tanto  $\text{Min}\{d(a_0, b) \mid b \in B\} > \varepsilon$ .

Por lo que  $\text{Max}\{d(a, B) \mid a \in A\} > d(a_0, B) > \varepsilon$ .

( $\Leftarrow$ ) Supóngase que  $A \subseteq B + \varepsilon$ . Por demostrar que  $d(A, B) < \varepsilon$ .

Si  $A \subseteq B$  entonces  $d(A, B) = 0$ .

Por demostrar que  $\text{Max}\{d(a, B) \mid a \in A\} < \varepsilon$ .

Sea  $a_0 \in A$ . Entonces existe un  $b_0 \in B$  tal que  $d(a_0, b_0) < \varepsilon$ .

Por lo que  $\text{Min}\{d(a_0, b) \mid b \in B\} < d(a_0, b_0) < \varepsilon$ .

Es decir  $d(a_0, B) < \varepsilon$  para toda  $a_0 \in A$ . Por lo tanto  $\text{Max}\{d(a_0, B) \mid a_0 \in A\} < \varepsilon$

Es decir  $d(A, B) < \varepsilon$ .

Hausdorff "midió" la distancia entre dos conjuntos compactos  $A$  y  $B$ ,  $h(A, B)$ , en el plano por medio de conjuntos dilatados, para determinar el valor de esta distancia se trata de "meter" el conjunto  $A$  en el conjunto dilatado  $B + \varepsilon$ , donde se toma el valor de  $\varepsilon$  lo suficientemente grande.

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo.

Se define al Espacio de los Conjuntos Compactos o Espacio de los Fractales como:

$$H(X) = \{ K \subseteq X, K \neq \emptyset \mid K \text{ es compacto} \}$$

donde la distancia en  $H$  es  $d(A, B)$  y  $H$  es completo con respecto a  $d$ .

Definición.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Para cada  $f: X \rightarrow X$  continua se define  $f_H: H \rightarrow H$  como  $f_H(A) = f(A)$ . Entonces  $f_H$  es continua,  $f_H$  es una contracción.

Acerca de Mapeos:

Sea  $A \subseteq X$ .

Sean  $f_1$  y  $f_2$  dos funciones  $f_1, f_2: X \rightarrow X$  continuas,

se define  $F: H \rightarrow H$  donde  $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$  es continua (lo cual es fácilmente demostrable).

Sean  $f_1, f_2$  y  $f_3$  tres funciones  $f_1, f_2, f_3: X \rightarrow X$  continuas,

se define  $F: H \rightarrow H$  donde  $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$  y  $F$  es entonces continua.

**Teorema**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y la función  $f: X \rightarrow X$ .

Si  $f$  es una contracción tal que  $d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y)$  con el factor de contracción  $0 < s < 1$ , entonces  $f$  induce un mapeo  $\tilde{f}: H(x) \rightarrow H(x)$  donde  $\tilde{f}(A) = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ .

Por lo que la función  $\tilde{f}$  es una contracción y tiene el mismo factor de contracción,  $s$ , que la función  $f$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) &= \max \{d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) | f(x) \in \tilde{f}(A)\} \\ &= \max \{ \min \{d(f(x), f(y)) | f(y) \in \tilde{f}(B)\} | f(x) \in \tilde{f}(A) \} \\ &\leq \max \{ \min \{s d(x, y) | f(y) \in \tilde{f}(B)\} | f(x) \in \tilde{f}(A) \} \\ &\leq \max \{ \min \{d(x, y) | y \in B\} | x \in A \} = s d(A, B) \end{aligned}$$

**Teorema**

Sean  $n$  funciones de contracción  $f_1, f_2, \dots, f_n: X \rightarrow X$  con  $s_1, s_2, \dots, s_n$  factores de contracción respectivamente. La familia de funciones  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  induce una función  $F: H(x) \rightarrow H(x)$  donde  $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_n(A)$ .

Como cada una de las imágenes,  $f_i(A)$ , es un conjunto compacto, entonces  $F(A)$  también es compacto.

Se tiene entonces que:

1. La función  $F : H(x) \rightarrow H(x)$  es una contracción.
2. El número  $s = \text{Max} \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  funciona como un factor de contracción general.
3. Por lo tanto existe un único “punto” fijo  $A_0$  de  $F$  (el cual es un en realidad un “conjunto fijo compacto” de  $F$ ).

Definición.

Un Sistema de Funciones Iterables consiste de un espacio métrico completo  $(X, d)$  y de un conjunto finito de funciones de contracción  $f_n: X \rightarrow X$ , con sus respectivos factores de contracción:  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

La abreviación SFI se usa para “sistema de funciones iterables” y la notación para el SFI que se acaba de definir es  $\{X | f_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  y su factor de contracción es  $s = \max \{s_n | n = 1, 2, \dots, N\}$ .

Definición.

El punto fijo  $A \in H(X)$  se conoce como el atractor del SFI.

Ejemplo.

Dado un triángulo  $A$  y la función de contracción  $f$ , la cual contrae al triángulo a su parte media superior, como se muestra la siguiente figura, se puede ver que el punto fijo es el vértice superior del triángulo:

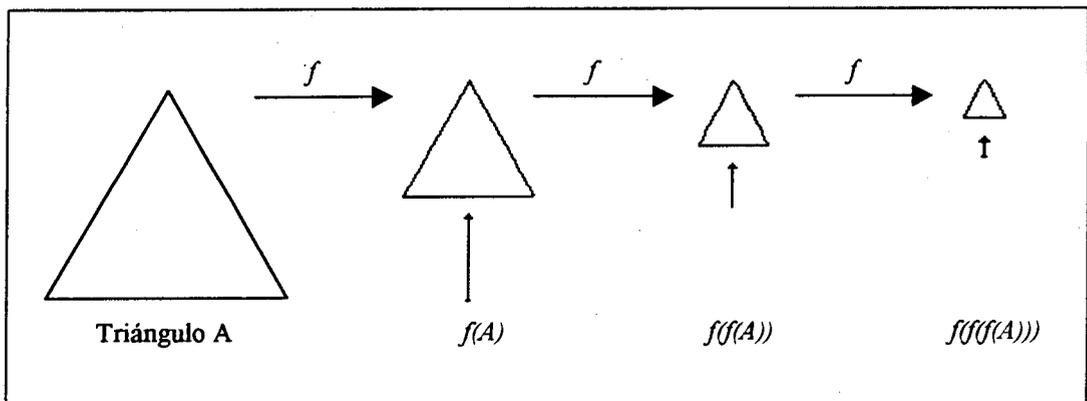


Fig. 18.27 Ejemplificación gráfica de una función de contracción.

Lo cual quiere decir que si se toma un punto cualquiera del triángulo o de su interior, el punto al cual va a tender siempre va a ser el vértice superior. Esto mismo va a suceder si se toma un conjunto de puntos, en lugar de un solo punto.

Ejemplo.

Dado un triángulo  $A$ , la función de contracción  $f_1$ , la cual contrae al triángulo a su parte inferior izquierda, y la función de contracción  $f_2$ , la cual contrae al triángulo a su parte inferior derecha, como se muestra en la figura 18.32, “punto fijo” es la recta que forma la base del triángulo:

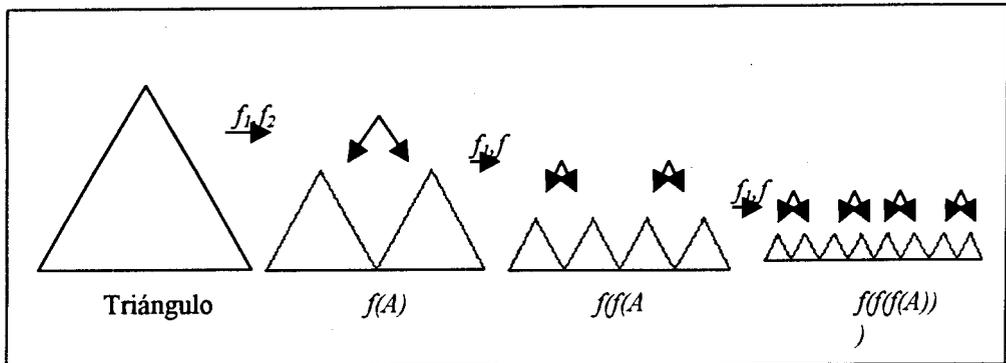


Fig. 18.28 Ejemplificación gráfica de dos funciones de contracción.

Lo mismo sucede en este ejemplo con dos contracciones, se toma un punto o un conjunto de puntos en el triángulo, el punto fijo al cual van a tender es la recta que forma la base del triángulo.

Es importante especificar cuales triángulos son generados por cuáles triángulos, ya que se podría inferir que cada triángulo genera los triángulos que aparecen en su base:

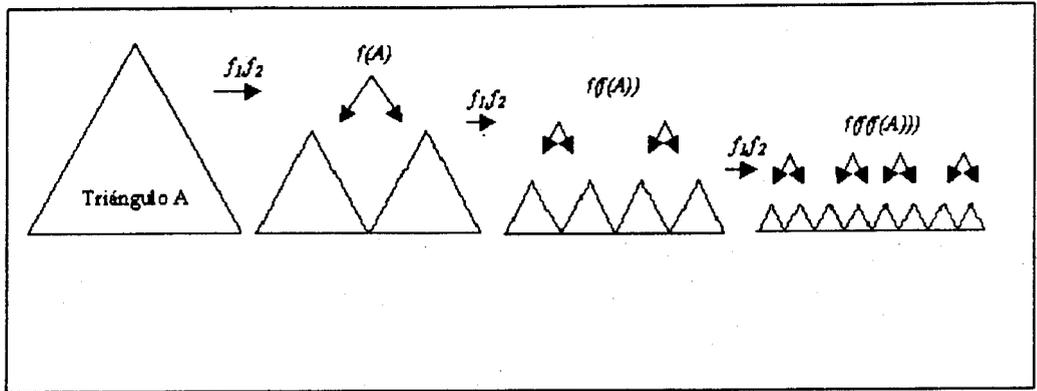


Fig. 18.29 Identificación de triángulos generados en el ejemplo anterior.

Ejemplo.

Dado un triángulo  $A$ , la función de contracción  $f_1$ , la cual contrae al triángulo a su parte inferior izquierda, la función de contracción  $f_2$ , la cual contrae al triángulo a su parte inferior derecha, y la función de contracción  $f_3$ , la cual contrae al triángulo a su parte media superior, como se muestra en la siguiente figura, se puede ver que el “punto fijo” ahora es una figura ya conocida, el Triángulo de Sierpinski:

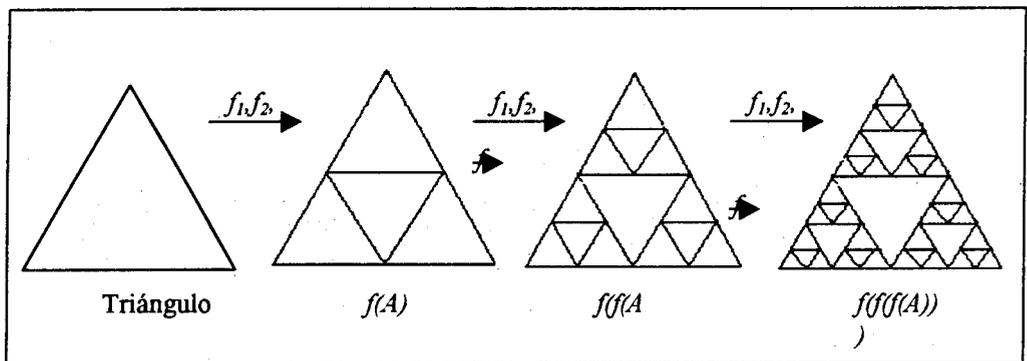


Fig. 18.30 Ejemplificación gráfica de tres funciones de contracción.

Lo mismo sucede en este ejemplo con tres contracciones, se toma un punto o un conjunto de puntos en el triángulo, el punto fijo al cual van a tender, en este caso es una figura, es el Triángulo de Sierpinski.

# 19 Revisión del Software Relacionado con los Fractales

## *BIF*

Compatible para PC, grafica la función logística  $f(p) = rp(1 - p)$  donde  $r$  representa la tasa de crecimiento.

## *Biomorph*

Compatible para PC, grafica la función  $f(z) = z^n + c$ , se recomienda usar el valor de 400 en el "viewportsize".

## *Chaospic*

Compatible para PC, funciona solo, se recomienda para presentaciones.

## *FDesign*

Compatible para PC, permite construir fractales del tipo SFI (Sistemas de Funciones a Iterar) usando el "mouse".

## *FracHill*

Es un excelente programa de montañas fractales. Tiene varias maneras de controlar las montañas, éstas se dibujan a colores y pueden exportarse a otros documentos. El programa requiere de una Macintosh con monitor a color y FPU.

## *Fractint*

Compatible para PC, dibuja prácticamente cualquier fractal e incluye grandes posibilidades de opciones tales como menú, librería, posibilidades de ciclado de colores, de "zoom" y por lo tanto de exploración.

## *Hilbert*

Este es un programa que, aunque no es nuevo, dibuja diferentes curvas fractales en Macintosh.

## *IFS3D*

Compatible para PC, despliega un conjunto de funciones iteradas.

## *LSystems*

Otro programa excelente. Compatible para PC, usa un sistema de escritura que permite dibujar curvas monstruo, árboles, arbustos, etc.

## *MacPalette*

Compatible para PC, permite imprimir imágenes a todo color en una impresora de tipo ImageWriter II. Existen "demos" sin costo.

### *MandelZot*

Es un programa del tipo *shareware* (gratis) para Macintosh que maneja varias ventanas, tiene una poderosa paleta de colores y dibuja distintos tipos de fractales.

### *Super MandelZoom*

Este es un programa que aunque no es nuevo, dibuja excelentes fractales en blanco y negro en Macintosh. Carece de algunas cualidades como la falta de un comando que guarde el trabajo, pero goza de una bonita interfase tipo Macintosh y es muy veloz.

### *The Beauty of Fractals Lab*

Es un programa comercial para Macintosh con monitor a color. Trabaja a través de ventanas múltiples y dibuja tanto el Conjunto de Mandelbrot como los Conjuntos de Julia clásicos. Tiene un editor de colores y hace un trabajo excelente dibujando fractales en 3D.

### *Winfract*

Surge del Fractint con una interfase para Windows adicionada.

### *Desktop Fractal Design System*

Compatible para PC, contiene una librería en la que se puede hacer un “zoom”, posibilidad para el diseño de fractales, mapas fractales y una sección educativa donde se han anexado referencias bibliográficas.

### *Fracland*

Compatible para PC, contiene los siguientes programas:

- *Kaotix*
- *LJD*.- presenta muchísimas variaciones dinámicas de la curva de Lissajous
- *Lorenz*.- presenta la curva de Lorenz
- *Mand386*.- genera el Conjunto de Mandelbrot
- *Recrtree*.- genera árboles recursivos
- *Vgaart*.- presenta fractales artísticos muy bellos
- *Weave*.- permite cargar de la librería algunos fractales
- *RecursiveRealm*.- realiza proyecciones sobre esferas, muy bellas
- *Fracland*.- presenta fractales tridimensionales

### *3DFrac*

Compatible para PC, crea imágenes que simulan paisajes usando geometría tridimensional.

## 20 Bibliografía

### Libros

- Barnsley, M. (1988), *Fractales Everywhere*, Academic Press.
- Devaney, R. L. (1992) *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley.
- Devaney, R. L. (1990) *Chaos, Fractals, and Dynamics*, Addison-Wesley.
- Edgar, G. (1990) *Measures, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York.
- Falconer, K. (1990) *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, New York.
- Gleick, J. (1987) *Chaos, Making a New Science*, Viking, New York.
- Mandelbrot, B. B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York.
- McGuire, M. (1991) *An Eye for Fractals*, Addison-Wesley, Redwood City.
- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1992) *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, New York.
- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1992) *Fractals for the Classroom, Strategic Activities*, Springer-Verlag, New York.
- Peitgen, H. O. And Saupe, D., (eds.) (1988) *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York.
- Wahl, B (1995), *Exploring Fractals on the Machintosh*, Addison-Wesley.

### Artículos

- Bannon, T. J. (1991, March) *Fractals and Transformations*, Mathematics Teacher, v84 n3 p178-185.
- Barton, R. (1990, October) *Chaos and Fractals*, Mathematics Teacher, v83 n7 p524-529.
- Buldyrev, S., Erickson, M., Garik, P., Shore, L., Stanley, H., Taylor, E., Trunfio, P., and Hickman, P. (1994, October) *Science Research in the Classroom*, Physics Teacher, v32 n7 p411-415.
- Camp, D., (1991, April) *A Fractal Excursion*, Mathematics Teacher, v84 p265-275.

- Ching, W.K., Erickson, M., Garik, P., Hickman, P., Jordan, J., Schwarzer, S. and Shore, L. (1994, December), *Physics Teacher*, v32 n9 p546-551.
- Cibes, M. (1990, November), *The Sierpinski Triangle: Deterministic versus Random Models*, *Mathematics Teacher*, p617-621.
- Coes, L III (1993, November) *Building Fractal Models with Manipulatives*, *Mathematics Teacher*, v86 n8 p646-651.
- Dewdney, A. K. (1991, October), *Exploring Fractals*, *Science Probe*, v1 n4 p49-57, 109.
- Esbenshade, D. (1991, April), *Fractal Bread*, *Physics Teacher*, v29 n4 p236.
- Gura, K., & Lindley, R. (1994) *Fractals and College Algebra*, the AMATYC Review, 51-56.
- Ko, R., and Bean, Ch. (1991, February), *A Simple Experiment that Demonstrates Fractal Behavior*, *Physics Teacher*, v29 n2 p78-79.
- Marks T. (1992, March), *Focus on Fractals*, *The Science Teacher*, v59 n3 p22-27.
- 
- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1990, August) *The Language of Fractals*, *Scientific American* 263, 2 40-47.
- Quigley, M. (Ed.) (1991) *Chaos and Fractal Geometry for High School Students*, Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.
- Quigley, M. (Ed.) (1991) *Fractal Geometry in the Curriculum*, Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.
- Reinstein, D., Sally, P. and Camp, D., (1997, January) *Generating Fractals through Self-Replication*, *Mathematics Teacher*, v90 n1 p34-36.
- Simmt, E., & Davis, B. (1998, February) *Fractal Cards: A space for exploration in Geometry and Discrete Mathematics*, *Mathematics Teacher*, v91 n2 p102-108.
- Solomon, A. (1989, Fall) *A Fractal Outline of a Fractal Course*, *The AMATYC Review*, 11(1), 35-41.
- Talanquer V. and Irazoque G. (1993, February) *Fractals: To Know, To Do, To Simulate*, *Physics Teacher*, v31 p72-78.

## 5.3 Propuesta de Implementación de un curso de Geometría Fractal en el Bachillerato

Tomando en consideración los trabajos analizados sobre las experiencias en otros países, principalmente Estados Unidos de América y Canadá, que integran la Geometría Fractal en sus cursos de bachillerato, se propone que el posible curso o taller se implemente considerando los aspectos resumido en la Tabla 3 y los cuales se discuten en las secciones a continuación.

<b>Tipo de curso en cuanto a extensión</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- De 2 a 3 semanas en el cierre del último curso de matemáticas del bachillerato, de ser este cálculo.</li> <li>- De no ser cálculo, ver a detalle en la sección 5.2.1.</li> </ul>
<b>Actividades del alumno</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lecturas y posteriores discusiones en clase.</li> <li>- Prácticas de laboratorio.</li> <li>- Proyectos de investigación o simulación en equipo.</li> <li>- Construcción de material didáctico.</li> </ul>
<b>Población a quién va dirigido</b>	Los alumnos a través del profesor.
<b>Papel del profesor</b>	Facilitador o guía del proceso.
<b>Forma de evaluación</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Proyecto de investigación de una aplicación de la Geometría Fractal y exposición grupal de resultados en clase.</li> <li>- Desarrollo y entrega de material didáctico enfocado a la enseñanza de la Geometría Fractal elaborado bajo criterios específicos.</li> </ul>

Tabla No. 3 Características generales de la propuesta para la enseñanza de la Geometría Fractal en el bachillerato

### 5.3.1 Tipo de Curso en cuanto a extensión

Lo recomendable es destinar entre dos y tres semanas del último curso de matemáticas del bachillerato que, en el contexto descrito, corresponde a un curso de

geometría analítica o de cálculo. Las ventajas de hacerlo de esta forma están en que se esperaría que, a estas alturas, se hubiesen completado la mayoría de los temas obligados, garantizando así que el alumno cuente con las bases adecuadas para el estudio de la Geometría Fractal. Sin embargo, en realidad no hay una extensión máxima, ya que el manual cuenta con material suficiente como para extender el curso hasta incluso un semestre completo. En cuanto a una extensión mínima, no se recomienda disponer de menos de dos semanas si lo que se pretende es presentar una visión general de los temas básicos de la Geometría Fractal; aunque no se descarta la posibilidad de tomar temas muy específicos y tratarlos en algunas clases de matemáticas de otros niveles como, por ejemplo, cuando se introducen los números complejos o el concepto de función.

### **5.3.2 Actividades del Alumno**

Dado que el manual ha sido elaborado con un enfoque constructivista, se requiere involucrar al alumno en su proceso de aprendizaje mediante una serie de actividades diversas, tales como lecturas, ensayos, discusiones, investigaciones, trabajo en prácticas y reportes, actividades individuales y en equipo. Es importante considerar que la asignación y el monitoreo de cada una de estas actividades propuestas debe planearse y prepararse cuidadosamente antes de ser puesta en práctica con un grupo de alumnos, ya que el éxito o el fracaso estará en gran medida en función de la maestría y el cuidado que el profesor ponga en su diseño.

### **5.3.3 Población a la que puede dirigirse**

A pesar de que, en parte de la bibliografía analizada, la población a la que fue dirigida un curso o taller de Geometría Fractal fueron profesores o alumnos de niveles distintos al bachillerato, es natural que, por las características de este trabajo, se esté pensando en un curso en el cual la población consistirá de adolescentes entre 15 y 18 años principalmente. Más en lo particular, aquellos que ya hayan cursado los primeros cursos de matemáticas del bachillerato en cualquier programa en donde, será responsabilidad del profesor o grupo de profesores, el adecuar qué temas y en qué momentos éstos deberán introducirse a los alumnos.

### **5.3.4 Rol del Profesor**

Por las mismas razones por las que el papel del alumno ha cambiado, el rol del profesor que trabaje este material no se espera que sea solamente el de un expositor. El profesor ahora actuará en muchas de las veces como un facilitador o guía para los alumnos, sobre todo en el manejo de discusiones grupales e individuales que conduzcan a la construcción de los conceptos de la Geometría Fractal.

### **5.3.5 Forma de Evaluación**

La forma de evaluación del curso dependerá en gran manera de las características con las cuales se haya implementado en una situación particular. Se propone utilizar métodos alternativos al uso de un examen de conocimientos, tales como el diseño de un proyecto, una exposición en clase, la elaboración de algún material o una investigación. Todas estas actividades debe de buscarse que sean trabajadas por los alumnos en forma grupal o por equipos.

Se recomienda consultar los Estándares del NCTM si se desea profundizar en cuanto a las posibilidades y los alcances de la forma de evaluación.

## 4 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A lo largo de este trabajo, se ha hecho evidente que hay suficiente material que avala la propuesta para enseñar Geometría Fractal a alumnos que cursen los últimos semestres del bachillerato, y que la experiencia en países como Estados Unidos de América y Canadá ha permitido delinear una propuesta la cual se ha presentado ampliamente en los capítulos que preceden a esta conclusión.

Esta propuesta se ha cristalizado en un *Manual de Geometría Fractal para el Profesor de Bachillerato* sustentado desde un punto de vista educativo en las teorías constructivistas y, desde un punto matemático formal, desde la topología métrica. Así mismo, han quedado marcadas las características básicas que la introducción de un curso de esta naturaleza se recomienda que posea, en cuanto a extensión, actividades para los alumnos y los profesores, y forma de evaluación.

Con relación a estas características, se imponen algunas recomendaciones que se considera son de gran importancia para garantizar el éxito en esta innovación. Primeramente, partimos del supuesto de que el profesor interesado cuenta con una preparación básica suficiente en matemáticas que le permitirá adentrarse en los conceptos expuestos en el manual o, en ausencia de ésta, con la inquietud por superarse y adquirir estos conocimientos. Dado que esta propuesta representa un cambio en estructuras de enseñanza “tradicionales”, tanto para los profesores como para los alumnos y las autoridades escolares, será muy importante que, antes de probar el material en el contexto de una clase, sea discutido y estudiado con cierta profundidad por los profesores, para evitar la posibilidad de crear una actitud insegura o negativa de los estudiantes hacia las matemáticas. Se ha dicho que la parte que corresponde a las matemáticas subyacentes no es indispensable para el trabajo con el

manual; sin embargo, se postula que es conveniente para el profesor contar con más herramientas conceptuales que le permitan llevar a sus alumnos hacia discusiones de profundidad, por lo que se recomienda no se ignore tal parte la cual se presenta en un lenguaje que se espera ayude a su comprensión.

La presentación de este material didáctico enfocado a la enseñanza de la Geometría Fractal da respuesta a la pregunta anteriormente planteada sobre la posibilidad de concentrar toda esta información en una manera que resulte accesible tanto a profesores de bachillerato como a los alumnos. Quedará para una segunda etapa la implantación del mismo en grupos reales de bachillerato. Se agrega la recomendación de no implantar cambios bruscos durante un curso, es una posibilidad la de tomar una de las secciones del manual y trabajarla con los alumnos como una prueba piloto; dependiendo de la forma en la que el profesor y los alumnos reciban el cambio, entonces buscar aumentar el número de horas o de temas.

El material responde, consecuentemente a los objetivos planteados al inicio de este trabajo con que:

1. Concentra, en forma de material didáctico dirigido a profesores de bachillerato y adecuada al contexto educativo del país, los supuestos teóricos y conceptuales de la Geometría Fractal.
2. Se ha desarrollado considerando su aplicabilidad al contexto educativo de la enseñanza de las matemáticas del bachillerato para que su implementación pueda ser inmediata, sin interferir en la evolución natural de los planes de estudio de la preparatoria.
3. Se ha integrado al currículum de tal forma que la conexión entre los temas nuevos y los que ya se enseñan sea natural.
4. Se ha adaptado a la infraestructura con la que cualquier escuela preparatoria cuenta, con el objetivo de que la disponibilidad de equipo no sea un impedimento para la implantación.

Queda como expectativa el que los profesores de bachillerato resulten altamente motivados a interesarse en la Geometría Fractal como una alternativa para la enseñanza y/o ejemplificación de algunos conceptos matemáticos, a entenderla y desear enseñarla a sus estudiantes dado que ésta les está siendo presentada en su idioma, con un diseño constructivista y adecuado al nivel de profundidad en el cual imparten sus clases.

# 5 BIBLIOGRAFÍA

## Libros

- Barnsley, M. (1988), *Fractales Everywhere*, Academic Press.
- Brooks, J.G. and Brooks, M.G. (1993), *In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms*, Association for Supervision and Curriculum Development.
- Christie, D. (1976), *Basic Topology*, Macmillan Publishing Co., Inc.
- Devaney, R. L. (1992) *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley.
- Devaney, R. L. (1990) *Chaos, Fractals, and Dynamics*, Addison-Wesley.
- Edgar, G. (1990) *Measures, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York.
- Falconer, K. (1990) *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, New York..
- Fischbein, E. (1990) *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Ed. by Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick, Cambridge University Press.
- Flores, R. (1994), *Hacia una Pedagogía del Conocimiento*, McGraw Hill.
- Gay, L.R. (1996), *Educational Research. Competencies for Analysis and Applications*, 5<sup>th</sup> Ed. Merrill, an imprint of Prentice Hall.
- Gleick, J. (1987) *Chaos, Making a New Science*, Viking, New York..
- Mandelbrot, B. B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York.
- McGuire, M. (1991) *An Eye for Fractals*, Addison-Wesley, Redwood City.

- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1992) *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, New York.
- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1992) *Fractals for the Classroom, Strategic Activities*, Springer-Verlag, New York.
- Peitgen, H. O. And Saupe, D., (eds.) (1988) *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York..
- Wahl, B (1995), *Exploring Fractals on the Machintosh*, Addison-Wesley.
- Wegner, T. (1992), *Fractals for Windows*, The Waite Group.

## Artículos

- Bannon, T. J. (1991, March), *Fractals and Transformations*, Mathematics Teacher, v84 n3 p178-185.
- Barton, R. (1990, October), *Chaos and Fractals*, Mathematics Teacher, v83 n7 p524-529.
- Buldyrev, S., Erickson, M., Garik, P., Shore, L., Stanley, H., Taylor, E., Trunfio, P., and Hickman, P. (1994, October) *Science Research in the Classroom*, Physics Teacher, v32 n7 p411-415.
- Camp, D., (1991, April) *A Fractal Excursion*, Mathematics Teacher, v84 p265-275.
- Ching, W.K., Erickson, M., Garik, P., Hickman, P., Jordan, J., Schwarzer, S. and Shore, L. (1994, December), *Overcoming Resistance with Fractals: A New Way to Teach Elementary Circuits*, Physics Teacher, v32 n9 p546-551.
- Cibes, M. (1990, November), *The Sierpinski Triangle: Deterministic versus Random Models*, Mathematics Teacher, p617-621.
- Coes, L III (1993, November), *Building Fractal Models with Manipulatives*, Mathematics Teacher, v86 n8 p646-651.
- Cooney, T.J. (1994), *Research and Teacher Education: In Search of Common Ground*, Journal for Research in Mathematics Education, v25 n6 p608-636.
- Dewdney, A. K. (1991, October), *Exploring Fractals*, Science Probe, v1 n4 p49-57, 109.

- Egnatoff, W. (1990, Winter), *Fractal Explorations in Secondary Mathematics*, Science and Computer Science, Journal of Computers in Math and Science Teaching, v10 n2 p21-42.
- Esbenshade, D. (1991, April), *Fractal Bread*, Physics Teacher, v29 n4 p236.
- Gadanidis, G. (1994, February), *Deconstructig Constructivism*, The Mathematics Teacher, v87 n2 p91-94.
- Gura, K., & Lindley, R. (1994) *Fractals and College Algebra*, the AMATYC Review, 51-56.
- Hanna, G. & Harrison, P. (1993), *Fractals in the Secondary School Curriculum*, In J. de Lange et al (Eds.), *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*, p103-117, New York: Ellis Horwood.
- Ko, R., and Bean, Ch. (1991, February), *A Simple Experiment that Demonstrates Fractal Behavior*, Physics Teacher, v29 n2 p78-79.
- Malone, J. and Taylor, P. (1992), *Constructivist Interpretations of Teaching and Learning Mathematics*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education.
- Marks T. (1992, March), *Focus on Fractas*, The Science Teacher, v59 n3 p22-27.
- Moreno, L. y Waldegg, G. (1992, Agosto), *Constructivismo y Educación Matemática*, Educación Matemática, v4 n2 p7-15.
- Peitgen, H. O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1990, August) *The Language of Fractals*, Scientific American 263, 240-47.
- Quigley, M. (Ed.) (1991, May), *Chaos and Fractal Geometry for High School Students*, Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.
- Quigley, M. (Ed.) (1991, May), *Constructivism: Some Theoretical Concerns Relating to Teacher Development*, Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.
- Quigley, M. (Ed.) (1992, May), *Fractal Geometry in the Curriculum*, Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.
- Reinstein, D., Sally, P. and Camp, D., (1997, January), *Generating Fractals through Self-Replication*, Mathematics Teacher, v90 n1 p34-36.

- Simmt, E. & Davis, B. (1998, February), *Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics*, *Mathematics Teacher*, v91 n2 p102-108.
- Solomon, A. (1989, Fall), *A Fractal Outline of a Fractal Course*, *The AMATYC Review*, 11(1), 35-41.
- Steffe, L.P. & Kieren, T. (1994), *Radical Constructivism and Mathematics Education*, *Journal for Research in Mathematics Education*, v25 n6 p711-733.
- Talanquer V. and Irazoque G. (1993, February) *Fractals: To Know, To Do, To Simulate*, *Physics Teacher*, v31 p72-78.
- Vacc, N. N. (1992, September), *Fractal Geometry in Elementary School Mathematics*, *Journal of Mathematical Behavior*, v11 n3 p279-285.

# ANEXO 1

Se presenta a continuación una descripción de cada uno de los artículos, relacionados con la enseñanza de la Geometría Fractal, revisados haciendo énfasis en las afirmaciones hechas en los mismos y en sus características didácticas generales. La bibliografía completa se encuentra en la sección Bibliografía de este trabajo y es importante mencionar que, a excepción de unos cuantos, los artículos están en inglés y las afirmaciones incluidas son traducciones de las mismas.

\* Fractales y Transformaciones (Bannon, 1991)

Se discuten diferentes transformaciones basadas en la generación de fractales tales como diseños autosemejantes, el Juego del Caos, la Curva de Koch y el Triángulo de Sierpinski. Se incluyen tres programas computacionales que muestran estos conceptos y que se pueden adaptar al lenguaje computacional que se tenga a disposición.

Se afirma que una de las razones por las que estos nuevos modelos fractales son tan exitosos se debe a que se encuentra mucho la propiedad de autosemejanza, inherente a los fractales, en la Naturaleza.

\* Caos y Fractales (Barton, 1990)

Se presenta un juego educacional llamado “El juego del Caos” que produce imágenes de fractales. Se incluye el código de dos programas básicos computacionales. Y finalmente se discute la generación de imágenes fractales por el Programa del Juego del Caos y el Triángulo de Sierpinski.

Se encontró que el tema generó una cantidad extraordinaria de interés entre los estudiantes, ya que, mientras los estudiantes juegan el juego del Caos y experimentan con variaciones, crean sus propios diseños fractales y desarrollan más comprensión de algunos de los conceptos.

\* Investigación Científica en el Salón de Clase (Buldyrev et al, 1994)

Describe un programa de investigación en el cual los estudiantes de preparatoria actúan como investigadores individuales en proyectos científicos. Muestra cómo introducir mejor, en el salón de clase, temas y metodología relacionados con la investigación científica actual. Ejemplifica lo anterior con una unidad destinada al concepto de Dimensión Fractal, la cual explora el papel que juega la aleatoriedad en el crecimiento de patrones de fractales aleatorios (crecimiento de “agregados” en experimentos de electro-depósitos) y la dimensión fractal de las estructuras resultantes. La evaluación de la unidad constó de presentaciones de los resultados obtenidos por cada equipo; enfocándose, cada presentación, en responder a una pregunta relacionada con el experimento.

Durante este programa de investigación, se afirma que, el profesor se convierte en un asesor y los grupos de estudiantes en la comunidad de investigadores, ya que la clase se transforma en una “comunidad de práctica” donde los estudiantes colaboran unos con otros y aprenden de ellos mismos así como de su profesor. Los científicos visitantes fueron gratamente impresionados por la semejanza entre el intercambio estudiantil y las interacciones entre científicos en una conferencia de investigación. Como si fueran investigadores, los estudiantes establecieron hipótesis, modificaron experimentos, usaron herramientas apropiadas para recolectar y analizar datos, trabajaron en equipo con sus compañeros para modelar resultados, resumieron y prepararon reportes para los otros equipos. Se piensa que se ha encontrado una forma de convertir partes de investigación científica actual en material didáctico, lo que puede ayudar a estudiantes de Bachillerato a funcionar como investigadores científicos.

\* Una Excursión Fractal (Camp, 1991)

Después de introducir la Curva de Koch en el plano, generada por recursiones simples en un triángulo equilátero, se extiende el proceso al espacio con recursiones simples en un tetraedro regular. Se incluye, para ambas secuencias de recursiones, la fórmula iterativa, ilustraciones para las primeras iteraciones y un ejemplo de un programa en PASCAL.

Se afirma que recientemente la Teoría del Caos y los temas relacionados con la Geometría Fractal han retoñado como campos creativos de estudio de Matemáticas y Física. Se ha

encontrado que los estudiantes se emocionan por las conjeturas que pueden hacer acerca de las figuras y que surge de ellos mismos el deseo de formar generalizaciones como una consecuencia natural de este ejercicio.

\* Dominando Resistencias con fractales. Una Nueva Forma de Enseñar Circuitos Elementales (Ching et al, 1994)

Los estudiantes construyen un triángulo de Sierpinski usando resistencias y midiendo su resistencia como una función de su tamaño. Durante dos años se ha usado este experimento para ayudar a los estudiantes de Bachillerato a entender los circuitos elementales y la resistencia eléctrica de un medio desordenado. Primero se da un pequeño repaso, usando el triángulo de Sierpinski, de lo que significa geoméricamente ser un fractal, seguido de una explicación acerca de cómo analizar la resistencia eléctrica de un triángulo para encontrar su comportamiento fractal.

Se afirma que el triángulo de Sierpinski ha demostrado ser viable para probar teorías físicas en la Geometría Fractal, lo que provee a los estudiantes con una experiencia manual en la adquisición de datos y una oportunidad para realizar el análisis teórico necesario para el análisis de los mismos. También se tiene la oportunidad de ensamblar equipo y de aplicar conocimiento que había sido reportado como “algo viejo y aburrido” en el estudio de fractales, lo cual les pareció motivante a los estudiantes, aún a aquellos con historia de bajo aprovechamiento académico.

\* El Triángulo de Sierpinski: Modelos Determinísticos vs Modelos Aleatorios (Cibes, 1990)

Se proveen tres programas computacionales para generar figuras fractales y se sugieren usos y extensiones de estos algoritmos para el estudio del Caos y los Fractales.

Se afirma que la emoción real para los profesores de Matemáticas es la oportunidad de viajar con los estudiantes por las nuevas avenidas de genuina indagación basada en algunas simples ideas y preguntas, y ayudado por las correspondientes técnicas de programación computacional. Por lo menos hay dos aspectos de los Sistemas Dinámicos, que son accesibles a muchos estudiantes de bachillerato, que los motivarán y darán una buena preparación para un estudio futuro: el concepto de fractal y la técnica de iteración. Los

temas de Caos y Fractales en particular y el de Sistemas Dinámicos en general, están llenos de oportunidades para la experimentación con computadora y el desarrollo de sorprendentes gráficas. Los profesores de Matemáticas que se aventuren en este campo encontrarán renovación y emoción más allá de sus expectativas, para ellos y para sus estudiantes. Más aún, les darán a sus estudiantes oportunidades de hacer “conexiones matemáticas” que es uno de los Estándares Curriculares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) publicados en 1989.

\* Construyendo Modelos Fractales con “Manipulativos” (Coes III, 1993)

Se describe el uso de materiales “manipulables” para construir y examinar modelos geométricos que simulan la propiedad de autosemejanza de los fractales. Se discuten ejemplos en dos y tres dimensiones y en dimensión fractal. Se discute cómo éstos modelos pueden ser engañosos, pues no muestran autosemejanza a todos los niveles. En especial, se muestra el trabajo hecho con “cubitos”, primero vistos sólo como “cuadrados” (2 dimensiones) y después como “cubitos” (3 dimensiones).

Se afirma que los fractales ofrecen una oportunidad, poco usual, de usar material manipulable, lo que promueve un entendimiento más profundo que cuando sólo se usa papel y lápiz y se explica el proceso en clase.

\* Explorando Fractales (Dewdney, 1991)

Explora el tema de la geometría fractal enfocándose en la ocurrencia de las formas fractales en la naturaleza. Los temas incluyen la iteración de funciones, Teoría del Caos, el atractor de Lorenz, mapas logísticos, el Conjunto de Mandelbrot, y los Conjuntos Mini-Mandelbrot. Proporciona algoritmos computacionales apropiados, así como otras fuentes de información.

\* Exploraciones Fractales en Matemáticas, Ciencia y Computación en la Preparatoria (Egnatoff, 1991)

La Geometría Fractal se introduce por medio de ejemplos de exploración computacional en líneas costeras, curvas autosemejantes, rutas aleatorias y crecimiento de poblaciones. Cada investigación comienza y termina con preguntas; sólo algunas son contestadas. La noción de dimensión no entera es explicada en forma simple. Las exploraciones, que incluyen la

construcción de algoritmos y el subsecuente desarrollo y aplicación de programas computacionales simples, llevan al estudiante al autoestudio y a desarrollar proyectos más avanzados.

\* Pan Fractal (Esbenshade Jr., 1991)

Desarrolla la idea del concepto de fractales a través de una actividad de laboratorio que calcula la dimensión fractal de un pan blanco ordinario. Extiende el uso de la dimensión fractal para comparar otras estructuras complejas como otros panes y esponjas.

Se afirma que el laboratorio no es difícil para estudiantes que cursan los últimos dos años de Preparatoria ya que los estudiantes se sienten cómodos con el uso de logaritmos y su relevancia con el desarrollo de la Teoría Fractal. Un laboratorio como este muestra a los estudiantes el valor práctico de una descripción fractal de estructuras ya que la dimensión fractal ofrece una forma de comparar diferentes estructuras complejas de una forma fácil y cualitativa.

\* Los Fractales y el Álgebra Universitaria (Gura y Lindley, 1994)

La publicación de la Asociación Americana Matemática de Universidades de Dos Años (AMATYC, por sus siglas en inglés) es designada como una avenida de comunicación para los educadores de Matemáticas y preocupándose con las posiciones, ideas y experiencias de los estudiantes y profesores de Universidades de 2 años, contiene artículos en exposición y Educación Matemática y apartados regulares presentando revisiones de libros y software y problemas de matemáticas.

El volumen 15 incluye el artículo “Los fractales y el Álgebra Universitaria” en el cual se afirma que el atractivo visual y estético de los fractales provee un contexto para la manipulación de símbolos del álgebra y ofrece un enriquecimiento y extensión de temas estándares. Se menciona que en el curso de Álgebra se usa la Geometría Fractal para enmarcar temas estándares, para reforzar e ilustrar aplicaciones y para dar un enriquecimiento durante las últimas 2 a 3 semanas del curso regular. A pesar de que sólo se “rasguñó” la superficie de las posibilidades en el campo de la Geometría Fractal, se disfrutó de la oportunidad de introducir a los estudiantes a nuevas y excitantes Matemáticas, lo cual fue estimulante para ellos y para los profesores. Se hace notar que los estudiantes tuvieron

una mejor opinión de su propio conocimiento Matemático al darse cuenta de que era posible estudiar temas de Matemáticas Contemporáneas que tienen aplicaciones en otros campos, las cuales aún están siendo desarrolladas. El hecho de que Mandelbrot sea un practicante Matemático vivo es de gran interés para los estudiantes cuya percepción es que todas las Matemáticas fueron desarrolladas y empaquetadas en el siglo XVII.

El módulo está basado principalmente en el trabajo de Devaney (1989) y los temas Geometría Fractal que contiene son: Introducción, Iteración, Análisis Gráfico, Números Complejos e Iteración, Iteración Geométrica y Dimensión Fractal.

\* Los Fractales en el Curriculum de la Escuela Preparatoria (Hanna y Harrison, 1994)

La introducción de la Geometría Fractal en el Curriculum de Matemáticas reúne muchos temas de la Geometría Euclideana, Álgebra, y varios aspectos de la Tecnología Computacional. El artículo habla acerca de la enseñanza de conceptos nuevos de la Geometría Fractal a través del uso de conceptos ya familiares a los estudiantes, tales como semejanza, número aleatorio e iteración de funciones. Da una descripción de las unidades experimentales usadas en Preparatoria en Ontario, Canadá, donde los profesores fueron guías y consejeros en vez de instructores; se concluye que los estudiantes pueden aprender mucho de Matemáticas a través de la exploración de Fractales. Los fractales se han vuelto tan populares en los últimos años que no se pueden ignorar en la Enseñanza de Matemáticas; libros de fractales, conferencias, y artículos abundan. Las imágenes de fractales generadas por los paquetes computacionales han despertado el interés de los estudiantes en el tema. Por supuesto, antes de apresurarse a la elaboración de material para la enseñanza de fractales, deben de presentarse algunas preguntas acerca de su incorporación a un curriculum ya saturado de por sí. Las preguntas más importantes parecen ser: ¿El tema de fractales realmente cuenta como Matemáticas?, ¿Lleva a la enseñanza de aplicaciones? y ¿Es posible que forme parte del curriculum de Matemáticas?

\* La Geometría Fractal en el Curriculum (Harrison, 1992)

Reporte anual del Grupo de Estudio Canadiense para la Educación Matemática (CMESG, por sus siglas en inglés), que está dividido en cuatro secciones, una de las cuales es para los

reportes de grupos de estudio. El reporte de uno de los grupos de trabajo, el cual trabajó durante tres sesiones, fue en el tema “ Geometría Fractal en el Curriculum”.

Se afirma que las Matemáticas del Caos y los Fractales son al mismo tiempo accesibles, atractivas y excitantes y que la Geometría Fractal ofrece una maravillosa arena para la combinación de experimentación en computadora y visión geométrica. Se cita a Devaney (1991) “... la importancia real del caos y los fractales no está en las aplicaciones que provienen de ellas. Sino, en el impacto que estas ideas tendrán en la Educación Matemática”. Se menciona que Devaney (matemático) y Kaye (físico) están de acuerdo en que definitivamente hay un lugar para el Caos y los Fractales en el Curriculum de la escuela. Se concluyó que los fractales exponen a los estudiantes a un lado menos familiar de las Matemáticas ya que ofrecen: preguntas abiertas, ecuaciones con solución no algebraica, interdependencia de ideas Matemáticas, construcción e investigación de modelos Matemáticos, parte de la belleza y fascinación de las Matemáticas y el sentido de que las Matemáticas están vivas y son recientes.

\* El Leguaje de los Fractales (Jurgens et al, 1990)

Describe la producción y aplicación de imágenes basadas en la Geometría Fractal. Discute grupos en lenguaje fractal, codificación de imágenes fractales y dialectos fractales. Sugieren implicaciones de estas aplicaciones de la Geometría a la Educación Matemática.

Se afirma que Mandelbrot, con su concepto de fractales, puso en marcha una nueva forma de pensar dentro de las Matemáticas y las ciencias naturales, una ola que, por su amplitud, fuerza y creatividad extraordinarias, se ha convertido en acontecimiento interdisciplinario de primer orden.

\* Un Simple Experimento que Demuestra Comportamiento Fractal (Ko y Bean, 1991)

Describe cómo es que el formar bolas de papel arrugado exhibe el concepto de una dimensión topológica semejante a la de los fractales. La masa de la bola de papel arrugado es proporcional a su diámetro elevado a una potencia no-entera. Este trabajo fue realizado durante el verano de 1988 en un “Programa para Estudiantes Jóvenes” patrocinado por la Fundación Nacional de Ciencia (NSF, por sus siglas en inglés).

Se afirma que una de las más nuevas y rápidamente creciente áreas de conexión entre las Matemáticas y la naturaleza es el estudio de los fractales.

\* Caos y Geometría Fractal para Estudiantes de Bachillerato (Lewis y Kaye, 1991)

Reporte anual del Grupo de Estudio Canadiense para la Educación Matemática (CMESG, por sus siglas en inglés), que incluye reportes de Grupos de Trabajo entre los que se encuentra: “La Geometría fractal y el Caos para preparatorias”. Lewis y Kaye, desde 1987, han presentado clases, experimentos y otras actividades a estudiantes de Preparatoria.

Se afirma que es la tremenda fascinación de los científicos, en muchos campos, con los fractales y el caos lo que ha llevado el tema dentro y fuera del campo de la Educación. Aparte del aspecto de actividades manuales, los estudiantes experimentan algo de Matemáticas exóticas. Se espera que pronto, y por demanda popular, el estudiante promedio de Bachillerato tenga acceso a cursos acreditados de fractales y caos. Se menciona que se han ganado seis premios en la Feria de Ciencias en temas de Geometría Fractal.

En conclusión, el grupo de trabajo expresó entusiasmo por el contenido del curso y por el enfoque de presentar estos temas a estudiantes de preparatoria. Desde la conferencia, el Ministro de Educación de Ontario, Canadá ha aprobado el dar un crédito completo por el curso llamado “Fractales y Caos” para estudiantes de Preparatoria.

\* Enfoque en los fractales (Marks, 1992)

Presenta una unidad de tres lecciones que usa la Geometría Fractal para medir la línea costera de Massachusetts. Dos lecciones dan actividades manuales usando métodos con compás y cuadrícula para realizar las mediciones; y la tercera lección analiza y explica los resultados de las actividades. Cada lección tuvo una duración de 45 minutos y es dirigida a estudiantes de Preparatoria.

Se afirma que los fractales se han convertido en un componente importante en la investigación reciente en Física, Matemáticas, Química y Biología. Se introduce a los estudiantes a un tema potencialmente intimidante (dimensión) de una forma no amenazante (usando mapas del lugar donde se vive) y se provee a los estudiantes de una aplicación para los logaritmos que estudian en clase. Se dan recomendaciones de futuros proyectos.

\* Generando Fractales a través de Auto-duplicación (Reinstein et al, 1997)

Describe una actividad para el salón de clase diseñada para dar a los estudiantes una experiencia manual usando la tecnología y la visualización geométrica, así como el explorar la Geometría Fractal en un ambiente cooperativo en el salón de clases. Los fenómenos naturales están son el contexto de estas actividades. Enriquece la comprensión de la Geometría Euclideana y de sucesiones infinitas. Se ofrecen listas de materiales, requisitos, direcciones y sugerencias para futuros proyectos. Incluye hojas de actividades. Se afirma que la naturaleza abierta de esta actividad motiva la creatividad, el descubrimiento y el deseo de buscar conexiones. Los estudiantes se benefician al ser expuestos a nuevas ideas mientras se enriquece su entendimiento de las Matemáticas tradicionales. Las actividades son emocionantes tanto para los estudiantes como para los profesores ya que las discusiones de clase fueron ricas y variadas.

\* Tarjetas Fractales: Un espacio para la Exploración en Geometría y Matemáticas Discretas (Simmt y Davis, 1998)

Actividad en la cual se construyen tarjetas fractales que son baratas, relativamente fáciles de hacer y que llevan a la interpretación e investigación matemática. Dicha actividad involucra conceptos de medición, de Sistemas de Números, Sucesiones, Series y Límites, aparte de “nuevas” ideas tales como Recursión, Iteración, Auto semejanza y Dimensión Fraccionaria. Se afirma que la creciente atención al tema de Fractales dentro de los círculos de Educación Matemática apoya y es apoyada por iniciativas como la de los Estándares Curriculares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés), publicados en 1989. La Geometría Fractal sirve como una poderosa ilustración de algunas cualidades de investigación Matemática que han sido poco mencionadas en las Matemáticas Escolares. Los Geómetras Fractales han aparecido en muchas ramas de las Matemáticas, recordándonos acerca de las ideas interconectadas dentro de esta disciplina. Las sorprendentes y complicadas imágenes de fractales que han sido generadas por aparentemente simples reglas han ayudado a abrir una nueva, y para muchos más accesible, ruta para apreciar la belleza de las Matemáticas. La actividad desarrollada permite a los estudiantes ocuparse de tareas apropiadas para su conocimiento matemático personal, habilidades e intereses, expresando sus propias preguntas y problemas. También ofrece un

rico espacio de Exploración Matemática y discusión acerca de la Naturaleza de las Matemáticas y de la Investigación Matemática.

\* Un Perfil Fractal para un Curso de Fractales (Solomon, 1989)

El propósito principal de este reporte especial es el de sugerir estrategias para cumplir con las necesidades matemáticas de los estudiantes de universidades de dos años en la década de los 90s. Ya que los 20 participantes eran libres de escribir acerca de los temas que ellos consideraron apropiados para el desarrollo intelectual y personal de todos los estudiantes, sus artículos representan un vasto vistazo a lo que los principales educadores matemáticos piensan debe de estar ocurriendo en la educación matemática en los 90s. Los artículos fueron separados en cinco categorías, una de las cuales es: Perfiles del contenido del currículum específico de Cálculo, Matemáticas Discretas, Estadística y Geometría Fractal.

Se afirma que el tema de Fractales provee de una oportunidad de investigar y relacionar una riqueza de ideas, aparte de dar nuevas visiones o enfoques para la comprensión de algunos conceptos de Cálculo. Este tema provee un vasto rango de nuevos acercamientos hacia las Matemáticas y muchas oportunidades para que los estudiantes tomen un papel activo en su aprendizaje. A pesar de que la terminología especial de los fractales es nueva, las raíces de la teoría Fractal descansan dentro de una variedad de ideas básicas disponibles a la mayoría de los estudiantes con modestos antecedentes Matemáticos de Bachillerato. Muchos de las ideas y conceptos relacionados con la Geometría Fractal encajan fácilmente en cursos de aplicaciones computacionales, matemáticas finitas, pre-Cálculo y Cálculo.

El artículo propone un curso de Geometría Fractal dividido en 4 secciones: Las secciones I (El punto de vista Geométrico) y II (El punto de vista Aritmético) exploran las raíces de la Teoría Fractal en Geometría y Aritmética. La sección III (Temas Fractales más Avanzados) menciona temas de estudio construidas sobre los fundamentos de las primeras dos secciones. Y, finalmente, la sección IV (Cursos Fractales) sugiere enfoques alternativos para un curso.

\* Fractales: Saber, Hacer, Simular (Talanquer y Irazoque, 1993)

Discute el desarrollo de la Geometría Fractal y sugiere a los “fractales agregados” como una atractiva alternativa para la introducción de conceptos fractales. Describe métodos para producir fractales metálicos y simular por computadora el dibujo de figuras fractales.

Se presenta la oportunidad de saber, hacer y simular en el reino de los fractales como parte de una filosofía de enseñanza que se piensa se debe sostener, mostrando a los estudiantes una forma de trabajo que parece estar más cerca de la investigación científica que de un discurso doctrinal. Se afirma que los temas relacionados con los fractales son particularmente adecuados para los enfoques de educación integral que toman en cuenta los tres pilares que soportan la ciencia moderna: teoría, experimentación y simulación, lo que hace que estos temas sean introducidos en a través de una enfoque integral. Finalmente se menciona que los fractales sirven como un útil acercamiento a domar un mundo que merece ser conocido.

\* Geometría Fractal en Matemáticas de Escuelas Primarias (Vacc, 1992)

Reporte de un caso de estudio para evaluar si es posible enseñar algunos de los conceptos básicos de la Geometría Fractal a alumnos de escuelas primarias y para determinar la efectividad de que uno de los estudiantes presente una lección a futuros profesores de primaria. Se concluye que los conceptos simples de la Geometría Fractal parecen apropiados para el curriculum de Matemáticas de las Escuelas Primarias.

## ANEXO 2

Se presenta a continuación una tabla donde se muestran los conocimientos previos necesarios para el estudio de cada uno de las secciones del Manual:

Concepto Matemático	Primeros Fractales	Autosemejanza	Dimensión Fractal	Proceso Iterativo	Los Conjuntos de Julia	El Conjunto de Mandelbrot	Fractales como Solución de Ecuaciones Polinomiales
Conjunto	■	■			■	■	■
Número Real	■			■			■
Número Complejo					■	■	■
Recta Numérica	■						
Plano Cartesiano				■			
Plano Complejo				■	■	■	■
Gráfica				■	■	■	■
Intervalo	■		■		■	■	■
Serie y Sucesión	■			■	■	■	
Triángulo de Pascal	■						
Logaritmo			■				
Función				■	■	■	
Dominio e Imagen				■			■
Ecuación de una recta			■				■
Pendiente de una recta			■				■
Función Polinomial				■	■	■	
Ecuación Polinomial							■
Función Trascendental				■			
Función Compleja					■	■	■
Derivada	■						■
Nociones Geométricas	■	■					
Dimensión			■				