

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO

FACULTAD DE INGENIERIA

MAESTRIA EN INGENIERIA
(CONSTRUCCIÓN)

ANALISIS DINAMICO DE ABSORBEDORES DE VIBRACION EN ESTRUCTURAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA
(C O N S T R U C C I O N)
P R E S E N T A
ING. EDITH ALVAREZ FLORES

QUERETARO, QRO.

JUNIO 1996

BIblioteca CENTRAL

No Adq. 55816
No. Título _____
Clas. 624.1
A 773a

**ANÁLISIS DINÁMICO DE ABSORBEDORES
DE VIBRACIÓN EN ESTRUCTURAS**

T E S I S

**QUE COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
INGENIERÍA (CONSTRUCCIÓN)**

PRESENTA:

ING. EDITH ÁLVAREZ FLORES

DIRIGIDA POR:

**DR. JOSÉ LUIS URRUTIA GALICIA
DR. GUADALUPE MOISÉS ARROYO CONTRERAS**

JURADO:

**DR. GUADALUPE MOISÉS ARROYO CONTRERAS
PRESIDENTE**

**DR. JOSÉ LUIS URRUTIA GALICIA
SECRETARIO**

**DR. JAIME HORTA RANGEL
VOCAL**

**M.I. MIGUEL ÁNGEL PEREZ LARA Y HERNÁNDEZ
SUPLENTE**

**M.I. ABRAHAM MARTÍNEZ BAÑI
SUPLENTE**

**M. en C. CARLOS ISAAC SILVA BARRÓN
DIR. ESTUDIOS DE POSGRADO**

**M.I. JOSÉ JESUS HERNANDEZ ESPINO
DIR. FACULTAD DE INGENIERIA**

**CENTRO UNIVERSITARIO, JUNIO DE 1996.
QUERÉTARO, QRO., MÉXICO.**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MAESTRÍA EN INGENIERÍA CONSTRUCCIÓN

TRABAJO DE TESIS

ANÁLISIS DINÁMICO DE ABSORBEDORES DE VIBRACIÓN EN ESTRUCTURAS

Investigadores responsables:

*Dr. José Luis Urrutia Galicia
Dr. Guadalupe Moisés Arroyo Contreras*

Alumna:

Ing. Edith Álvarez Flores

Línea de investigación:

Absorbedores de Vibración

Período de realización:

Mayo 1995 - Mayo 1996

QUERÉTARO, QRO., JUNIO DE 1996.

AGRADECIMIENTOS

**LA CULMINACIÓN DE ESTA ETAPA DE MI VIDA ESTÁ DEDICADA A LAS PERSONAS
QUE CON SU AMOR , APOYO, CONFIANZA, CARIÑO Y CONSEJOS HAN SABIDO GUIARME.**

A MI PADRE

Para el padre que aunque
ya no está conmigo sigo queriendo
y recordando cada día
por que formas parte de mi.

Para ti que me entregaste todo tu amor
en todos estos años, pero al que nunca
expresé lo suficiente todo el mío.

Para el que me ayudó a superar
los temores y desengaños de mi niñez,
y convirtió todo lo que pudo
en éxitos y esperanzas.

Para el hombre que siempre fue y será
un ejemplo maravilloso de lo que
todos los hombres deberían ser.

Para la persona cuya
devoción a su familia
siempre estuvo acentuada por la ternura
de su firmeza y sus consejos,
y cuyo amor por la vida,
rumbo de conducta,
y sabiduría práctica
hoy tienen para mí más significado
que casi todo lo que he aprendido.

Papá si nunca supiste cuánto te admiré mientras viviste
quiero decirte... que te sigo admirando
y que siempre fuiste y serás el mejor padre.
Te quiero mucho y siempre te querré.

A MI MADRE

A ti que con tu amor y comprensión
me has guiado, y has formado a la
persona que soy ahora.

Tu que siempre has sabido aconsejarme,
tu que siempre has tenido las palabras
de aliento cuando las he necesitado.

A ti que a pesar de la adversidad
te has sobre puesto
dando un ejemplo de valor.

A ti, a quien admiro muchísimo,
por ser una gran mujer
y por tener la fortaleza
de seguir siempre adelante.

Gracias por estar siempre a mi lado.

A MI HERMANA

Ingrid, gracias por todo tu cariño,
por los consejos que me has dado
cuando los he necesitado.

Por estar a mi lado,
por el apoyo que me has brindado
cuando he tenido que tomar
decisiones importantes en mi vida.

Quiero que sepas que la culminación
de está etapa de mi vida

está dedicada también a ti,
por que te quiero mucho
y espero que siempre estemos tan unidas
como hasta ahora,
te admiro por ser una gran persona
y una gran profesionista.

Te agradezco por formar parte de mi vida
y sobre todo por ser ...
mucho más que una hermana.

Agradezco de todo corazón a mi Mamá Meche, tíos, primos y a mis amigos, por que todos ustedes me han brindado su cariño apoyo y comprensión.

Un agradecimiento muy especial al Instituto de Ingeniería de la UNAM por el apoyo que me brindo para la realización de está investigación, así como al M. I. Humberto Uehara Guerrero de la Universidad Autónoma de Querétaro, quien interesado en el tema de investigación hizo posible mi participación con el Dr. Guadalupe Moisés Arroyo en la División de Estudios de Posgrado de la UNAM, al cual le agradezco enormemente el haberme invitado a trabajar con el y formar parte del equipo de trabajo del Dr. José Luis Urrutia Galicia del Instituto de Ingeniería de la UNAM, a quien le doy las gracias por aceptar que trabajará con él, por todo su apoyo y por tenerme la paciencia de que asimilara sus conocimientos. Al Dr. Jaime Horta Rangel de la Universidad Autónoma de Querétaro por el apoyo que me brindo para la realización de mi tesis.

ÍNDICE

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1 FORMAS MODALES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES DE ANÁLISIS DINÁMICO	5
2.2 ECUACIONES CLÁSICAS DE MOVIMIENTO	7
2.3 FRECUENCIAS NATURALES	10
2.4 SOLUCIÓN GENERAL	14
2.5 SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER	16
2.6 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL	18
2.6.1 PARA MODO DE CUERPO RÍGIDO	
2.6.2 PARA MODOS SUPERIORES AL DE CUERPO RÍGIDO	

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS PARAMÉTRICO

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES	24
3.1.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO	
3.2 CARACTERÍSTICAS DE LA ESTRUCTURA ANALIZADA	26

3.2.1 PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA

3.2.2 PROPIEDADES DE LA ESTRATIGRAFÍA

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

28

3.3.1 FRECUENCIAS NATURALES DEL MODELO SIN ABSORBEDOR
(ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO)

3.3.2 DENSIDAD DE FRECUENCIAS

3.3.3 FORMAS MODALES DEL MODELO SIN ABSORBEDOR

3.3.4 ANTINODOS

3.3.5 RELACIÓN DE MASAS

3.3.6 FORMAS MODALES "EN FASE" Y "FUERA DE FASE"

3.3.7 PROPIEDADES ÓPTIMAS DEL SISTEMA ABSORBEDOR

3.3.8 FRECUENCIAS NATURALES Y FORMAS MODALES DEL MODELO
ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO

3.3.9 ANÁLISIS DINÁMICO

3.3.10 DISIPACIÓN DE ENERGÍA DEL ABSORBEDOR
DE VIBRACIÓN

3.3.11 ESPACIAMIENTO DE FRECUENCIAS DEL MODELO
ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO

3.3.12 COEFICIENTE DE CARGA

3.3.13 PRUEBA DE CAMPO PARA LA INSTALACIÓN
DE ABSORBEDORES

3.3.14 MÚLTIPLES ABSORBEDORES

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

REFERENCIAS

APÉNDICE A NOMENCLATURA

624, 68 39
1713

estructuras 12
ingeniería estructural

APÉNDICE B **NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL**

B.1 CONCEPTOS GENERALES	III
B.2 SISTEMAS VIBRATORIOS	VI
B.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO	IX
B.4 MOVIMIENTO PERIÓDICO	XII
B.5 CÁLCULO TENSORIAL	XIII
B.6 ANÁLISIS DE FOURIER	XVI

APÉNDICE C **PROGRAMA DE CÓMPUTO PARA EL ANÁLISIS
DINÁMICO DE LA RESPUESTA DEL MODELO
PROPUESTO**

RESUMEN

Ante la presencia de un evento sísmico de magnitud considerable una estructura puede comportarse inelásticamente, provocando en algunos de sus elementos daños considerables, de ahí el interés de que la estructura trabaje dentro del intervalo elástico. El empleo de absorbedores de vibración en estructuras tiene como objetivo reducir la respuesta dinámica inelástica, provocando que el comportamiento de la estructura se desarrolle únicamente en el intervalo elástico. La importancia del uso de absorbedores de vibración, así como los pocos modelos propuestos motivó el desarrollo y propuesta de un nuevo modelo que despeja dudas sobre el empleo y eficacia de los absorbedores de vibración.

Con el apoyo de una nueva teoría clásica de movimiento de sistemas mecánicos, en este trabajo se propone un modelo "Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio" para el análisis dinámico de estructuras, basado en un sistema Semidefinido discreto de "n" grados de libertad, donde se acepta una excitación inducida en el Semiespacio, para transmitir la energía de un sismo al resto del sistema (Suelo Estructura-Absorbedor).

Se estudia la respuesta de una estructura de acero de mediana altura sometida a una excitación sísmica particular, desplantada sobre terreno blando, a la cual se le añade un absorbedor de vibración. Para lograr una reducción significativa en la respuesta dinámica de la estructura los resultados del análisis muestran que las variables más significativas son: **las frecuencias naturales, las formas modales, el coeficiente de carga, la relación de masas, el porcentaje de amortiguamiento y la posición del absorbedor**. Cabe recalcar que dado un absorbedor de vibración óptimo es decir cuyas variables significativas producen el mínimo desplazamiento en la respuesta se comprueba, que ante cualquier tipo de excitación sísmica inducida se logra siempre una disminución significativa en la respuesta de la estructura.

En este trabajo se hace énfasis en las variables más significativas que permiten una mejor comprensión del problema de absorbedores de vibración.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas de la ingeniería estructural es la de modelar estructuralmente las construcciones para reducir los efectos de la respuesta dinámica de las estructuras ante sismos de gran intensidad que han afectado a gran cantidad de ellas, principalmente edificios, algunos de los cuales se han colapsado o sufrido severos daños.

Se han planteado diversas soluciones al problema, entre las que destacan la utilización de disipadores de energía, aisladores de base y sistemas absorbedores de vibración, los cuales, sin embargo son de uso poco común, debido probablemente a la dificultad que tienen los investigadores en demostrar la bondad de estos dispositivos en cuanto a su eficiencia y economía. .

Algunos investigadores han fijado su atención en el empleo de sistemas absorbedores desarrollando diversas teorías que están basadas en modelos matemáticos tradicionales cuyas hipótesis empleadas todavía no son muy bien comprendidas con respecto a las condiciones de frontera, simplificaciones en el sistema de cargas sísmicas del modelo y a las características del absorbedor de vibración.

Los modelos tradicionales consideran un sistema positivo definido donde una de sus fronteras se encuentra empotrada. En general, simplifican el modelo suponiéndolo de uno o dos grados de libertad para representar a un sistema de "n" grados, aplicando aceleraciones en todas las masas. Condiciones que como se verá más adelante no son adecuadas para la representación del fenómeno.

En este trabajo se utiliza un nuevo método¹ para el análisis dinámico de estructuras diferente de los modelos tradicionales, ya que no considera apoyos en sus fronteras "**sistema libre-libre**", no realiza simplificaciones en los grados de libertad del modelo y además no aplica las aceleraciones del terreno en todas las masas de la estructura. Este método permite en forma natural introducir movimiento en cualquier soporte (Semiespacio), al considerar la estructura como

1 Urrutia Galicia, J. L. "Una introducción sobre la existencia de formas modales covariantes y contravariantes en el análisis dinámico", Sismodinámica. Revista internacional, México, 1992.

Urrutia Galicia, J. L. "On the existence of covariant and contravariant modal forms of dynamic analysis", Transaction of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 1992.

un sistema semidefinido, cubre todos los modos y frecuencias naturales del sistema, incluyendo el modo de cuerpo rígido. Toma en cuenta además el balance dinámico de las formas modales del sistema, ya que es importante que exista equilibrio dinámico en él. Otro concepto novedoso del modelo es la introducción de las bases covariantes y contravariantes, que permiten desacoplar las ecuaciones de movimiento, utilizando las "2n" formas modales de un sistema discreto.

En la literatura técnica actual, gran parte de las investigaciones realizadas colocan el absorbedor de vibración en la parte superior de la estructura; en el nuevo modelo semidefinido, el apéndice puede ubicarse en cualquier nivel de la estructura logrando siempre una reducción en la respuesta.

Utilizando el nuevo método de análisis dinámico, se estudia un edificio de acero de 17 niveles desplantado sobre terreno blando, debido a que este tipo de estructuras cimentadas sobre suelo característico de la Zona del Lago de la Ciudad de México han presentado daños considerables ante la presencia de sismos de gran intensidad. Esto se debe a que el periodo fundamental de la estructura es muy cercano al del suelo y ante la presencia de un sismo se incrementa el período natural del sistema en la interacción Suelo-Estructura, pudiendo entrar en resonancia.

Para el sistema estructural estudiado, considerando la ubicación del absorbedor en diferentes niveles de la estructura, se encontraron las características óptimas que producen en ella la mínima respuesta ante cualquier tipo de excitación sísmica a la que puede ser sometida.

Finalmente, el objetivo de este trabajo es presentar una nueva metodología de análisis dinámico de estructuras, con absorbedor de vibración y confrontarlo con investigaciones basadas en modelos tradicionales para observar las diferencias entre la filosofía de análisis. Este trabajo es parte de una investigación mayor de vibraciones en sistemas discretos y continuos, donde la que suscribe participa actualmente².

² Proyecto 5562 "Interacción estructura suelo semiespacio y absorbedores de vibración, una nueva alternativa", Instituto de Ingeniería, Coordinación de Mecánica Aplicada, UNAM, J. L. Urrutia, 1995-1996.

absorbedores ligeros, sin embargo los desplazamientos relativos del absorbedor con respecto a la estructura son excesivos y por lo tanto un absorbedor pesado puede ser una mejor solución al requerir desplazamientos menores. En términos de la reducción del porcentaje de desplazamientos y considerando el amortiguamiento, obtuvieron que la reducción de los desplazamientos era mayor para amortiguamientos pequeños, contrario como se ve a lo sugerido por Villaverde.

Hsiang-Chuan Tsai y Guan-Cheng Lin (1993)¹¹ en esta investigación sus resultados muestran que un absorbedor de vibración es poco efectivo al reducir la respuesta del sistema cuando a este se le incorpora un amortiguamiento grande. Concluyendo que con valores de amortiguamiento y relaciones de masa pequeños es posible reducir la respuesta dinámica.

Hsiang-Chuan Tsai (1993)¹² usó el método del modo complejo, basado en la técnica de perturbación. Llegó a la conclusión de que con una relación de masas y amortiguamiento pequeñas y con frecuencias naturales del absorbedor de vibración cercanas a las de la estructura se reduce la respuesta dinámica de la estructura.

Alvarado, Ruiz y Esteva (1993)¹³ comprueban que el uso de osciladores resonantes en edificios con periodos fundamentales superiores o iguales al periodo dominante de vibración del suelo puede constituir una solución para reducir la respuesta dinámica. Sin embargo, la magnitud de las reducciones es muy sensible a la relación entre el periodo fundamental del sistema principal y el periodo dominante del movimiento del terreno. En algunos casos, principalmente para periodos del sistema principal menores que el dominante del movimiento del terreno, el empleo de sistemas como los citados pueden no ofrecer ventaja e incluso ser perjudicial.

Aguñiga y Jara (1993)¹⁴ en sus análisis someten un sistema estructural a una carga armónica en la base, considerando el absorbedor de vibración en la parte superior de la estructura. El diseño del absorbedor dinámico es calibrado a la primer frecuencia natural del sistema. En este

11 Hsiang-Chuan and Guan-Cheng Lin, "Optimum Tuned-Mass Dampers for minimizing Steady-State response of Support-Excited and Damped Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, 1993.

12 Hsiang-Chuan Tsai, "Green's Function of Support-Excited Structures with Tuned-Mass Dampers derived by a Perturbation Method", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 22, 1993.

13 Alvarado Suárez, R. A., Ruiz Gómez, S. E., y Esteva, L., "Sobre la Respuesta de Sistemas Estructurales con Osciladores Resonantes Sujetos a Sismos de Banda Angosta", *Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Puerto Vallarta, Jal., México, 1993.

14 Aguiñiga, F., y Jara, J. M., "Reducción de Daños Sísmicos Mediante el uso de Osciladores Resonantes", *Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Puerto Vallarta, Jal., México, 1993.

trabajo se observó que para amortiguamientos grandes del absorbedor y amortiguamientos pequeños de la estructura principal se obtenían reducciones en la respuesta.

*Klasztorny (1995)*¹⁵ presenta un estudio para el diseño de absorbedores dinámicos que reducen la respuesta de fuerzas estacionarias de vibración. El diseño del absorbedor dinámico acoplado a la estructura es calibrado a la primer frecuencia natural del sistema. La efectividad del absorbedor dinámico es limitado a la respuesta del estado estacionario de la estructura principal, dentro de un amplio rango de frecuencias naturales de excitación, que es controlado por la estructura primaria con el absorbedor, considerando el acoplamiento del sistema con absorbedor y las componentes armónicas de la carga. Concluye que la metodología puede ser aplicada a estructuras con frecuencias naturales cercanas.

Como se puede notar, no hay todavía una opinión definida y categórica en cuanto al diseño y la eficiencia del uso de absorbedores. Esto, puede ser la causa del poco uso de absorbedores en edificios comunes.

En los capítulos siguientes se presenta el modelo matemático utilizado para el análisis, el ejemplo estudiado, un análisis paramétrico y las conclusiones obtenidas de los resultados.

15 Klasztorny, M., "Reduction of Steady-State Forced Vibration of Structures with Dynamic Absorber", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, 1995.

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

2.1 FORMAS MODALES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES DE ANÁLISIS DINÁMICO. Cuando las " n " formas modales covariantes y las " n " formas modales contravariantes (de análisis dinámico) se conocen, la teoría clásica de vibraciones adquiere una perspectiva más clara y general. La presentación de estas dos familias de formas modales da origen a la formulación de un nuevo esquema de análisis dinámico en coordenadas oblicuas, las cuales se aplican al análisis dinámico de sistemas estructurales con distribuciones arbitrarias de masa y rigidez y se aplican por igual a *medios discretos y continuos o a sistemas positivo definidos o semidefinidos*, utilizando para todos los análisis la misma álgebra.

Un análisis modal de vibraciones sigue cuatro pasos¹⁸ :

1. Se identifica el sistema estructural con sus condiciones de frontera.
2. Se calculan las frecuencias y las formas modales.
3. Se definen las excitaciones que actúan sobre el sistema estructural.
4. Se aplican las cargas al modelo matemático y se obtiene la solución matemática.

Las herramientas con las que podemos hacer los análisis dinámicos son dos principalmente, *las frecuencias y la formas modales* en un número infinito si el sistema es continuo y, en el caso de sistemas discretos, las " n " frecuencias y " n " formas modales para " n " grados de libertad.

Se debe recordar además que, las formas modales son ortogonales con respecto a las matrices de masa y rigidez, mas no son ortogonales entre sí. Sin embargo estas formas modales generan un *espacio coordinado covariante* y de el se puede generar otro espacio *contravariante*¹.

El conocimiento de las formas modales covariantes y contravariantes permite hacer generalizaciones del análisis de funciones en coordenadas oblicuas y contienen al análisis de

¹⁸ Blevins Robert D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Robert kieger Publishing Company, Malabar Florida, 1979.

Fourier como un caso particular. Esto ayuda a su vez a establecer e identificar **un modelo de análisis dinámico invariante**, es decir, **tensorial**, aplicable tanto a **sistemas positivo definidos** (con apoyos fijos) como a **sistemas semidefinidos** (sin ningún punto fijo), que es el tipo de sistema utilizado en el modelo presentado en este trabajo.

Si existe un sistema elástico con masas y rigideces M y K que vibra a la frecuencias naturales ω_n y con las formas modales covariantes ϕ_n , linealmente independientes (pero no necesariamente ortogonales), entonces existe otro conjunto ϕ^n de formas modales contravariantes ortogonales a las primeras, de manera que dada una función arbitraria o una distribución de cargas F de norma $\|F\|$ se puede descomponer de la siguiente manera

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} f^n \phi_n \quad (2.1)$$

con bases covariantes ϕ_n y componentes contravariantes f^n , o en la forma

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi^n \quad (2.2)$$

con bases contravariantes ϕ^n y componentes covariantes f_n . Por tanto, si las ecuaciones 2.1 y 2.2 se conocen entonces la norma de la función (o vector) \tilde{F} se puede obtener como

$$\|\tilde{F}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f^n f_n} \quad (2.3)$$

donde para sistemas coordinados oblicuos es el complemento y constituye una generalización del teorema de Pitágoras usado en sistemas rectangulares.

Para el caso dinámico general de sistemas elásticos los más comunes incluyen configuraciones estructurales con distribuciones de masa y rigidez no uniformes. Las formas modales ϕ_n son ortogonales con respecto a los operadores de masa y rigidez M y K . Sin embargo, no obstante que no son ortogonales entre si, tienen capacidad para generar un espacio funcional oblicuo dentro del cual cualquier función arbitraria puede descomponerse.

Un caso particular ocurre cuando el sistema dinámico, continuo o discreto está constituido tanto por masas como rigideces iguales. Para este caso las formas modales covariantes ϕ_n son, a la vez, ortogonales y linealmente independientes entre sí. Las formas modales contravariantes ϕ^n son colineales con las formas modales ϕ_n , de modo que ϕ^n es idéntico a ϕ_n para todo "n". De la misma manera $f^n = f_n$ y, por tanto, de la ecuación 2.3 la norma de \tilde{F} es

$$\|\tilde{F}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2} \tag{2.4}$$

como corresponde a espacios lineales ortogonales donde f_n y f^n son el factor de carga covariante y contravariante respectivamente.

2.2 ECUACIONES CLÁSICAS DE MOVIMIENTO¹. La ecuación de equilibrio dinámico de una estructura elástica con distribuciones no uniformes de masa y rigidez y bajo la acción de una excitación arbitraria $g(r,t) = f(r)h(t)$ es

$$M_{ij}\ddot{x}_j + C_{ij}\dot{x}_j + K_{ij}x_j = f(r)h(t) \tag{2.5}$$

M_{ij} matriz de masas

C_{ij} matriz de amortiguamiento

K_{ij} matriz de rigidez

x_j vector de desplazamiento

$f(r)$ es la distribución de cargas en las masas.

donde se supone que es posible expresar la excitación mediante la separación de variables indicada. Cuando el amortiguamiento C y las fuerzas externas se anulan, resulta

$$M\ddot{x} = -Kx \tag{2.5a}$$

de la que se obtienen las formas modales covariantes ϕ_n y la frecuencias naturales ω_n . Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema positivo definido entonces ϕ_n satisface las condiciones de frontera impuestas en los soportes del sistema. Si la ecuación 2.5a corresponde a un sistema semidefinido, se pueden obtener funciones coordenadas, incluyendo el modo de cuerpo rígido a frecuencia cero. Por tanto, la excitación $f(r)h(t)$ se puede descomponer de dos maneras

$$f(r)h(t) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n \quad \text{con bases covariantes } \phi_n$$

$$f(r)h(t) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi^n \quad \text{con bases contravariantes } \phi^n$$

(2.6)

luego, la solución tiene la forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n(t) \phi_n(r) \quad (2.7)$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \phi^n(r) \quad (2.8)$$

donde $\eta_n(t)$ y $\eta^n(t)$ son los **factores de participación covariantes y contravariantes**, respectivamente. Se hace notar que la determinación de las funciones de participación corresponde a un análisis formal de Fourier con coeficientes dependientes del tiempo. Al sustituir las ecuaciones 2.7 y 2.8 en la ecuación 2.5, se obtiene

$$M_{mn} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}^{(n)}(t) \phi_n(r) + C_{mn} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\eta}^{(n)}(t) \phi_n(r) + K_{mn} \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(n)}(t) \phi_n(r) = h(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi^n(r)$$

(2.9)

Se hace notar que el índice n del operador K_{mn} solamente tiene efecto sobre la coordenada $\phi_n(r)$ y no sobre el escalar $\eta^{(n)}(t)$, lo que se indica encerrando a n entre paréntesis.

Bajo la misma hipótesis para los amortiguamientos la matriz C_{ij} . Al multiplicar escalarmente la última ecuación por ϕ_{ni} se obtiene la ecuación clásica del movimiento

$$\ddot{\eta}^{(n)} + \frac{\langle \phi_{ni}, C_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \dot{\eta}^{(n)} + \frac{\langle \phi_{ni}, K_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \eta^{(n)} = \frac{f_n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.10)$$

Al hacer la siguiente definición

$$2\xi_n \omega_n = \frac{\langle \phi_{ni}, C_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle}$$

$$\omega_n^2 = \frac{\langle \phi_{ni}, K_{ij} \phi_{nj} \rangle}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle}$$

la ecuación 2.10 se transforma en

$$\ddot{\eta}^{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}^{(n)} + \omega_n^2 \eta^{(n)} = \frac{f_n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.11)$$

con $f_n = \langle \phi_n, f(r) \rangle$. Los factores de participación covariante son

$$\ddot{\eta}_{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}_{(n)} + \omega_n^2 \eta_{(n)} = \frac{f^n h(t)}{\langle \phi_{ni}, M_{ij} \phi_{nj} \rangle} \quad (2.12)$$

con $f^n = \langle \phi_n, f(r) \rangle$. Las ecuaciones 2.11 y 2.12 tienen la forma de las ecuaciones dinámicas de movimiento para cualquier sólido elástico continuo o discreto.

2.3 FRECUENCIAS NATURALES. Las frecuencias naturales se obtienen de la siguiente ecuación

$$M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j = 0 \quad (2.13)$$

Cuando la función de desplazamientos x_j se descompone en coordenadas covariantes se tiene

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{n=1}^N \eta^n \phi_{nj} \\ \dot{x}_j &= \sum_{n=1}^N \dot{\eta}^n \phi_{nj} \\ \ddot{x}_j &= \sum_{n=1}^N \ddot{\eta}^n \phi_{nj} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Supóngase ahora que $\eta^n = \text{sen}(\omega_n t)$ y ϕ_{nj} son respectivamente el factor de participación modal a la frecuencia natural ω_n y la forma modal respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \eta^n \phi_{nj} &= \text{sen}(\omega_n t) \phi_{nj} \\ \dot{\eta}^n \phi_{nj} &= \omega_n \cos(\omega_n t) \phi_{nj} \\ \ddot{\eta}^n \phi_{nj} &= -\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) \phi_{nj} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cuando se sustituye 2.15 en 2.14 para un modo arbitrario "n" se tiene que la ecuación 2.13 se puede expresar como

$$-\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) M_{ij} \phi_{nj} + \text{sen}(\omega_n t) K_{ij} \phi_{nj} = 0$$

$$\omega_n^2 M_{ij} \phi_{nj} = K_{ij} \phi_{nj} \quad (2.16)$$

$$[K_{ij} - \omega_n^2 M_{ij}] \phi_{nj} = 0$$

BIBLIOTECA CENTRAL

que todavía representa a un vector (o función). Al multiplicar escalarmente dicha ecuación por ϕ_{ni} se obtiene

$$\omega_n^2 \phi_{ni} M_{ij} \phi_{nj} = \phi_{ni} K_{ij} \phi_{nj} \quad (2.17)$$

una ecuación escalar que ahora sí puede ser despejada para obtener

$$\omega_n^2 = \frac{\phi_{ni} K_{ij} \phi_{nj}}{\phi_{ni} M_{ij} \phi_{nj}} \quad (2.18)$$

esto es, el cuadrado de la frecuencia natural de un modo “ n ” es igual al cociente de la energía interna almacenada en el sólido, dividido entre la norma energética de la forma modal ϕ_{ni} con respecto a la matriz de masas.

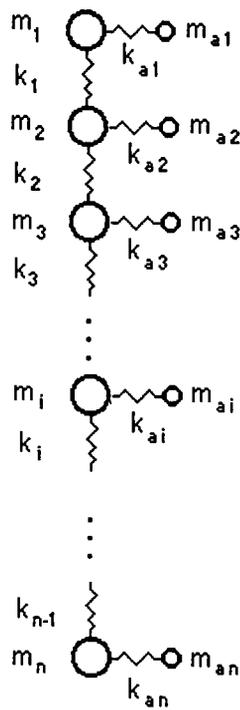
Se hace notar que al dividendo y al divisor de la ecuación 2.18 se les denomina¹⁹ rigidez y masa generalizadas del modo “ n ” o se les denomina también²⁰ rigidez y masa principales, sin embargo, serán simplemente consideradas como las normas energéticas de las formas modales con respecto a la matriz de rigideces y de masas respectivamente.

Para el cálculo de las frecuencias naturales se hace uso del **Método de Holzer**. El método de Holzer es un proceso de aproximaciones sucesivas, que evita las complicaciones analíticas. Se aplica para sistemas equivalentes de masas concentradas, con resortes en línea o ramificados. Se supone que el sistema está vibrando con una frecuencia natural y que se desprecian las pérdidas de energía por amortiguamiento y fricción.

19 Clough, R.W., and Penzien, J., “Dynamics of Structures”, McGraw Hill Book Co., Singapur, segunda edición, 1993.

20 Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, Inc., 1974.

Sea un sistema discreto de "n" grados de libertad con apéndices en las masas principales, como el mostrado en la figura 2.1.



Modelo semidefinido con apéndices en las masas principales

fig. 2.1

Al vibrar el sistema de una manera libre a cierta frecuencia natural ω , las únicas fuerzas que actúan son las de inercia de cada masa, las cuales son de la forma $m\omega^2$.

Para mantener el equilibrio dinámico estas fuerzas se transmiten a través de los resortes elásticos que unen las masas. Las fuerzas inerciales que se producen en cada nodo son las correspondientes a las diferencias de los desplazamientos entre cada dos masas consecutivas como se puede observar en ecuación 2.19.

$$m_i \ddot{X}_i + k_i (X_{i+1} - X_i) + k_i (X_i - X_{i+1}) + k_{ai} (X_i - X_{ai}) = 0 \quad (2.19)$$

$$m_{ai} \ddot{X}_{ai} + k_{ai} (X_{ai} - X_i) = 0$$

donde

$$X = x \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 x \operatorname{sen}(\omega t)$$

sustituyendo en la ecuación 2.19 queda

$$m_i x_i \omega^2 = k_i (x_{i+1} - x_i) + k_i (x_i - x_{i+1}) + k_{ai} (x_i - x_{ai})$$

$$m_{ai} x_{ai} \omega^2 = k_{ai} (x_{ai} - x_i)$$

Al no existir más fuerzas que las de inercia se tiene que verificar, al estar el sistema vibrando con su frecuencia natural, que

$$\sum_{i=1}^n (m_i x_i + m_{ai} x_{ai}) \omega^2 = 0 \quad (2.20)$$

donde

- m_i masa principal
- m_{ai} masa del apéndice
- x_i desplazamiento de la masa principal
- x_{ai} desplazamiento del apéndice

Las expresiones generales para la obtención de los desplazamiento de las masas principales m_i y de los apéndices m_{ai} son

$$x_i = x_{i-1} + \frac{k_{i-2}(x_{i-1} - x_{i-2}) + k_{ai-1}(x_{i-1} - x_{ai-1}) - m_{i-1}x_{i-1}\omega^2}{k_{i-1}}$$

$$x_{ai} = \frac{k_{ai} x_i}{k_{ai} - m_{ai}\omega^2}$$

De dichas expresiones, se ve que todos los desplazamientos se pueden expresar en función de los datos del problema m_i, m_{ai}, k_i, k_{ai} y de las cantidades desconocidas ω^2 y x_i, x_{ai} . En general, para x_1 , que depende de la energía introducida en el sistema y de la disipada, se suele tomar, por sencillez, el valor de 1, pues como se sabe que de las ecuaciones del movimiento no se obtienen los valores de las amplitudes, sino sus relaciones

$$x_2 / x_1, x_3 / x_1, \dots, x_n / x_1$$

2.4 SOLUCIÓN GENERAL. Debido a que el modelo presentado es semidefinido discreto, la primer forma modal desarrollada presenta un mismo desplazamiento en todas las masas sin existir desplazamientos relativos entre ellas asociado a una frecuencia natural de cero, a este modo se le denomina modo de cuerpo rígido.

La ecuación diferencial general para el modo de cuerpo rígido es

$$\ddot{\eta}^{(n)} + C\dot{\eta}^{(n)} = F_n(t) \quad (2.21)$$

siendo la solución general para el factor de participación del modo de cuerpo rígido, la siguiente

$$\eta^n(t) = \eta^n(0) + \dot{\eta}^n(0) \frac{1}{C} [1 - \exp^{-Ct}] + \int_0^t F_n(\tau) \frac{1}{C} [1 - \exp^{-C(t-\tau)}] d\tau \quad (2.22)$$

El superíndice con el valor de la unidad nos representa al modo de cuerpo rígido

La ecuación diferencial general para los modos superiores al de cuerpo rígido, cuando las frecuencias naturales son diferentes de cero, esta dada por

$$\ddot{\eta}^{(n)} + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}^{(n)} + \omega_n^2 \eta^{(n)} = F_n(t) \quad (2.23)$$

Para el caso subcrítico, el amortiguamiento ($\xi_n < 1$) se define por la siguiente ecuación

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

al aplicar la transformada de Laplace en la ecuación 2.23, se tiene la solución para el factor de participación $\eta^{(n)}(t)$

$$\eta^n(t) = \exp^{-\xi_n \omega_n t} \left[\eta^n(0) \cos(\gamma_n t) + \left(\eta^n(0) \xi_n \omega_n + \dot{\eta}^n(0) \right) \frac{\text{sen}(\gamma_n t)}{\gamma_n} \right] + \frac{1}{\gamma_n} \int_0^t F_n(\tau) \exp^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \text{sen}[\gamma_n (t-\tau)] d\tau \quad (2.24)$$

Donde

$F_n(t) = S_n h(t)$ fuerza de excitación del modo n

$h(t)$ es la fuerza de excitación, y

$$S_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n, f(r) \rangle}{\langle \tilde{\phi}_{ni}, M_{ij} \tilde{\phi}_{nj} \rangle} \quad \text{coeficiente de carga.}$$

2.5 SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER. Una gran variedad de modelos físicos simples que utilizan los ingenieros e investigadores aceptan una descripción matemática empleando una ecuación diferencial, como la ecuación 2.5 en donde $h(t)$ es una función de fuerza o excitación que no necesariamente tiene que ser periódica. En particular cuando $h(t)$ es una función seno, coseno o constante, la ecuación 2.5 se resuelve muy fácilmente.

Este método de solución puede extenderse al incluir el caso más general en el que $h(t)$ sea cualquier suma de senos y cosenos. Por tanto, $h(t)$ puede expresarse como la serie trigonométrica finita

$$h(t) = A_0 + \sum_{m=1}^M A_m \cos\left(m \frac{\pi t}{T}\right) + \sum_{m=1}^M B_m \sin\left(m \frac{\pi t}{T}\right) \quad (2.25)$$

Donde A_0 , A_m y B_m se obtienen con la siguiente formulación, que puede ser utilizada para representar funciones continuas y discontinuas.

Asumiendo que tenemos una función periódica continua definida en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, dividiendo el intervalo $[0, 2\pi]$ en n partes iguales con $n+1$ puntos²¹, $t = \left(\frac{2i-1}{2} + c\right)\phi_a$, donde $\phi_a = \frac{2\pi}{n}$ e $i=0, 1, 2, \dots, n$. El objeto de la variable c es limitar y ubicar los puntos divididos del intervalo de tal manera que cada uno inicia la división de cualquier punto en el dominio.

21 Urrutia Galicia J. L., "Stresses in Internally Loaded Cylindrical Shells", M.A.Sc. thesis, University of Waterloo, Canadá, 1979.

Tomando pequeños intervalos, en cualquier intervalo k el valor de la función $h(t)$ es igual al valor de la constante W_k , sin embargo, se supone que el valor de la serie de Fourier es igual a $h(t)$ solo en este intervalo

$$W_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_k dt + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} W_k \cos(mt) dt \cdot \cos(mt) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} W_k \sin(mt) dt \cdot \sin(mt)$$

dado que

$$W_k(t) = \begin{cases} W_k & \text{si } t_{k-1} < t < t_k \\ \frac{W_k}{2} & \text{si } t = t_{k-1} \\ \frac{W_k}{2} & \text{si } t = t_k \\ 0 & \text{si } t_{k-1} > t > t_k \end{cases}$$

si $h(t)$ es igual a $W_k(t)$ en el intervalo k , se puede establecer

$$h(t) = \sum_{k=1}^n W_k$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, y

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_k dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_k \cos(mt) dt \cdot \cos(mt) \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} W_k \sin(mt) dt \cdot \sin(mt)$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene la ecuación 2.25 antes mencionada, donde

$$A_0 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n W_k$$

$$A_m = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{m\pi} \left\{ \text{sen} \left[m \left(\frac{2k-1}{2} + c \right) \phi_a \right] - \text{sen} \left[m \left(\frac{2k-3}{2} + c \right) \phi_a \right] \right\} \quad (2.26)$$

$$B_m = \sum_{k=1}^n \frac{W_k}{m\pi} \left\{ \text{cos} \left[m \left(\frac{2k-3}{2} + c \right) \phi_a \right] - \text{cos} \left[m \left(\frac{2k-1}{2} + c \right) \phi_a \right] \right\}$$

Las constantes A_0 , A_m y B_m definidas por 2.26 son los **coeficientes de Fourier** de $h_n(t)$.

2.6 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL. Dado que la fuerza de excitación de la ecuaciones diferenciales 2.21 y 2.23 se pueden suponer como una serie trigonométrica dada por la ecuación 2.25 y su solución respectiva por las ecuaciones 2.22, 2.24 y 2.26 cuando $F_n(t)$ es igual a las funciones constante, seno y coseno.

2.6.1 PARA MODO DE CUERPO RÍGIDO. ($K=0$)

i) Fuerza de excitación constante $F_1(t) = S1$

$$\eta^1_{ce}(t) = S1 \left[\frac{1}{c} t - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{ce}(t) = S1 \left[e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

ii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_1(t) = S1 \cos(m\omega_0 t)$

$$\eta^1_{\cos}(t) = S1 \left[-\frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{\cos}(t) = S1 \left[\omega^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) - \omega^2 \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + c^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

iii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_1(t) = S1 \text{sen}(m\omega_0 t)$

$$\eta^1_{\text{sen}}(t) = S1 \left[-\frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) - \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{c\omega} - \frac{\omega}{c(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$\ddot{\eta}^1_{\text{sen}}(t) = S1 \left[\omega^2 \frac{c}{\omega(c^2 + \omega^2)} \cos(\omega t) + \omega^2 \frac{1}{(c^2 + \omega^2)} \text{sen}(\omega t) - c^2 \frac{\omega}{c(c^2 + \omega^2)} e^{-ct} \right]$$

$$c = 2\xi_1 \omega$$

2.6.2 PARA MODOS SUPERIORES AL DE CUERPO RÍGIDO

i) Fuerza de excitación constante $F_n(t) = S_n$

para $n > 1$

$$\eta''_{cie}(t) = S_n \frac{1}{\gamma_n \omega_n} \left[\text{sen}(\Phi_n) - e^{-\xi_n \omega_n t} \text{sen}(\gamma_n t + \Phi_n) \right]$$

$$\ddot{\eta}''_{cie}(t) = S_n \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n \omega_n} \left\{ \xi_n \omega_n \gamma_n \cos(\gamma_n t + \Phi_n) + \left[\gamma_n^2 - (\xi_n \omega_n)^2 \right] \text{sen}(\gamma_n t + \Phi_n) \right\}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{\gamma_n}{\xi_n \omega_n} \right)$$

ii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_n(t) = S_n \cos(m\omega_0 t)$

$$\eta''_{\cos}(t) = S_n \frac{1}{A_{\cos}} \left\{ \frac{\text{sen}(\Phi_n)}{\gamma_n} [\xi_n \omega_n \cos(\omega t) + \omega \text{sen}(\omega t)] - \cos(\omega t) \cos(\Phi_n) \right. \\ \left. + \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n} [\gamma_n \cos(\Phi_n + \gamma_n t) - \xi_n \omega_n \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t)] \right\}$$

$$\ddot{\eta}''_{\cos}(t) = S_n \frac{1}{A_{\cos}} \left\{ \frac{\text{sen}(\Phi_n)}{\gamma_n} [-\omega^3 \text{sen}(\omega t) - \xi_n \omega_n \omega^2 \cos(\omega t)] + \omega^2 \cos(\omega t) \cos(\Phi_n) \right. \\ \left. - \frac{e^{-\xi_n \omega_n t}}{\gamma_n} \left[\gamma_n^3 \cos(\Phi_n + \gamma_n t) + (\xi_n \omega_n)^3 \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t) \right. \right. \\ \left. \left. - 3(\xi_n \omega_n)^2 \gamma_n \cos(\Phi_n + \gamma_n t) \right. \right. \\ \left. \left. - 3\xi_n \omega_n \gamma_n^2 \text{sen}(\Phi_n + \gamma_n t) \right] \right\}$$

$$A_{\cos} = \omega_n^2 \sqrt{\left(2\xi_n^2 - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\frac{\xi_n \gamma_n}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{2\frac{\xi_n \gamma_n}{\omega_n}}{2\xi_n^2 - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

iii) Fuerza de excitación cosenoidal $F_n(t) = S_n \text{sen}(m\omega_0 t)$

$$\eta_{\text{sen}}^n(t) = S_n \frac{1}{A_{\text{sen}}} \left\{ \text{sen}(\omega t - \Phi_n) + \frac{1}{\gamma_n} e^{-\xi_n \omega_n t} \left[(\xi_n \omega_n \text{sen}(\Phi_n) - \omega \cos(\Phi_n)) \text{sen}(\gamma_n t) + \gamma_n \text{sen}(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \right] \right\}$$

$$\ddot{\eta}_{\text{sen}}^n(t) = S_n \frac{1}{A_{\text{sen}}} \left\{ -\omega^2 \text{sen}(\omega t - \Phi_n) + e^{-\xi_n \omega_n t} \left[\text{sen}(\gamma_n t) \text{sen}(\Phi_n) \left[\frac{(\xi_n \omega_n)^3}{\gamma_n} + \xi_n \omega_n \gamma_n \right] + \text{sen}(\gamma_n t) \cos(\Phi_n) \left[\gamma_n - \frac{(\xi_n \omega_n)^2}{\gamma_n} \right] \omega + \text{sen}(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \left[-(\xi_n \omega_n)^2 - \gamma_n^2 \right] + \cos(\Phi_n) \cos(\gamma_n t) \left[2\xi_n \omega_n \omega \right] \right] \right\}$$

$$A_{\text{sen}} = \omega_n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\xi_n \omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\gamma_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$$

$$\Phi_n = \text{angtan} \left(\frac{2 \frac{\xi_n \omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

Por lo que la solución general a la ecuación 2.5 expresada en series de Fourier es

$$x = \sum_{n=1}^N \left[A_0 \eta^n_{cte} + \sum_{m=1}^M A_m \eta^n_{\cos} + \sum_{m=1}^M B_m \eta^n_{\sen} \right] \phi_n \quad (2.25)$$

$$\ddot{x} = \sum_{n=1}^N \left[A_0 \ddot{\eta}^n_{cte} + \sum_{m=1}^M A_m \ddot{\eta}^n_{\cos} + \sum_{m=1}^M B_m \ddot{\eta}^n_{\sen} \right] \phi_n \quad (2.26)$$

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS PARAMÉTRICO

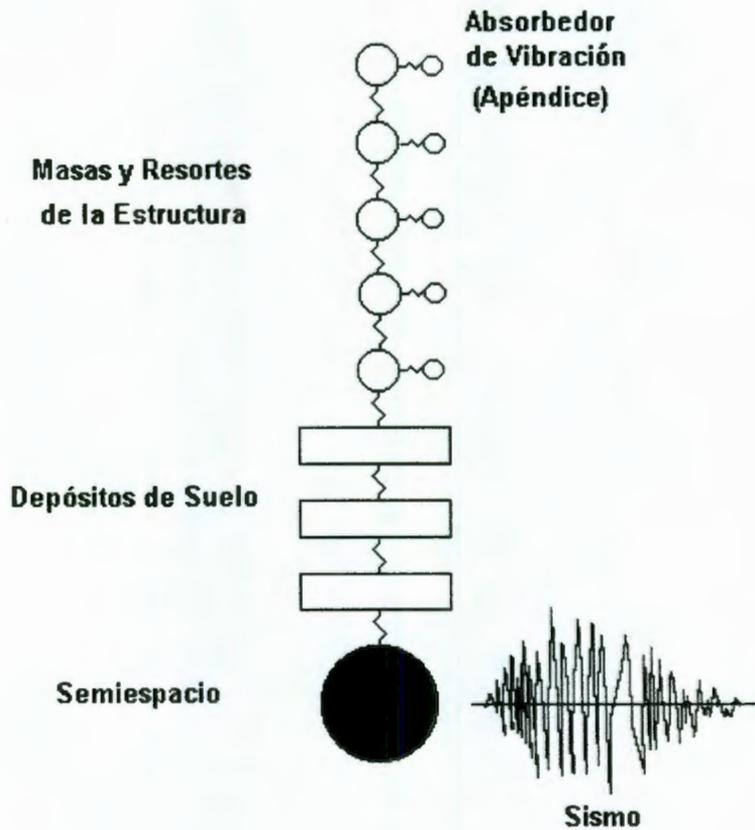
ANÁLISIS PARAMÉTRICO

3.1 CONSIDERACIONES GENERALES. El “Modelo Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio” se trabaja como un sistema semidefinido en donde el Semiespacio (SE), el Suelo (S) y la Estructura-Absorbedor (E-A) están acoplados dinámicamente. Con este acoplamiento se hace primero, el análisis de modos y frecuencias del edificio sin absorbedor, para ver posteriormente los cambios en las frecuencias, factores de participación y formas modales, cuando al sistema original se le añade un absorbedor de vibración. El modelo, un edificio de 17 niveles desplantado en la zona del lago de la Ciudad de México, acepta la entrada de una señal sísmica en un Semiespacio móvil que permite comparar la respuesta dinámica de la estructura con y sin absorbedor, para observar si al incluir en la estructura dicho absorbedor de vibración hay reducción en sus desplazamientos. La excitación inducida al modelo es un acelerograma registrado en terreno firme, debido a que su espectro tiene una amplia gama de frecuencias, con pocas alteraciones debidas a condiciones locales del terreno. La estructura está desplantada en terreno blando, por lo que la señal será filtrada por este depósito de suelo, para finalmente transmitírsela al edificio.

3.1.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO.

- a) El modelo está basado en un sistema “**SEMIDEFINIDO DISCRETO**” de “*n*” grados de libertad.
- b) No considera apoyos en las fronteras. (Sistema libre-libre).
- c) Utiliza una masa infinita libre llamada “**SEMIESPACIO**” en una de sus fronteras, la cual permite que la señal sea transmitida a las demás masas del modelo.
- d) El sistema estructural está considerado como un sistema de **MASAS RESORTE**. En el que la masa en cada nivel se representa por la masa total de cada entrepiso y la rigidez del resorte está dada por la resistencia al desplazamiento de las columnas de cada entrepiso.
- e) La estructura se modela como un sistema de marcos planos regulares.
- f) Las frecuencias y formas modales para el análisis dinámico del modelo Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio se obtienen utilizando el método de Holzer, el cual requiere que las formas modales del sistema satisfagan balance dinámico.

g) El modelo propuesto en este trabajo es el mostrado en la fig. 3.1, en donde las masas superiores representan las masas y resortes de la estructura, las masas intermedias representan al depósito de suelo y la masa inferior el Semiespacio y al cual se hará referencia con la abreviatura SE, la cual es libre de moverse de acuerdo a la señal que le sea inducida. El absorbedor de vibración esta representado por las masas y resortes añadidos a cada una de las masas de la estructura.



Modelo Semidefinido
Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio

fig. 3.1

3.2 CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA ANALIZADO

3.2.1 PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA. Para el análisis se utiliza un edificio de acero, que está considerado dentro del rango de edificios de mediana altura (17 niveles), desplantado sobre terreno blando característico de la Ciudad de México.

En la Tabla 1 se presentan las propiedades de inercia y de rigidez, así como las alturas desde el nivel de desplante.

No. de Nivel	Masa $t\cdot s^2/cm$	Rigidez t/cm	Altura cm
17	0.412	61	6733
16	0.239	73	6218
15	0.455	125	5768
14	0.256	135	5383
13	0.252	143	4998
12	0.252	156	4613
11	0.252	159	4228
10	0.252	161	3843
9	0.252	172	3458
8	0.252	175	3073
7	0.252	175	2688
6	0.252	185	2297
5	0.255	192	1912
4	0.252	156	1527
3	0.300	222	1025
2	0.232	370	615
1	0.300	500	290

Tabla 1. Propiedades de inercia y rigidez del edificio analizado

3.2.2 PROPIEDADES DE LA ESTRATIGRAFÍA. La estratigrafía sobre la cual se desplanta la estructura es característica de terreno blando, ver referencia 30, de la Ciudad de México y sus propiedades se presentan en la Tabla 2.

de	a	tipo de suelo	h	γ	G	M	K
[m]	[m]		[cm]	[kg/cm ³]	[kg/cm ²]	[T s ² /cm]	[T/cm]
0.0	4.6	1	460.0	0.00152	50.3	71.27	13122
4.6	7.8	2	320.0	0.00114	38.1	37.19	14288
7.8	9.6	3	180.0	0.00111	35.8	20.37	23867
9.6	10.6	4	100.0	0.00120	69.2	12.23	83040
10.6	11.4	2	80.0	0.00118	30.0	9.62	45000
11.4	14.2	5	280.0	0.00138	27.5	39.39	11786
14.2	17.6	3	340.0	0.00117	35.6	40.55	12565
17.6	20.4	2	280.0	0.00125	42.5	35.68	18214
20.4	26.9	2	650.0	0.00125	42.0	82.82	7754
26.9	36.0	2	910.0	0.00128	48.5	118.74	6396
36.0	42.3	4	630.0	0.00120	69.2	77.06	13181

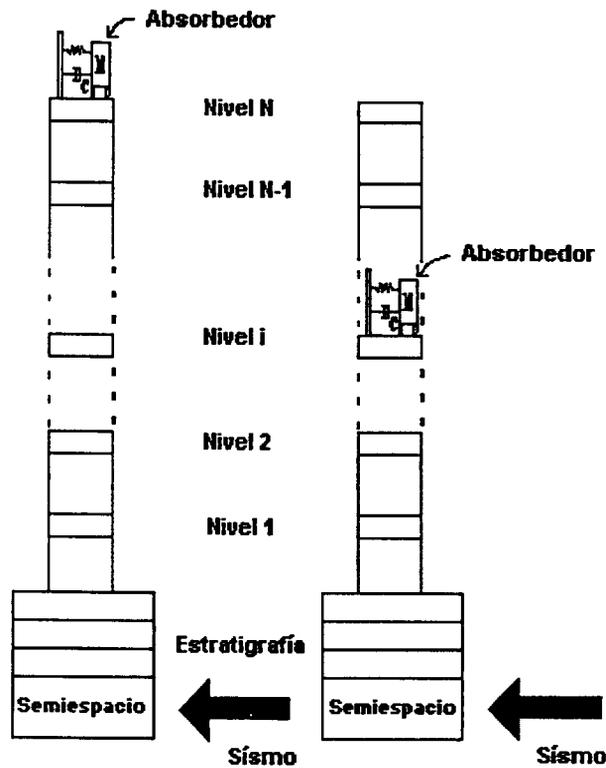
1 Limo arenoso-arcilloso, 2 Limo arcilloso, 3 Arcilla limosa, 4 Arena limosa, 5 Limo arcillo-arenoso

Tabla 2. Propiedades del suelo

Donde

- h espesor del estrato
- γ peso volumétrico del suelo
- G módulo de rigidez dinámico
- M masa del suelo
- K rigidez del suelo

Para conocer la influencia del absorbedor de vibración en el abatimiento de la respuesta dinámica éste será colocado en diferentes niveles del edificio, según se muestra en la fig. 3.2.



Representación del modelo con un absorbedor de vibración en una posición cualesquiera

fig. 3.2

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

3.3.1 FRECUENCIAS NATURALES (ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO). En un sistema de "n" grados de libertad se tienen "n" frecuencias y "n" formas modales (sin considerar las "n" contravariantes). Para el modelo en estudio se calcularon las frecuencias de los siguientes tres sistemas: Suelo Semiespacio, Estructura Semiespacio y Estructura Suelo Semiespacio, lo que permite saber si las frecuencias del sistema Estructura Suelo Semiespacio se encuentran en el dominio de frecuencias de la señal inducida y ver la influencia que el suelo tiene sobre la estructura en la respuesta total del sistema Estructura Suelo Semiespacio.

Frecuencias Naturales [Hz]			
w_i	Suelo	Estructura	Estructura Suelo
	Semiespacio	Semiespacio	Semiespacio
w1	0.00000	0.00000	0.00000
w2	0.37043	0.36946	0.34817
w3	1.01195	1.03470	0.39023
w4	1.73536	1.64742	0.99958
w5	2.34291	2.22054	1.04700
w6	2.69320	2.89248	1.64513
w7	3.60330	3.59135	1.73774
w8	4.39005	4.13894	2.21986
w9	5.49016	4.48404	2.34443
w10	6.62923	5.07508	2.69311

Tabla 3. Frecuencias Naturales

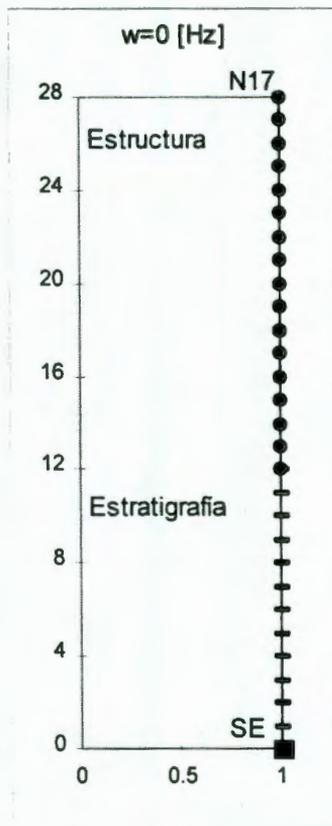
Al calcular las frecuencias naturales del sistema Estructura Suelo Semiespacio se puede observar que sus frecuencias son cercanas a las de los sistemas Suelo Semiespacio y Estructura Semiespacio intercalándose ascendentemente, de tal manera que la segunda frecuencia del sistema completo es próxima a la segunda frecuencia del sistema Estructura Semiespacio y la tercer frecuencia del sistema completo es cercana a la segunda del sistema Suelo Semiespacio, las frecuencias restantes se intercalan de manera similar.

3.3.2 DENSIDAD DE FRECUENCIAS (ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO). En la Tabla 3 se puede observar que las frecuencias naturales del Suelo Semiespacio y de la Estructura Semiespacio están relativamente separadas unas de otras, sin embargo las frecuencias naturales del modelo completo Estructura Suelo Semiespacio están en un grupo más compacto con una mayor densidad de frecuencias. Por ejemplo, de 0 a 2.69320Hz la segunda columna, del depósito de suelo solo presenta seis frecuencias naturales, la tercer columna muestra cinco frecuencias naturales del edificio y el sistema completo mostrado en la cuarta columna exhibe diez frecuencias naturales, por lo que se dice que tiene una mayor densidad de frecuencias de los tres sistemas analizados, siendo este el efecto de la interacción suelo estructura.

De hecho se puede verificar que las diez frecuencias señaladas en la cuarta columna de la Tabla 3 y otras más hasta 5.5Hz del modelo completo están incluidas en el dominio de los espectros de las señales de excitación sísmica de las gráficas 1 a 4, donde la amplitud de las ordenadas de los espectros es considerable y por lo tanto susceptible a excitar con sus aceleraciones al sistema estructural analizado. También se puede ver que el periodo del Suelo

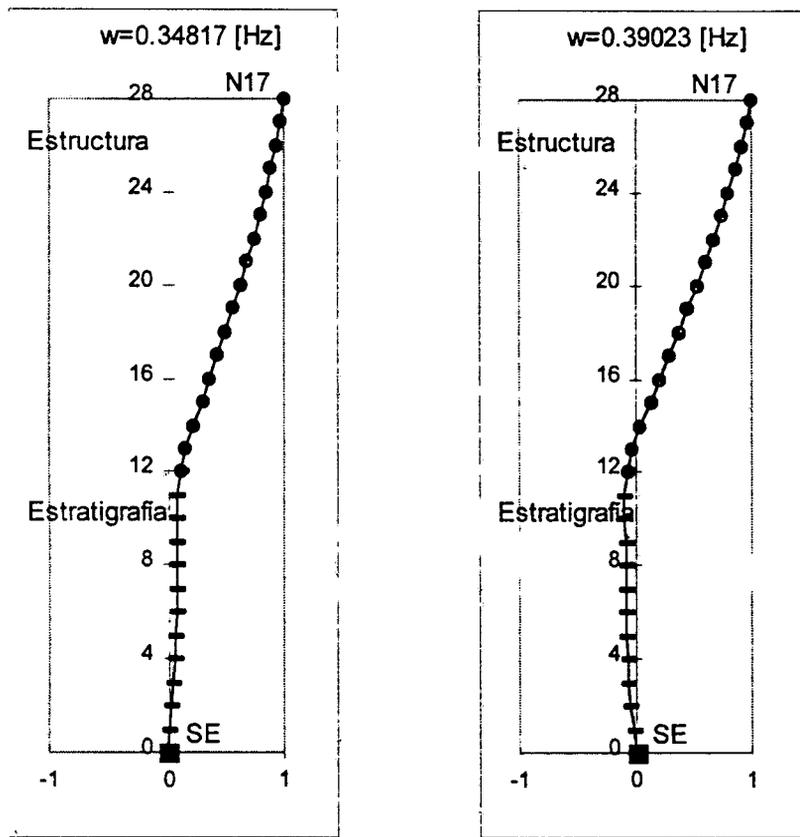
Semiespacio es de 2.70seg. y el del Estructura Semiespacio es 2.71seg., y al calcular las frecuencias del sistema Estructura Suelo Semiespacio se nota que se presentará el fenómeno de resonancia, debido a la existencia de frecuencias con periodos cercanos al periodo de 2.70seg que corresponde al del sistema Suelo Semiespacio.

3.3.3 FORMAS MODALES (ESTRUCTURA SUELO SEMIESPACIO). Aplicando el método de Holzer al sistema completo en estudio, se muestran las primeras siete frecuencias y formas modales. En la fig. 3.3 la primer forma modal desarrollada es la correspondiente a la de cuerpo rígido, en donde todas las masas del sistema presentan un mismo desplazamiento sin existir desplazamientos relativos entre ellas, y esta asociada a una frecuencia natural cero.



Primer forma modal
"Modo de cuerpo rígido"
fig. 3.3

En la fig. 3.4 se presentan la segunda y tercer formas modales del sistema completo, la fig. 3.4a representa la forma modal desarrollada por una frecuencia dominante cercana a la de la estructura, dado que su frecuencia es muy próxima a la del sistema Estructura Semiespacio cuyo valor es 0.36946Hz, y la fig. 3.4b la forma modal desarrollada por una frecuencia natural cercana a la dominante del sistema Suelo Semiespacio de 0.37043Hz.

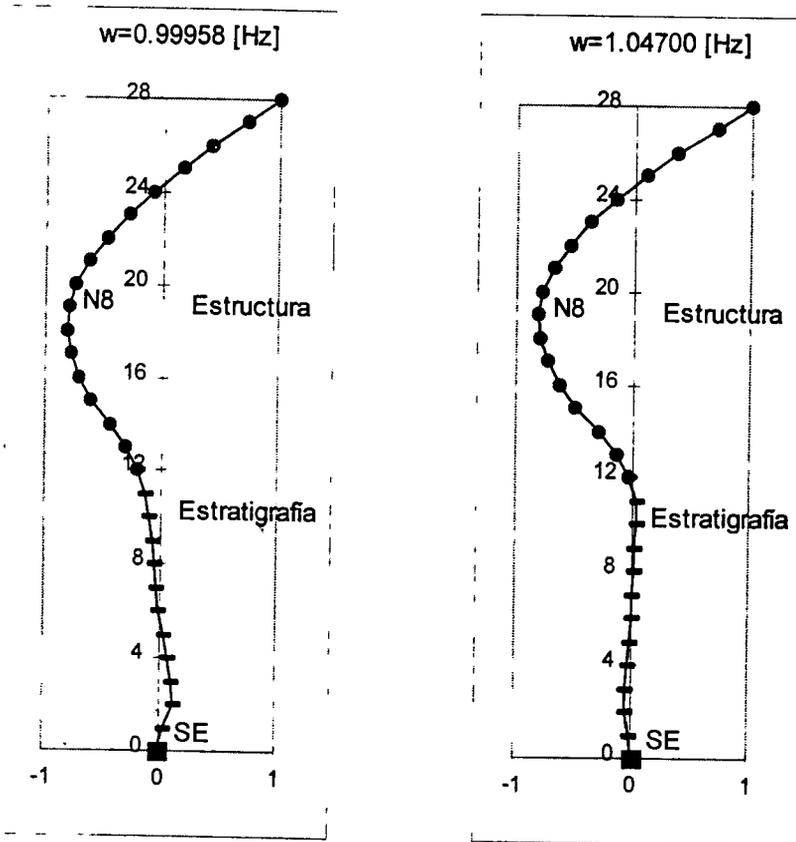


a) Segunda forma modal

b) Tercer forma modal

fig. 3.4

En la fig. 3.5 se presentan la cuarta y quinta formas modales sistema completo, la fig. 3.5a representa la forma modal desarrollada por una frecuencia natural cercana a la del suelo (1.03470Hz) y la fig. 3.5b la desarrollada por una frecuencia natural cercana a la de la estructura original de 1.01195Hz.

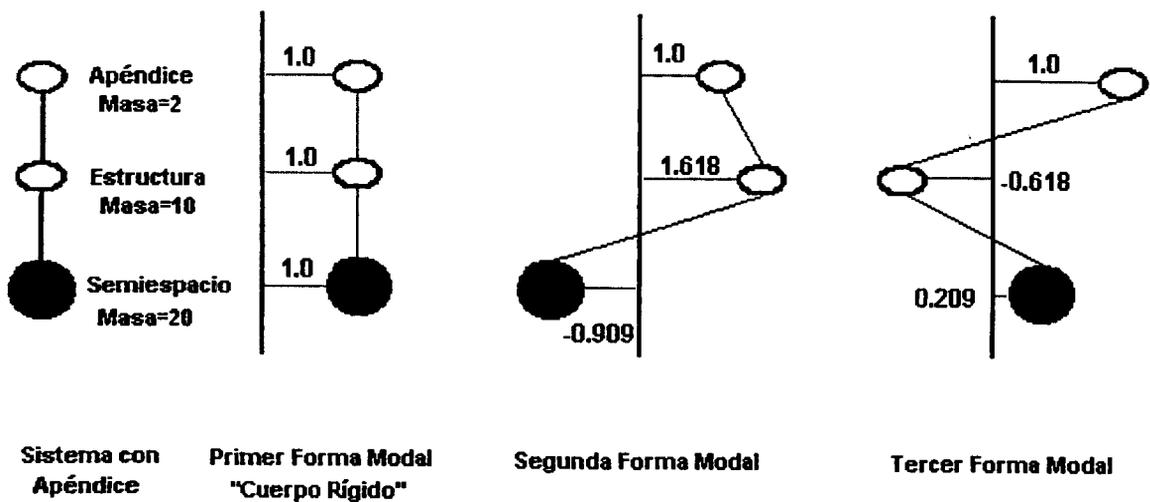


a) Cuarta forma modal

b) Quinta forma modal

fig. 3.5

además como el Semiespacio logra el equilibrio al desarrollar un desplazamiento mayor al de la forma modal superior siguiente; en la tercer forma modal el apéndice se desplaza en sentido contrario al de la masa que lo sostiene, es decir "fuera de fase", logrando que el apéndice tenga una mayor participación en el balance dinámico del sistema, por tal motivo se busca la participación de formas modales, en las que el apéndice este fuera de fase con respecto a la masa que lo sostiene, en estas formas modales puede apreciarse como el apéndice trata de limitar o minimizar los desplazamientos de las masas vecinas de aquella que lo sostiene, es decir, el apéndice "jala" a las masas circundantes de tal manera que disminuyen los desplazamientos libres de la estructura completa.



Configuración modal de un sistema de tres grados de libertad

fig. 3.7

3.3.7 PROPIEDADES ÓPTIMAS DEL SISTEMA ABSORBEDOR. Para la obtención de las propiedades de inercia y rigidez óptimas del sistema absorbedor se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Se calculan frecuencias naturales y formas modales del sistema sin apéndice.
- Se propone una relación de masas R_m , se fija el valor de M_T y se calcula M_a
- Conocida la relación de masas y la segunda frecuencia natural del sistema sin apéndice se calcula el valor inicial de la rigidez del apéndice con la ecuación $K_a = \omega^2 M_a$.

d) Con el valor inicial de K_a y la relación de masas se hace el cálculo de las frecuencias naturales y formas modales del sistema con el apéndice inicial, cuidando que la segunda forma modal tenga una configuración en la que el apéndice y la masa que lo sostiene estén “en fase” y el resto de ellas en donde el apéndice y la masa que lo sostiene estén “fuera de fase”.

e) Con la expresión utilizada en el inciso c) se calcula un segundo valor de K_a utilizando la primer frecuencia natural “fuera de fase” del sistema con apéndice inicial.

f) De la primer forma modal “fuera de fase” de los sistemas calculados en d) y e), se compara el desplazamiento del apéndice, utilizando para una nueva iteración el valor de aquella primer frecuencia natural “fuera de fase” que presente un desplazamiento de apéndice mayor.

g) Los incisos e) y f) se repetirán hasta que se tenga la primer forma modal el apéndice y la masa que lo sostiene “en fase”, la tercera “fuera de fase” con desplazamiento máximo de apéndice y el resto de ellas “fuera de fase”.

En la Tabla 4 se presentan los valores obtenidos de rigidez óptima y de las relaciones de masas de 5%, 10%, 15% y 20%, para las diferentes posiciones del absorbedor de vibración dentro de la estructura.

Apéndice		Ka [T/cm]		
Ma/Mt	Rm [T s ² /cm]	Nivel 17	Nivel 8	Nivel 5
5%	0.2359	1.27	1.295	1.315
10%	0.4717	2.55	2.54	2.63
15%	0.7076	3.82	3.885	3.945
20%	0.9434	5.13	5.18	5.26

M_a = masa del apéndice

M_t =masa total de la estructura

Tabla 4. Propiedades de inercia y rigidez óptima del absorbedor de vibración

Con los datos de la Tabla 4 y haciendo uso de la ecuación

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K_a}{M_a}} \quad (4.1)$$

Se observa que una de las características del absorbedor óptimo, colocado en un nivel específico, es que su frecuencia se mantiene constante para las diferentes masas y rigideces

óptimas según se ve en la Tabla 5, esta característica nos beneficia ya que si se requiere de un apéndice con un valor diferente de masa o rigidez a los mencionados, basta conocer el valor de la masa o el de la rigidez de resorte y encontrar el valor restante utilizando la ecuación 4.1 para conocer las propiedades de inercia y rigidez óptimas del apéndice.

Apéndice		wa [Hz]		
Ma/Mt	Rm [Ts ² /cm]	Nivel 17	Nivel 8	Nivel 5
5%	0.2359	0.3693	0.3729	0.3758
10%	0.4717	0.3700	0.3693	0.3758
15%	0.7076	0.3698	0.3729	0.3758
20%	0.9434	0.3711	0.3729	0.3758

Tabla 5. Frecuencias del absorbedor de vibración

3.3.8 FRECUENCIAS NATURALES Y FORMAS MODALES (ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO). Con los valores óptimos presentados en la Tabla 4 se hace el cálculo de las frecuencias y formas modales para cada uno de los absorbedores propuestos. Es necesario recordar que en un sistema de “n” grados de libertad se tendrán “n” frecuencias y “n” formas modales y que al agregar al sistema “m” apéndices aumenta el número de frecuencias y formas modales a “n+m”.

En la segunda columna de la Tabla 6 se tienen las frecuencias del sistema sin apéndice $M_a=0\%$. De la tercera a la sexta columnas, se presentan los valores de las frecuencias naturales de la estructura con absorbedor colocado en el 17avo. nivel del edificio y para las diferentes relaciones de masas. Puede verse en la tercer columna cuando $M_a=5\%$ que la tercer frecuencia del sistema con absorbedor de 0.36984Hz, es la frecuencia que aumenta al añadirle el absorbedor en el 17avo. nivel del edificio y está entre la segunda frecuencia de 0.34817Hz y la tercer frecuencia (0.39023Hz) del sistema sin absorbedor. En la gráfica 49 ocurre lo mismo para los diferentes porcentajes de masas.

Absorbedor en 17 avo. nivel					
wi	Rm =0%	Rm =5%	Rm =10%	Rm =15%	Rm =20%
w1	0	0	0	0	0
w2	0.34817	0.30588	0.28481	0.26924	0.25716
w3	0.39023	0.36984	0.36990	0.36989	0.36993
w4	0.99958	0.43652	0.46221	0.48106	0.49744
w5	1.04700	1.00199	1.00373	1.00498	1.00596

**Tabla 6. Frecuencias naturales de la Estructura-Absorbedor
Suelo Semiespacio**

En las Tablas 7 y 8 que corresponden respectivamente a las frecuencias naturales para el sistema con absorbedor en el 8avo. y 5to. nivel, sucede lo mismo que el caso anterior, es decir, aumenta en una el número de frecuencias naturales al añadirle al sistema un apéndice. En la Tabla 7 para una relación de masas del 10%, la frecuencia que aumenta al añadirle el apéndice en el 8avo. nivel es la tercer frecuencia cuyo valor es 0.37313Hz y que está entre la segunda y la tercera de la estructura sin apéndice, columna $M_a=0\%$. Para el absorbedor ubicado en el 5to. nivel para una relación de masas del 15% el valor de la frecuencia que aumenta es 0.37314Hz que también se encuentra entre la segunda y la tercera de la estructura sin apéndice. En las gráficas 50 y 51 puede verse como sucede lo mismos para los diferentes porcentajes de masas.

Absorbedor 8avo. nivel					
wi	Rm =0%	Rm =5%	Rm =10%	Rm =15%	Rm =20%
w1	0	0	0	0	0
w2	0.34817	0.33050	0.31887	0.30965	0.30185
w3	0.39023	0.37310	0.37313	0.37314	0.37314
w4	0.99958	0.40693	0.41771	0.42610	0.43307
w5	1.04700	1.00123	1.00254	1.00359	1.00444

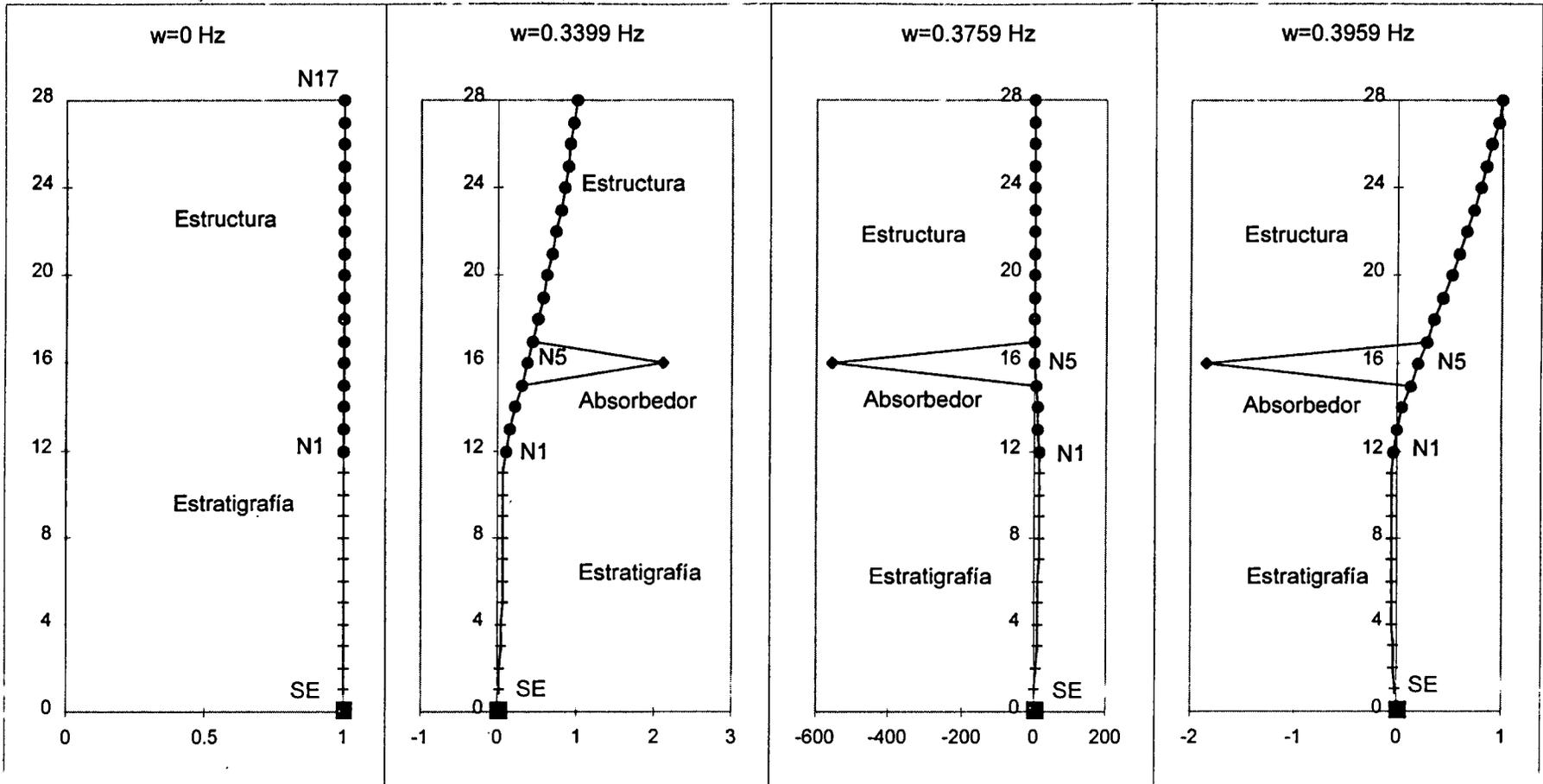
**Tabla 7. Frecuencias naturales de la Estructura-Absorbedor
Suelo Semiespacio**

Absorbedor 5to. nivel					
w_i	$R_m = 0\%$	$R_m = 5\%$	$R_m = 10\%$	$R_m = 15\%$	$R_m = 20\%$
w1	0	0	0	0	0
w2	0.34817	0.33998	0.33337	0.32766	0.32255
w3	0.39023	0.37590	0.37593	0.37595	0.37596
w4	0.99958	0.39591	0.40013	0.40353	0.40639
w5	1.04700	1.00096	1.00212	1.00312	1.00397

**Tabla 8. Frecuencias naturales de la Estructura-Absorbedor
Suelo Semiespacio**

En la fig. 3.8 se presentan las primeras cuatro formas modales desarrolladas por el sistema con absorbedor en el 17avo. nivel, para una relación de masas R_m del 5%. Se sabe que la primer forma modal corresponde a la de cuerpo rígido, fig. 3.8a, y su frecuencia asociada es cero. Como ya se mencionó para el cálculo de las propiedades de inercia y rigidez del absorbedor, se trato que la segunda frecuencia desarrollada por el sistema con absorbedor (en cualquier nivel) fuera cercana a la segunda frecuencia natural del sistema sin absorbedor, por lo que la segunda forma modal, fig. 3.8b, presenta un desplazamiento del apéndice con respecto a la masa que lo sostiene en la misma dirección "en fase", también se observa como el Semiespacio mantiene en balance dinámico al sistema. En la tercer forma modal, fig. 3.8c, se tiene la configuración "fuera de fase" y el máximo desplazamiento del apéndice. El resto de las formas modales, fig. 3.8d, (cuarta, quinta, etc.) están "fuera de fase".

Para los casos en donde el absorbedor está colocado en el 8avo. y 5to. nivel, fig. 3.9 y 3.10, con una relación de masas del 5% para ambos casos, las formas modales que se desarrollan son similares, es decir, en la segunda forma modal el apéndice se desplaza "en fase" con respecto a la masa que lo sostiene y para las demás (tercera, cuarta etc. formas modales) el absorbedor se desplaza en sentido contrario a la masa que lo sostiene "fuera de fase".



a) *Primer forma modal*

b) *Segunda forma modal*

c) *Tercer forma modal*

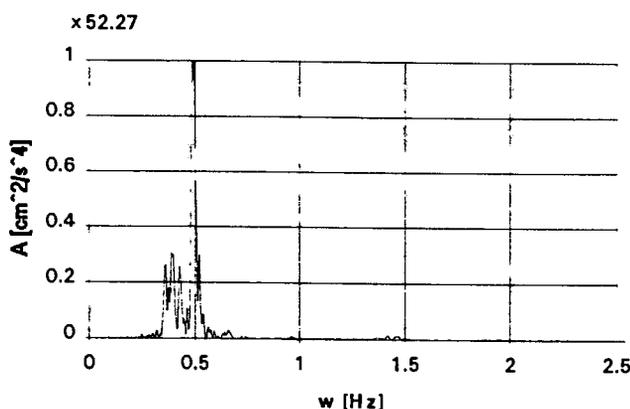
d) *Cuarta forma modal*

fig. 3.10

Ésta característica física que desarrollan las formas modales cuando se le añade el absorbedor al sistema no había sido claramente detectada en la mayoría de las investigaciones revisadas, aunque en el estudio hecho por Lemura, Yamada y Quinn (1987)¹⁰, obtuvieron las formas modales cuando le añadieron al sistema un absorbedor, sin darse cuenta de la relevancia que tiene el considerarlas para la obtención de las propiedades de inercia y rigidez óptimas del absorbedor. Como se vio antes, se calibra con respecto a la frecuencia del tercer modo de un sistema semidefinido con apéndice.

3.3.9 ANÁLISIS DINÁMICO. Después de haber calculado las propiedades de inercia y rigidez óptimas de cada uno de los apéndices propuestos se verá la respuesta dinámica ante diferentes excitaciones sísmicas en el Semiespacio para el edificio con y sin absorbedor, fig. 3.2, y comprobar si efectivamente el absorbedor ayuda en la reducción de la respuesta dinámica del edificio cuando está ubicado en diferentes posiciones.

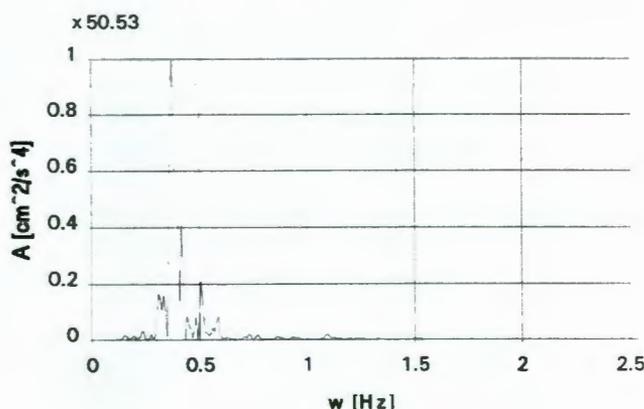
Para el análisis dinámico de estructuras, generalmente se utilizan sismos medidos en campo libre como lo es el acelerograma de SCT que es una señal filtrada en terreno blando. Sin embargo, esto último no es posible en la investigación presente debido a que la fuente de excitación se coloca en el Semiespacio. Por tal motivo se necesita una fuente de excitación cuya respuesta al excitar la estratigrafía de SCT fueran los clásicos acelerogramas registrados en 1985. En la fig. 3.11 se muestra el espectro de Fourier del registro de SCT para el sismo del 19 de septiembre de 1985.



Espectro SCT (N90E) 19 de septiembre de 1985

fig. 3.11

Debido a que se está considerando una estratigrafía representativa de terreno blando para el análisis dinámico del sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio, se utiliza una señal registrada en terreno duro como en la UNAM, ya que este tipo de señales tienen una gama de frecuencias poco alteradas por las condiciones locales del terreno y puede considerarse representativa de la señal real en los depósitos profundos de la estratigrafía. Al inducirle en el Semiespacio el acelerograma del Instituto de Ingeniería a la estratigrafía presentada en la Tabla 2, en la fig. 3.12 se muestra el espectro de respuesta. En esta figura se ve que el periodo fundamental del suelo es de 2.70seg, observando que el espectro de respuesta es similar en forma y amplitud máxima al registrado en el sitio de SCT. Un estudio más detallado para la consideración de acelerogramas de excitación en el Semiespacio se presenta en la referencia 29.



Espectro de respuesta de la estratigrafía

fig. 3.12

Por estos motivos se realizaron simulaciones con los sismos: 19 de septiembre de 1985 (M=8.1; registro: Instituto de Ingeniería, patio), gráfica 1; 14 de septiembre de 1995 (M=7.5; registro: Acapulco), gráfica 2; 24 de octubre de 1993 (M=6.6; registro: Acapulco), gráfica 3, y 15 de mayo de 1993 (M=5.8; registro: Acapulco), gráfica 4, para ver la efectividad de los absorbedores ante sismos de diferentes magnitudes con diferentes contenidos de frecuencias y de energía. Para este tipo de análisis es muy común recurrir a ruido blanco como fuente de excitación⁶.

Una de las variables consideradas al hacer las simulaciones para los diferentes sismos, es el porcentaje de amortiguamiento, tanto para el edificio con y sin absorbedor, debido a que éste influye en la respuesta dinámica. Los valores usados para cada uno de los absorbedores analizados son 2%, 5%, 10% y 15%.

Aplicando al Semiespacio, del modelo Estructura Suelo Semiespacio sin absorbedor, las excitaciones sísmicas mencionadas anteriormente, se calcularon los desplazamientos máximos del último nivel de la estructura, mostrados en la Tabla 9, con los diferentes porcentajes de amortiguamiento, para poder comparar sus desplazamientos máximos, con los desplazamientos de la estructura con absorbedor en las diferentes posiciones y ver si efectivamente hay reducción de la respuesta dinámica.

Desplazamientos Máximos [cm]				
Sismo	$\xi=2\%$	$\xi=5\%$	$\xi=10\%$	$\xi=15\%$
M=8.1	229.05	121.75	55.97	33.03
M=7.5	4.69	3.05	1.56	1.01
M=6.6	16.39	8.87	4.19	2.39
M=5.8	3.52	1.48	0.84	0.61
Senoidal	5.36	4.08	2.67	1.81

Tabla 9. Desplazamientos máximos del último nivel del sistema Estructura Suelo Semiespacio para las diferentes excitaciones sísmicas

Sometiendo ahora los sistemas con apéndice óptimo a una excitación sísmica de $M=8.1$ registrada en terreno duro (patio del Instituto de Ingeniería, CU) se observa que para un 15% de amortiguamiento, con diferentes relaciones de masas (5%, 10%, 15% y 20%) y ubicando el absorbedor en diferentes niveles (17avo., 8avo. y 5to.) existe reducción en la respuesta del edificio. En las gráficas 5 a 8 se puede ver la eficiencia en la reducción del desplazamiento con respecto al sistema sin apéndice (SAP). La máxima reducción se presenta cuando el absorbedor se coloca en niveles superiores, en la gráfica 5 se puede ver que cuando el apéndice está colocado en el 17avo. cuya rigidez óptima es $K_a = 1.27t/cm$, desarrollando la masa del último nivel un desplazamiento de 20cm, menor al desplazamiento desarrollado cuando el apéndice está colocado en el 8avo. nivel ($K_a = 1.295t/cm$) y a la del apéndice colocado en el 5to. nivel ($K_a = 1.295t/cm$), cuyos valores son 29cm y 31cm respectivamente. En las gráficas 5 a 8 se comprueba además que a mayor relación de masas la reducción del desplazamiento es mayor, observando el desplazamiento del último nivel para una relación de masas del 5%, 10%, 15% y 20% del apéndice colocado en el 17avo. nivel se tiene que los desplazamientos son de 20cm, 19cm, 17cm y 15cm respectivamente, que son menores al desplazamiento de la estructura sin absorbedor (SAP) para éste sismo, valor que también puede verse en la Tabla 9, el cual es de 33.03cm.

Haciendo el mismo análisis para porcentajes de amortiguamiento del 2%, 5% y 10% se obtienen las gráficas 9 a 15, teniendo que la disminución de la respuesta es mayor a medida que el porcentaje de amortiguamiento y las relaciones de masas aumentan, gráficas 9 a 11. En la gráfica 9 podemos comprobar lo dicho anteriormente ya que para un amortiguamiento del 15% y una relación de masas del 20% el desplazamiento máximo es de 15cm aproximadamente que es menor al de la estructura sin apéndice de 33.03cm, presentándose algo similar para las demás posiciones de absorbedor, aunque cuando el absorbedor está ubicado en el quinto nivel, gráfica 11, y para las mismas condiciones puede verse que el desplazamiento es aproximadamente de 32cm, observando con esto que la colocación de los absorbedores en niveles inferiores da una menor disminución de la respuesta. En las gráficas 12 a 15 se puede observar que cuando el apéndice se encuentra en niveles superiores existe una mayor reducción de la respuesta dinámica.

Analizando los sistemas con apéndice óptimo para los sismos de magnitud $M=7.5$ (gráficas 16 a 18), $M=6.6$ (gráficas 23 a 25) y $M=5.8$ (gráficas 30 a 32), se obtienen resultados similares, a los obtenidos en las gráficas 9 a 11, es decir, cuando el absorbedor está ubicado en niveles superiores existe una mayor reducción de la respuesta a medida que aumenta la relación de masas y porcentajes de amortiguamiento. Por ejemplo en la Tabla 9 para un sismo de magnitud $M=7.5$ y con porcentajes de amortiguamiento de la estructura sin absorbedor del $\xi=2\%$ y $\xi=10\%$ se tiene que los desplazamientos máximos del último nivel son de 4.69cm y 1.56cm respectivamente. Al añadirle un absorbedor de vibración en el último nivel ($AP=17$ avo.) con una relación de masas $Rm=5\%$ y para las mismas condiciones de sismo y amortiguamientos, los desplazamientos del último nivel de la estructura son de 1.67cm y 1.0cm, Tabla 10, observando que existe una reducción de los desplazamientos del 64% y 36% respectivamente, para una relación de masas $Rm=15\%$ la reducción de los desplazamientos con las mismas condiciones de sismo, amortiguamientos y ubicación del absorbedor son 77% y 61 %, teniendo con esto que a mayor relación de masas la reducción es mayor. Cuando el absorbedor se ubica en el 8avo. Nivel, ver Tabla 10, con una relación de masas $Rm=15\%$ y para amortiguamientos del 2% y 10% la reducción es del 18% y 13% respectivamente, la estructura con el absorbedor en el 5to. nivel y $Rm=15\%$ tiene reducción de los desplazamientos del 14% y 12%, verificándose con esto lo observado en las gráficas 9 a 11.

Para los sismos de magnitud $M=7.5$ (gráficas 19 a 22), $M=6.6$ (gráficas 26 a 29) y $M=5.8$ (gráficas 33 a 36) se comprueba que hay reducción de la respuesta dinámica a medida que el apéndice se ubica en niveles superiores, como lo observado en la Tabla 10 y gráficas 12 a 15.

Desplazamientos Máximos (cm)												
	M =7.5				M =6.6				M =5.8			
	Rm =5%		Rm =15%		Rm =5%		Rm =15%		Rm =5%		Rm =15%	
	$\xi=2\%$	$\xi=10\%$										
AP =17	1.67	1.00	1.08	0.61	3.89	2.01	3.32	1.79	1.18	0.68	0.87	0.56
AP =8	3.86	1.35	2.10	1.12	9.31	3.37	4.91	2.36	1.54	0.80	1.46	0.73
AP =5	3.98	1.48	4.02	1.37	12.63	3.89	9.54	3.38	2.22	0.83	1.36	0.80

Tabla 10. Desplazamientos máximos del último nivel del sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio

En los espectros correspondientes a cada uno de los sismos dados en las gráficas 1 a 4, no se aprecia una tendencia uniforme de disminución en las gráficas 11 a 36, esto se debe a que cada sismo tiene diferentes frecuencias dominantes por lo que la respuesta del sistema se verá afectada de acuerdo a la participación de sus frecuencias naturales y formas modales. Esto último se observa mas claramente en la gráfica 16 para una relación de masas del 15% y un 2% de amortiguamiento.

De estos resultados se aprecia que la reducción de la respuesta fue excelente para cualquier sismo de diversas magnitudes, de aquí surge el problema de aclarar la razón por la cual los absorbedores son tan efectivos. En este sentido se nota que siendo el espectro de aceleraciones una superposición de coeficientes de funciones senoidales y cosenoidales, se procede entonces a efectuar un análisis del edificio en estudio ante fuerzas armónicas simples actuando a diferentes frecuencias. Con esto, se observará mas adelante el efecto reductor de vibraciones provocada por los absorbedores.

Una vez realizado el análisis dinámico de los sistemas considerados ante diferentes excitaciones sísmicas es conveniente presentar como es la respuesta del absorbedor y del 17avo. nivel donde se encuentra ubicado el apéndice ante la excitación sísmica de M=8.1 y apreciar como el apéndice actúa fuera de fase con respecto al nivel donde esta ubicado, según se ve en la gráfica 37, el hecho de que el apéndice trabajó "fuera de fase" marca la importancia de considerar en el análisis dinámico una mayor cantidad de modos "fuera de fase" y que la estructura con apéndice no sufra desplazamientos mayores a los obtenidos por la estructura sin apéndice.

3.3.10 DISIPACIÓN DE ENERGÍA DEL ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN. Debido a que en esta tesis una excitación sísmica está formada por una superposición de senoides y cosenoides se realiza un análisis similar a los sismos anteriores, sometiendo al sistema con absorbedor en diferentes posiciones a una excitación senoidal de amplitud unitaria aplicada en el Semiespacio formada por una familia de senoides del tipo $sen \omega_1 t$, $sen \omega_2 t$, $sen \omega_3 t$, ... , $sen \omega_1 t$, para obtener la respuesta del sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio ante cualquier frecuencia de excitación. Encontrando que hay una tendencia parecida en la reducción de la respuesta e influencia del absorbedor al ser añadido al edificio. Esto se hace para los diferentes porcentajes de amortiguamiento, relaciones de masas y ubicación del absorbedor, en las gráficas 38 a 40 se puede ver que existe disminución de los desplazamientos a medida que el porcentaje de amortiguamiento aumenta y la relación de masas es mayor. Por ejemplo en la gráfica 38, cuando el apéndice está colocado en el 17avo. nivel se ve como para un amortiguamiento del 2% y una relación de masas del 5% se tiene un desplazamiento máximo del último nivel del edificio de 3cm que es mayor al que se presenta para un amortiguamiento del 15% y una relación de masas del 20% de 1cm. El desplazamiento máximo de la estructura sin absorbedor para un 2% de amortiguamiento, Tabla 9, es de 5.36cm y para un 15% de amortiguamiento es de 1.81cm, verificando con esto que existe reducción de la respuesta dinámica al utilizar absorbedores de vibración dentro de la estructura. En las gráficas 39 y 40 se muestran resultados similares a la gráfica 38, pero ahora con el absorbedor ubicado en el 8avo. y 5to. nivel respectivamente. De estas últimas gráficas se ve que cuando el absorbedor está colocado en niveles superiores la reducción de la respuesta es mayor, esto se puede confirmar que cuando se tiene el absorbedor en el 5to. nivel (gráfica 40) para un porcentaje de amortiguamiento del 15% y una relación de masas del 20%, el desplazamiento máximo del último nivel es 1.9cm que es mayor al obtenido en el 17avo. nivel (1cm), gráfica 38, y en el 8avo. nivel (1.1cm), gráfica 39, para las mismas condiciones del 15% de amortiguamiento y 20% de la relación de masas.

Las gráficas 41 a 44 muestran los desplazamientos máximos del último nivel del edificio, graficando el desplazamiento para una misma relación de masas, diferentes porcentajes de amortiguamiento y el apéndice colocado en las tres diferentes posiciones, observando en ellas que a mayor relación de masas, la disminución de los desplazamientos es mayor y que además influye la ubicación del absorbedor dentro del edificio.

Como en un sitio se presentan sismos de diversas magnitudes, con frecuencias dominantes diferentes, se tiene una respuesta del edificio particular que depende de las características dinámicas de éste.

Para verificar la influencia de la frecuencia de excitación ante los posibles sismos que pudieran excitar al sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio, la gráfica 45 muestra el espectro de respuesta del edificio sin absorbedor, ante excitación unitaria senoidal y diferentes frecuencias, las gráficas 46 a 48 muestran el espectro de respuesta del edificio con absorbedor colocado en el 5to., 8avo. y 17avo. nivel respectivamente, en donde la respuesta del absorbedor se identifica por la curva resaltada con círculos. En la Tabla 11 se presentan las amplitudes máximas que desarrolla cada uno de los sistemas y se observa que para condiciones de masa y porcentaje de amortiguamiento iguales se presenta una disminución de la amplitud máxima cuando el absorbedor está colocado en niveles superiores, por lo que puede decirse que para cualquier tipo de excitación inducida al sistema siempre existirá una reducción del desplazamiento máximo total de la estructura sin apéndice. El efecto reductor de vibración se puede apreciar a simple vista al comparar los espectros de respuesta de las gráficas 45 (sin absorbedor) a 48 con absorbedor.

$\xi=10\%$		Amplitud Máxima [cm ² /s ⁴]
$Rm=0\%$	SAP	32.19
$Rm=20\%$	AP=5	19.16
$Rm=20\%$	AP=8	13.37
$Rm=20\%$	AP=17	8.70

Tabla 11. Desplazamientos máximos del 17avo. Nivel del espectro de respuesta

3.3.11 ESPACIAMIENTO DE FRECUENCIAS (ESTRUCTURA-ABSORBEDOR SUELO SEMIESPACIO). En la gráfica 49 se observa que para una relación de masas del 20% y con el absorbedor en el 17avo. nivel de la estructura, se tiene un espaciamiento entre la segunda y tercer frecuencias naturales de 0.113Hz y entre la tercera y cuarta frecuencias naturales de 0.128Hz que son mayores a los existentes para la relación de masas del 5% los cuales son de 0.064Hz y 0.067Hz respectivamente, por lo tanto la relación de masas del 20% tiene un mayor espaciamiento entre sus frecuencias naturales. Cuando un sistema con absorbedor presenta grandes espaciamientos entre sus frecuencias naturales la participación de ellas dentro de un espectro de excitación sísmica se ve disminuida, debido a esto, la respuesta dinámica del sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio se abate. En las gráficas 49 a 51 se puede observar el espaciamiento entre las frecuencias naturales para las diferentes relaciones de masas y posiciones

de absorbedor, en ellas se ve que cuando el absorbedor está colocado en niveles superiores y con relaciones de masas mayores el espaciamiento es mayor.

Además de las formas modales con el apéndice “en fase” y “fuera de fase” con respecto a la masa que lo sostiene y de la densidad de frecuencias para la obtención del absorbedor óptimo existe un coeficiente de fundamental importancia que determina la participación de la primer forma modal “en fase”, este coeficiente hace mínima su participación de tal manera que la supresión de una forma modal propicia un decremento de la respuesta dinámica.

3.3.12 COEFICIENTE DE CARGA. Cuando se hace un análisis dinámico por superposición modal se tiene que la solución a la ecuación de movimiento es

$$X = \sum_{n=1}^N \eta^n \tilde{\phi}_n$$

donde η^n el factor de participación que incluye a una cantidad S_n que involucra a la forma modal del sistema

$$S_n = \frac{\tilde{\phi}_{ni} M_{ij} P_j}{\tilde{\phi}_{ni} M_{ij} \tilde{\phi}_{nj}} \quad (4.2)$$

S_n	coeficiente de carga
ϕ_{nj}	forma modal
M_{ij}	matriz de masas, y
P_j	vector de amplitudes de carga

El coeficiente de participación η^n define en que medida la forma modal “n” participa en la respuesta total en cualquier tiempo dado, y el coeficiente de carga S_n define en que medida la posición de la carga afecta a la forma modal “n” en la respuesta total del sistema.

Debido a que la excitación sísmica es inducida en el Semiespacio móvil, para cualquier análisis la ecuación 4.2 se simplifica en

$$S_n = \frac{x_{SE} M_{SE}}{\phi_{ni} M_{ij} \tilde{\phi}_{nj}}$$

donde

x_{SE} es el desplazamiento del Semiespacio en la forma modal "n", y
 M_{SE} es la masa del Semiespacio

de la ecuación anterior se observa que como la masa del Semiespacio es constante tanto para un sistema con absorbedor y sin absorbedor, la variable más significativa es el desplazamiento del Semiespacio x_{SE} .

En la Tabla 12 se puede apreciar como el desplazamiento del Semiespacio disminuye cuando se tiene un sistema con absorbedor óptimo con respecto a los del sistema sin apéndice. En esta Tabla se presentan los desplazamientos del Semiespacio y apéndice correspondientes a las primeras ocho formas modales para el sistema con apéndice y las primeras siete para el sistema sin apéndice, como en el sistema con apéndice se incrementa una forma modal ubicada entre la segunda y tercer frecuencias naturales del sistema sin apéndice, en la columna correspondiente al desplazamiento del Semiespacio del sistema sin apéndice se recorren el tercer y cuarto desplazamientos para poderlos comparar con los desplazamientos del sistema con apéndice.

Sistema con Apéndice en el 17avo. nivel			Sistema sin Apéndice	
w Hz	SE cm	AP cm	w Hz	SE cm
0	1	1	0	1
0.30588	-2.22E-04	3.18411	0.34817	-5.61E-04
0.36984	-0.20013	-356.361		
0.43652	1.62E-04	-2.51896	0.39023	5.46E-04
1.00199	-3.51E-04	-0.15722	0.99958	-2.84E-04
1.05532	0.72E-04	-0.13956	1.04700	0.90E-04
1.65177	-0.17E-04	-0.05262	1.73774	0.42E-04
1.73798	3.88E-04	-0.04729	2.21986	-0.12E-04

Tabla 12. Desplazamientos de las formas modales del apéndice y semiespacio

Para el sistema con absorbedor en el 17avo. nivel, en la Tabla 12, se observa como el desplazamiento del SE del sistema sin apéndice (-5.61E-04cm) correspondiente a la segunda frecuencia natural disminuye en un 60% (-2.22E-04cm) provocando una disminución del valor S_n , ecuación 4.2; para la tercer frecuencia natural, cuya forma modal donde el apéndice esta "fuera de fase" con respecto a la masa que lo sostiene, el desplazamiento del apéndice es máximo lo que hace que el denominador de la ecuación 4.2 aumente considerablemente y con esto el coeficiente de carga S_n tiende mas rápidamente a valores cercanos a cero. Por lo tanto cuando éste coeficiente es cercano a cero la participación de las formas modales se hacen mínimas.

Para el cálculo del coeficiente de carga S_n intervienen la forma modal y el desplazamiento del Semiespacio, de tal manera que cuando se tiene un sistema con absorbedor óptimo el desplazamiento del Semiespacio decrece para la frecuencia fundamental (segunda frecuencia natural) al igual que para algunas frecuencias cercanas, aunque se ve en la Tabla 12 que para la frecuencia de 1.00199Hz existe un incremento en el desplazamiento del Semiespacio que no es significativo en la respuesta dinámica total. En las frecuencias naturales superiores el Semiespacio presenta un decremento e incremento de manera alternada, en donde la mayoría de las frecuencias naturales presentan una disminución de los desplazamientos del Semiespacio, provocando con esto una disminución en el valor de S_n y en la respuesta dinámica.

En las gráficas 52 a 54 se ve como los coeficientes de carga decrecen a medida en que la relación de masas es mayor y el apéndice se ubica en niveles superiores. En la gráfica 52, cuando el absorbedor esta colocado en el 17avo. nivel se observa que el coeficiente de carga S2 de la segunda forma modal donde el apéndice esta "en fase" con respecto a la masa que lo sostiene, decrece a medida en que la relación de masas es mayor, por ejemplo para una relación del 5% se tiene un valor de coeficiente de carga igual a -2.8 y para una relación del 20% es igual a -1.7. El coeficiente de carga S3 de la tercer forma modal "fuera de fase" tiene un valor cercano a cero debido a que las propiedades de inercia y rigidez del absorbedor son óptimas, provocando con esto la supresión de ésta forma modal. Para las formas modales superiores a la tercera el coeficiente de carga presenta una tendencia similar a la segunda forma modal. Cuando se añade un apéndice con propiedades de inercia y rigidez óptimas existe un coeficiente de carga que suprime la participación de la tercer forma modal (primer forma modal "fuera de fase") presentándose una disminución de los coeficientes de carga de las formas modales a las que están asociadas, logrando con esto una reducción de la respuesta dinámica de la estructura.

Como se mencionó, la ubicación de un absorbedor se define mediante el concepto de antinodos, si se analizan todas las formas modales de un modelo Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio se puede inferir que cualquier masa es un antinodo para una cierta forma modal. Con esto puede decirse que el modelo semidefinido "Estructura Suelo Semiespacio" permite ubicar en cualquier nivel de la estructura un absorbedor de vibración y que habrá reducción de la respuesta dinámica, de cierta manera específica, siempre y cuando éste tenga las propiedades de inercia y rigidez óptimos.

Los resultados anteriores también muestran que, cuando el absorbedor está ubicado en niveles superiores, la reducción de la respuesta es mayor que cuando se ubica en los primeros niveles, por lo que para explicar dicha tendencia en la reducción con respecto a la posición del absorbedor, se hizo un análisis ubicando el apéndice en el primer nivel de la estructura, realizando un análisis similar al desarrollado anteriormente se obtienen las propiedades de inercia y rigidez óptimas para el absorbedor, la relación de masas es del 20% y la rigidez es de 5.26t/cm.

Del análisis de las características dinámicas del sistema Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio, en la Tabla 13 se puede observar que la tercer frecuencia del sistema con apéndice, M=20%, (0.37568Hz) es la frecuencia que se incrementa al añadir el absorbedor y se encuentra

entre la segunda frecuencia (0.34817Hz.) y la tercera frecuencia (0.39023Hz) del sistema sin absorbedor.

Absorbedor en 1er. nivel		
w _i	R _m =0%	R _m =20%
w ₁	0	0
w ₂	0.34817	0.34479
w ₃	0.39023	0.37568
w ₄	0.99958	0.39207
w ₅	1.04700	1.00004

**Tabla 13. Frecuencias naturales de la Estructura-Absobedor
Suelo Semiespacio**

En la fig. 3.13 se presentan las primeras cuatro formas modales desarrolladas por el sistema con absorbedor ubicado en el primer nivel de la estructura, la primer forma modal es la correspondiente al cuerpo rígido, en la segunda forma modal se ve como el apéndice se desplaza en la misma dirección de la masa que lo sostiene, "en fase", en la tercer forma modal se aprecia como el apéndice se desplaza en sentido contrario a la masa que lo sostiene, "fuera de fase", en las formas modales superiores el apéndice se comporta de manera similar a la tercera forma modal.

Realizando el análisis dinámico para el sismo del 19 de septiembre de 1985 (registro: Instituto de Ingeniería patio), utilizando un 10% de amortiguamiento y una relación de masas del 20%, se puede observar en la gráfica 55, que existe muy poca disminución de la respuesta. La explicación al porque la disminución de la respuesta es cada vez menor en función de la ubicación del absorbedor en niveles inferiores, es que la masa del suelo sobre la que está desplantada la estructura es muy grande, por lo que la influencia del apéndice en la respuesta de los niveles superiores de la estructura es casi nula.

En la gráfica 56 se observa que cuando el apéndice se encuentra ubicado en niveles superiores se tiene un mayor espaciamiento entre las frecuencias naturales para una relación de masas específica, con esto se tiene que a mayor espaciamiento entre frecuencias naturales existe una menor participación de éstas en la disminución de la respuesta dinámica.

Debido a que las frecuencias naturales están relacionadas directamente con las formas modales, la gráfica 57 muestra el valor del coeficiente de carga S_n para las diferentes posiciones del apéndice del edificio analizado, en ella se observa que conforme el apéndice se ubica en niveles

superiores los valores del coeficiente de carga decrecen de tal manera que la participación de la forma modal a la que están asociados disminuye.

Del análisis de los resultados obtenidos para las diferentes excitaciones sísmicas y con el absorbedor en las diferentes posiciones, se deduce que cuando el absorbedor está ubicado en el 17avo. nivel con un porcentaje de masa del 15%, se tiene una disminución considerable de la respuesta dinámica.

3.3.13 PRUEBAS DE CAMPO PARA LA INSTALACIÓN DE ABSORBEDORES. Para verificar que el funcionamiento del absorbedor de un edificio es el óptimo, no es necesario esperar a que suceda un evento sísmico. Para esto se somete a la estructura con y sin absorbedor, a una excitación senoidal inducida en la parte superior de ésta, con magnitud unitaria y que abarca una amplia gama de frecuencias, obteniéndose un espectro de respuesta para la estructura sin absorbedor como el mostrado en la gráfica 45. Las gráficas 46 a 48 presentarían los espectros de respuesta para la estructura con absorbedores en el 5to., 8avo. y 17avo. nivel respectivamente. Se observa que en los tres casos debe haber un abatimiento de la respuesta y que cuando el absorbedor está ubicado en niveles superiores, el abatimiento de la respuesta es mayor.

3.3.14 MÚLTIPLES ABSORBEDORES. Las principales objeciones de los absorbedores son sus excesivas dimensiones¹⁰ y enormes desplazamientos para ser ubicados en un solo nivel del edificio ya sea por consideraciones estructurales o arquitectónicas, por ejemplo, para el caso de un solo absorbedor colocado en el 17avo. nivel con relación de masas del 15% y porcentaje de amortiguamiento del 10%, existe una considerable reducción de la respuesta dinámica, y debido a que la relación de masas indica un peso considerable concentrado en un solo nivel, se propone distribuir esa relación de masas en tres apéndices ubicados en los últimos niveles del edificio, los cuales se calibran de la misma manera que para un solo absorbedor, con respecto a la frecuencia natural de la primer forma modal donde los absorbedores están "fuera de fase" con respecto a las masas que los sostienen, en este caso corresponde a la quinta frecuencia natural, fig. 3.14e, de la calibración se obtiene que para una relación de masas del 5% la rigidez óptima correspondiente es 1.27t/cm.

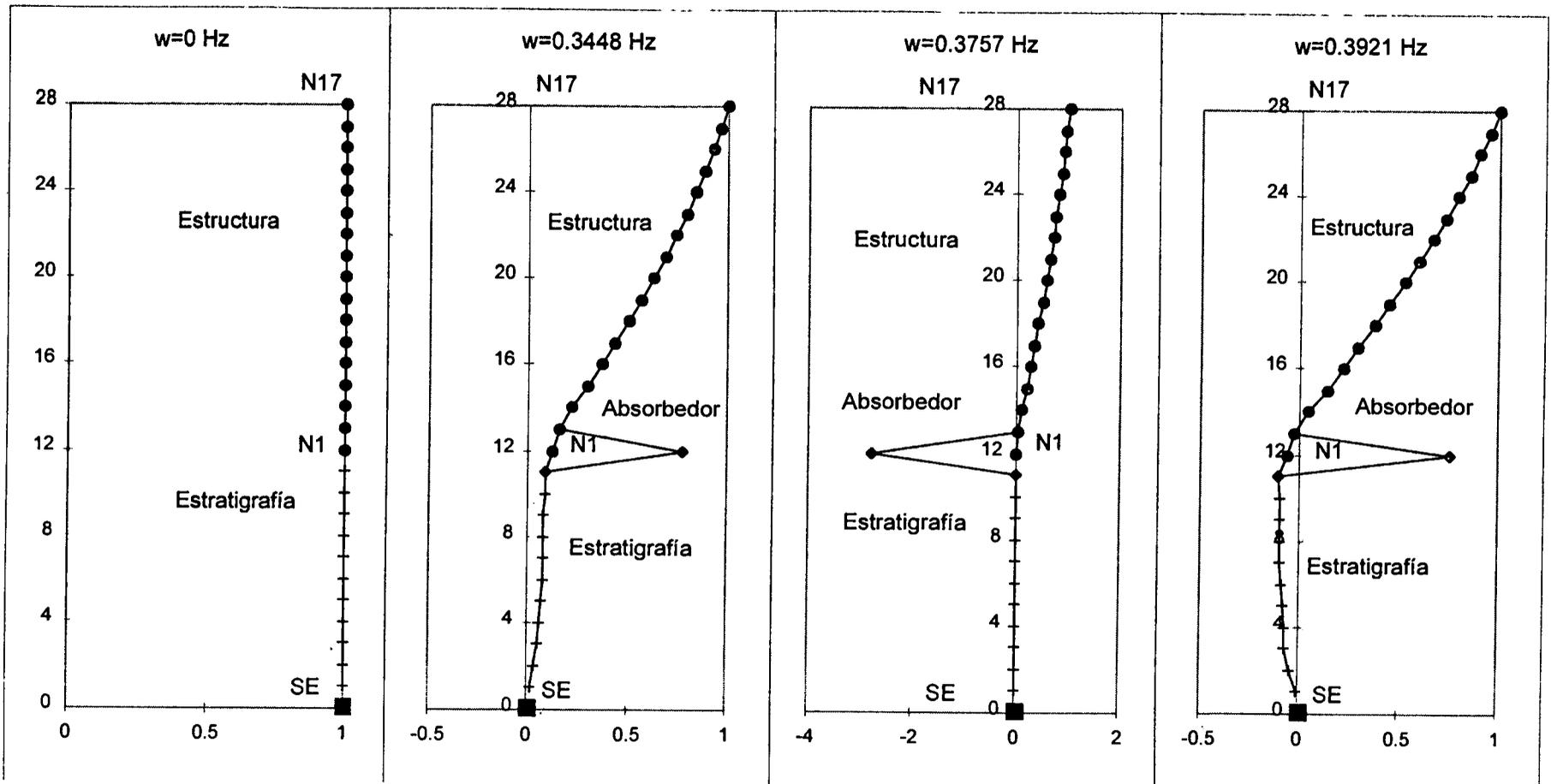
Obteniendo las características dinámicas del sistema con tres absorbedores la Tabla 14 muestra las frecuencias naturales del sistema. Como se le añaden tres absorbedores al sistema Estructura Suelo Semiespacio el número de frecuencias de este sistema se verá incrementado en tres frecuencias naturales, en la Tabla 14 se observa como la tercera, cuarta y quinta frecuencias

del sistema con apéndice son las que se incrementan entre la segunda y tercer frecuencias del sistema sin apéndice. En la fig. 3.14 se tienen las primeras ocho formas modales, la primer forma modal corresponde a la de cuerpo rígido, las siguientes tres representan a las formas modales “en fase”, la quinta forma modal y las formas modales superiores representan a las formas modales “fuera de fase”.

Absorbedores en 17avo., 16avo. y 15avo. nivel		
wi	Rm = 0%	Rm = 5%
w1	0	0
w2	0.34817	0.27475
w3	0.39023	0.36571
w4	0.99958	0.36815
w5	1.04700	0.37062
w6	1.64513	0.48430
w7	1.73774	1.00343
w8	2.21986	1.06147
w9	2.34443	1.65340

**Tabla 14. Frecuencias naturales de la Estructura-Absorbedor
Suelo Semiespacio**

Realizando el análisis dinámico para el sismo del 19 de septiembre de 1985 (registro: II, patio) y utilizando un 10% de amortiguamiento, se ve en la gráfica 58, que la reducción de la respuesta es similar para los dos casos, por tanto, la decisión de considerar uno o más absorbedores dependerá principalmente de factores estructurales y arquitectónicos.



a) Primer forma modal

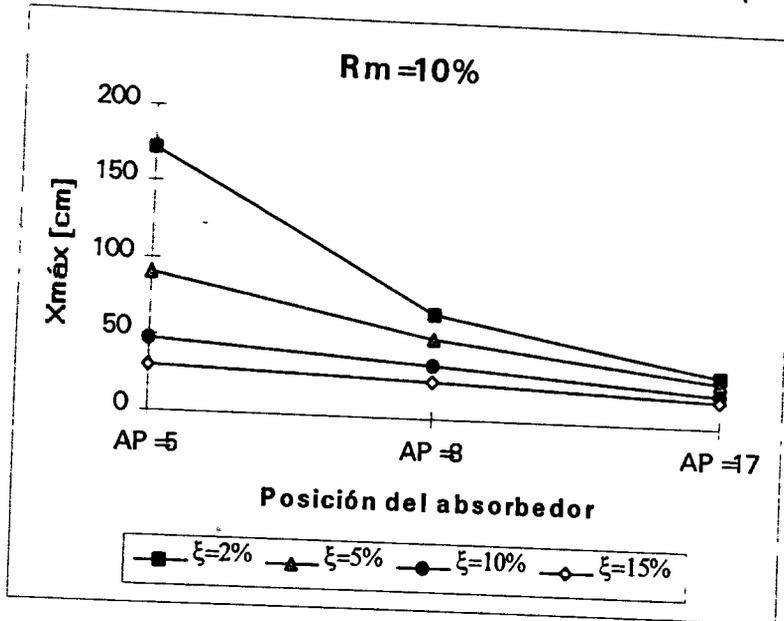
b) Segunda forma modal

c) Tercer forma modal

d) Cuarta forma modal

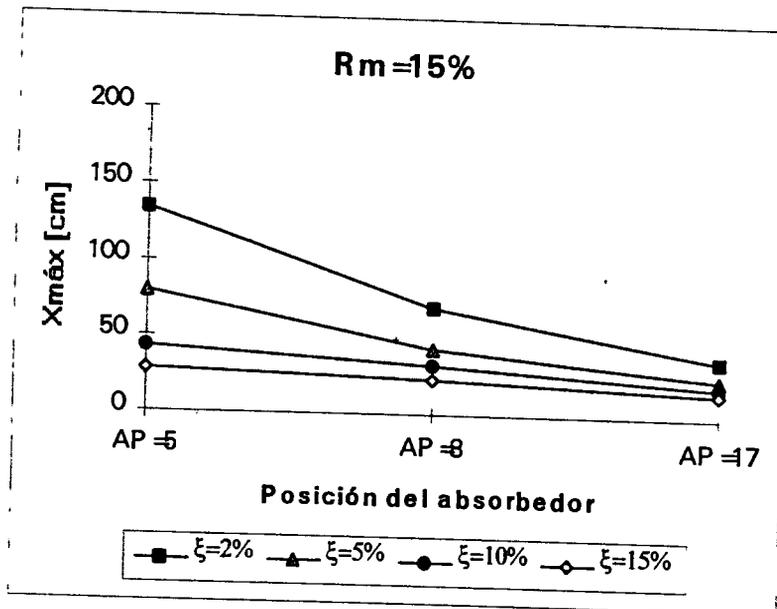
fig. 3.13

Desplazamientos máximos para el sismo del 19 de septiembre de 1985 (M=8.1; registro: II)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 10%

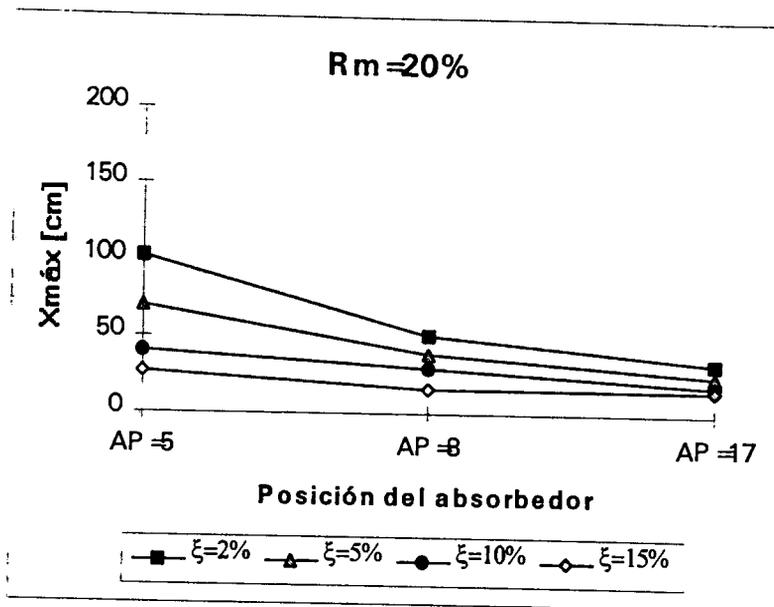
Gráfica 13



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 15%

Gráfica 14

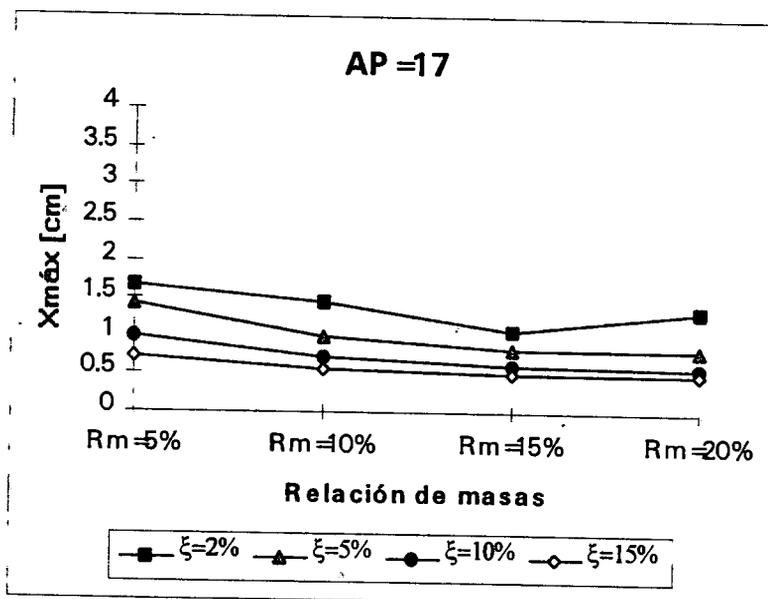
Desplazamientos máximos para el sismo del 19 de septiembre de 1985 (M=8.1; registro: II)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 20%

Gráfica 15

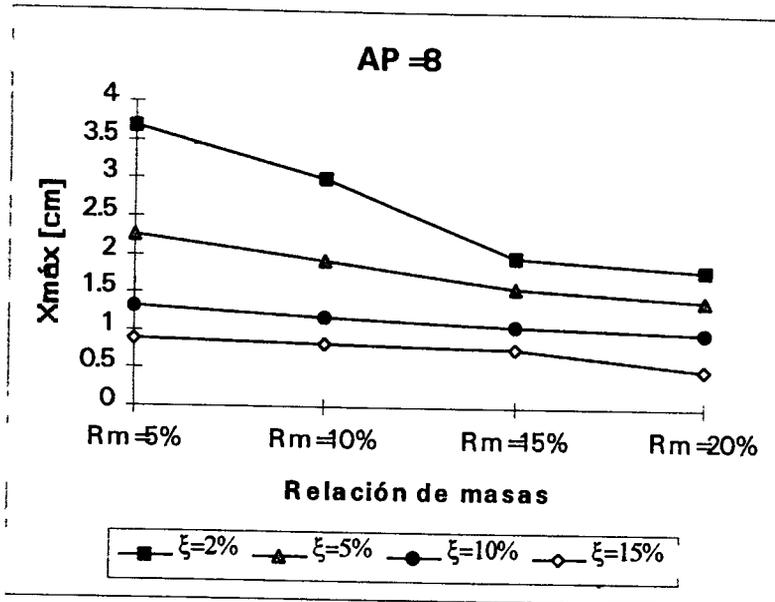
Desplazamientos máximos para el sismo del 14 de septiembre de 1995 (M=7.5; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 17avo. nivel

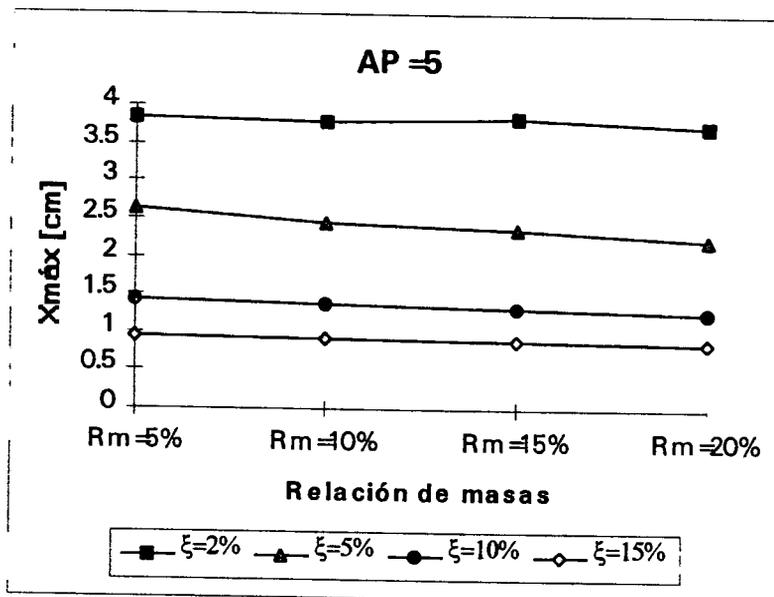
Gráfica 16

Desplazamientos máximos del sismo del 14 de septiembre de 1995 (M=7.5; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 8avo. nivel

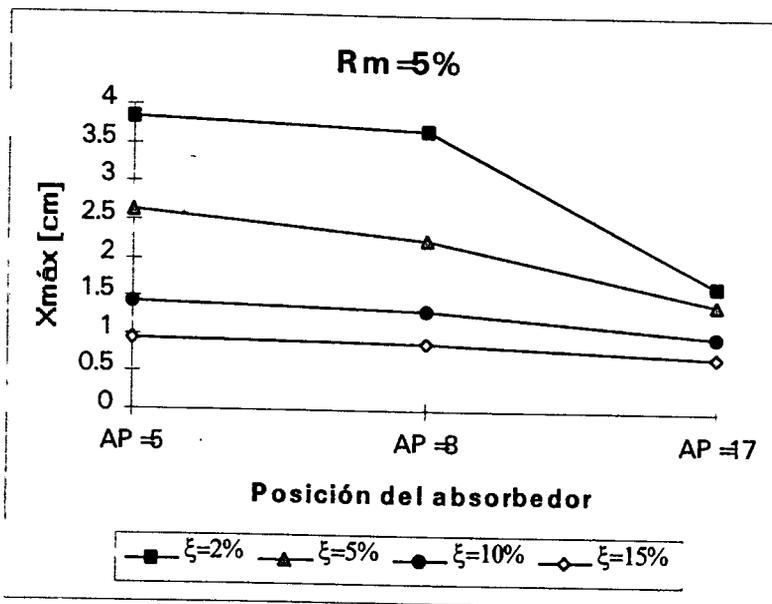
Gráfica 17



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 5to. nivel

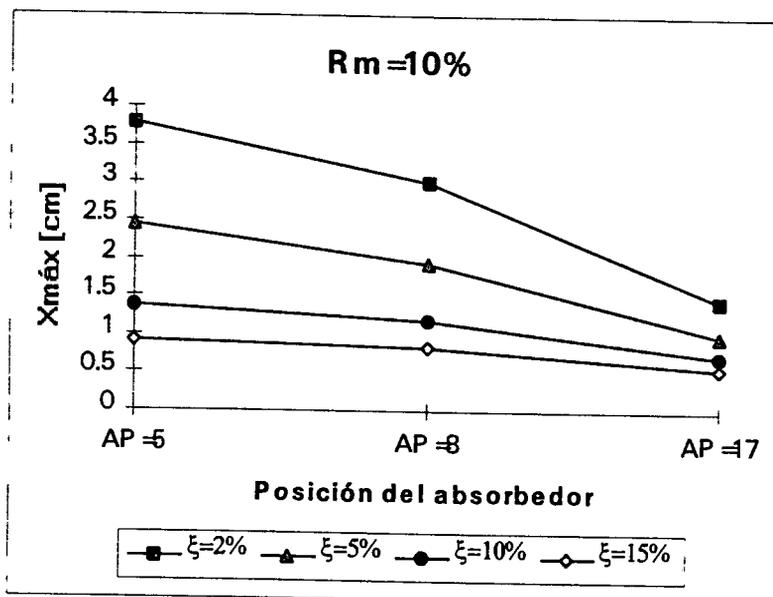
Gráfica 18

Desplazamientos máximos del sismo del 14 de septiembre de 1995 ($M=7.5$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 5%

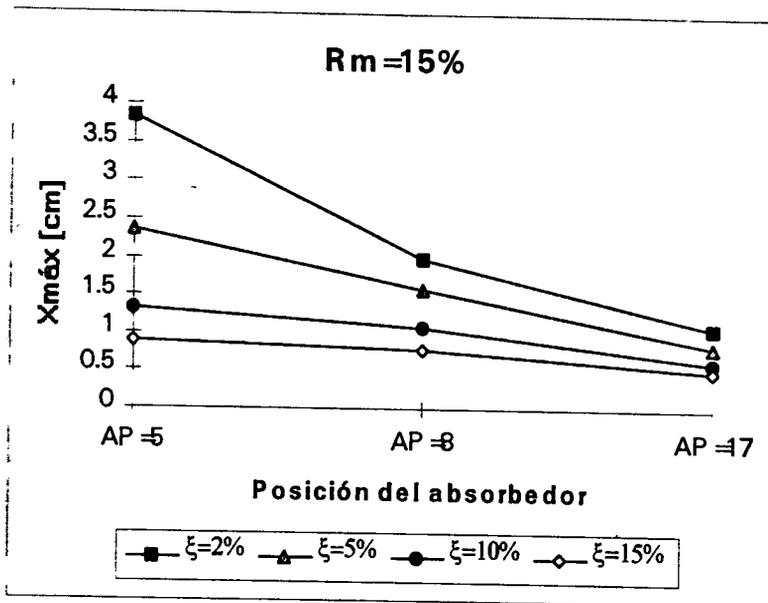
Gráfica 19



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 10%

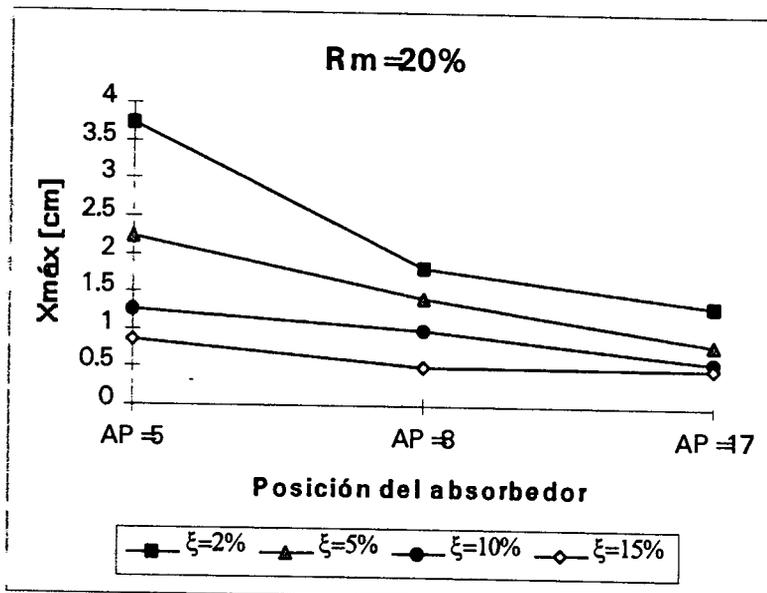
Gráfica 20

Desplazamientos máximos del sismo del 14 de septiembre de 1995 ($M=7.5$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 15%

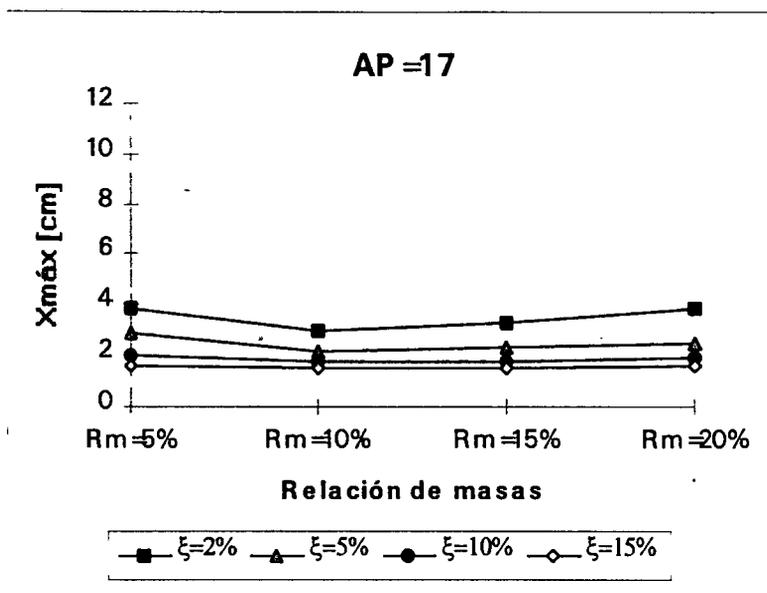
Gráfica 21



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 20%

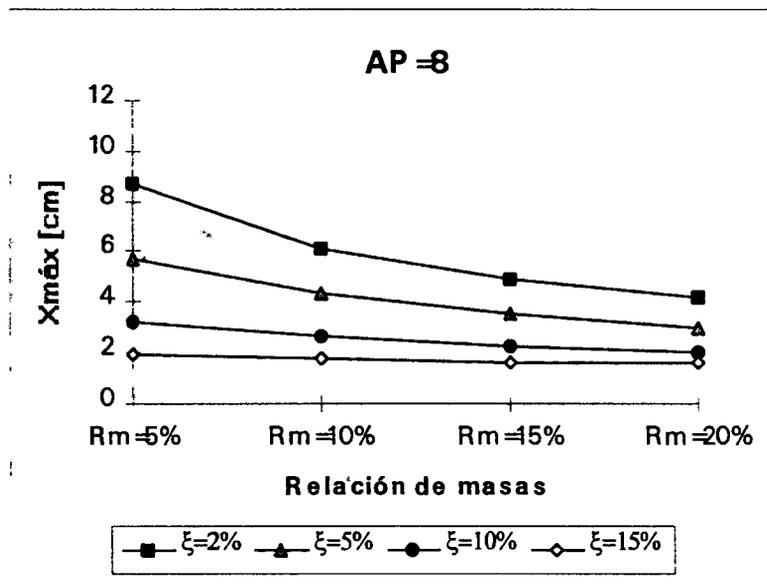
Gráfica 22

Desplazamientos máximos para el sismo del 24 de octubre de 1993 ($M=6.6$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 17avo. nivel

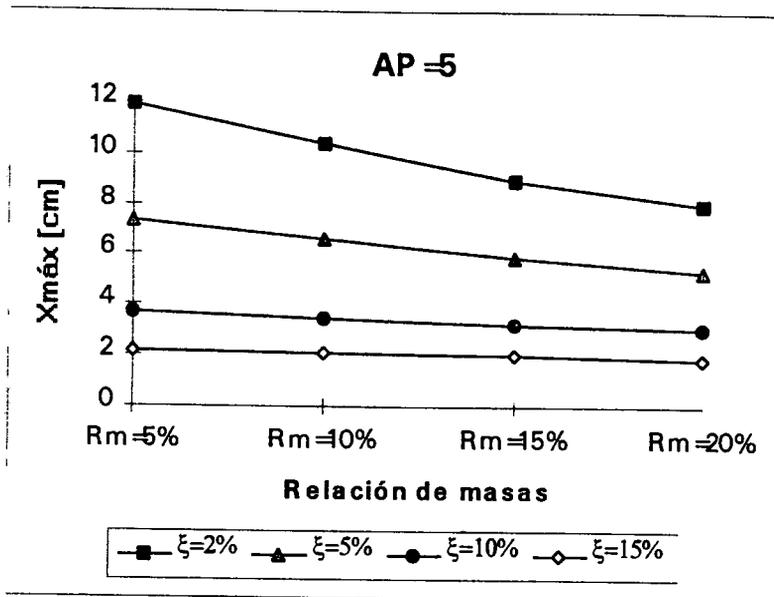
Gráfica 23



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 8avo. nivel

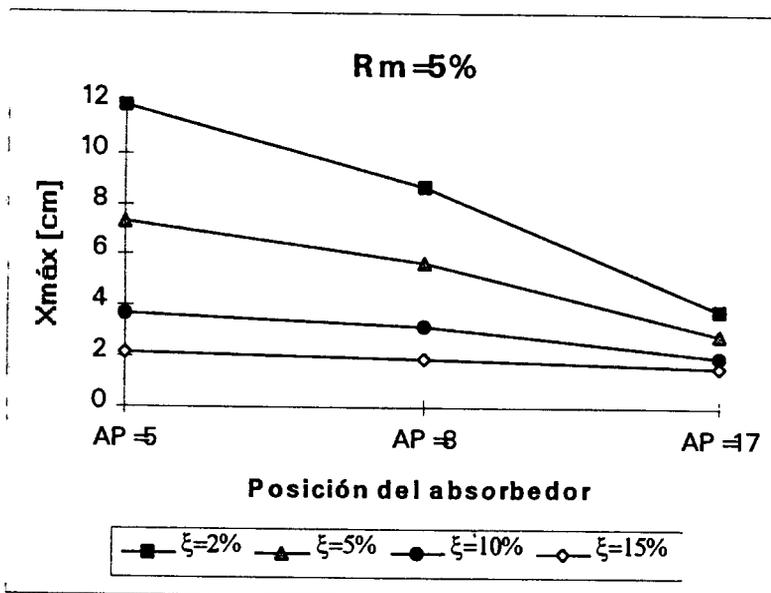
Gráfica 24

Desplazamientos máximos para el sismo del 24 de octubre de 1993 ($M=6.6$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 5to. nivel

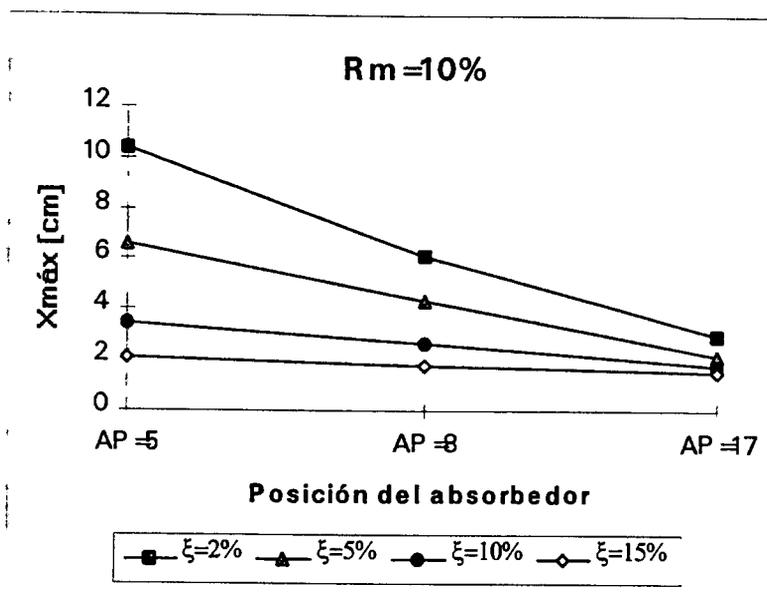
Gráfica 25



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 5%

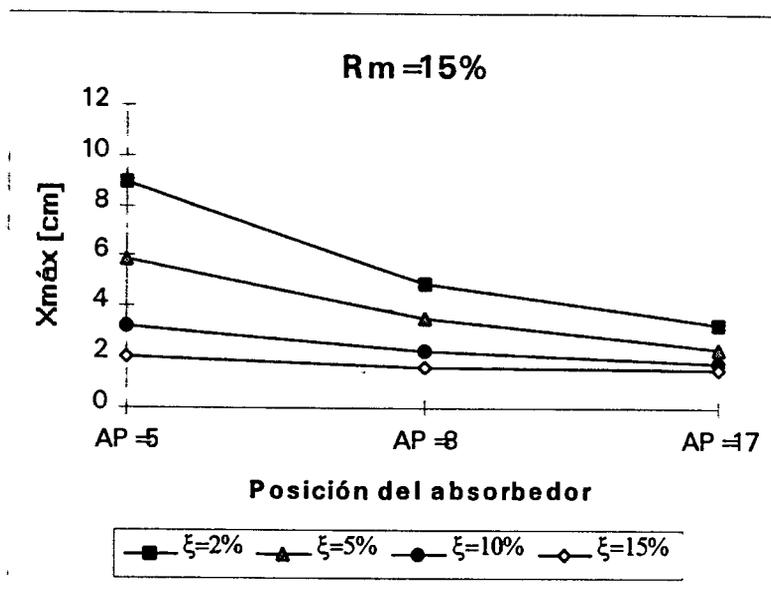
Gráfica 26

Desplazamientos máximos para el sismo del 24 de octubre de 1993 ($M=6.6$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 10%

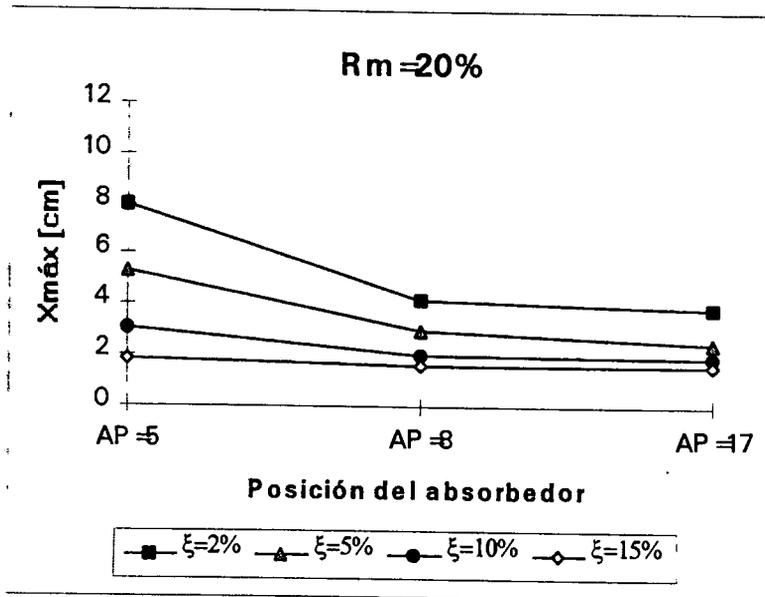
Gráfica 27



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 15%

Gráfica 28

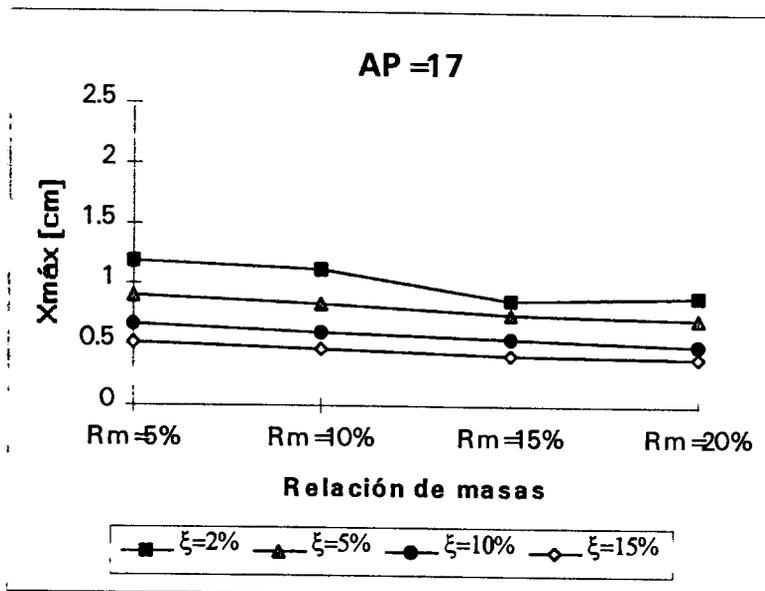
Desplazamientos máximos para el sismo del 24 de octubre de 1993 ($M=6.6$; registro: Acapulco)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 20%

Gráfica 29

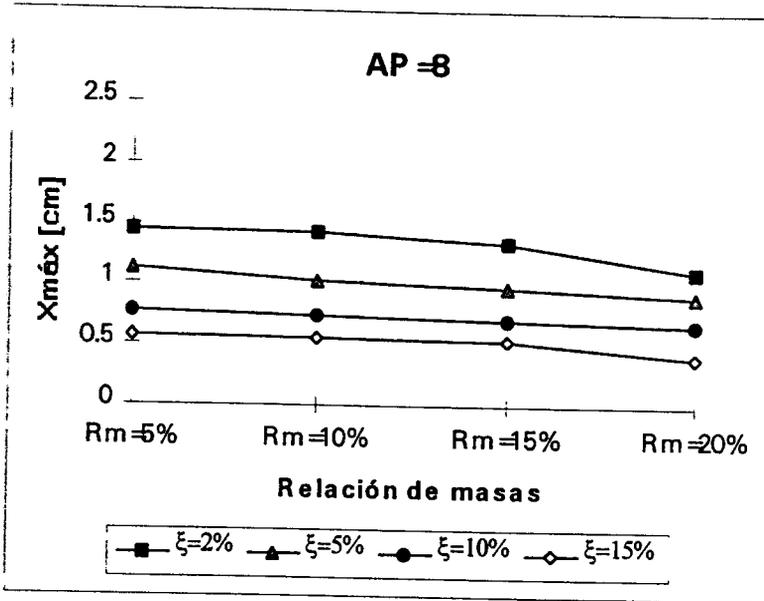
Desplazamientos máximos para el sismo del 15 de mayo de 1993 ($M=5.8$; registro: Aca.)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 17avo. nivel

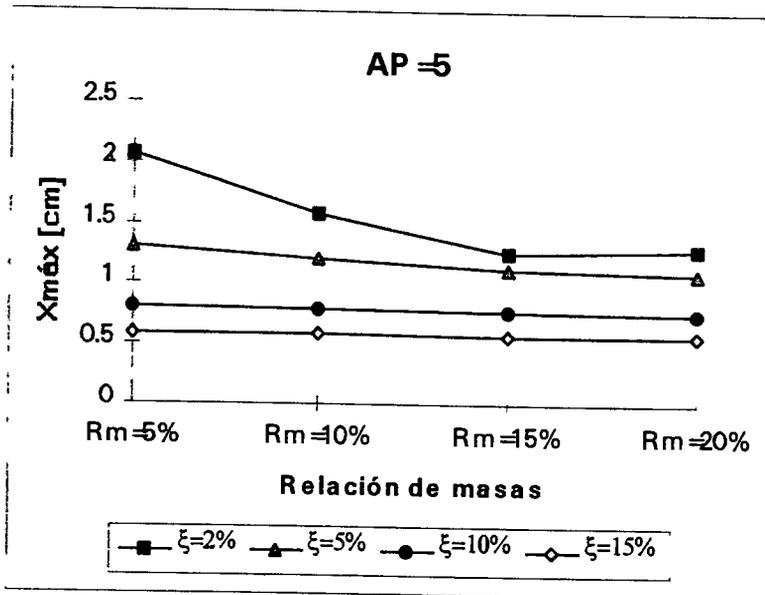
Gráfica 30

Desplazamientos máximos para el sismo del 15 de mayo de 1993 ($M=5.8$; registro: Aca.)



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 8vo. nivel

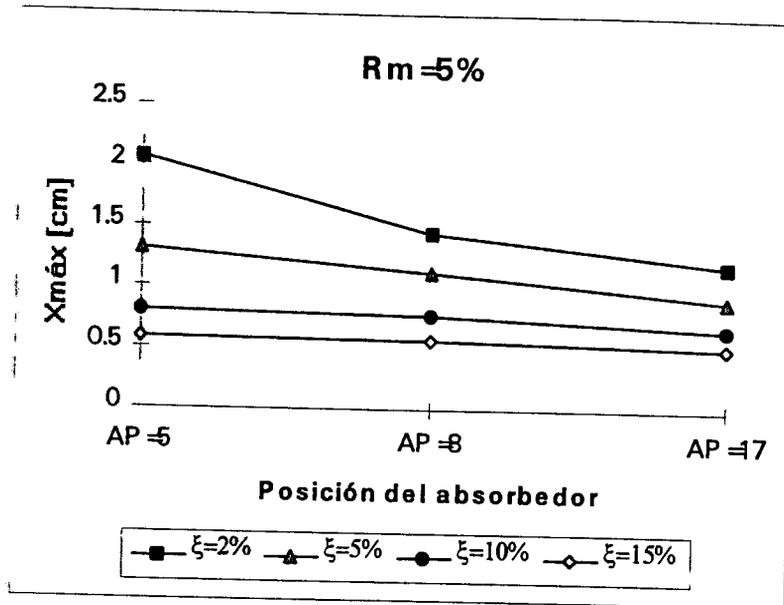
Gráfica 31



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 5to. nivel

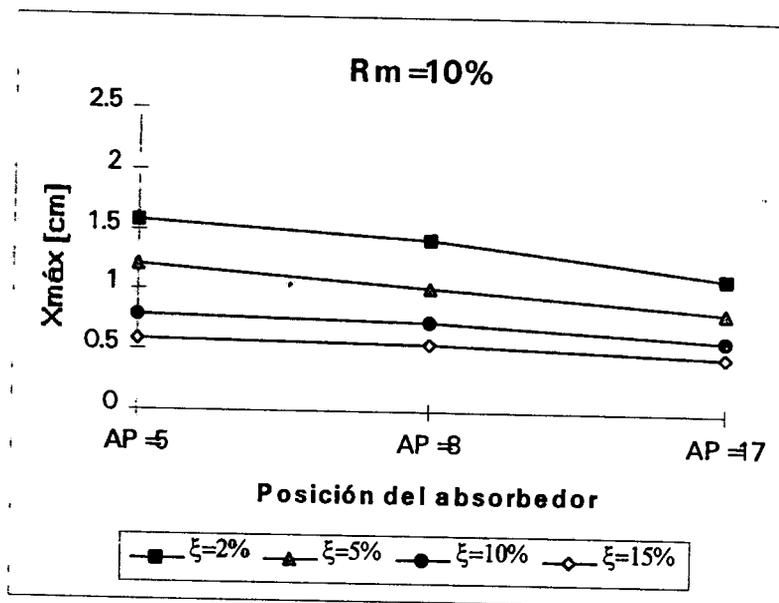
Gráfica 32

Desplazamientos máximos para el sismo del 15 de mayo de 1993 ($M=5.8$; registro: Aca.)



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 5%

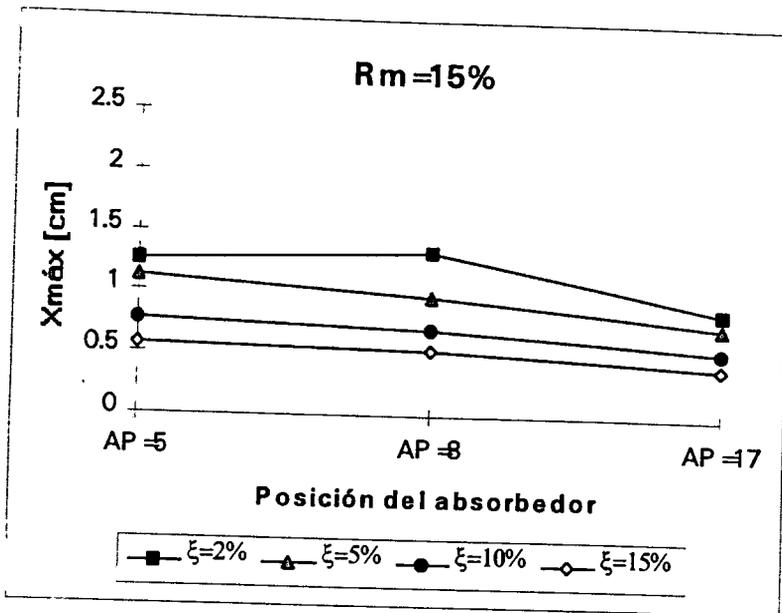
Gráfica 33



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 10%

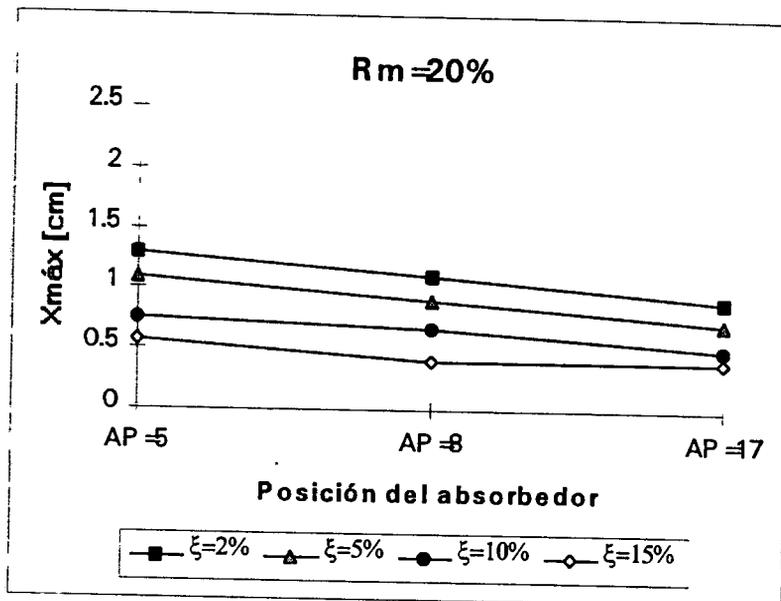
Gráfica 34

Desplazamientos máximos para el sismo del 15 de mayo de 1993 ($M=5.8$; registro: Aca.)



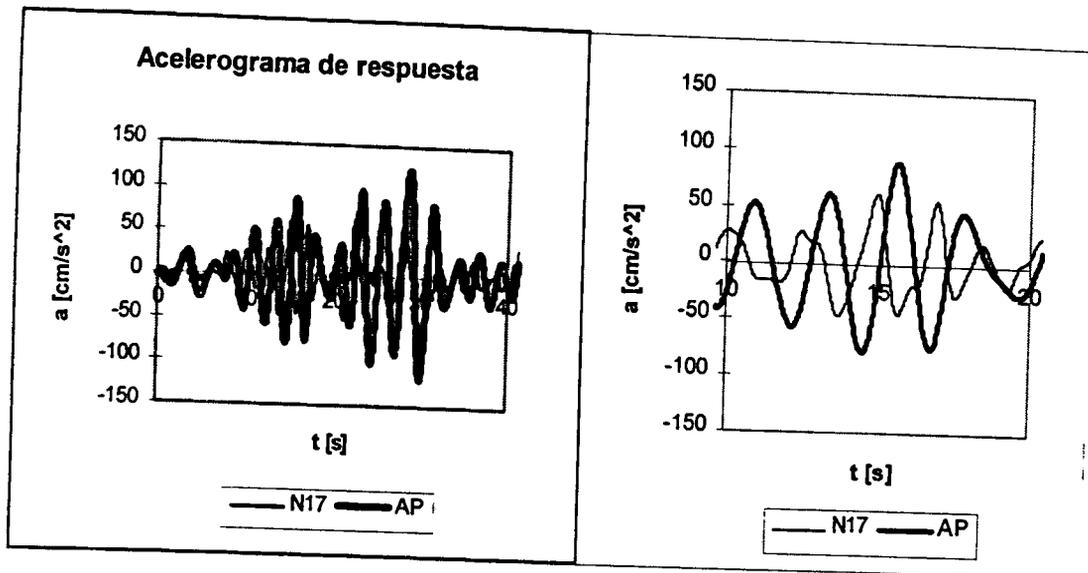
Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 15%

Gráfica 35



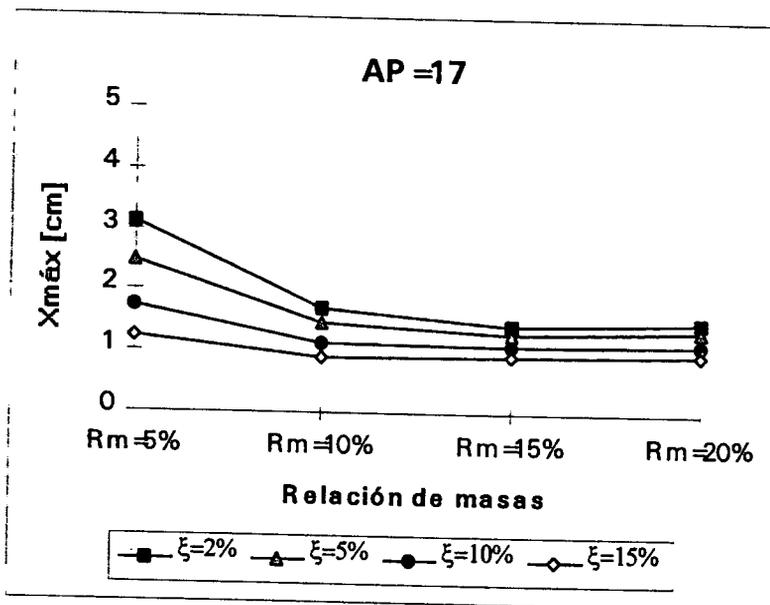
Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 20%

Gráfica 36



Gráfica 37

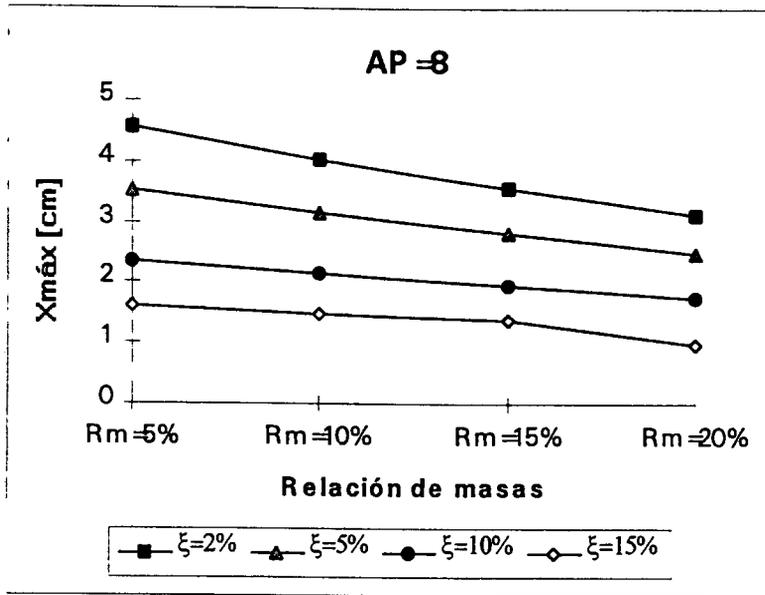
Desplazamientos máximos para la excitación senoidal



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 17avo. nivel

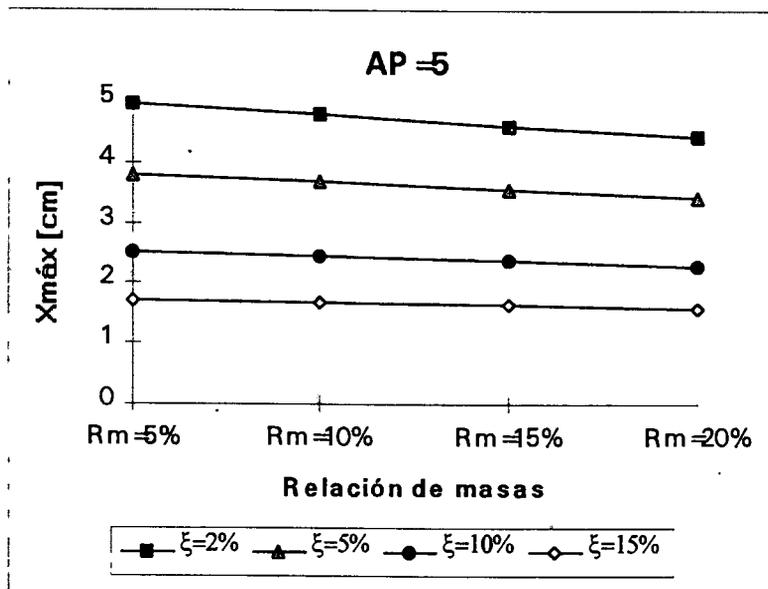
Gráfica 38

Desplazamientos máximos para la excitación senoidal



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 8avo. nivel

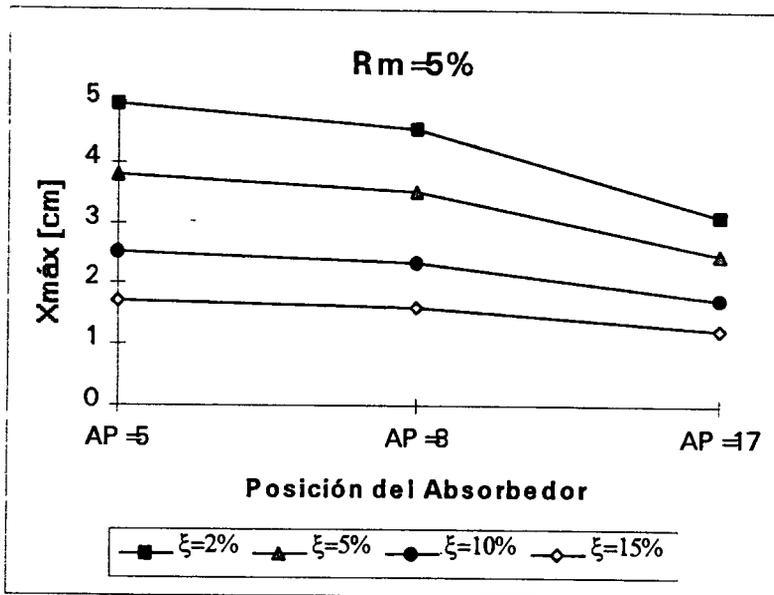
Gráfica 39



Respuesta del último nivel del edificio con absorbedor en el 5to. nivel

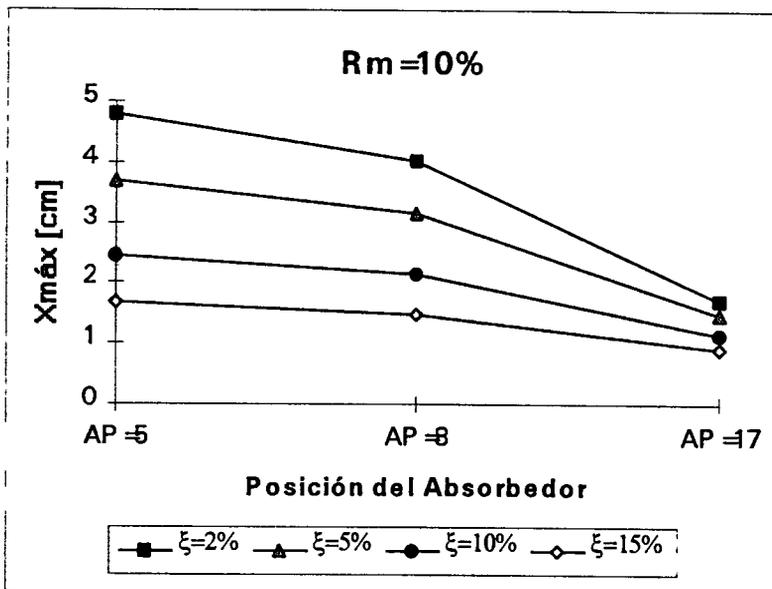
Gráfica 40

Desplazamientos máximos para la excitación senoidal



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 5%

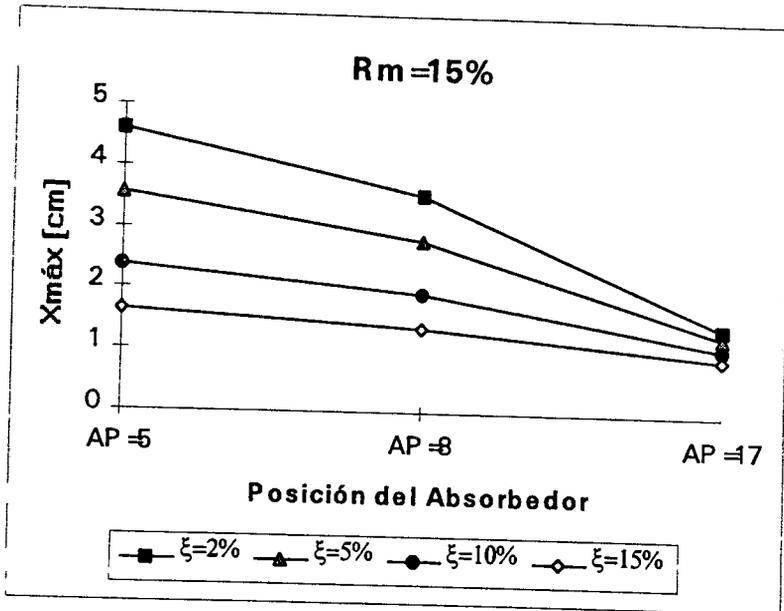
Gráfica 41



Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 10%

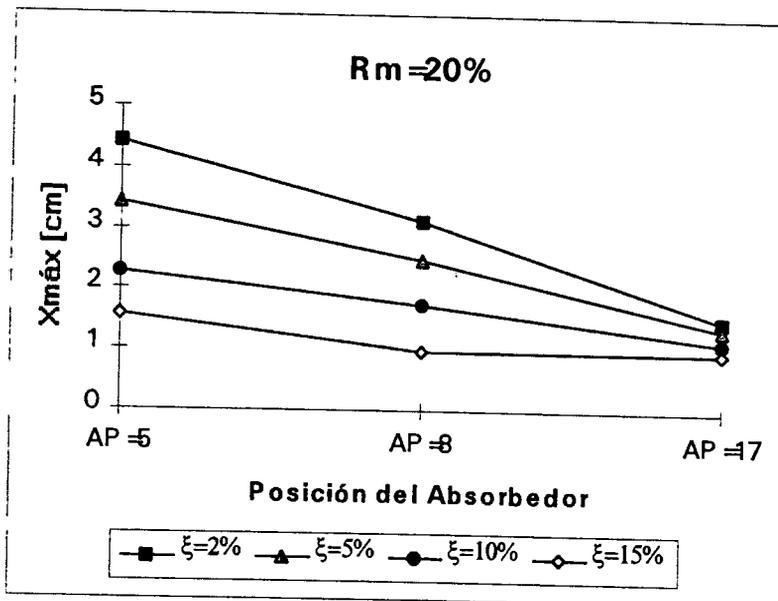
Gráfica 42

Desplazamientos máximos para la excitación senoidal



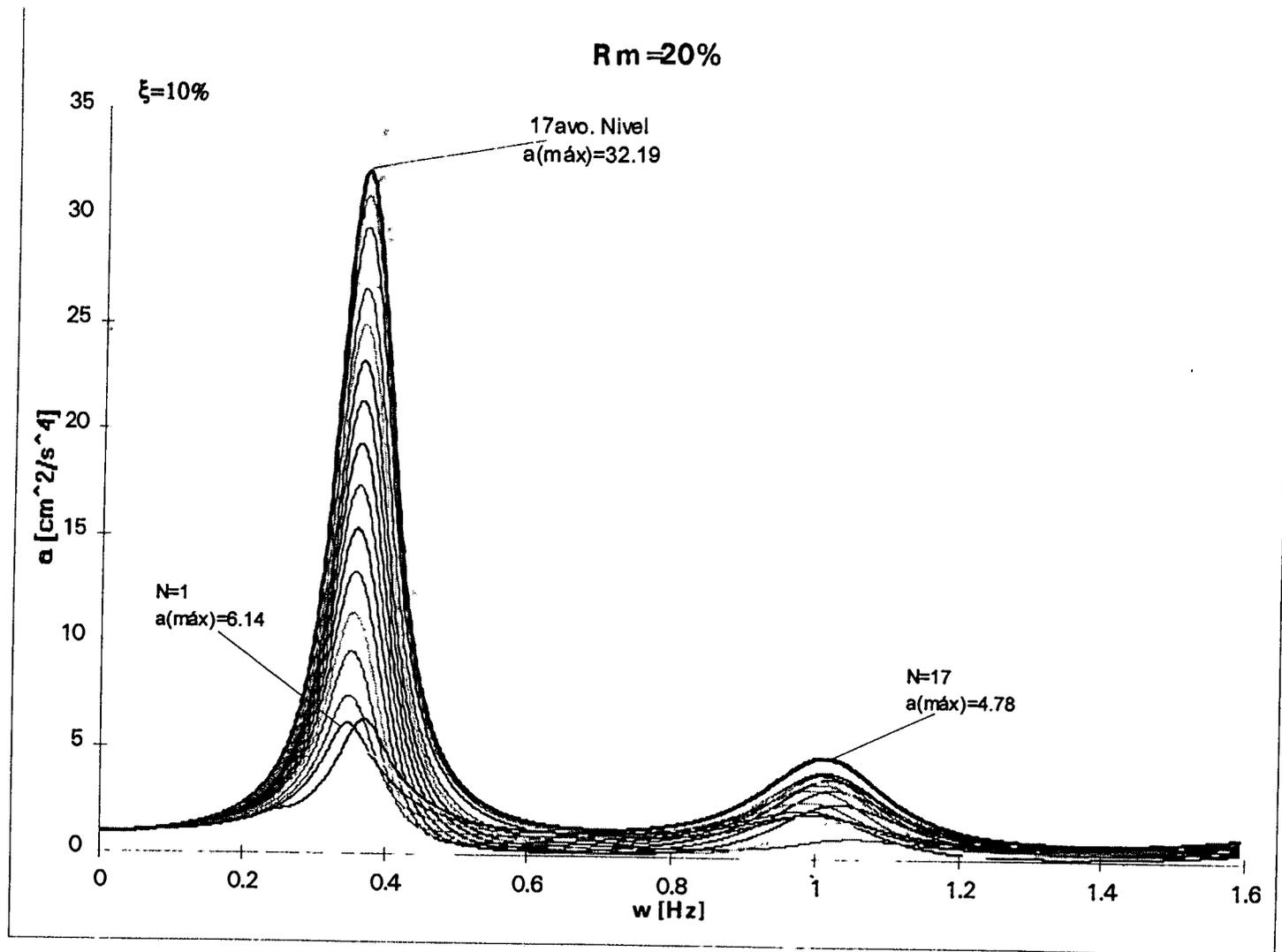
Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 15%

Gráfica 43

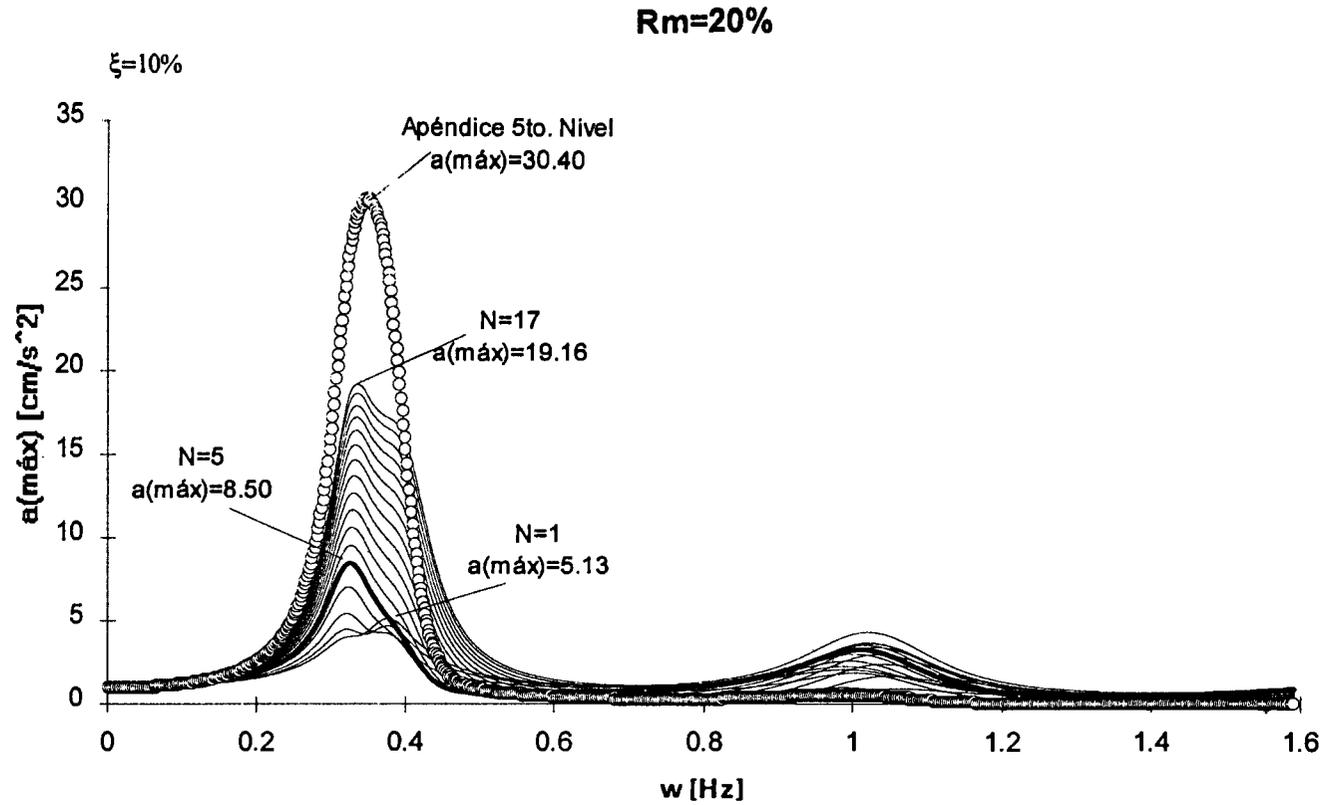


Respuesta del último nivel del edificio con relación de masas del 20%

Gráfica 44

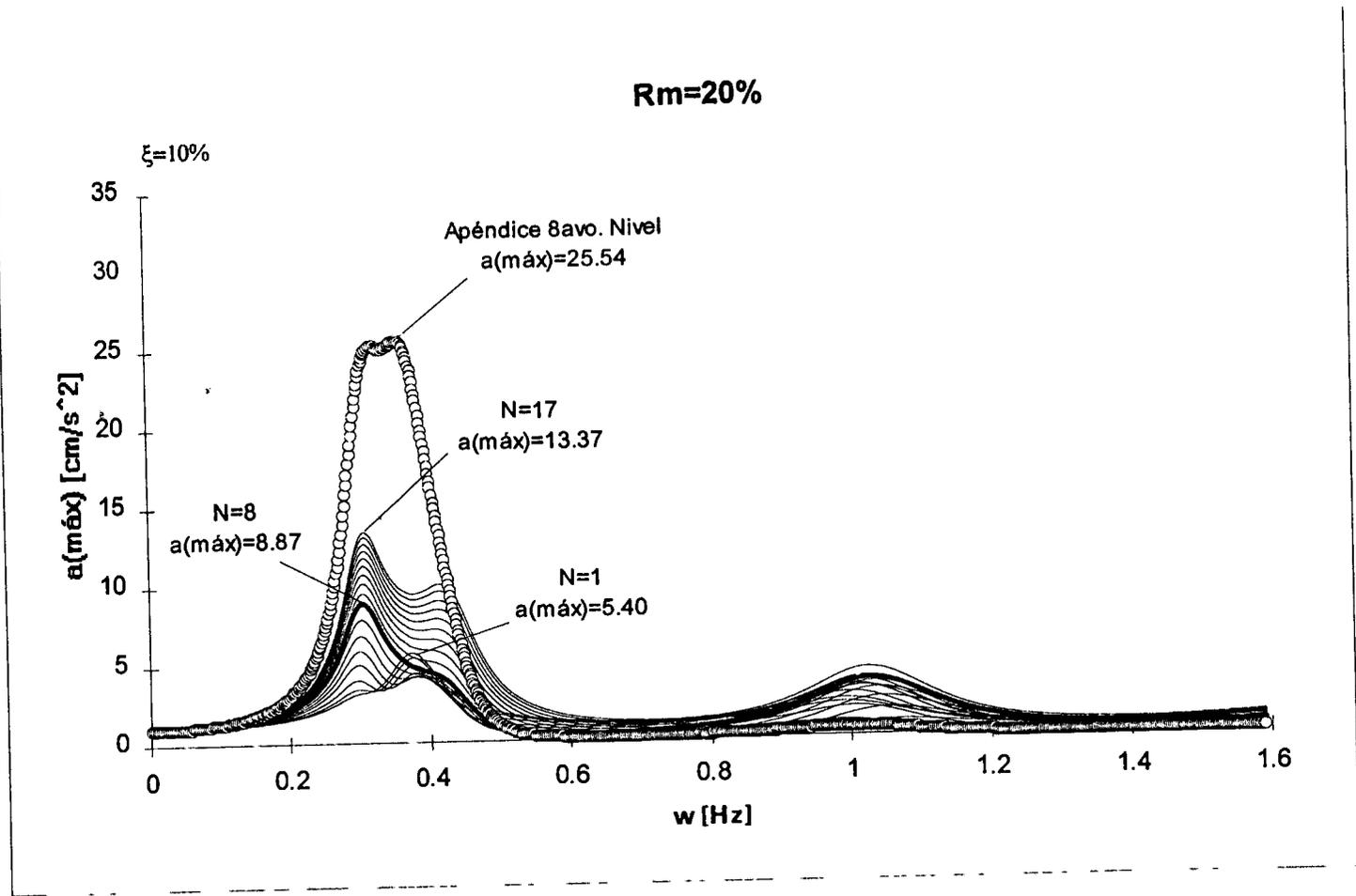


Espectro de respuesta del edificio sin absorbedor
Gráfica 45



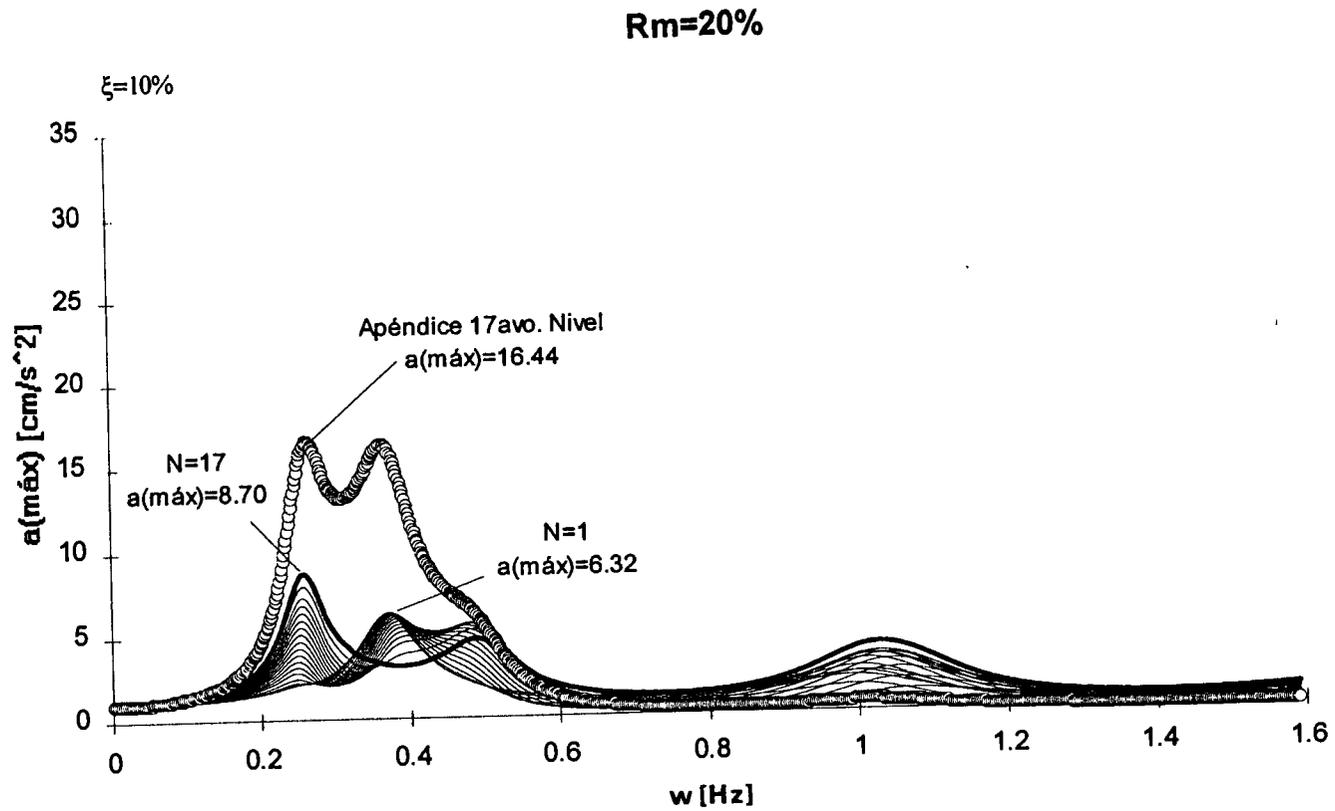
Espectro de respuesta del edificio con absorbedor en el 5to. nivel

Gráfica 46



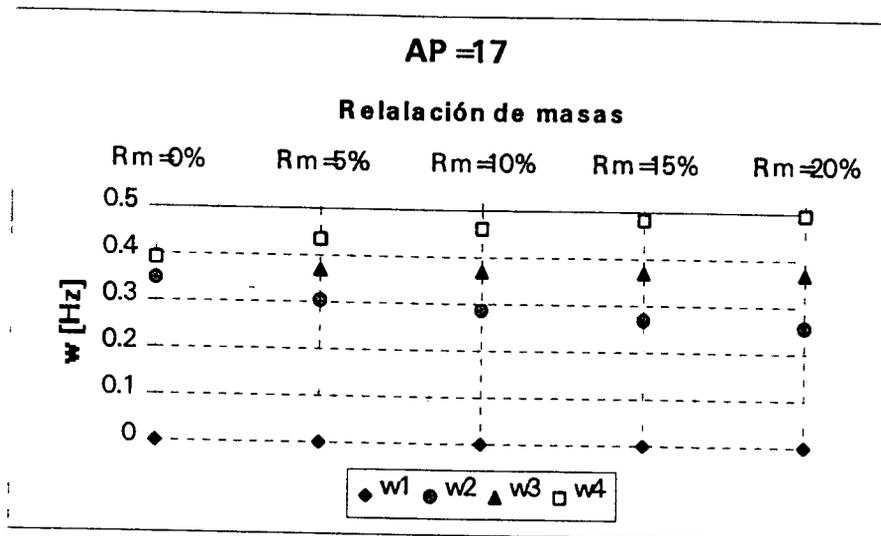
Spectro de respuesta del edificio con absorbedor en el 8avo. nivel

Gráfica 47



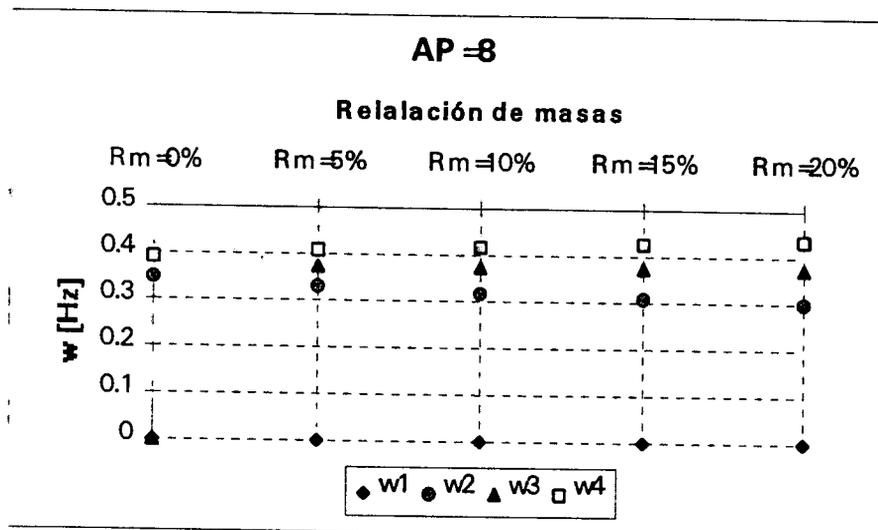
Espectro de respuesta del edificio con absorbedor en el 17avo. nivel

Gráfica 48



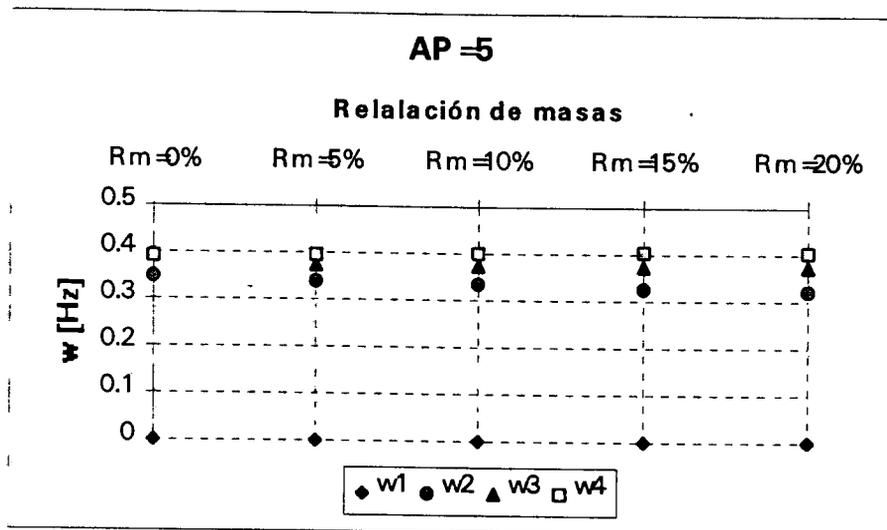
Frecuencias del sistema con absorbedor en el 17avo. nivel

Gráfica 49



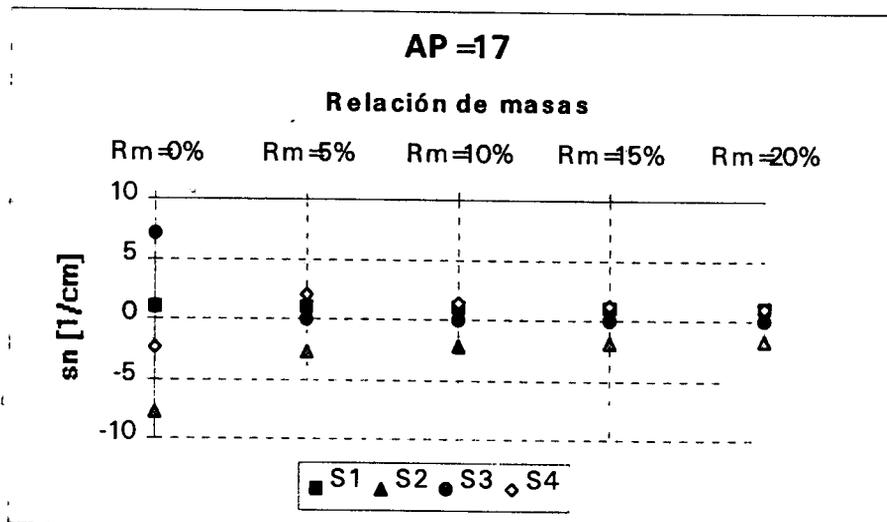
Frecuencias del sistema con absorbedor en el 8avo. nivel

Gráfica 50



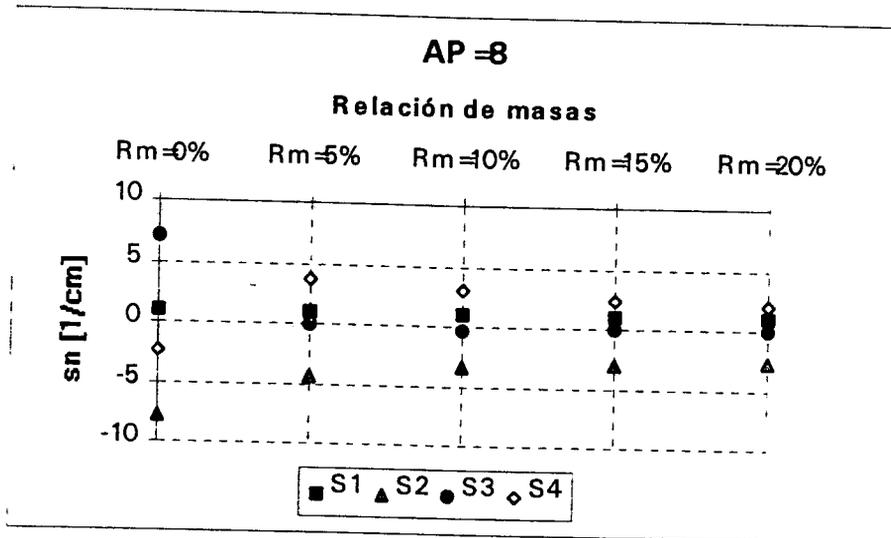
Frecuencias del sistema con absorbedor en el 5to. nivel

Gráfica 51



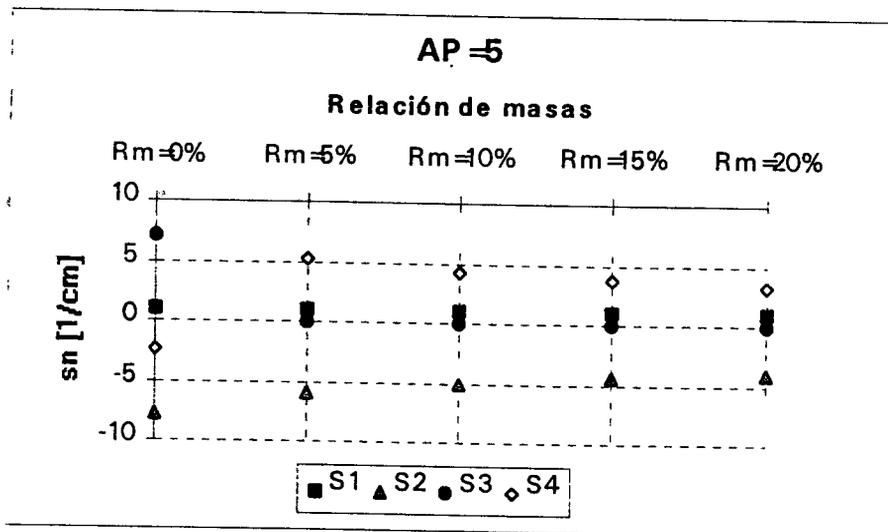
Coefficiente de carga del sistema con absorbedor en el 17avo. nivel

Gráfica 52



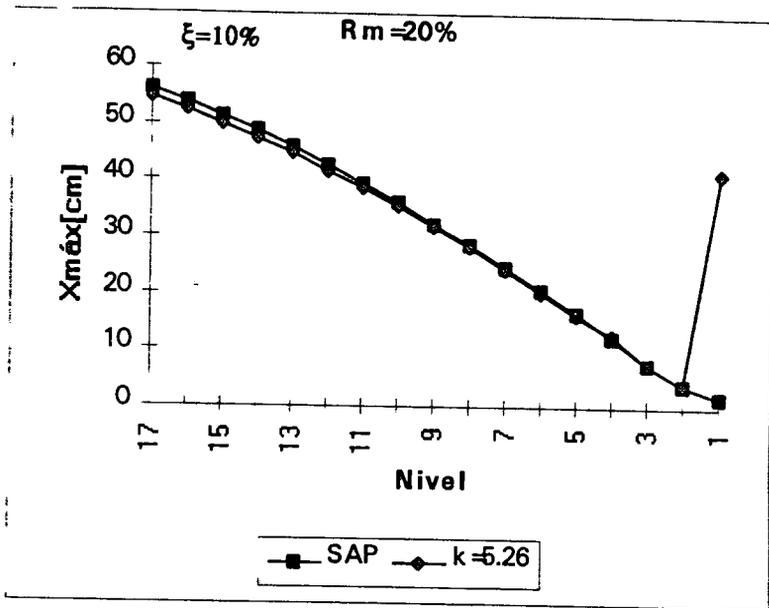
Coefficiente de carga del sistema con absorbador en el 8avo. nivel

Gráfica 53



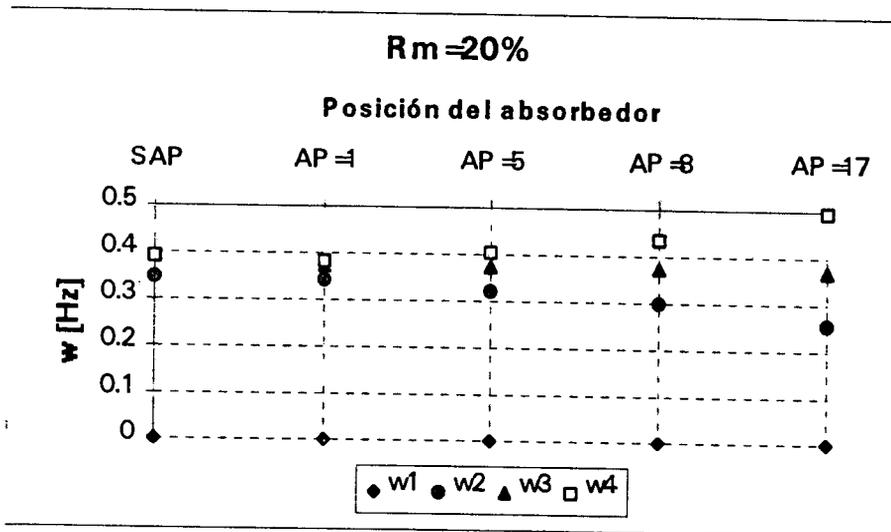
Coefficiente de carga del sistema con absorbador en el 5to. nivel

Gráfica 54



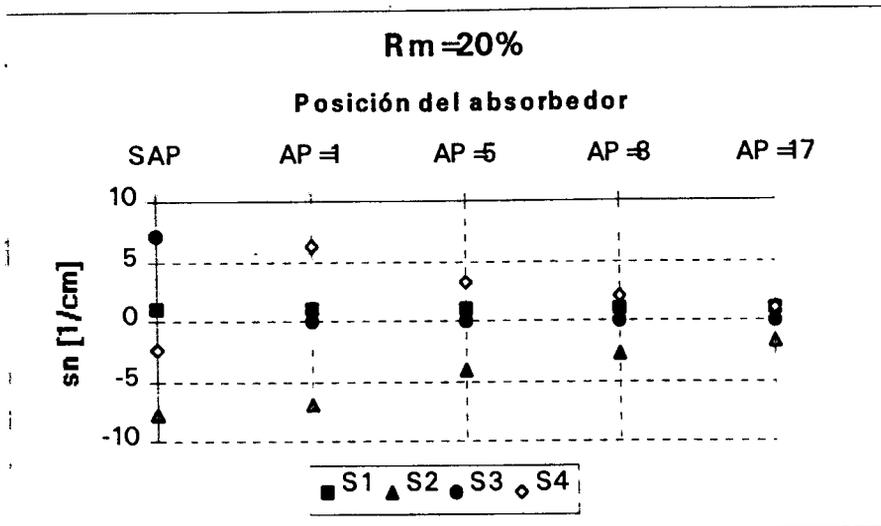
Reducción de la respuesta con absorbedor en el 1er. nivel

Gráfica 55



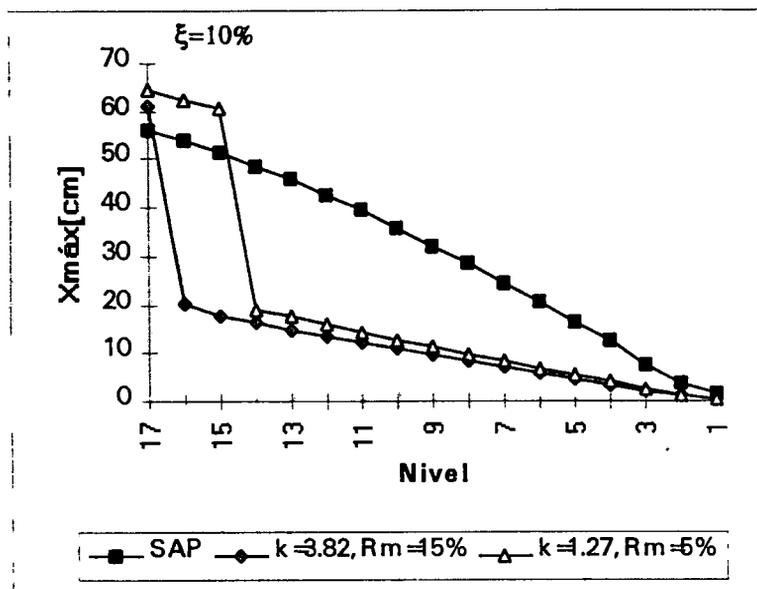
Frecuencias del sistema para las diferentes posiciones del absorbedor

Gráfica 56



**Coefficiente de carga para las diferentes
posiciones del absorbedor**

Gráfica 57



Reducción de la respuesta para un sistema con uno y tres apéndices

Gráfica 58

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con el nuevo método para el análisis dinámico de estructuras con absorbedores de vibración, se vislumbra un nuevo enfoque al brindado por el análisis tradicional. El sistema Semidefinido permite introducir en forma natural el movimiento en el Semiespacio. El análisis dinámico se hace sin proponer modelos equivalentes del sistema por lo que los resultados obtenidos tienen una mayor precisión.

Del concepto de antinodos se puede definir la ubicación del absorbedor, los análisis presentados en este trabajo, indican que los absorbedores de vibración pueden ubicarse en cualquier nivel del edificio con mayor o menor eficiencia en la reducción de la respuesta.

Las propiedades de inercia y rigidez óptimas del absorbedor, se obtienen cuando las formas modales del sistema desarrollan una forma modal adicional en la que el absorbedor esté "fuera de fase" con respecto a la masa que lo sujeta (o masas que lo sujetan, si se utilizan absorbedores múltiples) y con un máximo desplazamiento del absorbedor.

Las variables mas significativas de un sistema con absorbedor son

- a) Las frecuencias naturales. Debido a la presencia de "m" apéndices en el sistema las frecuencias naturales se incrementan en "m" logrando que la densidad de frecuencias se vea modificada, de tal manera que la participación de ellas dentro de una excitación sísmica disminuya.
- b) Formas modales. Están relacionadas directamente con las frecuencias naturales por lo que se incrementan en "m" desarrollando algunas formas llamadas "fuera de fase" cuya participación es de tal importancia que provocan una mayor participación del apéndice para lograr una reducción de la respuesta.
- c) Coeficiente de carga. Este coeficiente es un valor que relaciona las propiedades de inercia y desplazamientos determinando el grado de participación que tiene una forma modal en la respuesta total del sistema. Este valor se ve influenciado por otras características importantes como la relación de masas y la posición del absorbedor.

d) Relación de masas. En la manera en que ésta es mayor la reducción es mas significativa debido a que influye directamente a las frecuencias naturales del sistema por consiguiente a las formas modales y coeficiente de carga.

e) Porcentaje de amortiguamiento. En la manera en que éste es mayor la disipación de energía se incrementa de tal manera que se tiene una mayor reducción de los desplazamientos de la estructura.

f) Posición del absorbedor. Conforme el absorbedor este ubicado en niveles superiores la densidad de frecuencias y el coeficiente de carga se ven reducidos.

Con base a las característica anteriores, y debido a que éstas son independientes del tipo de señal inducida a un sistema con absorbedor de vibración óptimo, si se le induce cualquier tipo de excitación siempre existirá una reducción del desplazamiento máximo total de la estructura original.

Una de las mejores condiciones para lograr una máxima reducción de la respuesta se presenta cuando el porcentaje de la relación de masas es grande y ésta relación puede ser una limitante en aspectos estructurales y arquitectónicos, por lo que se propone distribuir ese peso en varios absorbedores ubicados en diferentes niveles de tal manera que se logre una reducción similar a la conseguida por un solo apéndice.

Los resultados obtenidos con el modelo Semidefinido "Estructura-Absorbedor Suelo Semiespacio", se contraponen en algunos casos a los obtenidos con modelos diferentes. En la mayoría de las investigaciones revisadas solo se considera el absorbedor de vibración colocado en la parte superior de la estructura, y sin embargo con el modelo presentado los resultados demuestran que el absorbedor puede colocarse en cualquier posición siempre y cuando se elija un antinodo de acuerdo a la frecuencia dominante de la excitación primaria y se calculen las propiedades de inercia y rigidez óptimas del absorbedor. Algunos modelos solamente obtienen reducción de la respuesta cuando el apéndice tiene relaciones pequeñas de masas, en el desarrollo de este trabajo se demuestra que a mayor relación de masas la reducción de la respuesta es mayor. Otra diferencia de gran importancia con los modelos anteriores es que estos aplican aceleraciones en todas las masas del sistema y en el modelo presentado solo se aplica la aceleración en el Semiespacio móvil. En el modelo Semidefinido se habla por primera vez de la influencia que tiene dentro del análisis dinámico las formas modales "en fase" y "fuera de fase" del

absorbedor con respecto a la masa que lo sostiene, además de la participación del coeficiente de carga. Este último siempre había sido ignorado debido a la adopción de sistemas empotrados en su base, lo cual impedía tomar en cuenta el coeficiente de carga S_n . Para un sistema empotrado el valor de S_n del Semiespacio es cero para cualquier "n".

La investigación desarrollada en esta tesis abarca únicamente el aspecto teórico, por lo que para tener una certeza de los resultados obtenidos se requiere realizar un modelo experimental que valide el modelo propuesto, y el cual ya está bajo investigación pero se deja como motivo de trabajos posteriores.

Debido a lo extenso del tema de absorbedores de vibración y al alcance de ésta tesis quedan aún muchas preguntas que responder al respecto, por lo que se propone continuar con el tema calculando respuestas para absorbedores ubicados en diferentes posiciones del sistema y en edificios de diferentes alturas.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- 1). Urrutia Galicia José Luis, "On the existence of covariant and contravariant modal forms of dynamic analysis", Canadian Society For Mechanical Engineering, Transactions (Canada), No. 16(2), pp.201-217,1992.
Urrutia Galicia, J. L. "Una introducción sobre la existencia de formas modales covariantes y contravariantes en el análisis dinámico", Sismodinámica. Revista internacional, México, 1992,pp.181-191.
- 2). Proyecto 5562 "Interacción estructura suelo semiespacio y absorbedores de vibración. una nueva alternativa", Instituto de Ingeniería, Coordinación de Mecánica Aplicada,UNAM, J. L. Urrutia, 1995-1996.
- 3). J. P. Den Hartog, "Mechanical Vibrations", 4th edn. McGraw-Hill, New York, 1956.
- 4). Gupta, Y. P., and Chandrasekaran, A. R. "Absorber System for Earthquake Excitations" Proc. 4WCEE, Vol. II, Sesión B3, Santiago de Chile 1969.
- 5). Masri, S. F., and Yang, L. L., "Earthquake Response Spectra System provided with Nonlinear Mass Dampers", Proc. 5WCEE, Vol. II, Sesión 8C, Rome, Italy, 1973
- 6). Paul H. Wirsching and Gary W. Campell, "Minimal Structural Response under Random Excitation using the Vibration absorber", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, pp. 303-312, 1974.
- 7). Kaynia, A. M., Veneziano, D., and Biggs, J. M., "Seismic Effectiveness of Tuned Mass Dampers", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 107, pp. 1465-1484, Aug. 1981.
- 8). Sladek, J. R., y Klingner, R. E., "Effect of Tuned-mass Dampers on Seismic Response", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, pp. 2004-2009, Aug. 1983.
- 9). Villaverde, Roberto, "Reduction in Seismic Response with Heavily-Damped Vibration Absorber", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 13, pp. 33-42,1985.

- 10). Daniel Quiun, Yoshikazu Yamada and Hirokazu Iemura, "Tuned Mass Dampers for Local Site Dependent Earthquake Ground Motions", School of Civil Engineering, Department of Civil Engineering, Kyoto University, Japan, 1987.
- 11). Hsiang-Chuan and Guan-Cheng Lin, "Optimum Tuned-Mass Dampers for minimizing Steady-State response of Support-Excited and Damped Systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 22, pp. 957-973, 1993.
- 12). Hsiang-Chuan Tsai, "Green's Function of Support-Excited Structures with Tuned-Mass Dampers derived by a Perturbation Method", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 22, pp. 975-990, 1993.
- 13). Alvarado Suárez, R. A., Ruiz Gómez, S. E., y Esteva, L., "Sobre la Respuesta de Sistemas Estructurales con Osciladores Resonantes Sujetos a Sismos de Banda Angosta", Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, pp. 559-564, Puerto Vallarta, Jal., México, 1993.
- 14). Aguiñiga, F., y Jara, J. M., "Reducción de Daños Sísmicos Mediante el uso de Osciladores Resonantes", Memoria del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, pp. 826-832, Puerto Vallarta, Jal., México, 1993.
- 15). Klasztorny, M., "Reduction of Steady-State Forced Vibration of Structures with Dynamic Absorber", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 24, pp. 1155-1172, 1995.
- 16). Hinkle, Rollard T., Morse, Ivan E. and Tse, Francis, "Mechanical Vibrations Theory and Applications", Allyn and Bacon, Inc., Boston, Massachusetts, segunda edición, 1978.
- 17). Urrutia Galicia José Luis, "Teoría General de Vibraciones Mecánicas", Apuntes de Clase, Instituto de Ingeniería UNAM, 1994.
- 18). Blevins Robert D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Robert Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1979.
- 19). Clough, R.W., and Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw Hill Book Co., Singapur, segunda edición, 1993.

- 20) Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, Inc., 1974.
- 21). Urrutia Galicia J. L., "Stresses in Internally Loaded Cylindrical Shells", M.A.Sc. thesis, University of Waterloo, Canadá, 1979.
- 22). Thomson, William T., "Theory of Vibration with Applications", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey, 1972.
- 23). Serrano Lizaloe Raúl, "Cálculo Tensorial para Ingenieros", Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, primera edición, 1994.
- 24). G. Zill Dennis, "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones", Grupo editorial Iberoamericano, México 1994.
- 25). Paz, M., "Structural Dyanamics Theory and Computation", Van Nostrand Reinhold Co., New York, tercera edición, 1991.
- 26). Soedel Werner, "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- 27). Fundación ICA, a.c., "Experiencias derivadas de los sismos de Septiembre de 1985", Limusa, México, 1988.
- 28). "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Sigma Editores, México, segunda edición, 1995.
- 29) Urrutia G., Arroyo M. y Vázquez C., "Soil-Structure-Half Space Model for the Dynamic Analysis of Structures", Por publicarse en las Memorias del XI Congreso Mundial de Ingeniería Sísmica, Acapulco 23-28 junio, México, 1996.
- 30) Demeneghi C., A., "Dinámica de Suelos", Apuntes de Clase, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1995

APÉNDICE A
NOMENCLATURA

NOMENCLATURA

A_n, B_n Coeficientes de Fourier

C_n, A_0 Coeficientes de Fourier

C Matriz de amortiguamiento

f^i Componentes contravariantes

f_n Componentes covariantes

$\|\tilde{F}\|$ Norma de la función o vector

K Matriz de Rigideces

Rm Relación de masas

M Matriz de masas

M_E Masa del Semiespacio

S_n Coeficiente de carga

T Periodo

x Desplazamiento

x_E Desplazamiento del Semiespacio

\dot{x} Velocidad

\ddot{x} Aceleración

- α, β Constantes de amortiguamiento proporcional
- γ_k Amortiguamiento subcrítico
- ξ_n Amortiguamiento viscoso
- $\eta_n(t)$ Factor de participación covariante
- $\eta^n(t)$ Factor de participación contravariante
- $\tilde{\phi}_n$ Formas modales covariantes
- $\tilde{\phi}^n$ Formas modales contravariantes
- Φ_n Ángulo de fase
- ω_k Valor de la función evaluada en ϕ_k
- ω_n Frecuencia natural del sistema para el n-ésimo modo de vibrar

APÉNDICE B

NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

NOCIONES DE DINÁMICA ESTRUCTURAL

B.1 CONCEPTOS GENERALES. “*Dinámica estructural*” es el estudio de las vibraciones en las estructuras, que resultan de la aplicación de fuerzas y cargas que varían con el tiempo. Sin embargo, en la mayoría de los casos la rapidez de variación de la carga es suficientemente lenta, de modo que se desprecia el efecto dinámico, y las cargas pueden considerarse como estáticas. Ciertos tipos de estructuras requieren una consideración especial en relación con el comportamiento dinámico. Cualquier estructura que soporta cargas móviles, por ejemplo: **los puentes, las traves de grúas viajeras, y las estructuras diseñadas para soportar maquinaria giratoria** necesitan diseñarse de tal manera que se hagan mínimos, o por lo menos aceptables, los efectos de la vibración. Otras situaciones en las que los efectos dinámicos pueden influir en el diseño estructural incluyen fuerzas de viento no permanentes sobre los edificios, de impacto y, por supuesto, de sismos.

El estudio del comportamiento dinámico de las estructuras se basa en el análisis de las características **desplazamiento-tiempo**, pero antes necesitamos definir ciertos términos¹⁹.

AMPLITUD.- es el desplazamiento máximo con respecto a la posición de equilibrio.

FRECUENCIA.- es el número de vibraciones en la unidad de tiempo generalmente está dada en ciclos/seg, (Hertz).

FRECUENCIA NATURAL.- es la velocidad angular a la cual una estructura tiende a vibrar una vez puesta en vibración libre. Una estructura puede tener varias frecuencias naturales. Se define en términos de ciclos por segundo o radianes por segundo.

VIBRACIÓN FORZADA.- es la vibración producida por una fuerza perturbadora externa que depende del tiempo.

VIBRACIONES LIBRES.- toma lugar cuando el sistema oscila bajo la acción de fuerzas inerciales inherentes en el sistema propio, y no existen fuerzas externas. El sistema bajo vibración libre puede vibrar en una o más de sus frecuencias naturales, las cuales son propias de sistemas dinámicos y dependen de la distribución de sus masas y rigideces.

VIBRACIÓN TRANSITORIA.- Cuando un sistema dinámico es excitado por una súbita periódica o no periódica excitación $F(t)$, la respuesta inicial correspondiente se denomina **respuesta transitoria**, puesto que generalmente tienden a desaparecer con el tiempo, no se producen oscilaciones estacionarias. Tales oscilaciones tienen lugar a las frecuencias naturales del sistema con la magnitud variando en una forma que depende del tipo de excitación.

VIBRACIÓN NO AMORTIGUADA.- teóricamente el movimiento vibratorio puede continuar, con la misma amplitud, indefinidamente en ausencia de agentes disipativos.

VIBRACIÓN AMORTIGUADA.- prácticamente, siempre existen agentes disipativos generadores de fuerzas que se oponen al movimiento, por lo que el movimiento vibratorio desarrollado por una masa no tiene la misma amplitud de vibración a lo largo del tiempo, volviendo finalmente a su estado de reposo inicial.

AMORTIGUAMIENTO.- es la reducción progresiva en la amplitud de la vibración debida a las siguientes causas:

- a). Fricción molecular interna,
- b). Pérdida de energía asociada a la fricción debida al deslizamiento en juntas, y
- c). Resistencia al movimiento proporcionada por el aire u otro fluido (arrastre).

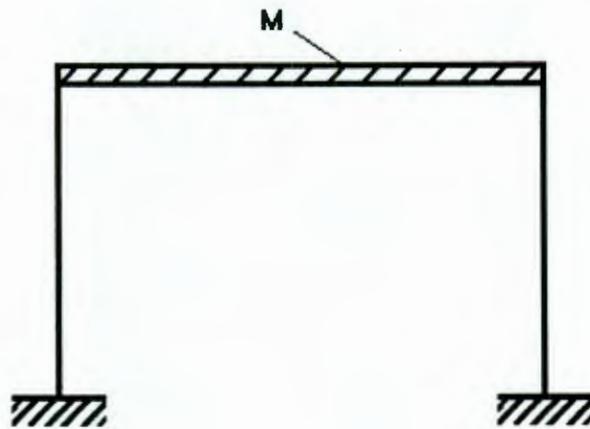
El tipo de amortiguamiento usualmente considerado en las vibraciones estructurales se denomina "**amortiguamiento viscoso**", en el cual la fuerza que resiste el movimiento es proporcional a la velocidad. Se sabe que este tipo de amortiguamiento representa adecuadamente la resistencia al movimiento proporcionada por el aire que rodea un cuerpo que se mueve a baja velocidad y también por la fricción molecular interna.

GRADOS DE LIBERTAD.- son los desplazamientos independientes o coordenadas necesarias para definir completamente el estado deformado de la estructura en cualquier instante. Cuando una sola coordenada es suficiente para definir la posición de cualquier parte de la estructura, entonces ésta tiene modelo de un **sólo grado de libertad**. Las fuerzas de inercia que actúan en una estructura vibratoria se encuentran a partir de la **Segunda Ley de Newton**:

$$\text{Fuerza} = \text{Masa} \times \text{Aceleración}$$

Generalmente la masa de una estructura está distribuida de modo que la mayoría de estas tiene un número infinito de grados de libertad.

En estructuras de “*edificios*”, como las de la fig. b.1, la mayor parte de la masa total estará concentrada en los pisos del edificio. Bajo estas circunstancias y con algunas hipótesis de simplificación razonable con respecto a las propiedades estructurales de los miembros, pueden obtenerse muy buenas soluciones a los problemas de vibraciones estructurales.



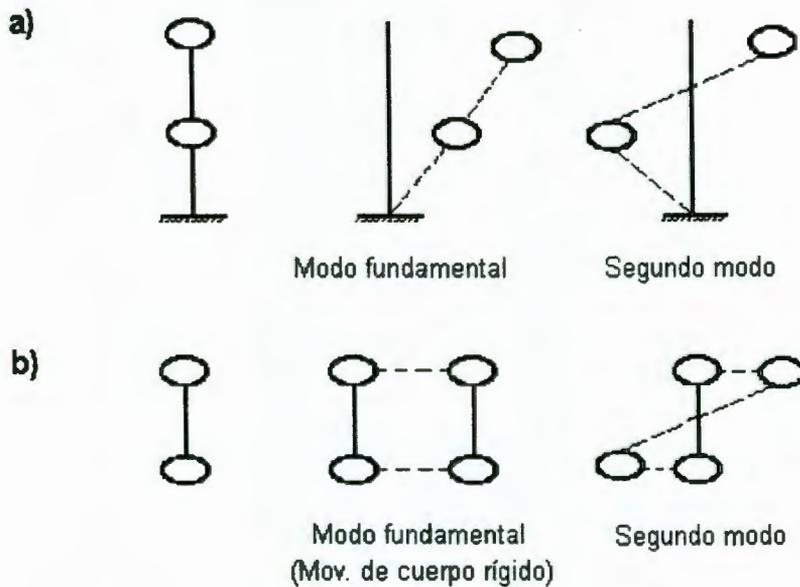
Representación de una masa distribuida y concentrada

fig. b.1

FORMAS MODALES (MODO NATURAL) .- Es la configuración del sistema cuando cada punto al que ha sido asignada una masa, experimenta un movimiento armónico de la misma frecuencia, pasando simultáneamente por la posición de equilibrio. A la forma modal con más baja frecuencia natural de un sistema de “n” grados de libertad se le conoce como modo fundamental de vibración.

A cada una de las frecuencias naturales de oscilación del sistema se le asocia un modo natural de oscilación. Un sistema con un número infinito de grados de libertad como lo son los sistemas continuos (vigas, placas, cascarones, etc.) tienen también un número infinito de modos naturales de oscilación.

CONFIGURACION MODAL



Sistema de dos grados de libertad

Modos naturales: a) sistema empotrado y libre; b) sistema libre-libre

fig. b.2

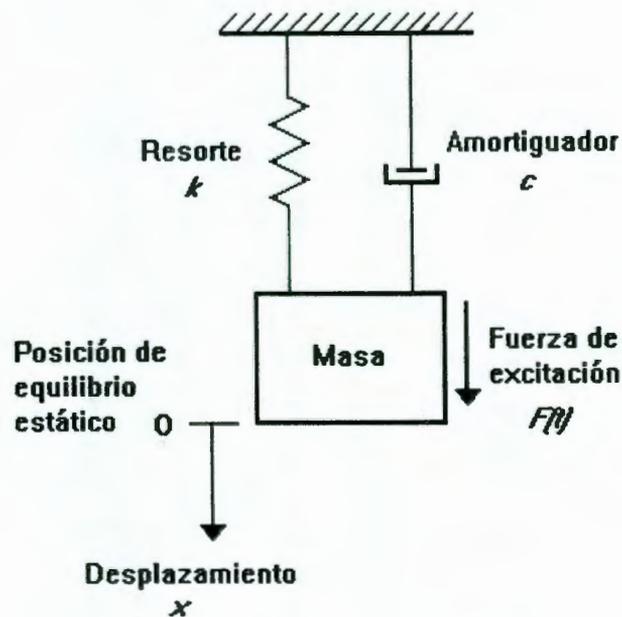
SISTEMA SEMIDEFINIDO¹⁶ .- Un caso especial de importancia práctica ocurre cuando una raíz de la ecuación de frecuencias es cero. Cuando una frecuencia natural es cero, no hay movimiento relativo en el sistema. Entonces el sistema se mueve como cuerpo rígido y se conoce como semidefinido.

B.2 SISTEMAS VIBRATORIOS.²² El tema de vibración está relacionado con el movimiento oscilatorio de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es una combinación de materia la cual posee masa, y cuyas partes son capaces de tener movimiento relativo restringido por conexiones elásticas. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibración.

²² Thomson, William T., "Theory of Vibration with Applications", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey, 1972.

Los elementos que constituyen un sistema vibratorio son ilustrados en la fig. b.3. Los elementos idealizados son llamados:

1. Masa
2. Resorte
3. Amortiguador
4. Fuerza de excitación



Elementos de un sistema vibratorio

fig. b.3

Los primeros tres elementos describen el sistema físico. La masa (m) es considerada como un cuerpo rígido, que vibra y que puede amplificar o perder la energía cinética de acuerdo con la frecuencia de vibración del cuerpo. De la Segunda Ley de Newton, el producto de la masa por su aceleración es igual a la fuerza aplicada a la masa, y la aceleración toma lugar en la dirección de la fuerza.

El resorte (k) posee elasticidad. La fuerza del resorte existe si el resorte es deformado, ya sea en extensión o en compresión. Por tanto, la fuerza del resorte existe solo si hay un desplazamiento relativo entre los dos extremos del resorte. Un resorte lineal es aquel que obedece

a la **Ley de Hooke**, la cual expresa, que la fuerza del resorte es proporcional a la deformación del resorte. La constante de proporcionalidad, tiene unidades de fuerza por unidad de deformación, y es llamada **rigidez que es una k constante del resorte**.

El amortiguador (c) no tiene masa ni elasticidad. La fuerza de amortiguamiento existe solamente si hay movimiento relativo entre los extremos del amortiguador.

AMORTIGUAMIENTO CRITICO.- es difícil obtener la magnitud del coeficiente c , sin embargo es común introducir en la teoría de vibración el concepto de amortiguamiento crítico C_{cr} . El amortiguamiento crítico es la cantidad de amortiguamiento que elimina completamente la vibración y se representa por:

$$C_{cr} = 2\sqrt{KM}$$

En donde K y M , son la rigidez y la masa del sistema respectivamente.

Los sistemas vibratorios están sujetos a amortiguamiento de algún grado porque la energía es disipada por fricción. Si el amortiguamiento es pequeño, tendrá poca influencia en las frecuencias naturales del sistema, y entonces el cálculo para las frecuencias naturales es generalmente hecho con bases no amortiguadas. El amortiguamiento es de gran importancia para limitar la amplitud de oscilación en la condición especial de resonancia.

RESONANCIA.- cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es forzado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si la frecuencia de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema se encuentra una condición de resonancia, pudiendo resultar grandes oscilaciones.

Una vez definidos los conceptos anteriores se introduce ahora de otro elemento que forma parte de un sistema vibratorio.

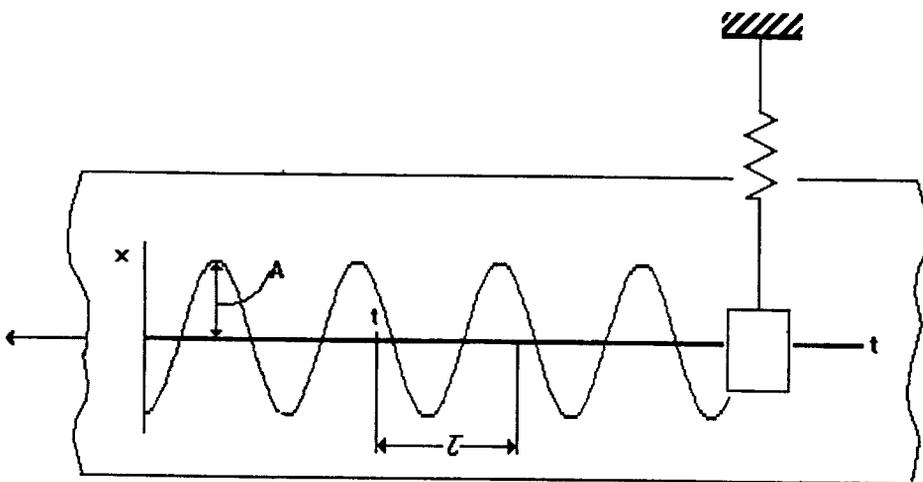
Dicho elemento es la **fuerza excitadora**, que es el medio por lo cual la energía entra al sistema. La fuerza excitadora puede ser aplicada a la masa y/o un movimiento excitador aplicado al amortiguamiento y al resorte. Una fuerza de excitación es aplicada a la masa m en la fig. b.3. La excitación varía en concordancia con una función prescrita de tiempo.

B.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO.¹⁹ El movimiento oscilatorio puede repetirse a sí mismo periódicamente, como en el caso de un balancín de reloj, o desplegar una considerable irregularidad, como en el caso de movimientos sísmicos. Cuando el movimiento se repite a intervalos de tiempo τ , se le llama *periódico*. El tiempo de repetición τ es el período de la oscilación y su recíproco, $f=1/\tau$ es la *frecuencia*. Si se designa el movimiento por $x(t)$, todo movimiento periódico debe satisfacer la relación

$$x(t)=x(t+\tau)$$

El movimiento periódico más simple es el movimiento armónico. Puede ilustrarse por medio de una masa suspendida de un resorte liviano, como se muestra en la fig. b.4. Si la masa se desplaza de su posición de reposo y se libera, oscilará hacia arriba y hacia abajo, el movimiento registrado puede expresarse por medio de la ecuación

$$x = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad (\text{b. 1})$$

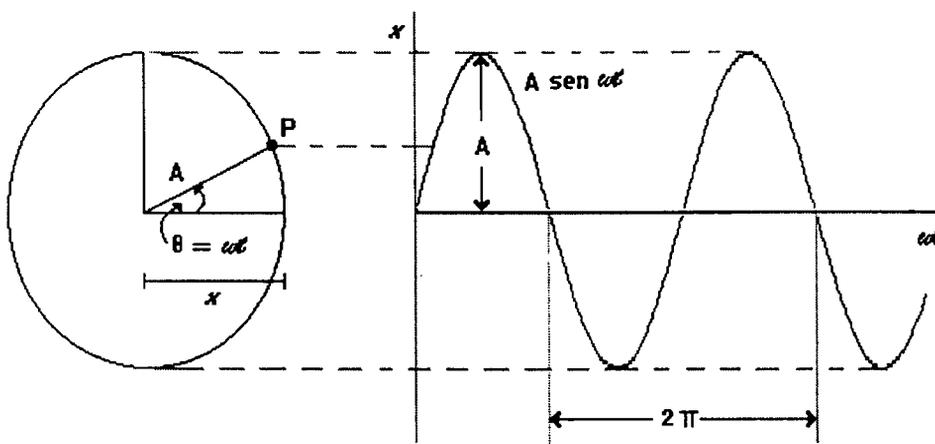


Registro de un movimiento armónico

fig. b.4

en donde A es la amplitud de la oscilación, medida desde la posición de equilibrio de la masa y τ es el período. El movimiento se repite cuando $t = t + \tau$. Frecuentemente se representa el movimiento armónico como la proyección sobre una línea recta, de un punto que se mueve en una circunferencia a velocidad constante, como se muestra en la fig. b.5. Si ω es la velocidad angular de línea OP , el desplazamiento X puede escribirse como

$$X = A \text{ sen}(\omega t) \tag{b. 2}$$



Movimiento armónico como proyección de un punto que se mueve en una circunferencia
fig. b.5

La cantidad ω está generalmente en radianes por segundo y se le denomina **frecuencia circular**. Como el movimiento se repite cada 2π radianes, se tiene

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f \tag{b. 3}$$

en donde τ y f son el periodo y la frecuencia del movimiento armónico, usualmente medidos en segundos y ciclos por segundo, respectivamente.

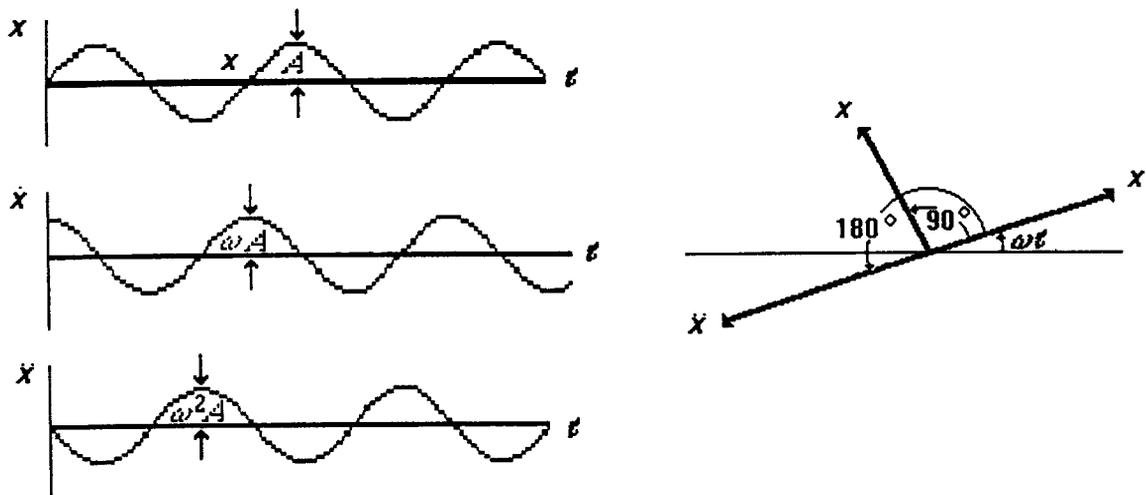
La velocidad y aceleración del movimiento armónico puede simplemente determinarse por la diferenciación de la ecuación b.2. Usando el punto para representar a la derivada con respecto al tiempo, se puede demostrar lo siguiente²²

$$\dot{X} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(b. 4)

$$\ddot{X} = -\omega^2 A \sin \omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

Así, la velocidad y la aceleración son también armónicas con la misma frecuencia de oscilación pero aventajan al desplazamiento en $\pi/2$ y π radianes, respectivamente. La fig. b.6 muestra la variación de tiempo y la relación de fase entre desplazamiento, velocidad y aceleración en el movimiento armónico.



En el movimiento armónico, la velocidad y aceleración están retrasadas al desplazamiento entre $\pi/2$ y π

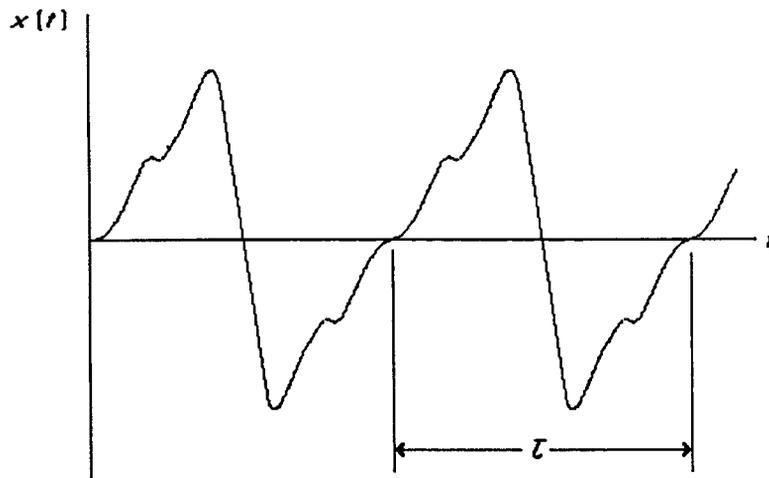
fig. b.6

Examinando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad (\text{b. 5})$$

de modo que en el movimiento armónico la aceleración es proporcional al desplazamiento y está dirigida hacia el origen. Como la Segunda Ley de Newton establece que la aceleración es proporcional a la fuerza, un movimiento armónico resulta para sistemas con resortes lineales y fuerzas que varían como kx .

B.4 MOVIMIENTO PERIODICO.²² Es frecuente que se presenten vibraciones de diferentes frecuencias simultáneamente. Un ejemplo es la vibración libre de un sistema con varios grados de libertad, en donde participan las vibraciones de cada frecuencia natural. Tales vibraciones se manifiestan en forma de una onda irregular que se repite periódicamente, como se muestra en la fig. b.7.



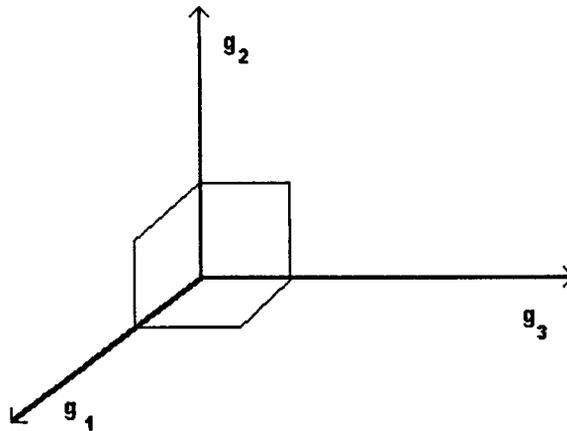
Movimiento periódico de periodo τ

fig. b.7

B.5 CALCULO TENSORIAL.²³

COORDENADAS ORTOGONALES.- Se llaman coordenadas ortogonales o rectangulares de un punto P fig. b.8 a las distancias de este punto a rectas perpendiculares entre si (ejes coordenados).

BASE ORTONORMAL.- Una base del espacio tridimensional formada por vectores mutuamente perpendiculares se llama **base ortogonal**



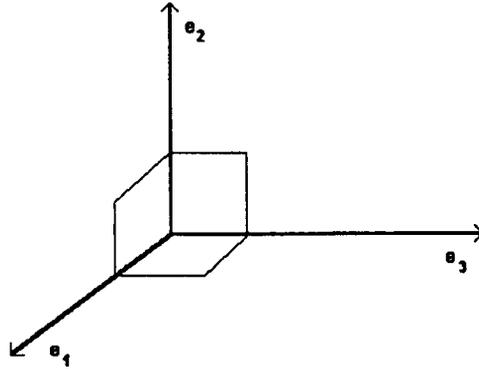
$$|g_1| \neq |g_2| \neq |g_3|$$

Base ortogonal

fig. b.8

si estos vectores de la base son, además unitarios, entonces la base se denomina ortonormal

²³ Serrano Lizaola Raúl, "Cálculo Tensorial para Ingenieros", Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, primera edición, 1994.



$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$$

Base ortonormal

fig. b.9

En el sistema de coordenadas cartesianas, los vectores base g_i son perpendiculares entre si, esto es, son ortogonales, por lo que

$$g_i \cdot g_j = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Además, ellos son vectores unitarios, es decir su magnitud está **"normalizada"** respecto a la unidad, entonces

$$g_i \cdot g_j = 1 \quad \text{para } i = j$$

Consecuentemente, la matriz de los coeficientes métricos para una base ortonormalizada es igual a la matriz unidad

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que se introduce un nuevo símbolo para la matriz unidad, el cual se conoce como el símbolo o **delta de Kronecker**, definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (\text{b.6})$$

para el espacio tridimensional es

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para una base ortonormal se tiene

$$g_i \cdot g_j = g_{ij} = \delta_{ij}$$

BASES COORDENADAS COVARIANTE Y CONTRAVARIANTE²³ .- Sean g_1, g_2, g_3 los vectores de una base referida aun espacio euclídeo tridimensional, y supóngase también la existencia de la base g^1, g^2, g^3 definida en el mismo espacio.

Los índices para la base g^j se escribirán arriba para distinguirla de la base g_i . Los vectores fundamentales de ambas bases estrán relacionados mediante las siguientes expresiones

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (\text{b.7})$$

donde δ_i^j es otra forma de escribir el símbolo de Kronecker definido en b.6. El desarrollo de las expresiones b.7 da lo siguiente

$$g_1 \cdot g^1 = 1; \quad g_1 \cdot g^2 = 0; \quad g_1 \cdot g^3 = 0$$

$$g_2 \cdot g^1 = 0; \quad g_2 \cdot g^2 = 1; \quad g_2 \cdot g^3 = 0$$

$$g_3 \cdot g^1 = 0; \quad g_3 \cdot g^2 = 0; \quad g_3 \cdot g^3 = 1$$

Estos resultados indican que el valor que el valor g^1 es perpendicular tanto a g_2 como a g_3 , mientras que g^2 lo es a g_1 y a g_2 .

Por lo tanto, si se conoce la base g_i , puede entonces obtenerse la base g^j mediante estas nueve ecuaciones. Si para las bases g_i y g^j se cumplen las relaciones b.7, se dice entonces que g_i es la **base covariante**, mientras que g^j recibe el nombre de **base contravariante**.

B.6 ANÁLISIS DE FOURIER

a). FUNCIONES ORTOGONALES²⁴

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en un intervalo $a \leq t \leq b$ si

$$\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = 0$$

Ahora bien, si tenemos un conjunto de funciones de valores reales, $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \dots$ se dice que es ortogonal en un intervalo $a \leq t \leq b$ si

$$\int_a^b \phi_m(t)\phi_n(t) dx \begin{cases} = 0 & \text{si } m \neq n \\ \neq 0 & \text{si } m = n \end{cases}$$

24 G. Zill Dennis, "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones", Grupo editorial Iberoamericano, México 1994.

b). NORMA DE UNA FUNCIÓN

El producto escalar de dos funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$, $\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle$, es igual a

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = \int_a^b \phi_m(t), \phi_n(t) dt \quad \text{si } m = n$$

y se llama norma cuadrada de $\phi_n(t)$ a la ecuación

$$\|\phi_n(t)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(t) dt \quad \text{cuando } m = n$$

y al valor obtenido como

$$\|\phi_n(t)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(t) dt}$$

se le llama **Norma de la función** $\phi_n(t)$.

c). CONJUNTO ORTONORMAL

Si se obtiene un conjunto $\{\phi_n(t)\}$, se dice que es ortonormal en el intervalo de definición cuando $\|\phi_n(t)\| = 1$ para $n=0,1,2,\dots$

d). COEFICIENTES DE FOURIER

Cualquier conjunto ortogonal de funciones $\{\phi_n(t)\}$ puede ser normalizado al dividir cada función entre su norma.

Si además $\{\phi_n(t)\}$ es un conjunto ortogonal finito de funciones, las cuales satisfacen condiciones de frontera arbitrarias en un intervalo $a \leq t \leq b$; entonces, cualquier función $f(t)$ puede expresarse como la combinación lineal de los elementos $\phi_n(t)$ que satisfacen determinadas condiciones de frontera, como a continuación se indica

$$f(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + \dots + C_n\phi_n(t) + \dots$$

y al multiplicar la ecuación anterior por $\phi_m(t)$ e integrar sobre el intervalo de definición se obtiene

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = C_0 \int_a^b \phi_0(t)\phi_m(t)dt + C_1 \int_a^b \phi_1(t)\phi_m(t)dt + \dots + C_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_m(t)dt + \dots$$

Por ortogonalidad, cada término en el lado derecho de la ecuación anterior es cero, excepto cuando $m=n$, por tanto

$$\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = C_n \int_a^b \phi_n(t)^2 dt$$

Si C_n son los coeficientes, se tiene

$$C_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t) dt}{\int_a^b \phi_n(t)^2 dt}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

e). SERIE DE FOURIER GENERALIZADA²⁴

Existen las llamadas series de Fourier generalizadas para cualquier condición de frontera

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(t)$$

donde

$$C_n = \frac{\int_a^b f(t) \phi_n(t) dt}{\|\phi_n(t)\|^2}$$

APÉNDICE C

PROGRAMA DE CÓMPUTO

PROGRAMA DE CÓMPUTO

Programa que calcula la respuesta dinámica de un sistema semidefinido de "n" masas principales y "m" apéndices, sometida a cualquier tipo de aceleración aplicada en la masa de interes.

```
C ----- ACE-DESP -----
C -----
C ----- Programa Realizado por: -----
C ----- César Vázquez Lorenzana y -----
C ----- Edith Alvarez Flores -----
C -----
C *****
C ***** Calculo de Desplazamientos *****
INTEGER I,J,IK,N,NN,M0,M1,MM,GL
INTEGER TT,TMIN,TMAX,INCT
DOUBLE PRECISION W(50),FI(50,50),M(50),K(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION Xsuma(2),Asuma(2)
DOUBLE PRECISION SUMPFI,SUMMF12,c0
DOUBLE PRECISION X(50),XC(2),XS(2),XCTE(2)
DOUBLE PRECISION Ac(50),AcC(2),AcS(2),AcCTE(2)
DOUBLE PRECISION W1,W0,PI,Fk(50)
DOUBLE PRECISION Am(1000),Bm(1000),A0
DOUBLE PRECISION QX(6700,50),QA(6700,50),CSICR
DIMENSION P(50)
REAL Ti,DX,T,Lf,Tmx,CF2

PI=3.14159265359
OPEN(1,FILE='est-42m.cvl')
OPEN(2,FILE='est-42m.wfi')
OPEN(3,FILE='ip850919.fou')
OPEN(4,FILE='est42ip2.dmx',STATUS='NEW')
OPEN(5,FILE='est42ip2.mov',STATUS='NEW')
WRITE(4,*) 'EST-42M',' ','IP850919'
READ(1,*) N,CSICR
NN=2*N
CALL LeedeM1aMn (N,P,M,k,CSI)
CALL Leefrecu (N,GL,w,FI)
C ----- CAMBIOS TEMPORALES -----
CSICR=0.000001
SUMA=0
DO 12 I=1,N-1
CSI(I)=0.2
CSI(N+I)=0.2
SUMA=SUMA+M(I)+M(I+N)
12 CONTINUE
```

```

M(N)=100*SUMA
P(N)=1
P(N-1)=0

```

C -----

```

WRITE(*,*) 'GL=',gl
WRITE(*,*) 'N=',N
DO 14 I=1,N-1

```

14 CONTINUE

C -----

```

WRITE(*,*) 'Dame el Periodo del acelerograma=? '
READ(*,*) Lf
WRITE(*,*)
WRITE(*,*) 'Dame el tiempo inicial del acelerograma=? '
READ(*,*) Ti
WRITE(*,*) 'Dame el tiempo total del acelerograma=? '
READ(*,*) Tmx
WRITE(*,*) 'Dame el intervalo de tiempo=? '
READ(*,*) Dx
CALL LeeCoefFour (MM,Lf,A0,Am,Bm,CF2)

```

C -----

```

DO 10 Ik=2,gl
Gmk(Ik)=w(Ik)*SQRT(1-CSI(Ik-1)**2)
cwk(Ik)=CSI(Ik-1)*w(Ik)

```

10 CONTINUE

C ----- calculo de Fk* , 'con aceleraciones -----

```

DO 30 i=1,gl
sumPFI=0
sumMFI2=0

```

C -----para fuerza-----

```

DO 40 j=1,nn
sumPFI=sumPFI+P(j)*FI(j,i)*M(j)
sumMFI2=sumMFI2+M(j)*FI(j,i)**2

```

40 CONTINUE

```

Fk(i)=sumPFI/sumMFI2

```

30 CONTINUE

C -----

```

WRITE(4,*) TI,',',Tmx
WRITE(5,*) TI,',',Tmx

```

C -----

```

w1=(2*PI/Lf)
tmin=Ti/DX
tmax=Tmx/DX
inct=DX/DX

```

C *****

C ***** calculo del desplazamiento *****

C *****

```

DO 50 Ik=2,gl
WRITE(*,*) 'Trabajando ... ',Ik,w(Ik)
DO 60 TT=tmin,tmax,inct
T=TT*DX

```

C -----

```

j=2
Xsuma(1)=0
Asuma(1)=0

```

```

Xsuma(j)=0
Asuma(j)=0
c0=2*CSICR

```

```

C ***** Funcion Constante *****
CALL Constante(c0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XCTE,AcCTE,lk)
C -----mejor espacio m1,mm-----
M1=1
DO 80 M0=1,500
w0=M0*w1
c0=2*CSICR*w0
C ***** Funcion Senoidal *****
CALL Senoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XS,AcS,lk)
C ***** Funcion Cosenoidal *****
CALL Cosenoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XC,AcC,lk)
C ----- Total -----
X(1)=Am(M0)*XC(1)+Bm(M0)*XS(1)
Ac(1)=Am(M0)*AcC(1)+Bm(M0)*AcS(1)
X(j)=Am(M0)*XC(j)+Bm(M0)*XS(j)
Ac(j)=Am(M0)*AcC(j)+Bm(M0)*AcS(j)
Xsuma(1)=Xsuma(1)+X(1)
Asuma(1)=Asuma(1)+Ac(1)
Xsuma(j)=Xsuma(j)+X(j)
Asuma(j)=Asuma(j)+Ac(j)
80 CONTINUE
X(1)=A0*XCTE(1)+Xsuma(1)
Ac(1)=A0*AcCTE(1)+Asuma(1)
X(j)=A0*XCTE(j)+Xsuma(j)
Ac(j)=A0*AcCTE(j)+Asuma(j)
C -----
QX(TT+1,1)=X(1)
QA(TT+1,1)=Ac(1)
QX(TT+1,lk)=X(j)
QA(TT+1,lk)=Ac(j)
C -----
60 CONTINUE
WRITE(*,*) 1,QX(1,1)
WRITE(*,*) lk,QX(1,lk)
50 CONTINUE
C -----
WRITE(*,*) 'Trabajando ... '
DO 90 TT=tmin,tmax,inct
T=TT*DX
DO 91 i=1,NN
X(i)=0
Ac(i)=0
91 CONTINUE
DO 93 j=1,NN
DO 95 lk=1,gl
X(j)=X(j)+Fk(lk)*QX(TT+1,lk)*FI(j,lk)
Ac(j)=Ac(j)+Fk(lk)*QA(TT+1,lk)*FI(j,lk)
95 CONTINUE
93 CONTINUE
C -----

```

```

C ----- Almacenamiento de Aceleraciones y Desplazamientos -----
C -----Almacena para un w0: t Vs a -----
CALL almacenaWvsXmax(4,nn,t,X)
C -----Almacena para un w0 : t Vs X -----
CALL almacenaWvsXmax(5,nn,t,AC)
90 CONTINUE
STOP
END
C *****
C ***** SUBRUTINAS*****
C *****
SUBROUTINE almacenaWvsXmax (NA,nn,w,Xmx)
INTEGER NA,NN,I
DOUBLE PRECISION Xmx(50)
REAL W
C ----- w,Xmx(i) -----
WRITE(NA,*) w
DO 100 i=1,nn-1
WRITE(NA,*) Xmx(i)
100 CONTINUE
WRITE(NA,*) Xmx(NN),','
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Constante (c0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XCTE,AcCTE,lk)
INTEGER J,lk
DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XCTE(2),AcCTE(2)
DOUBLE PRECISION CTE,cte1,cte2,a,b
DOUBLE PRECISION AFkcte
REAL t
cte1=1/c0
cte2=1/c0**2
CTE=1/(w(lk)*SQRT(CSI(lk-1)**2+(Gmk(lk)/w(lk))**2))
AFkcte=ATAN(Gmk(lk)/cwk(lk))
C ----- C. R. -----
XCTE(1)=(cte1*t-cte2+cte2*EXP(-c0*t))
AcCTE(1)=EXP(-c0*t)
C ----- Estacionaria M. S. -----
b=Gmk(lk)
XCTE(j)=cte*SIN(AFkcte)/b
C ----- Transitoria -----
b=SIN(AFkcte+Gmk(lk)*t)/Gmk(lk)
XCTE(j)=XCTE(j)-cte*EXP(-cwk(lk)*t)*b
a=2*cwk(lk)*Gmk(lk)*COS(AFkcte+Gmk(lk)*t)
a=a+(Gmk(lk)**2-cwk(lk)**2)*SIN(AFkcte+Gmk(lk)*t)
a=EXP(-cwk(lk)*t)/Gmk(lk)*a
AcCTE(j)=cte*a
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Cosenoidal (c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XC,AcC,lk)
INTEGER J,lk

```

```

DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XC(2),AcC(2)
DOUBLE PRECISION W0,c,C1,C2,C3,a,b
DOUBLE PRECISION Flr,AFkc,PI
REAL t
PI=3.14159265359
C  ----- Factores de Participacion -----
C  ' ----- Modo de Cuerpo Rigido -----
C1=-1/(c0**2+w0**2)
C2=c0/((c0**2+w0**2)*w0)
C3=1/(c0**2+w0**2)
C  ' ----- Modos Superiores -----
b=(2*CSI(Ik-1)*Gmk(Ik)/w(Ik))**2
c=1/(w(Ik)**2*SQRT((2*CSI(Ik-1)**2-1+(w0/w(Ik))**2)**2+b))
b=(w0/w(Ik))
Flr=(2*CSI(Ik-1)*Gmk(Ik)/(w(Ik)*(2*CSI(Ik-1)**2-1+b**2)))
AFkc=ATAN(Flr)
C  ----- C. R. -----
XC(1)=(C1*COS(w0*t)+C2*SIN(w0*t)+C3*EXP(-c0*t))
a=C2*w0**2*SIN(w0*t)-c0**2*C3*EXP(-c0*t)
AcC(1)=(-C1*w0**2*COS(w0*t)+a)
C  -----
C  ----- Estacionaria M. S. -----
b=-COS(w0*t)*COS(AFkc)
a=SIN(AFkc)/Gmk(IK)
b=(cwk(IK)*COS(w0*t)+w0*SIN(w0*t))*a+b
b=c*(b)
XC(j)=b
a=SIN(AFkc)/Gmk(IK)*w0**2*(-w0*SIN(w0*t)-cwk(IK)*COS(w0*t))
a=a+COS(AFkc)*w0**2*COS(w0*t)
AcC(j)=c*a
C  ----- Transitoria -----
b=Gmk(IK)*t
b=(Gmk(IK)*COS(AFkc+Gmk(IK)*t)-cwk(IK)*SIN(AFkc+b))
XC(j)=XC(j)-c*EXP(-cwk(IK)*t)/Gmk(IK)*b
a=AFkc
a=Gmk(IK)**3*COS(Gmk(IK)*t+AFkc)+cwk(IK)**3*SIN(Gmk(IK)*t+a)
a=a-3*cwk(IK)**2*Gmk(IK)*COS(Gmk(IK)*t+AFkc)
a=a-3*cwk(IK)*Gmk(IK)**2*SIN(Gmk(IK)*t+AFkc)
AcC(j)=AcC(j)+c*EXP(-cwk(IK)*t)/Gmk(IK)*a
RETURN
END
C  *****
SUBROUTINE Senoidal(c0,w0,t,w,CSI,Gmk,cwk,j,XS,AcS,Ik)
INTEGER J,Ik
DOUBLE PRECISION W(50)
DOUBLE PRECISION CSI(50),Gmk(50),cwk(50)
DOUBLE PRECISION c0,XS(2),AcS(2)
DOUBLE PRECISION W0,S,S1,S2,S3,S4,a,b
DOUBLE PRECISION Flr,AFks,PI
REAL t
PI=3.14159265359
C  ----- Factores de Participacion -----

```

```

C ----- Modo de Cuerpo Rigido -----
S1=-c0/((c0**2+w0**2)*w0)
S2=-1/(c0**2+w0**2)
S3=1/(c0*w0)
S4=-w0/((c0**2+w0**2)*c0)
C ----- Modos Superiores -----
b=w0/w(IK)
S=1/(w(IK)**2*SQRT(((1-(w0/w(IK))**2)**2+(2*CSI(IK-1)*b)**2))
Flr=(2*CSI(IK-1)*w0/(w(IK)*(1-(w0/w(IK))**2)))
AFks=ATAN(Flr)
C ----- C. R. -----
b=S4*EXP(-c0*t)
XS(1)=(S1*COS(w0*t)+S2*SIN(w0*t)+S3+b)
b=(-S1*w0**2*COS(w0*t)-S2*w0**2*SIN(w0*t)+S4*c0**2*EXP(-c0*t))
AcS(1)=b
C ----- Estacionaria M. S. -----
XS(j)=S*SIN(w0*t-AFks)
AcS(j)=-S*w0**2*SIN(w0*t-AFks)
C ----- Transitoria -----
b=Gmk(IK)*SIN(AFks)*COS(Gmk(IK)*t)
b=(SIN(Gmk(IK)*t)*(cwk(IK)*SIN(AFks)-w0*COS(AFks))+b)
XS(j)=XS(j)+S*EXP(-cwk(IK)*t)/Gmk(IK)*b
a=Gmk(IK)
a=SIN(Gmk(IK)*t)*SIN(AFks)*(cwk(IK)**3/Gmk(IK)+cwk(IK)*a)
a=a+SIN(Gmk(IK)*t)*COS(AFks)*(Gmk(IK)-cwk(IK)**2/Gmk(IK))*w0
a=a+COS(Gmk(IK)*t)*SIN(AFks)*(-cwk(IK)**2-Gmk(IK)**2)
a=a+COS(Gmk(IK)*t)*COS(AFks)*2*cwk(IK)*w0
AcS(j)=AcS(j)+S*EXP(-cwk(IK)*t)*a
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE LeedeM1aMn (N,P,M,k,CSI)
C ----- lectura de (1) hacia (n) -----
DOUBLE PRECISION CSI(50),K(50),M(50),SUMA
INTEGER I,N
DIMENSION P(50)
DO 11 I=1,N-1
READ (1,*) P(I),M(I),P(N+I),M(N+I),K(N+I-1),CSI(N+I-1)
READ (1,*) K(I),CSI(I)
11 CONTINUE
READ (1,*) P(N),M(N),P(N+N),M(N+N),K(N+N-1),CSI(N+N-1)
RETURN
END
C *****
SUBROUTINE Leefrecu (n,gl,w,FI)
DOUBLE PRECISION W(50),FI(50,50)
INTEGER I,J,GL,N
READ(2,*) gl
DO 500 i=1,gl
READ(2,*) w(i)
DO 510 j=1,n
READ(2,*) FI(j,i),FI(n+j, i)
510 CONTINUE
500 CONTINUE

```

```

RETURN
END
C *****
SUBROUTINE LeeCoefFour (MM,Lf,A0,Am,Bm,CF2)
INTEGER MM,M0
DOUBLE PRECISION Am(1500),Bm(1500),A0
REAL Am2,Bm2
REAL A02,Lf,CF2
Am2=0
Bm2=0
READ(3,*) MM,A0
A02=A0**2
DO 400 M0=1,MM
READ(3,*) Am(M0),Bm(M0)
Am2=Am2+Am(M0)**2
Bm2=Bm2+Bm(M0)**2
400 CONTINUE
CF2=Lf*A02+Lf/2*(Am2+Bm2)
RETURN
END

```