



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

Propiedades de Perforación de Cajas en \mathbb{R}^d

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Héctor Daniel Baños Cervantes

bajo la dirección de

Dra. Déborah Oliveros Braniff

QUERÉRATO, QUERÉTARO . AGOSTO DEL 2013.

Agradecimientos

A Cheto, a Flor y a Cosi por todo su apoyo y su buena vibra.

A la Universidad Autónoma de Querétaro por darme la oportunidad de aprender.

A la Beca de tesis Proyecto PAPITT UNAM IN101912 de Geometría y Gráficas.

A mis compañeros por sus enseñanzas y su amistad.

A todos los profesores que me ayudaron durante mi formación como Matemático.

A la M.C. Lina Vargas por sus enseñanzas y consejos.

A la Lic. Laura Rodríguez por su valiosa ayuda.

Al Dr. Luis Montejano por dedicar tiempo a revisar este trabajo.

Al Dr. Jesús Jerónimo por dedicar tiempo a revisar este trabajo, por sus consejos, su apoyo y su disposición.

A la Dra. Gabriela Araujo por dedicar tiempo a revisar este trabajo y por brindarme su valiosa ayuda.

A la MDM Camen Sosa por su apoyo durante toda la carrera, tanto personal como profesional, por sus consejos y toda la ayuda que me brindó.

Al Centro de Innovación Matemática por haber sido parte fundamental de mi desarrollo como Matemático.

Y especialmente a la Dra Déborah por su paciencia, sus enseñanzas, sus invaluable consejos, su tiempo y por brindarme su apoyo, tanto a mi como a todos sus alumnos.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	1
1. Descripción del problema	3
1.1. Conceptos básicos de convexidad	3
1.2. Teorema de Helly	5
1.3. Teoremas tipo Helly y teoremas de perforación	10
2. Conceptos básicos	15
2.1. Conceptos básicos de gráficas	15
2.2. Coloraciones de gráficas y gráfica perfectas	20
2.3. Gráficas de intersección y sus complementos	23
3. Algunos teoremas de perforación para cajas	27
4. Gráficas Prohibidas	33
5. Conclusiones y trabajo futuro.	39
Bibliografía	41

Introducción

“El Teorema de Helly es uno de los más grandes tesoros de la Convexidad, y ha sido el punto focal de literalmente cientos de artículos de investigación. Tal vez el aspecto más agradable del teorema es la facilidad con la que se presta a una amplia variedad de impresionantes aplicaciones.”

Roger Webster.

Teorema de Helly (1913, [15]). Sea \mathcal{A} una familia finita de por lo menos $d + 1$ conjuntos convexos en el espacio euclidiano d -dimensional (\mathbb{R}^d). Si cualesquiera $d + 1$ miembros de \mathcal{A} tienen un punto en común, entonces hay un punto en común a todos los miembros de \mathcal{A} .

El teorema de Helly se cumple también para familias infinitas de conjuntos convexos compactos, y éste ha generado numerosas generalizaciones y variantes.

Resultados del tipo “Si cada m miembros de una familia de objetos tienen la propiedad P entonces la familia entera tiene la propiedad P ”, se llaman teoremas tipo Helly. El mínimo entero positivo m para el cual hace que un teorema como éste sea cierto, se llama “número de Helly”. Al igual que el Teorema de Helly, los Teoremas tipo Helly han sido objeto de numerosas investigaciones y generalizaciones.

Consideremos la siguiente propiedad P :

P .- Decimos que una familia de conjuntos convexos \mathcal{F} en \mathbb{R}^d es m -perforable, si existe un conjunto de m puntos en \mathbb{R}^d que intersecta a todos los elementos de la familia. El mínimo número m para el cual \mathcal{F} es m -perforable, se le llama número de perforación (piercing number).

En 1982 Ludwig Danzer y Branko Grünbaum publicaron el artículo “*Intersection Properties of boxes in \mathbb{R}^d* ” [4], el cual muestra, entre otras cosas, que ni siquiera para “cajas” (intervalos en \mathbb{R} , rectángulos con lados paralelos a los ejes en \mathbb{R}^2 , paralelepípedos con caras paralelas a los ejes xy , yz , y xz en \mathbb{R}^3 , etc) se puede asegurar la existencia de teoremas tipo Helly. Los resultados que este artículo presenta están estructurados como teoremas tipo Helly, donde la propiedad P es tener número de perforación acotado para la familia de cajas en \mathbb{R}^d . El Problema de Perforación fue introducido por Hadwiger y Debrunner (1957, [16]) como una extensión del

teorema de Helly, no es difícil convencerse que el Teorema de Helly es un teorema relacionado con el número de perforación 1 (lo cual quiere decir que existe un punto que interseca a todos los miembros de una familia de conjuntos).

Esta tesis esta estructurada de la siguiente manera, en el primer capítulo, damos la descripción y antecedentes del problema, así como las bases necesarias para entenderlo. En el capítulo 2, damos las herramientas de la teoría de gráficas que mas se utilizan en esta tesis, ya que, el número de perforación se relaciona fuertemente con el número cromático de gráficas e hipergráficas. Con estas bases establecidas, en el capítulo 3 nos damos a la tarea de proponer una demostración alterna a algunos de los teoremas de Danzer y Grumbaün para cajas. En el capítulo 4 buscamos teoremas de tipo Helly para intervalos paralelos a los ejes, y obtendremos cotas exactas para el caso de número de perforación 2, lo que nos permitió obtener un resultado original. Finalmente en el capítulo 5 daremos una conjetura que está relacionada con la generación de teoremas de tipo Helly para “cajas planas” en \mathbb{R}^d .

Descripción del problema

En esta sección describiremos el problema central de esta tesis, así como algunos antecedentes fundamentales de convexidad que son esenciales para entender este problema.

1.1

Conceptos básicos de convexidad

Definición 1.1. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ (el espacio euclidiano de dimensión d) se dice *convexo*, si para cualesquiera dos puntos en A el segmento que los une también está contenido en A . Es decir, si $x, y \in A$ entonces $(1-t)x + ty \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

La figura 1.1 muestra un conjunto no convexo C , ya que el intervalo que une a x con y no está en C

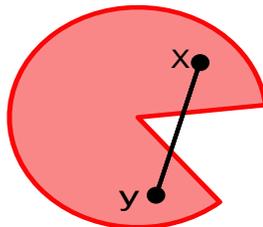


Fig 1.1

Lema 1.2. *La intersección de conjuntos convexos es convexa.*

Demostración. Sean A y B conjuntos convexos y sea C su intersección, supongamos que C no es convexo, entonces existe un punto c_1 y un punto c_2 en C tal que el segmento que los une no está contenido en C , ésto implicaría que el segmento que une a c_1 y a c_2 tampoco está contenido en A o en B , supongamos que no está en A , ésto implica que A no es convexo, lo cual es una contradicción, por lo tanto C es Convexo. \square

Definición 1.3. Dado un conjunto A de puntos en \mathbb{R}^n , la *envolvente convexa* de A es la intersección de todos los conjuntos convexos C tales que $A \subseteq C$ y se denota como $\text{conv}\{A\}$.

La envolvente convexa de un conjunto A se puede interpretar como el convexo más pequeño que contiene a A , y claramente la envolvente convexa de cualquier conjunto convexo es el mismo.

Definición 1.4. Un punto x se dice que es una *combinación convexa* de los puntos a_1, \dots, a_m en \mathbb{R}^d si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ tales que:

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$$

Lema 1.5. Sean a_1, a_2, \dots, a_m puntos de un conjunto convexo A en \mathbb{R}^d . Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$, con $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$. Entonces $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \in A$.

Demostración. Se demostrará por inducción en m . Cuando m es 1, claramente $\lambda = 1$ cumple el lema.

Supongamos válido para $m = k$, y lo probaremos para $k + 1$.

Sea

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{k+1} a_{k+1},$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in A$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = 1$. Claramente al menos un λ_i debe ser menor a 1, supongamos que $\lambda_{k+1} < 1$.

Sea

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} a_k, \text{ donde } \lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0.$$

Note que $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} = 1$.

Así por hipótesis de inducción $y \in A$. Como A es convexo entonces el segmento que une a y y a a_{k+1} está en A , es decir $x = \lambda y + \lambda_{k+1} a_{k+1} \in A$. \square

Definición 1.6. Decimos que un subconjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \neq \emptyset$ en \mathbb{R}^n es *dependiente afín* si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, no todos cero, tales que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \text{ y que } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 0.$$

Teorema de Radon.

Teorema 1.7. Sean $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{R}^n$ con $m \geq n+2$. El conjunto $\{1, \dots, m\}$ puede ser particionado en 2 subconjuntos I y J tales que $\text{conv}\{a_i : i \in I\}$ intersecta a $\text{conv}\{a_j : j \in J\}$.

Demostración. Consideraremos el caso no trivial cuando a_1, \dots, a_m son distintos. Como $m > n+1$ consideremos el sistema de las $n+1$ ecuaciones lineales simultáneas.

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \text{ y que } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 0. \quad (1)$$

Como en las m incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ es homogéneo, el sistema tiene solución no trivial, dado que $m > n+1$

Consideremos entonces los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que son soluciones del sistema (1) tales que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \text{ y que } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 0.$$

Dado este hecho algunas λ 's serán positivas y otras negativas. Sea $I = \{i : \lambda_i \geq 0\}$ y $J = \{j : \lambda_j < 0\}$. Así:

$$\frac{\sum_{i \in I} \lambda_i a_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i} = \frac{\sum_{j \in J} -\lambda_j a_j}{\sum_{j \in J} -\lambda_j} = x.$$

Por lo anterior x es una combinación convexa de puntos de $\text{conv}\{a_i : i \in I\}$ y $\text{conv}\{a_j : j \in J\}$, por ello:

$$x \in \text{conv}\{a_j : j \in J\} \cap \text{conv}\{a_i : i \in I\}.$$

□

1.2

Teorema de Helly

El Teorema de Helly es uno de los teoremas más conocidos en la geometría discreta, este teorema fue introducido en 1913 por Edward Helly (1884-1943) un importante matemático austriaco que planteó el teorema poco antes de que se uniera al ejército austriaco. Durante la Primera Guerra Mundial Helly fue herido por el ejército ruso de un balazo en un pulmón del cual nunca se recuperó, herido fue tomado como prisionero en Siberia por varios años. Al término de la guerra Helly fue liberado y regresó a Viena en 1920, al año siguiente recibió un puesto en la Universidad de Viena. La primer prueba de este teorema fue publicada por J. Radon en 1921 y la prueba de Helly apareció dos años después.

Teorema de Helly

Teorema 1.8. Sea $H^d = \{A_k\}_{k \in \{1,2,\dots,n\}}$ una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . Si para cada $d + 1$ elementos de la familia su intersección es no vacía, entonces:

$$\bigcap_{k \in \{1,\dots,n\}} A_k \neq \emptyset.$$

Obsérvese que el recíproco de este teorema es cierto trivialmente, ya que si todos los conjuntos se intersectan cualesquiera $d + 1$ también se intersectan.

Existe una gran variedad de demostraciones del Teorema de Helly, ver por ejemplo [5], aunque en esta tesis utilizaremos para su demostración el Teorema de Radon.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre el número de elementos de H^d . El teorema es trivial cuando H^d tiene $d + 1$ elementos. Supongamos válido para la familia con m elementos y $m > d + 1$. Sea A_0, A_1, \dots, A_m la familia de $m + 1$ conjuntos convexos en \mathbb{R}^d , cada $d + 1$ elementos de la familia tienen intersección no vacía. Por la hipótesis de inducción, para cada $i = 0, \dots, m$ existe un punto a_i tal que

$$a_i \in A_0 \cap \dots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \dots \cap A_m.$$

Por el Teorema de Radon, el conjunto $\{0, \dots, m\}$ puede ser particionado en 2 conjuntos K y J tales que $\text{conv}\{a_j : j \in J\}$ y $\text{conv}\{a_k : k \in K\}$ se intersectan. Supongamos que:

$$a \in \text{conv}\{a_j : j \in J\} \cap \text{conv}\{a_k : k \in K\}$$

Sea $A := \bigcap \{A_k | k \in K\}$ y $B := \bigcap \{A_j | j \in J\}$, claramente por el Lema 1.2 A y B son conjuntos convexos. Observe que para cada $j \in J$, $a_j \in A$, puesto que $j \notin K$ y que para cada $k \in K$, $a_k \in B$ puesto que $k \notin J$.

Así, por la convexidad de B tenemos que $\text{conv}\{a_j : j \in J\} \subseteq A$. Similarmente, $\text{conv}\{a_k : k \in K\} \subseteq B$.

Como $a \in \text{conv}\{a_j : j \in J\} \cap \text{conv}\{a_k : k \in K\} \subseteq A \cap B$, tenemos que $A_0 \cap \dots \cap A_m$ es no vacío. □

Observaciones importantes:

1) La condición de convexidad es necesaria, como se muestra en la Figura 1.2.

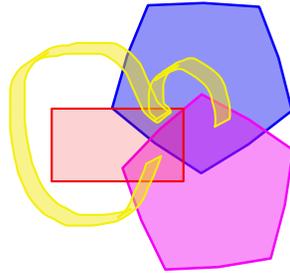


Fig 1.2

Claramente cualesquiera tres de estos cuatro conjuntos tienen un punto en común, sin embargo no todos ellos tienen un punto en común.

2) El número $d + 1$ conocido como número de Helly es justo, como se muestra en la Figura 1.3.

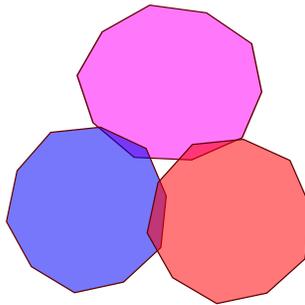


Fig 1.3

Claramente para cada par de estos conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 su intersección es no vacía, pero no hay un punto en común a todos ellos.

3) La condición de que la familia sea finita es necesaria también. Considérese la siguiente familia de semiplanos, sea $P_i := \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \geq i\}$ con $i \in \mathbb{N}$. Claramente cada P_i es convexo y $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ para cualquier i y j , pero la intersección de todos ellos es vacía.

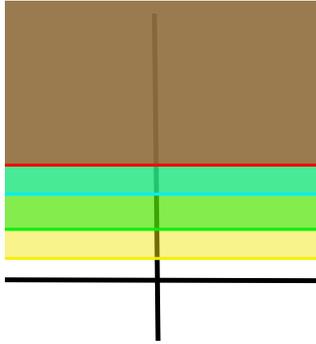


Fig 1.4

Ésto puede solucionarse pidiendo que la familia de conjuntos convexos sea compacta, sin embargo, para el propósito de esta tesis trabajaremos solo con familias finitas. Por lo que el teorema de Helly en esta tesis será exactamente como en el Teorema 1.8.

Por 1), 2) y 3) es claro que en general las hipótesis del Teorema de Helly son lo mejor posible, sin embargo, existen familias de conjuntos convexos donde el número $d + 1$ puede ser menor, a continuación trabajaremos con una de estas familias. Para lo cual necesitaremos la siguiente definición.

Definición 1.9. Decimos que una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d es *2-Helly* si basta con que cada par de elementos de la familia tengan intersección no vacía para que la intersección de todos los elementos de la familia sea no vacía.

Observación 1.10. Sea \mathcal{F} una familia 2-Helly, si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, entonces \mathcal{H} es 2-Helly. Si cualesquiera par de elementos de \mathcal{F} se intersectan, en particular cualesquiera par de elementos de \mathcal{H} se intersectan, y como \mathcal{F} es 2-Helly la intersección de todos los elementos de \mathcal{F} es distinta del vacío, lo que implica que en particular todos los elementos de \mathcal{H} tienen intersección no vacía, por lo tanto \mathcal{H} es 2-Helly.

Definición 1.11. Sea $C_d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ con } a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, d\}\}$, a C_d le llamaremos una *d-caja* en \mathbb{R}^d . Denotaremos como Δ^d a la clase de todas las familias de *d-cajas* en \mathbb{R}^d . Cuando $m < d$, una *m-caja* en \mathbb{R}^d es una *m-caja* en algún $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^d$ y denotaremos como Δ_m^d a la clase de todas las familias de *m-cajas* en \mathbb{R}^d .

Ejemplo 1.12. La figura 1.5 muestra una familia de 2-cajas en \mathbb{R}^2 y una familia de 1-cajas en \mathbb{R}^2

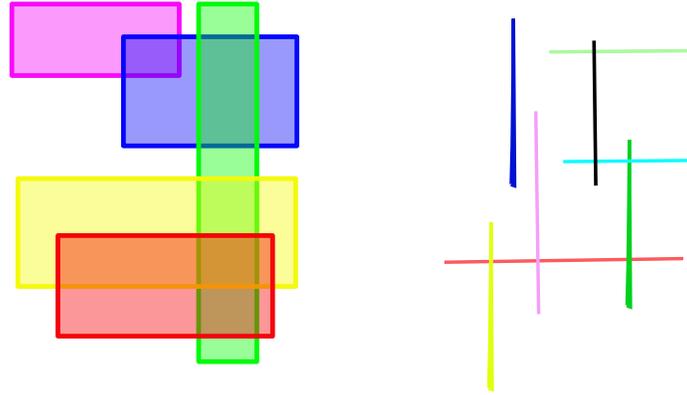
Familia de 2-cajas en \mathbb{R}^2 Familia de 1-cajas en \mathbb{R}^2

Fig 1.5

Lema 1.13. Sea $\mathcal{F} \in \Delta^d$, entonces \mathcal{F} es 2-Helly en \mathbb{R}^d

Demostración. Se demostrará por inducción en d , la dimensión del espacio.

Por el Teorema de Helly sabemos que en \mathbb{R}^1 basta con que para cada par de intervalos tengan intersección no vacía para que toda la familia tenga intersección no vacía. Supongamos válido para $d = k$, por demostrar válido para $d = k + 1$.

Sea $\mathcal{F} \in \Delta^{k+1}$ con $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, recordemos que:

$$C_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid a_j^i \leq x_j \leq b_j^i \text{ con } a_j^i, b_j^i \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, k+1\}\}$$

Consideremos la proyección,

$$C_i^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid a_j^i \leq x_j \leq b_j^i \text{ con } a_j^i, b_j^i \in \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, k\}\}$$

Claramente toda C_i^* está contenido en el hiperplano $H^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, k\}\}$. Por hipótesis de inducción tenemos $\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} C_i^* \neq \emptyset$, sea p^* un punto cualquiera de esta inter-

sección. Consideremos l la recta que pasa por p^* y que es perpendicular al hiperplano H^k , l intersecta a todos los elementos de \mathcal{F} , pues si suponemos que existe un elemento $C_i \in \mathcal{F}$ tal que $l \cap C_i = \emptyset$, entonces la proyección de C_i en H^k no contendría a p^* , entonces p^* no estaría en la intersección. Sea $E_i = C_i \cap l$, claramente por hipótesis, para cualesquiera E_j y E_i tenemos que $E_j \cap E_i \neq \emptyset$, entonces por el Teorema de Helly en la recta la intersección de todos los E_i es distinta del vacío, es decir existe un $p \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} E_i$ y como $E_i \subset C_i$ entonces $p \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} C_i$.

□

1.3

Teoremas tipo Helly y teoremas de perforación

El teorema de Helly ha sido estudiado, aplicado y generalizado por varios autores, algunos resultados tienen aplicaciones significativas en otras áreas de la matemática, a una de estas generalizaciones se le conoce como los teoremas tipo Helly.

Un **Teorema tipo Helly** es un teorema que tiene una base estructural similar al teorema de Helly y que usualmente se puede ver de la siguiente forma:

Sea \mathcal{U} una familia y P una propiedad cerrada bajo inclusiones para subfamilias de \mathcal{U} . Un Teorema tipo Helly plantea una estructura de la siguiente forma: “Si para todo subconjunto de cardinalidad μ de una familia $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ tiene la propiedad P , entonces toda la familia tiene la propiedad P ”.

El mínimo número μ para el cual este resultado es cierto se le llama número de Helly del Teorema de Helly (\mathcal{U}, P, μ)

Claramente si \mathcal{U} es una familia que pertenece a H^d que denota la clase de todas las familias finitas de conjuntos convexos d -dimensionales en \mathbb{R}^d y P es la propiedad de tener un punto en común, entonces estamos hablando del teorema de Helly, donde $\mu = d + 1$.

En esta tesis trabajaremos con una versión particular de teoremas tipo Helly que resulta muy natural y que se les conoce como problemas de perforación o piercing number.

Definición 1.14. Sea \mathcal{F} una familia de subconjuntos en el espacio euclidiano d -dimensional \mathbb{R}^d y sean n y k cardinales con n finito. Entonces:

i) Si existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ que consiste en n o menos puntos tales que $A \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$, diremos que \mathcal{F} es n -preforable. La mínima n se le llamará número de perforación y se denotará por $\Pi(\mathcal{F}) = n$ ó $\mathcal{F} \in \Pi^n$.

La figura 1.6 muestra una familia de 2-cajas con número de perforación 2

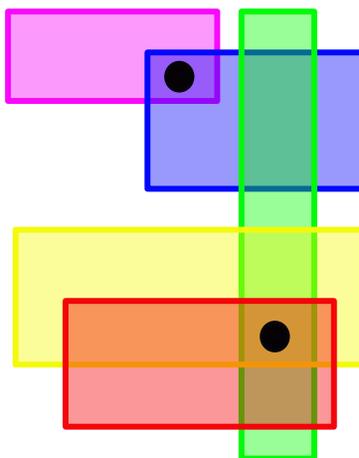


Fig 1.6

ii) Si cada subfamilia F de \mathcal{F} con k o menos elementos $|F| \leq k$ tiene intersección no vacía, o es perforable por un punto, lo denotaremos como $\Pi_k(\mathcal{F}) = 1$ ó $\mathcal{F} \in \Pi_k$.

La figura 1.7 muestra una familia \mathcal{F} de 2-cajas tal que $\Pi_2(\mathcal{F}) = 1$, i.e. que cada par de 2-cajas tiene intersección no vacía.

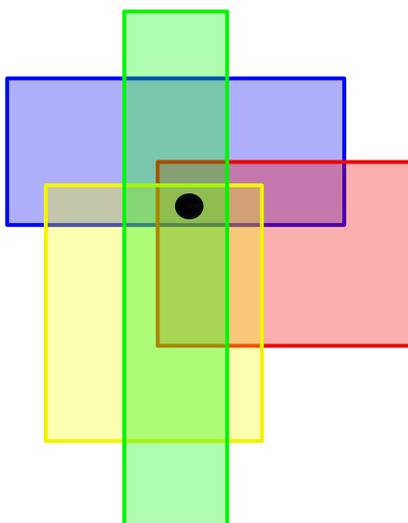


Fig 1.7

iii) Si cada subfamilia F de \mathcal{F} que consiste en k o menos elementos $|F| \leq k$ es n -perforable lo denotaremos $\Pi_k(\mathcal{F}) \leq n$ ó $\mathcal{F} \in \Pi_k^n$.

La figura 1.8 muestra una familia \mathcal{F} de 2-cajas tal que $\Pi_3(\mathcal{F}) = 2$ ($\mathcal{F} \in \Pi_3^2$), es decir que cada tripleta de 2-cajas es 2-perforable.

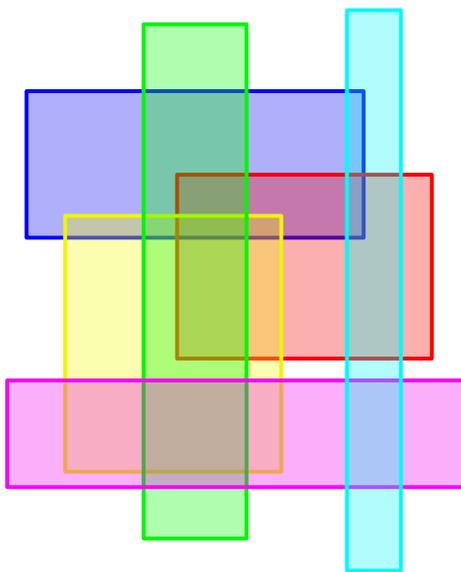


Fig 1.8

Obsérvese que $\Pi_k^n \supset \Pi_{k+1}^n \supset \dots \supset \Pi_{\aleph_0}^n \supset \Pi^n$, dado que como cada $k+1$ elementos de \mathcal{F} son n -perforables, en particular cualesquiera k de ellos se perforan a lo más con los mismos n puntos; si F consiste en conjuntos compactos entonces $\Pi_{\aleph_0}^n = \Pi^n$.

De esta manera resulta interesante preguntarse la existencia de un teorema tipo Helly donde:

$\mathcal{F} = \mathcal{U} \in \Delta_m^d$ y P es la propiedad de tener número de perforación n o ser n -perforable.

Es decir queremos ver la existencia de un número $h := h(d, m, n)$ que satisfaga lo siguiente:

Si para toda subfamilia $F \subset \mathcal{F}$ con $|F| \leq h(d, m, n)$, $\Pi(F) = n$ entonces $\Pi(\mathcal{F}) = n$.

Observación 1.15. Por el Lema 1.13 sabemos que las familias de d -cajas en \mathbb{R}^d son 2-Helly, lo que implica que cuando $n = 1$ $h(d, d, 1) = 2$

De hecho Ludwig Danzer y Branko Grünbaum probaron en 1982 el siguiente Teorema:

Teorema de Danzer y Grünbaum [4]

- i) $h(d, d, 1) = 2$ para toda $d \geq 1$.
- ii) $h(1, 1, n) = n + 1$ para toda n .
- iii) $h(d, d, 2) = \begin{cases} 3d & \text{para } d \text{ impar} \\ 3d - 1 & \text{para } d \text{ par} \end{cases}$
- iv) $h(2, 2, 3) = 16$.
- v) $h(d, d, n) = \aleph_0$ para $d \geq 2, n \geq 3$, y $h(d, d, n) \neq h(2, 2, 3)$.

Uno de los objetivos de esta tesis es dar una demostración alterna a la original a algunos de los incisos de este teorema utilizando técnicas de teoría de gráficas, lo cual motiva el siguiente capítulo.

Conceptos básicos

2.1

Conceptos básicos de gráficas

Definición 2.1. Una *gráfica* es un par ordenado $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío finito de objetos llamados vértices y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices de G llamados aristas.

Para el propósito de esta tesis asumiremos que toda gráfica G es simple, es decir que $(u, u) \notin E(G)$ y que no tiene aristas múltiples.

Definición 2.2. Sea G una gráfica. El *orden* de G denotado $|G|$ se define como la cardinalidad de $V(G)$, $|V(G)|$.

Definición 2.3. Una gráfica H se dice que es una *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición 2.4. La trayectoria T_n es una gráfica donde $V(T_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(T_n) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$, a v_1 se le llama vértice inicial y a v_n se le llama vértice final. La longitud de T_n denotada como $l(T_n)$ es el número de aristas que contiene T_n , es decir, $l(T_n) = n - 1$.

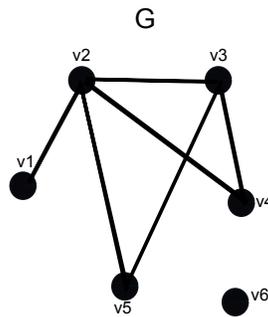
Definición 2.5. El ciclo C_n es una gráfica donde $V(C_n) = V(T_n)$ y $E(C_n) = E(T_n) \cup (v_n, v_1)$.

Definición 2.6. Sea G una gráfica. El *complemento* G^c de G está definida tomando $V(G^c) = V(G)$ y dos vértices u y $v \in V(G)$ son adyacentes en G^c , es decir $(u, v) \in E(G^c)$, si y sólo si ellos no son adyacentes en G , es decir $(u, v) \notin E(G)$. Es claro que $(G^c)^c = G$.

Definición 2.7. Una gráfica H se dice que es una *subgráfica inducida* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y si para cada u y $v \in V(H)$ tales que $(u, v) \in E(G)$ entonces $(u, v) \in E(H)$.

Definición 2.8. Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica, $G \setminus v$ la gráfica tal que $V(G \setminus v) = V(G) \setminus \{v\}$ y $E(G \setminus v) = E(G) \setminus \{(v, w) | w \in V(G)\}$

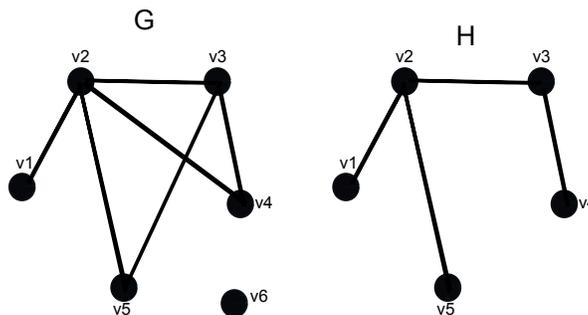
Ejemplo 2.9. Sea $G = (V(G), E(G))$, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$, que podemos visualizar de la siguiente manera.



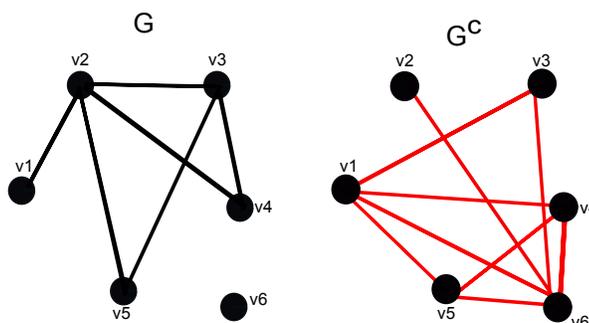
Claramente el orden de G es 6, ($|G| = 6$) ya que G tiene 6 vértices.

Si $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y

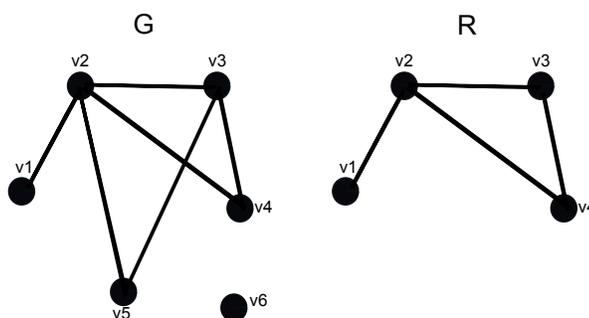
$E(H) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4)\}$, claramente $H = (V(H), E(H))$ es subgráfica de G .



El complemento de G , $G^c = (V(G^c), E(G^c))$ está dada por $V(G^c) = V(G)$ y $E(G^c) = \{(v_1, v_5), (v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_1, v_3), (v_2, v_6), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_3, v_6), (v_6, v_5)\}$



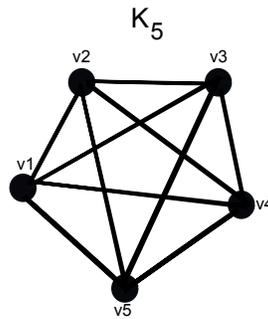
Si $R = (V(R), E(R))$, donde $V(R) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(R) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$, note que R es una subgráfica inducida de G .



Podemos observar que $(G \setminus v_5) \setminus v_6 = R$

Definición 2.10. Una gráfica G se dice que es *completa* si para todo u y v que pertenecen a $V(G)$ entonces (u, v) pertenece a $E(G)$. A la gráfica completa con n vértices la denotaremos K_n

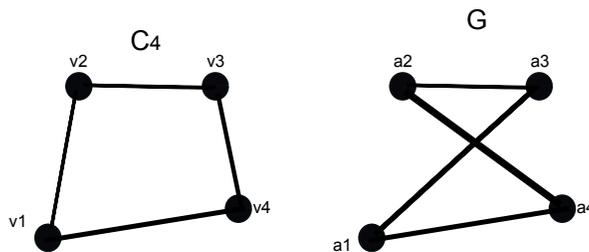
Ejemplo 2.11. $K_5 = (V(K_5), E(K_5))$ donde $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(K_5) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$



Definición 2.12. Dada una gráfica G y una gráfica H , decimos que G es *isomorfa* a H (denotado $G \cong H$), si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E(H)$, a f se le conoce como *isomorfismo*.

Observación 2.13. Sean G y H gráficas. Si $G \cong H$ entonces $H \cong G$.

Ejemplo 2.14. Consideremos a la gráficas C_4 , donde $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(C_4) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$ y a la gráfica G , donde $V(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $E(G) = \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}$

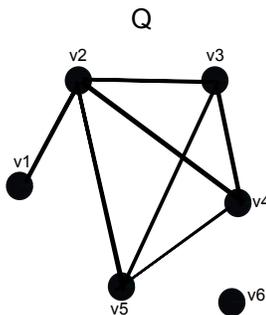


Claramente $C_4 \cong G$, basta con considerar un isomorfismo f con $f(v_2) = a_3$, $f(v_3) = a_2$ y $f(v_i) = a_i$ para los otros casos, es fácil ver que f es biyectiva y $(u, v) \in E(C_4)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E(G)$

Observación 2.15. Note que dada G , una gráfica cualquiera de n vértices, $G^c \cup G \cong K_n$, donde $G^c \cup G$ está dada por $V(G^c \cup G) = V(G) \cup V(G^c)$ y $E(G^c \cup G) = E(G) \cup E(G^c)$

Definición 2.16. Sea G una gráfica. El *número de clan* denotado $\omega(G)$ se define como el orden de la gráfica completa más grande contenida en G .

Ejemplo 2.17. Sea $Q = (V(Q), E(Q))$, donde $V(Q) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E(Q) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$



Claramente $\omega(Q) = 4$.

Definición 2.18. Sea G gráfica, dados $u, v \in V(G)$ la *distancia* entre u y v , denotado $d(u, v)$, es el mínimo número n tal que la trayectoria T_{n+1} es subgráfica de G con vértice inicial u y vértice final v .

Definición 2.19. Sea G una gráfica, decimos que G es una gráfica *bipartita* si podemos hacer una partición de los vértices en dos conjuntos $V_1(G), V_2(G)$ tales que $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$ y si u y v pertenecen a $V_i(G)$, entonces $(u, v) \notin E(G)$ para $i \in \{1, 2\}$.

Teorema 2.20. Una gráfica G es bipartita si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Demostración. Sea G una gráfica bipartita con bipartición de los vértices (V_1, V_2) y supongamos G tiene un ciclo impar C con vértices $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Podemos suponer que $x_1 \in V_1$, entonces $x_2 \in V_2$, $x_3 \in V_1$ y así sucesivamente, entonces $x_i \in V_1$ para todo i impar, en particular $(x_{2n+1}, x_1) \in E(G)$ lo que contradice la definición de gráfica bipartita.

Supongamos que G no tiene ciclos impares, sea $x \in V(G)$. Definimos a $V_1 = \{y \in V(G) \mid \text{dist}(x, y) \equiv 1 \pmod{2}\}$ y a $V_2 = V(G) \setminus V_1$, si existiera una arista $(x, y) \in E(G)$ con $x, y \in V_i$ para cualquier i , entonces G contendría un ciclo impar, lo cual es imposible. Por lo tanto G es bipartita. \square

Observación 2.21. El número de clan de una gráfica bipartita G es 2, dado que como G no puede tener ciclos impares, K_3 no puede ser subgráfica de G y como K_3 es subgráfica de K_n para

$n \geq 3$, entonces $\omega(G) = 2$.

2.2

Coloraciones de gráficas y gráfica perfectas

Definición 2.22. Sea G una gráfica. Una *coloración propia* de G es una función $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ donde si (u, v) pertenece a $E(G)$ entonces $f(u) \neq f(v)$.

Definición 2.23. Sea G una gráfica. El *número cromático* de G denotado $\chi(G)$ se define como el mínimo número n tal que $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ es una coloración propia.

Observación 2.24. Si el orden de G es n ($|V(G)| = n$), claramente una asignación $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tal que $f(v_i) = i$, es decir que asocia a cada vértice un color diferente es una coloración propia, por lo tanto $\chi(G) \leq n$.

Dada un gráfica G , encontrar $\chi(G)$ es generalmente muy difícil. En algunos casos exhibir una coloración puede no ser tan complicado, pero encontrar el número cromático de una gráfica arbitraria o caracterizar las gráficas por su número cromático es un problema NP completo [14], lo que significa de cierta manera que no se puede realizar un algoritmo para hacer una búsqueda exhaustiva.

El primer resultado de coloración de gráficas trataba exclusivamente sobre gráficas simples con la particularidad de que se pueden dibujar sin que ningún par de aristas se interseccten entre sí, mejor conocidas como mapas planos. Francis Guthrie(1831-1899) matemático británico postuló la conjetura de los 4 colores, notando que 4 colores son suficientes para colorear propiamente un mapa plano. Arthur Cayley envió el problema a la London Mathematical Society en 1879 y fue algunos años después cuando Alfred Kempe publicó un artículo que “resolvía” el problema. Por una década el problema de los 4 colores se consideró resuelto. Por su contribución Kempe fue elegido miembro de la Royal Society y posteriormente presidente de la London Mathematical Society.

En 1890 Heawood descubrió que el argumento de Kempe contenía un error, así que en ese año publicó un artículo en el cual demostró el teorema de los 5 colores probando que todo mapa plano puede ser coloreado con a lo más 5 colores usando ideas de Kempe. En el siguiente siglo fueron desarrolladas distintas teorías para reducir el número de colores necesarios a cuatro, y ésto no fue posible hasta 1976 cuando Kenneth Appel y Wolfgang Haken probaron el teorema haciendo uso de métodos computacionales.

Ejemplo 2.25. Se puede ver que el número cromático de una gráfica bipartita es 2, ya que por definición si G es una gráfica bipartita, existen dos particiones V_1 y V_2 de $V(G)$ tales que para cada par de vértices en V_i , $(u, v) \notin E(G)$, así se propone $f : V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ tal que $f(u) = i$ para $u \in V_i$.

Más aún podemos ver que la definición de gráfica bipartita es equivalente a la propiedad de que dicha gráfica sea 2 coloreable. Ya mencionamos que si una gráfica es bipartita es 2 coloreable, ahora supongamos que una gráfica G es 2 coloreable, entonces existe una coloración $f : V(G) \rightarrow \{1, 2\}$, considere la partición $V_i = \{x \in V(G) | f(x) = i\}$ para $i \in \{1, 2\}$, claramente si $x, y \in V_i$ entonces $(x, y) \notin E(G)$, pues de lo contrario no podrían tener el mismo color.

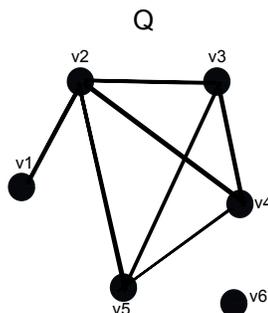
Observación 2.26. $\chi(C_{2n}) = 2$, con $f : V(C_{2n}) \rightarrow \{1, 2\}$ tal que $f(v_{2i}) = 1$ y $f(v_{2i-1}) = 2$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observación 2.27. $\chi(C_{2n+1}) = 3$, puesto que si suponemos que $\chi(C_{2n+1}) = 2$ ésto implicaría que C_{2n+1} es bipartita, contradiciendo el teorema 2.20, así $\chi(C_{2n+1}) > 2$, ahora considere a $f : V(C_{2n+1}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tal que $f(v_{2i}) = 1$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $f(v_{2n+1}) = 3$ y a $f(v_{2j-1}) = 2$ para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, claramente f es una coloración propia, por lo tanto $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

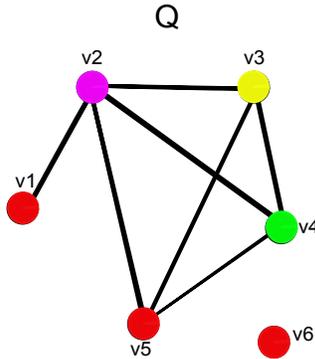
Observación 2.28. Sea K_n la gráfica completa de n vértices. Note que $\chi(K_n) = n$ ya que para cada $u \in V(G)$ y $v \in V(G)$ implica que $(u, v) \in E(G)$ entonces u y v no pueden tener el mismo color, por lo tanto necesitamos n colores.

Observación 2.29. Si H es subgráfica de G entonces es claro que $\chi(H) \leq \chi(G)$, puesto que como $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$ podemos colorear a los vértices de H con los mismo colores de G . Por la observación anterior podemos concluir que $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Ejemplo 2.30. Sea Q gráfica



Podemos notar fácilmente que $\omega(Q) = 4$.
Ahora coloremos a Q de la siguiente forma:



Dada esta coloración propia tenemos que $\chi(Q) \leq 4$ (nótese que podría asignarle a cada vértice un color distinto), ahora por la observación 2.29 sabemos que $4 = \omega(Q) \leq \chi(Q) \leq 4$ por lo tanto $\chi(Q) = 4$

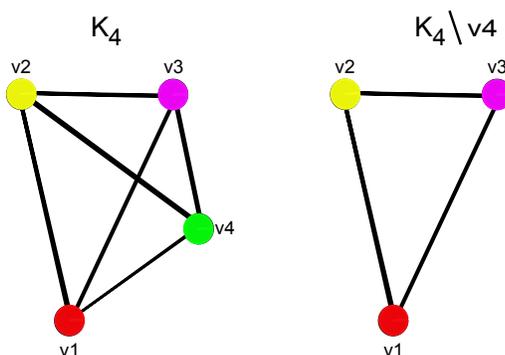
Observación 2.31. Dadas G y H gráficas, si $G \cong H$ entonces $\chi(G) = \chi(H)$.
Como $G \cong H$ existe una función $k: V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(k(u), k(v)) \in E(H)$, supongamos que $\chi(G) = n$ y sea $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ la coloración propia, ahora proponemos la coloración propia $f': V(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dada por $f'(v) = f(k^{-1}(v))$, claramente f' es una coloración propia de n colores de H lo cual implica $\chi(G) \leq \chi(H)$, análogamente se prueba que $\chi(G) \geq \chi(H)$ y por lo tanto $\chi(G) = \chi(H)$.

Teorema 2.32. Sea G una gráfica, $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.

Demostración. Como ya se mencionó $\chi(C_{2n+1}) = 3$, lo que implica que si $\chi(G) \leq 2$ entonces C_{n+1} no puede ser subgráfica de G . Por otro lado ya se demostró en el teorema 2.20 que si G no tiene ciclos impares G es bipartita y en el ejemplo 2.25 se observó que el número cromático de cualquier gráfica bipartita es 2, por lo tanto $\chi(G) \leq 2$. □

Definición 2.33. Diremos que una gráfica G es *crítica cromática* o simplemente que es crítica, si $\chi(G) = n$ pero para cualquier $v \in V(G)$ se tiene que $\chi(G \setminus v) < n$.

Ejemplo 2.34. Consideremos K_n , sabemos que $\chi(K_n) = n$, pero si consideramos $\chi(K_n \setminus v) = n - 1$ para cualquier $v \in V(K_n)$, por lo tanto K_n es crítica



Recordemos que para toda gráfica sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G)$, en el ejemplo 2.30 obtuvimos la igualdad $\omega(G) = \chi(G)$, en general que una gráfica cumpla $\omega(G) = \chi(G)$ es realmente difícil. ¿Qué tanta diferencia puede existir entre ellos?. En 1955 el matemático polaco Jan Mycielski probó que la diferencia entre estos dos parámetros puede ser tan grande como se quiera. La construcción de Mycielski exhibe a partir de una gráfica G sin triángulos, otra gráfica G' sin triángulos con número cromático tan grande como se quiera. Probando que el clan de una gráfica no es necesariamente “responsable” de que el número cromático sea grande. Debido a que esta pregunta tiene gran sentido y a que es difícil que la igualdad entre estos dos parámetros se de motiva la siguiente definición

Definición 2.35. Una gráfica G es *perfecta* si para toda subgráfica inducida H de G se cumple que $\chi(H) = \omega(H)$.

El siguiente teorema es clásico en la literatura y referimos al lector a [10] para su demostración.

Teorema 2.36. Si G es una gráfica perfecta, entonces G^c es perfecta.

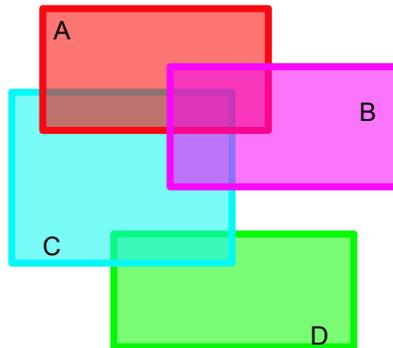
2.3

Gráficas de intersección y sus complementos

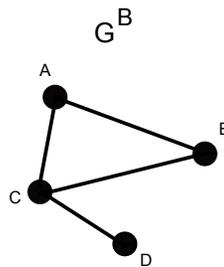
A continuación definiremos un tipo de gráficas que se han estudiado desde hace mucho tiempo ver por ejemplo [12] y que ayuda a codificar la información combinatoria de algunas familias, como por ejemplo las familias de conjuntos convexos, la cual nos será de gran utilidad.

Definición 2.37. Dado un conjunto B , se define la *gráfica de intersección* denotada G_B como $G_B = (V(G_B), E(G_B))$, donde $V(G_B) = B$ y dados $x \in B$ y $y \in B$, $(x, y) \in E(G_B)$ si y sólo si $x \cap y \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.38. Sea B la siguiente familia de cajas en \mathbb{R}^2 , $B = \{A, B, C, D\}$



Así, $V(G_B) = \{A, B, C, D\}$ y $E(G_B) = \{(A, B), (A, C), (C, B), (C, D)\}$.



Definición 2.39. Dada una gráfica G , diremos que G es *n-realizable* si existe una familia de conjuntos convexos $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ de tal manera que $G_{\mathcal{F}} \cong G$. Dada una gráfica G a la mínima n para la cual la gráfica es n -realizable como familia de n -cajas, se le llama “cajabilidad” (Boxicity).

Es bien sabido que encontrar la “cajabilidad” de una gráfica G cualquiera es un problema NP-duro [6], más aún saber si una gráfica tiene cajabilidad 2 es un problema NP completo [9].

El siguiente teorema es clásico en la literatura, referimos al lector a [11] para su demostración.

Teorema 2.40. *Las gráficas de intersección de intervalos en \mathbb{R} son perfectas.*

Es decir, dada una familia \mathcal{F} de intervalos en \mathbb{R} y dada $G_{\mathcal{F}}$ su gráfica de intersección entonces $\chi(G_{\mathcal{F}}) = \omega(G_{\mathcal{F}})$

Para terminar este capítulo demostraremos un resultado sencillo pero que nos será de gran utilidad para el resto de esta tesis.

Proposición 2.41. *Sea G una gráfica perfecta, si para cada subgráfica H de G con $|V(H)| = n + 1$ tenemos que $\chi(H) = n$, entonces $\chi(G) = n$.*

Demostración. Como H es subgráfica de G entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$ y como $\chi(H) = n$ entonces $n \leq \chi(G)$. Ya que G es perfecta basta probar que $\omega(G) \leq n$, supongamos que K_{n+1} es subgráfica de G , es decir, $\omega(G) \geq n + 1$ pero $|V(K_{n+1})| = n + 1$ lo que implicaría por hipótesis que $\chi(K_{n+1}) = n$, lo cual es una contradicción por lo tanto $\omega(G) \leq n$ y como $n \leq \omega(G) \leq n$ tenemos que $\omega(G) = n$. \square

Algunos teoremas de perforación para cajas

En esta sección utilizaremos algunos de los conceptos y resultados de gráficas definidos en el capítulo anterior para demostrar algunas propiedades de perforación de familia de cajas.

En el capítulo 1 definimos a Δ_m^d como la clase de todas las familias de cajas de dimensión m en \mathbb{R}^d y a $h(d, m, n)$ como el menor cardinal h (si existe) con la propiedad que dada $\mathcal{F} \in \Delta_m^d$, se tiene que para toda subfamilia $F \subset \mathcal{F}$ con $|F| \leq h(d, m, n)$ tiene número de perforación n ($\Pi(F) = n$), entonces toda la familia tiene número de perforación n , ($\Pi(\mathcal{F}) = n$).

Recordemos también que cualquier familia \mathcal{F} que pertenece a la clase de todas las familias de m -cajas en \mathbb{R}^d (Δ_m^d) satisface la propiedad de ser 2-Helly, es decir que dada una familia $\mathcal{F} \in \Delta_m^d$ cumple que si cada par de cajas tienen intersección no vacía entonces toda la familia \mathcal{F} tiene intersección no vacía.

A continuación demostraremos que el número de perforación de una familia 2-Helly y el número cromático del complemento de su gráfica de intersección están relacionados.

Teorema 3.1. *Sea B una familia 2-Helly, entonces $\Pi(B) = n$ si y sólo si $\chi(G_B^c) = n$.*

Demostración. Primero demostraremos que $\Pi(B) = n$ implica $\chi(G_B^c) \leq n$.

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ el conjunto de n puntos que perforan a la familia B , es decir, tal que $A \cap b \neq \emptyset$ para toda $b \in B$. Sea $B_1 = \{b \in B \mid b \cap x_1 \neq \emptyset\}$ similarmente sea $B_i = \{b \in B \setminus \{B_1, B_2, \dots, B_{i-1}\} \mid b \cap x_i \neq \emptyset\}$ para $i = \{2, \dots, n\}$. Como $\Pi(B) = n$ entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ con $B_i \neq \emptyset$ y por construcción $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Consideremos a G_B^c , y sea $f : V(G_B^c) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ coloración tal que $f(b) = i$ para $b \in B_i$. Es fácil ver que f es una coloración propia puesto que si u y v tienen el mismo color esto implica que ambos pertenecen a B_i , lo que implica que $(u, v) \notin E(G_B^c)$, así f es una coloración propia, por lo tanto $\chi(G_B^c) \leq n$.

Ahora demostraremos que si B es una familia 2-Helly con $\chi(G_B^c) = n$ entonces $\Pi(B) \leq n$. Supongamos que $\chi(G_B^c) = n$ y consideremos la coloración propia $f : V(G_B^c) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, sea $B_i = \{v \in V(G_B^c) \mid f(v) = i\}$, para cualesquiera u y v pertenecen a B_i , $(u, v) \notin E(G_B^c)$, lo que implica que $u \cap v \neq \emptyset$ en B , como B es 2-Helly por la observación 1.10 que refiere a que cualquier subconjunto de un conjunto 2-Helly es 2-Helly, tenemos que B_i es 2-Helly, así la intersección de todos los elementos de B_i es no vacía, lo que implica que $\Pi(B) \leq n$.

Para demostrar que $\Pi(B) = n$ implica $\chi(G_B^c) \geq n$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\Pi(B) = n$ implica $\chi(G_B^c) = n - 1$, entonces por la prueba anterior tenemos que $\chi(G_B^c) = n - 1$ implica $\Pi(B) \leq n - 1$ lo cual es una contradicción por lo tanto $\chi(G_B^c) = n$, análogamente se prueba que $\chi(G_B^c) = n$ entonces $\Pi(B) \geq n$. □

Habiendo encontrado una relación entre el número cromático y el número de perforación podremos profundizar sobre las configuraciones de la familia Δ_m^d . Empecemos con el inciso ii) del Teorema de Danzer y Grünbaum, partiendo de la proposición 2.41 y el teorema 2.40 tenemos la siguiente proposición.

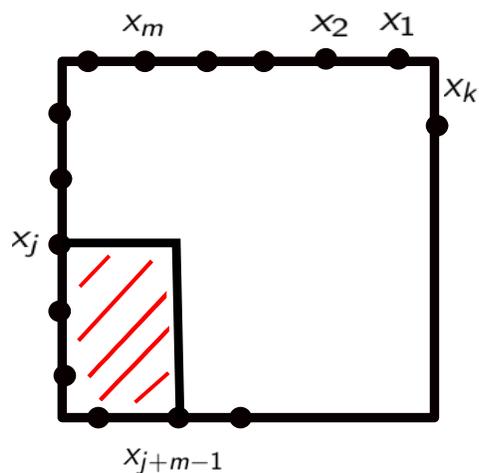
Proposición 3.2. $h(1, 1, n) = n + 1$

Demostración. Sea \mathcal{F} una familia de cajas en \mathbb{R} , es decir una familia de intervalos en \mathbb{R} con más de $n + 1$ elementos. Por hipótesis cada $n + 1$ son n -perforables, es decir $\Pi_{n+1}(\mathcal{F}) = n$ (o $\Pi_{n+1}^n(\mathcal{F})$), entonces por el teorema anterior tenemos que $\chi(H_F^c) = n$ para toda subgráfica H_F cuya realización es la subfamilia $F \in \mathcal{F}$ con $|V(H_F)| = n + 1$, y queremos demostrar que $\Pi(\mathcal{F}) = n$. Por el Teorema 2.40 sabemos que las gráficas de intersección de intervalos son perfectas y por la proposición 2.41 que dice que si una gráfica perfecta G cumple que para toda subgráfica con a lo más $n + 1$ vértices es a lo más n coloreable entonces G es n colorable, tenemos que $\chi(G_F^c) = n$ y entonces $h(1, 1, n) = n + 1$. □

Teorema 3.3. $h(2, 2, n) = \aleph_0$, para $n \geq 4$.

Demostración. La demostración de este teorema se basa en generar una familia de cajas en \mathbb{R}^2 que cumple Π_k^n pero que no cumple Π^n para ningún n .

Sea m un entero positivo y sea $k(m) = mn + 1$. Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ puntos de la frontera de C^2 , el cuadrado unitario con centro en el origen que dividen su perímetro en partes iguales. Consideremos A_j el rectángulo más pequeño que contiene a los puntos $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+m-1}$ y consideremos la familia de 2-cajas en \mathbb{R}^2 dada por $\mathcal{F} := \{A_j \mid j = 1, 2, \dots, k\}$.



Ahora consideremos a $G_{\mathcal{F}}$ la gráfica de intersección de la familia \mathcal{F} , es fácil observar que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ cuando $j \in \{i - m + 1, i + m - 1\}$, $j \pmod{mn + 1}$, por lo que podemos ver a G como la gráfica con $V(G) = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ y $E(G) = \{(A_j, A_{j+1}), (A_j, A_{j+2}), \dots, (A_j, A_{j+m-1}) \mid j = i \pmod{k}, i = \{1, 2, \dots, k(m)\}\}$, y la podemos visualizar como muestra la figura 3.1.

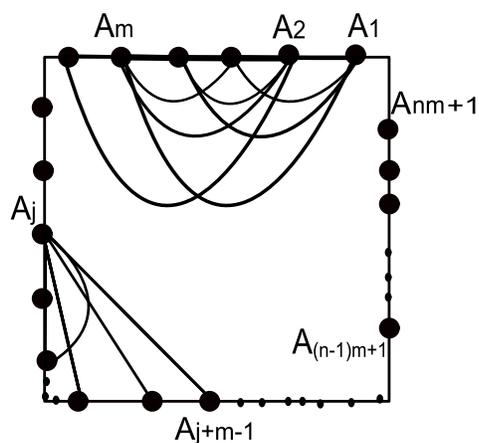


Fig 3.1

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sean $m = 3$ y $n = 5$, así

$k(3) = nm + 1 = 16$. Así la gráfica de intersección se verá como muestra la siguiente figura.

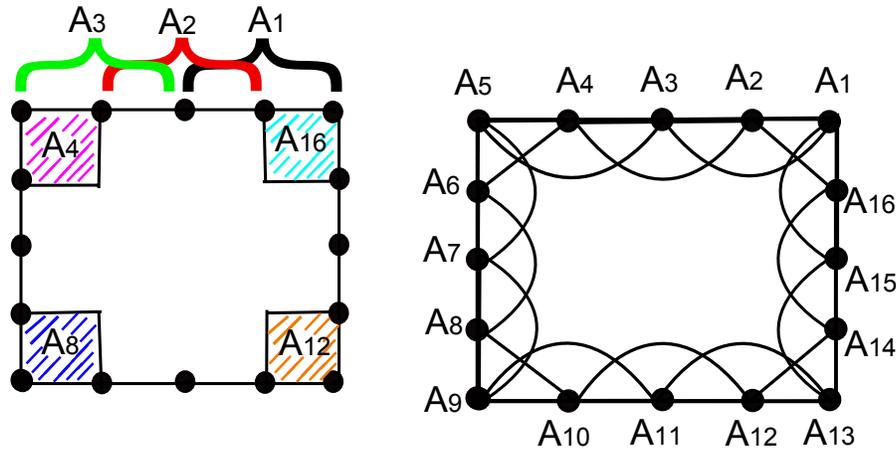


Fig 3.2

Como vimos en los resultados anteriores, estamos interesados en probar que $\chi(G^c) = n + 1$. Dada la dificultad del complemento de la gráfica de intersección trabajaremos solo con G , tomando en cuenta que si $(u, v) \in E(G)$ entonces v y u pueden tener asignado el mismo color ya que $(u, v) \notin E(G^c)$.

Primero demostraremos que $\chi(G^c) \geq n + 1$.

Para cualquier $A_i \in V(G)$ sabemos que a lo más $m - 1$ vértices adyacentes pueden tener el mismo color (dado que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ cuando $j \in \{i - m + 1, i + m - 1\}$), lo que significa que en $G^c_{\mathcal{F}}$ cualesquiera par de elementos cuyos índices están separados por al menos m vértices cumplen que $(A_i, A_{(i+m) \bmod k}) \in E(G^c_{\mathcal{F}})$, lo que implica que cada clase cromática sólo puede tener a lo más m elementos. Por lo tanto necesitamos más de n colores para colorear esta gráfica, de este modo $\chi(G^c) \geq n + 1$.

Ahora veremos que $\chi(G^c \setminus A_i) \leq n$ donde $A_i \in V(G^c)$

Para probar lo anterior basta con exhibir una coloración propia. Sin pérdida de generalidad supongamos $i = k$, y sea $\Phi : V(G^c) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ de la siguiente forma $\Phi(A_i) = \lceil \frac{i}{m} \rceil$ (como se muestra en la Figura 3.3), por demostrar que Φ es propia.

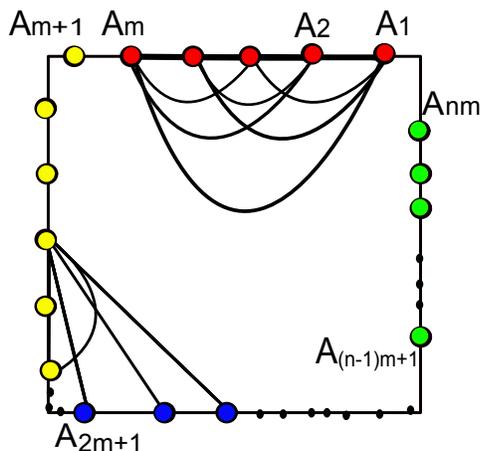


Fig 3.3

Note que estamos coloreando cada m vértices consecutivos de un mismo color partiendo desde A_1 , y como $k - 1 = mn$ tenemos n colores distintos. Podemos ver que cualesquiera m vértices del mismo color están coloreados propiamente, puesto que en la gráfica de intersección existe una arista para cada par de estos vértices, lo que implica que no existe arista entre ellos en G^c , por lo tanto es una coloración propia e implica que $\chi(G^c \setminus A_k) \leq n$.

Con estos hechos notamos que $\chi(G^c \setminus A_i) \leq n$ para cualquier $A_i \in V(G^c)$ pero $\chi(G^c) \geq n + 1$, así por el teorema 3.1, tenemos una familia 2-Helly tal que para cualesquiera $k - 1$ elementos de \mathcal{F} son n -perforables pero \mathcal{F} no es n -perforable y como la cardinalidad de \mathcal{F} puede ser tan grande como se quiere se sigue que $h(2, 2, n) = \aleph_0$ \square

Observación 3.4. $h(d, d, n) = \aleph_0$ con $n \geq 4$, pues basta con construir una familia de d -cajas tales que sus proyecciones en \mathbb{R}^2 sean como la familia construida en el lema anterior.

Gráficas Prohibidas

El teorema de Danzer y Grünbaum caracteriza a $h(d, d, n)$ para toda d y todo n , y claramente es un teorema que relaciona tanto la combinatoria como la geometría. En este capítulo trataremos de codificar algunas propiedades geométricas de las cajas y aportaremos algunos resultados para el caso $h(d, m, n)$. Para este hecho necesitamos unas definiciones previas.

Cabe mencionar que el trabajo que a continuación presentamos es original y tiene varias posibilidades de generalizarse y dar lugar a futuras investigaciones.

Recordemos que una gráfica G es realizable si existe una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos de tal manera que $G_{\mathcal{F}} \cong G$, donde a la familia \mathcal{F} se le conoce como la realización de G , así en esta tesis estamos interesados en gráficas realizables de familias de cajas, así como en las gráficas de intersección de la familia de cajas, lo que nos motiva a la siguiente definición.

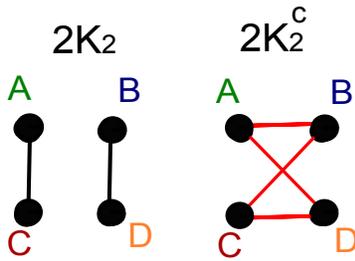
Definición 4.1. Decimos que una gráfica G es m -prohibida en \mathbb{R}^d , si su complemento no es realizable con m -cajas en \mathbb{R}^d

Proposición 4.2. Sea $2K_2$ una gráfica que consiste de dos aristas, es decir, con $V(2K_2) = \{A, B, C, D\}$ y $E(2K_2) = \{(A, C), (B, D)\}$, entonces $2K_2$ es 1-prohibida en \mathbb{R}

Demostración. Supongamos que $2K_2^c$ es realizable (es decir, que $2K_2$ no es 1-prohibida en \mathbb{R}), entonces existe intervalos cerrados $A = [a_i, a_d]$, $B = [b_i, b_d]$, $C = [c_i, c_d]$ y $D = [d_i, d_d]$ con $a_i, a_d, b_i, b_d, c_i, c_d, d_i, d_d \in \mathbb{R}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que A es el intervalo que se encuentra lo más a la izquierda posible, es decir, que $a_i < x$ para todo $x \in A \cup B \cup C \cup D$.

Como $(A, C) \in E(2K_2)$, A no intersecta a C , por lo tanto C está a la derecha de A . Como $(A, B) \notin E(2K_2)$ y $(C, B) \notin E(2K_2)$ implica que B intersecta a A y a C , lo que implica que $a_d \in B$ similarmente $(A, D) \notin E(2K_2)$ y $(C, D) \notin E(2K_2)$, implicando también que D intersecta a A y a C de esta manera $a_d \in D$, por lo tanto $a_d \in B \cap D$ pero $(B, D) \in E(2K_2)$ así $B \cap D \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.



□

La siguiente proposición nos será de gran utilidad para el trabajo realizado en este capítulo.

Proposición 4.3. *Cualquier gráfica G que tenga una gráfica m -prohibida como subgráfica inducida es m -prohibida.*

Demostración. Sea H la subgráfica inducida m -prohibida en G . Supongamos que G no es m -prohibida y consideremos su realización \mathcal{F} de G en \mathbb{R}^m , por la construcción de G sabemos que podemos definir una función biyectiva $\Omega : V(G) \rightarrow \mathcal{F}$, que asocia a cada vértice un elemento de la familia y tal que $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $\Omega(u) \cap \Omega(v) \neq \emptyset$, como H es una subgráfica inducida de G podemos considerar a $\mathcal{H} = \{\Omega(v) | v \in H\}$, así \mathcal{H} es una realización de H , lo cual es una contradicción. Por lo tanto G no es realizable, lo que implica que es m -prohibida. □

Proposición 4.4. C_4 es realizable como 1-cajas en \mathbb{R} con $d > 1$, mas aún su realización está contenida en un plano paralelo a los ejes coordenados.

Demostración. Asumiremos que $V(C_4) = \{a, b, c, d\}$ y que $E(G) = \{(a, d), (d, b), (b, c), (c, a)\}$, claramente la siguiente familia es una realización de C_4 , donde el intervalo denotado con letra mayúscula corresponde al vértice etiquetado con la misma letra minúscula.

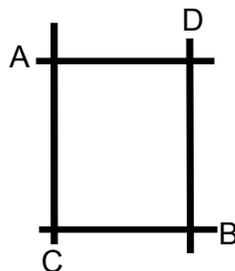


Fig 4

Supongamos ahora que $A, B, C, D \in \Delta^1$ forman una realización de C_4 . Por la proposición 4.2 sabemos que C_4 no está contenida en un espacio de dimensión uno, así que dicha realización está contenida en el plano o en un espacio de dimensión mayor, es decir, su cajabilidad es mayor o igual a 2. Observemos primero que si dos conjuntos forman un arista en C_4 (es decir se intersectan) éstos no pueden ser paralelos, suponga lo contrario, supongamos que A y D son paralelos, como la cajabilidad de C_4 es mayor que 1, supongamos sin pérdida de generalidad que C es perpendicular a A , pero de este modo B no puede intersectar a C y a D sin que $A \cap B \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto A y D son perpendiculares y generan un plano, el cual denotaremos AD .

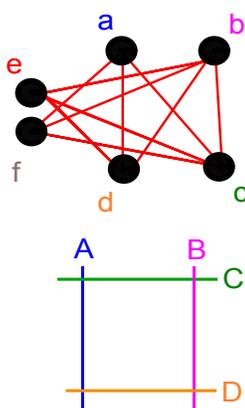
Como $A \cap C \neq \emptyset$, por el argumento anterior no pueden ser paralelos, entonces A y C determinan un plano, el cual denotaremos como el plano AC . Supongamos que $AC \cap AD$ es solamente una recta, es decir que AC y AD son perpendiculares, lo cual es una contradicción puesto que de esta forma B no puede intersectar a D y a C a la vez, por lo tanto $AC = AD$. Como D y C están en el mismo plano esto obliga a que $B \subset AC = AD$, lo que implica que A, B, C, D están contenidos en un plano paralelo a los ejes coordenados.

□

El Teorema anterior afirma que la realización mostrada en la Figura 4 es “única”, en el sentido de que cualquier otra realización variará sólo en los tamaños de los intervalos y en que tan alejados están A de B y C de D .

Proposición 4.5. *La trayectoria T_6 es 1-prohibida en \mathbb{R}^d .*

Demostración. Sea $V(T_6) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $E(T_6) = \{(b, a), (a, e), (e, f), (f, d), (d, c)\}$, Supongamos que existe un conjunto $F = \{A, B, C, D, E, F\}$ que realiza a T_6^c . Podemos notar que C_4 es una subgráfica inducida de T_6^c , así sin pérdida de generalidad supongamos que A, B, C y D inducen a C_4 , por el Teorema 4.4 sabemos que su realización está contenida en un plano paralelo, más aún, su realización es como lo muestra la siguiente figura.



De este modo E intersecta a B , C y D y a su vez F intersecta a A , B y C , pero también sabemos que B y C son perpendiculares y que se intersectan en sólo un punto lo que implicará que $E \cap F \neq \emptyset$, lo cual no puede suceder pues $(e, f) \in E(T_6)$, por lo tanto T_6 es 1-prohibida en \mathbb{R}^d . \square

El siguiente teorema, prueba la existencia de un teorema tipo Helly para número de perforación con intervalos paralelos a los ejes en \mathbb{R}^d , el cual es un resultado original.

Teorema 4.6. $h(d, 1, 2) = 5$

Demostración. Primero demostraremos que $h(d, 1, 2) \geq 5$.

Para ésto basta con exhibir una familia \mathcal{F} de 1-cajas en \mathbb{R}^2 , con $|\mathcal{F}| = 5$ tal que para cualquier $F \subset \mathcal{F}$ con $|F| \leq 4$ cumple que $\Pi(F) = 2$, pero $\Pi(\mathcal{F}) > 2$. Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ con $A_i \in \Delta_1^2$ para todo $A_i \in \mathcal{F}$, como muestra la figura 4.5.

(Puede pensarse a \mathcal{F} tal que $A_1 = \{[0, x] | 0 \leq x \leq 1\}$, $A_2 = \{[x, 0] | 0 \leq x \leq 1\}$, $A_3 = \{[2, x] | 0 \leq x \leq 1\}$, $A_4 = \{[x, 1] | 0 \leq x \leq 2\}$, $A_5 = \{[x, 0] | 1 \leq x \leq 2\}$).

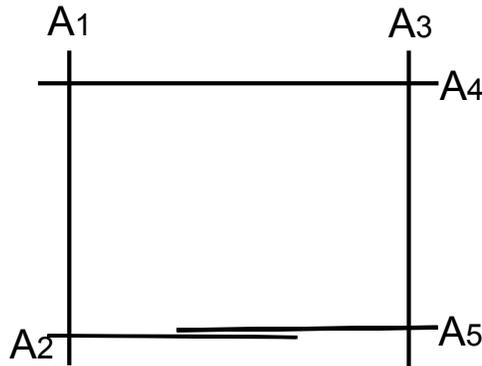


Fig 4.5

$A_5 \cap A_2 \neq \emptyset$ (pero se dibujan separados para poder identificarlos). Es muy fácil ver que esta familia cumple que cualesquiera 4 elementos de la familia tienen número de perforación 2, pero toda la familia tiene número de perforación 3, lo que implica que $h(d, 1, 2) \geq 5$. Haciendo uso de los resultados que tenemos en gráficas, esto es equivalente a ver que $G_{\mathcal{F}} \cong C_5$ y como C_5 es autocomplementaria, es decir ella es isomorfa a su complemento, se tiene que $G_{\mathcal{F}}^c \cong C_5$. Es claro que $G_{\mathcal{F} \setminus A_i} \cong T_4$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, así $\chi(T_4) = 2 = \chi(G_{\mathcal{F} \setminus A_i})$ y $\chi(C_5) = 3 = \chi(G_{\mathcal{F}})$.

Ahora demostraremos que $h(d, 1, 2) \leq 5$.

Sea G una gráfica tal que G^c es una gráfica de intersección de intervalos en \mathbb{R}^d , que cumple que para cada subgráfica H con $|H| \leq 5$ se tiene $\chi(H) \leq 2$ por demostrar que $\chi(G) \leq 2$. Por la proposición anterior sabemos que T_6 es 1-prohibida en \mathbb{R}^d , lo que implica por la Proposición 4.3 que dice que cualquier gráfica G con una subgráfica inducida m -prohibida es m -prohibida, que cualquier C_n es prohibido para $n \geq 7$, puesto que T_6 es una subgráfica inducida de C_n para $n \geq 7$.

Sabemos por hipótesis que $\chi(H) \leq 2$ cuando $|H| \leq 5$, lo que implica que C_n no puede ser subgráfica de G para $n \in \{3, 5\}$, por lo que tenemos que C_n no puede ser subgráfica de G para toda n impar, lo que implica que $\chi(G) \leq 2$ por el teorema 2.32. Así podemos traducir que dada una familia \mathcal{F} de intervalos en \mathbb{R}^d , tal que si para cualquier $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ con $|\mathcal{H}| \leq 5$, se cumple que \mathcal{H} es a lo más 2-perforable, entonces \mathcal{F} es a lo más 2-perforable por el Teorema 3.1, lo que implica que $h(d, 1, 2) \leq 5$. \square

Conclusiones y trabajo futuro.

En esta tesis trabajamos la existencia de teoremas tipo Helly para 1-cajas en \mathbb{R} con número de perforación n , utilizando el concepto de gráficas perfectas y de gráficas de intersección de intervalos en \mathbb{R} .

En contraste con las gráficas con número cromático n , cuya caracterización es extremadamente difícil, las gráficas 2-coloreables son mucho más fáciles de caracterizar. De hecho gracias a esta caracterización pudimos probar en el capítulo 4 la existencia de Teoremas tipo Helly en toda dimensión para intervalos paralelos a los ejes y con número de perforación 2. Por esta razón estamos seguros que verificar la existencia de Teoremas tipo Helly para número de perforación 2 es muy posible para m -cajas, y puede dar lugar a futuras investigaciones.

Sin haber profundizado mucho en los detalles estamos convencidos que la gráfica $T_6 + (m-1)K_2$ es m -prohibida en \mathbb{R}^d para $m < d$. Sea Q_{m+1} el conjunto de m -cajas en \mathbb{R}^{m+1} , las cuales son las facetas que conforman al $(m+1)$ -Hipercubo (el cual es la generalización natural n -dimensional del cuadrado (Q_2) y del cubo (Q_3), etc.), a la gráfica de intersección de Q_{m+1} se le conoce como la gráfica de Turán $T(2(m+1), (m+1))$ [13], podemos ver que el complemento de la gráfica de intersección de Q_{m+1} es homeomorfo a $(m+1)K_2$.

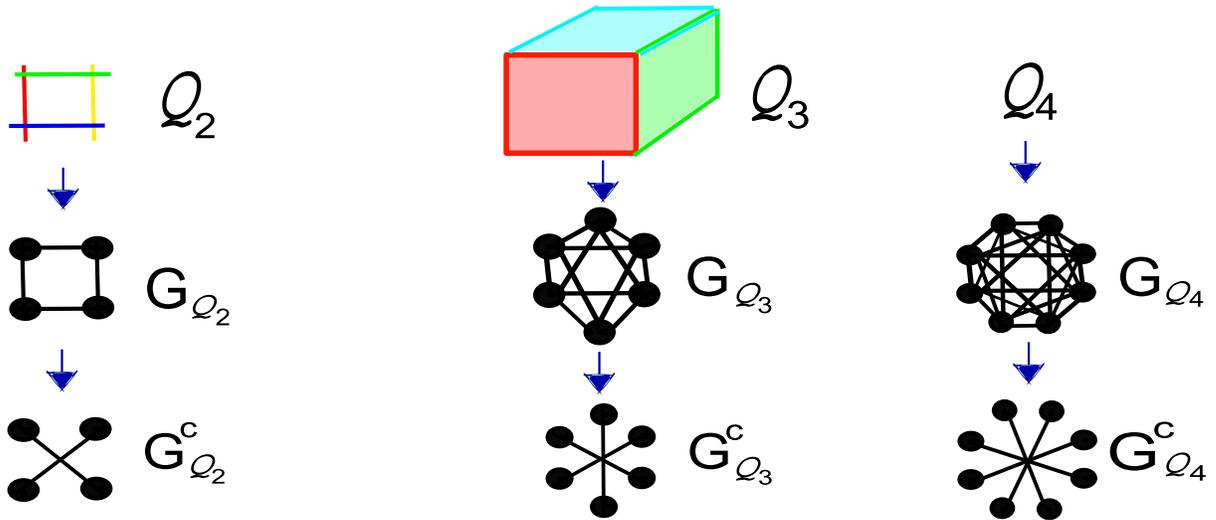


Fig 5.1

De hecho sería muy interesante probar que la gráfica de Turán $T(2(m+1), (m+1))$ es m -realizable de manera “única” en \mathbb{R}^d para $d > m$. Lo que nos permitiría demostrar que el complemento de la gráfica de intersección de cualquier familia de m -cajas no puede tener ciclos mayores a $4 + 3m$. Además si probamos que C_{3+3m} es m -prohibido en \mathbb{R}^d podremos asegurar que $h(d, m, 2) \leq 1 + 3m$ para m par y $h(d, m, 2) \leq 2 + 3m$ para m impar.

Para la otra desigualdad sería interesante exhibir una familia \mathcal{F} de m -cajas en \mathbb{R}^{m+1} , con $|\mathcal{F}| = 2 + 3m$, tal que para cualquier $F \subset \mathcal{F}$ con $|F| \leq 3m + 2$ cumpla que $\Pi(F) = 2$, pero $\Pi(\mathcal{F}) > 2$ para todo m impar, y una familia $|\mathcal{F}| = 1 + 3m$ tal que para cualquier $F \subset \mathcal{F}$ con $|F| \leq 3m$ cumpla que $\Pi(F) = 2$, pero $\Pi(\mathcal{F}) > 2$ para m par.

De esta manera conjeturamos lo siguiente:

Conjetura 5.1.

$$h(d, m, 2) = \begin{cases} 2 + 3m & \text{para } m \text{ impar} \\ 1 + 3m & \text{para } m \text{ par} \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] R. Balakrishnan, K.Ranganathan, *A text of Graph Theory* , EUA, Springer (2000), 227p.
- [2] R. Balakrishnan, *Graph Theory*, EUA, Shaum´s Outline (1997), 293p.
- [3] G. Chartrand, *Graphs and Digraphs*, EUA, The Wadsworth & Brooks/Cole (1986), 354p.
- [4] L. Danzer, B. Grünbaum, *Intersection Properties of boxes in \mathbf{R}^d* , *Combinatorica* (1982) 2(3), pp 237–246.
- [5] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, *Helly´s theorem and its relatives*, *Proc.Symposia in Pure Math.*,Vol VII (Convexity) (1963), pp 101–180.
- [6] M. B. Cozzens, *Higher and multi-dimensional analogues of interval graphs*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ (1981).
- [7] S. Lay, *Convex sets and their applications*, Canada, John Wiley & Sons (1982), 238p.
- [8] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press(1994), 444p.
- [9] J. Kratochvil, *A special planar satisfiability problem and a consequence of its NP-completeness*, *Disc. Appl. Math.*54 (1994), 233–252pp.

- [10] L. Lovász., *Normal hypergraphs and the perfect graph theory*, Discrete Math. 2 (1972), 253–267pp.
- [11] D. Berg et al, *Set intersections, Perfect graphs, and voting in agreeable societies*, Manuscript August 2006, 6pp.
- [12] P. Erdős, A. Goodman, L. Posá, *The representation of a graph by set intersections*, Canadian Journal of Mathematics 18 (1966). 106-112.
- [13] Aigner, M. *Turán's Graph Theorem*, Amer. Math. Monthly 102, 808–816, 1995.
- [14] R. M. Karp. *Reducibility among combinatorial problems.*, R. E. Miller y J. W. Thatcher (Eds), Complexity of computer computations, Plenum Press, New York (1972), 85-103.
- [15] Helly, E. (1923), *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 32: 175–176.
- [16] H. Hadwiger and H. Debrunner, *Über eine Variante zum Helly'schen Satz*, Arch. Math. 8 (1957), 309–313.