UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica.

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presentan:
María Guadalupe Barrón Evaristo
Alma Delia Castañón Hernández

Dirigida por:

M. C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez

Santiago de Querétaro, Qro. Marzo 2014

ACUERDO 824/13

C. U. 11 de noviembre del 2013

C. María Guadalupe Barrón Evaristo (134546)
Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
(MAT04)
Presente

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis colectiva, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 11 de noviembre del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar el protocolo de la opción de titulación por lo que deberá trabajar en el tema **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"** bajo la dirección de la MC Patricia Isabel Spíndola Yáñez.

El contenido aprobado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

ÍNDICE

5.3.6 NEWTON
5.3.7 LEIBNIZ
5.4 TERCERA ETAPA
5.4.1 EULER
5.4.2 D´ALAMBERT
5.4.3 LAGRANGE
5.5 CUARTA ETAPA
5.5.1 BOLZANO
5.5.2 CAUCHY
5.5.3 WEIERSTRASS
5.5.4 HARDY

CAPITULO VI
CONCLUSIONES

ANEXO
REFERENCIA Y BIBLIOGRAFÍA

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente
"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"

DR. AURELIO DOMÍNGUEZ GONZÁLEZ
Director

c.c.p. Archivo
*ADG/CSG

SECRETARÍA
ACADÉMICA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
SECRETARÍA ACADÉMICA

ACUERDO 824/13

C. U. 11 de noviembre del 2013

C. Alma Delia Castañón Hernández (120275)
Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
(MAT04)
Presente

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis colectiva, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 11 de noviembre del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar el protocolo de la opción de titulación por lo que deberá trabajar en el tema **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"** bajo la dirección de la MC Patricia Isabel Spíndola Yáñez.

El contenido aprobado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

ÍNDICE

5.4.3 LAGRANGE
5.5 CUARTA ETAPA
5.5.1 BOLZANO
5.5.2 CAUCHY

5.5.3 WEIERSTRASS
5.5.4 HARDY

CAPITULO VI
CONCLUSIONES

ANEXO
REFERENCIA Y BIBLIOGRAFÍA

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente
"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"

DR. AURELIO DOMÍNGUEZ GONZÁLEZ
Director

FACULTAD DE INGENIERÍA
EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR
SECRETARÍA ACADÉMICA

c.c.p. Archivo
*ADG/CSG

Centro Universitario, 25 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva Titulada **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"** , de las C. **C. María Guadalupe Barrón Evaristo, Alma Delia Castañón Hernández, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

P. I. Spíndola Y.

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez
Directora de Tesis

Centro Universitario, 25 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva Titulada **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"** , de las C. **C. María Guadalupe Barrón Evaristo, Alma Delia Castañón Hernández, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM. Arturo Corona Pegueros
Sinodal

Centro Universitario, 25 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva Titulada **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"**, de las C. **C. María Guadalupe Barrón Evaristo, Alma Delia Castañón Hernández, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM. Teresa de Jesús Valerio López
Sinodal

Centro Universitario, 25 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva Titulada **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"**, de las C. **C. María Guadalupe Barrón Evaristo, Alma Delia Castañón Hernández, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

MDM Norma Angélica Rodríguez Guzmán
Sinodal

Centro Universitario, 25 de febrero de 2014

Dr. Aurelio Domínguez González
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis Colectiva Titulada **"Applets para el aprendizaje del concepto de límite a través de la evolución histórica"**, de las C. **C. María Guadalupe Barrón Evaristo, Alma Delia Castañón Hernández, Pasantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,

Dra. Teresa Guzmán Flores
Sinodal

Dedicatoria

Con todo amor,

Agradecimiento y admiración

a mis padres.

Guadalupe

Agradecimientos

Agradezco a Dios por esta maravillosa vida, por permitirme concluir una etapa muy importante.

Agradezco a mi asesora Patricia Isabel Spíndola Yáñez por que hizo posible la conclusión de este trabajo con su apoyo, paciencia y aportaciones. Le agradezco su tiempo, sus consejos y sus opiniones que me han permitido mejorar como persona.

A mi papá J. Carmen Cruz Barrón Nieves y a mi mamá Gloria Evaristo Gallegos por su paciencia, comprensión y motivación en cada paso y en cada sueño, por todo el amor que me han dado, gracias a ustedes hoy estoy donde estoy.

Agradezco a mis hermanos Víctor, José y Jorge por estar en cada etapa de mi vida y por creer en mí.

Agradezco a Alma Delia por concluir juntas este trabajo, por compartir tanto, por escucharme y aconsejarme.

A todos mis amigos que siempre están para darme ánimos y estar conmigo.

GRACIAS A TODOS.

Guadalupe

Dedicatoria

Con todo mi amor para mis hijas Marina y Alma Sofía, ustedes son mi mayor motivo para seguir adelante.

Alma Delia

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecerle a dios por permitir llegar hasta este momento, es uno de mis más grandes sueños, le doy gracias por haberme dado la dicha de ser mama y por la familia que tengo.

A mis padres, quienes nunca dejaron de creer en mí, gracias por su apoyo, su confianza, su cariño, los quiero mucho.

A mis hermanos, Luis Enrique, Miguel, José Carlos porque siempre me han apoyado y en especial a mi hermano Héctor gracias por cuidar de mis hijas y estar al pendiente de ellas cuando yo no he estado.

A mi tía Alicia y a mi primo Daniel a quienes quiero mucho y con quienes he compartido muy buenos momento de mi vida.

A mi esposo Edgar porque además de ser el padre de mis hijas, eres mi amigo, gracias por todo tu apoyo.

Agradezco a mis amigos Luz, Eduardo, Jared, Adriana con quienes compartí gran parte del tiempo en la universidad, gracias por su apoyo, por todos y cada uno de esos momentos juntos, los quiero mucho.

A Guadalupe, quien además de ser mi compañera de tesis, también es mi amiga, gracias, llegar aquí no fue fácil pero lo logramos.

A Luis Emanuel, quien tengo el gusto de conocer desde hace mucho tiempo, gracias por tus concejos, por todos los buenos momentos que hemos compartido, te quiero mucho.

Mil gracias

Alma Delia

ÍNDICE

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo, es un gran desafío, su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades por lo que es necesario que los profesores de matemáticas cuenten con distintas herramientas didácticas para facilitar el aprendizaje. Para lograr esto se propone utilizar la historia y la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La tecnología es una realidad que viven los alumnos, es algo que los atrae y los motiva, además en la actualidad existen muchos software matemáticos con los cuales se facilita la resolución de problemas, pero no sólo eso, también se les puede presentar gráficas, familias de ecuaciones, aplicaciones reales, etc. que difícilmente el docente podría reproducir en el pizarrón.

Por otro lado no podemos olvidar la historia, los conceptos que utilizamos en matemáticas no surgieron de la nada, fueron construyéndose a través del tiempo y para responder a ciertos problemas planteados, en específico para llegar a la definición formal del concepto de límite, tuvieron que pasar muchos siglos, desde que Zenón introdujo el pensamiento infinitesimal. Es importante que los alumnos tengan conocimiento del proceso histórico y reflexionen sobre ello, para que ellos le den la importancia que tiene y lo comprendan mejor.

Esta tesis es una propuesta de enseñanza-aprendizaje, en nivel universitario, para la materia de Calculo Diferencial, con la que se pretende guiar a los alumnos en el análisis y reflexión del concepto de límite.

La tesis se encuentra divida de la siguiente manera:

- En la secciones Descripción del problema, Antecedentes y Justificación, Objetivo e Hipótesis del trabajo, y Fundamentación teórica, se describe acerca de la actual enseñanza-aprendizaje del concepto de limite y se justifica la propuesta.

- En la sección Historia, Tecnología y Educación, se profundiza en la importancia de incluir la historia y la tecnología en las matemáticas, como una herramienta para que el alumno contextualice conceptos matemáticos.

- En la sección dificultades en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, se presentan las principales dificultades que tiene el alumno al aprender dicho concepto.

- En la sección Evolución histórica del concepto de límite, se presenta el proceso de la construcción de la definición formal de dicho concepto desde el siglo V a.C. hasta principios del siglo XIX.

- En la sección Applets, se presenta la propuesta didáctica.

- Posteriormente, en la sección de anexos, se incluye una prueba realizada para detectar algunas dificultades en el aprendizaje del límite.

- Finalmente, se presentan las Conclusiones, la Bibliografía y Referencias.

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El concepto de límite es uno de los conceptos más importantes del cálculo con él se construye la derivada y la integral de una función. Por otra parte para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo y muy abstracto, que si lo llegan a manejar como herramienta lo olvidan fácilmente.

Generalmente los alumnos consideran el límite como un proceso y no como un concepto, lo ven como una simple recopilación de fórmulas nuevas, lo cual genera dificultad para la formalización de la definición. Además Vrancken (2006), manifiesta al referirse a Cornu (1983) que los obstáculos epistemológicos que presentan los alumnos antes o después de la enseñanza respecto al concepto de límite, son los siguientes:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como una barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos de cantidades infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Debido a esta dificultad los alumnos prefieren solo utilizar el concepto como herramienta para introducir temas como derivada o integral de una función.

La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como herramienta o para conceptualizar otros objetos (continuidad, derivadas, integrales, etc.) o en otras ciencias. (Vrancken, 2006). Un concepto es un objeto cuando es considerado en una dimensión cultural como una porción de conocimiento independiente de cualquier contexto y que tiene lugar en el cuerpo de conocimiento científico.

Por lo anterior es necesario que el alumno comprenda de manera gráfica, analítica y formal el concepto de límite para que sea capaz de identificar los problemas donde sea necesaria dicha definición y sepa interpretar en el contexto en que se le presenta.

Esto nos lleva a investigar las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y proponer el uso de applets con la finalidad de mejorar la calidad y/ó comprensión del alumno.

1.2 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

La incorporación de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha transformado paulatinamente el modelo tradicional de la clase. Las nuevas tecnologías, gracias a la posibilidad que ofrecen de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en sus múltiples sistemas de representación, abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas, difíciles de reproducir con lápiz y papel. (Vega, 2010).

En estas experiencias, el alumno puede realizar actividades de exploración y visualización en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones, en las que puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. (Cataldi, 2011).

El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de matemáticas incentiva a los alumnos a aumentar el tiempo dedicado a la materia, con actividades que le resultan más interesantes que las rutinarias, que permiten mejorar la calidad del aprendizaje. (Cataldi, 2011).

Cuando el alumno logra incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces maneja los conceptos no sólo como objeto sino que además puede transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, verbal y formal con cierta versatilidad.

1.3 OBJETIVO E HIPÓTESIS DEL TRABAJO

Objetivo general:

Hacer una propuesta didáctica, a través de applets, que apoye la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite.

Objetivos específicos:

- Diseñar aplicaciones que permitan facilitar tanto el aprendizaje como la enseñanza de límite a través de applets.
- Hacer, a través applets, un recorrido histórico del desarrollo histórico del concepto del límite para conocer cómo se llega a la definición formal.
- Diseñar material didáctico interactivo para mostrar las animaciones del concepto de límite, con las que se ilustran las respectivas interpretaciones geométricas y algunas aplicaciones.

1.4 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La evolución histórica del concepto de límite se puede dividir en cuatro etapas, que permiten percibir el tránsito del concepto de límite desde un concepto geométrico hasta llegar a la configuración actual del concepto:

La primera corresponde a la época griega (siglo V a. de C.) en la que los problemas fundamentales eran de naturaleza geométrica, siendo el círculo el objeto matemático más tratado. Entre los autores de la época a destacar están:

- Hipócrates, que en sus estudios sobre las lúnulas dice: en el "límite" las áreas de los dos círculos son iguales.

- Eudoxo, con el que este paso al límite se hace más explícito en su principio de exhaución.

- Arquímedes, que utilizó este método para obtener medidas de superficies de figuras geométricas.

- Zenón, construye el primer intento para describir el pensamiento infinitesimal. Aquiles y la tortuga, es quizás, la más conocida paradoja de Zenón. El filósofo argumentaba que, en una hipotética carrera entre Aquiles y una tortuga, si ésta última tenía una ventaja inicial, el humano siempre perdería. Imaginemos que la distancia a cubrir en la carrera son cien metros, y que la tortuga tiene cincuenta metros de ventaja. Al darse la orden de salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente. Pero al llegar allí, descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, mucho más lentamente, diez o veinte centímetros, el guerrero sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde está la tortuga, esta ha avanzado un poco más. Zenón sostiene que esta situación se repite indefinidamente y que Aquiles jamás logrará alcanzar a la tortuga.

La segunda etapa corresponde al siglo XVII, en el que destacan:

- Fermat, el cual da un paso cualitativo importante en la definición de límite. Al trabajar con lugares geométricos encuentra un método para calcular las abscisas de los valores máximo y mínimo de una función polinómica, con este método Fermat transciende el infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico.

- Newton que con su teoría llamada "método de fluxiones" introduce las nociones "razones primera y últimas" como un primer intento de definir el límite.

- Leibniz, a quién se le atribuye la clarificaron conceptual del concepto de límite y también la notación específica para el diferencial.

También contribuyeron Kepler con su método de los infinitésimos; Cavalieri con su método de los indivisibles; John Wallis con su tratado "la aritmética de los infinitos"; y Beeckman con el paso geométrico al límite.

En esta etapa hay una evolución de la concepción geométrica hacia una cierta concepción numérica.

En la etapa tres (siglo XVIII y principios del siglo X IX) destacan las contribuciones de:

- Euler, que en su obra "Introduction", define una función de una cantidad variable utilizando solamente algebra.

- D´ Alambert en su artículo para la "Encyclopédie", llama una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si le segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella). Esta definición no fue aceptada por sus contemporáneos.

- Lagrange, quien pensó haber conseguido eliminar la necesidad de los infinitesimales o del límite con su método para desarrollar una función, en su obra Théorie des fonctions analytiques trata de desarrollar el Cálculo de forma rigurosa, desarrolló $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

Se establece en esta etapa una concepción numérica.

La cuarta y última etapa comprende desde finales del siglo XIX hasta nuestra época, en ella se amplía la noción de límite y destacan:

- Bolzano que introduce las bases de la técnica $\varepsilon - \delta$.

- Cauchy que da un carácter más preciso a la idea de límite, al prescindir de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, define un infinitésimo como una variable.

- Weierstrass, define el entorno de un punto, da una definición de número real y junto con Heinedan da la definición del concepto de límite de $f(x)$ en x_0, (definición $\varepsilon - \delta$).

La notación matemática de la definición de límite que se usa actualmente es debida a Hardy, quien la introdujo en su libro "A Course of Pure Mathematics" en 1908.

El concepto de límite ha evolucionado a lo largo de la historia, teniendo su origen en las construcciones geométricas del siglo V a. d C., pasando muchos siglos hasta que a principios del siglo XIX se da la formalización del concepto de límite. Dentro de este contexto el uso de la tecnología permite al alumno promover la comprensión, construir procesos en los cuales se den nuevos significados a los conceptos involucrados, hacer representaciones apropiadas y modelos, usar simulaciones y promover actividades de descubrimiento.

En la Conferencia Mundial sobre Educación Superior organizada por UNESCO en París, en 1998, se señala que:

"Los rápidos progresos de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación seguirán modificando la forma de elaboración, adquisición y transmisión de los conocimientos. También es importante señalar que las nuevas tecnologías brindan posibilidades de renovar el contenido de los cursos y los métodos pedagógicos, y de ampliar el acceso a la educación superior. No hay que olvidar, sin embargo, que la nueva tecnología de la información no hace que los docentes dejen de ser indispensables, sino que modifica su papel en relación con el proceso de aprendizaje, y que el diálogo permanente que transforma la información en conocimiento y comprensión pasa a ser fundamental. Los establecimientos de educación superior han de dar el ejemplo en materia de aprovechamiento de las ventajas y el potencial de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, velando por la calidad y manteniendo niveles elevados en las prácticas y los resultados de la educación".

En este contexto se propone la utilización de applets con la finalidad de crear condiciones para que el alumno se apropie de nuevos conocimientos, experiencias y elementos que le generen procesos de análisis, reflexión y apropiación del concepto de límite.

CAPITULO II

HISTORIA, TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN

2.1 DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Hoy en día es claro que la enseñanza de las matemáticas en la escuela presenta un serio problema. Esto no significa que sea algo nuevo, sino que ante una cultura moderna nos encontramos con una gran exigencia de conocimiento matemático que van más allá de la escuela. Los estudiantes requieren de un manejo funcional de las matemáticas y esto es lo que la escuela tradicional no puede darles.

El aprendizaje es el resultado de un complejo proceso de construcción y, por lo tanto no puede ser transmitido.

Una acción satisfactoria docente, es un espacio de construcción, en el que los estudiantes construyen sobre lo que ya conocen, para esto se requiere de muchas actividades, interacción con los demás y auto-supervisión.

2.1.1 CONSTRUCTIVISMO

El aprendizaje ha estado sujeto a investigación por los psicólogos, pero muy poco ha resultado en cuanto al mejoramiento de la enseñanza. La razón es porque los psicólogos han estado más interesados en desarrollar la Gran Teoría del Aprendizaje, que en estudiar los contextos en el marco de los cuales las personas aprenden. Este campo de estudio está ahora designado como investigación del “aprendizaje del estudiante”. (Biggs 1999)

La teoría del Constructivismo considera que el aprendizaje es una construcción realizada por el sujeto que aprende. Los principales conceptos de esta teoría son:

El aprendizaje requiere de la interacción entre el sujeto que aprende y su medio (materiales didácticos, elemento del contexto, contenidos, docente y compañeros) a través de las distintas actividades físicas, intelectuales y sociales que se desarrollan.

El sujeto aborda la situación y actúa a partir de los esquemas de conocimiento o pautas de conducta que ya posee. Por ejemplo, dos personas pueden estar en la misma situación y, sin embargo, comprenderla y abordarla de manera distinta pues sus estructuras lógicas, sus conceptos, sus intereses, sus creencias, sus sentimientos y sus valores, son diferentes.

El aprendizaje es un proceso permanente por el cual se construyen en forma progresiva estructuras de pensamiento y de acción cada vez más complejas.

2.1.2 CONSTRUCTIVISMO EN EL AULA

El aprendizaje contribuye al desarrollo en la medida en que aprender no es copiar o reproducir la realidad. Para la concepción constructivista se aprende cuando se es capaz de elaborar una representación personal sobre un objeto de la realidad o contenido que pretendemos aprender. Esa elaboración implica aproximarse a dicho objeto o contenido desde las experiencias, intereses y conocimientos previos. En este proceso no solo se modifica lo que ya se posee, sino que también se interpreta lo nuevo de forma peculiar, de manera que se pode integrar y hacerlo propio.

Cuando se da este proceso, se dice que se está aprendiendo significativamente, construyendo un significado propio y personal para un objeto de conocimiento que objetivamente existía.

Desde la concepción constructivista se asume que en la escuela los alumnos aprenden y desarrollan en la medida en que pueden construir significados adecuados en torno a los contenidos que configuran el curriculum escolar. Esta construcción incluye la incorporación activa y global del alumno, su disponibilidad y conocimientos previos en el marco de una situación interactiva, en la que el profesor actúa de guía y de mediador entre el alumno y la cultura.

Las preguntas que se plantea todo docentes son: ¿Qué significa aprender? ¿Qué ocurre cuando un alumno aprende y cuando no aprende? ¿Cómo se le puede ayudar?

La concepción constructivista le ofrece al profesor un marco para analizar y fundamentar muchas de las decisiones que toma en la planificación y en el curso de la enseñanza.

2.2 TEORÍA DE LAS IMÁGENES

En las matemáticas se considera que los conceptos se pueden definir con precisión para proporcionar una base sólida para la teoría matemática. Las realidades psicológicas son algo diferentes. Muchos de los conceptos matemáticos, se han encontrado de una forma u otra antes de que sean formalmente definidos y la estructura cognitiva compleja de cada individuo produce una variedad de imágenes personales cuando dicho concepto es evocado.

2.2.1 CONCEPTO DE IMAGEN Y DEFINICIÓN DE CONCEPTO.

Las dificultades que enfrentan los alumnos con las definiciones formales, no son algo nuevo.

¿Qué es una buena definición? Para el filósofo o el científico, es una definición que se aplica a todos los objetos por definir; es aquel que satisface las reglas de la lógica. Pero en educación no es eso, es uno que puede ser entendido por los alumnos.

Poincaré, 1908

En la última década, la investigación empírica ha hecho hincapié en que los individuos construyen su imagen mental de un concepto de una manera que no siempre es coherente y consistente y que las experiencias previas pueden colorear los significados de los fenómenos cuando se reúnen en un nuevo contexto. Esto es muy evidente al introducir nuevos conceptos matemáticos, por ejemplo la definición verbal de límite en la forma "$s_n \to s$", "podemos acercar

s_n a s tanto como queramos, escogiendo una n suficientemente grande", esto induce a muchos estudiante a pensar que s_n nunca puede ser igual a s.

Muchos términos matemáticos tienen un significado cotidiano que puede interferir subconscientemente con las matemáticas:

Dentro de la actividad matemática, las nociones matemáticas sólo se utilizan de acuerdo a su definición formal, sino también a través de representaciones mentales que pueden ser diferentes para diferentes personas. Estos "modelos individuales" se elaboran a partir de "modelos espontáneos" que interfieren con la definición matemática. Entonces la noción de límite indica muy a menudo un límite que no se puede cruzar, que puede, o no puede, ser abordado. A veces se considera como alcanzable, a veces como inalcanzable (Cornu 1981).

Incluso la forma en que está estructurado el currículum matemático puede dar lugar a creencias implícitas que pueden ser ciertas en el contexto dado, pero más tarde dan lugar o conducen a un conflicto cognitivo. Por ejemplo Vinner (1983) observó que muchos estudiantes creen que la tangente a una curva la toca, pero no puede atravesarla. Esto es cierto en geometría de círculos. Sin embargo, se encontró que cuando se pidió a los estudiantes dibujar la tangente a la curva $y = \mathrm{x}^3$ en el origen, muchos dibujaron una line un poco de lado, tratando que no pase a través de la curva.

Los términos "imagen del concepto" y "definición conceptual" se introdujeron en el trabajo de Vinner&Hershkowitz en 1980, más tarde se describieron de la siguiente manera:

El término "imagen del concepto" describe la estructura cognitiva total asociada con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados… A medida que el concepto imagen se desarrolla no tiene que ser coherente en todo momento… Vamos a la parte de la imagen del concepto que se activa en un momento determinado de la imagen del concepto evocado. En diferentes momentos, imágenes aparentemente en conflicto pueden ser evocadas. Sólo cuando se evocan aspectos contradictorios al mismo tiempo no se necesita ningún sentido real de conflicto o confusión. (Tall&Vinner 1981)

Además, Vinner (1991) considera que cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto, algo es evocado en nuestra memoria. Aquello que evocamos no es la definición del concepto sino aquello que él y Tall llaman "concept image" (Tall y Vinner 1981). Vinner considera que El "concept image" es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales, las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria así que aparecen en una fase posterior. Por ejemplo, cuando escuchamos la palabra "mesa", una figura de una cierta mesa puede evocarse en nuestra mente…. Cuando escuchamos la palabra "función", por otra parte, puedes evocar la expresión "$y = f(x)$", puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como $y = x^2$ o $y = senx$, etc.

La definición de un concepto es un asunto muy diferente. Consideremos la "definición del concepto" como una forma de palabras que se usan para especificar este concepto. Esta definición puede ser aprendida por el estudiante de forma rutinaria o de manera más significativa y en relación con un mayor o menor grado en el concepto de una definición. También puede ser una reconstrucción personal del estudiante de una definición. Es entonces la forma de palabras que el alumno utiliza para su propia explicación de su (evocado) "concept image".

En matemáticas cuando el alumno tiene un concepto claro, como lo es el límite, puede visualizarlo de forma algebraica, geométrica y formal.

2.3 USO DE LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

La inclusión de la historia en la enseñanza de las matemáticas provee una oportunidad para desarrollar una visión de lo que realmente son las matemáticas permitiendo tener una mejor comprensión de conceptos y teorías al conocer cómo se desarrollan estos en la historia (Barbin 2000). Buscando estrategias que conduzcan al estudiante a un pensamiento crítico, siendo este uno de los procedimientos propios y tradicionales de la historia, de acuerdo al pensamiento de una máxima de muchos historiadores: "hay que comprender el pasado para conocer el presente".

Zapico (2006) afirma que al incorporar, en las clases de matemáticas su historia, se tiene como objetivo evidenciar su presencia y necesidad en la vida de nuestra especie a través del tiempo. De este modo se le humaniza, mostrándola como una actividad humana que se ha realizado, creado y construido a través de los siglos y los milenios.

Así también, señala Ochoviet (2008) en su artículo "Historia e historietas en la clase de Matemática" que las propuestas didácticas que incluyen a la historia de la matemática permiten a los estudiantes tomar contacto con episodios o situaciones sociales que motivaron la construcción de los conceptos matemáticos.

Barbin (2000) afirma que la historia de las matemáticas puede cambiar la percepción y comprensión de esta disciplina lo cual influenciará la forma en que se enseña y por lo tanto se afecta la forma en que el estudiante percibe y entiende las matemáticas. Pues se conocen las cuestiones que dieron lugar a diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo ideaban definiciones, teoremas y demostraciones, la relación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban.

A lo largo de la historia, normalmente se atribuye invenciones concretas a personas concretas, pero no los métodos generales que suelen ser resultado de la evolución histórica de los problemas y de las soluciones particulares que se han ido dando a cada uno de los problemas. En particular, el Cálculo infinitesimal, tradicionalmente se le atribuye a Leibnitz y Newton siendo los que hicieron posible la resolución de un mayor número de problemas desde su descubrimiento, sin embargo, el cálculo infinitesimal tiene todo un proceso histórico que va desde el año V a. C con Eudoxo con el principio de exhaución.

Desde este punto el trabajo de Leibnitz y Newton es extraordinario, su labor ha sido inmensa. Tienen el mérito de haber hecho una síntesis para conseguir unir todos los problemas en uno y dar una sola solución a todos ellos. Newton decía "si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes".

Por lo cual proponemos en este trabajo de tesis el estudio del concepto de límite a través de su historia empezando con Eudoxo en el siglo V a. C. hasta la formalización de la definición que propone Weierstrass a finales del siglo XIX, "*Si, dado cualquier ε, existe un n_0, tal que para $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$.*"

2.4 USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

La tecnología, más que una herramienta para amplificar las capacidades del ser humano, permite crear nuevas estructuras cognitivas.

Pea, 1985

La tecnología se encuentra presente en gran parte de los lugares que frecuentamos, su uso brinda la oportunidad de simplificar procesos como comunicación, compras, manejo de información, etc. La información masiva y sus facilidades de acceso son el mínimo común denominador de la sociedad de hoy. El desarrollo progresivo de la red de redes Internet, ha provocado profundos cambios culturales, donde la velocidad en las comunicaciones sin importar las fronteras y los idiomas, han convertido la transmisión de la información en una actividad cotidiana.

La aparición de la computadora marcó un cambio en las matemáticas, con temas como el análisis numérico, la investigación de operaciones y las técnicas de simulación, en los cuales la realización de grandes cantidades de cálculos se volvió factible.

El uso de la tecnología cambia a la naturaleza misma de la actividad matemática; es decir, la propia matemática se ve modificada por el uso de las matemáticas. Puesto que cada vez más personas tienen acceso a las computadoras, estamos frente a una revolución del conocimiento de la cual no se escapa la matemática (Salat 2009).

La tendencia impuesta por los avances científicos-tecnológicos, demandan un cambio en los procesos de enseñanza-aprendizaje, una transformación hacia la búsqueda de nuevos métodos y estrategias didácticas, aprovechando todas las potencialidades brindadas por las tecnologías de la información y comunicación.

Las instituciones educativas han tenido que considerar la necesidad de incorporar tecnología en los procesos educativos desarrollando nuevos métodos de aprendizaje, a través del acceso a múltiples formas de interacción y fuentes de información.

En este sentido, la utilización de software y en particular de material educativo computarizado está adquiriendo una importancia preponderante en la transformación de los procesos pedagógicos que caracterizan la educación superior.

Entendiendo por material educativo computarizado como: “un ambiente informático que se permite que la clase de aprendiz para el que se preparó viva el tipo de experiencias educativas que se consideran deseables para él frente a una necesidad educativa dada” (Galvis 1992).

El uso de materiales educativos computarizados en el salón de clase, no puede tener un fin en sí mismo, es necesario analizar su impacto y los beneficios que se obtendrán en términos objetivos de aprendizaje.

Meza (2000) *“la tarea fundamental del docente es planificar, desarrollar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, la computadora juega en este contexto, el papel exclusivo de instrumento de apoyo”*.

Vilchez (2006) Señala que la existencia de ambientes matemáticos apoyados con tecnología, favorece la motivación y la curiosidad intelectual del estudiante.

El uso de la tecnología en la resolución de problemas, permite en el alumno desarrollar conductas como (Gamboa, 2007):

- Búsqueda de relaciones entre los elementos de las representaciones, con el propósito de identificar la solución de los problemas.

- Elaboración de conjeturas a partir de los datos observados en las distintas representaciones realizadas en cada una de las herramientas tecnológicas.

- Generalización de los resultados a casos generales, a partir de las soluciones obtenidas al trabajar con las herramientas tecnológicas.

- Elaboración de conexiones entre los resultados obtenidos y otros contenidos matemáticos; y comprobación de los resultados obtenidos en un proceso de resolución, mediante la elaboración de otro diferente.

Salad (2009) cita a Pea (1981), con la frase "la tecnología, más que una herramienta para ampliar las capacidades del ser humano, permite crear nuevas estructuras cognitivas", a partir de esto se puede desprender la importancia y modo de uso de ésta en el aula, permitiendo transformar paulatinamente las actividades y/o tareas, y los sistemas cognitivos de los individuos.

Las metodologías empleadas para la enseñanza de las matemáticas con tecnologías, no se puede reducir a la mecanización de procedimientos algorítmicos, ni tampoco a actividades sin sentido cognitivo, ya que en la construcción de conceptos matemáticos el alumno requiere de la interiorización de objetos abstractos y para ello es indispensable pensar en sistemas de representación que permitan visualizar los objetos de estudio y que permitan al alumno materializar y manipular directamente los objetos matemáticos, ofreciendo una realimentación inmediata en la que puedan descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos.

Además, el surgimiento de diferentes softwares para la enseñanza de las matemáticas marca un reto para diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos (Arcavi 2000). Ofreciendo muchas posibilidades que van desde el cálculo de expresiones aritméticas simples utilizadas en nivel básico hasta el uso de conceptos matemáticos utilizados en nivel superior.

Martin (2000) señala que la tecnología debe ser usada en la educación matemática, enfatizando el uso del conocimiento matemático.

La evolución del aprendizaje del alumno depende, en gran medida, de la confrontación con el medio al que sea sometido, señala Gamboa (2007). Por todo esto, la presencia de la tecnología en el aula, se convierte en una herramienta capaz de aportar a las lecciones de matemáticas y distintas representaciones que puedan ser utilizadas para la ayuda, visualización y experimentación de conceptos importantes que posibiliten nuevas estrategias de solución, construyendo un puente entre ideas intuitivas, en algunos casos abstractas, y los conceptos formales.

Fuglestad (2005) plantea tres etapas de desarrollo que describen el proceso donde los estudiantes interactúan con herramientas tecnológicas:

- Conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del *software.*

  El alumno puede utilizar diferentes funciones del *software* para resolver tareas simples preparadas para interactuar con éste. Por ejemplo, utilizar la hoja de cálculo para hacer fórmulas cuando se presenta el “esbozo principal” de una tarea o realizar una gráfica para representar una función, cuando la fórmula está dada.

  Los alumnos experimentan la necesidad de usar variables o parámetros.

- Desarrollo de modelos simples.

  El alumno puede hacer un esquema textual, numérico o plantear fórmulas para planear un modelo en una hoja de cálculo. En un *software* graficador el alumno podría juzgar qué funciones graficar, usar diferentes escalas en los ejes o ajustar la pantalla. Pueden usar geometría dinámica para hacer construcciones que puedan resistir el arrastre y que no se “rompan” cuando son movidas.

Los alumnos analizan la situación y construyen modelos acorde con reglas matemáticas. Tienen acceso a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas.

- Juzgar el uso de las herramientas para dar solución a un problema dado.

  El estudiante debe ser capaz de pensar en distintas formas y recursos para resolver un problema, y juzgar cuáles de las herramientas tecnológicas disponibles son más apropiadas para resolver el problema o cuándo otros métodos son mejores.

Para desarrollar esta habilidad el estudiante requiere: Motivación (actividades con cierto grado de desafío); Características básicas y paso por paso: conocer las características básicas del software ; Mismo problema, diferentes herramientas y métodos (oportunidad de juzgar y discutir cuál sería la mejor solución); Tareas y temas abiertos (distintas formas de interpretar y resolver con distintas herramientas); Reflexión y discusión (necesarias para consolidar lo adquirido); Y la intervención del docente (Ayudar al estudiante a desarrollar habilidades sobre el empleo del software y la introducción y motivación con ejemplos).

Al hacer uso de la tecnología en la educación, de una manera adecuada, permite a los estudiantes asumir con mayor responsabilidad su propio aprendizaje, generando una amplia gama de estilos de aprendizaje.

En el proceso de aprendizaje de la matemáticas se reconoce la importancia de que el estudiante se plantee interrogantes, formule conjeturas, utilice distintas representaciones, desarrolle varias estrategias y un lenguaje que le permita expresar y comunicar sus resultados.

El uso de varios sistemas de representación y de la tecnología permiten dar significado concreto a los conocimientos matemáticos, así la construcción de un concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones y utilizando diferentes representaciones relacionadas con el mismo concepto (Gamboa, 2007). Estas representaciones construidas por los alumnos, al resolver problemas e investigar les ayudan a organizar su pensamiento, hacer sus ideas más concretas y disponibles para la reflexión. (NCTM 2000)

Sirven como un elemento esencial para apoya la comprensión del alumno sobre los conceptos y relaciones matemáticas, comunicar argumentos y conocimientos, reconociendo las conexiones entre los conceptos matemáticos y aplicar las matemáticas a situaciones de problemas reales a través de la modelación (NCTM 2000).

El uso de software dinámicos proporciona una amplia gama de representaciones de objetos y relaciones matemáticas, que ayudan al estudiante en la adquisición de conceptos al poder representarlos y relacionarlos con aplicaciones reales.

Por lo que el uso de la tecnología puede llegar a ser una herramienta poderosa en la que los alumnos logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y como medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante impacto en el aprendizaje de las matemáticas. Además de generar cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas, proporcionando condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas.

Entonces, la tecnología en las aulas se convierte en una herramienta capaz de aportar a los estudiantes distintas representaciones que puedan ser utilizadas para la ayuda, visualización y experimentación de conceptos importantes, como lo es el concepto de límite, haciendo posibles nuevas estrategias de solución, dando un acceso a varias formas de expresar sus ideas respecto a los conceptos, experimentar y formalizar.

2.5 APPLETS COMO RECURSO PARA EL DOCENTE.

En internet existen numerosas webs de carácter didáctico-educativo, que permiten al docente mostrar de una forma atractiva, innovadora y novedosa su conocimiento, facilitando así la comprensión a sus alumnos. Entre las páginas webs de este tipo sobresalen las que incluyen aplicaciones interactivas como lo son los applets.

Un applet es una aplicación interactiva programada en lenguaje de programación y que forma parte de los componentes de una página de internet. El lenguaje de programación es compatible con todos los sistemas y se utiliza en diversas plataformas.

Los applets hacen posible su manipulación por parte del usuario y la interacción con el mismo permitiendo la construcción de conocimiento matemático. Además de permitir conectar imágenes dinámicas con conocimientos abstractos.

A nivel educativo las posibilidades del uso de los applets son enormes. En particular en matemáticas en el uso de applet conforma un estilo de páginas web en la que combinan applets con explicaciones y cuestiones a resolver con diversas aplicaciones.

En el aula, el uso de applets para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral permite explorar conceptos tales como el límite para facilitar su comprensión, ya que esta herramienta didáctica ofrece una interfaz interactiva dando la posibilidad de mostrar temas de forma clara y atractiva creando un ambiente de interacción entre alumno, conocimiento y el proceso de aprendizaje.

Para la creación de applets se utilizan distintos software de matemáticas, entre ellos el proyecto Descartes del Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa del Ministerio de Educación y Geogebra.

2.5.1 GEOGEBRA

Geogebra es un software libre de matemática para educación en todos sus niveles, creado en el año 2001 por el profesor Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo, y un equipo internacional dedicado a su desarrollo del que, desde sus inicios, forma parte para el desenvolvimiento en Español la responsable del Centro Babbage, Liliana Saidon. Ofrece un entorno donde el álgebra y la geometría se conectan de forma plena. Permite realizar construcciones dinámicas, fácilmente exportables a aplicaciones web (applets), en las que se puede manipular las expresiones (geométricas, numéricas, algebraicas o tabulares incluyendo recursos de probabilidad y estadística.) y observar la naturaleza de las relaciones y propiedades matemáticas a partir de las variaciones producidas por las propias acciones. En su corta historia ya ha obtenido una serie de prestigiosos premios a la calidad didáctica y ha sido traducido a más de 40 idiomas.

Goegebra es un ordenador algebraico y geométrico que esquematiza y reúne geometría, álgebra y cálculo, le da a la notación algebraica una dualidad en la pantalla, con respecto a los elementos geométricos dibujados de forma clásica.

Además Geogebra ofrece:

- Las construcciones geométricas jerarquizadas.
- Un Medio Interactivo.
- Recuperación y recopilación de procedimientos.
- Posibilita la construcción mediante objetos dependiente e independientes: puntos, segmentos, rectas, cónicas, polígonos; definir funciones; calcular y graficar derivada e integrables; transferir y trazar medidas, figuras, etc. De tal forma que de

algún cambio en los parámetros de la construcción de nivel superior se generen modificaciones en las construcciones o elementos dependientes.

Con este software, el alumno puede descubrir y apreciar acciones realizadas en este, cuantas veces sea necesario, puesto que permite recolectar los movimientos ejecutados y la información que genera el proceso de construcción.

Estos Software sirven como un recurso para los docentes, ya que promueven la creación de applets, en los que los alumnos pueden interactuar, visualizar y transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico , verbal y formal.

CONCLUSIONES

La historia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es un elemento muy importante ya que le permite conocer el proceso de la creación de conceptos, métodos y definiciones matemáticas que actualmente se usan. Lo cual ayuda al alumno a comprender, que las matemáticas surgen como respuesta a las necesidades del ser humano.

En muchas ocasiones hemos escuchado a los alumnos decir "para que me van a servir", "cuando salga de la escuela nunca más las voy a utilizar", "No sirve para nada ver esto", "No sé quién las inventó", buenos pues muchas de estas frases tienen respuesta en el historia, no es que las matemáticas surgieran mágicamente o que haya sido inventadas por alguien, tienen un origen y tuvieron que pasar muchos siglos para que se formalizaran, hasta llegar a las definiciones con las que ahora trabajamos. Mostrar un poco de esta historia a los alumnos les ayuda a terminar con estas incógnitas, dándoles una nueva visión sobre el por qué son importante y para qué sirven las matemáticas, pues no solo se trata de ver el pasado y cómo se llegó a lo que ahora conocemos, sino también ampliar su panorama de la utilidad que tienen en el campo laboral.

Al complementar la historia con tecnología como applets, en la enseñanza de las matemáticas, se genera varios sistemas de representación que permiten explorar, construir y concretar conocimientos matemáticos.

Por medio del applets el alumno puede hacer una representación personal de los conceptos matemáticos, ya que además de visualizar el proceso a la definición formal ofrece un interfaz interactivo mostrando el tema de forma clara y atractiva.

En particular, con el concepto de límite, al presentar applets, donde puede apreciarse la evolución histórica de este concepto, permiten al alumno entender y vivir el proceso de su formalización, que surge como una necesidad, con la finalidad de generar un proceso de análisis, reflexión y apropiación de dicho concepto.

En este trabajo se presenta la evolución histórica del concepto de límite, a través de applets, dividido en cuatro etapas: empezando con el siglo V a.C. con problemas geométricos; la segunda etapa en el siglo XVII, con la evolución de la concepción geométricas hacia una concepción numérica; tercera etapa del siglo XVIII a principios del XIX donde se establece una concepción numérica; última etapa finales del siglo XIX hasta nuestros días, se define de manera formal dicho concepto.

Al utilizar el alumno esté material, podrá conocer de una manera distinta la evolución histórica del concepto de límite. Al tener la opción de interactuar verá la necesidad que se tenía para formalizar el concepto, ya que en la línea del tiempo se muestra el paso de este concepto desde la geometría, el análisis hasta llegar a su formalización.

CAPITULO III

DIFICULTADES CON LA ENSEÑANZA -APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE

3.1 ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Existe la creencia de que el proceso de enseñanza-aprendizaje es simple. En general esto no es así, en muchas ocasiones, los alumnos construyen conocimientos que resultan no adecuados o erróneos.

La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos como la abstracción, el análisis, la demostración, etc.

Con frecuencia, el docente supone que los alumnos fracasan por tener conocimientos básicos deficientes, por ejemplo, no saben álgebra, desconocen las propiedades de los números, ignoran las características de las desigualdades, no saben geometría, etc. Pero también pueden tener todos estos conocimientos y fracasar en el estudio del cálculo.

Estás dificultades se deben a que durante el proceso de enseñanza-aprendizaje los alumnos se enfrentan a algunos obstáculos, dichos obstáculos tienen que ser superados por ellos, ya que de esta manera se espera que se apropien de los conceptos y así puedan aplicarlos o visualizarlos en cualquier problema real que se les presente.

3.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS REFERENTES AL CONCEPTO DE LÍMITE

Bachelard planteó la noción de obstáculos epistemológico para explicar la aparición de errores, esta noción fue retomada por Brousseau para la didáctica de las matemáticas. Para él, el conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo, y además distingue tres tipos de obstáculos según su origen: obstáculos de origen ontogénico (provienen de limitaciones del propio sujeto), obstáculos de origen didáctico (dependen del planteamiento educativo), y obstáculos de origen epistemológico (propios del concepto, de su génesis).

Dentro del Cálculo la importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento así como útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería, etc.). Douady (1991) señala: “Un concepto es un útil cuando el interés está centrado en su utilidad para resolver un problema. Un concepto es un objeto cuando es considerado en una dimensión cultural como una porción de conocimiento independiente de cualquier contexto y que tiene lugar en el cuerpo de conocimiento científico reconocido”.

Los estudios de Cournu (1991) demostraron que los alumnos tienen “concepciones espontáneas personales” que provienen de su experiencia cotidiana. Dichas concepciones son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo, entonces al momento de adquirir un nuevo conocimiento estas “concepciones espontáneas personales” pueden causar una contradicción según las situaciones.

En lo que se refiere al concepto de límite, Cournu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.

Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.

Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.

Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Cornu (1991) también señala los siguientes obstáculos epistemológicos: El fracaso de la unión entre la geometría y aritmética; la noción de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño; el aspecto metafísico de la noción de limite; y ¿el límite es alcanzado o no?

Sierpienska (1985, citado en Cantoral 2000) presenta los siguientes obstáculos:

Horror al infinito, consiste en asociar el paso al límite como un movimiento físico, a una aproximación “se aproxima indefinidamente”, “se aproxima más y más”.

Ligados a la noción de función. La idea de límite como una simple sustitución y la no distinción entre la noción de límite y la noción de cota inferior y superior.

Cuantificadores. Los estudiantes omiten con frecuencia los cuantificadores en la definición de límite, recurren al lenguaje natural y simbólico.

Geométricos. En el proceso de graficar una función de variable real, se realiza considerando primero el dominio (eje x) y luego calculando sus imágenes (contradominio: eje y); mientras que la definición de límite de la función en un punto, se describe a través de una consideración primera en al contradominio (eje y) al mencionar un ε arbitrario, y posteriormente, la existencia de δ considerado con elementos del dominio (eje x). Considerar el eje de las x sobre el eje de las y. Páez (2004).

Símbolo: ligado a la resistencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Tall (1992) propone presentarles situaciones adecuadas que provoquen conflicto cognitivo originando un desequilibrio que los conduzca a la superación de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza de este concepto. Se deberá favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite de una función: gráfica, numérica y simbólica.

Como podemos ver es claro que la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite no es fácil, existen muchos obstáculos que no permiten que el alumno se apropie de este concepto. Para que ellos logren superar estos obstáculos es necesario presentarles de una manera diferente a la tradicional (lápiz y papel), el estudio del concepto de límite.

Se propone el uso de la tecnología y la historia. La tecnología como herramienta para la enseñanza-aprendizaje es de gran utilidad, con ella se pueden reproducir representaciones graficas que serían muy difíciles de hacer en un pizarrón, además nos permite mostrar al mismo tiempo las representaciones graficas junto con las operaciones aritméticas, de esta manera se espera que el alumno puede encontrar la relación que existe entre ambas. La historia, el concepto de límite tiene su origen en la geometría y tuvieron que pasar muchos siglos hasta llegar a su definición formal, al hacer un recorrido histórico el alumno podrá ver los primeros problemas que se tenían y la forma de resolverlos, como se separa la geometría del algebra y como se empieza a trabajar con el álgebra hasta llegar al análisis

3.3 ACTIVIDAD EN EL SALÓN DE CLASES

Con base en los temas anteriores de este capítulo y con la finalidad de analizar la situación en la que se encuentran los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, respecto al concepto de límite. Se realizó una actividad con los alumnos de la materia de Cálculo Deferencial, la cual consistió en aplicarles un ejercicio, tipo examen, tomando en cuenta los aspectos gráficos y algebraicos, así como la interpretación de la definición formal del concepto de límite, dicha actividad está dividida en tres secciones: Definición formal, Visión gráfica e Intuición gráfica. Cabe mencionar que para la fecha en que se realizó esta actividad, los alumnos ya estaban por terminar el semestre en curso, por tal motivo ya había visto el tema de límite. Por lo cual se esperaban muy buenos resultados.

DEFINICIÓN FORMAL.

En esta primera parte del ejercicio se da la definicion formal y se pide analizarla respondiendo 7 preguntas, además de reprentarla graficamente.

Con este ejercicion se puede notar que tanto comprenden los alumnos la definicion formal y si son capaces de expresarla graficamente.

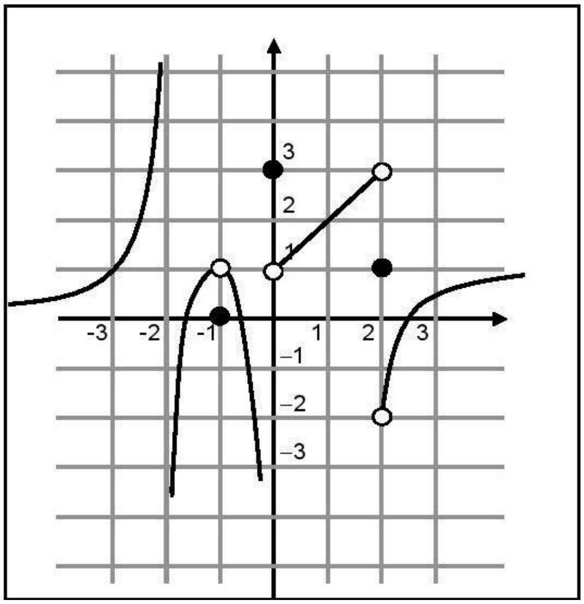
I. Definición formal. Límite de una función en un punto

Sea f una función real de variable real definida en un intervalo abierto I que contiene al punto p (excepto tal vez en p) y $L \in R$. Entonces $\lim_{x \to p} f(x) = L$ si y solo si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; tal \; que, \; x \in I \; 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

VISIÓN GRÁFICA.

Aquí se pide a los alumnos que observen y analicen los límites de una función dada su gráfica. Con la finalidad de comprobar si los alumnos comprenden, a partir de una función definida gráficamente el concepto de límite.



INTUICIÓN GRÁFICA.

En esta parte, se pide que bosquejen la gráfica de una función que cumpla con los límites dados: límite en un punto, límites laterales y límites al infinito. Con la finalidad de evaluar como ilustran gráficamente el concepto de límite.

Inventa una función que tenga las siguientes características:		
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$	$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$	$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$

(El ejercicio aplicado se encuentra en el ANEXO B)

Después de haber aplicado dicho ejercicio, se analizaron los resultados y se llegó a la siguiente conclusión.

DEFINICIÓN FORMAL:

Creer que la función no puede estar definida en el punto p.

Estas fueron las respuestas del ejercicio con mayor número de aciertos

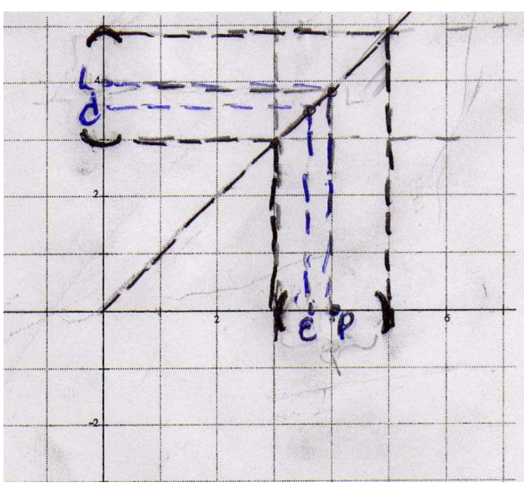
1. ¿Debe estar la función definida en *p*? No
2. ¿El intervalo I debe ser abierto? No debe. ser cerrado
3. Explica por qué nos dice: que en el intervalo I debe estar contenido P.
4. ¿Puede *f(x)* tomar el valor *L* para alguna *x*? Si
5. ¿Si encuentras una δ para una cierta ε, será esa δ única? Si
6. Explica porqué porque a la función a cada "X" le pertenece una Y.

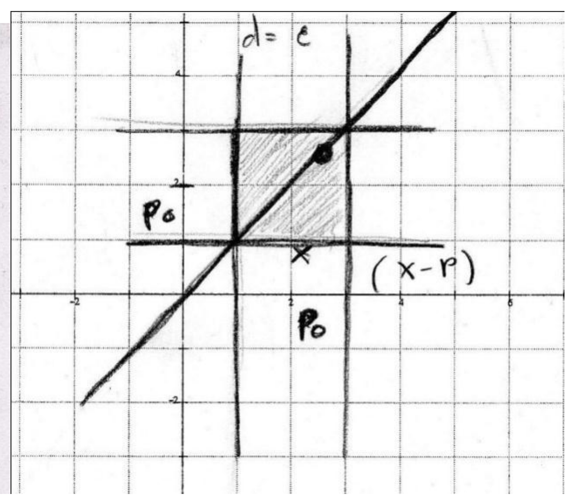
Y las respuestas del ejercicio con menor número de aciertos.

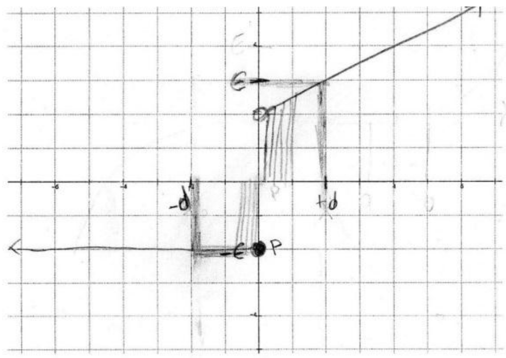
1. ¿Debe estar la función definida en *p*? NO
2. ¿El intervalo I debe ser abierto? Si.
3. Explica por qué por que puede haber un salto
4. ¿Puede *f(x)* tomar el valor *L* para alguna *x*? Si y sólo si x≠p f(x) = L sí sólo si
5. ¿Si encuentras una δ para una cierta ε, será esa δ única?
6. Explica porqué No, por que para cierta ε se van aproximando. a distintos valores
7. Dibuja el significado de $0<|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ para una función que tú inventes, diciendo en tu dibujo quién es *p* y quién es *L*.

Se puede observar que no comprende la definición formal de límite.

Dificultad en interpretar gráficamente la definición formal de límite: confusión entre ε y δ.







En la primera imagen se observa, que al graficar hay confusión en la ubicación deε y δ.

En la segunda imagen, el alumno define $\varepsilon = \delta$ y utiliza P_0 que no tiene que ver con la definición.

En la tercera imagen, se muestra que el alumno no comprende lo que es límite pues en su grafica el límite no existe.

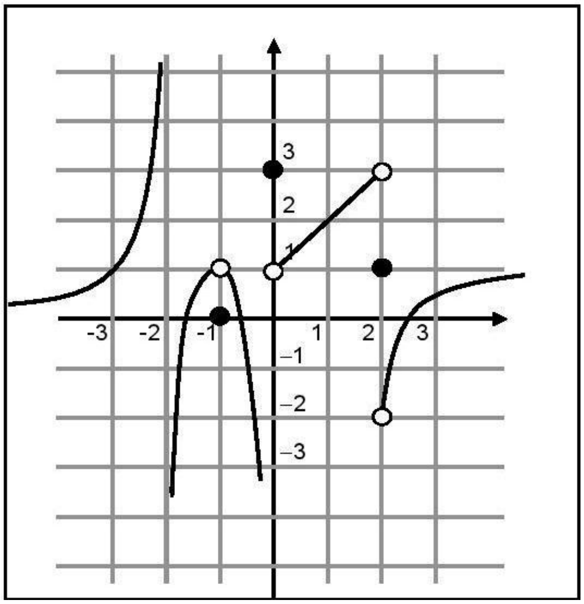
Al analizar esta parte del ejercicio se confirman los errores geométricos que describe Sierpienska.

VISIÓN GRAFICA E INTUICIÓN GRAFICA

No comprender e interpretar límites laterales.

Dificultad al interpretar gráficamente el límite.

Dada la siguiente grafica se pide dar el valor a cada cantidad.

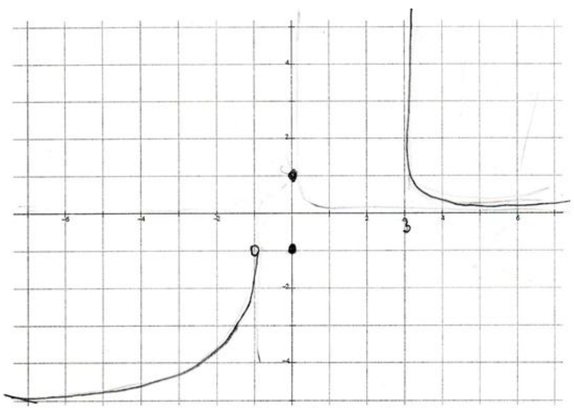


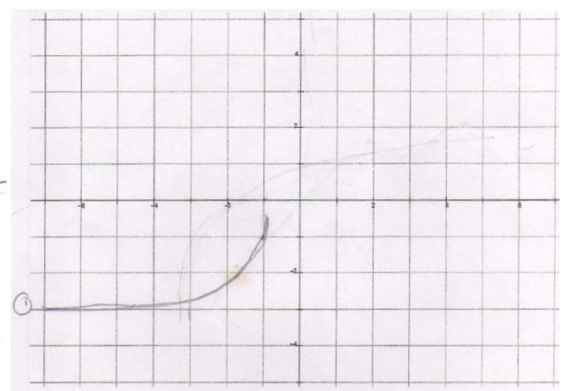
Para la función f cuya gráfica está dada, enuncia el valor de cada cantidad, si existe.		
a) lim$_{x - . .}$ f(x) = ∞ −∞	b) f(−2) = −2	c) lim$_{x - . 2^-}$ f(x) = no existe
d) lim$_{x - . 2^+}$ f(x) = 1	e) lim$_{x - . 2}$ f(x) = no existe	f) lim$_{x - . 1}$f(x) = −1
g) f(−1) = −1	h) f(0) = 0	i) lim$_{x - 0^-}$ f(x) = 0
j) lim$_{x - 0^+}$ f(x) = 1	k) lim$_{x - 2^-}$ f(x) = −2	l) lim$_{x - 2^+}$ f(x) = 3
m) f(2) = 2	n) lim$_{x - .}$ f(x) = ∞	o) Da las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Para la función f cuya gráfica está dada, enuncia el valor de cada cantidad, si existe.		
a) lim$_{x - . .}$ f(x) = ∞	b) f(−2) = ∞	c) lim$_{x - . 2^-}$ f(x) = ∞
d) lim$_{x - . 2^+}$ f(x) = ∞	e) lim$_{x - . 2}$ f(x) = ∞	f) lim$_{x - . 1}$f(x) = 1
g) f(−1) = 0	h) f(0) = 0	i) lim$_{x - 0^-}$ f(x) = 0
j) lim$_{x - 0^+}$ f(x) = −2	k) lim$_{x - 2^-}$ f(x) = 1	l) lim$_{x - 2^+}$ f(x) = 3
m) f(2) = 1	n) lim$_{x - .}$ f(x) = ∞	o) Da las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

Se puede observar que hay confusión en el valor que toma la función en un punto (incisos b, f, g y h); la dificultad de diferenciar los límites laterales (incisos c, d, i, j, k y l); y también hay errores al interpretar el límite cuando $x \to \infty$ (incisos a y n). Estos errores entran en los obstáculos descritos por Sierpienska y Cornu, el "horror al infinito", sentido común de la palabra límite y los geométricos.

Inventa una función que tenga las siguientes características:		
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$	$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$	$\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$





En las imágenes muestra que hay una carencia de habilidad de conversión entre representaciones (de una gráfica a una algebraica y viceversa). De nuevo se observa la dificultad al representar los límites laterales, cuando el límite es infinito, además de la idea de función.

CONCLUSIÓN:

Al detectar estos errores y dificultades, y a partir de las fuentes consultadas, se concluye que los alumnos no visualizan ni comprenden la definición formal del límite por lo que presentan dificultades en la interpretación geometría y algebraica de dicho concepto.

Por medio de applets, se ofrece una visualización grafica de la evolución histórica de dicho concepto, a través de una línea del tiempo en la que se muestra cómo surge y la necesidad de una definición formal, pretendiendo ayudar al alumno a mejorar su interpretación de límite.

CAPITULO IV

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

4.1 ZENÓN (490 a.C. – 430 a. C.).

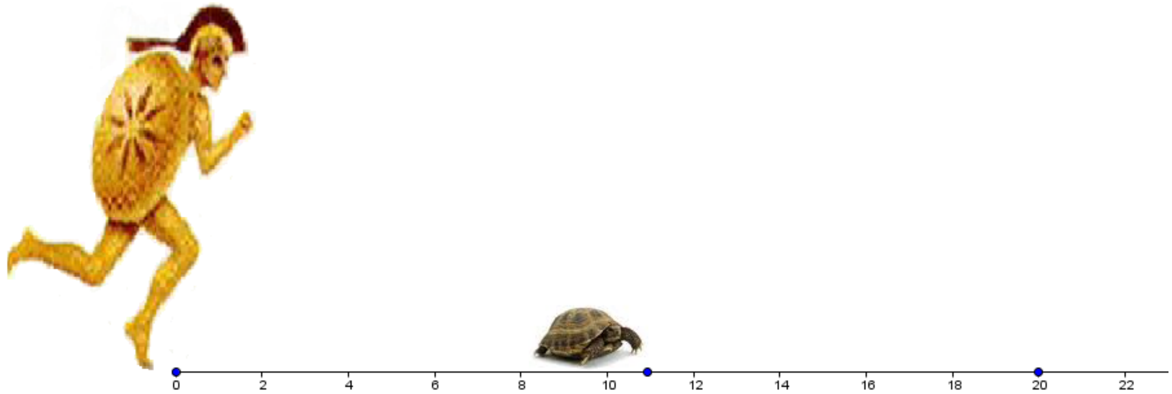
Fue un filósofo griego de la escuela eleática, nacido en Elea, discípulo de Parménides.

Trató de mostrar que la realidad es una e invariable y que todo movimiento es ilusorio. El intento filosófico característico de Zenón es fundamentar la doctrina de su maestro Parménides de que no se da la pluralidad ni el movimiento, sino sólo un ser en reposo, para ello mostraba lo absurdo de algunas creencias y se valía de paradojas en las que viene a decir que todo movimiento es un engaño.

Aquiles y la tortuga, es quizás, la más conocida paradoja de Zenón. El filósofo argumentaba que, en una hipotética carrera entre Aquiles y una tortuga, si ésta última tenía una ventaja inicial, el humano siempre perdería.

Al darse la orden de salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente. Pero al llegar allí, descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, mucho más lentamente, diez o veinte centímetros, el guerrero sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde está la tortuga, esta ha avanzado un poco más. Zenón sostiene que esta situación se repite indefinidamente y que Aquiles jamás logrará alcanzar a la tortuga.

Es evidente que esta paradoja, bajo una apariencia de razonamiento correcto, esconde algún fallo… todos sabemos que Aquiles debe alcanzar a la tortuga. Pero se tardó 24 siglos en desvelar por completo, gracias a la Teoría de Límites, el fallo está en la suposición de que infinitos trayectos deben sumar una distancia infinita y necesitan un tiempo infinito, esto no es correcto.



Supongamos que ambos deben recorrer una distancia de 100 metros y que Aquiles da a la tortuga una ventaja de 10 metros. Supondremos también que Aquiles corre a una velocidad de 10 metros por segundo y la tortuga lo hace a 5 metros por segundo.

Siguiendo con el razonamiento de Zenón tendremos lo siguiente:

Instante inicial $para\ t_0 = 0\ seg\ \ la\ diferencia\ es\ \ 10 = \frac{10}{2^0} m$

Para el instante $t_1 = 1\ seg$, Aquiles habrá recorrido 10 metros y estará en el punto 10, y la tortuga habrá recorrido 5 metros y estará en el 15. Es decir:

$$para\ t_1 = 1\ seg\ \ la\ diferencia\ es\ \ 5 = \frac{10}{2^1} m$$

Si ahora transcurre medio segundo más estaremos en el instante $t_2 = 1 + \frac{1}{2} seg$, la diferencia entre ambos es de 2.5 metros:

$$para\ t_2 = 1 + \frac{1}{2}\ seg\ \ la\ diferencia\ es\ \ 2.5 = \frac{10}{2^2} m$$

Así sucesivamente tenemos que:

$$para\ t_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\ seg\ \ la\ diferencia\ es\ \ 1.25 = \frac{10}{2^3} m$$

$$para\ t_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} seg\ \ la\ diferencia\ es\ \ 0.625 = \frac{10}{2^4} m$$

De tal modo que en el instante:

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\ seg$$

La diferencia entre la tortuga y Aquiles será cada vez más pequeña y en el instante t_n será exactamente de $\frac{10}{2^n}\ m$

Si ahora hacemos la siguiente operación:

$$t_n - \frac{1}{2} t_n = \frac{1}{2} t_n$$

Tenemos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Es decir:

$$\frac{1}{2} t_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\ \Rightarrow\ t_n = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$

Todo esto nos lleva a concluir que Aquiles alcanzara a la tortuga cuando hayan transcurrido 2 segundos de la carrera en el lugar correspondiente a los 20 metros. Si conoces el concepto de límite, basta tomar:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2seg$$

Y a la vez la distancia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10}{2^n} = 0\, m$$

Por lo tanto podemos concluir que Aquiles ha alcanzado a la tortuga cuando han transcurrido 2 segundo y ambos están situados en el punto 20 del recorrido. A partir de aquí Aquiles va ganando.

Las paradojas de Zenón ponen en tela de juicio los principios de la geometría, aunque sin proporcionar alternativa, apareciendo nuevos problemas de fundamentación de la Matemática. En particular como consecuencia de la crítica filosófica de Zenón a la Matemática, se arraiga la convicción de que la Geometría debía desarrollarse independientemente de la Aritmética.

La inquietud que introdujeron en el mundo griego las paradojas de Zenón contra la pluralidad y el movimiento, precipitó una profunda crisis en la Matemática que trajo consigo el *horror al infinito* que introduce el supremo rigor lógico impuesto por la escuela platónica, cuyo exponente más representativo será Eudoxo de Cnido.

4.2 HIPÓCRATES DE QUÍOS (450 a.C.)

LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

Consigue la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la Historia de las Matemáticas.

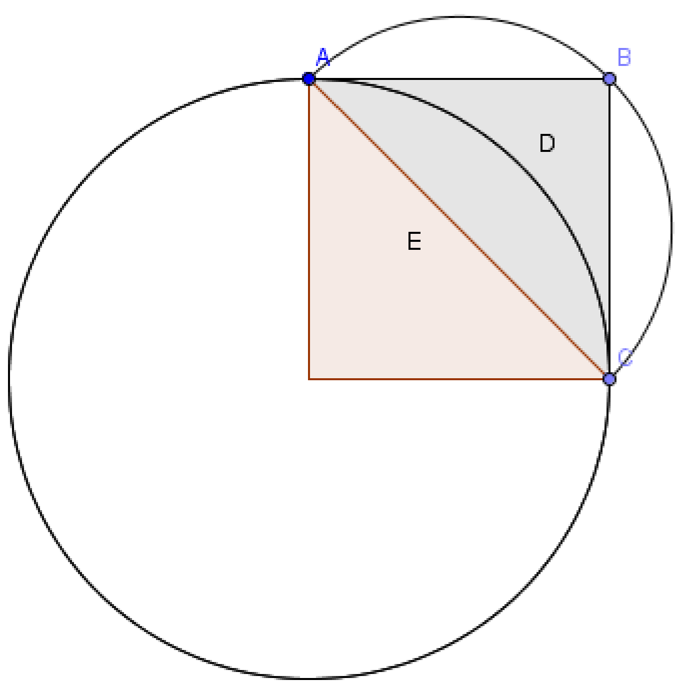
Hipócrates es, en cierto sentido, un pionero en la Historia de la Matemática, ya que inició la utilización de letras en las figuras geométricas para atemperar la excesiva retórica del discurso matemático, aplicó el Método de Análisis e ideó el método de demostración por reducción al absurdo que tanta influencia tendría sobre el método de exhaución de Eudoxo.

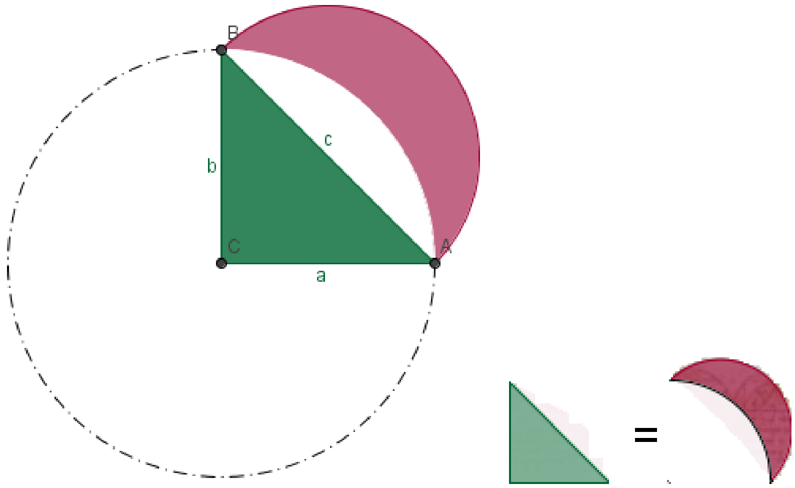
Demostró que las áreas de dos círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros. Es posible que llegara a esta conclusión considerando el círculo como el límite de un polígono regular. Primer ejemplo del método de exhaustivo.

Hipócrates fue el primero en cuadrar una figura con lados curvados, conocida como lúnula. Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos.

Según Hipócrates: "Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases”.

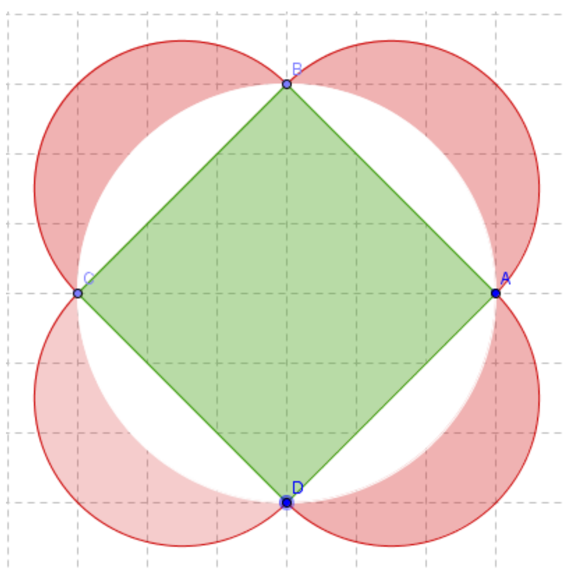
Esta lúnula, fue construida especialmente por él. Se trata de un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles y sobre la hipotenusa construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo. El centro del segmento circular inscrito tiene de centro el punto de unión de la circunferencia de centro E y radio la altura del triángulo con la línea BE, ese pequeño segmento circular es el lugar geométrico del incentro.

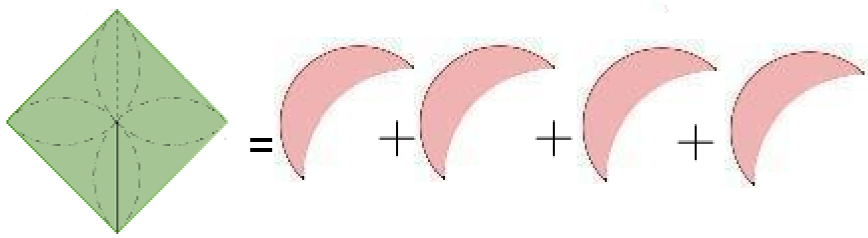




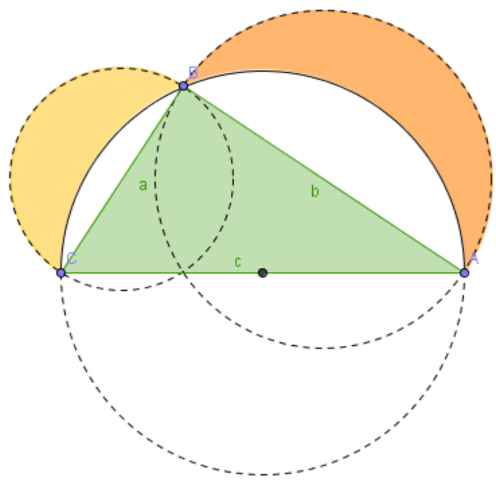
Como los segmentos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus bases, a partir del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo se obtiene que la suma de los cuadrados dos segmentos circulares menores es igual al cuadrado del segmento circular mayor.

Hipócrates en un intento de conseguir la cuadratura del círculo extendió el resultado a: “La suma de las áreas de las cuatro lúnulas es igual al área del cuadrado”.





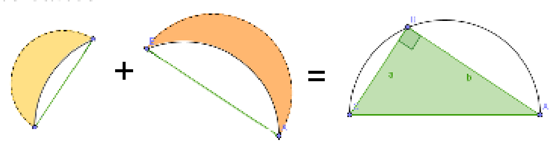
Área de la lúnula en AB + Área de la lúnula en BC = Área del triángulo ABC.



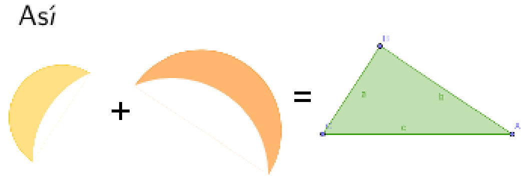
Partiendo del Teorema de Pitagoras $a^2 + b^2 = c^2$

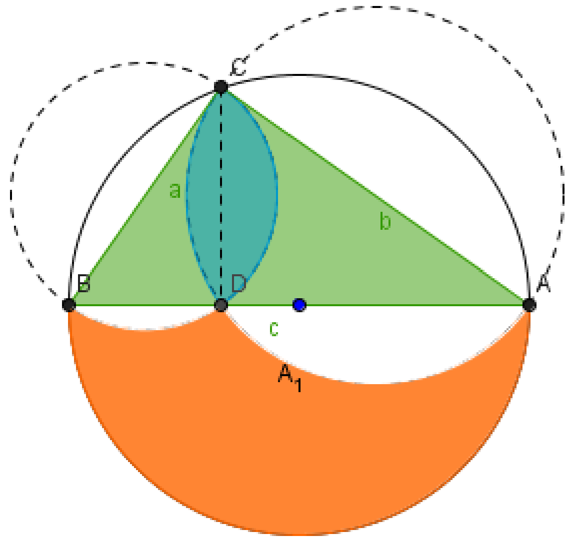
Tenemos $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$

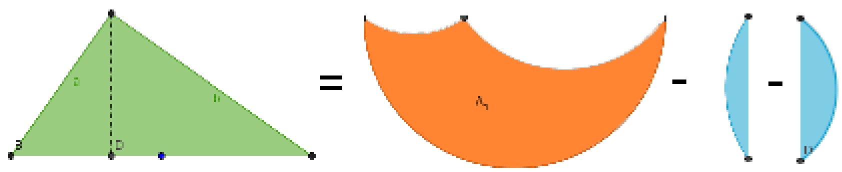
Por lo tanto :



Así







Según Proclo en su *Comentario a Libro I de los Elementos de Euclides*:

«*Hipócrates de Quíos es el inventor de la cuadratura de la lúnula y fue el primero que compuso Elementos*.»

4.3 EUDOXO DE CNIDO (c. 400-347 a.C.)

Resolvió de forma rigurosa el abismo entre finito e infinito. Al introducir la idea de "tan pequeño como se quiera" (equivalente a nuestro proceso de paso al límite). Eudoxo descubre, con su nueva teoría de magnitudes, un pretexto a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un inteligente instrumento geométrico – la teoría de proporción- que desarrolla en tres fases:

1. Una definición (igualdad de razones)
2. Un axioma (axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad)
3. El método (el método de exhaución)

El método de exhaución, consiste en aproximar la figura por otras en las que se pueda medir las correspondientes magnitudes, de manera que ésta vaya aproximándose a la magnitud buscada. Este método se aplica al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc.

Los matemáticos griegos utilizaban este método para lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas.

Dada una figura curvilínea C, para determinar su área A_C se buscará una sucesión de polígonos $\{P1, P2, \ldots, Pn, \ldots\}$, que aproximen progresivamente el área de C. Por el método de exhaución, Eudoxo muestra que el área de C es "el límite" de las áreas de los polígonos $\{P1, P2, \ldots, Pn, \ldots\}$. Demuestra que se puede encontrar un polígono de la sucesión $\{P1, P2, \ldots, Pn, \ldots\}$ cuya área difiera del área de la figura C en una cantidad menor que otra prefijada, es decir que la diferencia puede hacerse "tan pequeña como se quiera":

Es decir: "Dado $\varepsilon > 0$ se debe encontrar un polígono Pn tal que la diferencia $A_C - A_{Pn}$ sea menor que ε para n suficientemente grande".

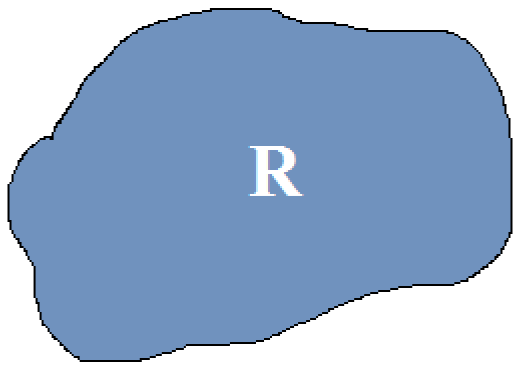
En particular

"Lema de exhaución del círculo", que simbólicamente se expresa en la forma:

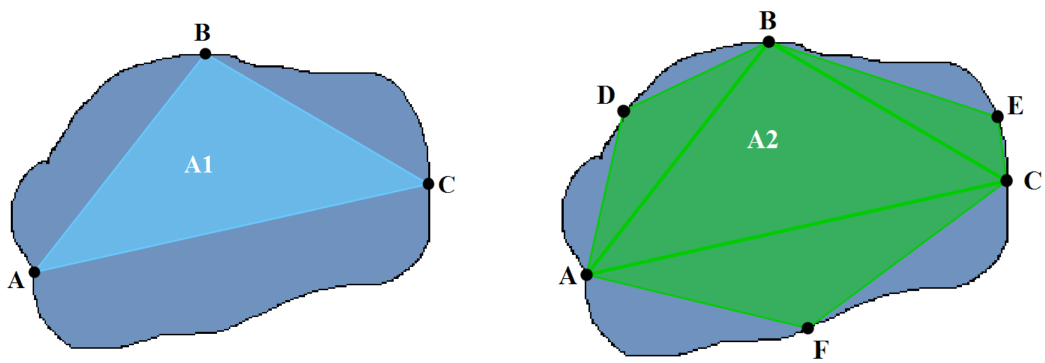
Dado un círculo C y un número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un polígono regular P inscrito en C de tal modo que: $A_C - A_P < \varepsilon$.

4.4 ARQUÍMEDES (c. 287 - 212 a.C.)

El método de exhaución fue perfeccionado y aplicado posteriormente por Arquímedes. Consiste en los siguientes pasos, tomando como referencia una figura curvilínea R



1. Se inscribe una sucesión de figuras rectilíneas $A1, A2, \ldots, An, ..$ cuyas áreas crecen monótonamente. En este caso: $a(A1) = a(ABC), a(A2) = a(ADBECF), \ldots,$ etc.



2. Las figuras se escogen de tal manera que la sucesión $a(R) - a(A1),\ a(R) - a(A1), \ldots, a(R) - a(A1), ..$ cumpla con el principio de convergencia de Eudoxo.

3. Se recurre a la intuición para la obtención del área de las figuras inscritas, el cual se designa por $a(A)$.

En este paso la obtención del “límite” no se especifica; se ha recurrido al proceso prueba y error, intentando visualizar una ley de formación en la suma, de todas las áreas de los polígonos inscritos.

4. Se demuestra que el “límite $a(A)$”, es igual al área buscada $a(R)$. Realizandola por reducción al absurdo, veamos:

a) Supongamos $a(R) > a(A)$, de lo cual $a(R) - a(A) > 0$, y por tanto, por el principio de Eudoxo, existe n tal que $a(R) - a(An) < a(R) - a(A)$; esto significa que $a(An) > a(A)$, lo cual es imposible.

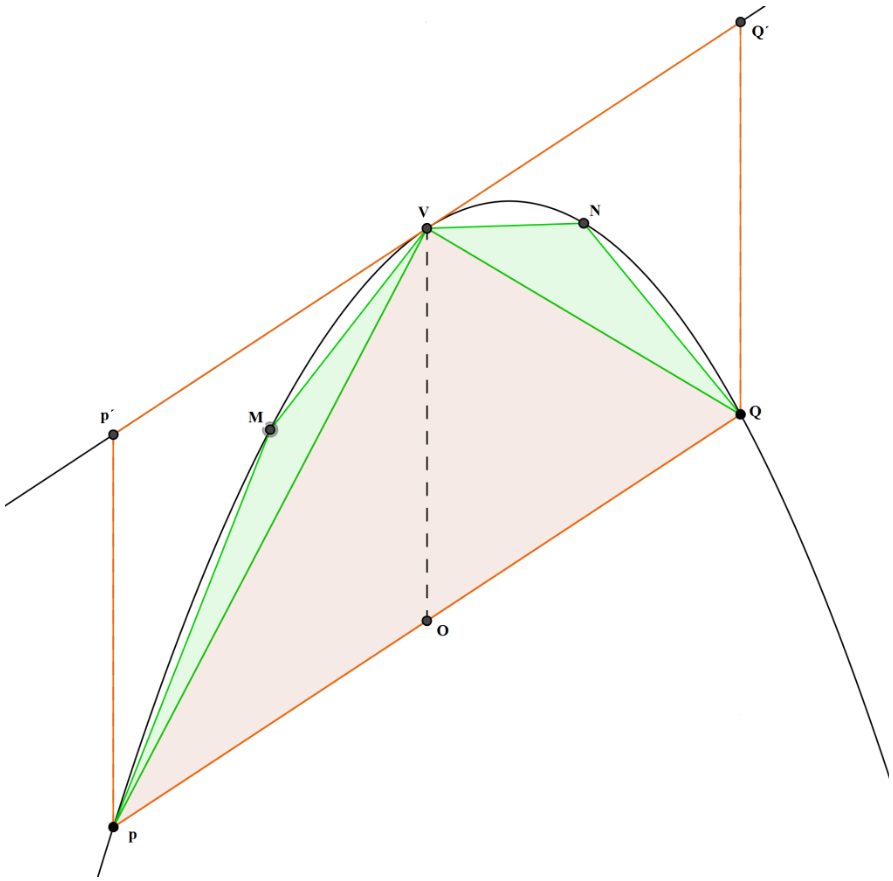
b) Supongamos $a(R) < a(A)$, de lo cual $a(A) - a(R) > 0$, y por lo tanto, dado que la sucesión $\{An\}$ tiene por límite A, existe n tal que $a(A) - a(An) < a(A) - a(R)$; se deduce que $a(An) > a(R)$, lo cual es imposible.

Ente método es una aproximación entre figuras geométricas conocidas, inscritas y circunscritas, sobre otra por conocer, de manera que la diferencia entre unas y otras sea tan pequeña como queramos, de tal forma que se consideren equivalentes.

A continuación veremos algunos ejemplos de su aplicación.

CUADRATURA DE UN SEGMENTO DE PARÁBOLA

Teorema. El área del segmento parabólico PVQ es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito ΔPVQ.



Demostración. Una cuerda PQ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda PQ y el arco de la parábola comprendido entre los puntos P y Q se llama un *segmento parabólico*. El vértice de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

El vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto de intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = \frac{1}{2}(P + Q)$ del segmento PQ.

El triángulo inscrito ΔPVQcuya base es el segmento PQ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico.

En la figura se han representado también los triángulos ΔPMV y ΔVNQ inscritos respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PV y VQ.

(I) La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los triángulosΔPMV y ΔVNQ. Arquímedes demuestra que:

$\lambda(\Delta VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\Delta VOQ)$, $\lambda(\Delta VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\Delta VOP)$

Por tanto

$$\lambda(\Delta VNQ) + \lambda(\Delta VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\Delta PVQ)$$

Llamando S el área del triángulo ΔPVQ, el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}S$. Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas $PM, MV, VNyNO$ inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $\frac{1}{16}S$. Y puede repetirse indefinidamente.

Ahora calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S$$

Pero Arquímedes, no sabía de convergencia de series, su razonamiento lo hace por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes La Esfera y el Cilindro así como en Sobre Cuadratura de la Parábola y en Espirales. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo.

La propiedad arquimediana establece que:

Dadas magnitudes cualesquiera a > 0 y b > 0, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir na $>$ b para algún número natural n.

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado principio de convergencia de Eudoxo, en el que se basa el llamado método de exhaución griego:

"Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano".

Arquímedes razona como sigue. Sea k el área del segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la secesión de áreas

$$K, K-S, K-\left(S+\frac{1}{4}S\right), K-\left(S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S\right), \dots ..$$

Cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K-\frac{4}{3}S > K-\left(S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S\right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

Lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S$$

Lo que implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$$

Por lo tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}S$

(II) Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $\frac{4}{3}S - K > 0$

Como cada una de las áreas $S,\ \frac{1}{4}S,\ \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S \ = \ \frac{4}{3}S - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S$$

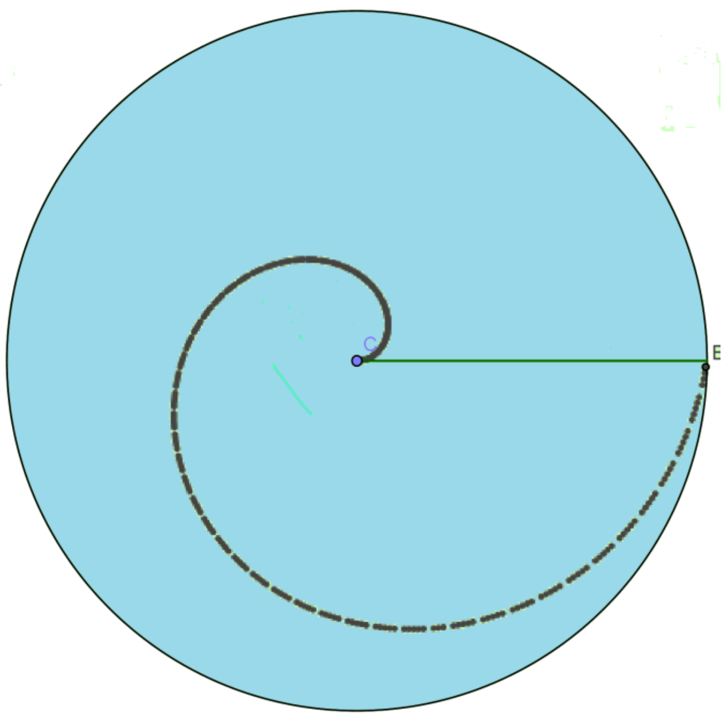
Que es absurda pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser $K < \frac{4}{3}S$

La única posibilidad es $K \ = \ \frac{4}{3}S$

Área de una espiral

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas curvas mecánicas. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\theta$, donde $a>0$ es una constante.

Teorema. El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.



Esta es la espiral de Arquímedes para $a = 1$ y su ecuación polar es $\rho = 1\,\theta$

Demostración.

Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\theta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$.

Primero dividimos este círculo en sectores de amplitud $\theta = \frac{2\pi}{n}$, desde $\theta = \frac{2\pi k}{n}$ a $\theta = \frac{2\pi(k+1)}{n}$ para $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares.

Sabemos que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es de $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Entonces el área del sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi(k+1)}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Deducimos que el área, S, de la espiral cumple que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 < S < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Arquímedes conocía que $\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Usando este resultado podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$\frac{4\pi^3a^2}{n^3}\left[\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\right] < S < \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3}\right] < S < 4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right]$$

$$4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3a^2\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Pongamos $k = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando k en la desigualdad anterior:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-K<S-K< 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-K$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 a^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-K<S-K<\frac{2}{3}\pi^3 a^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-K$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 a^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}+2\right)-K<S-K<\frac{2}{3}\pi^3 a^2\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+2\right)-K$$

$$\frac{4}{3}\pi^3 a^2-2\pi^3\frac{a^2}{n}+\frac{2}{3}\pi^3\frac{a^2}{n^2}-K<S-K<\frac{4}{3}\pi^3 a^2+2\pi^3\frac{a^2}{n}+\frac{2}{3}\pi^3\frac{a^2}{n^2}-K$$

$$-2\pi^3\frac{a^2}{n}+\frac{2}{3}\pi^3\frac{a^2}{n^2}<S-K< 2\pi^3\frac{a^2}{n}+\frac{2}{3}\pi^3\frac{a^2}{n^2}$$

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)<S-K<K(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2})$$

Y como $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}$, obtenemos que $-\frac{2K}{n}<S-K<\frac{2K}{n}$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S=K$.

4.5 ISAAC BEECKMAN (1588–1637)

Paso geométrico al límite.

El problema de caída libre de los cuerpos resulto ser el problema central en la formación de dinámica y, con ello de la mecánica clásica.

La ley según la cual en la caída libre los espacios recorridos se relacionan con el cuadrado de los tiempos estaba en contradicción directa con la física aristotélica. Galileo Galilei obtuvo esta ley y luego la confirmo mediante una combinación de inducción y comprobación experimental.

Pero no solo en Italia el problema de la caída libre ocupaba el centro de interés. En los Países Bajos, Isaac Beeckmann encontró, en contacto con Descartes, la ley de caída libre, sirviéndose de un paso al límite llevado geométricamente. Utilizó un procedimiento geométrico que se basaba en la interpretación de una representación gráfica.

En el estudio del problema de la caída libre introdujo dos suposiciones de tipo físico:

1. Se considera que la gravedad actúa no de forma continua, sino dando de algún modo al cuerpo que cae, cada cierto pequeño lapso de tiempo τ, un pequeño empujón.
2. Una vez producida una velocidad esta permanece inalterada mientras no existe causa externa que la modifique; esto se asemeja a lo que sería una ley de inercia.

Beeckmann, utilizó un procedimiento geométrico que se basa en la interpretación gráfica.

Supongamos que se parte del reposo. Después de cada lapso de tiempo τ se produce, debido al empujón, una velocidad γ adicional. En el primer periodo de tiempo, el camino recorrido es $\tau\gamma$, en el segundo $2\tau\gamma$, etc.

Si ponemos

$OA = \tau$, cada lapso de tiempo

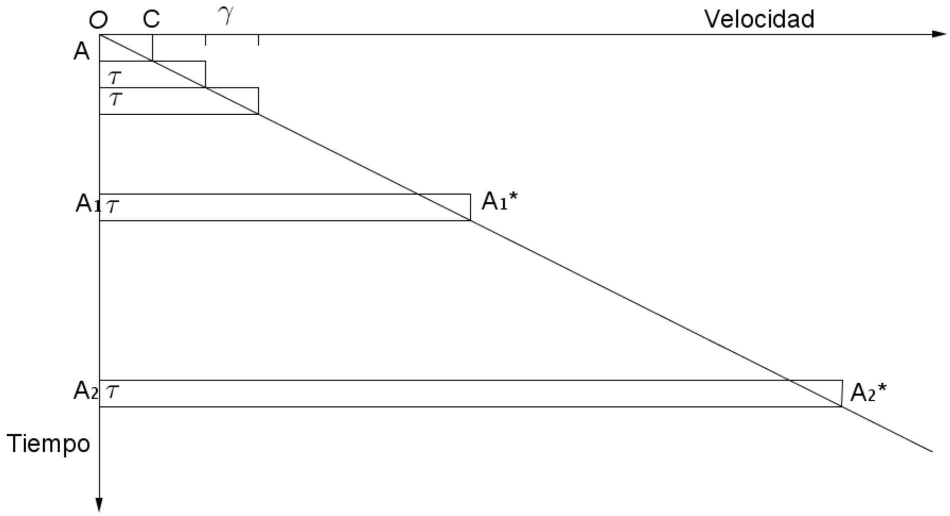
$OC = \gamma,$ Velocidad (después de cada lapso de tiempo τ se produce una velocidad adicional γ)

$OA_1 = t_1$, tiempo de caída 1

$OA_2 = t_2$, tiempo de caída 2

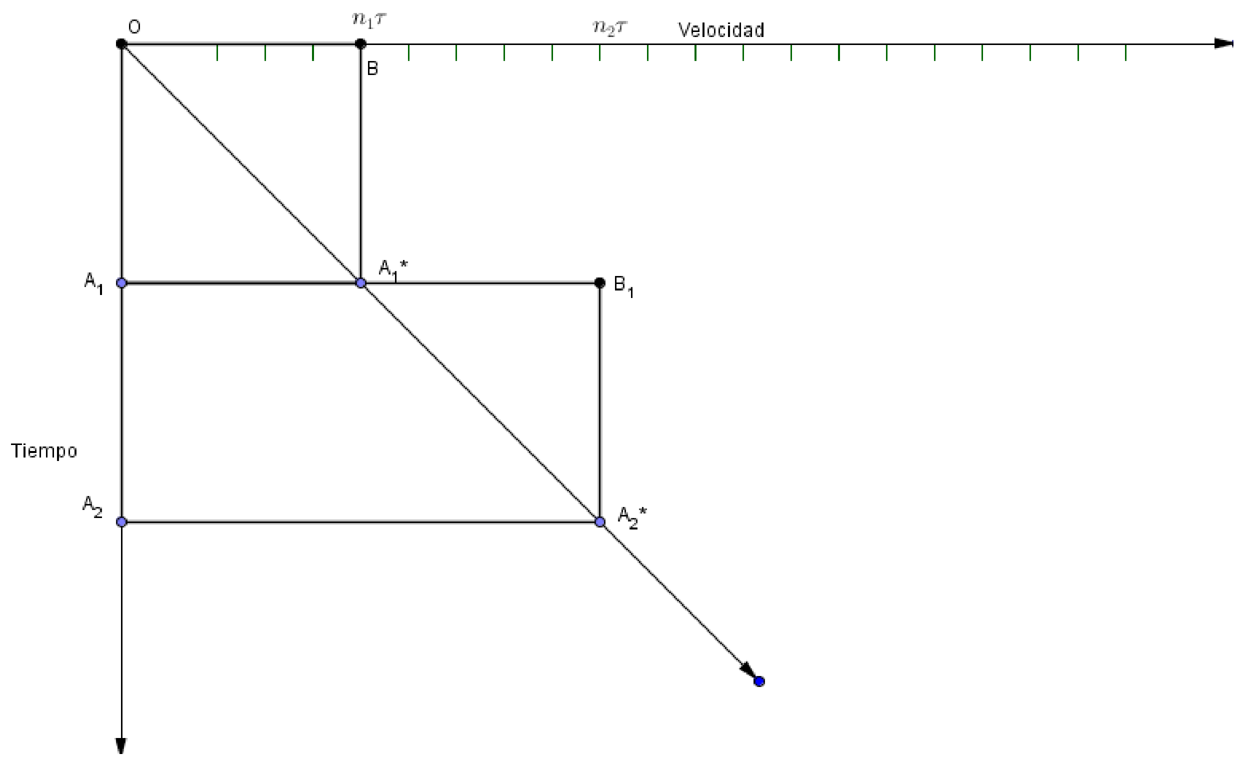
A_1^*, velocidad en el tiempo t_1

A_2^*, velocidad en el tiempo t_2



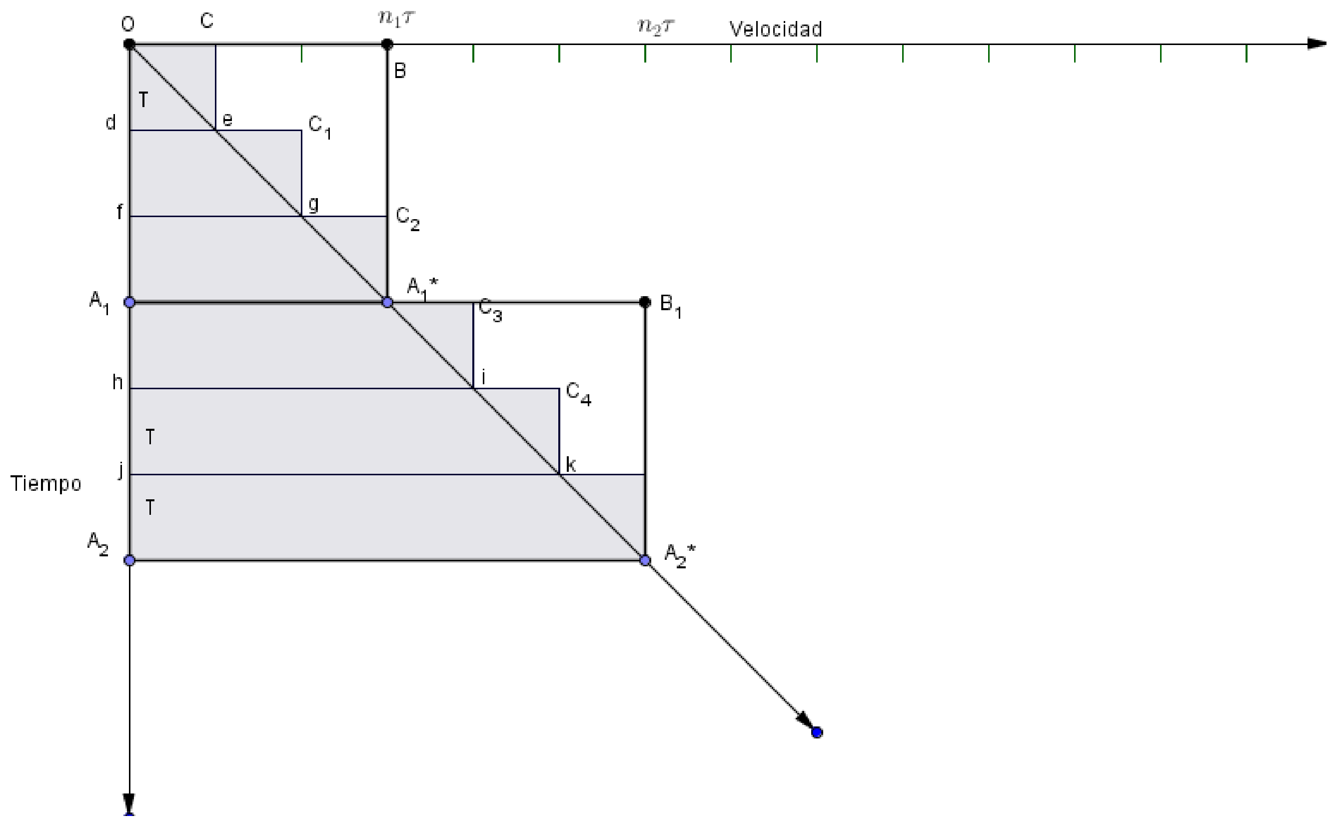
Entonces los triángulos en la figura de escalera representan gráficamente los espacios recorridos, ya que los espacios –salvo un factor de proporcionalidad – se han de medir como producto de tiempo por la velocidad. (Distancia=Velocidad×Tiempo).

Becan considera a t_2 como el doble t_1, pues lo que se plantea la pregunta: ¿se puede saber qué espacio recorrerá en una hora el cuerpo que cae, si se conoce el que recorre en dos horas?

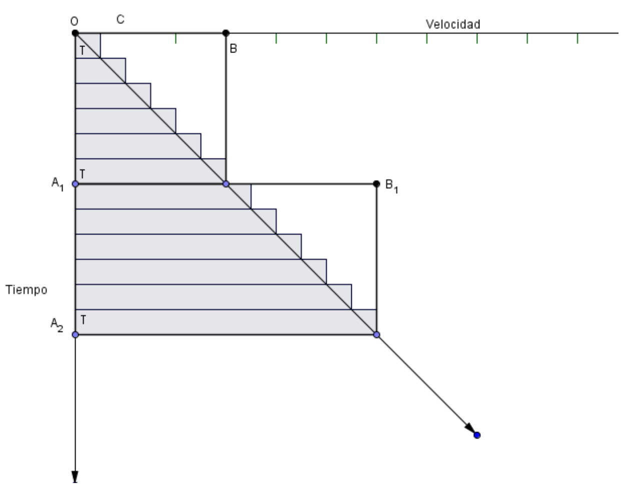


El espacio que atraviesa el cuerpo en su caída en un tiempo t_1 será $OA_1A_1^*B$. El espacio que (al caer) atraviesa en el tiempo t_2 dobla la proporción de OA_1 a OA_2.

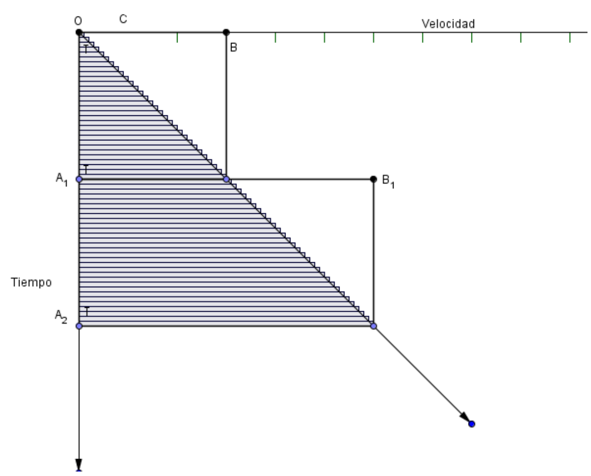
La línea OA_2^* representa el tiempo transcurrido, donde a cada instante τ, una fuerza se añade con la cual el cuerpo tiende hacia abajo, esa fuerza aumenta de la misma manera que aumentan las líneas $de, fg, hi, jk,$ y otra infinitas lineras que podemos imaginar entre ellas. Considerando una cierta τ, se considera el cuadrado $OCde$ como el primer espacio de movimiento, que será el primer mínimo de movimiento. Para el segundo mínimo de movimiento, se tiene el doble $degf$. El espacio recorrido en el tiempo t_2 se considera como la superficie del triángulo $OA_1A_1^*$, sin embargo, puede observarse algunas partes sobresalientes $OCe,\ eC_1g,\ gC_2A_1^*$, etc., de la figura del triángulo, entonces , para $\tau \to 0$, se obtiene el movimiento real, por lo que las partes sobresalientes también tienden a 0.



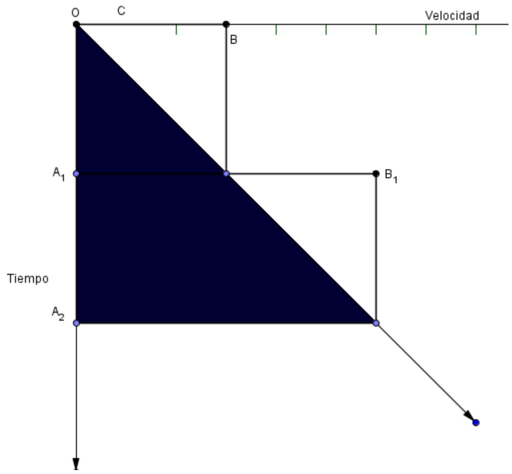
O
C
$n_1\tau$
$n_2\tau$
Velocidad
B
T
d
e
C_1
f
g
C_2
A_1
A_1*
C_3
B_1
h
i
C_4
T
Tiempo
j
k
T
A_2
A_2*



O
C
Velocidad
B
T
A_1
T
B_1
Tiempo
A_2
T



O
C
Velocidad
B
T
A_1
T
B_1
Tiempo
A_2
T



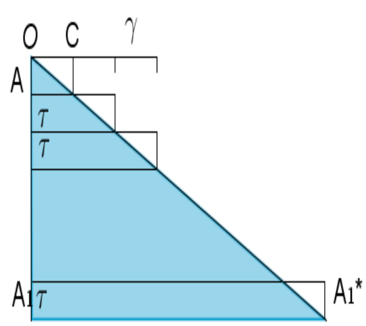
Entonces

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\Delta OA_1A_1^*}{\Delta OA_2A_2^*}$$

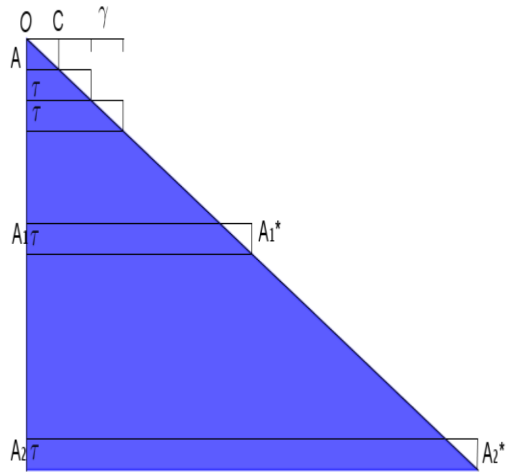
El movimiento real se obtiene para $\tau \to 0$, es decir mediante el aplanamiento de los peldaños de la escalera. Esta es la forma geométrica de paso al límite.

Puesto que el área de triángulos semejantes es proporcional a los cuadros de los lados adyacentes:

Área del triángulo formado por $t_1 = \frac{OA_1A_1^*}{2}$



Área del triángulo formado por $t_2 = \frac{OA_2A_2^*}{2}$



Se tiene $\frac{\frac{OA_1A_1^*}{2}}{\frac{OA_2A_2^*}{2}} = \frac{OA_1A_1^*}{OA_2A_2^*} = \frac{s(t_1)}{s(t_2)}$ y $\frac{\frac{OA_1A_1^*}{2}}{\frac{OA_2A_2^*}{2}} = \frac{(OA_1)^2}{(OA_2)^2}$

Así

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{(OA_1)^2}{(OA_2)^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Es decir, la Ley de caída libre: los espacios recorridos están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos.

Aplicando límite:

Sea

$$\tau = tiempo$$

$$\gamma = velocidad$$

Entonces en el primer periodo recorre $\gamma\tau$. En el segundo periodo recorre será $2\gamma\tau$

Después de un tiempo $t_1 = n_1\tau$, donde n_1 es el número de periodos recorridos.

El espacio recorrido será:

$$s(t_1) = \gamma\tau + 2\gamma\tau + \cdots + n_1\gamma\tau$$

$$= \gamma\tau(1 + 2 + \cdots + n_1)$$

$$= \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}\gamma\tau$$

Análogamente para un tiempo $t_2 = n_2\tau$.

$$s(t_2) = \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}\gamma\tau$$

El cociente de los espacios recorridos

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\frac{n_1(n_1 + 1)}{2}\gamma\tau}{\frac{n_2(n_2 + 1)}{2}\gamma\tau} = \frac{n_1(n_1 + 1)}{n_2(n_2 + 1)} = \frac{{n_1}^2 + n_1}{{n_2}^2 + n_2}$$

Despejando de $t_1 = n_1\tau$ y $t_2 = n_2\tau$, se tiene que $n_1 = \frac{t_1}{\tau}$ y $n_2 = \frac{t_2}{\tau}$, entonces:

$$\frac{\left(\frac{t_1}{\tau}\right)^2 + \frac{t_1}{\tau}}{\left(\frac{t_2}{\tau}\right)^2 + \frac{t_2}{\tau}} = \frac{\frac{{t_1}^2 + \tau t_1}{\tau}}{\frac{{t_2}^2 + \tau t_2}{\tau}} = \frac{{t_1}^2 + \tau t_1}{{t_2}^2 + \tau t_2}$$

Haciendo $\tau \to 0$, el movimiento pasa a ser un movimiento continuo, esto es, un movimiento real de caída libre. Aplicando límites se obtiene:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{{t_1}^2 + \tau t_1}{{t_2}^2 + \tau t_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Así, los espacios recorridos están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos de caída.

Becan no pudo llevar acabo entonces el paso al límite antes indicado, realizado con técnica de cálculo: estos métodos no estaban a su disposición todavía.

4.6 JOHANN KEPLER (1571 - 1630)

Astrónomo alemán, nacido en Neil (Núremberg). Su vocación fue puramente astronómica, sin embargo estableció sin saber algunas de las bases para el desarrollo del cálculo.

Kepler, publico en 1615 un libro titulado *Nova stereometria doliorum vinariorum*, que trata de la determinación del volumen de ciertos sólidos generados al girar una curva alrededor de una cuerda, de una tangente, o incluso de una recta exterior. Añadió así noventa nuevos sólidos a los propuestos por Arquímedes. En el segundo capítulo de este libro, trata el problema de la determinación del volumen de los toneles de vino y demuestra que, cerca del máximo volumen, este varía muy lentamente. Según parece, la observación de los extraños resultados obtenidos por el método utilizado en la época para medir el volumen de vino contenido en los toneles indujo a Kepler a estudiar los métodos volumétricos.

Kepler explica, con su solapado humor, el motivo del título *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Nueva estereometría de los toneles de vino)

“Fue celebrado mi nuevo enlace en noviembre del último año [1613, N.A.] en la época en la que los toneles de vino traídos de la baja Austria se apilaban, tras una abundante cosecha, en las orillas del Danubio, en Linz, y se podía comprar a un precio aceptable, pues es obligación del nuevo esposo y preocupado padre de familia procurar la bebida necesaria para su casa. Cuando algunos toneles se habían colocado ya en las bodegas, vino el vendedor, al cuarto día, con la vara de medir, y comenzó a calcular el contenido de todos los toneles sin tener en cuenta su forma y sin mayor reflexión o cálculo. Introdujo la varilla de medir con su punta metálica a través del agujero del corcho hasta alcanzar los dos fondos y cuando parecían ser iguales las dos longitudes, la marca en el agujero del corcho daba el número de cubos en el barril. Yo me preguntaba cómo la línea transversal que cruza la mitad del barril podía proporcionar una medida del contenido y dudaba de la exactitud del método, pues un barril muy bajo con bases muy anchas, y por tanto con un contenido muy reducido, podría tener la misma longitud de mira, no me pareció inoportuno, como recién casado, comenzar a investigar sobre bases geométricas la exactitud de este procedimiento tan simple y tan ampliamente extendido y sacar a la luz, tal vez, las leyes existen [L 8.9, pp 99-100]"

De esta manera la medición de la capacidad de los toneles, fue objeto de un estudio sistemático por parte de Kepler. Obtuvo así el siguiente resultado: un cuerpo hueco compuesto de un cilindro y de dos conos truncados no difiere excesivamente, en cuanto a la determinación de su capacidad por medio de la varilla de medir, de un tonel con duelas curvadas, lo cual correspondía a los de tipo austriaco, pero no a los toneles de construcción renana, que eran más panzudos.

Con el cálculo de la capacidad de los toneles se satisface sólo una parte de las pretensiones del Cálculo de toneles. Kepler mostró también que los cuerpos de revolución son generados por la rotación de cónicas alrededor de diferentes ejes; obtuvo un total de noventa y dos de estos cuerpos, indicando el cálculo aproximado de su volumen, y los bautizo con nombres de la vida cotidiana: manzana, limón, huso, calabaza, pera, etc.

4.7 FERMAT (1601- 1665)

CUADRATURA DE FERMAT

Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ con m y n números naturales.

Fermat seguía un método clásico de exhaución, pero consideraba rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica.

La aplicación del método de Fermat se aplica a la siguiente hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geq a$.

Elegimos un número $r > 1$ y consideramos los puntos de las abscisas $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Los rectángulos inscritos tienen área:

$$(ar - a)\frac{1}{ar^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \ldots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos está dada por:

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \ldots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{a}$$

Por lo tanto, llamando S al área bajo la curva, tenemos que

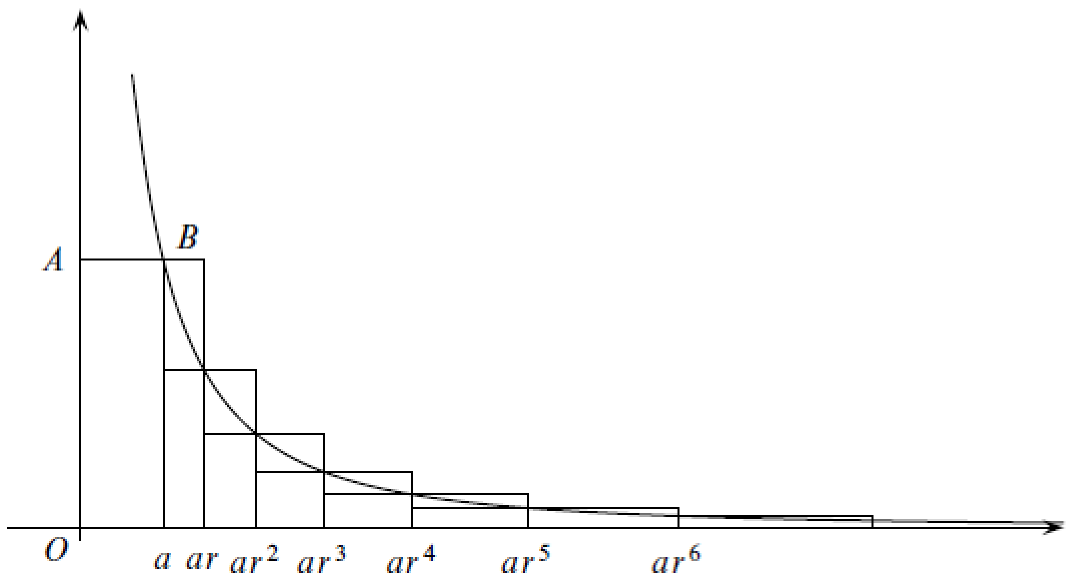
$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}$$

Y como esta desigualdad es válida para todo $r > 1$, concluimos que $S = \frac{1}{a}$. Dicho valor es precisamente el área del rectángulo OAB.

Las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.

- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

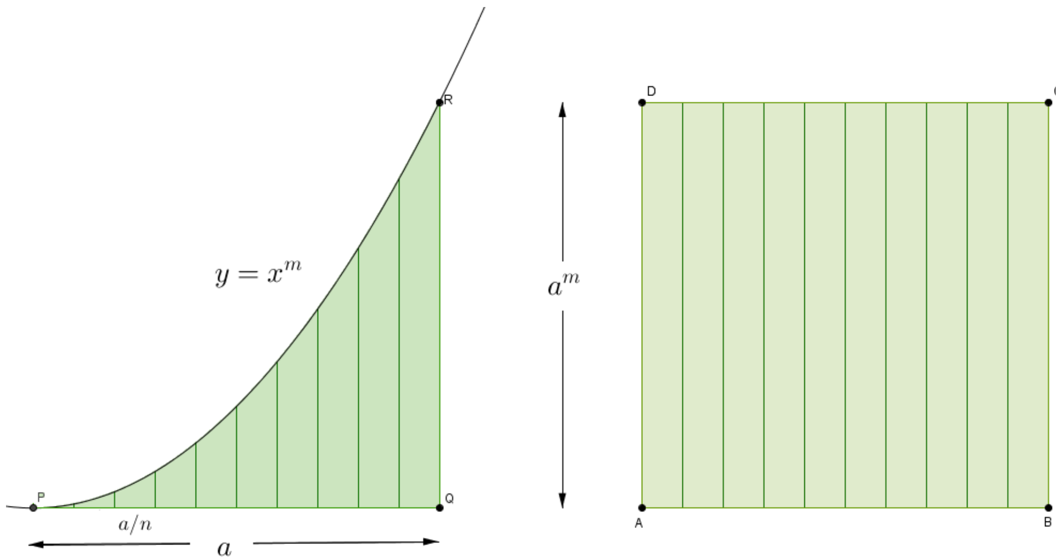


4.8 JOHN WALLIS (1616-1703).

Nació en Ashford, Inglaterra. Publicó dos obras importantes una sobre geometría analítica y otra sobre análisis infinito. Hizo que la geometría analítica diera una paso adelante asociándola al análisis infinitesimal en su *Arithmetica infinitorum*. Introdujo la notación de ∞ para representar la noción de infinito.

Wallis llevó a cabo en forma aritmética la demostración de límite de x^m. Considera el problema de calcular el área de la curva $y = x^m$ ($m = 1,2, ...$) y sobre el segmento$[0, a]$, considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^m, por lo que al dividir el segmento PQ=AB=a en n partes de longitud h=a/n, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es de tipo:

$$0^m + h^m + (2h)^m + (3h)^m + \cdots + (nh)^m$$



Para el rectángulo ABCD:

$$a^m + a^m + \cdots + a^m = (nh)^m + (nh)^m + \cdots + (nh)^m$$

Luego, la razón entre el área de la región PQR y el rectángulo ABCD es

$$\frac{\acute{A}rea\ PQR}{\acute{A}rea\ ABCD} = \frac{0^m + h^m + (2h)^m + (3h)^m + \cdots (nh)^m}{(nh)^m + (nh)^m + \cdots + (nh)^m}$$

$$= \frac{0^m + 1^m + 2^m + \cdots + n^m}{n^m + n^m + n^m + \cdots + n^m}$$

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión para $n = \infty$. Después de estudiar varios casos para $m = 1{,}2{,}3{,}4$.

Por ejemplo, para $m = 3$

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

Wallis concluye inductivamente:

$$\frac{0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

De manera que el límite es $\frac{1}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3}=\frac{1}{4}$$

Haciendo cálculos similares obtiene:

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} i}{(n+1)n}=\frac{1}{2};\quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^2}{(n+1)n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n};\quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^3}{(n+1)n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$$

En general $\frac{\sum_{i=1}^{i=n} i^m}{(n+1)n^m}=\frac{1}{m+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{n^{m-1}}$

Observa ciertas regularidades en las mismas y deduce que

$$\frac{0^m+1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^m+n^m+n^m+\cdots+n^m}=\frac{1}{m+1}$$

De aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{Área\ PQR}{Área\ ABCD} = \frac{Área\ PQR}{a^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow Área\ PQR = \frac{a^{m+1}}{m+1}, \qquad m = 1,2,3, ..$$

También realiza la extensión de la cuadratura desde m entero a m entero racional positivo.

Define el Índice de una función, $\sigma(f)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1}$$

Suponiendo que el límite existe, el índice de la de la función $f(x) = x^m$ es $\sigma(f) = m$ para $m = 1,2,3, ..$

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, ...$, la correspondiente sucesión de índices 0,3,5,7, ... forman una progresión aritmética. Como $\sigma(f) = m$, le permitió establecer, sin demostración, que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica $1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \dots, \left(\sqrt[q]{x}\right)^{q-1}, x$. De manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde sigue que $\sigma\left(\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right) = \frac{p}{q}$ para $p = 1,2,3, \dots, q$.

Se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[q]{0}\right)^p + \left(\sqrt[q]{1}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p}{\left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p + \cdots + \left(\sqrt[q]{n}\right)^p} = \frac{1}{(p/q) + 1}$$

De esta forma Wallis era capaz de calcular las razones entre las áreas bajo las curvas $y = x^{\frac{p}{q}}$.

4.9 ISAAC BARROW (1630 - 1677)

Isaac Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricaese* considera una de las principales aportaciones al Cálculo.

Las *Lectiones Geometricae* es el tratado matemático más importante de Barrow. En esta obra el maestro de Newton anticipa –en forma estrictamente geométrica, salvo en el caso del método analítico de las tangentes– buena parte de los resultado clásicos del Calculo Diferencial e Integral. En particular Barrow, obtiene mediante consideraciones geométricas:

- Reglas para el trazado de las tangentes que son equivalentes a la derivación de funciones implícitas, y en las que se aplica con éxito el "Triángulo característico" o "Triángulo diferencial"

- Resultados similares a las reglas habituales de la derivación –es decir, el comportamiento de la derivación frente a las operaciones aritméticas de la suma, producto, cociente, potencias, etc.

- Resolución de problemas de máximos y mínimos.

- Proposiciones geométricas equivalentes a los conocidos ahora como métodos de "integración por partes" e "integración por cambios de variable".

- Teoremas geométricos correspondientes al reconocimiento de la relación entre las cuadraturas y las tangentes como el hecho de que la integración y la diferenciación son operaciones inversas.

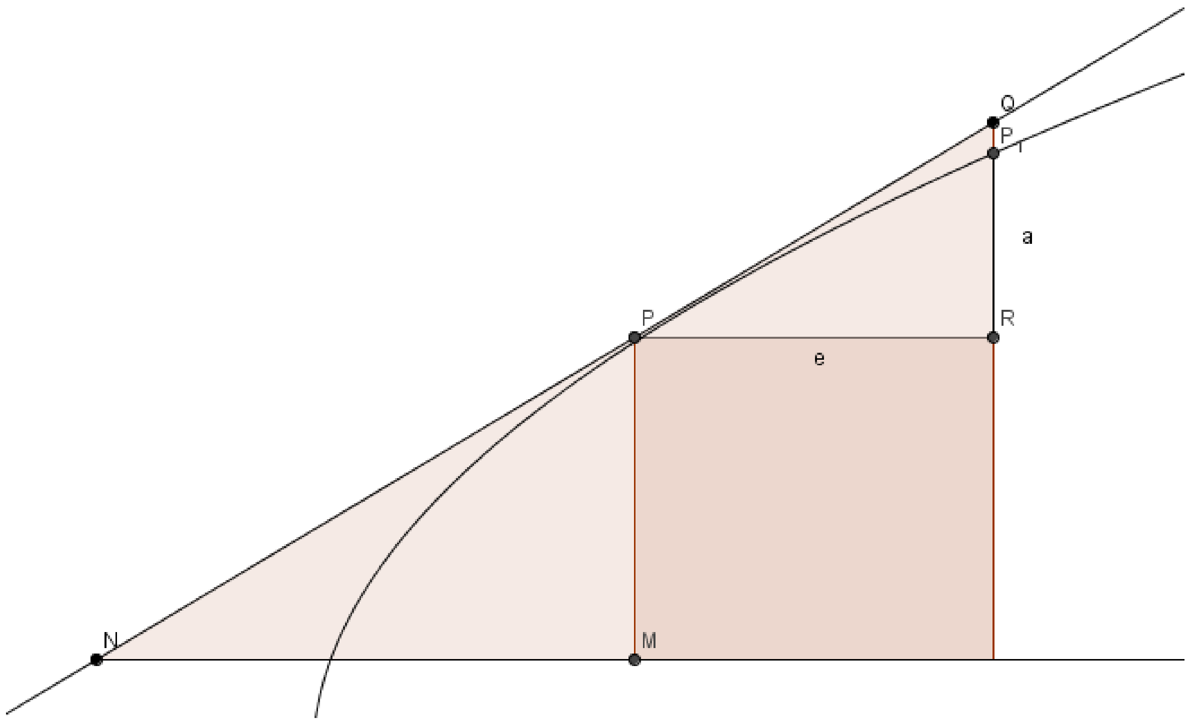
• Reglas para la diferenciación e integración de funciones potenciales, circulares, logarítmicas, exponenciales y otras muchas.

• Teoremas generales sobre rectificación de curvas y centros de gravedad de algunos sólidos.

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Utiliza su método infinitesimal para la determinación de tangentes, donde aparece el “triángulo característico” o “triángulo diferencial”. En referencia ello Barrow dice al final de la Lectione X:

> “Hemos terminado de esta manera la primera parte. [...] suplementariamente a esto hemos añadido en forma de apéndice, un método para encontrar tangentes mediante el cálculo, frecuentemente usado por nosotros, [...].”

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, como este triángulo es semejante al PNM, resulta que la pendiente de la tangente $PM = MN$ es igual a $QR = PR$. Barrow afirma que cuando el arco $\widehat{\mathrm{PP}_1}$ es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P. El triángulo PRP1 de la figura de la derecha, en el cual $PP1$ es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el triángulo característico o diferencial. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.



Dada una curva explicita $f(x, y) = 0$, sea $\widehat{PP_1}$ un arco infinitamente pequeño de la curva, que puede ser considerado como un segmento de recta. El carácter infinitesimal del *Triángulo Característico* permite considerar su semejanza.

Sea PR=e y RQ=a. Y sea $P = (x, y)$ y $P_1 = (x + e, y + a)$) dos puntos en la curva, infinitamente próximos ($e = dx, a = dy$).

Barrow plantea la igualdad $f(x, y) = f(x + e, y + a) = 0$, ya que P y P_1 son elementos de la curva. Y aplica tres reglas:

1. Suprime todos los términos en los que no hay e o a (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva).
2. Rechaza todos los términos en los que e o a están por encima de la primera potencia (porque siendo infinitamente pequeños, no tienen calor en comparación con el resto)

3. De la ecuación resultante de obtiene $\frac{a}{e}$, identifica el arco con $\widehat{\mathrm{PP}_1}$ con el segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$, lo que lleva a la semejanza de los triángulos $\mathrm{PRP}_1 \approx \mathrm{PNM}$, de donde resulta la pendiente de la recta tangente: $\mathrm{m} = \frac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{NP}}} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}}$

Barrow aplica el Triángulo característico bajo la idea esencial de que la tangente es la posición límite de la secante cuando e y a se aproximan a cero, aplicando el límite a base de despreciar los "infinitésimos de orden superior".

Dada una curva general definida implícitamente: $\mathrm{f(x, y)} = \sum_{ij}^{n} c_{ij} x^i y^j$

Luego

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x^i\, y^j = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} (x+e)^i\, (y+a)^j = f(x+e, y+a)$$

Desarrollando los binomios $(x+e)^i$, $(y+a)^j$ y aplicando las reglas 1 y 2 de Barrow. Se tiene

$$\sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\left(ix^{i-1}y^j e + jx^i y^{j-1} a\right)^i = 0$$

De donde la pendiente de la tangente es

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{e} = \frac{\sum_{i,j=0}^{n} ix^{i-1} y^j}{jx^i y^{j-1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

De modo que las reglas de Barrow permitirían obtener una derivación analítica del cálculo de la pendiente de la tangente mediante las derivadas parciales formales.

También para la función potencial $y = x^n$, la aplicación del Barrow daría:

$$(x+e)^n-(y+a)=x^n-y$$

Luego $x^n+nx^{n-1}+(terminos\ con\ potencias\ superiores\ a\ e)-y-a=x^n-y$

Simplificando los términos comunes y eliminando potencias superiores de e y a, resuelta:

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{a}{e}=nx^{n-1}$$

En su método infinitesimal de las tangentes, Barrow aplica métodos analíticos, considera con precisión el triángulo característico y se acerca a la concepción de la tangente como límite geométrico de la secante, pero sobre todo aplica una idea equivalente a despreciar potencia de infinitesimal. Formalmente el procedimiento se parece a la acción en Cálculo diferencial (utilizado actualmente) de incrementar las variables, estudiando el incremento producido sobre la función, Barrow simplemente piensa en resolver un problema geométrico concreto con infinitesimales, sin manejar, funciones no variables continuas. Además, un tratamiento riguroso del procedimiento precisaría de forma inevitable el uso de los límites.

EJEMPLOS:

1. Sea $y^2=px$,

Entonces: $y^2-px=(y+a)^2-p(x+e)$

$$y^2-px=y^2+2ay+a^2-px-pe$$

$$0=2ay+a^2-pe$$

Despreciando las potencias de a y e superiores a 1. Se tiene

$$2ay=pe$$

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y} = \frac{dx}{dy}$$

Luego haciendo $a = m$ y $e = t\,\frac{m}{t} = \frac{p}{2y}$.

2. Sea $y = x^2$ entonces $x^2 - y = 0$

$$(x+e)^2 - (y+a) = x^2 - y$$

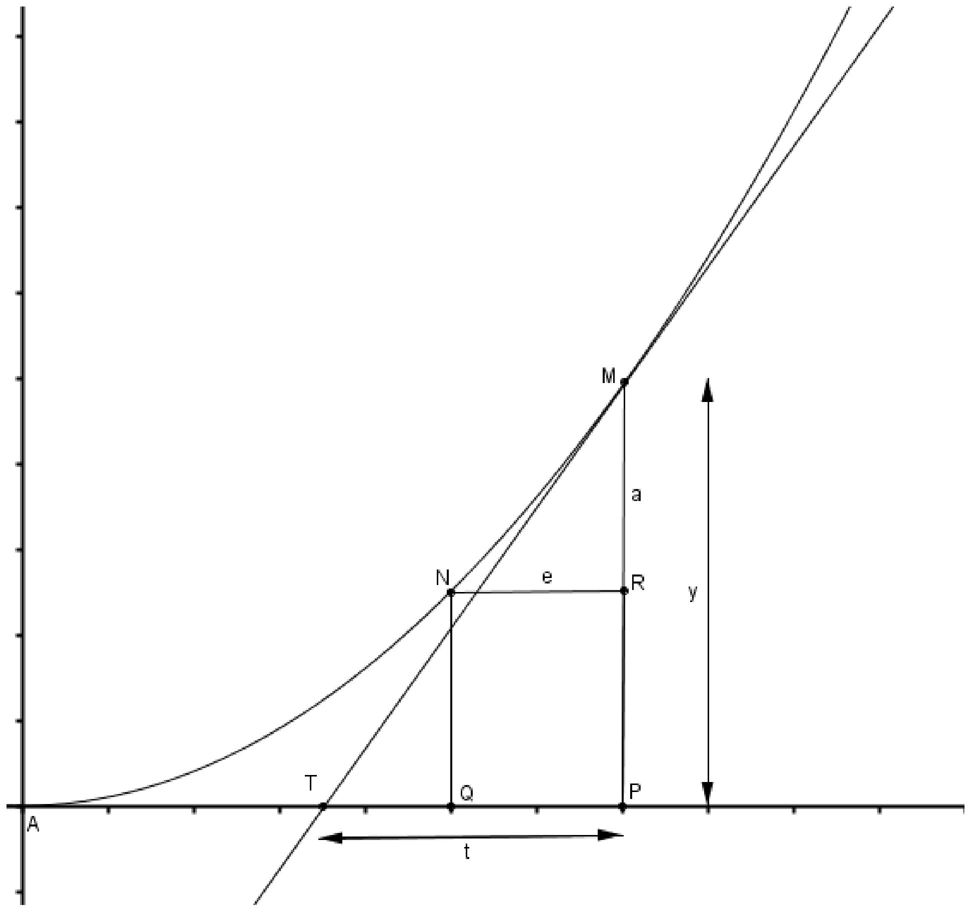
$$x^2 + 2xe + e^2 - y - a - x^2 + y = 0$$

$$2xe + e^2 - a = 0$$

$$2xe - a = 0$$

$$\frac{a}{e} = \frac{2x}{1} = \frac{dx}{dy}$$

Así obteniendo $\frac{a}{e}$, se tiene la pendiente a la recta tangente a la curva en un punto $P(x,y)$, es decir la derivada de la función en dicho punto.



4.10 ISAAC NEWTON (1648-1727)

El método de las fluxiones fue creado por Newton, expuesto en su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, en este se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo, y denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de las fluentes, esto es, las derivadas con relación al tiempo, que se denominan fluxiones. Este método resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocidas la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes. Para resolver estos problemas aplico varios métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Para Newton estos métodos resolutivos no se explicaban de forma satisfactoria, por lo que en 1704 en su obra *Tractatus quadratura cuervam*, explica el método de las "razones primeras y últimas" en el que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicación de una idea de limite un tanto metafísica.

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen, $x, y, \ldots$, son "fluentes" y sus velocidades, designadas por $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$ son sus "fluxiones". La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo o, es $\dot{x}o$, el momento del fluente.

Allí resuelve el siguiente problema "Fluya una cantidad x uniformemente; ha de encontrarse la fluxión de la cantidad x^n . En este tiempo, la cantidad x, al fluir, se convierte en $x + o$, la cantidad x^n resultará $(x + o)^n$; que por el método de las series infinitas es $x^n + nox^{n-1} + \left(\frac{(n^2+n)}{2}\right) ox^{n-2} + \cdots etc.$ Y los incrementos o y $nox^{n-1} + \left(\frac{n^2+n}{2}\right) ox^{n-2} + \ \ldots\ etc.$ Desvanézcanse ahora aquellos incrementos, y su última razón será 1 a nx^{n-1}. Y por eso, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como 1 a nx^{n-1}.

Si $y = f(x)$ en un pequeño intervalo o de tiempo x se incrementa a $x + o$, y se incrementa a:

$$y + o\dot{y}$$

$$y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) \quad se\ tiene\ que\ \ o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) - f(x)$$

Es decir $y = \frac{f(x+o\dot{x})-f(x)}{o}$

Ejemplo

Sea $y = x^3$

$$\dot{y} = \frac{(x + o\dot{x})^3 - x^3}{o} = \frac{3x^2\dot{x}o - 3x\dot{x}^2o^2 + o^3}{o} = 3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2 + o^2$$

Luego elimina los términos que contienen o, ya que “se le supone infinitamente pequeño”

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x}$$

Por lo tanto la relación entre fluxiones es

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

De esta manera afirma que el área

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Proviene de la curva $y = x^n$

Concluye esto suponiendo que la fluxión de x es 1, es decir, considerando que el incremento que considera en x por unidad de tiempo es 1.

Newton no da un significado concreto de la palabra “desvanecerse”, en su obra *Principia* incluye el siguiente lema que muestra lo que entiende por límite:

“Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales”.

4.11 GOTTFRIED LEIBNIZ (1646 - 1716)

Leibniz se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias; asimismo el área bajo una curva depende de la suma de las áreas de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen dicha área.

Así, establece el hecho de que la integración, como proceso de suma, es inverso al de la diferenciación. El diferencial del argumento, dx, se toma como una magnitud completamente arbitraria, mientras que el diferencial dy de la función está definido por $dy = ydx/St$, donde St es la subtangente a la curva en el punto (x, y). Esta notación (dx, dy) era sumamente útil. Así, por ejemplo, para calcular $d(x.y)$hace

$$(x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$$

y desprecia $dx.dy$, pues lo considera "infinitamente, infinitamente pequeño".

Leibniz fue consciente de las imperfecciones y contradicciones lógicas de su concepto de diferencial y del tratamiento que le había dado a las “magnitudes infinitamente pequeñas”. Existen numerosas manifestaciones, en ocasiones contradictorias, de Leibniz acerca de la relación con el infinito; el siguiente pasaje procede del año 1702.

De ahí que para evitar estas sutiles controversias, me contentaba, pues quería hacer mis reflexiones generalmente comprensibles, como explicar el infinito por medio de lo incomparable, es decir, suponía magnitudes, que son incomparablemente mayores o menores a las nuestras. De esta manera, pues, se obtiene un número arbitrariamente grande de grados de magnitudes incomparables, de manera que un elemento incomparable menor puede ser eliminado en el cálculo, cuando se trata de la verificación de un incomparablemente mayor. Así por ejemplo, una partícula de materia magnética que penetra un vidrio es incomparable a un grano de arena, o éste a la esfera terrestre, y la esfera terrestre por último al firmamento […] No obstante hay que considerar aquí que las magnitudes incomparablemente pequeñas, tomadas ellas mismas en su sentido habitual, no son en momentos constantes y determinadas, sino que, antes bien, puesto que se pueden suponer tan pequeñas como se quiera, en consideraciones geométricas representan el mismo papel que los infinitésimos en sentido estricto. Si un adversario de nuestros teoremas quisiera negar su validez, entonces nuestro cálculo mostrará que el error es menor que cualquier cantidad dada, ya que está en nuestro poder disminuir lo bastante para nuestros fines lo incomparablemente pequeño –pues se puede suponer tan pequeño como se quiera- y sin duda se halla ahí la prueba rigurosa de nuestro cálculo infinitesimal.

Este pasaje encierra elementos del pensamiento racional y dialecticos que sirvieron para la clarificación conceptual del paso al límite.

4.12 LEONARDO EULER (1707 - 1743)

Nació en Basilea en 1707 y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli. Hasta 1741, año en que por invitación de Federico el Grande se trasladó a la Academia de Berlín donde refinó los métodos y las formas del cálculo integral, (no sólo gracias a resultados novedosos, sino también a una cambio en los habituales métodos de demostración geométricos, que sustituyo por métodos algebraicos), que convirtió en una herramienta de fácil aplicación a problemas de física.

Euler toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama *Análisis* y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como suma, producto y composiciones de funciones.

Publico tres libros dedicados al cálculo infinitesimal, la *Introduction in analysin infinitorum* (Introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas, dos volúmenes, escrito en 1745, impreso en 1748), *Institutiones calculus differentialis*… (Iniciación al cálculo diferencial…, escrito en 1748, publicado en 1755), e *Institutiones calculus integralis*… (Iniciación al cálculo integral elaborado en 1763 y publicado entre 1768 y 1770 en tres partes).

4.13 JEAN LE ROND D´ALAMBERT (1717-1783)

Nació en Paris, Francia. Colaboró con Denis Diderot en los veintiocho volúmenes de la Enciclopedia o Diccionario razonado de las ciencias, las artes y los oficios, redacto casi completamente la parte matemática y filosofía.

D´Alambert, representa sus aclaraciones sobre el cálculo infinitesimal en algunas memorias filosóficas y en artículos escritos para la Enciclopedia. Para él, sin negar la existencia del infinito actual, la geometría supone, al menos necesariamente la existencia real.

El infinito de las matemáticas, dice, no es más que “el límite de la cantidades finitas” en el sentido de que puede ser igual a un número tan grande como se quiera. Así para él, la idea de un número infinito no es más que una idea abstracta que expresa solamente un límite de naturaleza intelectual, al cual todo número finito no llega nunca.

D´Alambert habla de infinitos de segundo y tercer orden en términos de líneas infinitas que recurren al concepto de función. Por ejemplo, si una línea llega a ser infinita, otra línea que dependa de ella es infinita de segundo orden, lo que significa, según dice, que "la razón de la segunda línea a la primera (suponiendo que las dos sean finitas) es tanto mayor cuanto mayor es la primera" y esta razón puede suponerse mayor que cualquier número finito. Para definir las cantidades infinitamente pequeñas procede de la misma manera, lo que le conduce a rechazar las cantidades evanescentes de Newton y el concepto mismo de diferencial.

Para D´Alambert el cálculo diferencial, consiste en encontrar el límite de la razón entre la diferencia finita de dos cantidades y la diferencia finita de otras dos. La razón será exactamente igual al límite en el momento en que estas diferencias sean nulas, pues entonces la razón desaparece y es remplazada por un valor, el del límite. Establece una definición de límite:

"Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más cerca que una magnitud dada, por pequeña que se le pueda suponer, no obstante sin que la magnitud que se aproxime, pueda jamás sobrepasar a la magnitud a la que ella se aproxima; de manera que la diferencia de semejante cantidad a su límite es absolutamente inasignable".

Aquí aparece el concepto de límite como supremo o ínfimo de sucesiones monótonas. También expone resultados sobre la unicidad del límite y sobre el límite del producto de dos magnitudes, con forma de enunciados, sin ningún tipo de símbolo para representar los límites.

4.14 LAGRANGE (1736-1813)

Joseph Louis Lagrange nació el 25 de enero de 1736 en Turín, capital del reino de Cerdeña. Durante su estancia en Berlín, Lagrange redacto cerca de ciento cincuenta memorias consagradas a las matemáticas y a la mecánica. Muchas de estas memorias versan sobre el álgebra: resolución de ecuaciones, aproximación de raíces mediante fracciones continuas, determinantes, etc., así como sobre la teoría de números: pero la gran obra de Lagrange durante este período es su *Mecánica analítica*, una obra maestra de matemáticas pura que presenta la mecánica por medio de un método puramente algebraico, sin la ayuda de ninguna figura.

Lagrange arrincona las consideraciones geométrico-analíticas de los Bernoulli y de Euler para sustituirlas por un método puramente analítico y un simbolismo más apropiado. En 1755, describe en una carta dirigida a Euler su método, al que llama "método de variación", pero que Euler denominará "cálculo de variaciones" en 1756.

Sus dos grandes tratados sobre funciones, Teoría de las funciones analíticas y Lecciones sobre el cálculo de las funciones, constituyen una tentativa ambiciosa de dotar al cálculo de un fundamento sólido reduciéndolo al álgebra.

En su exposición histórica y crítica de los trabajos anteriores sobre el cálculo, Lagrange manifiesta una actitud escéptica con respecto a los infinitamente pequeños, rechaza el concepto de límite formulado por D´Alemnber, critica el método de las fluxiones de Newton y muestra su insatisfacción con las cantidades infinitesimales de Leibniz y Bernoulli.

Lagrange quiere sustituir todo lo hecho hasta entonces por un método algebraico simple, que esté exento de las objeciones que se han reprochado a los otros y cuyo objeto sea proporcional al cálculo todo rigor de las demostración es antiguas.

Su método consiste en utilizar el hecho que toda función f puede expresarse de la manera siguiente:

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \cdots$$

Donde los coeficiente "$p, q, r, \dots \dots$" dependen de x pero son independientes de h. Aunque intenta justificar que este desarrollo de las funciones en serie de Taylor es siempre posible, las razones que da no son adecuadas y resultan claramente insuficientes. Sin embargo, partiendo de ese desarrollo, Lagrange obtiene de una manera puramente formal que:

$$p = f'(x), q = \frac{1}{2!}f''(x), r = \frac{1}{3!}f'''(x)$$

De donde deduce que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

En particular encuentra $p \ o \ f'(x) \ \ de \ \ f(x)$ despreciando todos los términos del desarrollo, salvo los dos primeros; así $f(x+h) - f(x) = ph$ y dividiendo por h, concluye que

$$p = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

La notación habitual para las derivadas $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$, es la de Lagrange, y el termino "derivada" está tomado de su terminología.

Los trabajos de Lagrange ejercieron una influencia considerable en el desarrollo de funciones de la teoría de funciones de una variable real.

4.15 BERNHARD BOLZANO (1781-1848)

Matemático y filósofo, estableció por primera vez en la historia de las matemáticas una definición rigurosa de continuidad de una función y se expresa explícitamente la intención de dar forma rigurosa a un concepto que hasta entonces había sido utilizado intuitivamente. Enuncia la una definición siguiente de continuidad:

" $f(x)$ es continua en un intervalo si para toda x en el intervalo, la diferencia $f(x+w)-f(x)$ puede hacerse tan pequeña como uno quiera tomando w suficientemente pequeña." Bolzano todavía no conocía el uso del signo de valor absoluto.

Bolzano (1817) definió la derivada por primera vez como como un límite: la cantidad $f(x)$ a la que la razón $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos. Sabía que la derivada de $f(x)$ no es un cociente de ceros o de cantidades "evanescentes" sino de un número hacia el que se aproxima el cociente.

Bolzano, en su Théorie des fonctions (Teoría de funciones) separa el concepto de continuidad del de derivabilidad; cuarenta años antes de Weierstrass había construido una función de una variable real, continua en un intervalo cerrado, que no tiene derivada en ningún tipo del intervalo. Subraya en carácter local de la continuidad: examina la continuidad en un punto y estudia separadamente la continuidad a la izquierda o a la derecha.

También pone de manifiesto la necesidad de considerar la convergencia de series infinitas. Definió así una clase de series:

> "La variación (crecimiento o decrecimiento) que experimenta su valor mediante una prolongación de sus términos llevada tan lejos como se quiera, es siempre más pequeña que una cierta cantidad, que puede tomarse, a su vez, tan pequeña como se quiera, si se hubiera prolongado ya la serie lo suficiente… existe siempre una pero sólo una cantidad constante a la que se aproxima el valor de la serie (de términos finitos) tanto como se quiera cuando se la prolonga lo suficiente."

4.16 CAUCHY (1789-1857)

Augustin-Louis Cauchy nació el 21 de agosto de 1789 en París. En el mes de febrero de 1811, presenta su primera memoria consagrada a la teoría de poliedros, en la cual muestra que no existen más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12 o 20 caras, además de desarrollo la célebre fórmula de Euler que une las aristas, caras y vértices de un poliedro.

En 1814, presenta una *Mémoire sur la theorie des integrales définies* (Memorias sobre las integrales definidas), seguida en 1815 de una memoria fundamental sobre los grupos de sustitución, así como una demostración de un importante teorema de Fermat.

Cauchy fue estimulado a escribir los apuntes de sus cursos, y así aparecieron sucesivamente los Coursdánalyse de L´EcolePolytechnique (1821) (Curso de análisis de la Escuela Politécnica), el Résumé des lecons sur le cualcul infinitesimal (1823) (Compendio de las lecciones sobre cálculo infinitesimal), y las Lecons sur le calculdifférentiel (1829) (Lecciones sobre cálculo diferencial). En estos tres libros, Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con un gran rigor, y el concepto de límite constituye la piedra angular de su análisis. A partir de 1826, publicó una especie de diario personal titulado Exercices de mathématique (Ejercicios de matemáticas), que será proseguido, después de 1830, bajo el título de Exercicesdánalysemathématique et de physique (Ejercicios de análisis matemático y física) en el que se publicó mensualmente sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas.

Cauchy desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite en sus Lecciones sobre el cálculo infinitesimal, publicada por primera vez en 1823. En el prefacio de su tratado clásico, afirma que su principal objetivo es conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas. Cauchy prosigue rechazando el desarrollo de las series divergentes y dejando la fórmula de Taylor para calcular integral, pues el resto de Taylor está formulado bajo la forma de una integral

Con toda certeza, antes de Cauchy todos los autores salvo Bolzano habían popularizado la idea de límite en sus trabajos, pero la mayor parte de su concepción seguía siendo geométrica.

En los textos de Cauchy, el concepto de límite se convierte claramente y de manera definitiva, en un concepto aritmético sin apoyo geométrico, como puede constatarse en su definición siguiente:

Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás.

Esta definición da cuenta exacta de la idea intuitiva de límite, pero es verbal más que numérica. Cauchy se sirve a continuación de esta definición para definir un infinitamente pequeño, que resulta ser simplemente una cantidad variable dependiente con un límite igual a cero:

Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que disminuyen por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que se llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene cero como límite.

Cauchy se sirve de esta última definición para establecer órdenes sucesivos de infinitesimales, con el fin de hacer más útil y más operativo ese concepto de infinitesimal. Así, toda cantidad variable tal que su razón con $\propto$ (un infinitésimo) posea un límite finito cuando $\propto$ decrece, puede clasificarse como un infinitésimo de primer orden.

Cauchy utilizo de nuevo su definición de límite para definir la continuidad de una función:

Sea $f(x)$ *una función de la variable x, y supongamos que esta función posee un valor único y finito para cada valor de x en un entorno dado. Si para un valor de x en este intervalo, se añade un valor infinitésimo h, la función aumenta en la diferencia* $f(x+h)-f(x)$*, que depende, a su vez, de la nueva variable h y del valor de x. Establecido lo anterior, la función* $f(x)$ *será continua con respecto a x entre los limites dados si, entre esos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función.*

Se dice, además, que la función $f(x)$ *es continua en el entorno de un valor particular atribuido a la variable, siempre que sea continua entre dos límites de x, incluso muy próximo, que al valor de que se trata.*

Esta definición de la continuidad equivale a decir $f(x)$ será continua en a si $f(x)$ se aproxima al límite de $f(a)$ cuando x se aproxima al límite a . Sin embargo, dada su ambigüedad, ciertas expresiones como “suficientemente pequeña”, “llega a ser y sigue siendo”, se eliminaran más adelante para ser sustituidas por expresiones numéricas bastante más rigurosas, gracias a los trabajos de Karl Weierstrass (1815-1897).

La definición de la derivada de una función aparece así en el Compendio de 1823:

Cuando una función $y=f(x)$ *es continua entre los dos límites dados de la variable* x*, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre los dos límites de qtivue se trata, un crecimiento indefinidamente pequeño atribuido a la variable produce un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente, si se hace* $\Delta x=i$*, los dos términos de la razón de diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)+f(x)}{i}$$

Serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximarán indefinida y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger hacia otro *límite, sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor determinado de x, pero varía con x.*

Esta definición es esencialmente la de la derivada de una función utilizada en la actualidad, si se exceptúa la utilización del límite a la izquierda y del límite a la derecha, que no aparece en Cauchy. El punto fundamental de esta definición es, evidentemente, la expresión de la derivada como un límite particular de una función. El concepto de diferencial es definido por Cauchy en términos de la derivada: si dx es una cantidad finita, entonces la diferencial dy de $y = f(x)$ esta definida simplemente como $f'(x)dx$. Se puede decir también que las diferenciales dy y dx son cantidades escogidas de manera que la razón dy/dx coincida con la "última razón", o el límite $y' = f'(x)$ de la razón $\Delta y/\Delta x$.

También define la integral definida en términos del límite de las sumas integrales de la manera siguiente. Para una función $y = f(x)$ continua entre los límites dados x_0 y X, subdivide este intervalo mediante los valores $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, con $x_n = X$, y forma la suma característica de los productos

$$S_0 \; = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_n - 1)$$

Si los valores numéricos de las diferencias $x_{i-1} - x_1$ decrecen indefinidamente, el valor de S_n alcanzará un cierto límite S que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores limites x_0y X. Este límite es llamado, según Cauchy, una integral definida. Denotada al límite S con la notación sugerida por Fourier $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$.

A continuación Cauchy demuestra el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Sin embargo, su demostración no era enteramente rigurosa, porque no conocía el concepto de continuidad uniforme. Al definir la integral sin recurrir a la derivada de la función, Cauchy se vio obligado a demostrar la relación fundamental entre la derivada y la integral sirviéndose del teorema de la media: si $f(x)$ es continuo en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el abierto (a, b), entonces existe al menos un x_0 tal que $a < x_0 < b$ y

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$$

(Cauchy demuestra la relación $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$ donde $0 < \theta < 1$ y Δx es el intervalo dado).

Con Cauchy el axioma de Eudoxo-Arquímedes –en forma aritmética- se convirtió en el fundamento definitivo del cálculo infinitesimal; la exigencia de rigor y manejabilidad sería satisfecha posteriormente en colaboración con el aparato formal del $\delta - \varepsilon$. Se hizo innecesario a partir de entonces basarse en la intuición geométrica o en la ilustración mecánica de la continuidad. Con Cauchy, la formalización de límite, por ejemplo en los cocientes diferenciales, se sometió al mismo cálculo. El mismo cálculo permitió – refutar con ello un intento de demostración de Ampere- comprobar que continuidad y diferenciabilidad eran propiedades que no se implicaban recíprocamente: de la diferenciabilidad se sigue la continuidad, pero no al revés.

Cauchy introdujo la expresión de términos de una sucesión que se hacen infinitamente pequeños o arbitrariamente pequeños. Definió los límites superior e inferior de una sucesión. El criterio de la mayorante, ya utilizado por Gauss en 1812, fue utilizado por Cauchy expresamente como un criterio de convergencia general a partir del cual derivó, utilizando la serie geométrica, el criterio de la raíz. En 1833 señalo de modo claro que la ley de conmutabilidad de los términos de una serie infinita es válida sin restricciones, solo para series absolutamente convergentes.

Cauchy acentúo el decisivo papel de las demostraciones de existencia en el análisis, desde un punto de vista metodológico.

Se inició un proceso que convirtió al cálculo integral es una disciplina matemática autónoma, independiente del cálculo diferencial que con los trabajos de Dirichclet, Jacobi, Riemann, Weierstrass, Heine, Borel, Lebesgue y otros, se convertiría en el estudio de aquella clase de funciones que poseen integral. Desarrollando según el estilo riguroso de la escuela francesa, este fructífero pensamiento matemático influyo también en la formación de la teoría de conjuntos y el análisis funcional.

4.17 KARL WILHELM THEODOR WEIERSTRASS (1815-1897).

Nació en Ostenfelde, Westfalia, Alemania. Weierstrass intentó fundamentar las matemáticas, y en particular el análisis, con el máximo de rigor posible. Sus trabajos complementaron los de Bolzano, Abel y Cauchy. Resalta el concepto aritmético e interpreta una variable como "una letra que representa cualquier valor en un conjunto dado ", una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuidos a la variable y δ es un número positivo cualquiera, hay otros valores en la variable en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

A diferencia de los términos que Cauchy y Bolzano usaban en sus definiciones de continuidad y límite de una función, ofreció las definiciones hoy aceptadas.

La primera definición de límite de una función en términos de ε y δ propuesta por Weierstrass puede encontrarse, en su curso de cálculo diferencial impartido en 1861:

"Si es posible determinar una cota δ tal que para todo valor de h, más pequeño en valor absoluto que δ, $f(x+h)-f(x)$ sea más pequeña que una cantidad ε tan pequeña como se quiera, entonces se dirá que se ha hecho corresponder a una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función".

Entonces términos o las frases "infinitesimal", "variable que se acerca", o "tan pequeña como uno quiera", que aparecen en Cauchy, desaparecen en una formulación más precisa que no refiere a la geometría o a la intuición emperica. Precisamente, aquí es donde hacen ε y δ , que se encuentran en una gran parte de los libro de cálculo en la universidad.

Heine (1821-1881) Discípulo de Weierstrass definió el límite de una función:

"Si, dado cualquier ε, exite un η_0 tal que $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta)-L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es límite de una función $f(x)$ para $x=x_0$.

Heine fue quien definió la continuidad uniforme para funciones de una o varias variables; de hecho, también demostró que si una función es continua en un intervalo real cerrado y acotado es uniformemente continua.

4.18 GODFREY HAROLD HARDY (Cranleigh, 1877 – Cambridge, 1947)

Matemático británico. Acabados los estudios escolares con las máximas calificaciones a los doce años de edad, asistió al Instituto Winchester en 1890 y al Trinity College de Cambridge en 1896, de donde fue profesor en 1900.

Publico numerosos artículos, en los que destacó como un riguroso analista en cuestiones como la convergencia de series numéricas y el cálculo integral. Escribió *A Course of pure* *mathematics* (1908), la primera obra británica en la que se tratan los conceptos de función, número y límite entre otros, adaptados en la enseñanza de las matemáticas en la universidad.

En su libro *A Course of pure mathematics* da la siguiente definición de limite

Definition I. The function $\emptyset(n)$ *is said to tend to the limit* l *as* n *tends to* ∞, *if, however small be the positive number* δ, $\emptyset(n)$ *differs from* l *by less than* δ *for sufficiently large values of* n*; that is tos ay if, however small be the positive number* δ, *we can determine a number* $n_0(\delta)$ *corresponding to* δ, *such that* $\emptyset(n)$ *differs from* l *by less than* δ *for all values of* n *greater or equal to* $n_0(\delta)$.

En el párrafo siguiente a este, nos dice cómo se pueden sustituir algunas "frases" y concluye la definición como sigue:

With this notation the definition may be stated more shortly as follows: ´if, given any positive number, δ, *however small, we can find* $n_0(\delta)$ *so that* $|\emptyset(n) - l| < \delta$ *when* $n \geq n_0(\delta)$, *then we say that* $\emptyset(n)$ *tends to the limite* l *as* n *tends to* ∞, *and write*

$\lim_{n\to\infty} \emptyset(n) = l$.

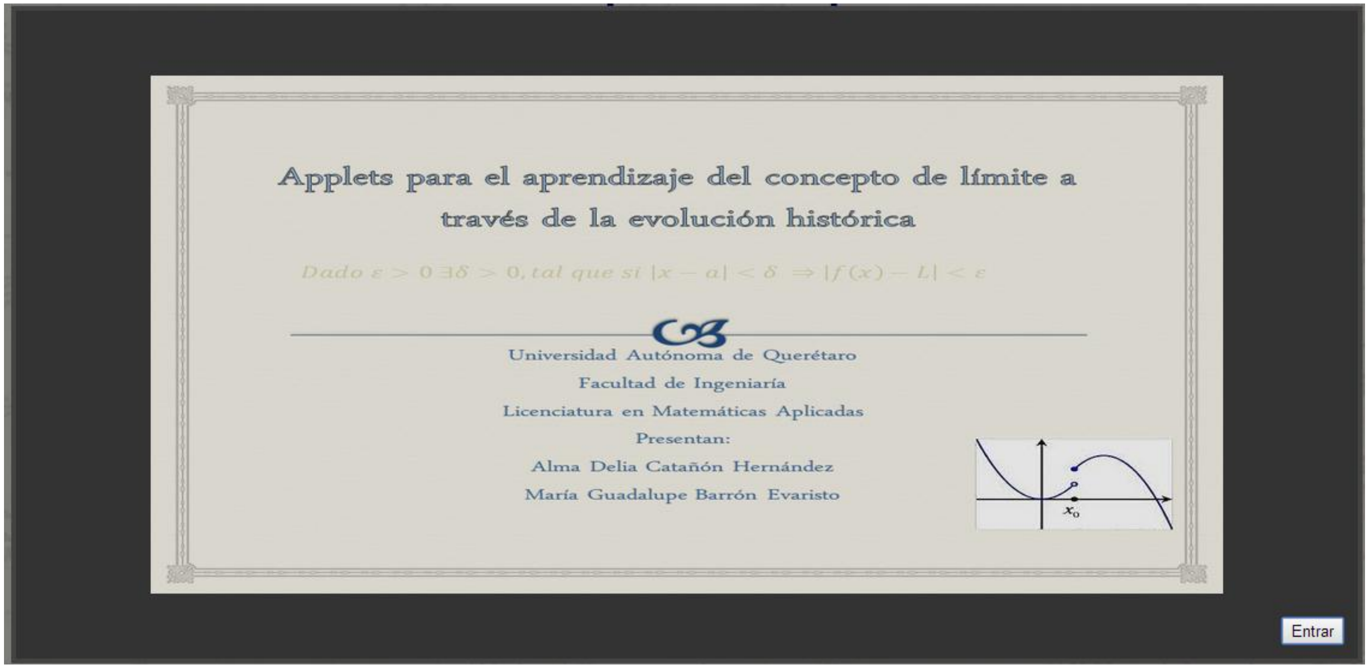
Esta es la definición formal del concepto de límite que se utiliza.

CAPITULO V

APPLETS

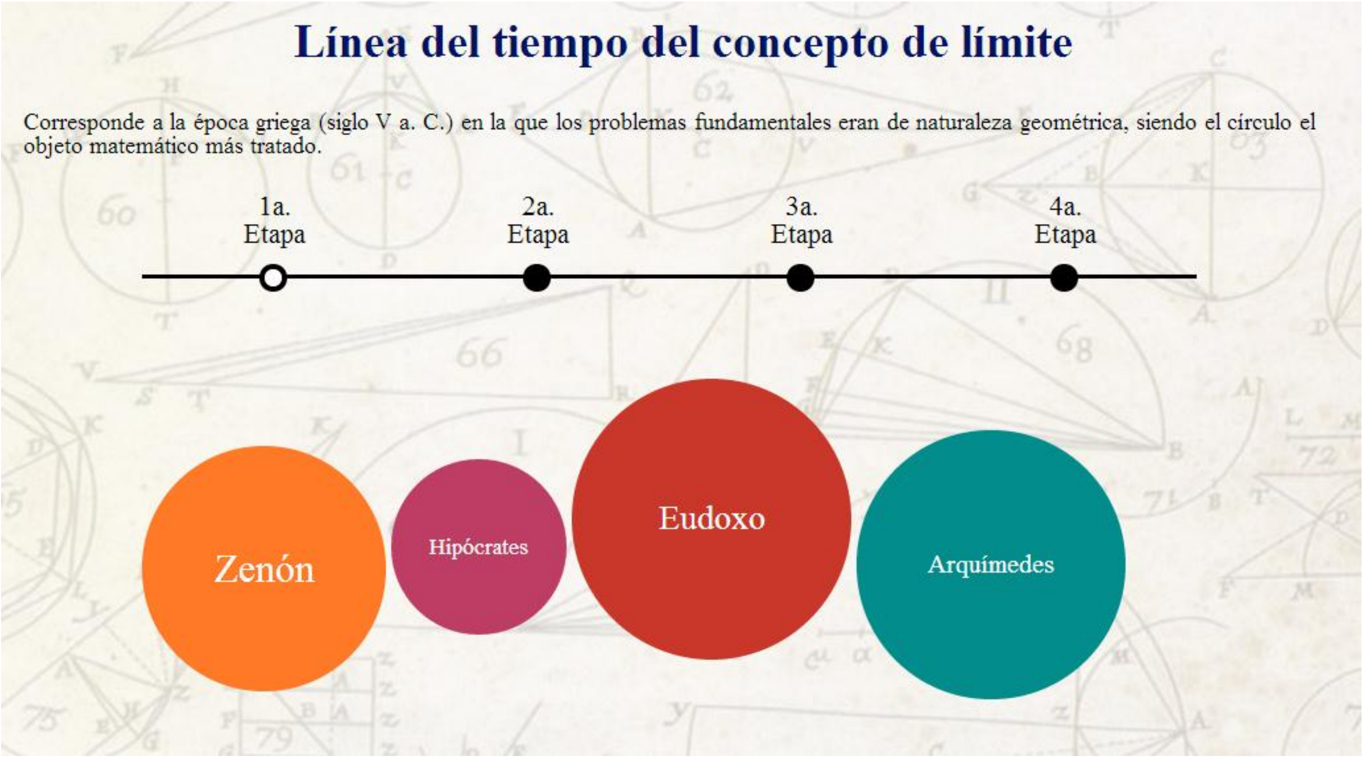
5.1 LÍNEA DEL TIEMPO.

Por medio de applets se presenta la evolución del concepto del límite a través de la historia, dividida en cuatro etapas.

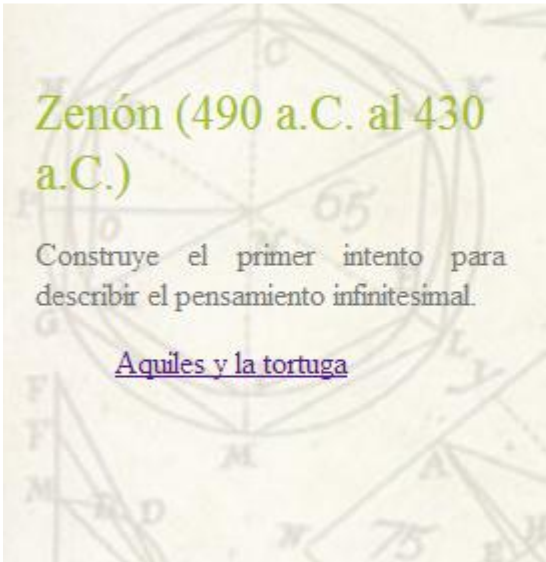


5.2 PRIMERA ETAPA

En esta etapa se presentan los métodos infinitesimales más importantes que influyeron en la concepción geométrica del límite.

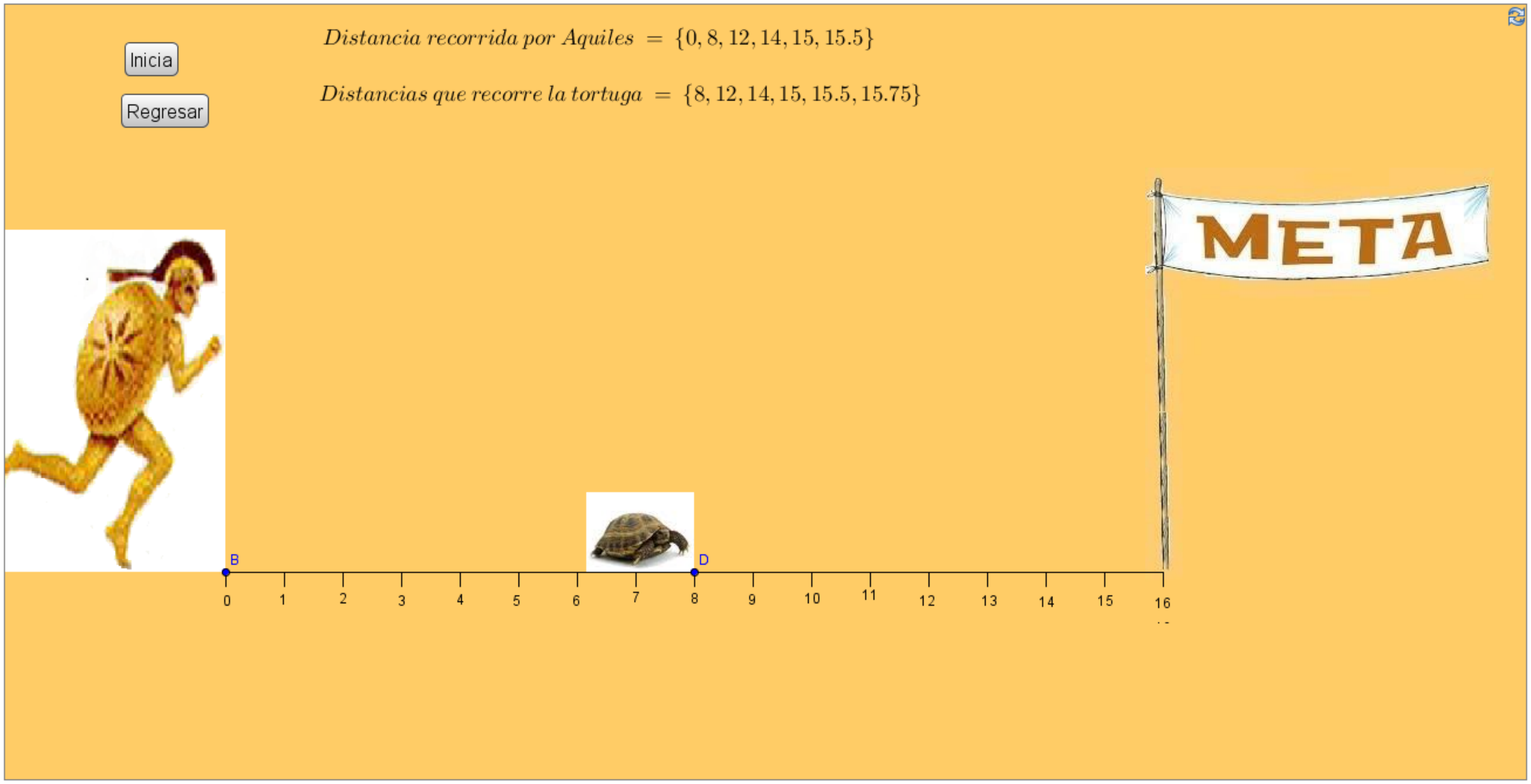


5.2.1 ZENÓN


Zenón (490 a.C. al 430 a.C.)
Construye el primer intento para describir el pensamiento infinitesimal.
Aquiles y la tortuga

Aquiles y la tortuga

Aquiles y la tortuga, es quizás, la más conocida paradoja de Zenón. El filósofo argumentaba que en una hipotética carrera entre Aquiles y una tortuga, si ésta última tenía una ventaja inicial, el humano siempre perdería.

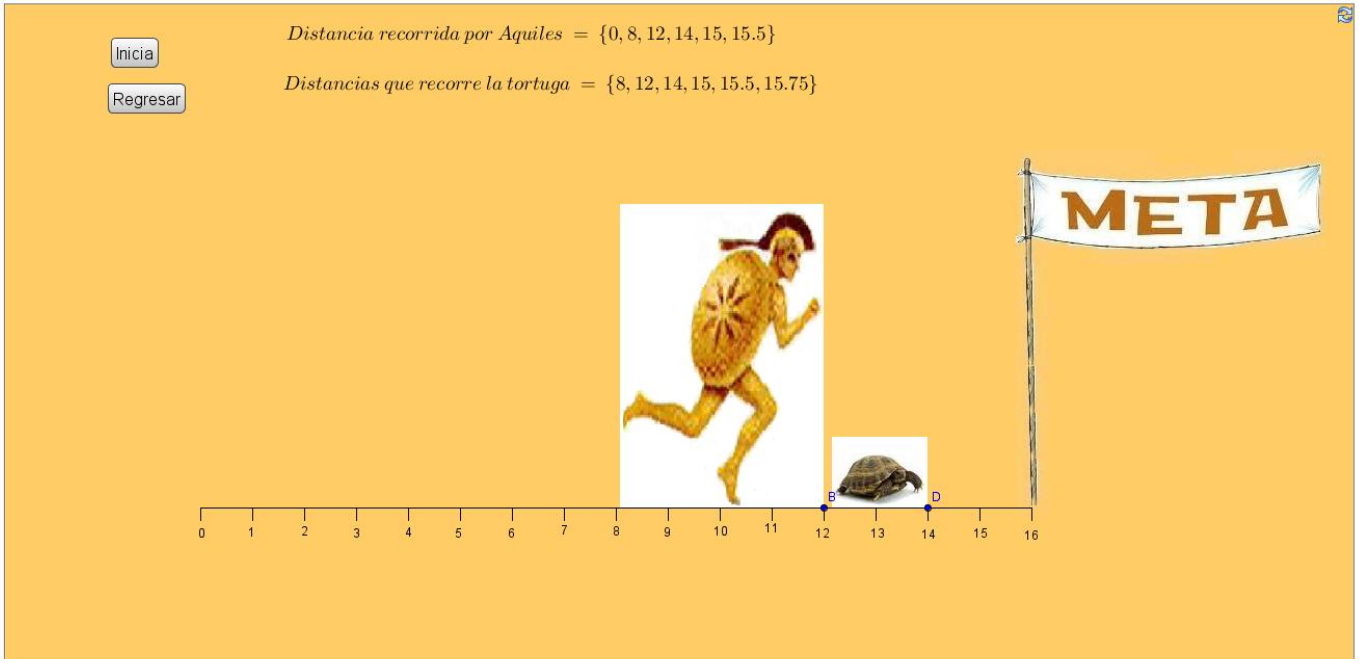


Actividad:

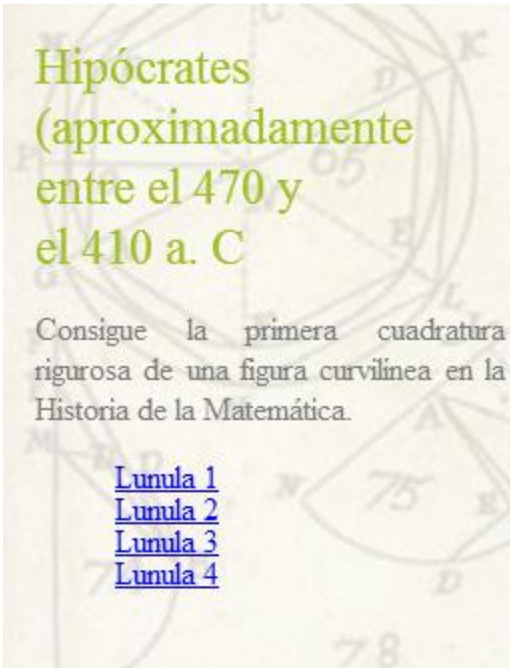
Considerando las distancias recorridas como dos sucesiones.
1. ¿Encuentra los siguientes 3 números de cada sucesión? ¿Cual es la diferencia entre los dos últimos números?
2. Zenón "demostraba" que Aquiles nunca alcanzaba a la tortuga, porque las diferencia de la distancia entre Aquiles y la tortuga, se hacia cada vez mas pequeña, infinitamente. ¿Qué factor no consider Zenón?
Ahora considera que:

- Aquiles corre a 8 metros por segundo y la tortuga a 4 metros por segundo.
- La sucesión {8,4,2,1,0.5,...} representa la diferencia entre la distancia recorrida por Aquiles y la distancia recorrida por la tortuga.

3. ¿Cual es la expresión algebraica que nos da el enésimo termino de la sucesión?
Calcula el límite cuando $n \to \infty$ de dicha expresión.

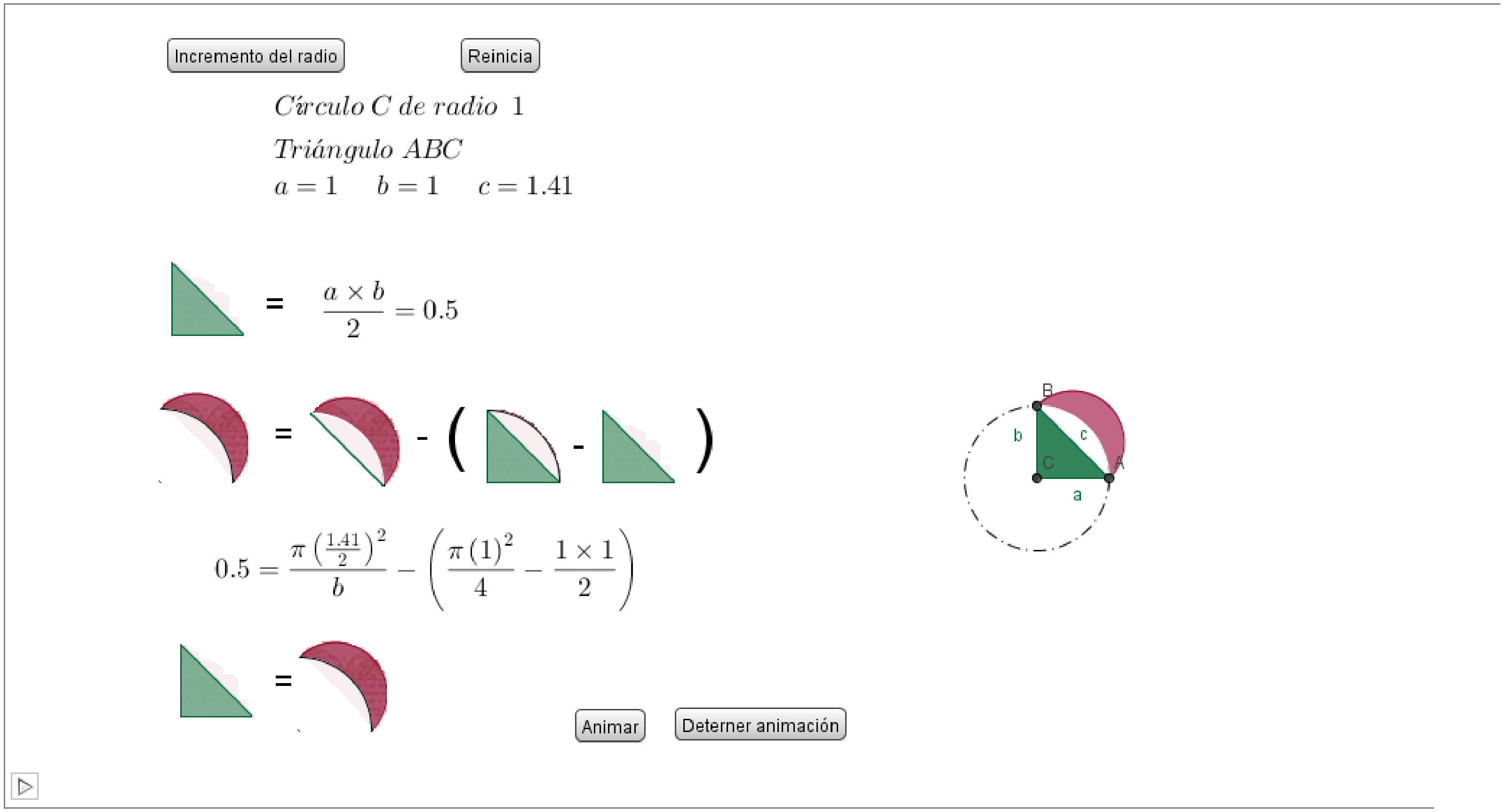

Inicia
Regresar
Distancia recorrida por Aquiles = {0, 8, 12, 14, 15, 15.5}
Distancias que recorre la tortuga = {8, 12, 14, 15, 15.5, 15.75}
META
B
D
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

5.2.2 HIPÓCRATES DE QUÍOS



1. Lúnulas de Hipócrates

Lúnula: figura plana limitados por arcos de círculo de radios diferentes

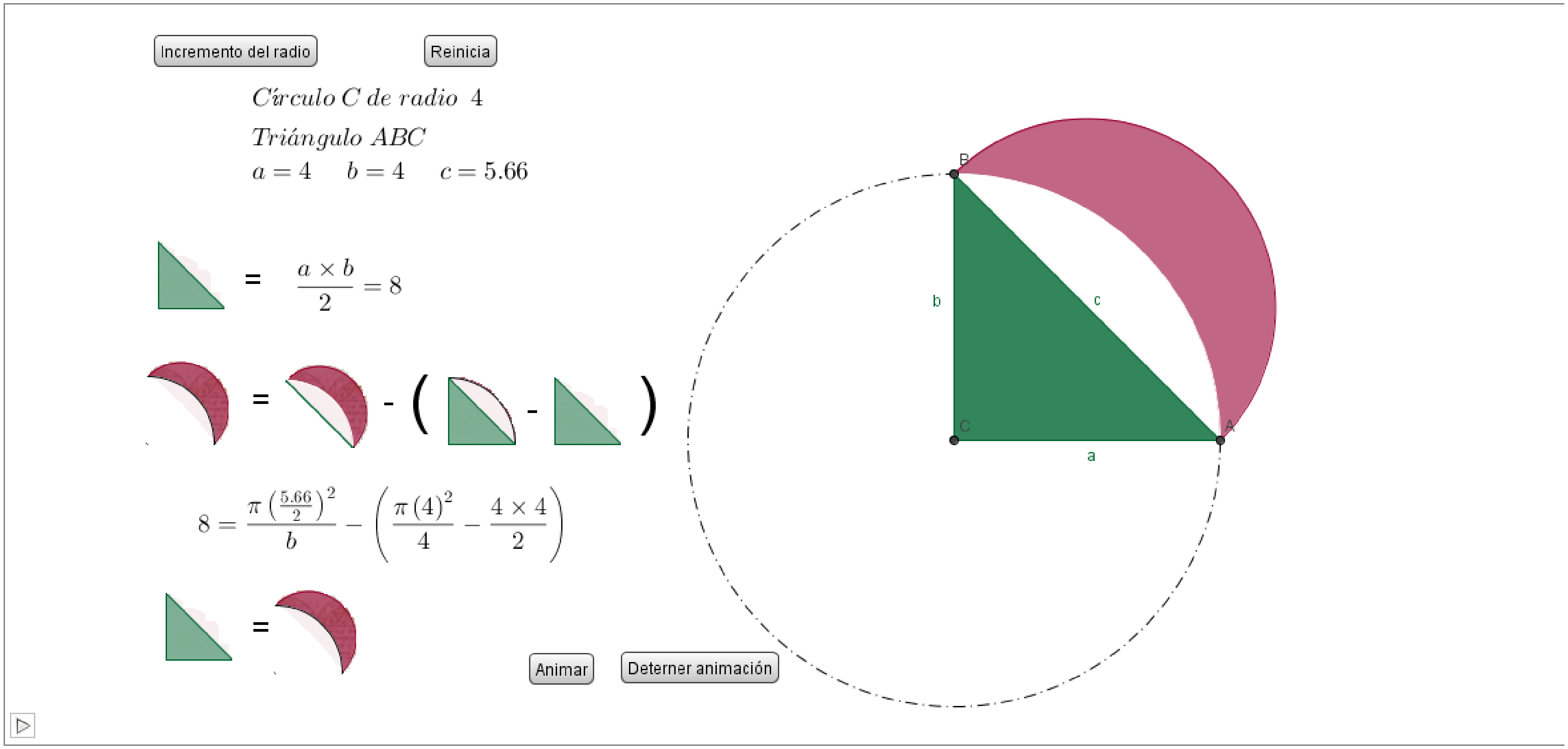


ACTIVIDAD:

"Área de la lúnula = área de la semicircunferencia en c – área del sector circular + área del triángulo".

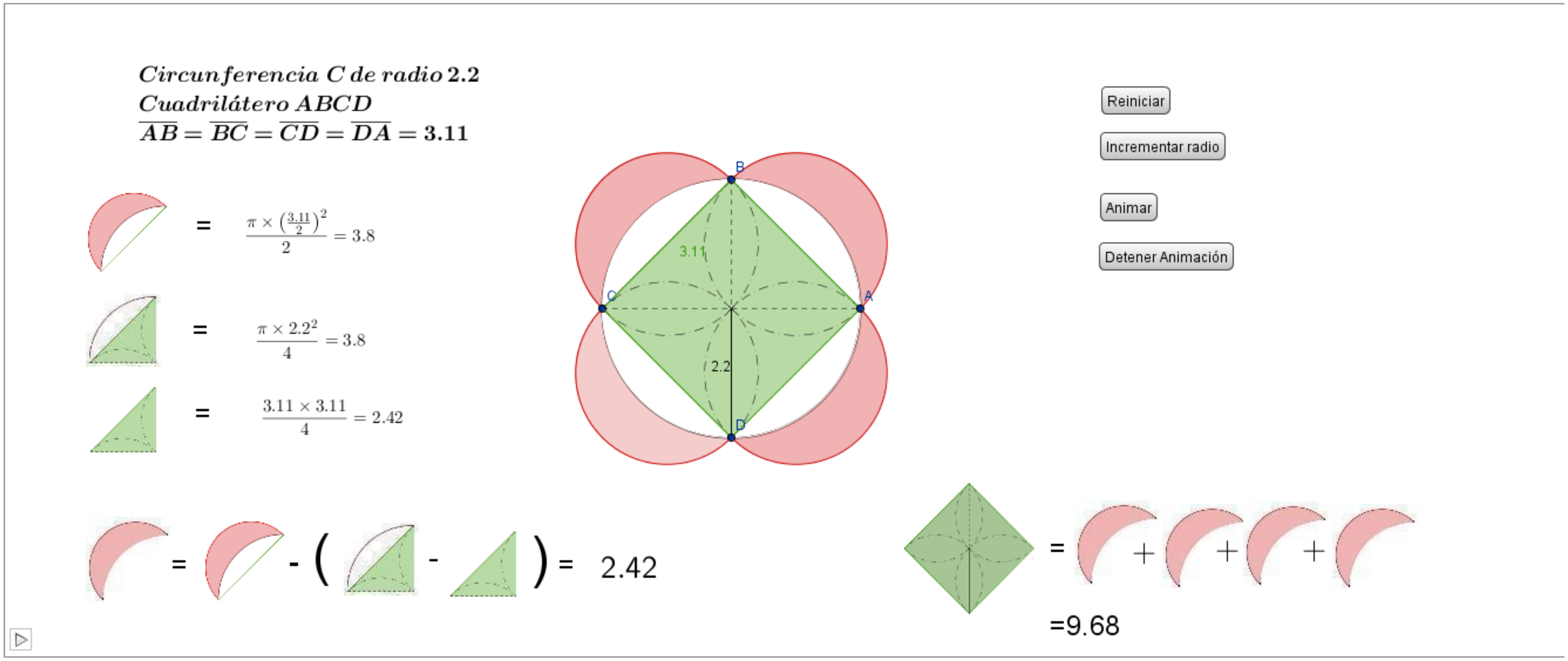
1. ¿Cuál es la característica principal de una lúnula?

2. Sí la circunferencia C tiene radio r=a, ¿cuál será el valor de la lúnula?

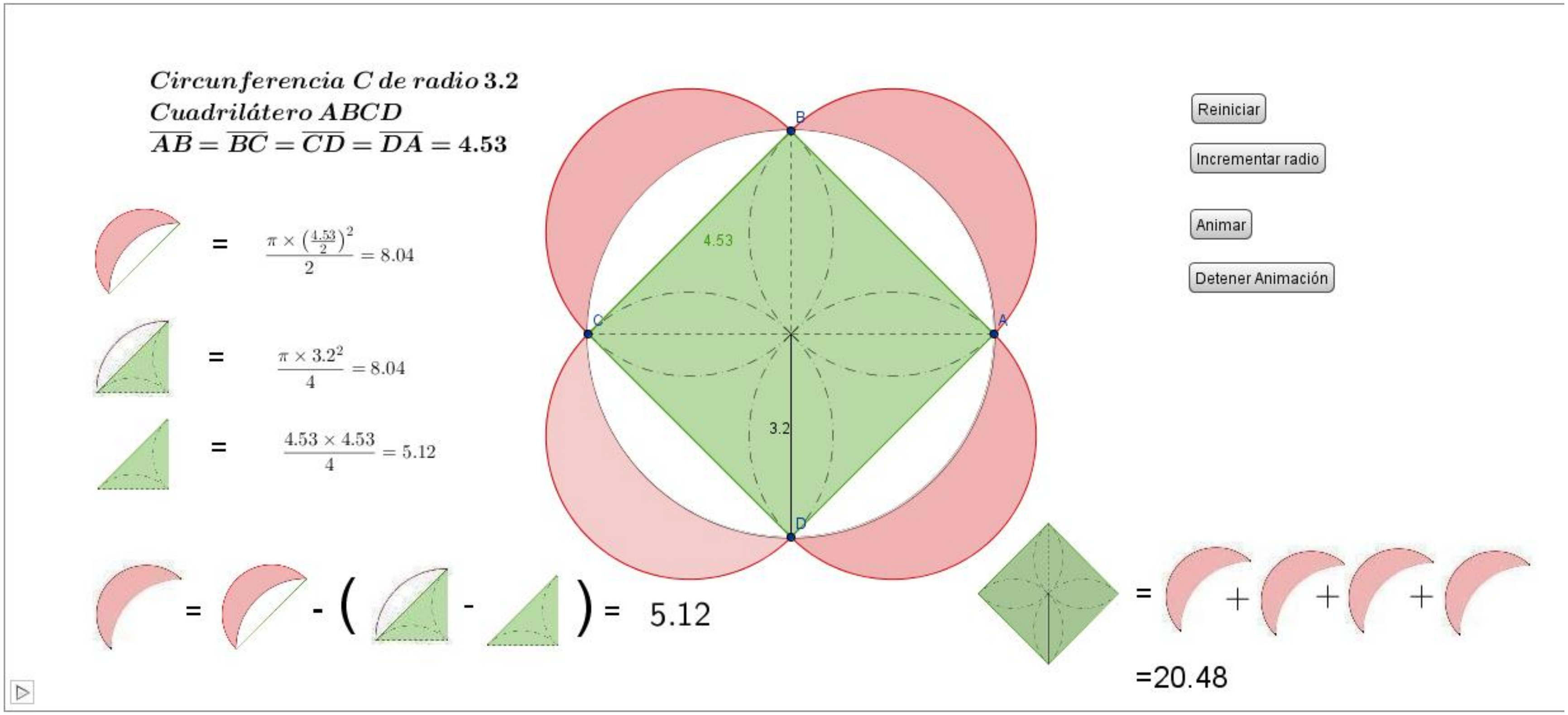

Incremento del radio
Reinicia
$Círculo\ C\ de\ radio\ \ 4$
$Triángulo\ ABC$
$a = 4 \quad b = 4 \quad c = 5.66$
$= \frac{a \times b}{2} = 8$
$8 = \frac{\pi\left(\frac{5.66}{2}\right)^2}{b} - \left(\frac{\pi(4)^2}{4} - \frac{4 \times 4}{2}\right)$
Animar
Deterner animación
B
b
c
C
A
a

2. Lúnulas de Hipócrates

El área del cuadrado ABCD inscrito en la circunferencia C es igual a la suma de las áreas de las cuatro lúnulas.

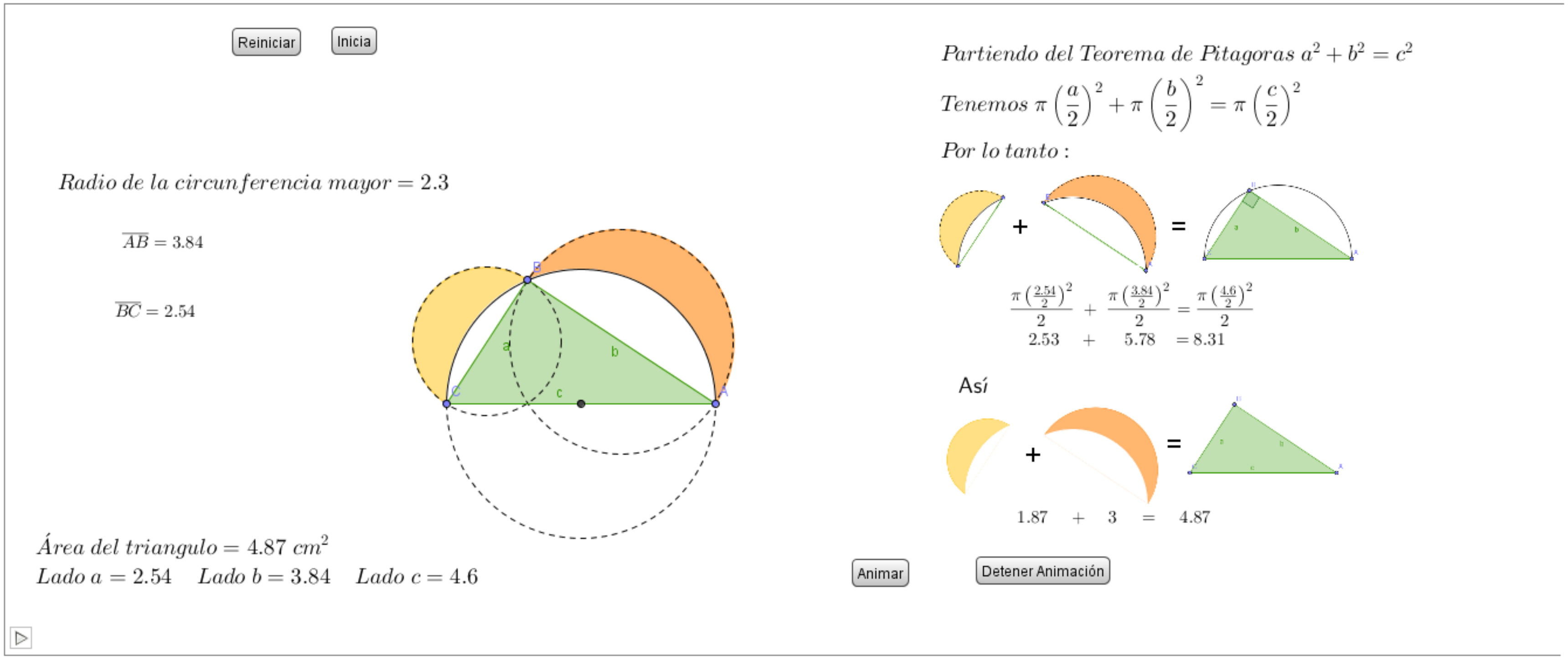


Actividad:
Si se demuestra que el área de una lúnula es igual al área del triángulo ABC. ¿Por qué inmediatamente se sabe que la suma del área de las cuatro lúnulas es igual al área del cuadrilátero ABCD?


Circunferencia C de radio 3.2
Cuadrilátero ABCD
AB = BC = CD = DA = 4.53
= π × (4.53/2)² / 2 = 8.04
= π × 3.2² / 4 = 8.04
= 4.53 × 4.53 / 4 = 5.12
= - (-) = 5.12
B
C
A
D
4.53
3.2
Reiniciar
Incrementar radio
Animar
Detener Animación
= + + +
=20.48

3. Lúnulas de Hipócrates

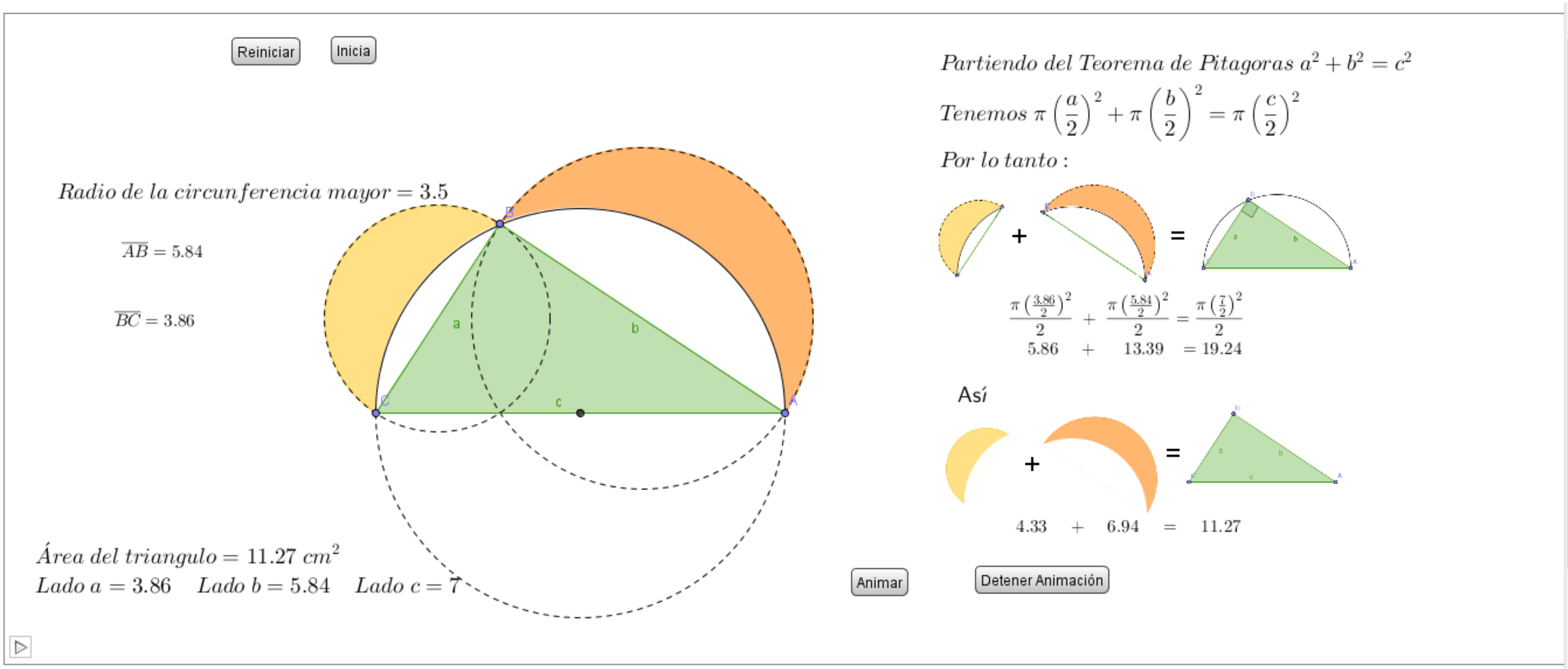
Las áreas de dos círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros.



Actividad:

1. Demuestra usando el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, que
$\pi(a/2)^2 + \pi(b/2)^2 = \pi(c/2)^2$

2. Explica por qué razón de las áreas de dos círculos se hallan entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros.


Reiniciar
Inicia
Radio de la circunferencia mayor = 3.5
$\overline{AB} = 5.84$
$\overline{BC} = 3.86$
Área del triangulo = 11.27 cm^2
Lado a = 3.86 Lado b = 5.84 Lado c = 7
Partiendo del Teorema de Pitagoras $a^2 + b^2 = c^2$
Tenemos $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$
Por lo tanto :
+
=
$\frac{\pi\left(\frac{3.86}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{5.84}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2}$
5.86 + 13.39 = 19.24
Así
4.33 + 6.94 = 11.27
Animar
Detener Animación

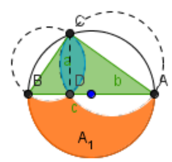
4. Lúnulas de Hipócrates

Lúnula: figura plana limitados por arcos de círculo de radios diferentes.

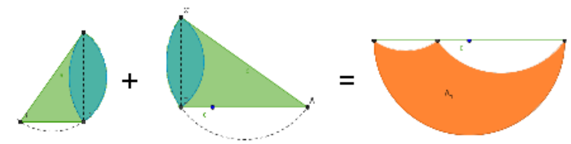
$C_1 = Circunferencia\ mayor$
$r = radio\ de\ C_1$

$r = 1 \qquad Área\ de\ C_1 = \pi$

$Triangulo\ ABC \qquad Área = 0.94$
$lado\ a = 1.16 \quad lado\ b = 1.63 \quad lado\ c = 2$

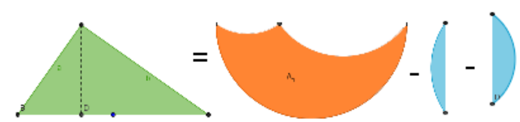


Por Teorema de Pitagoras



$$\frac{\pi\left(\frac{1.16}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{1.63}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2}{2}$$

Se tiene que :



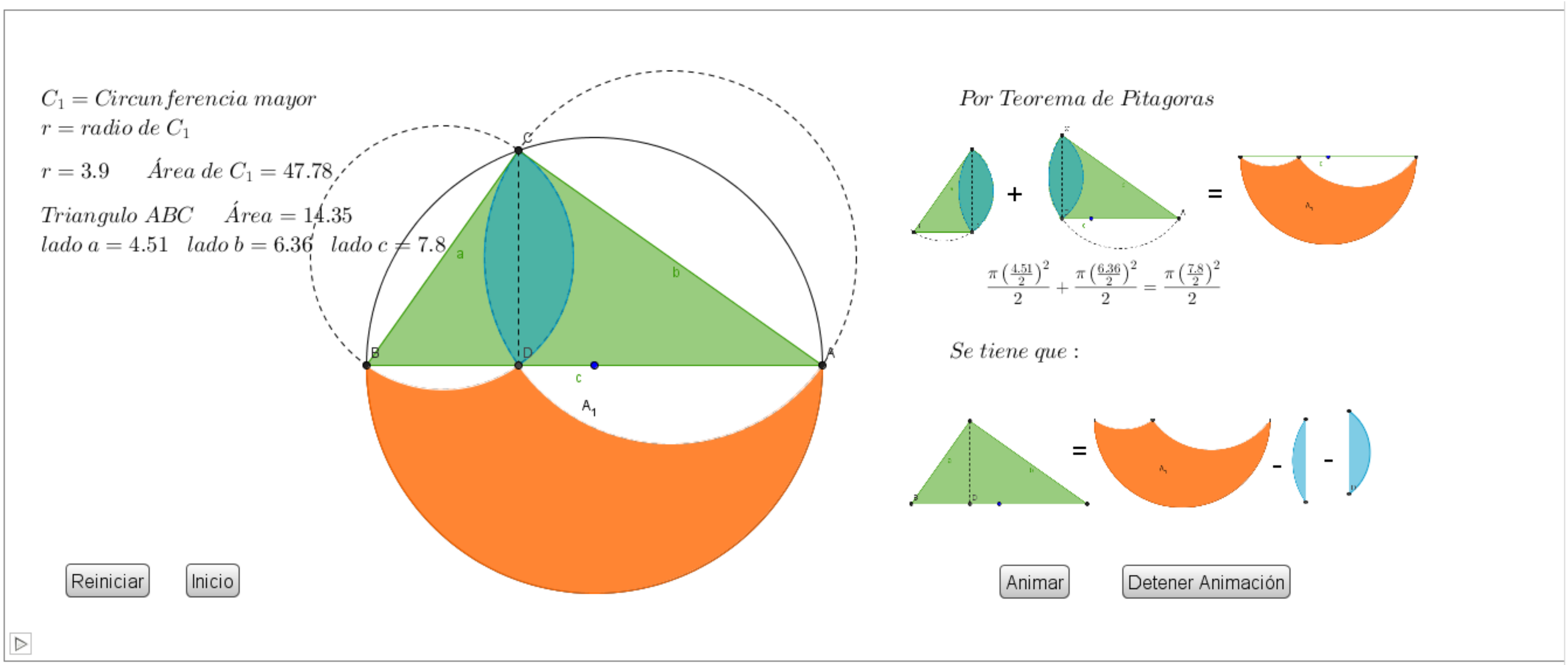
Reiniciar Inicio

Animar Detener Animación

Actividad:

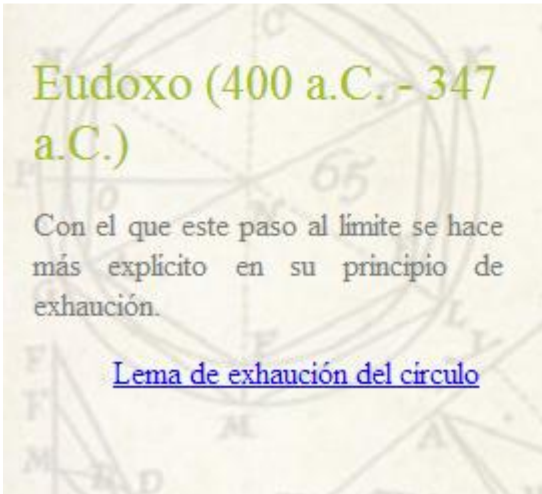
1. Explica por qué segmentos semejantes de círculos semejantes están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus diámetros.

2. Demuestra que el área del triángulo es igual al área naranja menos el área azul.



$C_1 = Circunferencia\ mayor$
$r = radio\ de\ C_1$
$r = 3.9$ $Área\ de\ C_1 = 47.78$
$Triangulo\ ABC$ $Área = 14.35$
$lado\ a = 4.51$ $lado\ b = 6.36$ $lado\ c = 7.8$
C
B
D
A
a
b
c
A_1
Por Teorema de Pitagoras
+
=
$\frac{\pi\left(\frac{4.51}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{6.36}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{7.8}{2}\right)^2}{2}$
Se tiene que :
=
-
-
Reiniciar
Inicio
Animar
Detener Animación

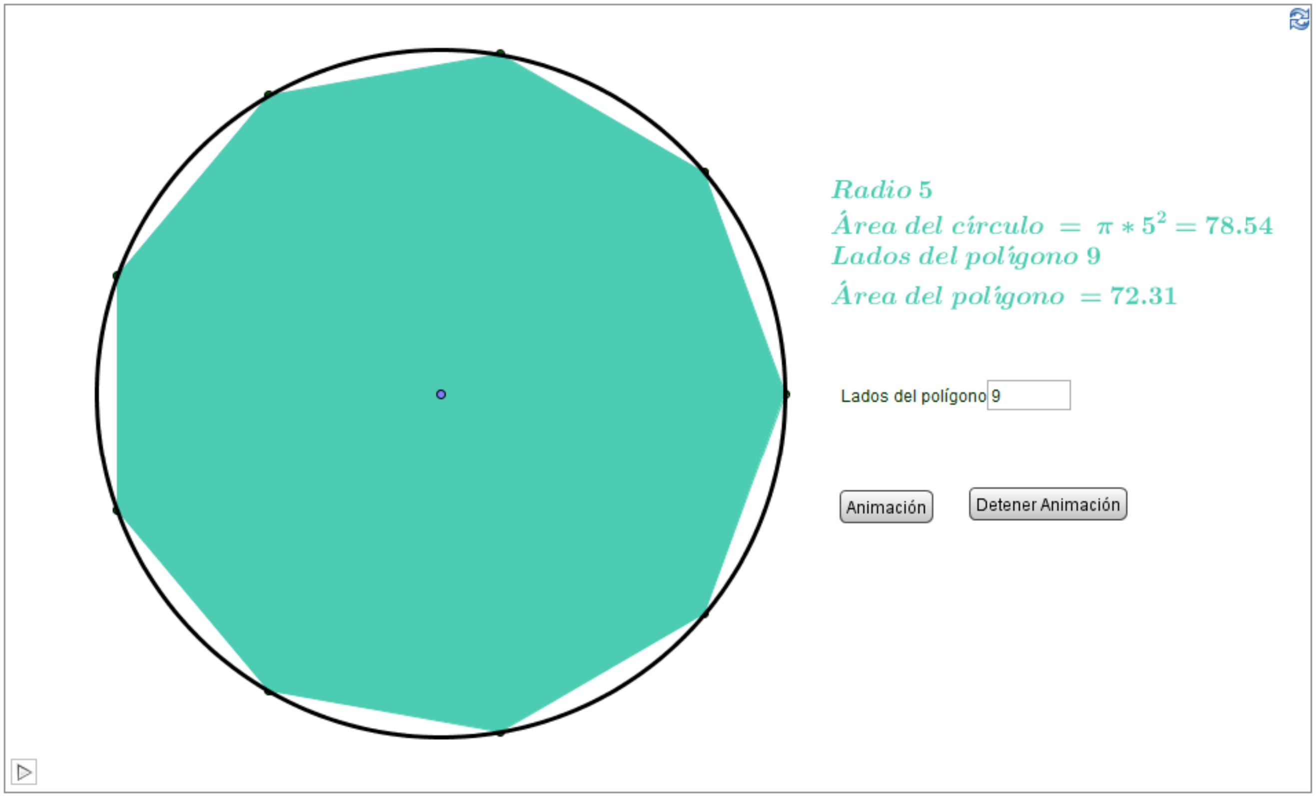
5.2.3 EUDOXO


Eudoxo (400 a.C. - 347 a.C.)
Con el que este paso al límite se hace más explícito en su principio de exhaución.
Lema de exhaución del círculo

Lema de exhaución del círculo

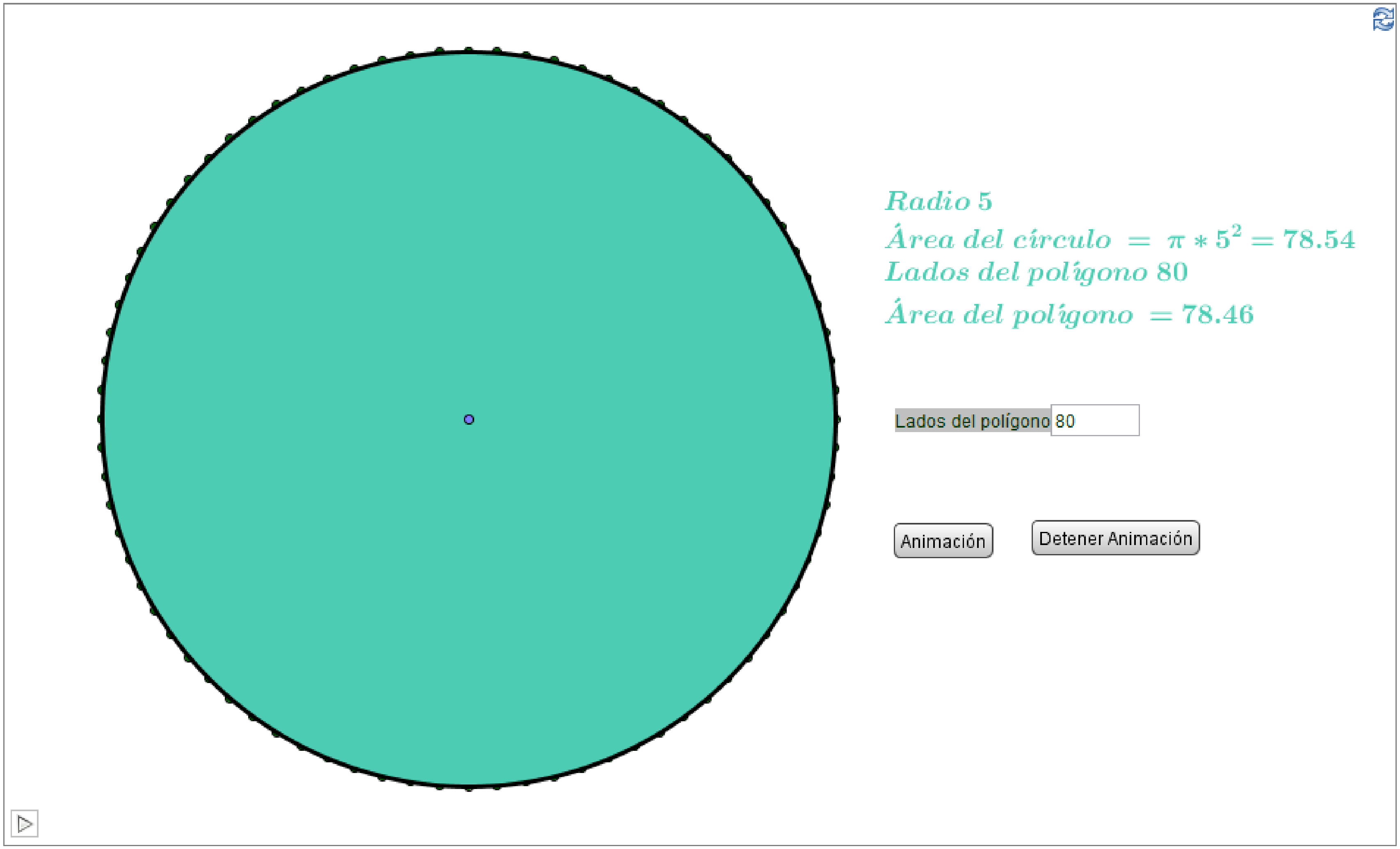
Dado un círculo C y un número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un polígono regular P inscrito en C de tal modo que:
$A_C - A_P < \varepsilon$.

$A_C =$ Área de C.
$A_P =$ Área de P.

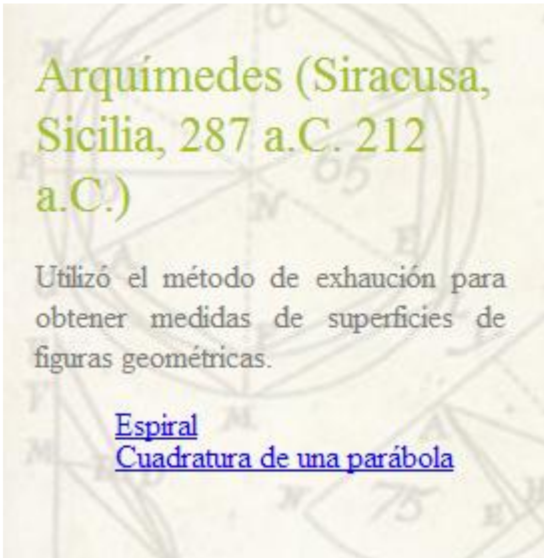


Observe que sucede con las áreas del círculo y del polígono, cuando el número del lados del polígono aumenta.

Nota: Para ver con más detalle, pulse el botón "Detener Animación" , a continuación en la casilla de entrada "Lados del polígono" inserte un entero del 3 al 100 y pulse Enter


Radio 5
Área del círculo = π * 5² = 78.54
Lados del polígono 80
Área del polígono = 78.46
Lados del polígono 80
Animación
Detener Animación

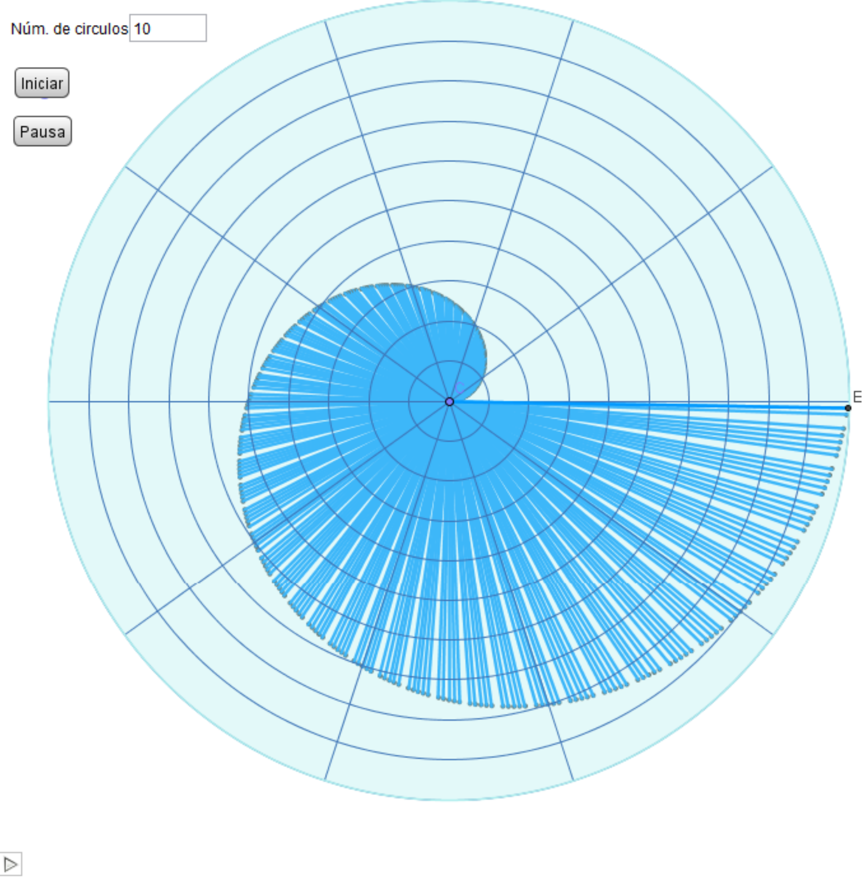
5.2.4 ARQUÍMEDES



Espiral de Arquímedes

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas curvas mecánicas. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma ρ = aθ, donde a>0 es una constante.

Teorema. El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.



$$Demostrar\ que\ S = \frac{1}{3}\ \acute{a}rea\ del\ circulo\ circunscrito$$

Área del círculo circunscrito $= \pi(2\pi \mathrm{a})^2 = 124.0251$

$$S = \acute{a}rea\ de\ la\ espiral$$
$$S\ cumple\ con\ la\ siguiente\ desigualdad:$$

$$\sum_{K=0}^{10-1} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{10}\right)^2 \frac{2\pi}{10} < S < \sum_{K=1}^{10} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{10}\right)^2 \frac{2\pi}{10}$$

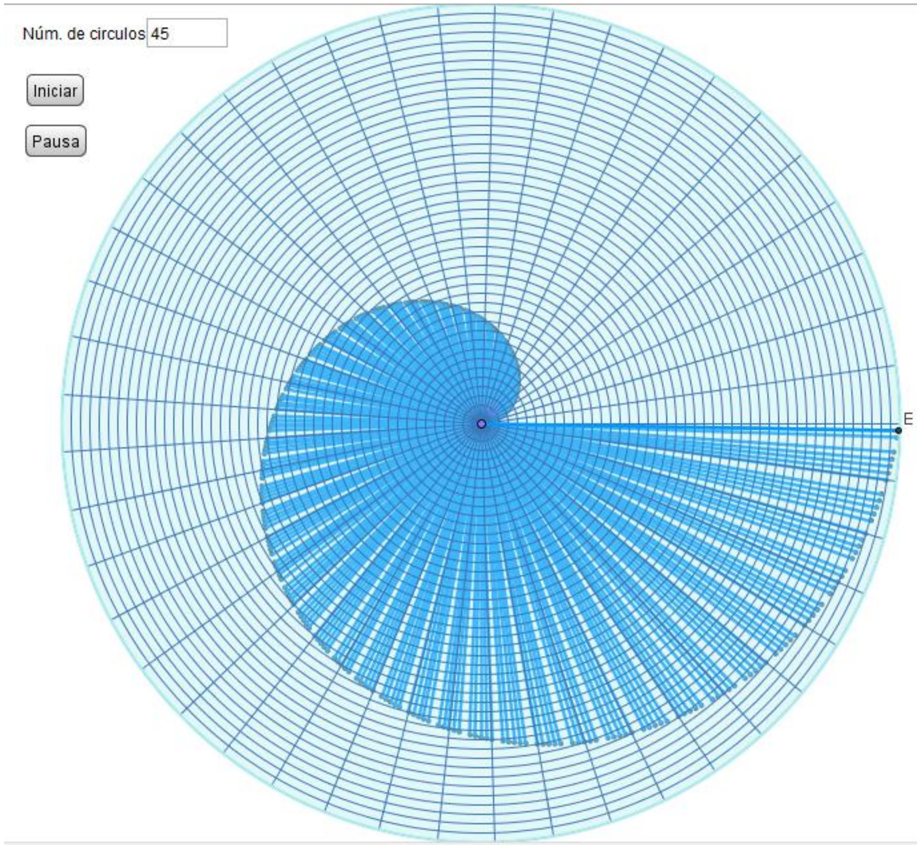
$$\frac{4\pi^3 a^2}{10^3} \sum_{K=0}^{10-1} K^2 < S < \frac{4\pi^3 a^2}{10^3} \sum_{K=1}^{10} K^2$$

$$\frac{124.0251}{1000}(285) < S < \frac{124.0251}{1000}(385)$$

$$35.3472 < S < 47.7497$$

Actividad

1. Tomando en cuenta que en aquella época sabían calcular el área de sectores circulares ¿Como podrías encontrar el área de la espiral?
2. Relaciona la pregunta anterior con la desigualdad que cumple "S".
3. ¿Que sucede con los sectores circulares y la espiral cuando el número de "n" es muy grande?
4. Realiza la operación 1/3(área del circulo), después observa que pasa con la ultima desigualdad cuando "n" es muy grandes. ¿Que puedes concluir?



$$Demostrar\ que\ S\ =\ \frac{1}{3}\ área\ del\ circulo\ circunscrito$$

Área del círculo circunscrito $= \pi(2\pi a)^2 \;=\; 124.0251$

$S\ =\ área\ de\ la\ espiral$

$S\ cumple\ con\ la\ siguiente\ desigualdad:$

$$\sum_{K=0}^{45-1} \frac{1}{2}\ \left(\frac{a2\pi k}{45}\right)^2\ \frac{2\pi}{45}\ <\ S\ <\ \sum_{K=1}^{45} \frac{1}{2}\ \left(\frac{a2\pi k}{45}\right)^2\ \frac{2\pi}{45}$$

$$\frac{4\pi^3 a^2}{45^3} \sum_{K=0}^{45-1} K^2\ <\ S\ <\ \frac{4\pi^3 a^2}{45^3} \sum_{K=1}^{45} K^2$$

$$\frac{124.0251}{91125}\,(29370)\ <\ S\ <\ \frac{124.0251}{91125}\,(31395)$$

$$39.9739\ <\ S\ <\ 42.73$$

Área de un segmento parabólico

En la parábola trazamos la cuerda AB. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuera AB y el arco de la parábola comprendida entre los putos A y B se llama segmento parabólico. El vértice de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la curda AB.

El punto C es el punto medio del segmento AB
D es el vértice del segmento parabólico
QR es paralela a AB y es tangente a la parábola en el punto D
ΔADB es el triángulo inscrito en el segmento parabólico

El área del segmento parabólico es igual a $\frac{4}{3}$ del área del ΔADB

$$S = \acute{a}rea\ \Delta ADB = 61.1189$$

$$\acute{a}rea\ (\Delta\ AHD) = \frac{1}{4}(\acute{a}rea\ \Delta\ ACD) \qquad \acute{a}rea\ (\Delta\ DFB) = \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ \Delta\ DCB)$$

$$7.6399 = \frac{1}{4}\ 30.5595 \qquad 7.6399 = \frac{1}{4}\ 30.5595$$

$$\acute{a}rea\ (\Delta\ AHD) + \acute{a}rea\ (\Delta\ DFB) = \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ \Delta\ ADB)$$

$$7.6399 + 7.6399 = \frac{1}{4}\ 61.1189$$

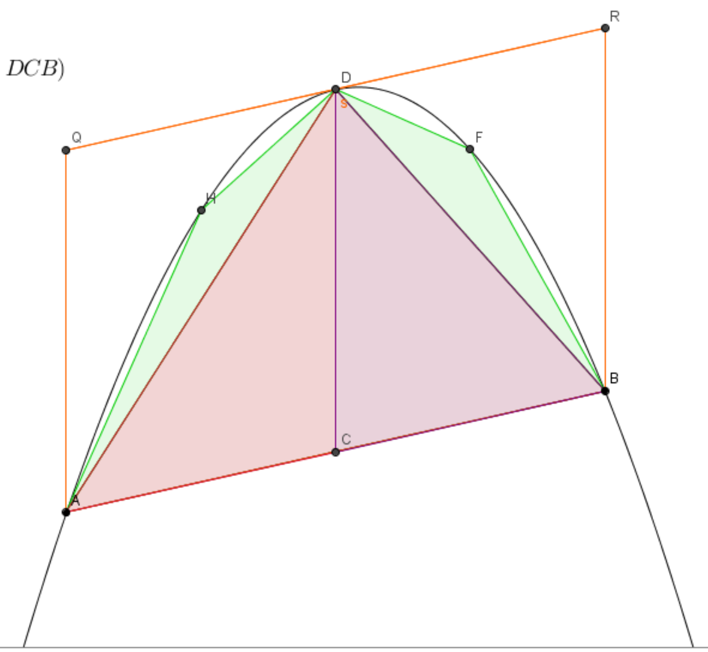
Este prosedimiento se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro secmentos parabólicos que se forman con las cuerdas AH, HD, DF, FB.

$$Entonces\ tenemos: \ S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S$$

$$61.1189 + 15.2797 + 3.8199 + 0.955 + \ldots$$

Ahora calculamos el área de nuestro segmento parabólico por :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\ S = \frac{4}{3}\ S = 81.4919$$



Actividad:

1. ¿Porque los triángulos ACD Y DCB tienen la misma área?
2. ¿Existe otro punto aparte de D de tal forma que la recta tangente que pase por el sea paralela a AB?
3. ¿Que relación tiene la pregunta anterior con el teorema del valor medio?
4. Realiza la operación 4/3(área ΔADB) y compara tu resultado con la sumatoria.
5. Desliza los puntos A y B por la parábola, observa que lo anterior se cumple para cualquier cuerda.

El área del segmento parabólico es igual a $\frac{4}{3}$ del área del ΔADB

$$S = \acute{a}rea\ \Delta ADB = 49.2119$$

$$\acute{a}rea\ (\Delta\ AHD) = \frac{1}{4}(\acute{a}rea\ \Delta\ ACD) \qquad \acute{a}rea\ (\Delta\ DFB) = \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ \Delta\ DCB)$$

$$6.1515 = \frac{1}{4}\ 24.6059 \qquad 6.1515 = \frac{1}{4}\ 24.6059$$

$$\acute{a}rea\ (\Delta\ AHD) + \acute{a}rea\ (\Delta\ DFB) = \frac{1}{4}\ (\acute{a}rea\ \Delta\ ADB)$$

$$6.1515 + 6.1515 = \frac{1}{4}\ 49.2119$$

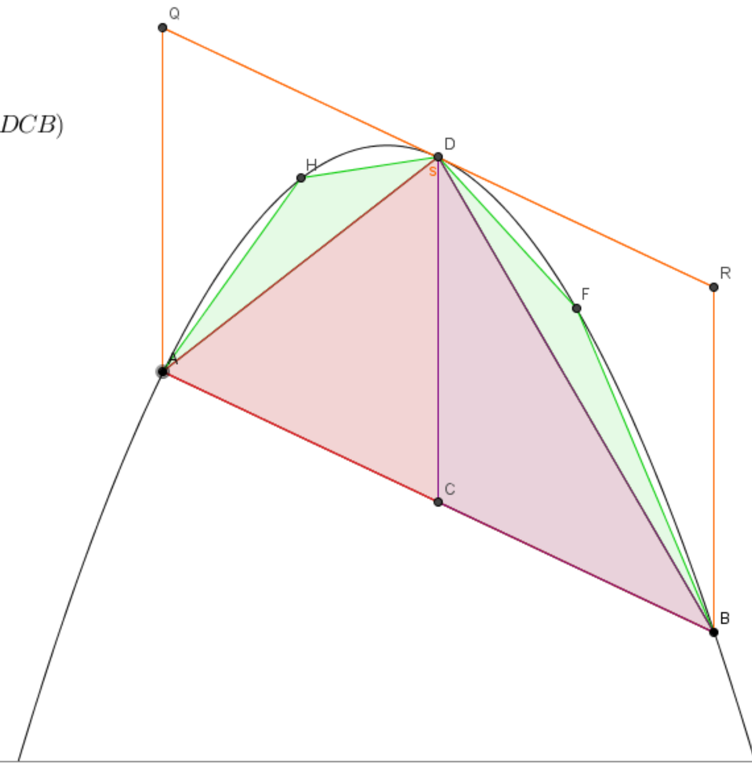
Este prosedimiento se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro secmentos parabólicos que se forman con las cuerdas AH, HD, DF, FB.

$$Entonces\ tenemos:\ S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S$$

$$49.2119 + 12.303 + 3.0757 + 0.7689 + \ldots$$

Ahora calculamos el área de nuestro segmento parabólico por :

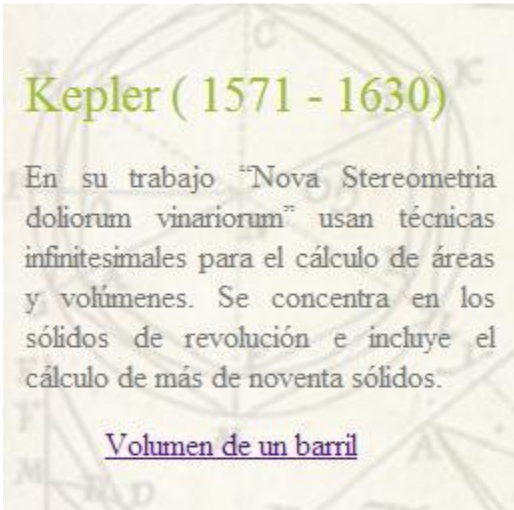
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\ S = \frac{4}{3}\ S = 65.6158$$



5.3 SEGUNDA ETAPA

En esta etapa surgen métodos numéricos que complementan las ideas geométricas para representar procesos infinitos.

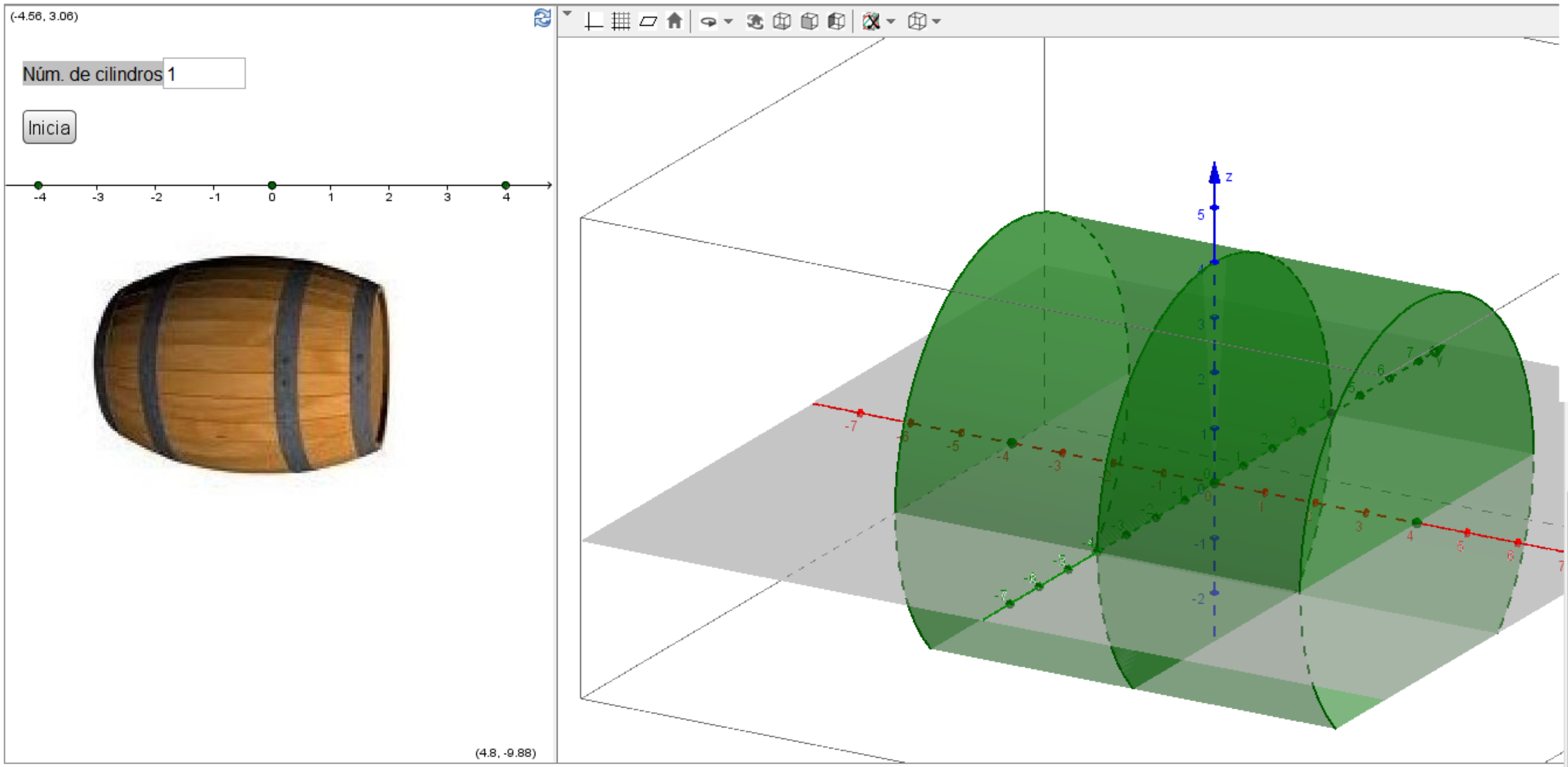
5.3.1 KEPLER


Kepler (1571 - 1630)
En su trabajo "Nova Stereometria doliorum vinariorum" usan técnicas infinitesimales para el cálculo de áreas y volúmenes. Se concentra en los sólidos de revolución e incluye el cálculo de más de noventa sólidos.
Volumen de un barril

Volumen de un barril

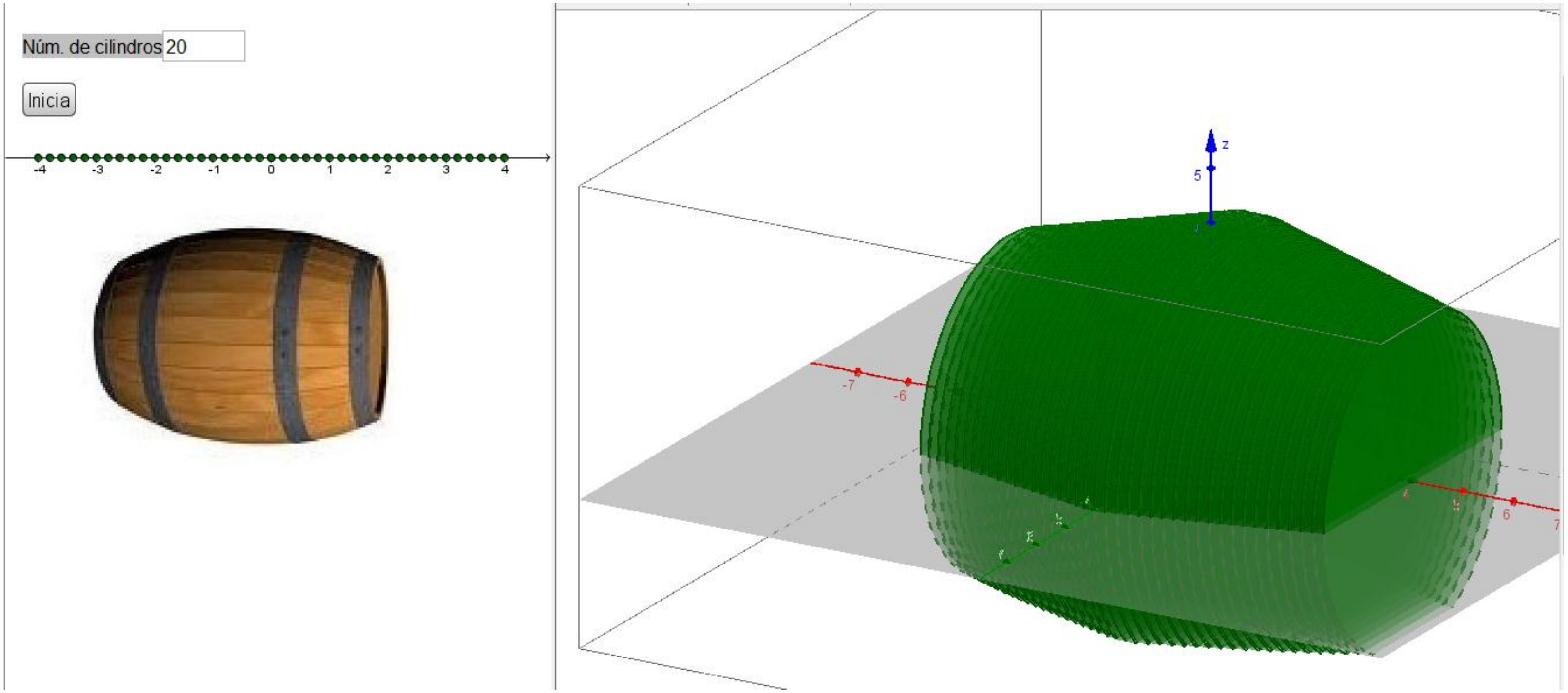
Kepler pensó en el volumen de un barril, como el de cualquier otro cuerpo, formado por numerosas hojas finas adecuadamente dispuestas en capas, siendo cada una de ellas un cilindro.

Supongamos que el barril se encuentra en el centro del plano, entonces los cilindros que se forman van de dos en dos, es decir cunado n = 1 (núm. de cilindros) podemos ver dos cilindros, uno del lado positivo del EjeX y el otro del lado negativo. Ambos cilindros son iguales.



Actividad

1.¿Que sucede al aumentar el numero de cilindros?
2.¿Como podrías obtener el volumen del barril?


Núm. de cilindros 20
Inicia
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
z
5
-7
-6
6
7

5.3.2 ISAAC BEECKMAN

Paso Geométrico al Límite

Isaac Beeckman, en el estudio del problema de la caída libre, introdujo dos suposiciones de tipo físico:

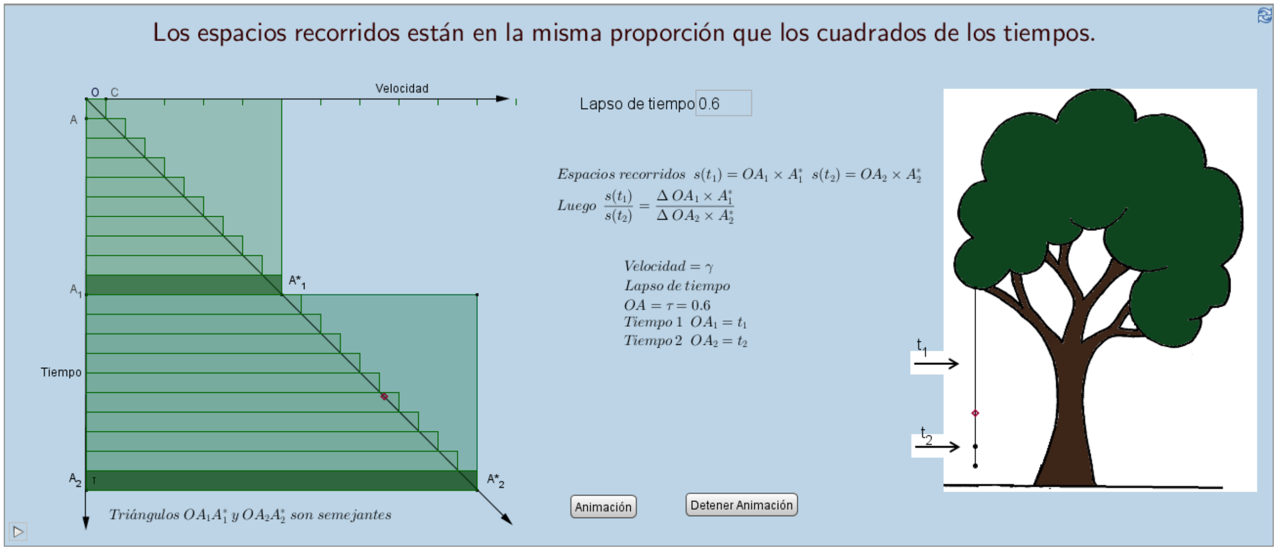
- Se considera que la gravedad actúa no de forma continua, sino dando de algún modo al cuerpo que cae, cada cierto pequeño lapso de tiempo τ, un pequeño empujón.
- Una vez producida una velocidad esta permanece inalterada mientras no existe causa externa que la modifique; esto se asemeja a lo que sería una ley de inercia.

Se considera los espacios recorridos como superficies.

El área de triángulos semejantes es proporcional a los cuadrados de los lados adyacentes.
Espacios recorridos:
$s(t_1) = OA_1 \times A_1^* \;\; s(t_2) = OA_2 \times A_2^*$

$Luego\; \frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\Delta\, OA_1 \times A_1^*}{\Delta\, OA_2 \times A_2^*}$

$Velocidad = \gamma$
$Lapso\ de\ tiempo$
$OA = \tau$
$Tiempo\ 1\;\; OA_1 = t_1$
$Tiempo\ 2\;\; OA_2 = t_2$
$Triángulos\ OA_1 A_1^*\ y\ OA_2 A_2^*\ son\ semejantes$
El τ, que es la amplitud de los rectángulos puede variar, con la casilla de entrada "Lapso de tiempo" puedes modificar su valor.



Actividades:

1.$¿Qué\ pasa\ con\ los\ peldaños\ que\ forman\ una\ escalera\ cuando\ \tau\ es\ muy\ pequeño?\ ¿Y\ cuándo\ \tau\ es\ más\ grande?$

2.$Si\ \tau\ es\ muy\ pequeño,\ tiende\ a\ cero,\ ¿qué\ pasa\ con\ los\ peldaños\ de\ la\ escalera?$

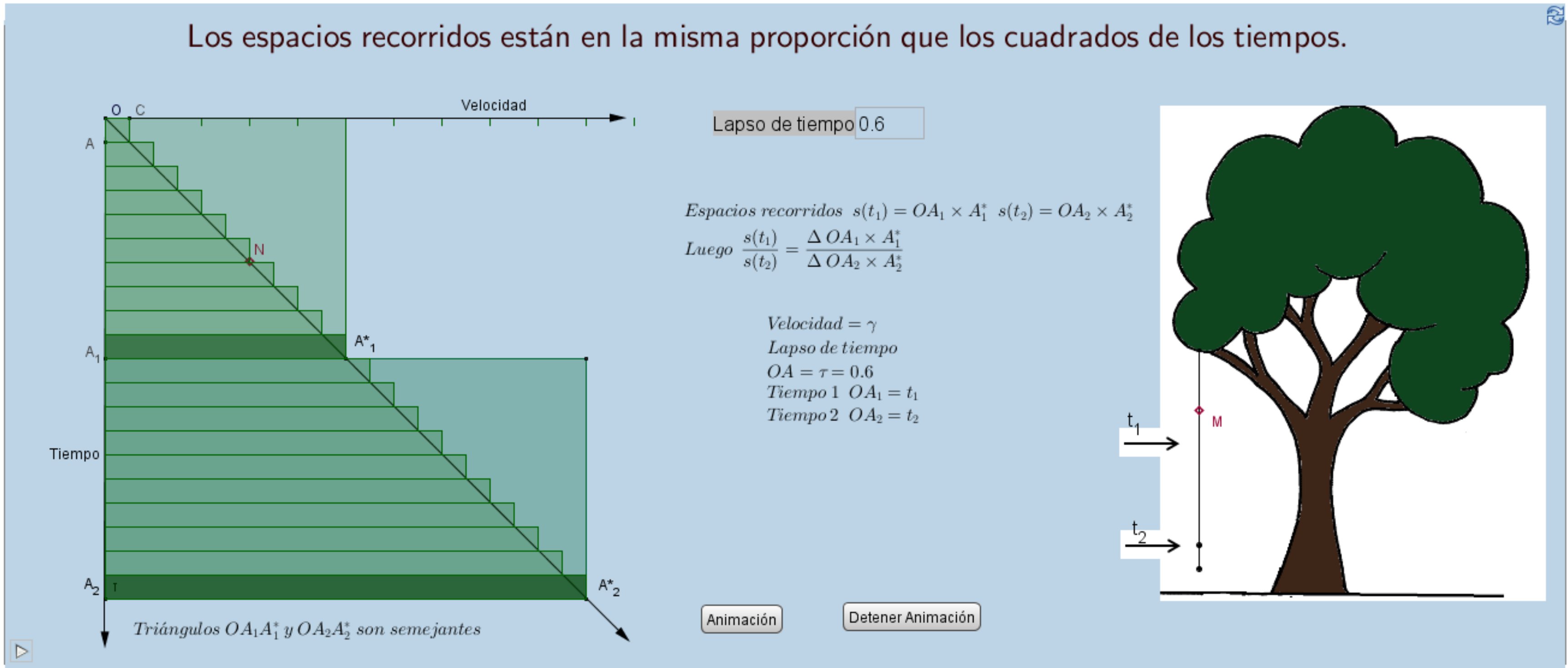
3.$¿Por\ qué\ los\ triángulos\ \Delta OA_1 A_1^*\ y\ \Delta OA_2 A_2^*\ son\ proporcionales?$

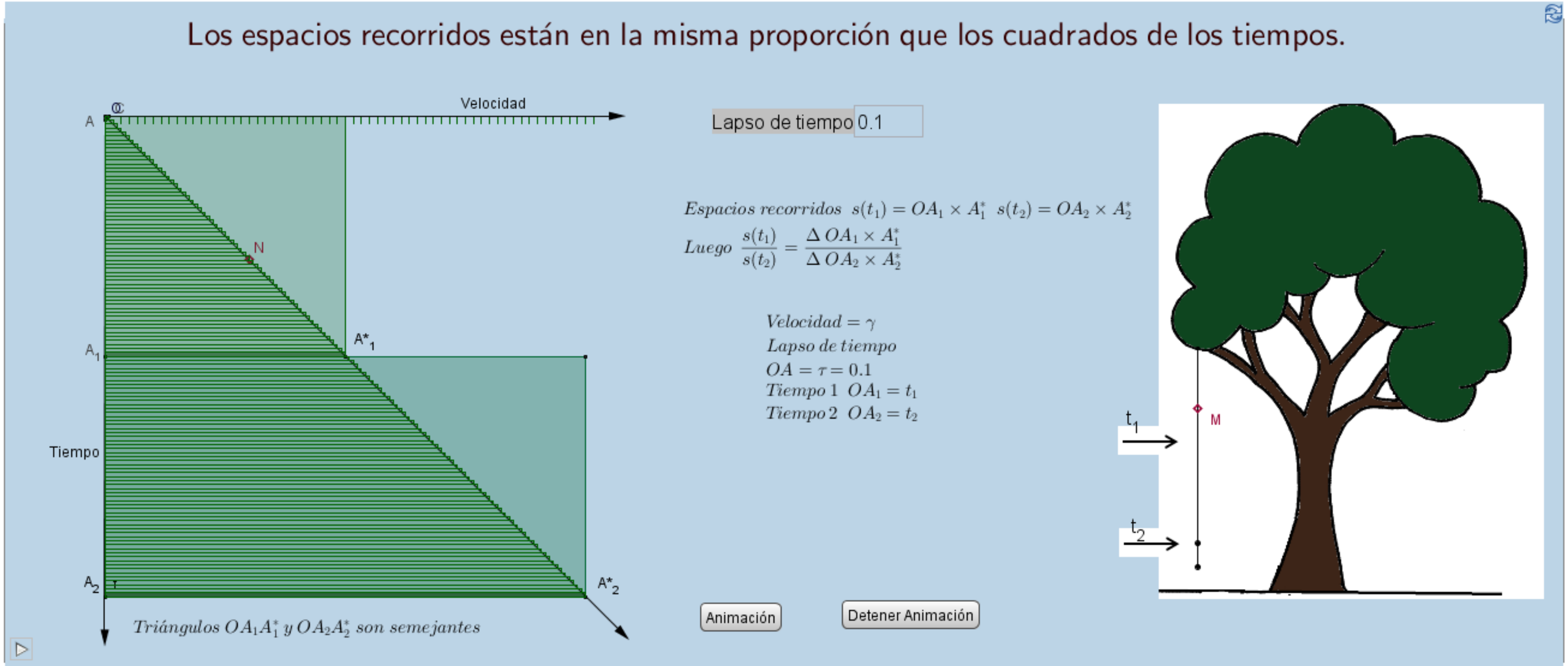
4.$Argumenta\ por\ qué\ el\ área\ de\ triángulos\ semejantes\ es\ proporcional\ al\ los\ cuadrados\ de\ los\ lados\ adyacentes.$

5.$Si\ se\ toma\ los\ cuadrados\ de\ los\ lados\ OA_1\ y\ OA_2,\ que\ pasa\ con\ respecto\ a\ sus\ áreas?$

6.$Argumenta\ por\ qué\ se\ puede\ concluir\ que:$

$$\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{(OA_1)^2}{(OA_2)^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$


Los espacios recorridos están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos.
O
C
Velocidad
A
N
A_1
A^*_1
Tiempo
A_2
A^*_2
Triángulos $OA_1A_1^*$ y $OA_2A_2^*$ son semejantes
Lapso de tiempo 0.6
Espacios recorridos $s(t_1) = OA_1 \times A_1^*$ $s(t_2) = OA_2 \times A_2^*$
Luego $\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\Delta\, OA_1 \times A_1^*}{\Delta\, OA_2 \times A_2^*}$
Velocidad $= \gamma$
Lapso de tiempo
$OA = \tau = 0.6$
Tiempo 1 $OA_1 = t_1$
Tiempo 2 $OA_2 = t_2$
t_1
M
t_2
Animación
Detener Animación


Los espacios recorridos están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos.
Velocidad
A
N
A*1
A1
Tiempo
A2
A*2
Triángulos $OA_1A_1^*$ y $OA_2A_2^*$ son semejantes
Lapso de tiempo 0.1
Espacios recorridos $s(t_1) = OA_1 \times A_1^*$ $s(t_2) = OA_2 \times A_2^*$
Luego $\frac{s(t_1)}{s(t_2)} = \frac{\Delta\, OA_1 \times A_1^*}{\Delta\, OA_2 \times A_2^*}$
Velocidad $= \gamma$
Lapso de tiempo
$OA = \tau = 0.1$
Tiempo 1 $OA_1 = t_1$
Tiempo 2 $OA_2 = t_2$
Animación
Detener Animación
t1
M
t2

5.3.3 FERMAT


Fermat (1601 al 1665)
Da un paso cualitativo importante en la definición de limite. Al trabajar con lugares geométricos encuentra un método para calcular las abscisas de los valores máximo y minimo de una función polinómica, con este método Fermat transciende el infinitesimal geométrico e instaura lo infinitesimal en el terreno de lo numérico.
Cuadratura de Fermat

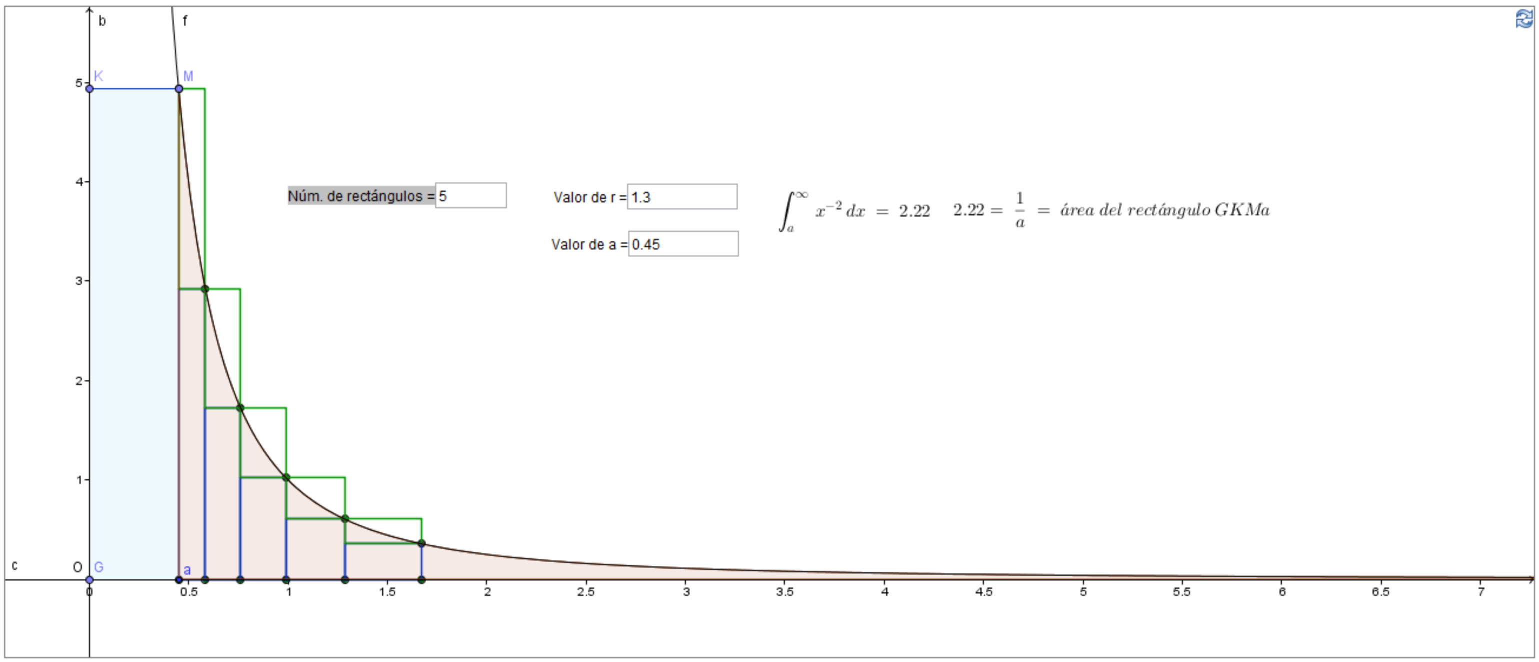
Cuadratura de Fermat

El método de Fermat se aplica a la siguiente hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ *para* $x \geq a$*. Elegimos* $r > 1$ *y consideramos los puntos de las abscisas* $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.$

Los rectángulos inscritos tienen área
$(ar-a)\frac{1}{ar^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \ldots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$

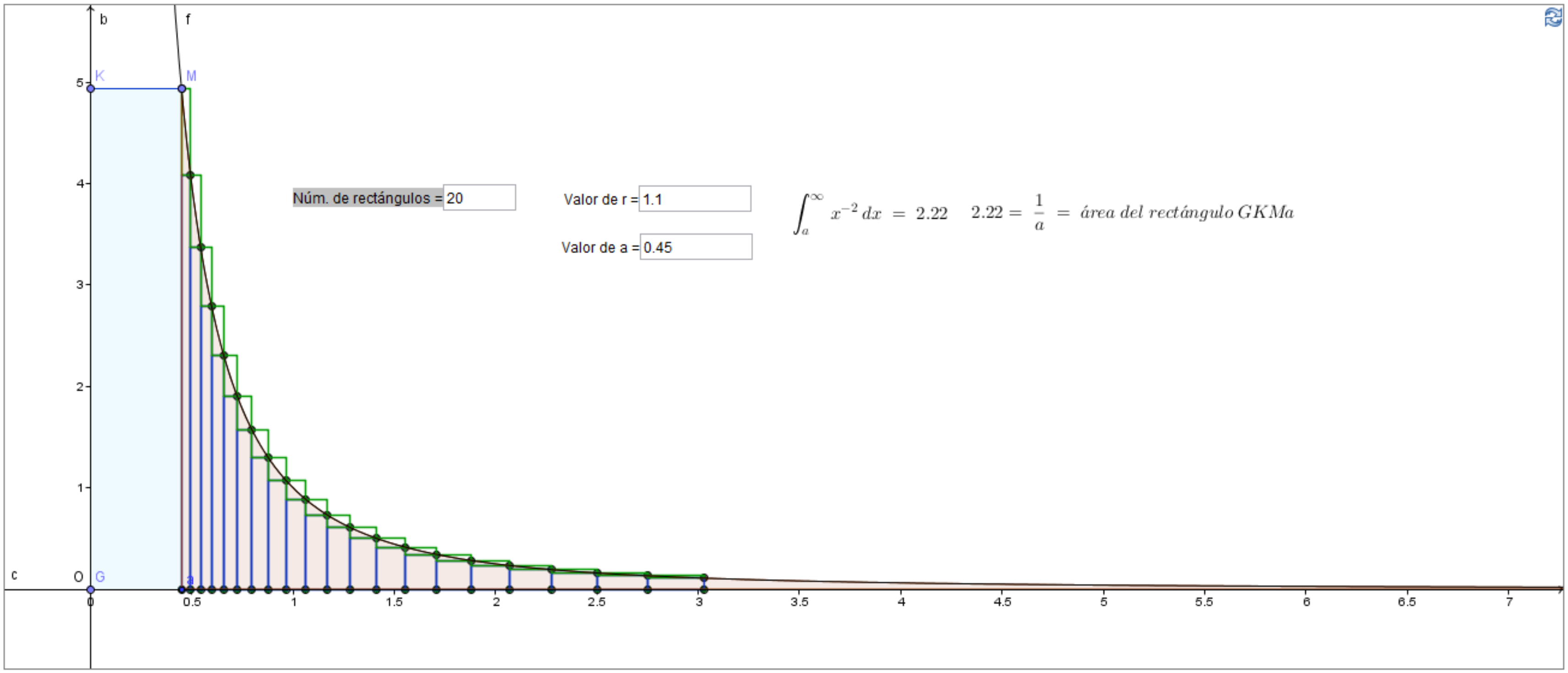
Los rectángulos circunscritos tienen área
$(ar-a)\frac{1}{a^2} + (ar^2-ar)\frac{1}{ar^2} + (ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \ldots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{a}$

Si S *es igual al área bajo la curva para* $x > a$*, entonces*
$\frac{1}{ar} < S < \frac{1}{a}$
Como esto es para cualquier $r > 1$*, concluimos que*
$S = \frac{1}{a}$

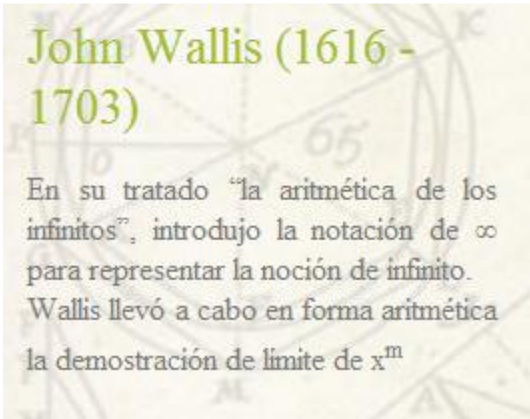


Actividad

1. ¿Qué sucede cuando el valor de "r" es mayor o igual 2?
2. ¿Qué pasaría con la altura del rectángulo GA1MK si "a" se aproxima a 0?


Núm. de rectángulos = 20
Valor de r = 1.1
Valor de a = 0.45
$\int_a^\infty x^{-2}\,dx = 2.22 \quad 2.22 = \frac{1}{a} = \acute{a}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo\ GKMa$
b
f
K
M
G
O
c
a

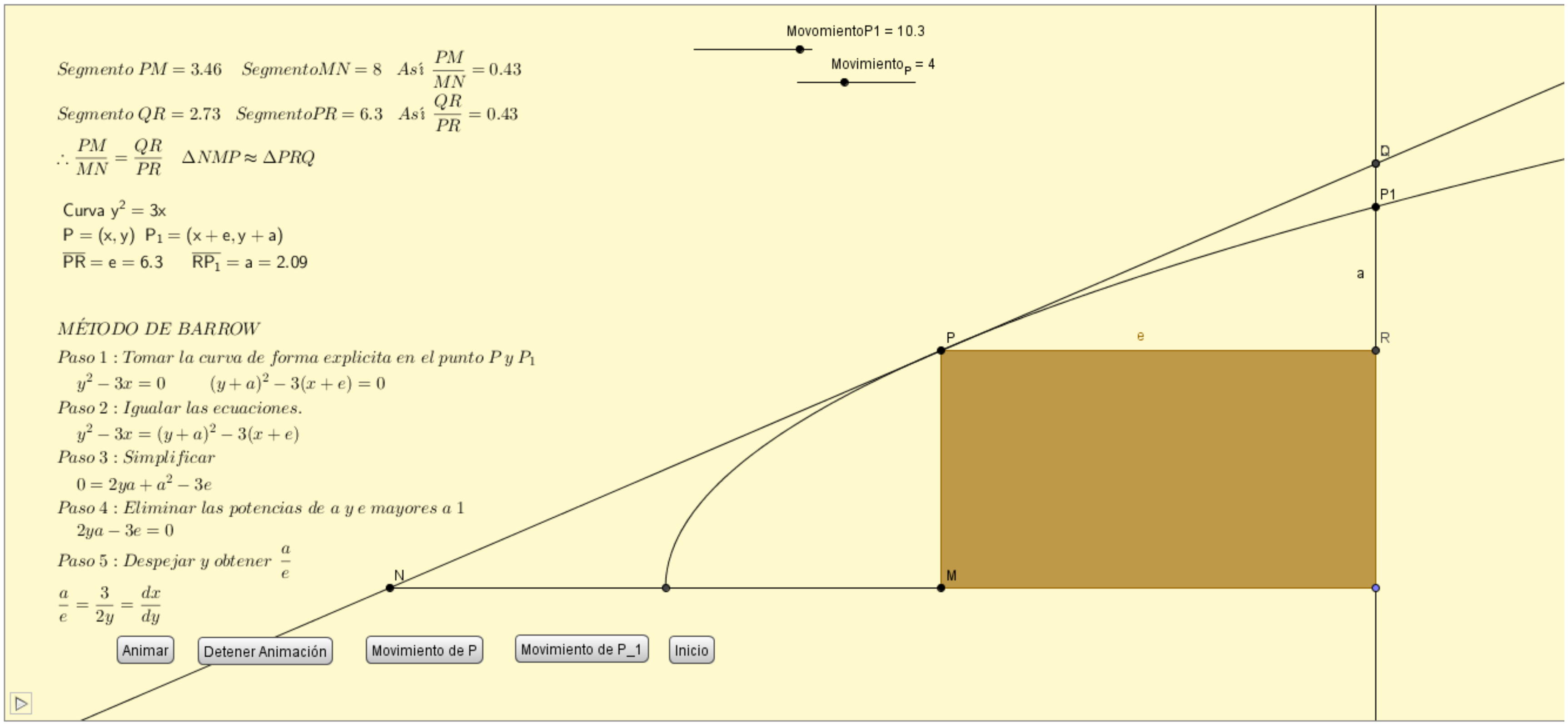
5.3.4 JONH WALLIS



5.3.5 ISAAC BARROW

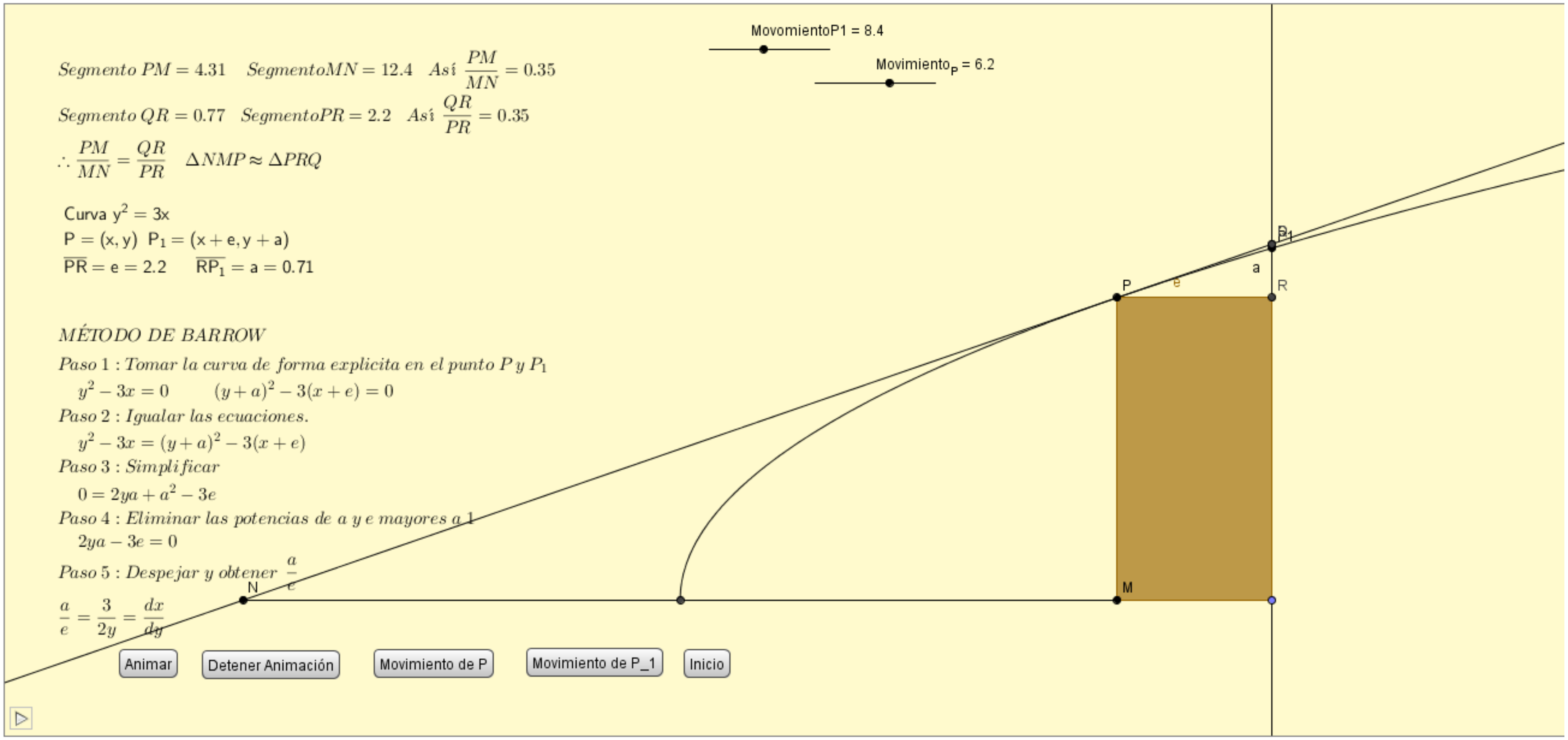
Triángulo Característico

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, como este triángulo es semejante al PNM, resulta que la pendiente de la tangente $PM = MN$ esigual a $QR = PR$.
Barrow afirma que cuando el arco (PP_1) es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P.
Eltriángulo PRP_1 de la figura de la derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el triángulo característico o diferencial.
Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas



Actividad:

1.Observa y describe que sucede con los segmentos $\overline{RP_1}$ y $\overline{RQ}$ cuando P y P_1 se encuentran mur cerca.


MovomientoP1 = 8.4
$Movimiento_P = 6.2$
$Segmento\ PM = 4.31 \quad SegmentoMN = 12.4 \quad Así\ \frac{PM}{MN} = 0.35$
$Segmento\ QR = 0.77 \quad SegmentoPR = 2.2 \quad Así\ \frac{QR}{PR} = 0.35$
$\therefore \frac{PM}{MN} = \frac{QR}{PR} \quad \Delta NMP \approx \Delta PRQ$
Curva $y^2 = 3x$
$P = (x, y) \quad P_1 = (x + e, y + a)$
$\overline{PR} = e = 2.2 \quad \overline{RP_1} = a = 0.71$
MÉTODO DE BARROW
Paso 1 : Tomar la curva de forma explicita en el punto P y P_1
$y^2 - 3x = 0 \qquad (y + a)^2 - 3(x + e) = 0$
Paso 2 : Igualar las ecuaciones.
$y^2 - 3x = (y + a)^2 - 3(x + e)$
Paso 3 : Simplificar
$0 = 2ya + a^2 - 3e$
Paso 4 : Eliminar las potencias de a y e mayores a 1
$2ya - 3e = 0$
Paso 5 : Despejar y obtener $\frac{a}{e}$
$\frac{a}{e} = \frac{3}{2y} = \frac{dx}{dy}$
P
P_1
a
e
R
N
M
Animar
Detener Animación
Movimiento de P
Movimiento de P_1
Inicio

Triángulo Característico 2

$Curva\ y = x^2$
$Triángulo\ \ Característico : PP_1R$
$P = (x-e, y-a) \quad P_1 = (x,y)$

$Curva\ y = x^3$
$Triángulo\ \ Característico : Q_2Q_1R_1$
$Q_1 = (x,y) \quad Q_2 = (x-e, y-a)$

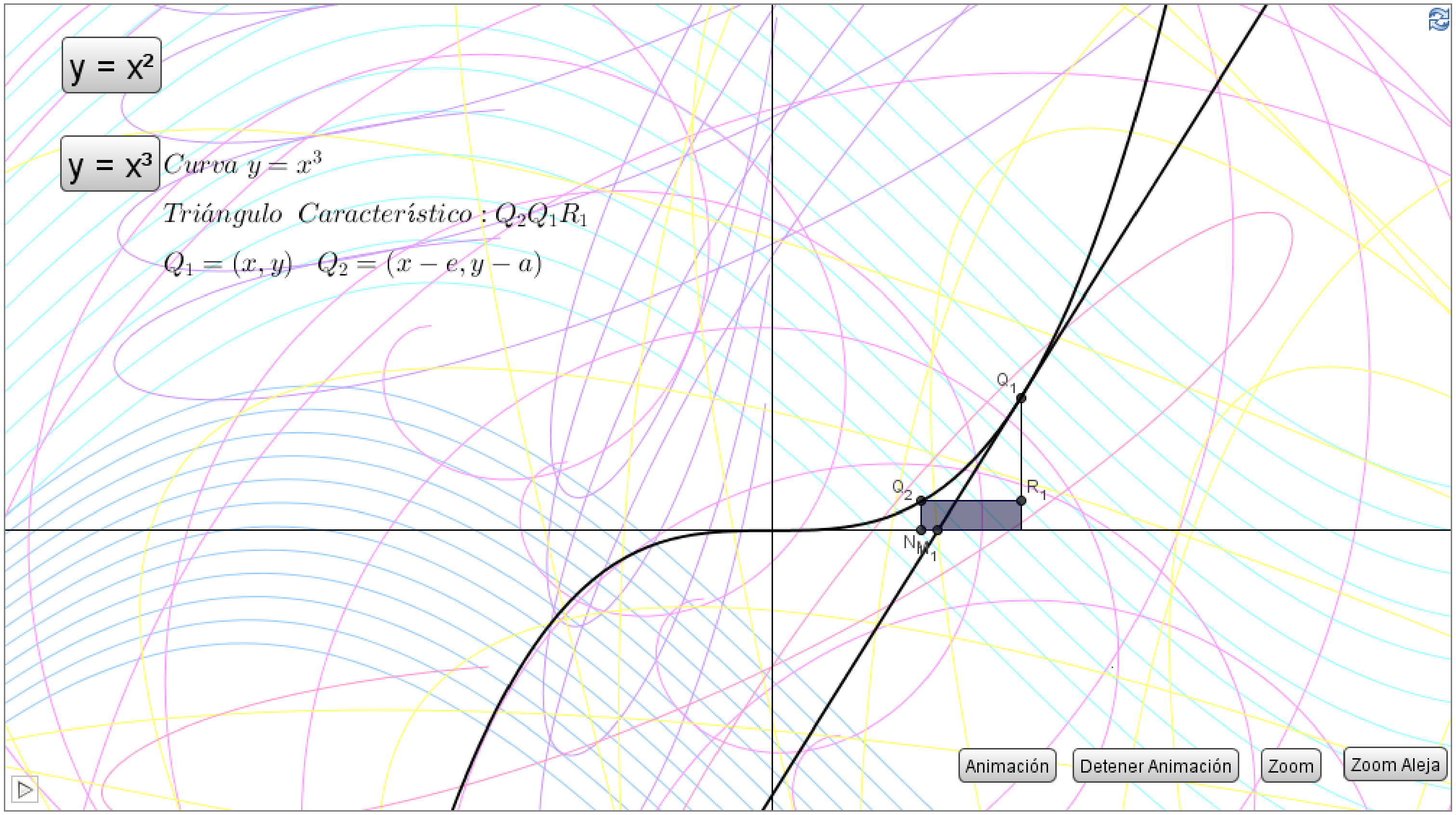
Método de Isaac Barrow
$Paso\ 1 : Tomar\ la\ curva\ de\ forma\ explicita\ en\ el\ punto\ P\ y\ P_1$

$Paso\ 2 : Igualar\ las\ ecuaciones.$

$Paso\ 3 : Simplificar$

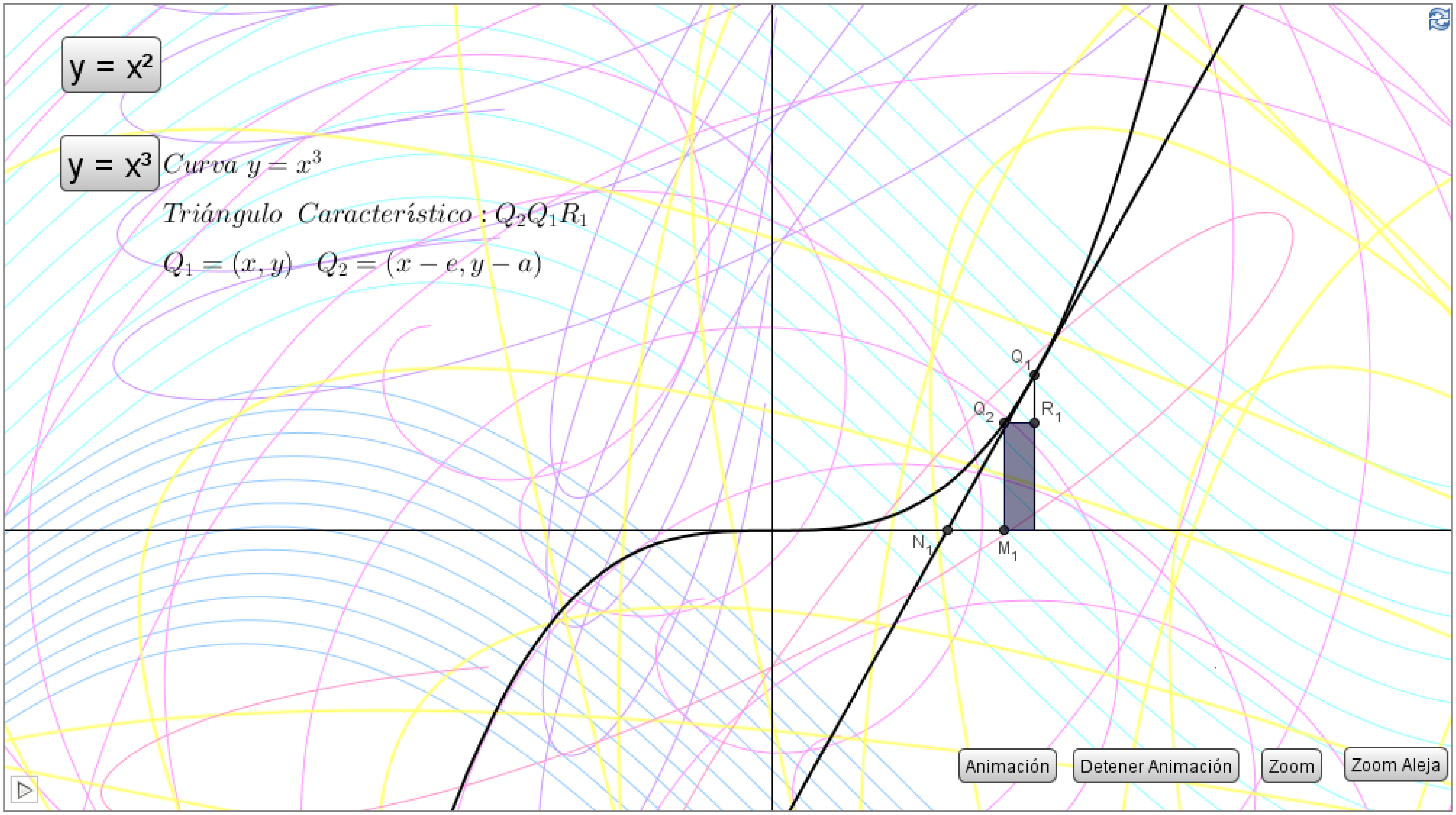
$Paso\ 4 : Eliminar\ las\ potencias\ de\ a\ y\ e\ mayores\ a\ 1$

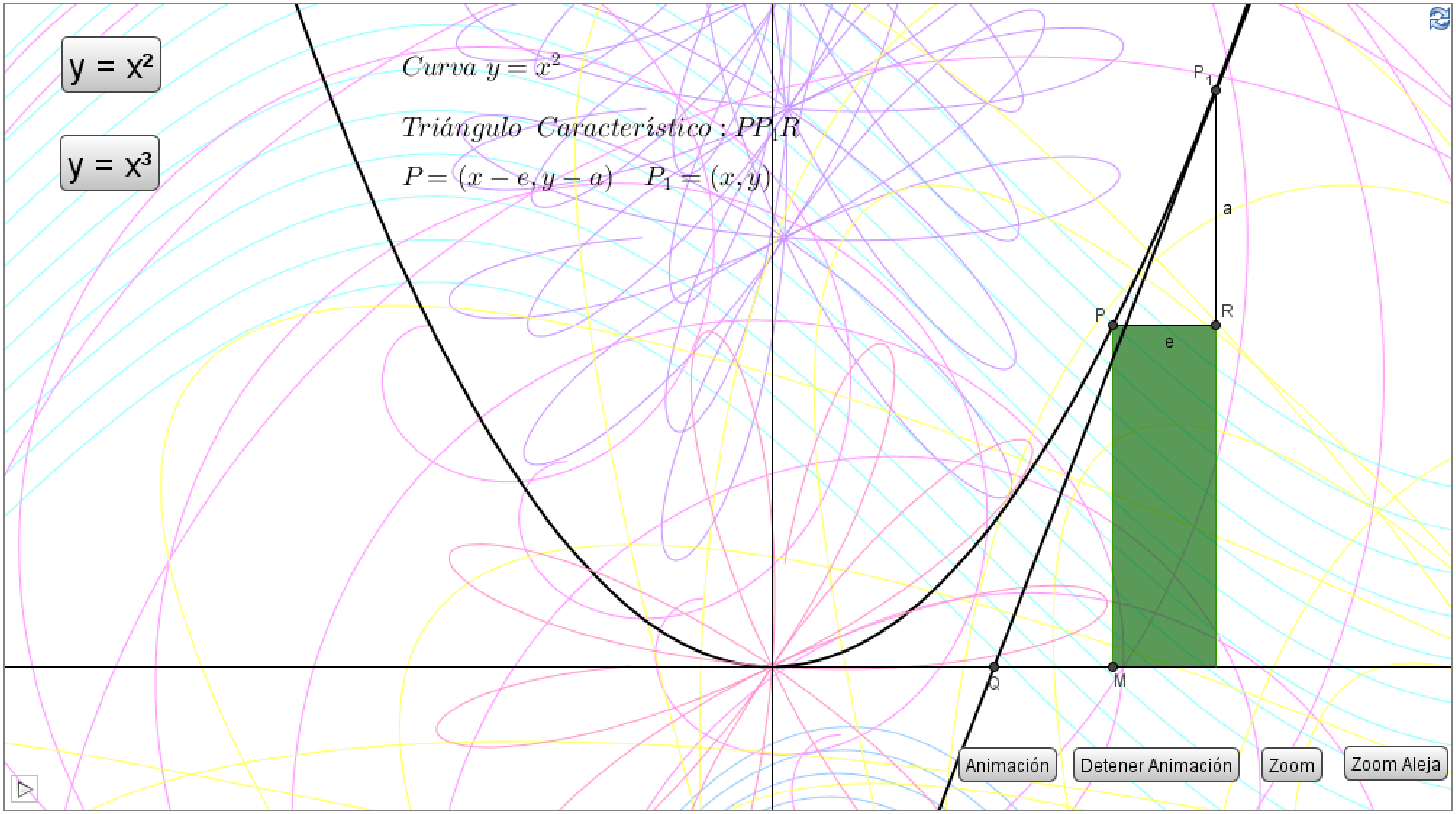
$Paso\ 5 : Despejar\ y\ obtener\ \frac{a}{e}$



Actividad:

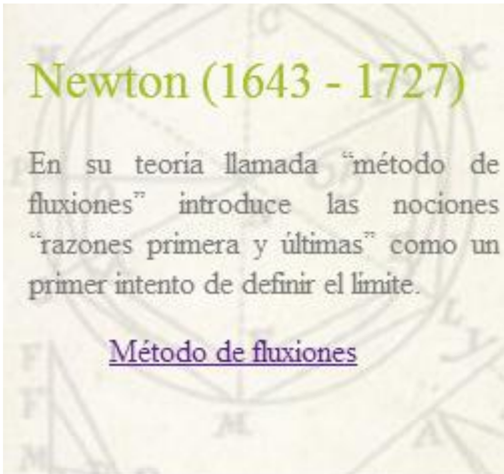
1. Inicia la animación y observa como se forma el triángulo característico de cada curva. Explica que sucede cuando los dos puntos sobre la curva son muy cercanos.
2. Aplica el método de Barrow a la curva $y = x^2$.
3. Aplica el método de Barrow a la curva $y = x^3$.


y = x²
y = x³
Curva $y = x^3$
Triángulo Característico : $Q_2Q_1R_1$
$Q_1 = (x, y)$ $Q_2 = (x - e, y - a)$
Q1
Q2
R1
N1
M1
Animación
Detener Animación
Zoom
Zoom Aleja



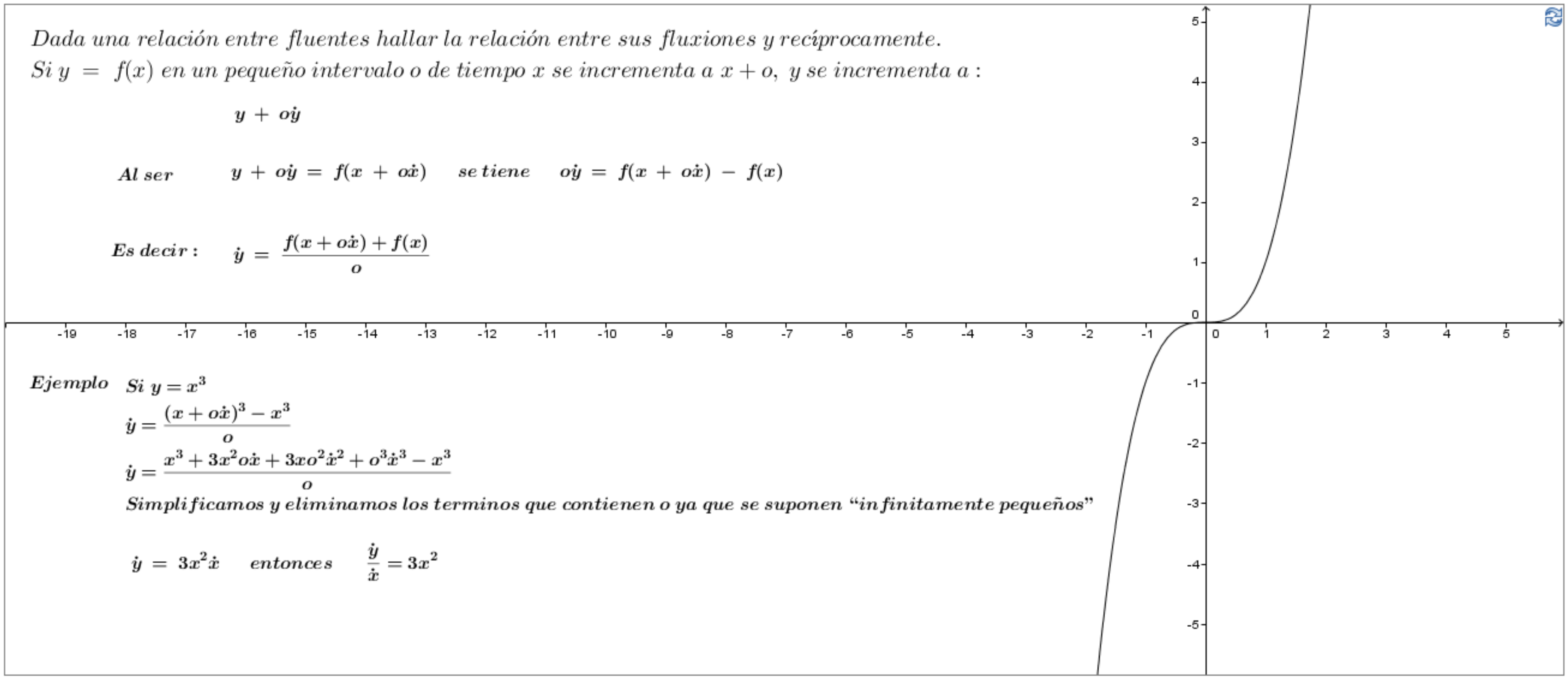
y = x²
y = x³
Curva $y = x^2$
Triángulo Característico : PP_1R
$P = (x - e, y - a)$ $P_1 = (x, y)$
P_1
a
P
R
e
Q
M
Animación
Detener Animación
Zoom
Zoom Aleja

5.3.6 NEWTON


Newton (1643 - 1727)
En su teoría llamada "método de fluxiones" introduce las nociones "razones primera y últimas" como un primer intento de definir el límite.
Método de fluxiones

Método de las fluxiones

Newton estudia las magnitudes variables del movimiento mecánico continuo.
Concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen $x, y, \ldots,$ *son "fluentes" y sus velocidades, designadas por* $\dot{x}, \dot{y}, \ldots,$ *son sus "fluxiones". La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo o es* $\dot{x}o$, *el momento del fluente.*



Dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones y recíprocamente.
Si $y = f(x)$ *en un pequeño intervalo o de tiempo* x *se incrementa a* $x + o$, *y se incrementa a :*

$$y + o\dot{y}$$

Al ser $\quad y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) \quad$ *se tiene* $\quad o\dot{y} = f(x + o\dot{x}) - f(x)$

Es decir : $\quad \dot{y} = \dfrac{f(x + o\dot{x}) + f(x)}{o}$

Ejemplo $\quad$ *Si* $y = x^3$

$$\dot{y} = \frac{(x + o\dot{x})^3 - x^3}{o}$$

$$\dot{y} = \frac{x^3 + 3x^2 o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3 - x^3}{o}$$

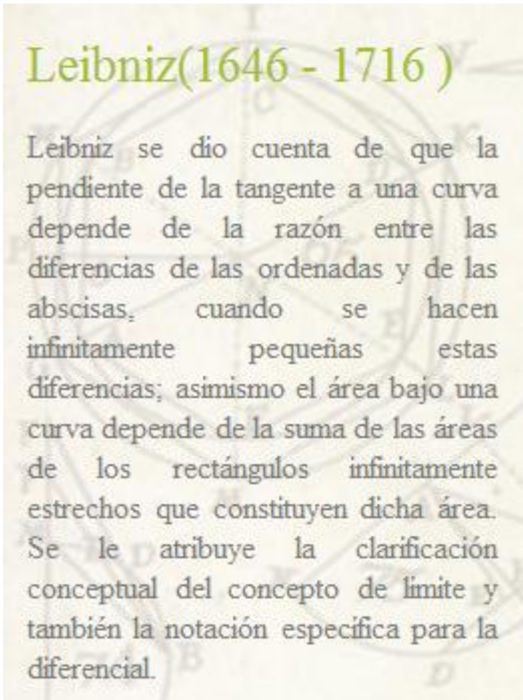
Simplificamos y eliminamos los terminos que contienen o ya que se suponen "infinitamente pequeños"

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x} \quad \text{entonces} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

Actividad

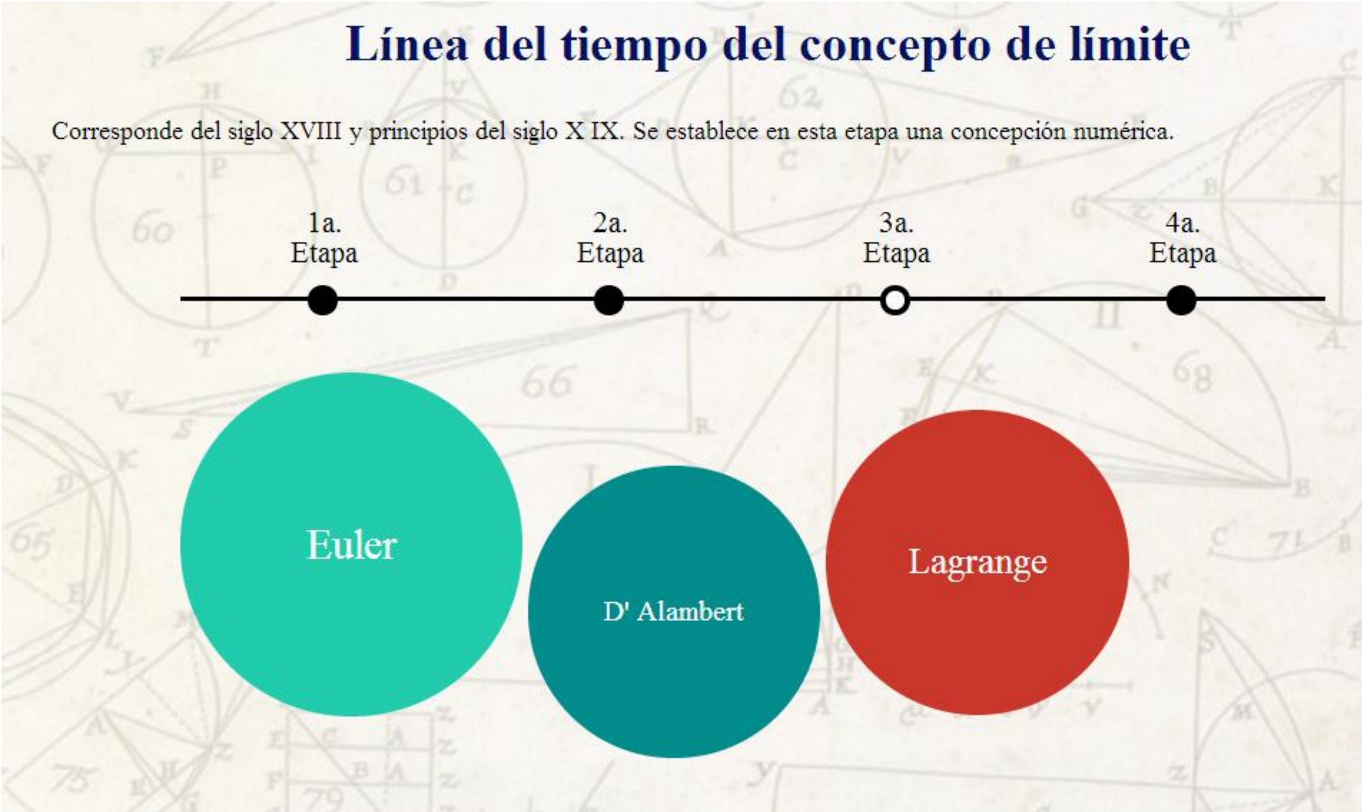
1. Con que tema de Calculo puedes relacionar el método de fluxiones de Newton.
2. Como se relaciona este método con el concepto de límite.

5.3.7 LEIBNIZ

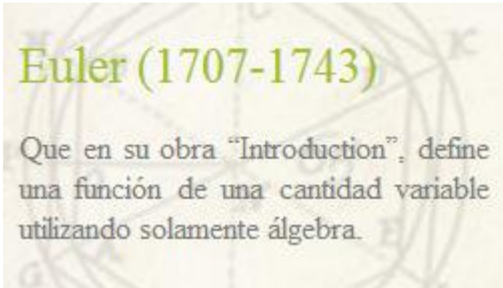

Leibniz(1646 - 1716)
Leibniz se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias; asimismo el área bajo una curva depende de la suma de las áreas de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen dicha área. Se le atribuye la clarificación conceptual del concepto de limite y también la notación especifica para la diferencial.

5.4 TERCERA ETAPA

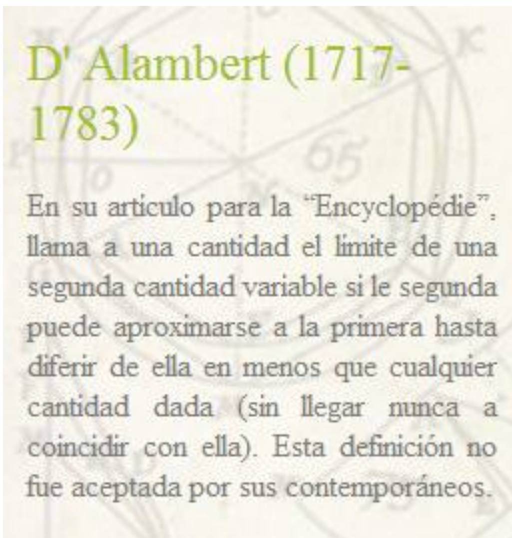
En esta etapa se deja atrás las ideas geométricas y se inicia la aritmética y el álgebra del límite. Se empieza a formalizar algunas definiciones que no fueron aceptadas por falta de rigor matemático.



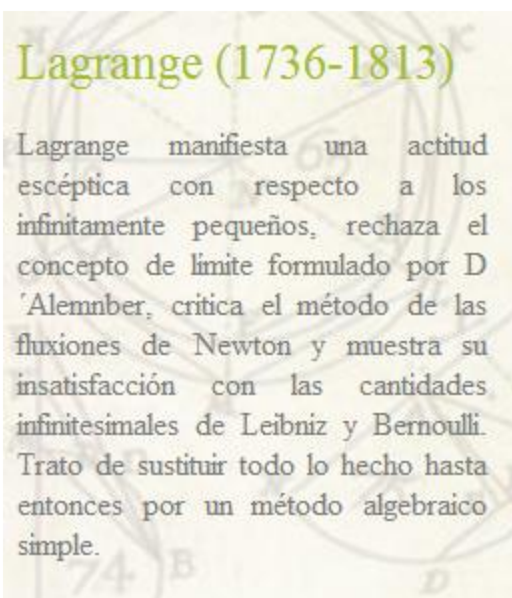
5.4.1 EULER



5.4.2 D´ALAMBERT

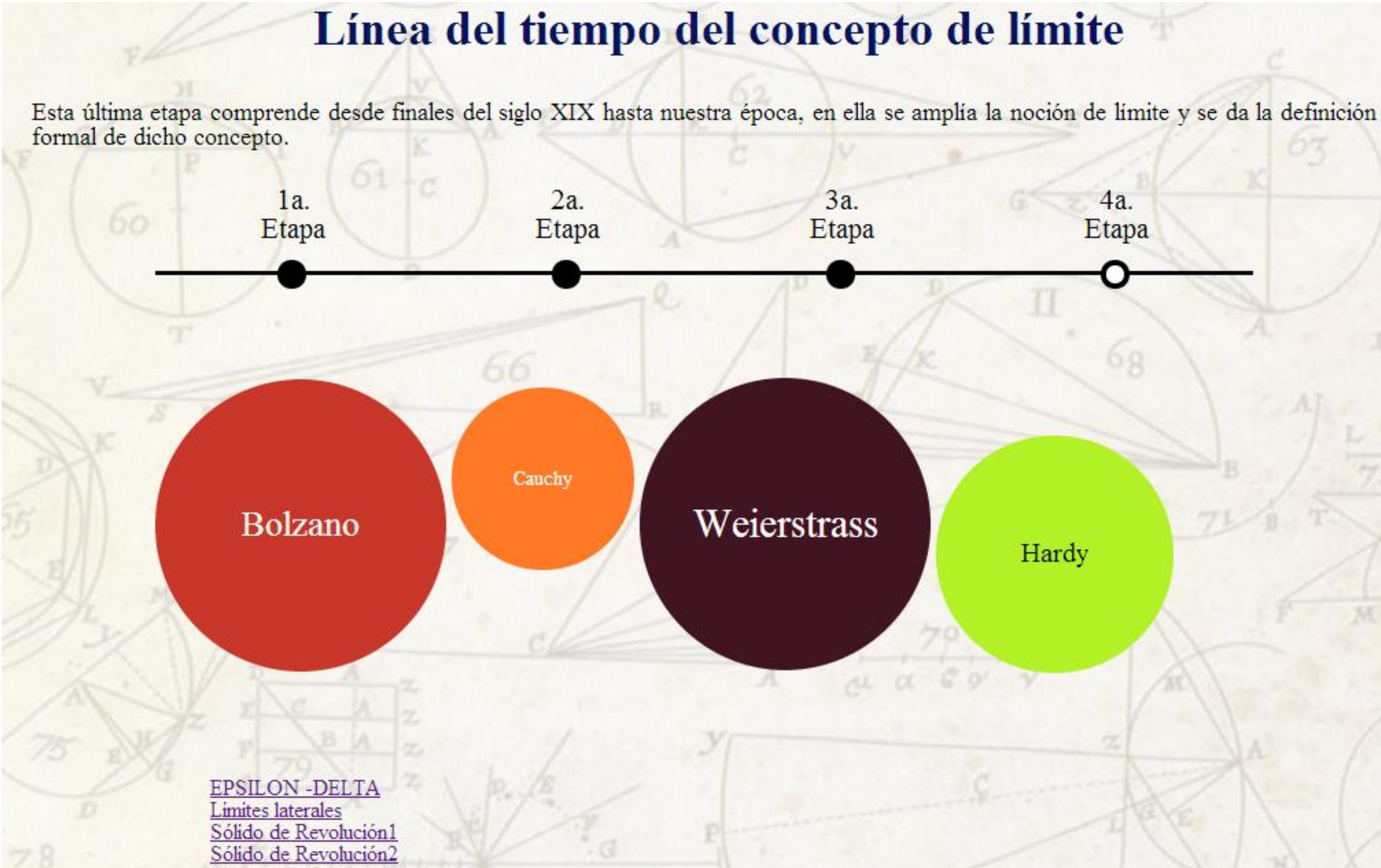


5.4.3 LAGRANGE

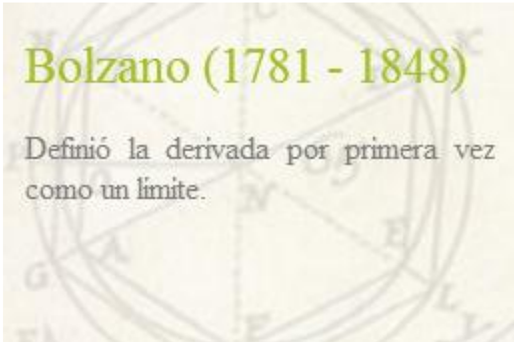


5.5 CUARTA ETAPA

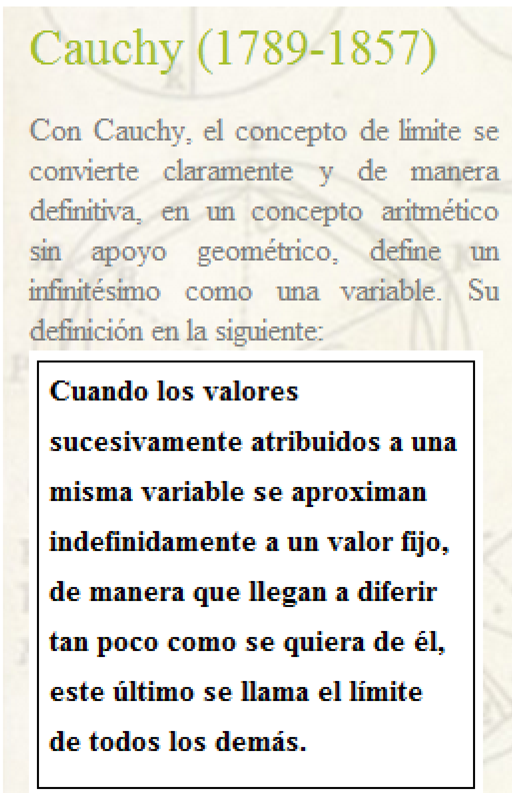
En esta etapa se define el concepto de límite como actualmente se utiliza.


Línea del tiempo del concepto de límite
Esta última etapa comprende desde finales del siglo XIX hasta nuestra época, en ella se amplía la noción de límite y se da la definición formal de dicho concepto.
1a. Etapa
2a. Etapa
3a. Etapa
4a. Etapa
Bolzano
Cauchy
Weierstrass
Hardy
EPSILON -DELTA
Limites laterales
Sólido de Revolución1
Sólido de Revolución2

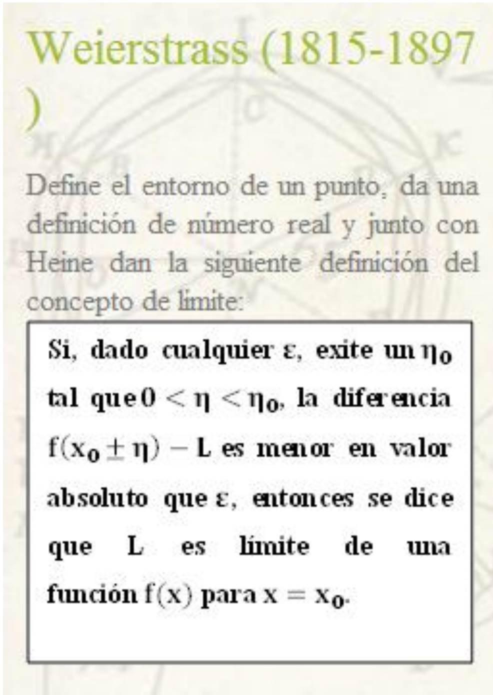
5.5.1 BOLZANO



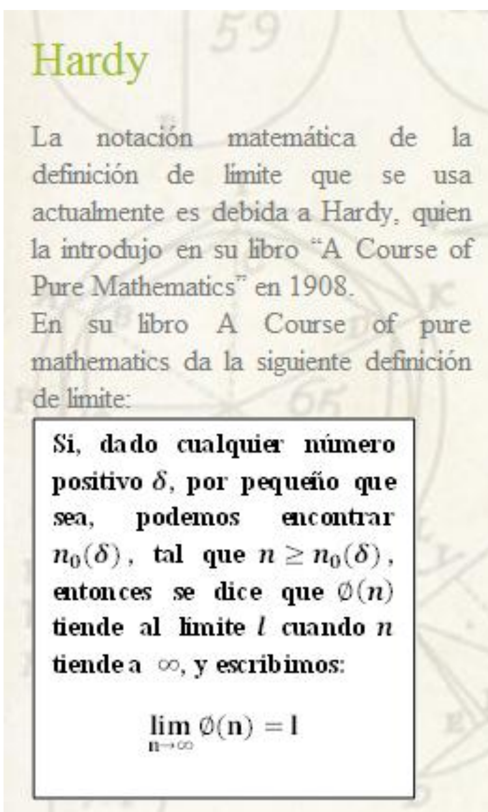
5.5.2 CAUCHY



5.5.3 WEIERSTRASS

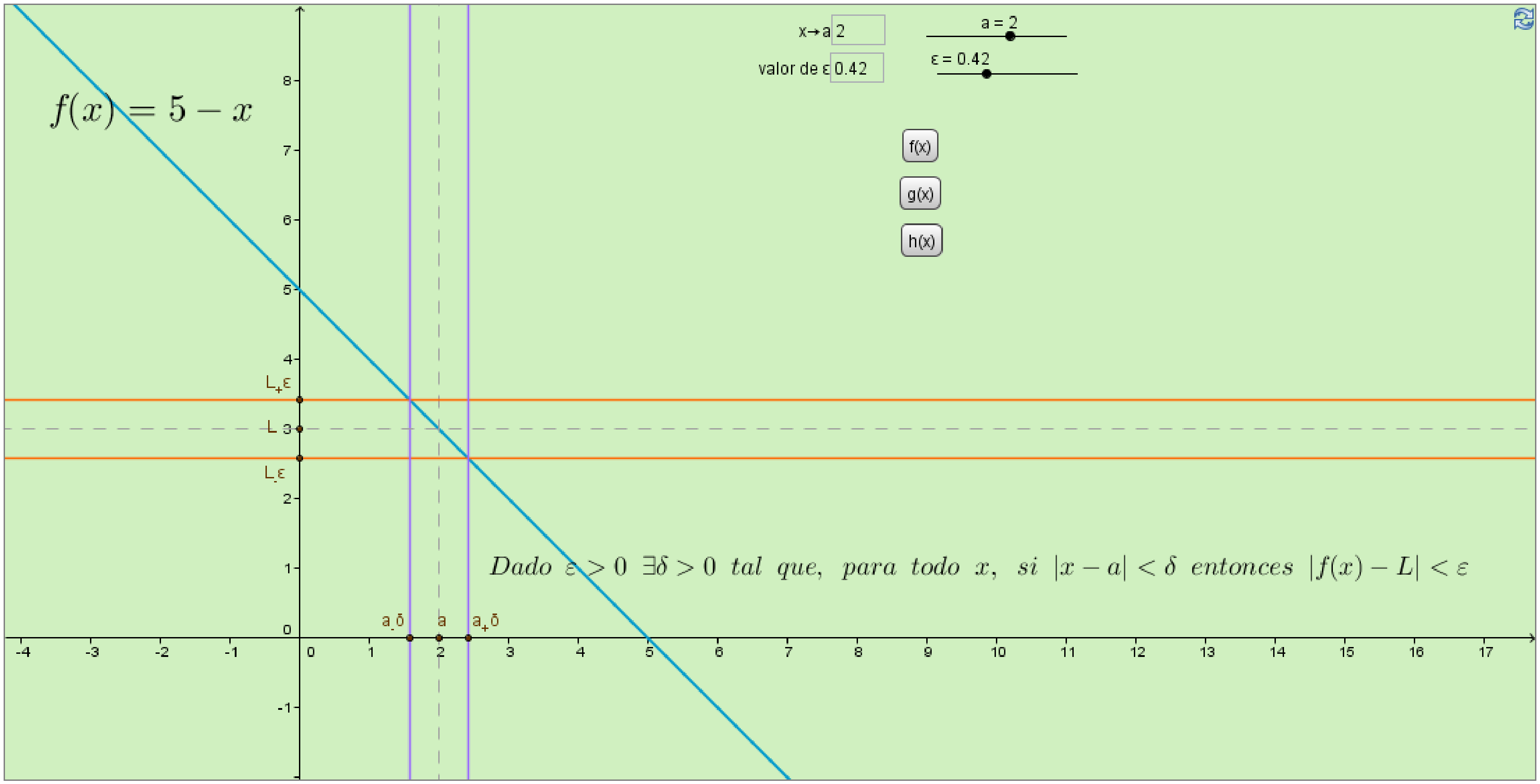


5.5.4 HARDY

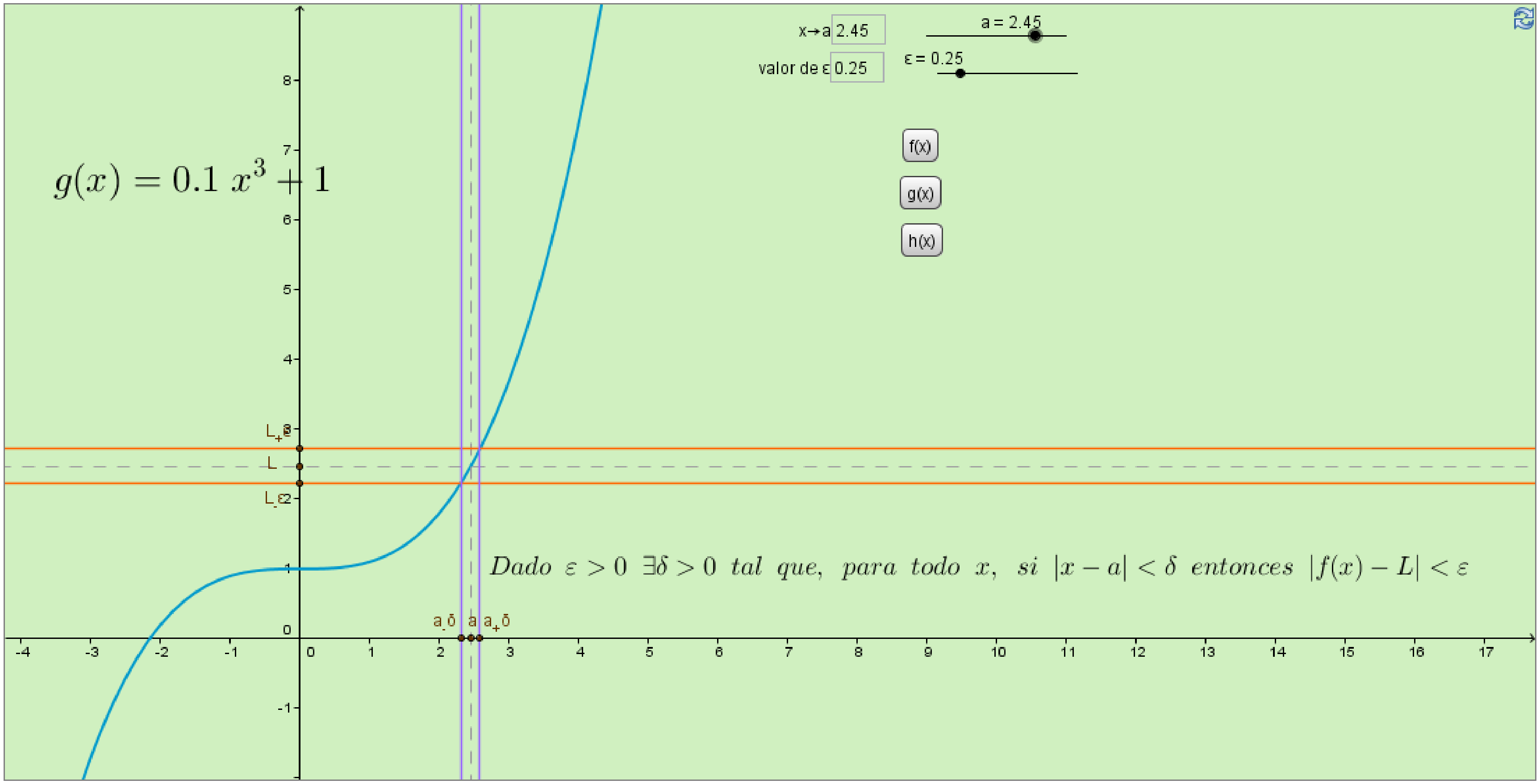


Epsilón-Delta

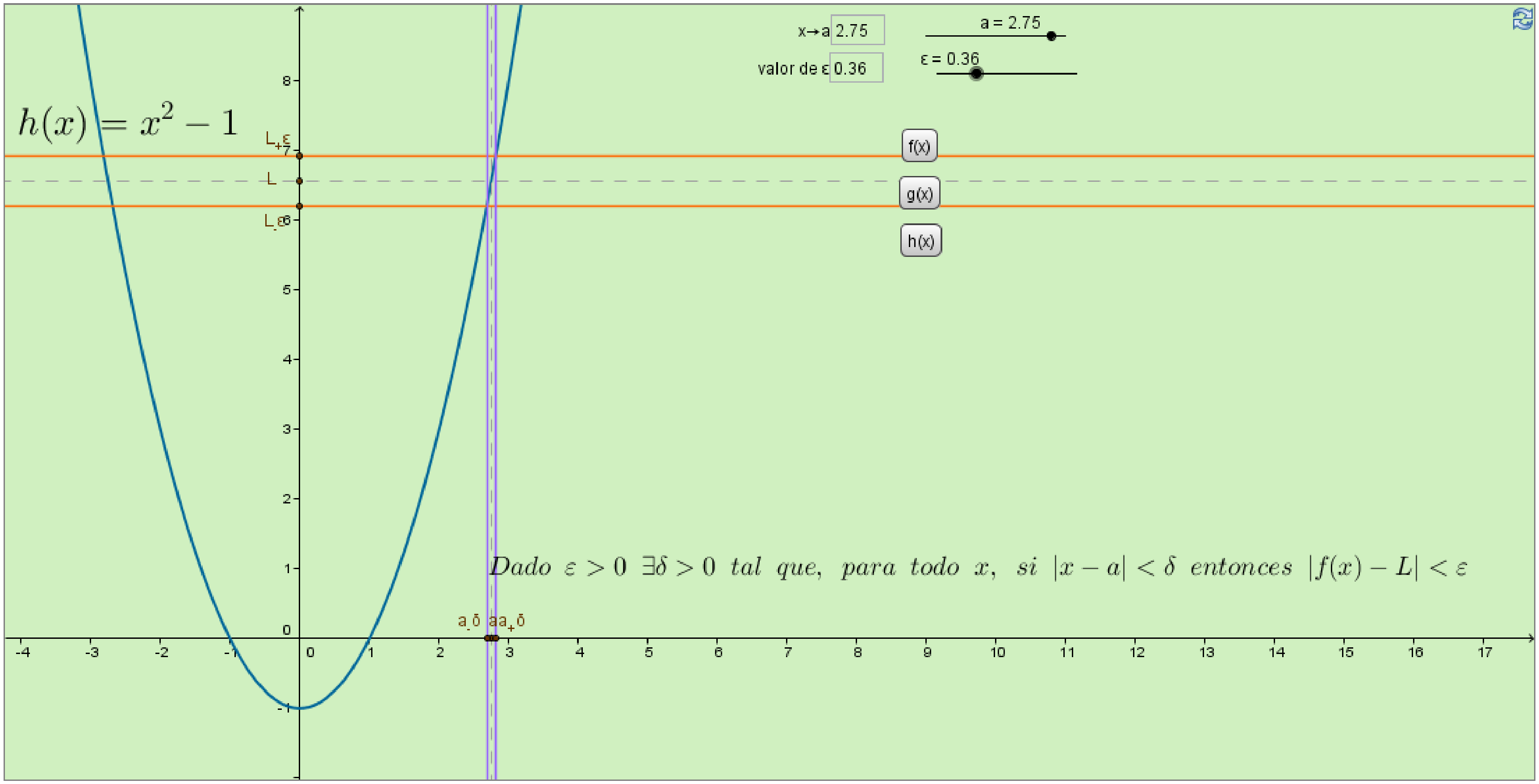
Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ *tal que, para todo* x, *si* $|x - a| < \delta$ *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Mueve los deslizadores para observar el movimiento de a y ε.



Actividad:
Elija dos valores de ε y encuentre el valor de δ.



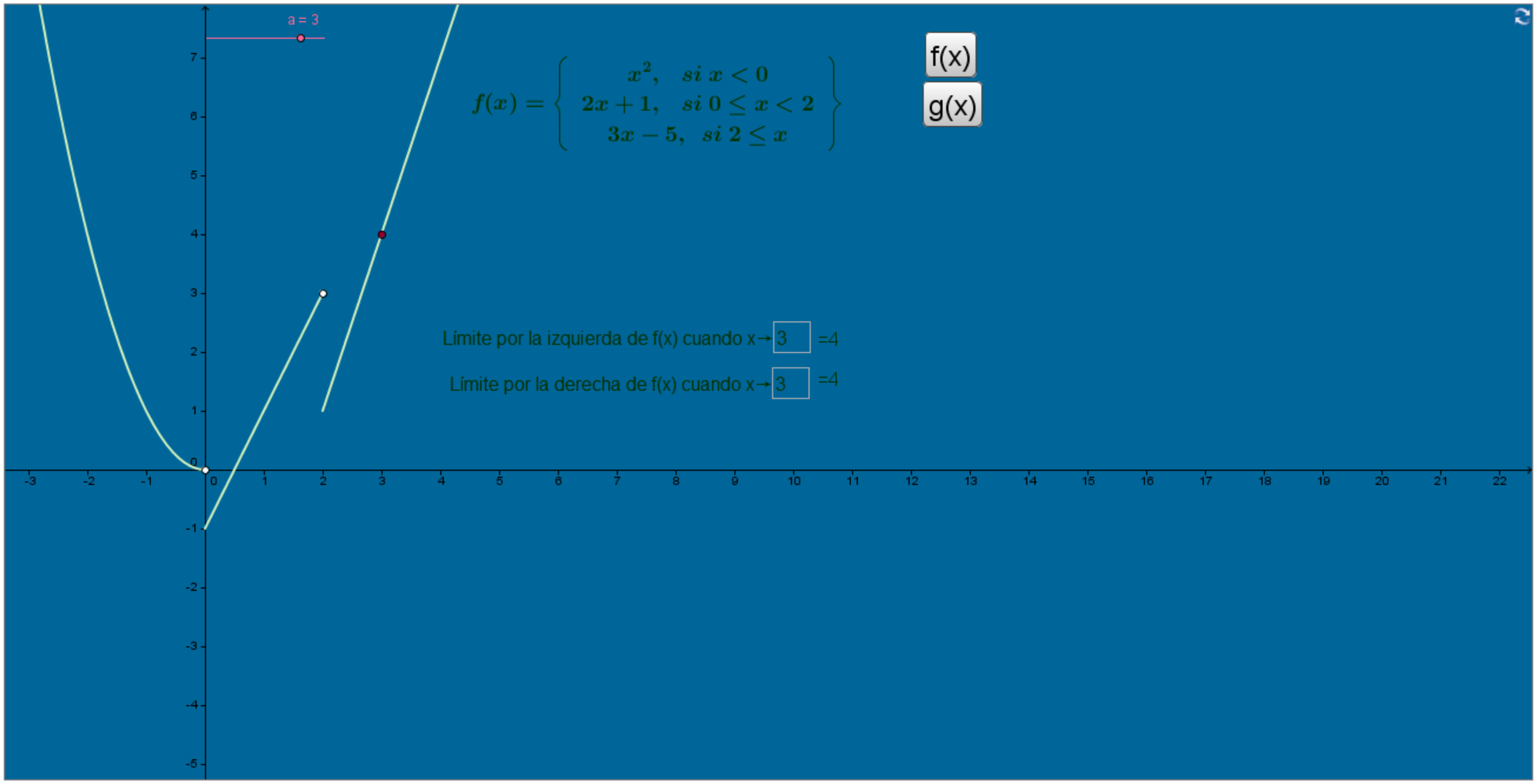
$g(x) = 0.1\ x^3 + 1$
x→a 2.45
valor de ε 0.25
a = 2.45
ε = 0.25
f(x)
g(x)
h(x)
L+ε
L
L-ε
a-δ
a
a+δ
$Dado\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ tal\ que,\ para\ todo\ x,\ si\ |x-a| < \delta\ entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$


x→a 2.75
a = 2.75
valor de ε 0.36
ε = 0.36
$h(x) = x^2 - 1$
f(x)
g(x)
h(x)
L+ε
L
L-ε
$Dado\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ tal\ que,\ para\ todo\ x,\ si\ |x-a| < \delta\ entonces\ |f(x)-L| < \varepsilon$
a-δ a a+δ

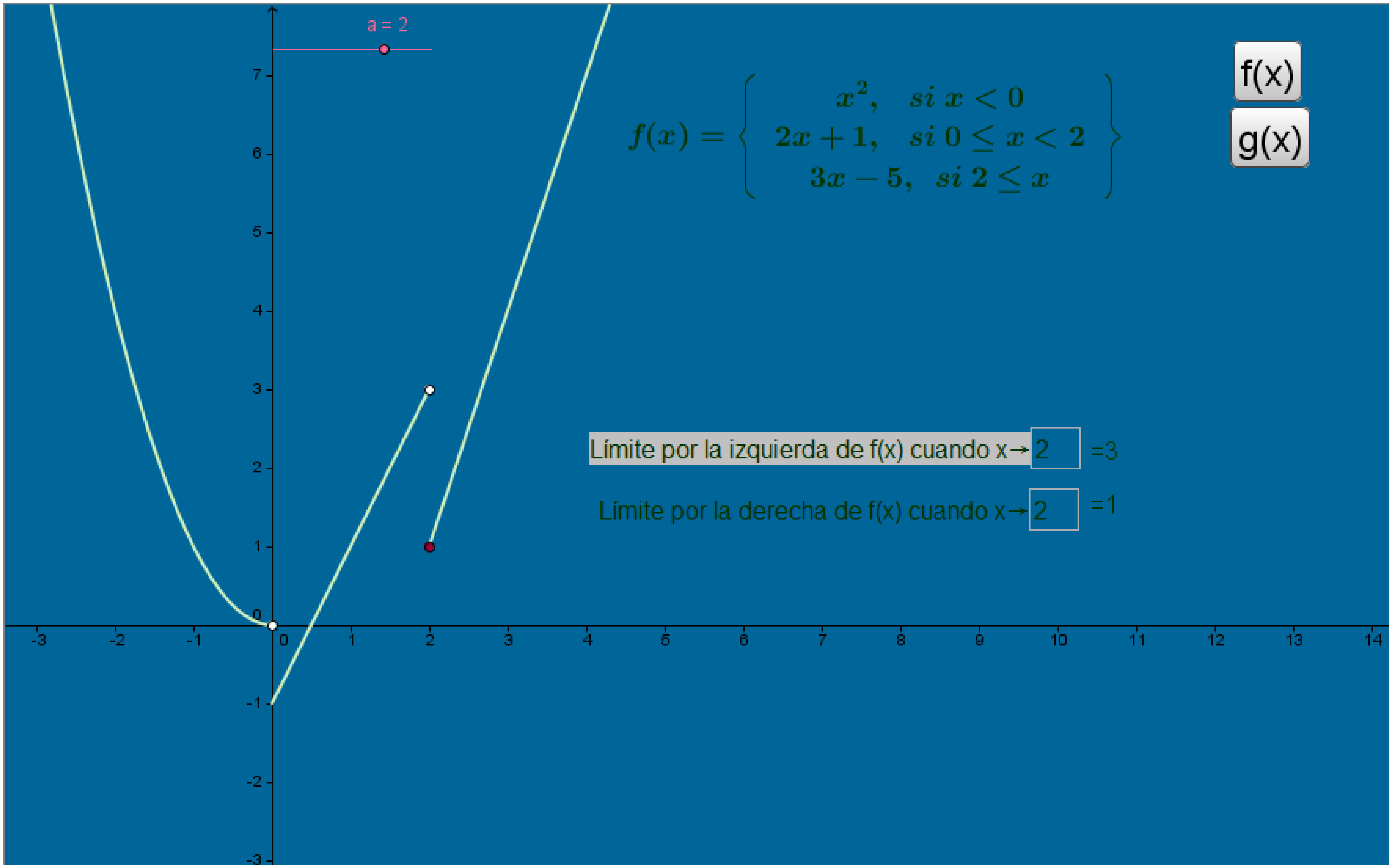
Límites Laterales

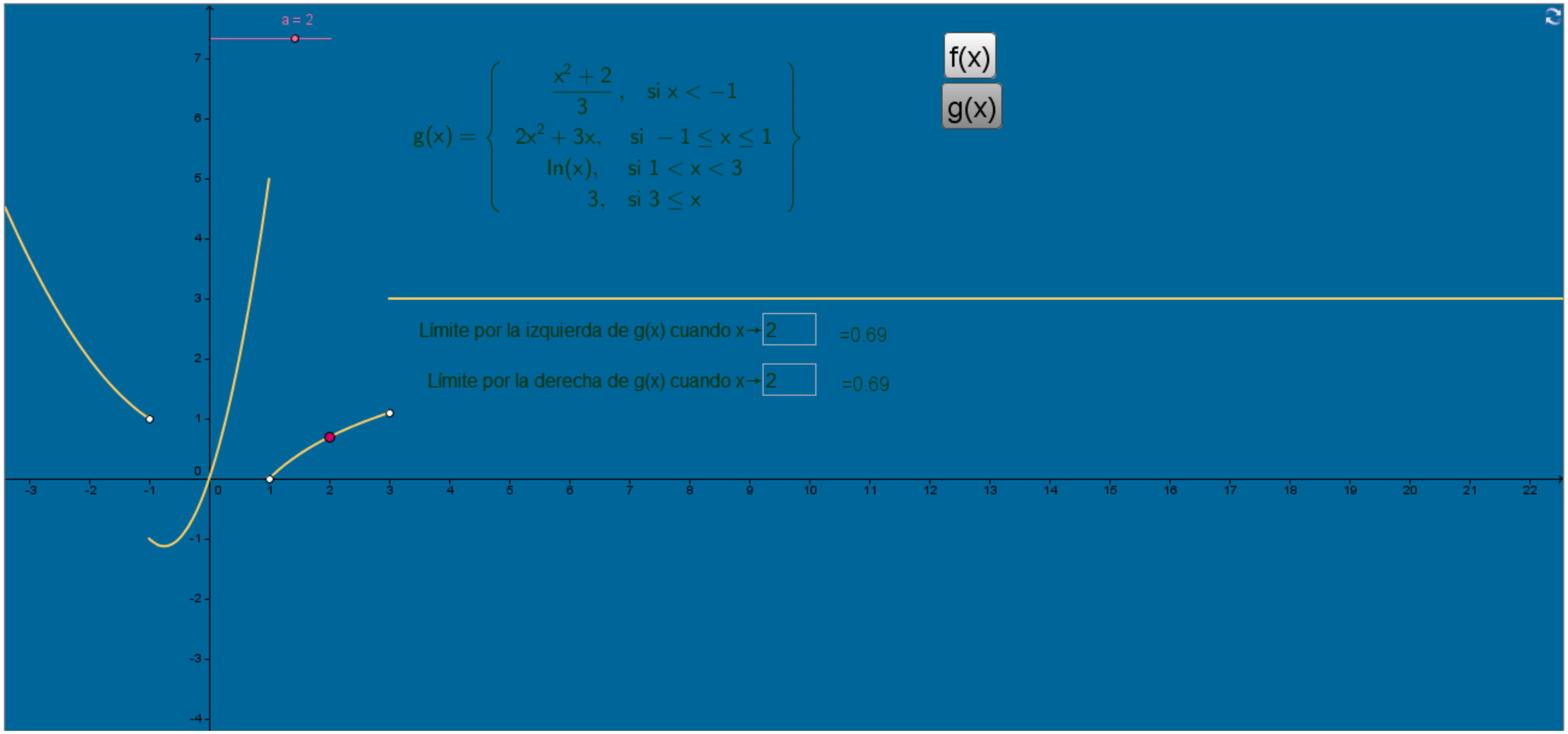
Teorema
Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en a. En otros terminos, si f tiende hacia l en a, y f tiende hacia m en a, entonces $l = m$.

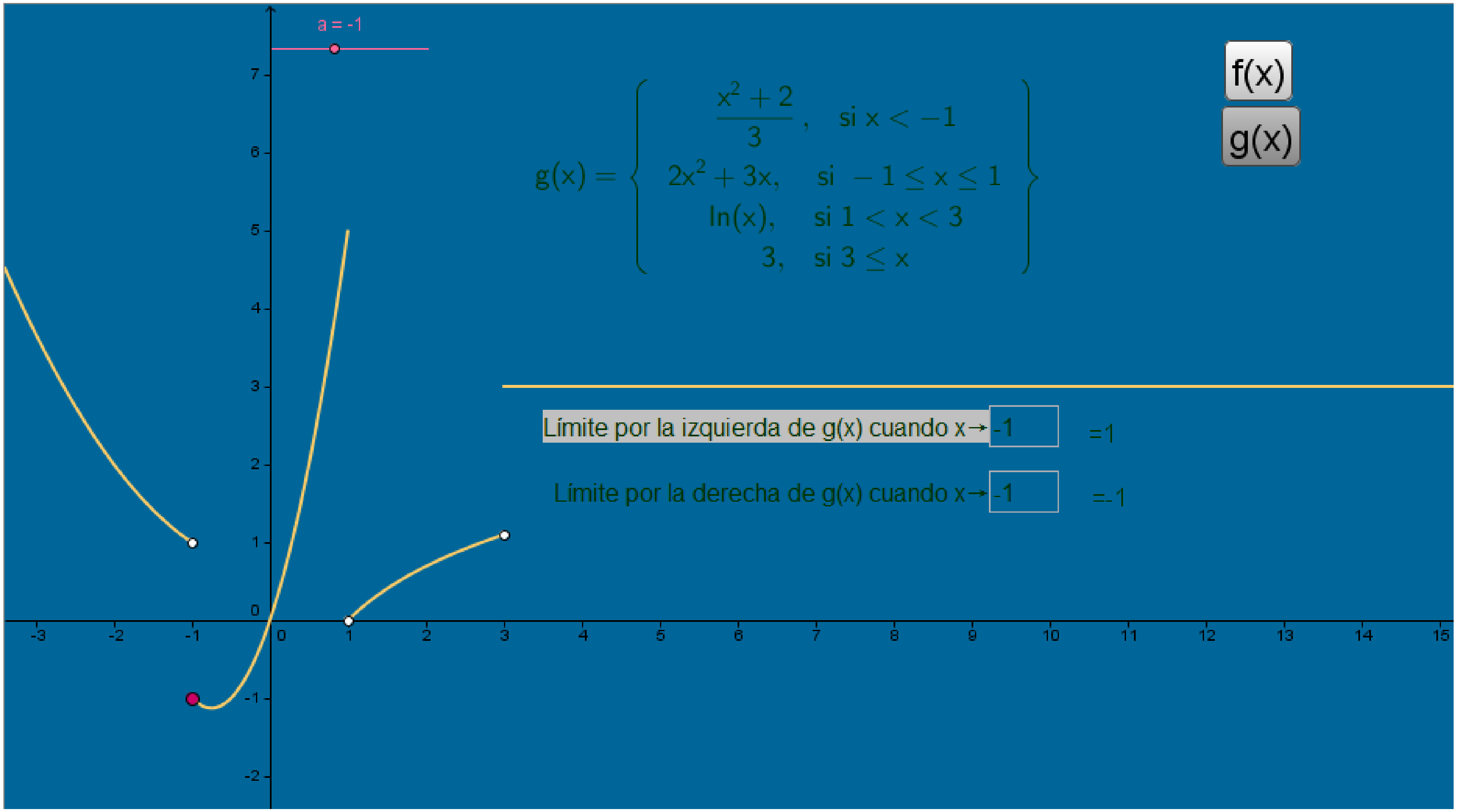
Nota:
Utiliza los botones $f(x)$ y $g(x)$ para cambiar de función.
Desliza a o introduce los valores en la casilla de entrada para obtener el valor de los límites laterales.



Actividad:
1. ¿Por qué en algunos puntos el límite de la función por la derecha y el límite de la función por la izquierda son diferentes.
2. Analiza en cuales puntos el límite de la función no existe.


a = 2
f(x)
g(x)
$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x^2, \quad si\ x < 0 \\ 2x+1, \quad si\ 0 \leq x < 2 \\ 3x-5, \quad si\ 2 \leq x \end{array} \right\}$
Límite por la izquierda de f(x) cuando x→ 2 =3
Límite por la derecha de f(x) cuando x→ 2 =1


a = 2
f(x)
g(x)
$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{3}, & \text{si } x < -1 \\ 2x^2+3x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \ln(x), & \text{si } 1 < x < 3 \\ 3, & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$
Límite por la izquierda de g(x) cuando x→ 2 =0.69
Límite por la derecha de g(x) cuando x→ 2 =0.69

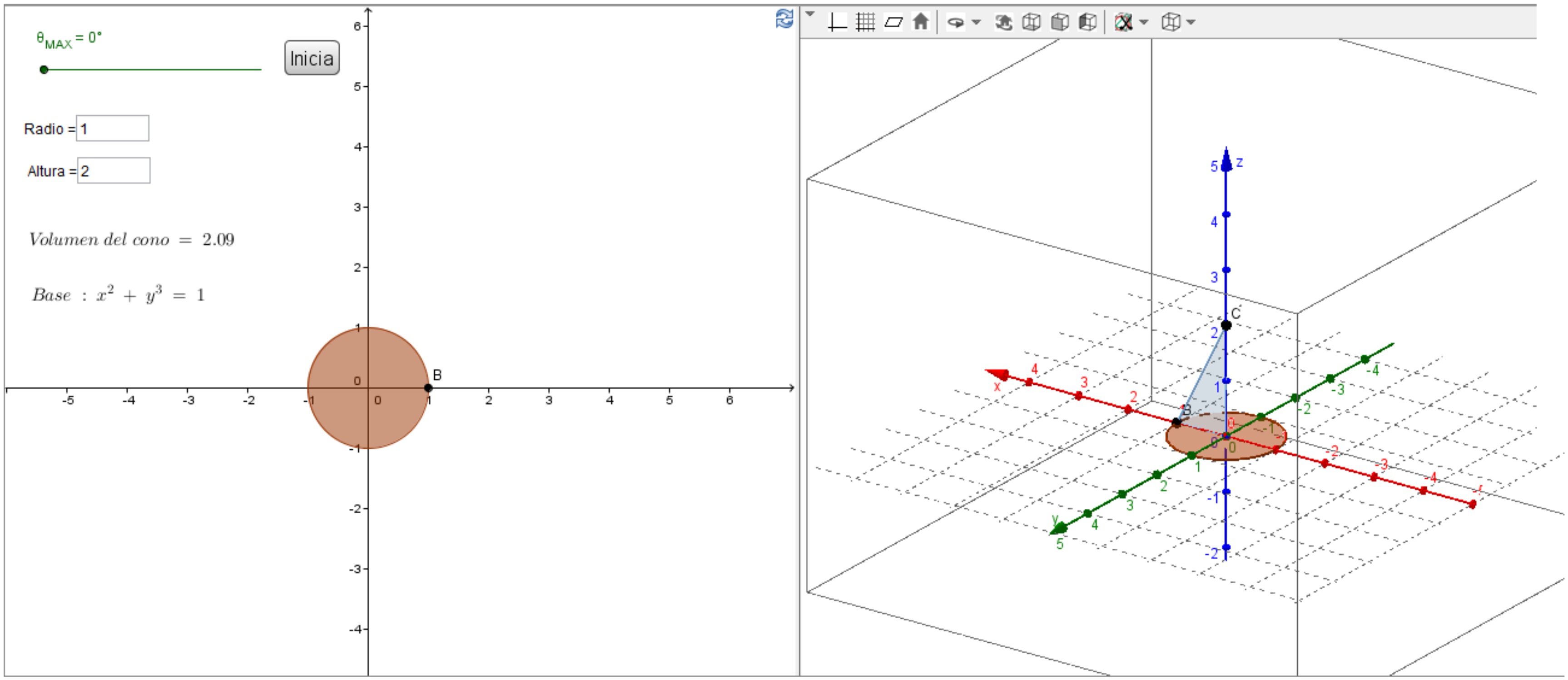

a = -1
f(x)
g(x)
$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{3}, & \text{si } x < -1 \\ 2x^2+3x, & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ \ln(x), & \text{si } 1 < x < 3 \\ 3, & \text{si } 3 \le x \end{cases}$
Límite por la izquierda de g(x) cuando x→ -1 =1
Límite por la derecha de g(x) cuando x→ -1 =-1

Sólido de Revolución (Cono)

Tenemos el triángulo rectángulo OBC

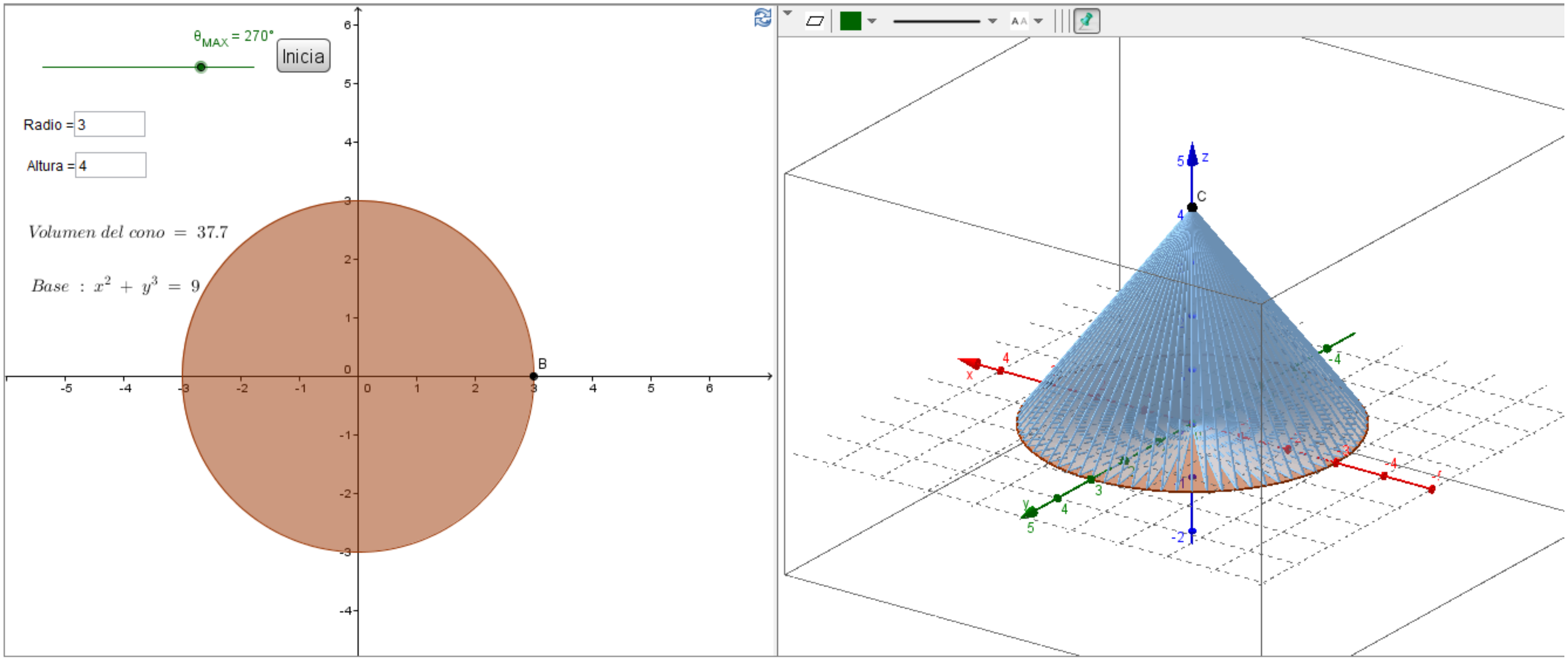
* su base tiene longitud = "Radio".
* Gira sobre el EjeZ.

El ángulo θ_{Max} incrementa en 1°.



Actividad

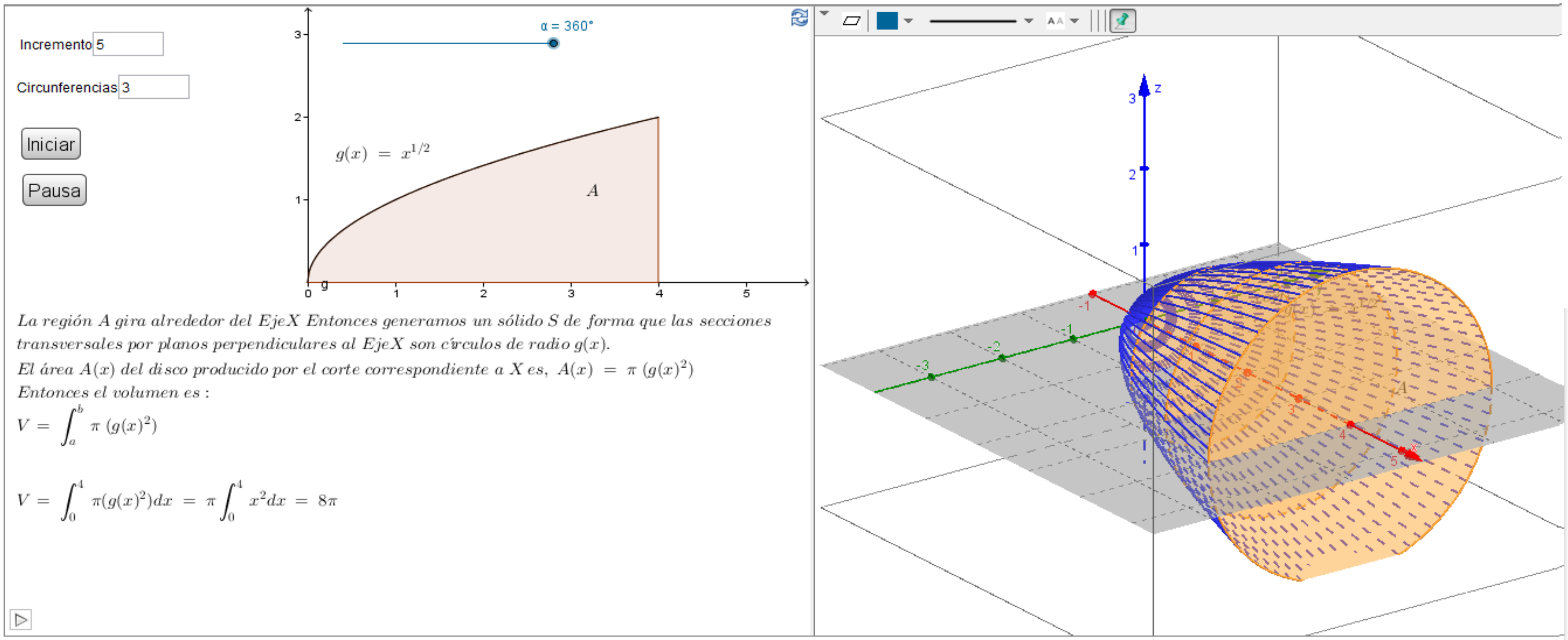
1. Desliza el ánguloθ_{Max} y observa que pasa.
2. Si el incremento de θ_{Max} tiende a 0, ¿que pasa al girar el triángulo?.
3. ¿Como podrías calcular el volumen del cono, si se conoce el área del triángulo BOC?



θMAX = 270°
Inicia
Radio = 3
Altura = 4
Volumen del cono = 37.7
Base : x² + y³ = 9
B
C

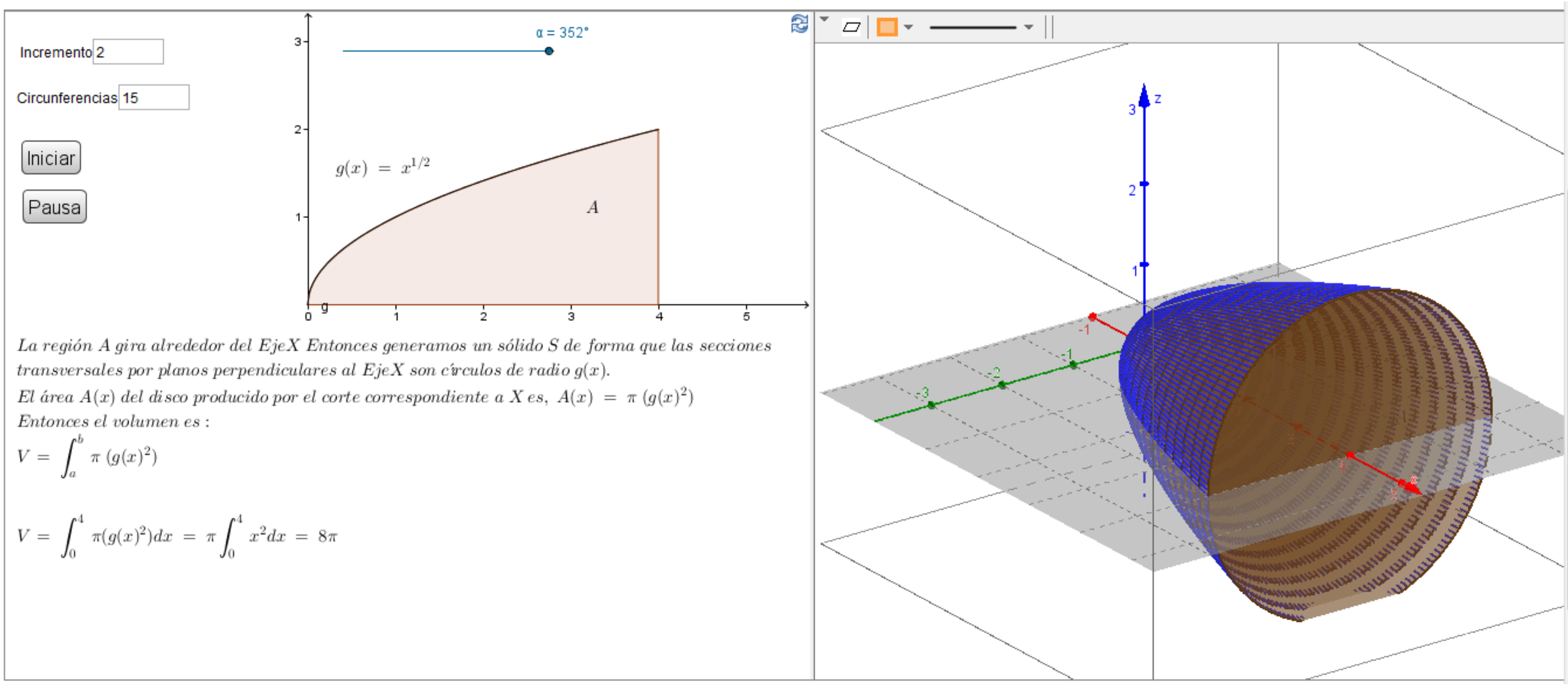
Sólido de Revolución

Una sección de un sólido S es la región plana que se obtiene cortando el sólido S con un plano.
Denotaremos por $A(x)$ al área de la sección correspondiente al punto x y consideramos una partición del intervalo $[a,b]$ $x = a, x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Aproximaremos la rodaja entre los planos correspondientes a los puntos x_{k_1} y x_k por un cilindro con área de la base $A(x_k)$.
El volumen de la rodaja será aproximadamente igual al volumen del cilindro que es $V_k = A(x_k)(x_k - x_{k-1})$
El volumen V del sólido S se puede aproximar por la suma de los volúmenes de los cilindros :
$V \approx \sum_{k-1}^{n} V_k = \sum_{k-1}^{n} A(x_k)(x_k - x_{k-1})$
Esta aproximación es una suma de Riemann de la función $A: x \in [a,b] \rightarrow A(x) \in R$ que determina el área de cada una de las secciones perpendiculares.
La aproximación del volumen mejorar cuando la partición que elegimos tienda a cero, entonces definimos el volumen del sólido S como la integral de la función $A(x)$ en el intervalo $[a,b]$.



Activida

1. Al general el sólido de revolución, en que parte se encuentra implícito el concepto de límite.
2. Al calcular el área del sólido de revolución, en que parte se encuentra implícito el concepto de límite.
3. Reflexiona y comenta la importancia del concepto de límite


Incremento 2
Circunferencias 15
Iniciar
Pausa
α = 352°
$g(x) = x^{1/2}$
A
La región A gira alrededor del EjeX Entonces generamos un sólido S de forma que las secciones transversales por planos perpendiculares al EjeX son círculos de radio $g(x)$.
El área $A(x)$ del disco producido por el corte correspondiente a X es, $A(x) = \pi\,(g(x)^2)$
Entonces el volumen es :
$V = \int_a^b \pi\,(g(x)^2)$
$V = \int_0^4 \pi(g(x)^2)dx = \pi\int_0^4 x^2dx = 8\pi$
z

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

La historia de las matemáticas permite tomar contacto con situaciones que dieron origen a la construcción de conceptos matemáticos.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, el uso de la tecnología permite que el alumno se plantee interrogantes, conjeturas, desarrolle varias estrategias, descubra y comprenda conceptos mediante la interacción, visualización y manipulación.

Esta tesis es una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, la propuesta se presenta en una página web, donde se muestra la evolución histórica de dicho concepto desde una concepción geométrica hasta la definición formal.

En la página web aparece una línea del tiempo dividida en cuatro etapas. En cada etapa se seleccionaron los personajes históricos que contribuyeron en la formalización de la definición del límite.

Se crearon varios applets, los cuales se distribuyen en la línea del tiempo. Estos applets son un recurso, que permiten al alumno explorar y visualizar el origen de los términos, lenguaje, notaciones, métodos y definiciones que fueron necesarios para llegar al estado actual. Se espera que el alumno recorra el proceso histórico de la evolución del concepto de límite de forma gráfica, aritmética y formal guiado por las actividades de análisis y reflexión de los applets.

Esta aportación será una herramienta en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas para los docentes que imparten la materia de Calculo Diferencial en nivel universitario, con el tema de límite.

ANEXO

A.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERIA
CALCULO DIFERENCIAL
Ejercicio en clase de límites

Nombre: ________________

Grupo: ______________

Fecha:

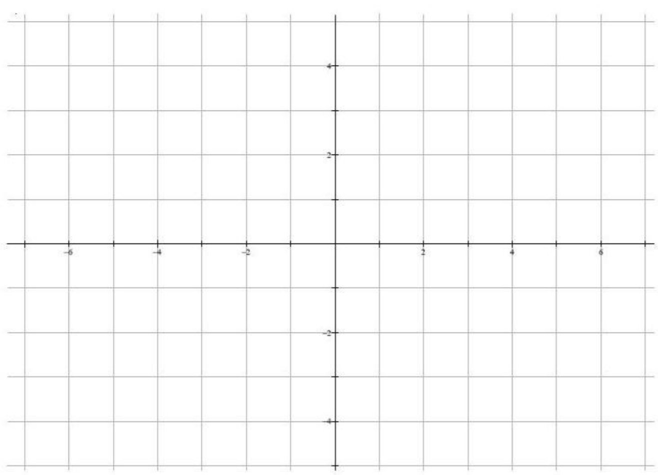
I. Definición formal. Límite de una función en un punto

Sea f una función real de variable real definida en un intervalo abierto I que contiene al punto p (excepto tal vez en p) y $L \in R$. Entonces $\lim_{x \to p} f(x) = L$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; tal\ que,\ x \in I \;\; 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

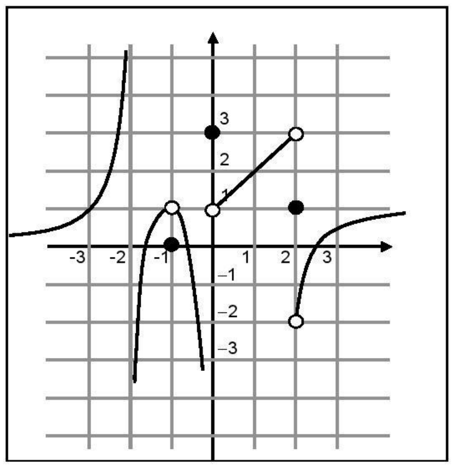
Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Debe estar la función definida en *p*? ______________
2. ¿El intervalo I debe ser abierto?__________.
3. Explica por qué ____.
4. ¿Puede *f(x)* tomar el valor *L* para alguna *x*?
5. ¿Si encuentras una δ para una cierta ε, será esa δ única?
6. Explica porqué ____.
7. Dibuja el significado de $0 < |x - p| < \delta$ Þ $|f(x) - L| < \varepsilon$ para una función que tú inventes, diciendo en tu dibujo quién es *p* y quién es *L*.



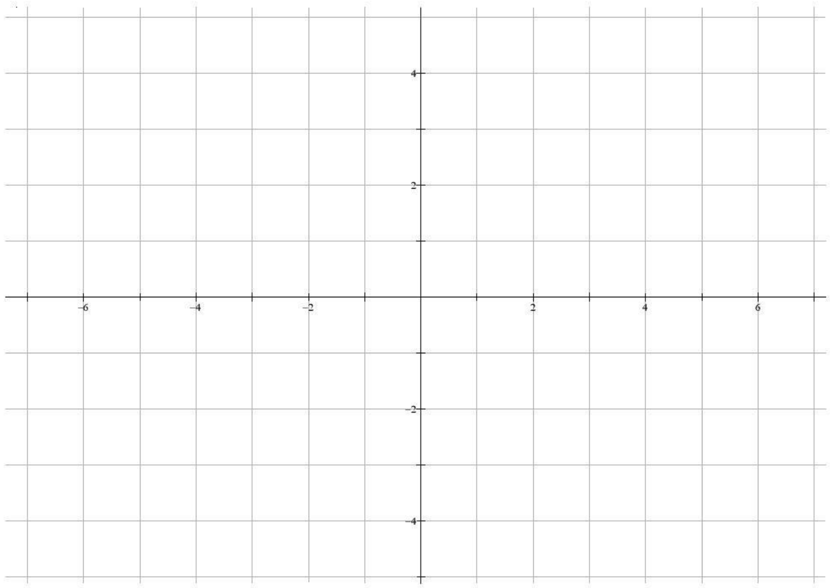
II. Visión gráfica

Para la función f cuya gráfica está dada, enuncia el valor de cada cantidad, si existe.		
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$	b) $f(-2) =$	c) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$
d) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$	e) $\lim_{x \to -2} f(x) =$	f) $\lim_{x \to -1} f(x) =$
g) $f(-1) =$	h) $f(0) =$	i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$
j) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$	k) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$	l) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$
m) $f(2) =$	n) $\lim_{x \to \infty} f(x) =$	o) Da las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.



III. Intuición gráfica

Inventa una función que tenga las siguientes características:		
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$	$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$	$\lim_{x \to 3} f(x) =$ ¥	$\lim_{x \to \infty} f(x) =$ ¥



3

De los trabajos se eligieron los siguientes dos:

7

José Luis Mejia Montoya
José Cesar Baez Camacho

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERIA
CALCULO DIFERENCIAL
Ejercicio en clase de límites

Nombre: José Ángel Ledezma Balb

Grupo: 13

Fecha: 23/05/ 2013

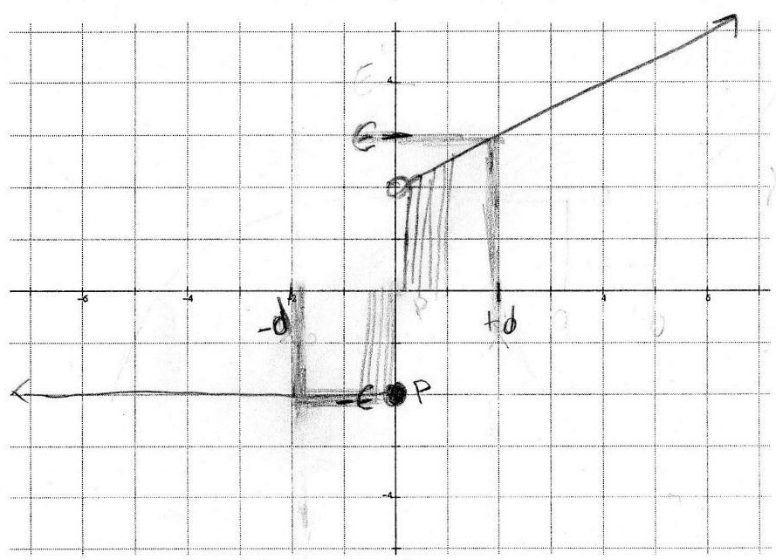
I. Definición formal. Límite de una función en un punto

Sea *f* una función real de variable real definida en un intervalo abierto I que contiene al punto p (excepto tal vez en p) y $L \in R$. Entonces $\lim_{x \to p} f(x) = L$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; tal\ que, \; x \in I \; 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Responde las siguientes preguntas:

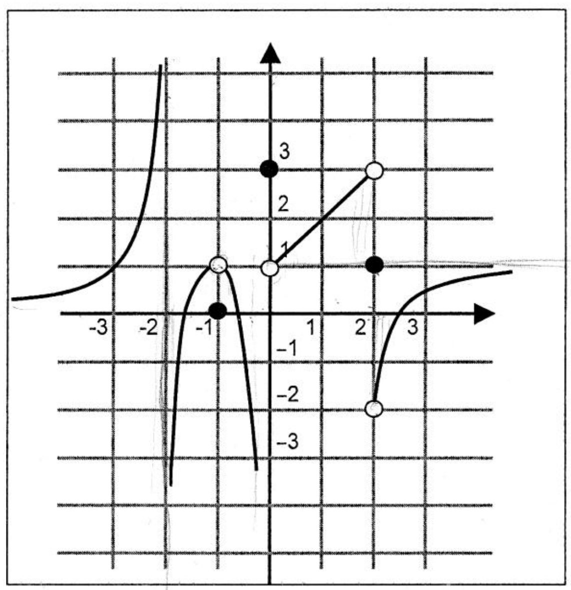
1. ¿Debe estar la función definida en *p*? No
2. ¿El intervalo I debe ser abierto? No debe ser cerrado
3. Explica por qué nos dice que en el intervalo I debe estar contenido P.
4. ¿Puede *f(x)* tomar el valor *L* para alguna *x*? Si
5. ¿Si encuentras una δ para una cierta ε, será esa δ única? Si
6. Explica porqué porque a la funcion a cada "X" le pertenece una Y.
7. Dibuja el significado de $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ para una función que tú inventes, diciendo en tu dibujo quién es *p* y quién es *L*.



7

II. Visión gráfica

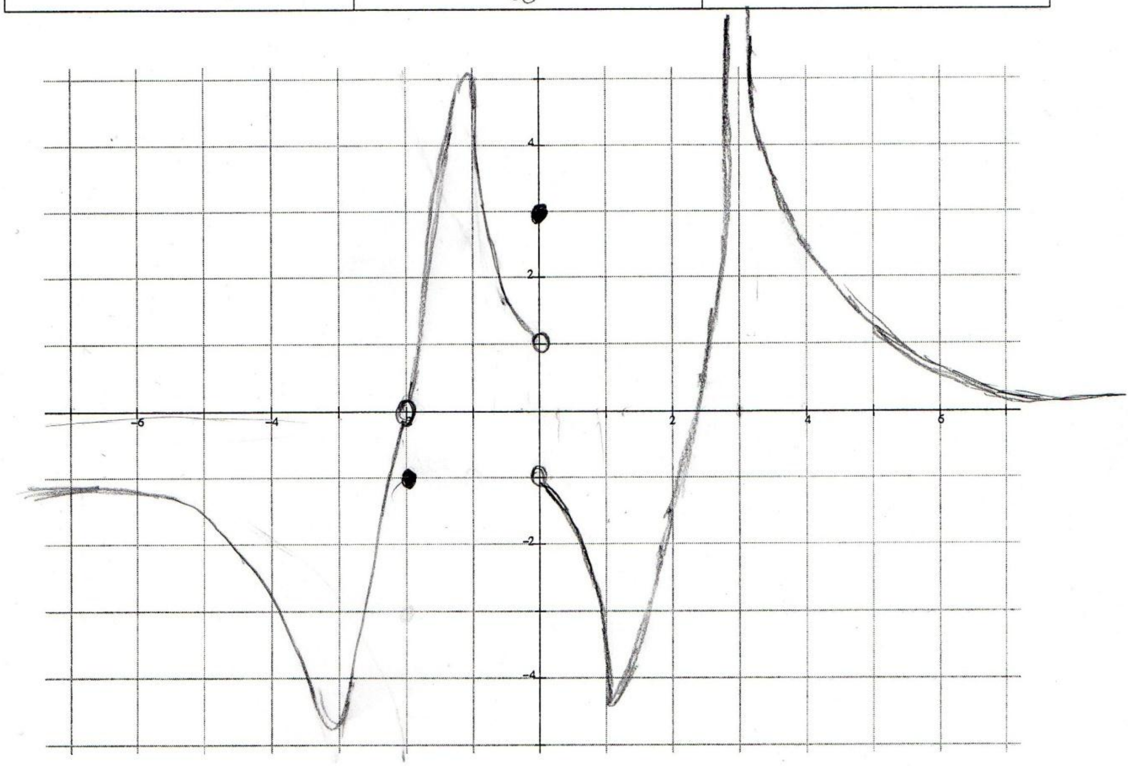
Para la función f cuya gráfica está dada, enuncia el valor de cada cantidad, si existe.		
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ 0	b) $f(-2) =$ no existe	c) $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ ∞
d) $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ $-\infty$	e) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ no existe	f) $\lim_{x \to -1} f(x) =$ 1
g) $f(-1) =$ 0	h) $f(0) =$ 3	i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ $-\infty$
j) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ 1	k) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ 3	l) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ -2
m) $f(2) =$ 1	n) $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ 1	o) Da las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales. Verticales: $x = -2$, $x = 0$ Horizontales: $y = 0$, $y = 1$



(7)

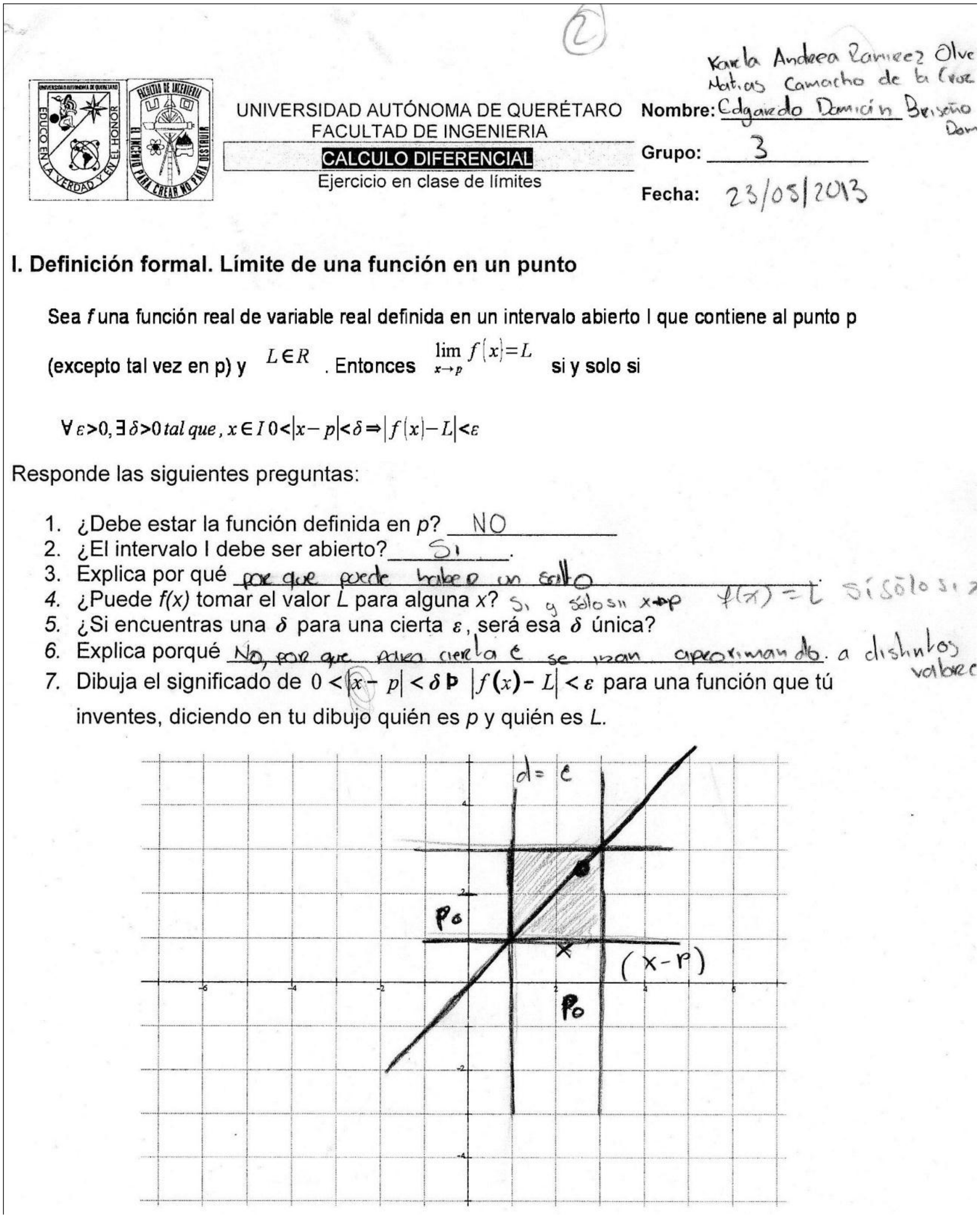
III. Intuición gráfica

Inventa una función que tenga las siguientes características:		
$\lim_{x \to -} f(x) = -1$	$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$	$\lim_{x \to 3} f(x) =$ ¥ ∞	$\lim_{x \to -} f(x) =$ ¥ ∞



Este fue el trabajo con mayor número de aciertos, aunque la definición formal como tal no la comprenden, pues creen que la función no puede estar definida en *p*.

El siguiente ejercicio es el que obtuvo el menor número de aciertos.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERIA
CALCULO DIFERENCIAL
Ejercicio en clase de límites

Nombre: Karla Andrea Ramirez Olve... Matias Camacho de la Cruz, Edgardo Damián Briseño Dom...

Grupo: 3

Fecha: 23/05/2013

I. Definición formal. Límite de una función en un punto

Sea f una función real de variable real definida en un intervalo abierto I que contiene al punto p (excepto tal vez en p) y $L \in R$. Entonces $\lim_{x \to p} f(x) = L$ si y solo si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que*, $x \in I \; 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Responde las siguientes preguntas:

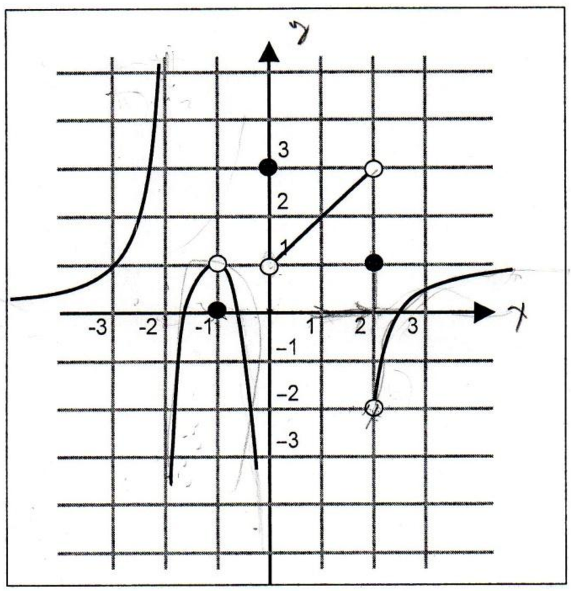
1. ¿Debe estar la función definida en *p*? NO
2. ¿El intervalo I debe ser abierto? Si.
3. Explica por qué por que puede haber un salto. Sí sólo si...
4. ¿Puede *f(x)* tomar el valor *L* para alguna *x*? Si y sólo si $x \to p$ $f(x) = L$
5. ¿Si encuentras una δ para una cierta ε, será esa δ única?
6. Explica porqué No, por que para cierta ε se van aproximando a distintos valores
7. Dibuja el significado de $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ para una función que tú inventes, diciendo en tu dibujo quién es *p* y quién es *L*.

II. Visión gráfica

Para la función f cuya gráfica está dada, enuncia el valor de cada cantidad, si existe.		
a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$ ∞ −∞	b) $f(-2) =$ −2	c) $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$ no existe
d) $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$ 1	e) $\lim_{x\to -2} f(x) =$ no existe	f) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ −1
g) $f(-1) =$ −1	h) $f(0) =$ 0	i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ 0
j) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ 1	k) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ −2	l) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ 3
m) $f(2) =$ 2	n) $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ ∞	o) Da las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

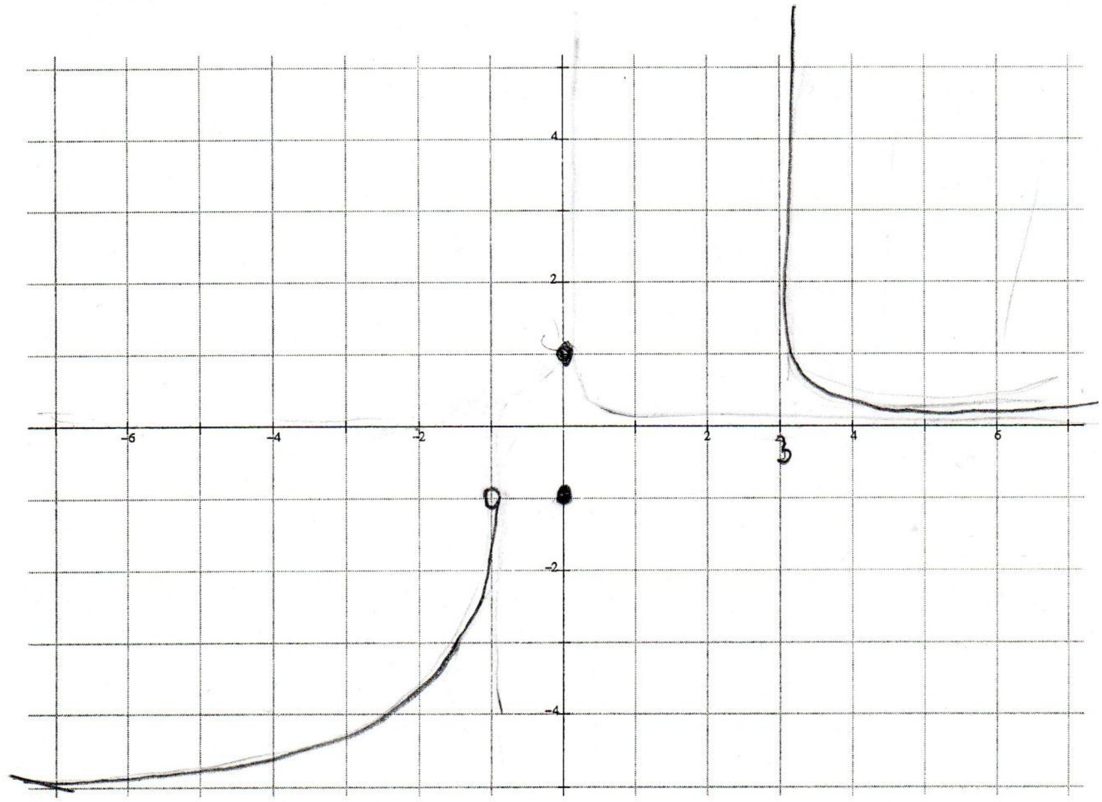
a)

(−1,1)



III. Intuición gráfica

Inventa una función que tenga las siguientes características:		
$\lim_{x - - -} f(x) = -1$ x	$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$ x	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$ x	$\lim_{x \to 3} f(x) =$ ¥	$\lim_{x - -} f(x) =$ ¥ infinito



B.

Se anexa un CD con todos los applets expuestos en la tesis, para que el alumno pueda hacer uso de ellos.

El CD contiene el procedimiento y las especificaciones que deberá seguir el usuario para utilizar los applets de forma adecuada.

REFERENCIA Y BIBLIOGRAFÍA

[1] Alfaro, A.; Alpízar, M; Arroyo, J.; Gamboa, R.; Hidalgo, M. (2004). Enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica: Elementos para un Diagnóstico. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

[2] Arcavi, A. 2000. Computer Mediated Learning: An Example of An Approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning. Disponible: http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/visualizacio/arcavi_computer.pdf

[3] Avolio. S. 2006. Enseñar y evaluar en formación por competencias laborales. Conceptos y orientaciones metodológicas. Buenos Aires, Argentina.

[4] Biggs. J. 1999. Lo que los estudiantes llevan a cabo: Enseñar para acrecentar el aprendizaje. Higher Education. Research &Devolopment.

[5] Boyer Carl B. 1949. The History of the Calculus and its Conceptual Development: (The Concepts of the Calculus), New York: Dover.

[6] Bromberg S. 2001. Fermat y el Cálculo Diferencial e Integral. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana. México. Disponible: http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/bromberg.pdf

[7] Coll, E. M. 2007. El constructivismo en el aula, Editorial Graó, de IRIF, S.L.C Barcelona. Disponible: http://books.google.es/books?id=BzOef9UlDb4C&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[8] Cantoral, R. (Ed.) 2000. El futuro del Cálculo Infinitesimal. Congreso Internacional de Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. ICME-8, Sevilla, España.

[9] Cataldi Z., Lage F. 2011. Libro de artículos completos JEIN 2011: I Jornada de Enseñanza de la Ingeniería. Primera edición. Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional. Disponible: http://www.utn.edu.ar/secretarias/scyt/jornadaJEI2011.utn

[10] Collette, J. 1998. Historia de las Matemáticas I. Tercera edición. Siglo Veintiuno. España.

[11] Collette, J. 1998. Historia de las Matemáticas II. Tercera edición. Siglo Veintiuno. España.

[12] Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 2, New York. Disponible: http://www.citejournal.org/vol2/iss3/seminal/seminalarticle1.pdf

[13] Contreras A., García M. 2011. Significados Pretendidos y Personales en un Proceso de Estudio con el Límite de una Función. Reviste Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México. Disponible: http://scielo.unam.mx/pdf/relime/v14n3/v14n3a2.pdf

[14] Contreras de la Fuente, García Armenteros. 2012. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. Font Moll. Boletim de Educação Matemática, vol. 26, núm. 42 B. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Brasil. Disponible: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574013

[15] Fauve J. 1987. The History of Mathematics: a Reader, John Fauve, Ed. Jeremy Gray. USA: The Open Universit.

[16] Fuglestad, A. 2004. ICT tools and student's competence development. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Agder University College. Dispobible: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR080_Fuglestad.pdf

[17] Fuglestad, A. 2005 Student´s choice of tasks and tools in an ict rich environment. Agder University College, Norway. Cerme 4. Dispobible: http://home.uia.no/annebf/Articles/

[18] Fuglestad. 2007 Developing taskx and teaching with ict in Mathematics in an inquiry community. Agder University College. Cerme 5. Dispobible: http://home.uia.no/annebf/Articles/

[19] Gamboa, R. 2007. Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática .Año 2. Número 3. Universidad de Costa Rica. Disponible: http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem

[20] Gómez P. 1996. Una comprensión de la comprensión matemática, Revista EMA. Universidad de los Andes, Bogotá Colombia. Disponible: http://funes.uniandes.edu.co/315/1/GomezP96-1590.PDF

[21] González P. 2004. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer Culturalmente su enseñanza. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Revista Suma. Catalunya, España. http://revistasuma.es/revistas/45-febrero-2004/

[22] González P. 2008. La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. Revista Sigma. San Josep de Calassanç, Barcelona.

[23] Handal, B., & Herrington, A. (2003). Re-examining categories of computer-based learning in mathematics education. Contemporary Issues in Technology and Teacher . University of Wollongong, Australia. Disponibñe: http://www.citejournal.org/vol3/iss3/mathematics/article1.cfm

[24] Hofmann J. 1978. Historia de las Matemáticas 2. Unión Tipográfica Editorial Hispano-América. México.

[25] http://geogebra.es/cvg/manual/index.html

[26] http://gerardopatinovaron.wordpress.com/3-4-3-geogebra-mediador-para-el-aprendizaje-matematico/

[27] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

[28] http://www.cabri.com/es/

[29] Katz J. 1998. History of Mathematics: an introduction. Second Edition, Adison-Wesley, Massachusetts.

[30] López V. 1998. Historia de los inicios la enseñanza del Cálculo Infinitesimal en México: 1785-1867. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1, número 002. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México. Disponible: http://redalyc.uaemex.mx

[31] Luehrmann, A. (2002). Should the computer teach the student, or vice-versa? Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 2, New York. Disponible: http://www.citejournal.org/vol2/iss3/seminal/seminalarticle1.pdf

[32] Martin, W. (2000). Lasting effects of the integrated use of graphing technologies in precalculus mathematics. In E. Dubinsky; A. Schoenfeld; J. Kaput (Eds.), CBMS Issues in Mathematics Education. Mathematical Association of America, Washington. http://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=knYjqCFRhlkC&oi=fnd&pg=PA154&dq=related:nGUDv4mCIp01xM:scholar.google.com/&ots=SB1pa6gwxo&sig=zm8_GCtqo3hdSe0aDFCy05eW4GQ#v=onepage&q&f=false

[33] Martínez M. Chvarria J. 2001. Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. VIII Festival Internacional de Matemática. Universidad Nacional, Liberia, Costa Rica. http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Margot-Martinez3.pdf

[34] Memorias del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática. Libro electrónico. Toluca, México. Dispobible: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Volumen_71.pdf

[35] Meza L. 2013. La teoría de la práctica educativa: Una perspectiva desde la experiencia de docente graduados/as de la carrera “Enseñanza de la Matemática asistida por computadora”. Revista Virtual “Matemáticas, Educación e Internet”. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V13_N1_2012/RevistaDigital_Meza_V13_n1_2012/index.html

[36] NCTM, 2000. The role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics, a Position of the National Council of Teachers of Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Technology%20final.pdf

[37] Ochoviet C. 2008. Historia e historietas en la clase de matemáticas. Instituto de Profesores “Artigas” Montevideo. Uruguay. Revista Premisa. Disponible: http://soarem.org.ar/Documentos/36%20Ochoviet.pdf

[38] Páez R. 2004. Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN. DF, México.

[39] Pea R. 1985. Beyond Amplitication, Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. Center for Children and Technology. Educational Psychologist. Vol 20, No. 4, 167-182. http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/05/36/PDF/A26_Pea_85a.pdf

[40] Purcell, Edwin J. 2007. Cálculo, 8a. Edición. Pearson Educación. México.

[41] Rojas, L., Esteban, P. 2010. Applets como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo vectorial. Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática. Colombia. http://www.iiis.org/CDs2010/CD2010CSC/SIECI_2010/index.asp

[42] Ruiz A. 2002. Historia y Filosofía de las Matemáticas. Editorial EUNED, Madrid.

[43] Salat R. 2009 La evolución de la tecnología computacional y su relación con la educación matemática. Revista Números Vol. 71. Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN, México, DF. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_01.pdf

[44] Salat, R.S. 2007. "La programación como una herramienta para estudiantes de Matemáticas". Memorias del XVIII Simposio Iberoamericano de la Enseñanza Matemática. México, DF. http://www.sinewton.org/numeros/

[45] Smith D. 1958. History of Mathematics, Volume I. Dover. New York.

[46] Smith D. 1958. History of Mathematics, Volume II. Dover. New York.

[47] Stewart . J. 2001. Cálculo de una variable, Cuarta Edición. International Thomson. México.

[48] UNESCO. 1998. Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el Siglo XXI: visión y acción". Conferencia Mundial sobre la Educación Superior. París. Disponible: http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf

[49] Vega Gil, Leoncio. 2010. El proceso de Bolonia y la educación comparada. Míradas críticas. Universidad de Salamanca. España.

[50] Verónica Molfino Vigo, Gabriela Buendía Abalos. 2010. El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institución. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, ISSN (Versión electrónica): 1850-6666 vol. 5, núm. 1. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Disponible: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002

[51] Vilchez E. 2006. Impacto de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación para la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Centro de Investigación y Docencia educativa. Disponible: http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV7_n2_2006/IMPACTO/ImpactoNuevasTec.pdf

[52] Vrancken, Gregorini. 2006. Dificultades Relacionadas con la Enseñanza y el Aprendizaje del Concepto de Límite, Revista Premisa. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral, Esperanza. Prov. de Santa Fe, Argentina. Disponible: http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

[53] Wussin H. 1998. Lecciones de Historia de las Matemáticas, H. Wussin, Siglo XXI de España Editores, S. A.Morris Kline. Madrid.

[54] www.scilab.org

[55] Zapico, I. 2006. Enseñar matemática con su historia. Escuela Normal Superior. Revista Premisa. Buenos Aires, Argentina. Disponible: http://soarem.org.ar/Documentos/29%20Zapico.pdf