



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS MULTIFRACTAL Y MODELACIÓN DE LA PRECIPITACIÓN

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

(Simulación Analítica y Experimental de Sistemas Físicos)

Presenta

M en C. ALVARO ALBERTO LÓPEZ LAMBRÑO

Dirigida por

Dr. CARLOS FUENTES RUIZ

Santiago de Querétaro, Qro. México, Abril 26 de 2012



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS MULTIFRACTAL Y MODELACIÓN DE LA PRECIPITACIÓN

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

(Simulación Analítica y Experimental de Sistemas Físicos)

Presenta

M en C. ALVARO ALBERTO LÓPEZ LAMBRAÑO

Dirigida por

Dr. CARLOS FUENTES RUIZ

Sinodales

Dr. Carlos Fuentes Ruiz
Presidente

Firma

Dr. Enrique González Sosa
Secretario

Firma

Dr. Eduardo Álvarez Mendiola
Vocal

Firma

Dr. Domingo Gómez Meléndez
Suplente

Firma

Dr. Luis Rendón Pimentel
Suplente

Firma

Dr. Aurelio Domínguez
Director de la Facultad

Dr. Jined Torres Pacheco
Director de Investigación de Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Noviembre 2007
México

RESUMEN

Las teorías de escala se basan en que un proceso exhibe un mismo comportamiento a diferentes escalas de estudio (siempre dentro de un rango determinado de escalas), es decir, se caracteriza por no tener una escala característica. La teoría de los fractales, y su posterior evolución hacia la teoría de los multifractales, estudia matemáticamente esta invarianza de escala, y se utiliza para describir fenómenos muy complejos con simples leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Los multifractales describen procesos para los que se necesitan múltiples exponentes de escala. En el caso de la temperatura y la precipitación, la teoría fractal solo serviría para analizar su ocurrencia. Sin embargo, al ser la temperatura y la lluvia un proceso no lineal muy variable en un amplio intervalo de escalas temporales, se hace necesario el uso de la teoría multifractal. Esta última teoría permite estudiar procesos no lineales que exhiben diferentes niveles de intensidad.

Palabras clave: Análisis multifractal, leyes potenciales, teoría de escala

SUMMARY

Climate can be described by statistical analysis of mean values of atmospheric variables over a period. It is possible to detect correlations in climatological time series and to classify its behavior. In this work the Hurst exponent, which can characterize correlation and persistence in time series, will be obtained by using the Multifractal Analysis. Data series of temperature and precipitation will be studied. Furthermore, the multifractality of such series will be analyzed applying the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis method.

keywords: Multifractal analysis, Rainfall and Temperature series, Fractals.

INDICE

	Pag.
INTRODUCCIÓN	1
JUSTIFICACIÓN	5
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	5
OBJETIVOS	8
1. CICLO HIDROLÓGICO	9
1.1 Balance hidrológico	
1.1.1 Ecuación de balance hídrológico	
1.2 Curvas Intensidad – Duración – Frecuencia	
1.3 Evapotranspiración	
1.3.1 Evapotranspiración potencial	
1.3.2 Evapotranspiración real (Tierra)	
1.3.3 Evapotranspiración real (Satélite)	
1.4 Flujo del agua en el suelo y zona no saturada	
1.5 La intercepción de precipitaciones	
1.6 Efecto de la intercepción por la cubierta vegetal en la relación Intensidad, Duración y Frecuencia (IDF) de la precipitación en una zona semiárida.	
1.6.1 Resultados y discusión	
1.6.2 Efecto de la intercepción en los escurrimientos de una cuenca	
1.6.3 Conclusiones	
2. SERIES DE TIEMPO	42

2.1	Introducción	
2.1.1	Estado del arte	
2.2	Series de tiempo	
2.2.1	Media	
2.2.2	Varianza	
2.2.3	Desviación Estándar	
2.2.4	Coeficiente de Variación	
2.2.5	Coeficiente de Asimetría	
2.2.6	Coeficiente de Curtosis	
2.2.7	Covarianza y Correlación	
2.2.8	Transformación y normalización de datos	
2.3	Modelos Univariados	
2.4	Identificación de modelos	
3.	ANÁLISIS FRACTAL	73
3.1	Introducción	
3.1.1	Estado del arte	
3.2	Sobre la estacionariedad	
3.2.1	Función de autocovarianzas y de autocorrelación	
3.3	Elementos de la geometría fractal	
3.4	Análisis geoestadístico	
3.4.1	Semivariogramas	
3.4.1.1	Modelo semiesférico	
3.4.1.2	Modelo exponencial	
3.4.1.3	Modelo gaussiano	
3.4.1.4	Modelo lineal	
3.4.2	Semivariograma cruzado	
3.5	Análisis fractal clásico	

- 3.5.1 Gráficas de funciones
- 3.5.2 Semivariograma de funciones fractales
- 3.5.3 Autocorrelación de funciones fractales
- 3.5.4 Espectro de potencia de funciones fractales
- 3.5.5 Análisis de rango reescalado
- 3.5.6 Ondoletas
- 3.5.7 Filtro de Kalman

3.6 La entropía

- 3.6.1 La entropía de Boltzmann
- 3.6.2 La entropía de información
- 3.6.3 Entropía de Rényi

3.7 Medidas multifractales

3.8 Análisis multifractal de fluctuaciones (MF-DFA)

4. APLICACIONES HIDROLÓGICAS

125

4.1 Información disponible

4.2 Modelación de la precipitación con modelos autorregresivos

- 4.2.1 Modelación Anual de la precipitación
- 4.2.2 Modelación mensual de la precipitación

4.3 Sobre el cambio climático

- 4.3.1 Análisis de tendencias de temperatura y precipitación
- 4.3.1 Análisis de tendencias de temperatura y precipitación
- 4.3.2 Análisis fractal para la variable temperatura y precipitación

4.4 Una aplicación para estudiar el exponente de Hurts en una cuenca

4.5 Aplicaciones multifractales método MF-DFA

4.7 Conclusiones

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

157

INTRODUCCIÓN

La forma y la cantidad de precipitación dependen de múltiples factores climáticos, como el viento, la temperatura y la presión atmosférica, entre otros. Por todo ello, la precipitación exhibe una alta variabilidad tanto en el tiempo como en el espacio. Así, la precipitación puede oscilar desde pequeñas células asociadas a fenómenos de tipo convectivo, hasta áreas más extensas afectadas por sistemas frontales. Las primeras se extienden sobre pequeñas áreas de entre 1 y 10 km² y suelen tener pequeñas duraciones, mientras que las segundas cubren áreas más extensas, del orden de 100 km² y pueden durar incluso varios días (de Lima, 1998).

De esta forma el modelado y la predicción de la naturaleza variable de la precipitación es uno de los objetivos fundamentales de muchas investigaciones llevadas a cabo en los últimos años. La mayor parte de los estudios se han orientado hacia el entendimiento de todos los mecanismos físicos que generan la lluvia y a la incorporación de su dinámica en los modelos estocásticos de precipitación. La alta variabilidad de la lluvia ha inducido al estudio de sus diferentes escalas de forma independiente, lo que desemboca en un uso restringido de los citados modelos. Sin embargo, la mezcla de escalas es frecuente en hidrología, donde suele trabajarse con datos pertenecientes a pequeñas escalas temporales para obtener estimaciones correspondientes a escalas temporales más elevadas. Modelos y teorías desarrolladas en laboratorio se aplican a escalas superiores, y modelos de gran escala se utilizan a veces para hacer predicciones de pequeña escala. Por lo tanto, se extrapola información entre diversas escalas, lo que hace necesario conocer si un determinado fenómeno se mantiene al aumentar o disminuir su dimensión de estudio.

Las teorías de escala se basan en que un proceso exhibe un mismo comportamiento a diferentes escalas de estudio (siempre dentro de un rango determinado de escalas), es decir, se caracteriza por no tener una escala característica. La teoría de los fractales, y su posterior evolución hacia la teoría de los multifractales, estudia matemáticamente esta invarianza de escala, y se utiliza para describir fenómenos muy complejos con simples leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Los multifractales describen procesos para los que se necesitan múltiples exponentes de escala. En el caso de la lluvia, la teoría fractal solo serviría para analizar su ocurrencia. Sin embargo, al ser la lluvia un proceso no lineal muy variable en un amplio intervalo de escalas temporales, se hace necesario el uso de la teoría multifractal. Esta última teoría permite estudiar procesos no lineales que exhiben diferentes niveles de intensidad.

La multifractalidad como teoría para completar la descripción de las series temporales de lluvia, ha sido una teoría ampliamente estudiada en las últimas décadas (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Ladoy *et al.*, 1993; Fraedrich y Larnder, 1993; Over y Gupta, 1994; Svensson *et al.*, 1996; Tessier *et al.*, 1993, 1996; de Lima y Grasman, 1999; Kiely e Ivanova, 1999; Sivakumar, 2001; Veneziano y Furcolo, 2002; Labat *et al.*, 2002; Olsson y Burlando, 2002; Kantelhardt *et al.*, 2006; García-Marín *et al.*, 2007).

Tanto la aplicación de la teoría de la multifractalidad como de la criticalidad autoorganizada a todos los aspectos relacionados con la precipitación, permiten aumentar el conocimiento de este fenómeno tan variable, de forma que se puedan mejorar sus aplicaciones en hidrología, como es el caso de las curvas intensidad-duración-frecuencia (IDF). El estudio de estas relaciones y su análisis multifractal puede encontrarse en múltiples trabajos (e.g. Veneziano y Furcolo, 2002, Veneziano *et al.*, 2006, Langousis y Veneziano, 2007).

Cabe resaltar que la mayoría de los modelos empíricos utilizados actualmente son modelos estocásticos que están basados en la teoría de la probabilidad para realizar la representación de la incertidumbre (Fortin *et al.*, 1997). Estos modelos se vienen utilizando desde el año 1926; Yule (1926, 1927) fue quien describió los modelos lineales autorregresivos (AR), para que continuara Slutsky (1937) y propusiera los modelos lineales de promedios móviles (MA); posteriormente Wold (1954) explica los modelos mixtos o modelos lineales autorregresivos de promedios móviles (ARMA).

Box y Jenkins (1976) continúan con el desarrollo y aplicación de modelos estocásticos, ampliamente utilizados en la hidrología. Éstos comprenden los modelos AR, MA, ARMA, los modelos periódicos ARMA (PARMA) y los modelos ARMA con entradas auxiliares (ARMAX), que permiten generar grandes series sintéticas de tiempo. Se puede decir que una de las herramientas más utilizadas en la modelación hidrológica y en la mayoría de los procesos del ciclo hidrológico es sin duda los modelos estocásticos de tipo autorregresivo ARMA.

Debido a la versatilidad, aplicabilidad y confianza, el empleo de los modelos autorregresivos se ha aplicado fundamentalmente a procesos hidrológicos estacionales univariados (Salas *et al.*, 1980, 1982; Obeysekera y Salas, 1986; Haltiner y Salas, 1988; Ula, 1990; Padilla *et al.*, 1996). Estos modelos univariados se basan en el análisis de la estructura estocástica de una serie temporal con el objeto de pronosticar a corto plazo, completar datos y generar series sintéticas que conserven los principales estadísticos y la correlación temporal de la serie original.

Por otro lado los modelos autorregresivos de promedios móviles (ARMA) se han utilizado para el desarrollo y estudio de modelos multivariados que han permitido

modelar series de tiempo de precipitaciones a diferentes escalas temporales, permitiendo estudiar el comportamiento de las variaciones (Srikanthan y McMahon, 1985, 2001; Chapman, 1997; Sharma, 1999; Wang y Nathan, 2002; Ünal *et al.*, 2004; Srikanthan 2004, 2005, 2006); estos modelos clásicos multivariados han sido diseñados para preservar la autocorrelación y autocorrelación cruzada (Salas *et al.*, 1980; Bras y Rodriguez-Iturbe, 1985; Cox *et al.*, 1994).

Dadas las diferentes aplicaciones, los modelos autorregresivos se han convertido en una herramienta global para la realización de pronósticos y estudio de variables climáticas; como por ejemplo factores relacionados con el fenómeno del Niño y cambio climático (Alfaro y Cid 1999; Piwowar y Ledrew, 2002; Quispe, 2007; Carvajal, 2005), así mismo las aplicaciones en variables hidrológicas también han sido satisfactorias (Spolia, 1972, Spolia y Chander, 1973, 1980; Mohammadi *et al.*, 2006; Chao *et al.*, 2008).

Finalmente existen algunos cuestionamientos en la forma de identificación del modelo, estimación de parámetros y otros efectos al realizar incrementos de tiempo; por tal motivo se han realizado investigaciones que examinan y evalúan dichos aspectos, basándose en los registros de datos hidrológicos de una cuenca (Weeks y Boughton, 1987).

En este sentido la selección del tipo de modelo se convierte en un factor importante. Una vez que se identifica la composición del modelo, debe decidirse un modelo entre aquellos existentes: AR (autorregresivos), ARMA (autorregresivos de media móvil), ARMAX (autorregresivos de media móvil con componente exógena), entre otros. Las características estadísticas de las muestras de las series hidrológicas son factores decisivos en la selección del tipo del modelo.

JUSTIFICACIÓN

El análisis multifractal de los registros de la precipitación se encuentra en desarrollo. Se ha manifestado como una herramienta útil para encontrar la relación entre los diferentes momentos de la intensidad de lluvia en relación con la escala de tiempo. Si esta relación sigue una ley en potencia, la teoría de las medidas multifractales puede ser utilizada para el estudio multiescalar de estos momentos.

Asimismo, el análisis multifractal puede servir como una herramienta de validación de modelos estocásticos de la precipitación mediante la comparación del espectro de las dimensiones de las series observadas y las series sintéticas generadas.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se ha argumentado que la emisión de gases provenientes de combustibles fósiles ha inducido un cambio climático en el planeta; el indicador que se ha tomado es el aumento de la temperatura en años recientes, justificado como una consecuencia del efecto de invernadero que provoca la emisión de estos gases. Hay posiciones que llaman a la cautela sobre las causas del cambio climático, ya que el registro sistemático de las variables climáticas es relativamente reciente y por lo tanto el calentamiento observado puede estar enmarcado en fenómenos periódicos largos, es decir que puede seguir un período de retorno a las condiciones conocidas en los primeros años de este registro. No obstante, los datos del siglo pasado indican que la temperatura media anual ha aumentado a una razón promedio general de medio grado centígrado por década; de modo que a finales del siglo presente se espera, de manera conservadora, un aumento global de cinco grados centígrados.

La emisión de gases ha inducido quizá posibles cambios en el régimen pluvial del mundo, al menos en el periodo de registros sistemáticos disponibles, de modo que en algunas regiones parece que los volúmenes precipitados anuales aumentan y

en otras disminuyen; a título de ilustración se toma un caso cercano. Un análisis reciente de los registros en una estación de observación de la temperatura y precipitación durante un período de medio siglo en el Valle de Querétaro, México, indica que la temperatura media anual aumenta a razón de 0.43°C por década, es decir que al final del presente siglo la temperatura aumentaría 4.3°C en concordancia con la extrapolación lineal realizada precedentemente de 5°C a nivel global. Y que la precipitación media anual disminuye a razón de 28 mm por década de modo que, siguiendo la misma línea de inferencia, habría una disminución conservadora de 280 mm de agua precipitada por los cielos a finales del presente siglo (Novelo-Díaz, 2009). Si estas inferencias son correctas, las consecuencias para la vida serían inimaginables y muy en especial para la especie humana.

Darse cuenta de las cosas, es parte de la condición humana cuando hay una posible fragilidad para seguir subsistiendo. El cambio climático y sus posibles consecuencias deben ser el origen minucioso de estudios, reflexiones y consideraciones de cambio de modelos de desarrollo. Si las asociaciones, comunidades o estructuras que se han formado en el ascenso del hombre, todavía no se percatan a conciencia del posible peligro que pudiera acechar a la especie, los estudiosos de la naturaleza, incluida la humana, deben seguir haciendo más inferencias sobre datos mejor logrados sobre la misma y utilizando sistemas de análisis mejor conceptualizados, de mayor generalidad, versatilidad y veracidad.

Obsérvese que las inferencias sobre el calentamiento global señaladas en los párrafos anteriores se basan principalmente en el primer momento de la temperatura y en consecuencia en el primer momento de la precipitación. Los momentos de orden superior a penas han sido explorados; las conclusiones sobre el cambio climático podrían ser reforzadas si los momentos de cualquier orden fueran ligados a la escala de tiempo estudiada.

La teoría multifractal es la herramienta indicada para la conceptualización de los posibles cambios de los momentos de la precipitación con el tiempo.

OBJETIVOS

Objetivo General

Realizar análisis multifractales y modelaciones de series de tiempo que permitan describir fenómenos complejos como la precipitación y temperatura.

Objetivos Específicos

Proponer modelos matemáticos estocásticos que permitan la modelación espacio temporal de variables hidroclimatológicas.

Determinar la existencia de una variabilidad climática de precipitación y temperatura de acuerdo a la evidencia histórica que cuenta el Valle de Querétaro.

Analizar la influencia de la resolución temporal de los datos de precipitación en su posible invarianza a la escala, para buscar diferencias entre diversas estaciones de observación y su potencial relación con la forma de precipitación predominante en cada una de ellas.

1 CICLO HIDROLÓGICO

1.1 Balance hidrológico

El ciclo hidrológico no tiene principio ni fin y sus diversos procesos ocurren en forma continua. El agua se evapora desde los océanos y desde la superficie terrestre para volverse parte de la atmósfera. El vapor de agua se transporta y se eleva en la atmósfera hasta que se condensa y precipita sobre la superficie terrestre o los océanos. El agua precipitada puede ser interceptada por la vegetación, convertirse en flujo superficial sobre el suelo, infiltrarse, correr a través del suelo como flujo subsuperficial y descargar en los ríos como escorrentía superficial. La mayor parte del agua interceptada y de escorrentía superficial regresa a la atmósfera mediante evaporación. El agua infiltrada puede percolar profundamente para recargar el agua subterránea de donde emerge en manantiales o se desliza hacia los ríos para formar el escurrimiento superficial, y finalmente fluye hacia el mar o se evapora en la atmósfera a medida que continúa el ciclo (Chow *et al*, 1998).

Así mismo el ciclo hidrológico puede tratarse como un sistema, cuyos componentes son precipitación, evaporación, escorrentía y otras fases del ciclo hidrológico. Estos componentes se pueden agrupar en subsistemas del ciclo total y pueden ser estudiados separadamente (Chow *et al.*, 1998). La intercepción se encuentra dentro del sistema de agua atmosférica junto a la precipitación, evaporación y la transpiración. Los otros sistemas corresponden al de agua superficial y agua subsuperficial. En la Figura 1.1 se esquematizan los sistemas hidrológicos.

En la literatura podemos encontrar muchas definiciones acerca del ciclo hidrológico, entre ellas se cita a Llamas (1993), quien define el ciclo hidrológico como el conjunto de todos los procesos de transformación del agua en la tierra conformado por varias fases como son:

- Evaporación de los océanos, del suelo y de las plantas.
- Condensación del agua y precipitación en forma de lluvia, nieve, granizo, etc.
- Escurrimiento superficial, infiltración, precolación, flujo subterráneo y retorno a la superficie.
- Formación de corrientes superficiales, ríos, arroyos, y su descarga en lagos, mares, etc.
- Evaporación y repetición del ciclo.

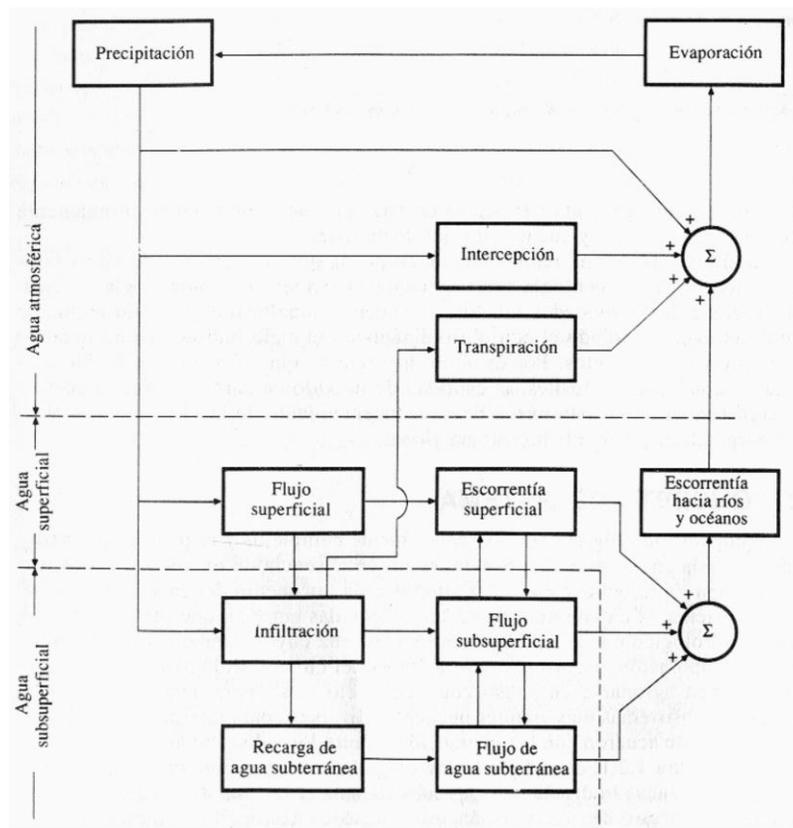


Figura 1.1. Representación en diagrama de bloques del sistema hidrológico global

La determinación de los caudales en las corrientes superficiales es el objetivo central de la Hidrología Superficial. La precipitación que llega a encauzarse como flujo en una corriente, entra al mismo como flujo superficial y/o subsuperficial, proceso conocido como esorrentía directa, que es la precipitación efectiva o exceso de lluvia, que tras fluir como flujo superficial en laderas, primero, y a través de canales de corriente y embalses, después, da lugar al hidrograma de salida de la cuenca, siendo este un componente esencial para la determinación de los balances hídricos asociados a cuencas hidrográficas.

En Hidrología, se conoce por Circulación o propagación de flujos, al procedimiento mediante el cual se determina el avance progresivo (predicción de las variaciones en el tiempo y en el espacio) de una onda de flujo a lo largo de un canal de corriente o embalse, o se predice el hidrograma de salida de una cuenca, originado por una precipitación conocida.

En sentido amplio, la circulación de flujos puede considerarse como el análisis para describir el flujo a través de un sistema hidrológico (cuenca, cauce o embalse) conocida la entrada al sistema (Ayuso, 2006).

En la Figura 1.2 se puede representar esquemáticamente el funcionamiento de un sistema hidrológico, el cuál es muy importante a la hora de realizar balances hídricos.

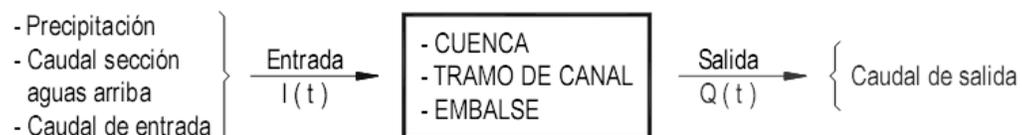


Figura 1.2. Representación esquemática del funcionamiento de un sistema hidrológico superficial para balance hídrico

Mediante este procedimiento se puede determinar, por ejemplo, el tiempo y magnitud del flujo (es decir, el hidrográma) en un punto de una corriente de agua, represado o no, a partir de hidrográma conocidos o supuestos en uno o más puntos aguas arriba; constituyéndose estos en un componente importante en el balance hídrico asociado al abastecimiento de poblaciones.

Los métodos de circulación de flujos se clasifican, tanto desde el enfoque tradicional como desde el análisis de sistemas, en dos categorías:

- Circulación hidrológica de flujos, también conocida como Circulación de flujos a través de sistemas globales.
- Circulación hidráulica de flujos, también llamada Circulación de flujos a través de sistemas distribuidos.

Las técnicas de circulación hidrológica emplean la ecuación de continuidad junto a una relación, analítica o empírica, entre el almacenamiento y la descarga dentro del sistema, mientras que las de circulación hidráulica utilizan la ecuación de continuidad y la ecuación de la cantidad de movimiento, conocidas como ecuaciones de Saint Venant.

1.1.1 Ecuación de balance hidrológico

El balance hidrológico tiene por objeto cuantificar los recursos y volúmenes de agua del ciclo hidrológico de acuerdo con el axioma de Lavoisier: "***nada se crea ni se destruye, sólo se transforma***". Este axioma en dinámica de fluidos se

conoce como la Ecuación Continuidad. También permite establecer relaciones entre las distintas variables hidrológicas.

Matemáticamente puede expresarse por la fórmula general:

$$\text{Estado}_{t+1} = \text{Estado}_t + \sum_{i=1}^N \text{Entradas}_i - \sum_{j=1}^M \text{Salidas}_j \quad (1.1)$$

El estado inicial en el instante t de la cuenca o parte de esta, para efecto del balance hídrico, puede definirse como, la disponibilidad actual u oferta de agua.

Las entradas de agua a la cuenca hidrográfica pueden darse de las siguientes formas: Precipitaciones: lluvia; nieve; granizo; condensaciones; aporte de aguas subterráneas desde cuencas hidrográficas colindantes, en efecto, los límites de los acuíferos subterráneos no siempre coinciden con los límites de los partidores de aguas que separan las cuencas hidrográficas; Transvase de agua desde otras cuencas, estas pueden estar asociadas a: Descargas de centrales hidroeléctricas cuya captación se sitúa en otra cuenca, esta situación es frecuente en zonas con varios valles paralelos, donde se construyen presas en varios de ellos, y se interconectan por medio de canales o túneles, para utilizar el agua en una única central hidroeléctrica; Descarga de aguas servidas de ciudades situadas en la cuenca y cuya captación de agua para uso humano e industrial se encuentra fuera de la cuenca, esta situación es cada vez más frecuente, al crecer las ciudades, el agua limpia debe irse a buscar cada vez más lejos, con mucha frecuencia en otras cuencas.

Las salidas de agua pueden darse de las siguientes formas: Evapotranspiración: de bosques y áreas cultivadas con o sin riego; Evaporación desde superficies líquidas, como lagos, estanques, pantanos, etc.; infiltraciones profundas que van a

alimentar acuíferos; derivaciones hacia otras cuencas hidrográficas; derivaciones para consumo humano y en la industria; salida de la cuenca, hacia un receptor o hacia el mar.

Considerando los componentes del ciclo hidrológico, la ecuación de balance hídrico se puede expresar de la siguiente manera:

$$P + R + I + ET \pm \Delta S = 0 \quad (1.2)$$

donde (P) es el agua que representa la entrada, (R) es el escurrimiento superficial, (I) corresponde a la infiltración, (ET) es la evapotranspiración y (ΔS) es la variación en el contenido de agua en el suelo; estos últimos componentes representan las salidas del sistema.

1.2 Intensidad – Duración – Frecuencia

Los procesos hidrológicos, la precipitación entre ellos, evolucionan en el tiempo y en el espacio en forma parcialmente predecible y parcialmente aleatoria. Los procesos que cumplen con esta característica se conocen como procesos estocásticos. En algunos casos la variabilidad aleatoria es tan grande que se justifica que se dé al proceso un tratamiento puramente aleatorio, es el caso de este trabajo, en el que a las variables que se analizan (intensidad y cantidad de lluvia) se les considere variables aleatorias, o sea, que no están sujetas a ninguna predicción precisa. Por ejemplo la precipitación en un lugar determinado varía día a día y año tras año, y no puede predecirse con exactitud cuál será su magnitud, pero si puede establecerse la probabilidad de que exceda o no cierto valor preestablecido, esto sólo puede determinarse a través del análisis probabilístico y estadístico de los registros que se tengan del pasado.

El objetivo básico del uso de la estadística en la explicación de los procesos hidrológicos es obtener información del fenómeno en el pasado y hacer inferencias acerca de su comportamiento futuro.

La precipitación, como variable de estado hidrológica, se puede caracterizar a través de la intensidad, su distribución en el espacio y en el tiempo, y su frecuencia o probabilidad de ocurrencia, y para poder caracterizarla es necesario un gran número de observaciones, extraídas de series temporales, con el objeto de deducir el patrón de comportamiento de las precipitaciones en una zona determinada y permitir un análisis o uso posterior.

Las curvas Intensidad – Duración – Frecuencia (IDF), son curvas que resultan de unir los puntos representativos de la intensidad media en intervalos de diferente duración, y correspondientes todos ellos a una misma frecuencia o período de retorno.

En este sentido se debe destacar que la intensidad, según Chow *et al.* (1998), se define como la tasa temporal de precipitación, o sea, la altura de agua de precipitación por unidad de tiempo (mm/h ó pulg/h), y ésta se expresa como:

$$i = \frac{p}{T_d} \quad (1.3)$$

donde (p) es la altura de agua de precipitación en mm o pulg, y (T_d) es la duración de la lluvia usualmente en horas.

Otro concepto a estudiar en la construcción de las curvas IDF es la frecuencia, la cual se expresa en función del período de retorno (T_r) que es el intervalo de tiempo promedio (expresado en años) entre eventos de precipitación que igualan o exceden la magnitud de diseño.

Las funciones de distribución de probabilidad se ajustan a las variables hidrológicas, por lo tanto en el análisis de la precipitación en una región requiere de su distribución probabilística a lo largo del tiempo. En especial, se ha argumentado que la precipitación máxima es satisfactoriamente bien descrita por una distribución de Gumbel (Villón, 2006). La función de distribución acumulada es la siguiente:

$$F(x) = \exp\left[e^{-\alpha(x-\mu)}\right] ; \quad -\infty < x < \infty \quad (1.4)$$

donde $0 < \alpha < \infty$ es el parámetro de escala; $-\infty < \mu < \infty$ es el parámetro de posición o valor central. La derivada de la distribución proporciona la función de distribución de las probabilidades o función densidad.

En cuanto a las curvas de Intensidad-Duración-Frecuencia es bastante común la utilización de la metodología propuesta por Cheng (1983) (e.g. Campos y Gómez, 1990; Aparicio, 2008). En ésta, la lluvia con duración de una hora y un periodo de retorno de dos años o más, se puede evaluar con una relación a la de 24 horas con igual periodo de retorno, denominada cociente lluvia/duración (R). Este cociente se calcula con la fórmula:

$$R = \frac{P_1^{T_r}}{P_{24}^{T_r}} \quad (1.5)$$

donde P_1^{Tr} y P_{24}^{Tr} corresponden respectivamente a la lluvia de una hora y 24 horas con periodo de retorno (Tr) de dos o más años.

La metodología requiere también del cálculo del cociente lluvia/periodo de retorno (X):

$$X = \frac{P_t^{100}}{P_t^{10}} \quad (1.6)$$

siendo P_t^{100} y P_t^{10} son la lluvia de 24 horas y periodo de retorno de 100 años y 10 años, respectivamente.

La ecuación de Cheng para estimar la lluvia a diferentes duraciones (t) y periodos de retorno (Tr) es:

$$P_t^{Tr} = \frac{aP_1^{10} \log(10^{2-X} Tr^{X-1}) t}{60(t+b)^c} \quad (1.7)$$

donde P_1^{10} es la lluvia de duración de una hora y periodo de retorno de 10 años, en milímetros; (a), (b) y (c) son parámetros regionales que depende del cociente (R).

1.3 Evapotranspiración

La evaporación (E) es el proceso por el cual el agua es transferida desde la superficie terrestre hacia la atmósfera. Incluye tanto la evaporación de agua líquida o sólida directamente desde el suelo o desde las superficies vegetales vivas o muertas (rocío, escarcha, lluvia interceptada por la vegetación), como las pérdidas de agua a través de las superficies vegetales, particularmente las hojas.

En este último proceso, denominado transpiración (T), el agua absorbida por medio de las raíces, se transfiere a la atmósfera fundamentalmente a través de los estomas situados en las hojas (Sánchez-Toribio, 1992). Fue la dificultad de discriminar (E) y (T) en condiciones naturales, lo que obligó a introducir el concepto de evapotranspiración (ET). Por tanto la evapotranspiración constituye la transferencia total de agua desde una superficie vegetada a la atmósfera.

La importancia cuantitativa de este proceso es tal que, como promedio global, el 57% de la precipitación anual es devuelta a la atmósfera por evapotranspiración, alcanzando valores del 90 y 100% (Sánchez-Toribio, 1992) en zonas áridas y desérticas. Las cantidades de agua que por este concepto vuelven a la atmósfera y la energía necesaria para ello, alcanzan cifras también realmente notables. En un día cálido, es frecuente en muchas zonas una ET de 3 - 4 mm día⁻¹, lo que equivale a 30 – 40 Tm Ha⁻¹ día⁻¹ y requiere una energía del orden de las 18 - 24 M de Kcal.

Dado lo anterior, la evapotranspiración es un componente fundamental del balance hídrico y un factor clave en la interacción entre la superficie terrestre y la atmósfera. Su cuantificación se hace precisa en contextos diferentes tales como la

producción vegetal, la planificación y gestión de recursos hídricos o estudios ambientales y ecológicos, y afecta por tanto a una gran variedad de especialidades científicas (Belmonte, 1999).

Desde el punto de vista energético la evapotranspiración, representada por el símbolo (λE), puede ser descrita por un balance de energía que en su forma simplificada tiene la siguiente ecuación:

$$R_n - G = \lambda E - H \quad (1.8)$$

El balance de energía representado por la ecuación anterior, indica que la energía radiactiva (R_n) es usada en evaporar el agua (λE) y en calentar las superficies (suelo y vegetación), lo que se denomina 'calor latente' y 'calor sensible' respectivamente. El 'calor sensible' representa tanto el calor que es emitido desde las superficies al aire por conducción o por convección (H), como el calor que pasa por conducción al suelo (G).

Su evaluación puede ser abordada a través de diferentes conceptos: i) el concepto de la evapotranspiración potencial, ii) el concepto de evapotranspiración real, tanto desde aproximaciones que recurren a información obtenida desde tierra como desde satélite y iii) con medidas directas, que adicionalmente sirven de validación empírica de las estimas realizadas con los otros dos métodos.

1.3.1 Evapotranspiración potencial

Las dificultades en la medida de (ET) y en la discriminación entre evaporación y transpiración, hizo que muchos autores se inclinaron por suponer unas condiciones ideales de humedad del suelo y desarrollo vegetal, dos de las variables más difíciles de medir, y admitidas éstas, correlacionar la (ET) con uno o varios factores que influyen en ella. Se acuña entonces el término evapotranspiración potencial (ETP). Éste fue introducido a mediados del siglo XX de forma independiente por (Penman, 1948) y (Thornthwaite, 1948), en un intento de optimizar el contenido de humedad en el suelo y el desarrollo vegetal. Definieron (ETP) como la tasa máxima de evaporación de una superficie completamente sombreada por un cultivo verde, sin limitación en el suministro hídrico.

A partir de los trabajos de estos autores se han desarrollado y publicado una gran variedad de métodos, lo que ha derivado en un cierto nivel de confusión, tanto desde el punto de vista hidrológico o agronómico, por la heterogeneidad de conceptos y supuestos de partida, como por la , desconexión entre disponibilidad de datos y la realidad física (Sánchez-Toribio, 1992). Desde los más sencillos como el de Thornthwaite (Thornthwaite, 1948) hasta otros más complejos como los de Penman-Monteith (Monteith, 1965) ó el de Blaney-Criddle (versión FAO de Doorenbos y Pruitt, 1977) o el de Priestley-Taylor (Priestley y Taylor, 1972).

Como la definición de evapotranspiración potencial resultaba poco útil, desde el punto de vista de su aplicación, y daba origen a interpretaciones diversas, se desarrolló a nivel agronómico el concepto de evapotranspiración de referencia (ET_r). Así se llegó a la conclusión (Monteith, 1965) que para obtener valores razonables de (ETP), la cubierta vegetal debía quedar explícita en la definición de (ETP). Por ello diversos autores utilizaron la (ET) de un cultivo específico bien

provisto de agua, como la alfalfa (*Medicago sativa* L.) o gramíneas, lo que dio lugar al concepto de (ET) de referencia (ET_r).

Se desarrollaron dos definiciones de (ETP) según el cultivo de referencia considerado. Doorenbos y Pruitt (1977) propusieron para la FAO la definición de evapotranspiración sobre gramíneas (se usa entonces la nomenclatura ET_o). La segunda definición se basa en la alfalfa y fue desarrollada inicialmente por (Jensen *et al.*, 1971). La (ET) a que da lugar es diferente a la anterior ya que la alfalfa desarrolla una superficie aerodinámicamente más rugosa que las gramíneas.

(Allen *et al.*, 1998) publican el último estándar FAO basado también en la ecuación de Penman-Monteith en el que se proponen procedimientos para resolver casos en los que hay limitación de datos e información climática para diferentes cultivos.

Una vez conocida la evapotranspiración de referencia de un cultivo o región (ET_o) ésta se multiplica por un factor corrector específico, denominado coeficiente de cultivo (K_c), obteniéndose así la (ET) del cultivo concreto.

1.3.2 Evapotranspiración real (Tierra)

Entre los diversos modelos basados en variables micro-meteorológicas y fisiológicas, el más conocido y de general aplicación es el modelo de evaporación de Penman-Monteith (Monteith 1965) derivado de la ecuación de combinación. Se llama así porque combina la ecuación del balance de energía y los gradientes de humedad, temperatura y velocidad del viento. Con ella se elimina la necesidad de medidas en la superficie evaporante y medidas a diversas alturas sobre la superficie como requieren los métodos del 'gradiente' y del 'perfil de viento',

respectivamente, muy usados hasta la aparición de esta ecuación. Combina información meteorológica y fisiológica y asume que las copas vegetales pueden asimilarse a una superficie uniforme como única fuente de evaporación (*'big-leaf'*), lo que supone una considerable simplificación de la realidad, particularmente cuando se aplica a cubiertas estratificadas (multicapas) o con distintas superficies evaporantes (multifuentes).

La ecuación de Penman-Monteith (Monteith 1965) se expresa:

$$E_p = \frac{\Delta(R_n - G) + \rho_a C_p \frac{(e_s - e_a)}{r_a}}{\Delta + \gamma} \quad (1.9)$$

donde (R_n) es la radiación neta, (G) el flujo de calor en el suelo, ($e_s - e_a$) el déficit de presión de vapor, (ρ_a) la media de la densidad del aire a presión constante, (C_p) el calor específico del aire, (Δ) representa la pendiente de la relación entre la presión de vapor y la temperatura, (γ) es la constante psicométrica y (r_a) la resistencia aerodinámica que se calcula mediante la ecuación:

$$r_a = \frac{\ln\left[\frac{z_m - d}{z_{om}}\right] \ln\left[\frac{z_h - d}{z_{oh}}\right]}{K^2 u_z} \quad (1.10)$$

Siendo (z_m) es la altura en que se midió el viento, (z_h) la altura en que se midió la humedad, d la distancia de desplazamiento del plano cero, (z_{om}) tamaño de la rugosidad que gobierna el momentum. (z_{oh}) tamaño de la rugosidad que gobierna

la transferencia de calor y vapor, (K) la constante de Von Karman (0.41) y (u_z) la velocidad del viento a la altura (z).

La distribución dispersa, y agrupada en mosaicos de vegetación, característica de las zonas semiáridas constituye un ejemplo dónde no se satisfacen las premisas de la aproximación de Penman-Monteith, por lo que trabajos posteriores extendieron el modelo a dos o mas fuentes (Shuttleworth y Wallace, 1985; Choudhury y Monteith, 1988; Shuttleworth y Gurney, 1990). La interacción entre las fuentes se estudia como combinación de resistencias en serie y paralelo hasta una altura de referencia (Z_r) por encima de la vegetación, donde los efectos de la heterogeneidad espacial ya no son perceptibles.

Otras aproximaciones son los modelos que describen el sistema físico formado por el continuo *suelo-planta-atmósfera* (SVAT) en un perfil unidimensional desde una profundidad de suelo determinada hasta la copa vegetal. El sistema considera tanto los flujos de agua como de energía y establece que el suelo y la vegetación actúan como almacén de agua que se llena y vacía por diferentes entradas y salidas. Los flujos están regulados por unos gradientes de concentración y unas resistencias. Se establecen diferentes capas tanto en suelo como en vegetación, siendo este uno de los aspectos que diferencia unos modelos SVAT de otros, siendo más complejos cuanto mayor es el número de capas considerado. Los mayores inconvenientes de estas aproximaciones son: un significativo esfuerzo en parametrización, sobre todo del suelo, la no consideración de la variabilidad espacial, y la premisa de condiciones de estado estacionario entre el suelo y la vegetación.

1.3.3 Evapotranspiración real (Satélite)

En este caso el flujo de (ET) se obtiene por cierre del balance energético de la ecuación (1.8), para lo que se requiere i) estimas del flujo de calor sensible (H) desde satélite ii) medidas en tierra o desde satélite de radiación neta (R_n) y medidas de calor que va al suelo (G). (H) se puede obtener con medidas de temperatura infrarroja de superficie; el más usado es el método basado en el llamado parámetro kB^{-1} (Stewart, 1995). Este termino adimensional describe la diferencia entre la longitud de rugosidad de momento y calor debido a los distintos mecanismos de transferencia de ambas magnitudes. Este método ha sido ampliamente usado en modelos operacionales para evaluar la distribución espacial de los componentes del balance de energía. Sin embargo la validez de esta aproximación ha sido cuestionada sobre vegetación dispersa (Alados-Arboledas *et al.*, 2002). Actualmente están adquiriendo gran desarrollo técnicas instrumentales desde satélite que permiten calcular (H) e incluso (ET) de forma directa, como son el scintillometro (Watts *et al.*, 2000) y la técnica Raman-LIDAR (Light Detection and Ranging) (Eichinger *et al.*, 2000). El primero se basa en los cambios de intensidad de dos rayos láser polarizados por diferencias de temperatura del aire, mientras que el segundo usa una radiación láser ultravioleta y mide la dispersión producida por las moléculas de agua presentes en el aire.

1.4 Flujo del agua en el suelo

La zona no saturada del suelo tienen una gran importancia en el ciclo del agua, así como en el transporte y las transformaciones de los compuestos químicos en el suelo. Sin embargo, existen otros tipos de medios porosos no saturados. Además, otras fases diferentes pueden coexistir con el agua y el aire. La gestión de las proporciones volumétricas y másicas de las diferentes fases existentes en el suelo

constituye la base para el estudio del comportamiento de la zona no saturada. Así pues, la succión y el potencial total del agua son los responsables principales de la retención y del movimiento del agua en el suelo. Para cada tipo de suelo y de problema a resolver, diferentes funciones paramétricas permiten estimar las propiedades hidrodinámicas de la zona no saturada.

En condiciones de equilibrio, la ley de Darcy sirve también para definir el movimiento del agua.

Sin embargo para la zona no saturada, no siempre es posible encontrar soluciones simples y precisas. En lo que respecta a los regímenes transitorios, la ecuación de Richards define el flujo del agua y los cambios de saturación en el suelo. Se puede decir que el tipo de condiciones estacionarias externas al sistema, así como las propiedades hidrodinámicas del suelo, determinan las posibles soluciones en la zona no saturada y saturada del suelo. En las condiciones reales del terreno, la lluvia, la evapotranspiración y el ascenso capilar desde la superficie freática, son los procesos transitorios externos que comúnmente regulan el movimiento del agua y el grado de aereación de la zona no saturada.

El flujo de agua en zona no saturada puede ser enfocado desde dos puntos de vista: o bien el flujo microscópico a través de poros individuales, o bien el flujo macroscópico a través de todo el conjunto poroso, que es la aproximación más común.

En un medio casi saturado el efecto de la gravedad drena verticalmente formándose interfases agua-aire en forma de meniscos. El radio de curvatura de estos meniscos depende de la magnitud de la succión. Al ir progresando el drenaje la curvatura de los meniscos es más pronunciada y aumenta la succión.

Los poros más grandes se vacían con valores bajos de la succión, mientras que los más estrechos se drenan con succiones más altas. Si se representa la evolución del grado de saturación (definido como la fracción de los poros que están llenos de agua) en función de la succión se obtienen las denominadas curvas de retención o curvas de succión-humedad, características de cada tipo de suelo.

La succión es muy pequeña para contenidos de agua próximos a la saturación; al aumentar la succión se vacían rápidamente los poros mayores. La succión crece rápidamente al disminuir el contenido en agua. Para un mismo contenido en agua y en las mismas condiciones, la succión es mayor cuantos más pequeños son los poros, de modo que su valor puede dar una idea de la textura del terreno.

Considerando el flujo macroscópico, en condiciones de equilibrio se cumple la ley de Darcy:

$$q = -K(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \quad (1.11)$$

donde (q) es el flujo de Darcy o volumen de agua que circula a través de una superficie unidad por unidad de tiempo, (K) es la conductividad hidráulica, (H) es el potencial y (z) es la distancia.

Rápidamente cuando decrece la humedad. Esto es debido a que cuando el agua se drena, los poros se vacían y la sección de flujo efectivo es mucho menor. Consecuentemente, el descenso del valor de K es mucho más rápido en suelos con capacidad drenante (arenas) que en suelos con poros de menor tamaño (arcillas).

La ecuación de Darcy es válida para régimen estacionario, pero no cuando el contenido en agua o la tensión cambian con el tiempo. En este caso, es necesario tener en cuenta la ecuación de continuidad, que es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \quad (1.12)$$

Siendo (t) el tiempo y (z) la elevación del agua.

Combinando las ecuaciones de Darcy y de la continuidad, se obtiene la ecuación de Richards (1931):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (1.13)$$

Considerando un término, (r), fuente-sumidero (absorción por las raíces) y definiendo C(h) como la capacidad específica del medio no saturado, que viene dada por la pendiente de la curva succión-humedad ($C(h) = d\theta/dh$) la ecuación de Richards queda:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] + r \quad (1.14)$$

1.5 La intercepción de precipitaciones

La intercepción se define como la cantidad de precipitación retenida o almacenada de manera temporal por la vegetación y que puede ser evaporada después o durante el evento de precipitación (Savenije, 2004). La cantidad y dinámica del proceso de intercepción depende de las características y estructura de la vegetación y de algunas características de la lluvia: intensidad, duración, forma, dirección, ángulo y distribución del tamaño de la gota; así como de otras variables meteorológicas como la temperatura y velocidad del viento (Schowalter, 1999; Crockford y Richardson, 2000; Schellekens *et al.*, 2000).

El estudio sistemático sobre la intercepción comienza Horton (1919) quien separa la evaporación del suelo de la evaporación, una vez finalizado el evento, del agua almacenada por la saturación de la superficie arbórea. El autor expresa el componente de la intercepción (EI) de la siguiente manera (ver también Gash, 1979; Belmonte, 1997, 1998):

$$EI = \int_0^{t_r} E dt + S \quad (1.15)$$

donde E es la evaporación del agua interceptada durante la lluvia, S la capacidad de almacenaje, t es el tiempo y t_r la duración del evento de precipitación; la ecuación no contempla la evaporación desde la superficie de los troncos.

A partir de los planteamientos de Horton (1919) se han desarrollado modelos físicos y analíticos para el estudio y modelación del proceso de intercepción partiendo de la hipótesis de que la vegetación funciona como un reservorio (Rutter *et al.*, 1971; Gash, 1979), y otros modelos numéricos y estocásticos (Mulder, 1985; Calder, 1990; Keim *et al.*, 2004). La vegetación arbórea, herbácea y los residuos

vegetales producto de la senescencia natural, se consideran como un reservorio de agua, el cual es llenado por la lluvia y vaciado por la evaporación y drenaje.

La lámina interceptada (EI) durante el evento de lluvia se estima mediante un balance de masa considerando que la evaporación es despreciable durante el evento. La ecuación resultante es:

$$EI = P - (\Delta S + R + D) \quad (1.16)$$

donde P es la lámina precipitada; R es la lámina escurrida; ΔS es la lámina almacenada en un espesor de suelo a un contenido de humedad inicial dado; D es la lámina percolada a sustratos inferiores de suelo, o la lámina drenada a la atmósfera por un sustrato de suelo en condiciones controladas.

1.6 Efecto de la intercepción por la cubierta vegetal en la relación Intensidad, Duración y Frecuencia (IDF) de la precipitación en una zona semiárida.

Para la evaluación de la cantidad de agua interceptada por la vegetación herbácea se ha seleccionado una región semiárida limítrofe de los estados de Guanajuato y Querétaro, la cual cuenta con la estación climatológica del Centro Experimental Norte de Guanajuato (CENGUA) del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias (INIFAP). La altitud media es de aproximadamente 2000 msnm, con una temperatura media anual de 16.7°C y máxima de 38°C y una precipitación media anual de 550 mm. La flora característica es el matorral, donde se observan individuos arbóreos como capulín (*Prunus serotina*), mezquite (*Prosopis spp.*), pirúl (*Schinus molle*) y algunos arbustos como huizache (*Acacia*

spp.), tullidora (*Karwinskia humboldtiana*) y granjeno (*Celtis pallida*) (Centro Nacional de Desarrollo Municipal, Gobierno del Estado de Querétaro, 1999).

La cuantificación de la interceptación por la vegetación herbácea se ha realizado con un simulador de lluvias, para lo cual se han extraído muestras representativas de esta cubierta vegetal, integrada por hierbas, pastos, matorrales, residuos vegetales y un sustrato de suelo de textura franco arenoso. Las muestras inalteradas son colocadas en cajas de acero con dimensiones de 40 x 50 cm, con un espesor de 10 cm.

Para estimar el volumen interceptado por la vegetación herbácea vía el balance hidrológico, es necesario medir los diferentes componentes del mismo; la precipitación simulada es medida mediante pluviómetros, los cuales han sido situados entre las cajas con la finalidad de verificar que la intensidad simulada fuera aproximadamente igual a la de la región en estudio, la cual se encuentra en un rango de 30 a 50 mm/h; las simulaciones se han realizado en un período de una hora.

Cada caja cuenta con un vertedor para cuantificar el escurrimiento superficial o volumen escurrido; así mismo se requiere cuantificar el volumen de agua almacenada en el sustrato de suelo, para separar el volumen interceptado por la vegetación y el absorbido por el suelo. La lámina almacenada en condiciones de saturación se calcula con la fórmula:

$$\Delta S = (\theta_s - \theta_0)P \quad (1.17)$$

donde P es el espesor del sustrato, θ_0 y θ_s son los contenidos volumétricos de agua inicial y a saturación, respectivamente. Este último se calcula con $\theta_s = (\rho_t/\rho_w)\omega_s$, donde ρ_w es la densidad del agua, ρ_t es la densidad del suelo seco y ω_s es el contenido gravimétrico a saturación, o también puede ser estimada a partir de la porosidad total del suelo calculada con la fórmula clásica $\phi = 1 - \rho_t/\rho_s$, donde ρ_s es la densidad de las partículas, considerada generalmente igual a la densidad de las partículas de cuarzo: $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$.

La base de cada caja es perforada para captar el volumen drenado durante la simulación de la precipitación; el agua drenada se observa aproximadamente a los cincuenta minutos, razón por la cual se ha seleccionado una hora como tiempo de simulación de la lluvia para medir el volumen drenado durante diez minutos aproximadamente. Finalmente, la lámina total interceptada en una hora es estimada aplicando la ecuación (1.16).

Para la obtención de las curvas Intensidad-Duración-Frecuencia es necesario el análisis de la información de la estación climatológica del CENGUA. En particular se retiene para el análisis la serie de datos de precipitación máxima mensual en 24 horas registrada con pluviómetro durante 16 años para conformar la serie de tiempo de eventos máximos de precipitación para cada año. Para mostrar el efecto del componente de la intercepción en las curvas IDF se han considerado suficientes el número de años.

Sobre esta serie se aplica la distribución de Gumbel con la finalidad de obtener las precipitaciones máximas correspondientes a los periodos de retorno establecidos.

Las curvas IDF de la precipitación en la región de estudio se estiman siguiendo la metodología de Cheng (1983) ya expuesta, ecuaciones (1.5)-(1.7).

1.6.1 Resultados y discusión

Se han realizado siete simulaciones de lluvia sobre la vegetación herbácea en cuatro cajas. Para el cálculo de la lámina almacenada se tiene que la densidad del suelo seco tiene un valor medio de $\rho_t = 1.38 \text{ g/cm}^3$, lo que proporciona una porosidad total $\phi = 0.479 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El contenido volumétrico a saturación medio es $\omega_s = 0.342 \text{ g/g}$ y en consecuencia $\theta_s = 0.472 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. La diferencia absoluta de $|\phi - \theta_s| = 0.007 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ indica que al final de los eventos de lluvia el suelo estaba prácticamente saturado; por lo tanto es razonable asumir que el contenido volumétrico a saturación es igual a la porosidad total. Los valores del contenido de humedad inicial de cada evento de precipitación se reportan en la tabla 1.1. En la misma se reporta la lámina almacenada calculada con la ecuación (1.17), $P = 100 \text{ mm}$ es el valor del espesor del sustrato.

Tabla 1.1. Contenido volumétrico inicial del agua y almacenamiento

Caja 1			Caja 2			Caja 3			Caja 4		
θ_0	$\Delta\theta$	ΔS									
0.330	0.149	14.92	0.314	0.165	16.51	0.335	0.144	14.42	0.318	0.161	16.13
0.290	0.189	18.93	0.278	0.201	20.14	0.310	0.169	16.92	0.265	0.214	21.42
0.394	0.085	8.52	0.381	0.099	9.87	0.380	0.099	9.92	0.349	0.130	13.01
0.330	0.149	14.92	0.360	0.120	11.97	0.399	0.080	8.01	0.344	0.135	13.52
0.295	0.185	18.46	0.334	0.145	14.51	0.389	0.090	8.98	0.310	0.170	16.97
0.260	0.220	21.97	0.259	0.220	22.02	0.270	0.210	20.97	0.269	0.210	21.02
0.270	0.209	20.92	0.269	0.210	21.02	0.280	0.199	19.92	0.280	0.200	19.97

En la tabla 1.2 se reportan las láminas precipitadas en cada evento y en cada caja, así como las láminas escurridas y drenadas. Las láminas interceptadas correspondientes, calculadas con la ecuación (1.17), son reportan en la misma tabla.

Tabla 1.2. Componentes del balance hidrológico y cálculo de la Intercepción.

P	Caja 1				Caja 2				Caja 3				Caja 4			
	R	D	ΔS	EI	R	D	ΔS	EI	R	D	ΔS	EI	R	D	ΔS	EI
30.00	11.92	2.88	14.92	0.28	10.93	2.30	16.51	0.26	4.02	11.18	14.42	0.38	3.28	10.18	16.13	0.41
31.00	8.24	3.63	18.93	0.20	6.75	3.65	20.14	0.46	3.01	10.55	16.92	0.52	3.30	5.58	21.42	0.70
32.00	13.71	9.40	8.52	0.37	14.79	6.70	9.87	0.64	11.05	10.50	9.92	0.53	5.48	12.90	13.01	0.61
34.00	13.00	5.59	14.92	0.49	13.49	7.90	11.97	0.64	9.90	15.35	8.01	0.74	4.99	14.78	13.52	0.71
36.00	5.55	11.20	18.46	0.79	12.66	8.14	14.51	0.69	11.74	14.58	8.98	0.70	8.28	10.12	16.97	0.63
43.00	14.50	5.50	21.97	1.03	14.00	6.10	22.02	0.88	5.35	15.50	20.97	1.18	5.95	15.00	21.02	1.03
48.00	16.00	9.85	20.92	1.23	15.75	9.80	21.02	1.43	10.74	16.00	19.92	1.34	10.60	16.00	19.97	1.43

*Unidades en milímetros

La relación entre la precipitación y la intercepción por la vegetación herbácea, en cada evento de lluvia, y por cada caja se muestra en la figura 1.3; el modelo lineal arroja altos valores del coeficiente de determinación R^2 en el rango de precipitación estudiado, tabla 1.3. En la figura 1.3 se puede apreciar que las líneas de tendencia lineal presentan características similares en tres cajas; en la caja 1, aunque la pendiente es similar a las otras tres, la ordenada al origen es un poco menor debido a que en esta caja la densidad de cubierta herbácea, comparada visualmente con respecto a las otras tres, es ligeramente menor.

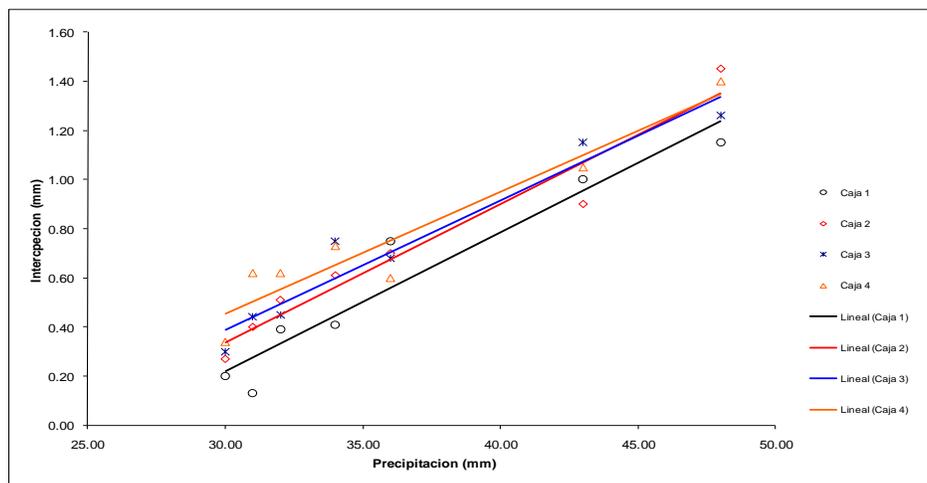


Figura 1.3. Relación entre la intercepción y la precipitación en los siete eventos de simulación y en cada repetición (cuatro cajas)

Debido a la posible variabilidad espacial de la intercepción de la lluvia por la vegetación herbácea en la región en estudio, y también debido a la falta de estudios extensivos de este fenómeno, la relación obtenida entre la intercepción y la precipitación puede ser utilizada en el análisis regional de la misma. Este análisis puede ser simplificado si se construye un modelo lineal de regresión entre la intercepción y la precipitación en el experimento realizado.

Tabla 1.3. Ecuaciones para estimar la intercepción en vegetación herbácea

Caja	Ecuación	R ²
1	EI = 0.0564P - 1.4704	0.92
2	EI = 0.0565P - 1.3572	0.94
3	EI = 0.0528P - 1.1968	0.94
4	EI = 0.0495P - 1.0309	0.91

Los valores de intercepción obtenidos en cada caja son promediados en cada uno de los siete eventos de precipitación (ver tabla 1.1). Los valores medios de la intercepción correspondientes a cada evento de precipitación y el modelo de regresión lineal se muestran en la figura 1.4. La ecuación de la recta es:

$$EI = 0.0522P - 1.1681 \quad (1.18)$$

Con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9867$, mayor que los correspondientes a los modelos parciales, debido al proceso de suavización de los datos.

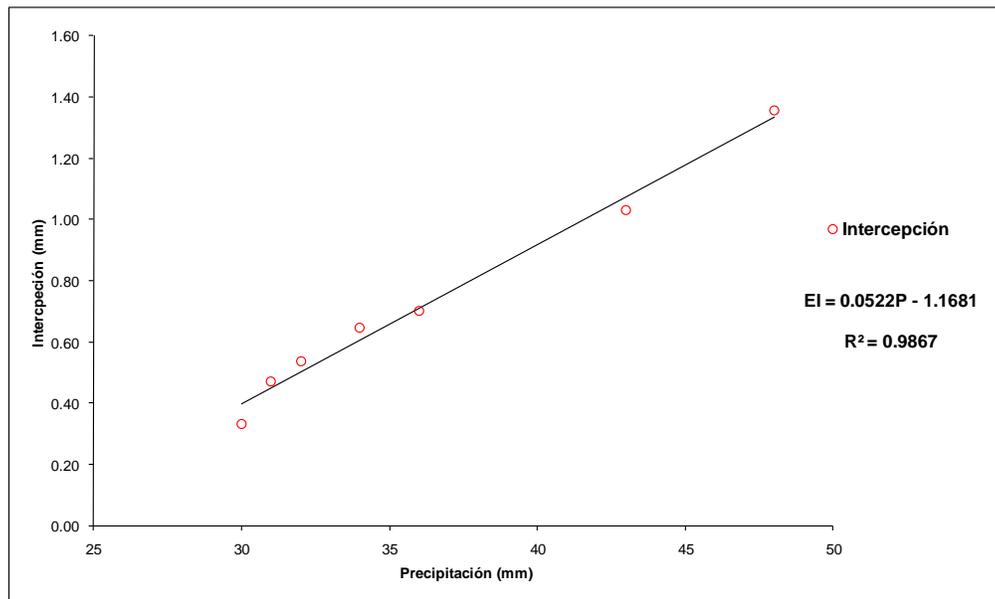


Figura 1.4. Modelo general del componente de la intercepción en vegetación herbácea

Para el análisis del efecto de la intercepción de la cubierta vegetal, herbácea y arbórea, sobre la relación IDF de la precipitación, además de la ecuación (1.18) que relaciona la intercepción de la vegetación herbácea con la precipitación es necesaria la correspondiente a la intercepción por la vegetación arbórea. La relación obtenida en la región de estudio es la siguiente (Mastachi-Loza, 2007):

$$EI = 0.2005P + 1.2783 \quad (1.19)$$

Teniendo como base la precipitación máxima observada en 24 horas, tabla 1.4, las ecuaciones (1.18) y (1.19) se utilizan para estimar la intercepción por la vegetación herbácea (EI_H) y la arbórea (EI_A). Las precipitaciones netas mostradas en la tabla 1.4 son calculadas con $P_H = P - EI_H$, $P_A = P - EI_A$ y $P_{H+A} = P - EI_{H+A}$, con $EI_{H+A} = EI_H + EI_A$; también se muestran los porcentajes de intercepción $p_H = (EI_H/P) \times 100$, $p_A = (EI_A/P) \times 100$ y $p_{H+A} = (EI_{H+A}/P) \times 100$; se establecen

cuatro escenarios en los que se obtienen las curvas IDF a partir de las precipitaciones anteriores; a continuación se describen. *Escenario 1:* Las curvas IDF se construyen a partir de la precipitación máxima observada en 24 horas (P). *Escenario 2:* La precipitación neta herbácea (P_H) se toma en cuenta para obtener las curvas IDF. *Escenario 3:* Se elaboran las curvas IDF a partir de la precipitación neta arbórea (P_A). *Escenario 4:* La precipitación neta herbácea (P_H) y neta arbórea (P_A) son utilizadas para construir las curvas IDF. Una vez se obtienen las curvas IDF para cada escenario, se puede evaluar el efecto del componente de la intercepción en dicha relación.

Tabla 1.4. Precipitaciones máximas en 24 horas, precipitaciones netas y porcentajes de intercepción para obtener las curvas IDF

AÑO	Precipitación para las curvas IDF				Porcentajes interceptados en las coberturas		
	P. Máxima 24 horas	P. neta Herbácea	P. neta Arbórea	P. neta H + A	% Interceptado Herbácea	% Interceptado Arbórea	% Interceptado H + A
1986	38.3	37.47	29.34	28.51	2.17	23.39	25.56
1987	34.5	33.87	26.30	25.67	1.83	23.76	25.59
1988	36.4	35.67	27.82	27.09	2.01	23.56	25.57
1989	38.7	37.85	29.66	28.81	2.20	23.35	25.56
1990	41.2	40.22	31.66	30.68	2.38	23.15	25.54
1991	55.8	54.06	43.33	41.59	3.13	22.34	25.47
1992	37.3	36.52	28.54	27.76	2.09	23.48	25.57
1993	37.0	36.24	28.30	27.54	2.06	23.51	25.57
1994	55.8	54.06	43.33	41.59	3.13	22.34	25.47
1995	42.2	41.17	32.46	31.43	2.45	23.08	25.53
1996	53.2	51.59	41.25	39.65	3.02	22.45	25.48
1997	29.4	29.03	22.23	21.86	1.25	24.40	25.65
1998	41.2	40.22	31.66	30.68	2.38	23.15	25.54
1999	58.4	56.52	45.41	43.53	3.22	22.24	25.46
2000	41.4	40.41	31.82	30.83	2.40	23.14	25.54
2001	55.4	53.68	43.01	41.29	3.11	22.36	25.47

P: Precipitación en milímetros

H: Vegetación herbácea

Los datos de las cuatro precipitaciones mostrados en la tabla 1.4 se ajustan a la distribución de Gumbel, ecuación (1.4). En la tabla 1.5 se muestran los valores correspondientes de los parámetros de la distribución, así como los valores de los parámetros en la prueba de Ji_cuadrada (χ^2). Los valores calculados son definitivamente inferiores que los valores teóricos a dos niveles de probabilidad, lo que permite aceptar la distribución de Gumbel para estimar la precipitación a diferentes periodos de retorno.

Tabla 1.5. Parámetros de la distribución Gumbel comparados con la prueba ji-cuadra a los niveles de probabilidad de 99.5 y 99%

P. Máx. 24 horas			P. neta Herbácea			P. neta Arbórea			P. neta H+A			Niveles de probabilidad	
α	μ	χ^2	α	μ	χ^2	α	μ	χ^2	α	μ	χ^2	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$
0.14	39.23	2.52	0.15	38.25	2.33	0.18	30.06	2.09	0.19	29.06	1.89	32.80	30.60

En la tabla 1.6 se muestra la precipitación máxima en 24 horas registrada y las precipitaciones netas correspondientes a seis periodos de retorno calculadas con la distribución de Gumbel utilizando $1/Tr(P) = 1 - F(P; \alpha, \mu)$.

Tabla 1.6. Precipitaciones máximas observadas en 24 horas y precipitaciones netas para las coberturas estudiadas y sus respectivos periodos de retorno Tr

Tr (años)	P. Máx. 24 horas	P. neta Herbácea	P. neta Arbórea	P. neta H+A
2	41.85	40.73	32.15	31.02
5	49.94	48.40	38.62	37.07
10	55.29	53.47	42.90	41.07
25	62.06	59.89	48.31	46.13
50	67.08	64.65	52.32	49.88
100	72.06	69.37	56.30	53.61

Los cocientes lluvia/duración (R) y lluvia/periodo de retorno (X) se obtienen aplicando las ecuaciones (1.5) y (1.6) respectivamente, ambos se reportan en la tabla 1.7; también se muestran los parámetros (a), (b) y (c), los cuales son función del lugar y del cociente (R); dichos parámetros se obtienen empleando la gráfica establecida por Chen (1983), llamada relación entre los parámetros (a), (b) y (c) de una tormenta estándar y la razón de la lluvia de una hora con la de 24 horas; ver también (e.g. Campos y Gómez, 1990).

Tabla 1.7. Cocientes lluvia/duración (R), lluvia/periodo de retorno (X) y parámetros (a), (b) y (c), los cuales son función del lugar y del cociente (R)

P. Máx. 24 horas					P. neta Herbácea					P. neta Arbórea					P. neta H+A				
R	X	a	b	c	R	X	a	b	c	R	X	a	b	c	R	X	a	b	c
0.60	1.30	39.9	11.7	0.87	0.61	1.30	40	11.8	0.88	0.59	1.31	38	11.2	0.86	0.58	1.31	37.3	11.1	0.85

La lluvia para diferentes duraciones (t) y periodos de retorno (Tr), se calculan con la ecuación (1.7); posteriormente las precipitaciones en milímetros son convertidas en intensidades máximas en (mm/h).

En la tabla 1.8 se muestran las intensidades máximas horarias para cada escenario y para periodo de retorno (Tr); también se muestra el efecto de la interceptación en la relación IDF a manera de porcentaje; la variación de la

intensidad en cada escenario se debe a la lámina de agua interceptada por cada una de las vegetaciones.

Tabla 1.8. Intensidades máximas horarias para cada escenario conformado por las diferentes cubiertas vegetales

Tr (años)	i Máxima en las Curvas IDF (mm/h)				Efecto (%)		
	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4
2	25.24	24.19	19.22	42.83	4.16	23.86	18.64
5	29.11	27.80	22.27	50.89	4.48	23.47	21.52
10	32.03	30.54	24.59	56.98	4.67	23.24	23.70
25	35.90	34.15	27.64	65.04	4.87	23.00	26.58
50	38.82	36.88	29.95	71.14	4.99	22.84	28.76
				Media	4.63	23.28	23.84

1.6.2 Efecto de la intercepción en los escurrimientos de una cuenca.

Mediante una aplicación se puede apreciar el efecto del componente de la intercepción en la relación IDF a nivel de cuenca. Se escoge la cuenca correspondiente al área natural protegida Peña Colorada ubicada en la región; posee un área de 35.06 km², de la cual el 0.65 % corresponde a suelo desnudo erosionado, el 92.73 % está conformado por vegetación arbórea, y el 6.63 % corresponde a vegetación herbácea y pastizales. Las intensidades, se determinan para un periodo de retorno de 2 años y un tiempo de concentración de 89 minutos. Se aplica el método racional americano para la determinación de caudales como se reportan en la tabla 1.9.

Tabla 9. Efecto de la intercepción en los escurrimientos de una cuenca

Superficie	Cobertura (%)	Área (km ²)	Coefficiente de escorrentía para un Tr 2 años	Intensidad sin efecto de la intercepción (mm/h)	Intensidad con efecto de la intercepción (mm/h)	Caudal (m ³ /s)	Caudal (m ³ /s)
Suelo desnudo	0.65	0.23	0.36	17.00	17.00	0.39	0.39
Arbórea y Matorral	92.73	32.51	0.29	17.00	12.00	44.56	31.45
Herbácea	6.63	2.32	0.34	17.00	16.00	3.74	3.52
					Σ	48.68	35.36

En la Tabla 1.9 se muestra el efecto del componente de la intercepción en la intensidad para un periodo de retorno establecido; el mayor impacto ocurre cuando se tiene un escenario con cobertura vegetal arbórea, donde las intensidades obtenidas a partir de las curvas IDF con esta condición, son menores que las que se obtienen con una condición de suelo desnudo donde no se considera el efecto de la vegetación; esto representa la forma tradicional de empleo de las curvas IDF. Sin considerar la intercepción se tiene un caudal total de 48.68 m³/s; haciendo tal consideración el caudal se reduce a 35.36 m³/s, esto representa un 28%; porcentaje considerable al momento de dimensionar una estructura hidráulica.

1.6.3 Conclusiones

La intercepción de la vegetación herbácea semiárida en proporción a la precipitación representan el 3%; valor que favorece el conocimiento a escala global de dicho componente, siendo útil para la calibración y validación de modelos hidrológicos. Se han planteado cuatro condiciones o escenarios en los cuales se podrían utilizar las curvas IDF; para el escenario sin vegetación no se tiene ningún efecto; para el escenario conformado por la intercepción en vegetación herbácea se tiene un efecto promedio de 5% en la reducción de los valores de intensidad; la intercepción en vegetación arbórea tiene un efecto de 23%; el mayor efecto en las curvas o relación IDF de la precipitación se tiene al considerar un escenario conformado por cobertura vegetal herbácea y arbórea, siendo este común en la mayoría de las cuencas hidrológicas; se tiene un efecto de 24% en los valores de intensidad. Debido a lo anterior las intensidades de diseño pueden ser diferentes de acuerdo al escenario o cobertura presente o

considerada; ocasionando con ello que los caudales de diseño se incrementen o disminuyan, impacto que se refleja en los costos económicos de una obra hidráulica. Por otro lado las consideraciones anteriores pueden ser importantes en la gestión integrada de los recursos hídricos de una zona; lo cual se puede reflejar en la determinación de volúmenes de agua para el abastecimiento de poblaciones, riego de cultivos y dimensionamiento de drenajes.

2 SERIES DE TIEMPO

2.1 Introducción

La proyección hacia el futuro se basa en la combinación de la estadística y la teoría de la probabilidad. Con la estadística se realiza el análisis de frecuencias de los eventos históricos y se definen los parámetros que determinan el patrón general de comportamiento. Con estos parámetros y con la aplicación de la teoría de la probabilidad se hace el pronóstico de lo que puede esperarse en el futuro, dentro de cierto nivel de riesgo.

Debido a lo anterior en este capítulo se presenta un conjunto de técnicas para el análisis y modelación de series de tiempo hidrológicas.

2.1.1 Estado del arte

Es importante disponer de las herramientas necesarias que nos permitan conocer a escala regional el comportamiento de una variable climática fundamental, como es la precipitación. Aunque existen numerosos métodos que describen la lluvia a escala regional, con los que se generan registros sintéticos de precipitación diaria en lugares donde no se dispone de registros de lluvia observados, estos solo consideran la influencia de variables geográficas (como por ejemplo la proximidad entre estaciones) o son métodos puramente estadísticos (como lo es kriging). En este sentido, se han empezado a desarrollar métodos que tienen en cuenta variables que consideran la "proximidad entre puntos", no sólo en un sentido geográfico, sino además en un sentido climático, pudiéndose mejorar los resultados de las técnicas clásicas de interpolación espacial existentes (Johnson y Hanson, 1995; Moreno y Roldán, 1999; Teegavarapu y Chandramouli, 2005).

Los modelos matemáticos para representar la precipitación dependen de la escala de tiempo considerada. Para escalas de tiempo grandes, como anuales o mensuales, se puede asumir que la autocorrelación de la precipitación no existe o es despreciable (Roesner y Yevjevich, 1966). En este caso, basta con encontrar una distribución de probabilidad que sea capaz de reproducir la variabilidad de la precipitación en la escala de tiempo considerada. Cuando la escala de tiempo es menor, o sea semanas, días u horas, la autocorrelación de la precipitación ya no es despreciable. En estos casos, se requiere de modelos más complejos que tengan en cuenta no sólo la periodicidad anual sino también la dependencia en el tiempo. Modelos estocásticos, como las cadenas de Markov, se han utilizado con éxito para modelar la precipitación diaria (Katz, 1977a, b). Dichos modelos reproducen los estados de ocurrencia y no ocurrencia de la precipitación mediante una matriz de transición de probabilidad y la cantidad de lluvia, o intensidad, con una cierta función de probabilidad sesgada (generalmente lognormal o gamma); así mismo un proceso de Markov describe la dependencia paso a paso, llamada proceso de primer orden o correlación serial de un paso de exhibición (Viessman *et al.*, 1989), es decir, un evento no depende de otros procesos pasados. Estos procesos permiten la generación de series sintéticas de variables hidrológicas y son definidos en términos de probabilidades discretas

Para escalas de tiempo menores que 24 horas, por ejemplo para lluvias horarias, también se han usado procesos Markovianos estacionarios, sin embargo los modelos más comunes han sido aquéllos basados en procesos puntuales (LeCam, 1961; Kavvas y Delleur, 1975) que modelan la precipitación en tiempo continuo, o los modelos que parten de una tormenta y desagregan la lluvia a una escala de tiempo menor mediante un hietograma (Huff, 1967).

La mayoría de los modelos empíricos utilizados actualmente son modelos estocásticos (Fortin *et al.*, 1997) que están basados en la teoría de la probabilidad

para realizar la representación de la incertidumbre; claro está que estos modelos se vienen utilizando desde el año 1926; (Yule, 1926, 1927) fue quien describió los modelos AR, para que continuara Slutsky (1937) y propusiera los modelos MA; posteriormente 1954 (Wold) explica los modelos mixtos ARMA.

(Box y Jenkins, 1976) continúa con el desarrollo y aplicación de esta gama de modelos estocásticos, los cuales han sido ampliamente utilizados en la hidrología; estos modelos comprenden los modelos lineales autorregresivos (AR), los modelos lineales de promedios móviles (MA), los modelos lineales autorregresivos de promedios móviles (ARMA), los modelos periódicos ARMA (PARMA) y los modelos ARMA con entradas auxiliares (ARMAX), que permiten generar grandes series sintéticas temporales.

Debido a lo anterior, una de las herramientas más utilizadas en la modelación hidrológica y en la mayoría de los procesos del ciclo hidrológico es sin duda el uso de modelos estocásticos del tipo autorregresivos ARMA(p,q).

Los modelos autorregresivos de medias móviles (ARMA) se han aplicado fundamentalmente a procesos hidrológicos estacionales univariados (Salas *et al*, 1980; 1982; Obeysekera y Salas, 1986; Haltiner y Salas, 1988; Ula, 1990, Padilla *et al*, 1996). Estos modelos univariados se basan en el análisis de la estructura estocástica de una serie temporal con el objeto de pronosticar a corto plazo, completar datos y generar series sintéticas que conserven los principales estadísticos y la correlación temporal de la serie original.

En algunos países latinoamericanos han utilizado los modelos autorregresivos para estudiar diversos fenómenos y componentes hidrológicos y algunos

relacionados con el fenómeno del Niño, ya que este evento conecta globalmente el clima, los ecosistemas y las actividades socioeconómicas; desde la década de los 80 se ha intentado predecir este evento, pero hasta la fecha los modelos estadísticos y dinámicos aún son insuficientes. (Quispe, 2007), estudió mediante modelos autorregresivos el efecto del fenómeno del Niño en la temperatura superficial del mar (TSM) frente a la costa peruana, dicho trabajo comprendió 5 etapas: identificación, estimación, verificación diagnóstica, previsión y validación; logrando simular condiciones mensuales similares a las observadas en el litoral peruano, condiciones frías a fines del 2004, y condiciones neutrales a inicios del 2005.

En Colombia (Carvajal, 2005), Realizó las teleconexiones lineales entre el fenómeno ENSO y los caudales mensuales del Río Cauca (Valle del Cauca-Colombia), utilizando dos técnicas estadísticas multivariadas: El análisis de funciones ortogonales empíricas (FOES) y el análisis de correlación canónica (ACC), ajustando modelos ARMAX, para predecir los caudales, utilizando las primeras componentes principales y coeficientes canónicos de las variables macroclimáticas, como variables auxiliares en los modelos de caudal; obteniéndose mejoras en la predicción; En este mismo país (Domínguez, 2004), aplicó la ecuación de Fokker-Planck-Kolmogorov y realizó comparaciones con modelos autorregresivos para el pronóstico de afluencias a embalses hidroeléctricos; finalmente obtuvo un modelo para pronosticar las curvas de densidad de probabilidad de los caudales que representan las afluencias mensuales de la represa de Betania en Colombia.

En Centro América (Alfaro, 1999), Estudió las condiciones anómalas de la temperatura superficial del mar (ATSM) de los océanos Pacífico y Atlántico Tropical, ajustando un modelo Vectorial Autorregresivo de Medias Móviles (VARMA), con el objetivo de cuantificar la interacción océano – atmósfera entre

distintos índices oceanográficos en el Pacífico y Atlántico Tropical y los regímenes de precipitación en Centroamérica, encontrando que las ASTM en el Atlántico Tropical Norte influyen más fuertemente sobre la precipitación que aquellas del Pacífico Tropical Este.

En México (Gutierrez-López, 2006) determino los niveles de aguas máximas ordinarias (NAMO) de la presa el zapotillo, mediante el pronóstico de series de escurrimiento, precipitación y evaporación elaboradas con modelos estocásticos, utilizando la traza de escurrimientos en el sitio El Zapotillo los cuales se calcularon a partir de los registros históricos de la estación hidrométrica La Cuña proyectados a futuro, contra el NAMO obtenido con el funcionamiento que utiliza los registros sintéticos de las variables mencionadas. En este mismo año (Moreno, 2006), propuso un método de interpolación para estimar los coeficientes del modelo estocástico Cadena de Markov-Mixta Exponencial (Alcaide, 1986), ponderando los valores de las variables geográficas y climáticas elegidas, teniendo en cuenta su proximidad al valor en el punto sin registros de lluvia, logrando reproducir los datos observados con gran exactitud.

Por otro lado los modelos autorregresivos de promedios móviles (ARMA), se han utilizado para el desarrollo y estudio de modelos multivariados que han permitido modelar series de tiempo de precipitaciones mensuales, anuales y diarias pudiendo estudiar el comportamiento de las variaciones (Srikanthan y McMahon, 1985, 2001; Chapman, 1997; Sharma, 1999; Wang y Nathan, 2002; Srikanthan 2004, 2005, 2006); los modelos clásicos multivariados han sido diseñados para preservar la autocorrelación y autocorrelación cruzada (Salas *et al*, 1980; Bras y Rodriguez-Iturbe, 1985; Chin, 1995). En este sentido (2004, Martínez y Salas), analizaron y simularon lluvias horarias mediante un modelo periódico discreto autorregresivo de orden 1, denominado PDAR, así mismo desarrollaron un modelo estacionario autorregresivo AR de orden 1 con la finalidad de generar las

intensidades, en este trabajo también se analizaron datos de 4,6,12 y 24 horas; la estimación de parámetros de modelo PDAR se realizó por el método de momentos mientras que para la estimación del modelo AR se utilizaron dos métodos, en el método 1, las medias y desviaciones típicas horarias de la variable transformada se estimaron a fin de preservar las medias y las desviaciones típicas horarias obtenidas de la muestra histórica, mientras que en el modelo 2, las medias y desviaciones típicas horarias de la variable transformada se estimaron directamente a partir de la muestra transformada; finalmente demostraron que el modelo PDAR-AR con el método 1 de estimación era capaz de reproducir razonablemente bien las estadísticas históricas de las lluvias para varias escalas de tiempo. Paris (2003), Presenta una metodología para la cuantificación de la recarga natural de acuíferos en Santa Fe, Argentina; el análisis estocástico de las series temporales de precipitación y temperatura se realizó mediante la interpretación de gráficos de evolución temporal y comportamiento temporal medio, funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, periodograma y periodograma integrado. Ello permitió evaluar la homogeneidad de las series, caracterizar su estacionaridad, identificar la estructura autorregresiva y estacional de las mismas y ajustar los parámetros de modelos ARIMA (Box y Jenkins, 1976; Arensburg y Seoane, 2001; Seoane y Arensburg, 1995) con fines de obtener el pronóstico de dichas variables en el período de interés a paso mensual.

Así mismo (Ünal *et al*, 2004), generaron series sintéticas de precipitación anuales y mensuales, mediante la utilización de procesos autorregresivos (AR), el modelo de Tomas – Fiering (TF), método de fragmentos (F) y su versión modificada (MF), método de dos colas (TT) y el modelo reciente basado en el acercamiento de ondas (W), encontrando mejores resultados en la correlación al usar el método (W); por tal motivo los modelos estocásticos pueden ser relacionados con característica morfológicas, variables y fenómenos atmosféricos de manera espacial y temporal, haciendo especial énfasis en la precipitación; para la

construcción de un modelo estocástico de predicción de precipitaciones (Liñan et al., 2004)

Es conocido que las bondades de estos modelos permiten analizar la ocurrencia de eventos extremos, incertidumbres, posibles cambios climáticos y estrategias para determinar incluso, las políticas de operación en presas. Asimismo, el modelo Thomas-Fiering ARMA ha sido utilizado para caracterizar el cambio mensual de las elevaciones de los niveles de agua en lagos y embalses (Somlyódy y Honti, 2005). De la misma forma, *en la actualidad, el estudio de los modelos conceptuales de los procesos lluvia-escurrimiento desarrollados para diversos escenarios climáticos puede estudiarse con modelos autorregresivos* (Liden y Harlin, 2000; Podesta, 2006). Respecto al cambio climático, (Piwowar y Ledrew, 2002) utilizaron modelos ARMA para modelar series de tiempo correspondientes a imágenes de sensores remotos, con la finalidad de estudiar el cambio climático y determinar los impactos y cambios en las concentraciones de hielo en el océano ártico; convirtiéndose el análisis de sensibilidad remota en una herramienta muy importante en este tipo de estudios. También se han desarrollado y documentado métodos de generación estocástica de datos climáticos para escala de tiempo anual, mensual y diaria (Srikanthan y McMahon, 2000).

También es necesario destacar que los modelos autorregresivos se han utilizado se manera satisfactoria para la generación de caudales diarios, semanales, mensuales y anuales; de igual forma para la estimación de parámetros de modelos que permiten predecir caudales e inundaciones en tiempo real utilizando el método de mínimos cuadrados ponderados (Chao *et al*, 2008; Mohammadi *et al*, 2006); así mismo han sido utilizados para estudiar y modelar el comportamiento de los escurrimientos superficiales proponiendo el modelo conceptual de dos reservorios lineales en series, obteniendo estabilidad y buen desarrollo del modelo (Spolia, 1972,1973; Spolia y Chander, 1974).

El concepto de las redes neuronales artificiales (ANN) (Mc Culloch y Pitts) se basa en la simulación de los procesos en el sistema nervioso central del cerebro humano. Existen dos tipos de redes neuronales: (1) las redes que sirven para clasificar información (redes de asociación) y (2) las redes que sirven para modelar una función no lineal. Las redes de asociación se dividen dos clases: los clasificadores no supervisados y los clasificadores supervisados. Los clasificadores no supervisados adaptan los pesos de las neuronas y el resultado de la capa de salida dependerá únicamente de los patrones proporcionados las variables de entrada. Los clasificadores supervisados consideran una fase de entrenamiento que mediante redes de retropropagación, determinarán la respuesta del clasificador. La ventaja fundamental de la aplicación de los ANN, radica en la capacidad para desarrollar un procesamiento y aprendizaje de un proceso en forma paralela, adaptivo y no lineal (Castro, 2007).

Debido a las diversas aplicaciones, el concepto de redes neuronales (NN) en la modelación hidrológica ha sido ampliamente utilizado en este campo con total satisfacción (Daniell, 1991; French *et al*, 1992; Kang *et al*, 1993; Karunanithi *et al*, 1994; Lorrai y Sechi, 1995; Smith y Eli, 1995; Cheng y Noguchi, 1996; Minns y Hall, 1996, 1997; Yang, 1997; Dawson y Wilby, 1998; Mins, 1998; Abrahart y See, 1999; Campolo *et al*, 1999). Así mismo Las ANN también se han empleado en la estimación de gastos, como lo demuestran las investigaciones al respecto. (Abrahart y See, 2000), realizaron predicciones de series de datos de caudal cuencas situadas en el Reino Unido, mediante dos técnicas: procesos autorregresivos de promedios móviles (ARMA) y redes neuronales (NN), las modelaciones fueron realizadas basándose en registros continuos; encontrando resultados similares con ambas técnicas; Sahoo *et al*. (2006) realizan la predicción de avenidas repentinas en ríos de montaña con ANN, Jia *et al*. (2006) aplican ANN para generar series sintéticas de gastos provenientes de registros cortos, Wang *et al*. (2006) realizan el pronóstico de escurrimientos diarios por medio de modelos

híbridos de ANN, Dawson *et al.* (2006) efectúan la estimación de avenidas en sitios no aforados por medio de ANN y Valverde *et al.*(2005) aplican ANN para pronósticos de lluvias en la región de São Paulo. En México, Molina (2006) empleó el análisis ANN para la realización de tránsitos de avenidas en cauces.

Por otro lado se han realizado comparaciones entre los procedimientos autorregresivos ARMA(p,q) y procedimientos como las redes neuronales artificiales (ANN) o los métodos no paramétricos (*nearest-neighbours*) (Toth, *et al.*, 2000; Ochoa-Rivera, 2008). Sin embargo, los modelos ARMA siempre servirán como un parámetro de referencia de los resultados (Tingsanchali y Gautam, 2000; Abrahart y See, 2000)

En general, los modelos ARMA(p,q), han permitido desde hace más de una década, el estudio de diversas funciones de autocorrelación de las variables hidroclimatológicas que los hidrólogos utilizan para describir los procesos del ciclo hidrológico. Sin embargo se pueden encontrar toda una gama de modelos y de adecuaciones a los procedimientos tradicionalmente utilizados. Por ejemplo, empleando modelos empíricos basados en series con valores diarios y que permiten evaluar variaciones lineales cuando dependen de 2 factores autorregresivos, por lo tanto se crearon los esquemas ARMA-GARCH/EGARCH/SR-SARV(2) (Karanasos y Kim, 2003; Meddahi, 2003); también se han desarrollado metodologías basadas en el teorema de Bayes para estimar el número de ocurrencias de eventos lluviosos en un mes considerado condicionando el pronóstico a la lámina mensual, obteniendo resultados satisfactorios al compararse los pronósticos de ocurrencia con los registros observados (Zimmermann,2003; Migon y Monteiro, 1997).

Debido a la versatilidad, aplicabilidad y confianza, el empleo de los modelos autorregresivos no se limita sólo al campo de la hidrología, si no que son amplia y comúnmente utilizados en otras ramas de la ciencia y el conocimiento; convirtiéndose en una herramienta global para realizar pronósticos de variables, esto lo demuestran diversas investigaciones y estudios al respecto. Aguirre (2000) investigó la aplicación de las técnicas de identificación de sistemas dinámicos no lineales utilizando modelos NARMAX, describiendo estos como estructuras paramétricas del tipo entrada- salida, capaces de representar una amplia clase de sistemas no lineales. Chorro (2000) estudia la posibilidad de utilizar modelos ateóricos como son los modelos vectoriales de series temporales múltiples con la finalidad de obtener una estimación del mecanismo generador del proceso psicológico. Rodríguez (2003) realiza estudios sobre pronóstico no paramétrico de múltiples pasos adelante para estudiar la inflación colombiana mensual utilizando la estimación Kernel y modelos autorregresivos del tipo ARIMA, encontrando que el pronóstico no paramétrico es el único pronóstico que estadísticamente mejora al pronóstico que se hace con modelos de caminata aleatoria. Izquierdo (2006) genera predicciones de procesos ARMA mediante modelos autorregresivos y en el espacio de estados, estudiando la cuestión de si, al trabajar con procesos tipo ARMA, los modelos en el espacio de estados obtenidos mediante un método de subespacios proporcionaban mejores o peores predicciones que los modelos autorregresivos estimados por mínimos cuadrados; encontrando que cuando el componente MA de un ARMA (1,1) es próximo a 1, los modelos en el espacio de estados presentaban una alta probabilidad de proporcionar mejores predicciones que los modelos AR. Álvarez (2006), concluye que los modelos autorregresivos pueden describirse como aquéllos en los que una variable o conjunto de variables se explican, al menos en parte, en función de los valores pasados de esa misma variable o conjunto de variables, dado lo anterior desarrolló un modelo autorregresivo estructural (SVAR) con diagramas de nivel-flujo, permitiendo de esta manera aportar a dichos modelos capacidad predictiva a corto plazo, este enfoque permite que modelos de dinámica de sistemas puedan incorporar los elementos principales de los modelos autorregresivos.

Finalmente los modelos estocásticos lluvia – escurrimiento del tipo ARMA, son usados para diferentes análisis hidrológicos; mientras la forma general de este tipo de modelos es aceptada, existen algunos cuestionamientos en la forma de identificación del modelo, estimación de parámetros y otros efectos al realizar incrementos de tiempo; por tal motivo se han realizado investigaciones que examinan y evalúan dichos aspectos, basándose en los registros de datos hidrológicos de una cuenca; concluyendo con la selección de un procedimiento de modelación que puede representar la relación entre la precipitación y el escurrimiento de un modo simple y efectivo (Weeks y Boughton, 1987).

En este sentido la selección del tipo de modelo se convierte en un factor importante. Una vez se identifica la composición del modelo, debe decidirse un modelo entre aquellos existentes: AR (autorregresivos), ARMA (autorregresivos de media móvil), ARMAX (autorregresivos de media móvil con componente exógena) etc. Las características estadísticas de las muestras de las series hidrológicas son factores decisivos en la selección del tipo del modelo. Por ejemplo, series con un correlograma de crecimiento lento (memoria larga) requieren generalmente modelos ARMA en lugar de AR (Estrela, 1992).

Dentro de las técnicas y metodologías para la identificación de sistemas y modelos, existen diversos procedimientos que permiten estimar el orden de modelos dinámicos a partir de los datos medidos. El criterio de información de Akaike es uno de los métodos más utilizados para estimar el número de términos en un modelo dinámico ó más bien seleccionar cual de los modelos autorregresivos (AR, ARMA, ARMAX) es el que presenta mejor ajuste.

La anterior revisión justifica la realización de este tipo de estudios, debido a la escasa utilización de la modelación espacial de variables hidrológicas dentro de los modelos de predicción y pronóstico, es un campo de investigación y de innovación que debe ser explotado y desarrollado por la hidrología moderna. El desconocimiento de la formación de las regiones hidrológicamente homogéneas está relacionado con la incomprensión del significado de las características fisiográficas de una región que pueden ser utilizadas para formar grupos o para ser utilizadas en procedimientos multivariados complejos. Asimismo, la combinación de modelos estocásticos permite mejorar la generación de series sintéticas y de pronóstico; pero no se tiene lineamientos para la utilización conjunta de metodologías estocásticas en hidrología. Finalmente se desea que toda la ciencia en materia de hidrología estocástica pueda ser empleada en forma espacial y no sólo temporal, ya que los problemas actuales requieren prioritariamente el estudio del componente espacial de variables hidrológicas.

La puesta en marcha de estos modelos, en programas de cómputo simples puede ser una importante herramienta que puede ser ofrecida como una alternativa a la modelación tradicional.

2.2 Series de tiempo

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones X_t , cada una registrada en un momento específico que anotaremos t . Una serie de tiempo discreta es aquella donde el conjunto de veces T_0 en que se toman las observaciones, es un conjunto discreto, por ejemplo, intervalos fijos de tiempo. Una serie de tiempo continua es aquella donde las observaciones se registran frecuentemente durante determinado intervalo: por ejemplo $T_0 = [0,1]$.

Los fenómenos hidrológicos presentan una naturaleza aleatoria, por lo tanto para poder modelarlos se utilizan técnicas de probabilidad y estadística; así mismo para la generación de datos sintéticos es imprescindible la utilización de parámetros estadísticos, los cuales son calculados con base en los registros históricos.

Las muestras sintéticas que se generen deben tener una similitud estadística con los registros históricos (Fiering and Jackson; 1971).

- Media
- Varianza
- Coeficiente de asimetría

Los parámetros estadísticos más usados en la Hidrología son: Media, Desviación Estándar, Varianza, Coeficiente de Variación, Coeficiente de Asimetría y Coeficiente de Curtosis.

2.2.1 Media

La media o media aritmética se define como el cociente de la suma de los valores de las observaciones entre el número de observaciones.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (2.1)$$

donde x_i es el valor de las observaciones y N es el número total de observaciones.

2.2.2 Varianza

Este valor cuantifica el grado de dispersión o separación de los valores de la distribución con respecto a la media. Se denota por S^2 .

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} \quad (2.2)$$

2.2.3 Desviación Estándar

Se designa por la letra S y se define como la raíz cuadrada de la varianza.

$$S = \sqrt{S^2} \quad (2.3)$$

2.2.4 Coeficiente de Variación

El coeficiente de Variación es el cociente entre la desviación estándar y la media. Este parámetro es independiente de las unidades usadas y es por esta razón que es útil al compararlo entre dos o más grupos.

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \quad (2.4)$$

2.2.5 Coeficiente de Asimetría

Se conoce como Coeficiente de Asimetría o sesgo al grado de asimetría de una distribución con respecto a su media. Si el coeficiente es cero, hay una distribución simétrica con respecto a la media; si es positivo el sesgo es hacia la derecha y negativo cuando el sesgo es a la izquierda. Se designa con la letra g .

$$g = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{N(S^2)^{3/2}} \quad (2.5)$$

2.2.6 Coeficiente de Curtosis

Este coeficiente indica la concentración de datos alrededor de la media, en otras palabras, si la forma de distribución es aplanada o picuda. Se designa con la letra K .

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^4}{N(S^2)^2} \quad (2.6)$$

2.2.7 Covarianza y Correlación

La covarianza es una medida del grado de dependencia lineal entre las variables. Su expresión es la siguiente:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \quad (2.7)$$

Donde S_{xy} es la covarianza de las variables “x” y “y”. Si $S_{xy} \neq 0$ se puede afirmar que hay dependencia entre las variables “x” y “y” además esta puede ser directa o inversa.

Es directa cuando los incrementos positivos de “x” son también incrementos positivos en “y”, ($S_{xy} > 0$). Es inversa cuando los incrementos positivos de “x” corresponden a incrementos negativos de “y” ($S_{xy} < 0$).

La covarianza es una medida absoluta y no indica si el grado de dependencia es elevado o no. Para conocer el grado de dependencia se utiliza el coeficiente de correlación lineal, o simplemente correlación.

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad (2.8)$$

Donde r es el coeficiente de correlación, S_{xy} la covarianza de las variables X y Y , S_x y S_y la desviación estándar de las variables X y Y respectivamente. Este coeficiente es una medida adimensional del grado de dependencia entre las variables, tiene el mismo signo que la covarianza y cumple con la siguiente condición:

$$-1 \leq r \leq 1 \quad (2.9)$$

Cuando más se aproxime a 1 ó -1 , mayor será su dependencia lineal entre las variables, si r se aproxima a cero la dependencia lineal será prácticamente nula.

2.2.8 Transformación y normalización de datos

Las técnicas disponibles para la modelación de las series de tiempo, en su mayoría requieren que éstas tengan una distribución Normal, lo que en ocasiones no se cumple, por lo tanto se recomienda transformar la serie observada x_t a otra y_t ; posteriormente se estandariza la serie.

Existen diversas transformaciones, tales como la transformación Logarítmica, Gamma, Potencia, Box-Cox, etc.

La transformación de Box-Cox se lleva a cabo aplicando las siguientes expresiones:

$$w_i = \frac{(x_i)^\lambda - 1}{\lambda} \quad \lambda \neq 0, x_i > 0 \quad (2.10)$$

$$w_i = \ln(x_i) \quad \lambda = 0, x_i > 0 \quad (2.11)$$

donde x_i es la serie registrada, w_i es la serie normalizada y λ es el parámetro de transformación.

Esta técnica normaliza el coeficiente de asimetría ($g \approx 0$) pero a veces no aplica para el coeficiente de curtosis. Para esto se usa una segunda transformación:

$$t_i = \left(|w_i - \bar{w}| \right)^k \quad (2.12)$$

Donde t_i es la serie normalizada, \bar{w} es la media de los valores w_i y k es el parámetro de transformación.

La transformación de logarítmica se lleva a cabo aplicando la siguiente expresión:

$$Y = (X + a) \quad (2.13)$$

Por otro lado la transformación Gamma está dada por:

$$Y = \text{Gamma}(X) \quad (2.14)$$

En las expresiones (2.13) (2.14) Y es la serie normalizada, X es la serie original observada y a es el coeficiente de transformación.

La serie normalizada se estandariza con la siguiente expresión:

$$Y_{v,\tau} = \frac{X_{v,\tau} - \bar{X}_\tau}{S_\tau(X)} \quad (2.15)$$

donde $Y_{v,\tau}$ es la variable normalmente distribuida con desviación estándar uno y media cero para el año v de la serie estacional para el periodo τ . $S_\tau(X)$ y \bar{X}_τ son la desviación estándar y la media de la serie transformada para el mes τ .

Si la serie es anual la ecuación (2.15) se expresa de la siguiente manera:

$$Y_v = X_v - \bar{X} \quad (2.16)$$

En la expresión anterior Y_v es la variable normalizada para el año v y \bar{X} es la media de la serie normalizada X_v .

La normalidad se puede verificar aplicando las pruebas de normalidad de Snedecor y Cochran (1980) y Filliben (1975), ambas se aplican para un 10% de nivel de significancia.

2.3 Modelos Univariados

Los modelos autorregresivos de promedios móviles ARMA(p,q) se aplican en este caso a series anuales; son una combinación de los modelos autorregresivos AR(p) y de los modelos de promedios móviles MA(q) (Box y Jenkins, 1976; Salas *et al.*, 1980); el valor de p corresponde al número de parámetros asociados a la parte autorregresiva y el q es el número de parámetros asociados a la componente de promedios móviles.

La representación general de un modelo ARMA (p,q) es la siguiente:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.17)$$

donde Y_t representa la variable precipitación para el año t, o bien es la variable estandarizada con la ecuación (2.16) con distribución normal con media igual a cero y varianza $\sigma^2(Y)$, ε_t es asumido como ruido blanco que tiene distribución normal con media igual a cero y varianza $\sigma^2(\varepsilon)$, $\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$ son los parámetros autorregresivos y $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$ son los parámetros de la componente de promedios móviles.

Antes de hacer inferencias de cualquier modelo es importante la estimación de sus parámetros; cada estimador de un parámetro es una función de los valores de la muestra, los cuales son observaciones de una variable aleatoria, por lo tanto el parámetro estimado es una variable aleatoria que tiene su propia distribución muestral; por lo cual un estimador que se obtiene a partir de un grupo de valores puede considerarse como un valor observado de una variable aleatoria (Escalante y Reyes, 2002).

Para la estimación de los parámetros en modelos univariados ARMA (p,q), se pueden emplear varios métodos, entre ellos tenemos el método de los momentos (MOM) y el método de mínimos cuadrados (LS); en este caso empleamos el método de los momentos para la estimación de dichos parámetros, el cual consiste básicamente en plantear un sistema de ecuaciones, cuyo tamaño depende del número de parámetros a estimar; esto se hace al igualar los momentos poblacionales con los muestrales. Se puede ilustrar la estimación de los momentos de un modelo ARMA (1,0), ARMA (1,1) y ARMA (2,1) de la siguiente manera:

Para un modelo ARMA (1,0):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.18)$$

$$\hat{\phi}_1 = r_1 \quad (2.19)$$

$$\hat{\sigma}^2(\varepsilon) = s^2(1 - \hat{\phi}_1^2) \quad (2.20)$$

Para un modelo ARMA (1,1):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.21)$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} \quad (2.22)$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\phi}_1 + \frac{1 - \hat{\phi}_1 r_1}{\hat{\phi}_1 - r_1} - \frac{1}{\hat{\theta}_1} \quad (2.23)$$

$$\hat{\sigma}^2(\varepsilon) = s^2 \frac{\hat{\phi}_1 - r_1}{\hat{\theta}_1} \quad (2.24)$$

Para un modelo ARMA (2,1):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.25)$$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2 r_1 - r_3}{r_1^2 - r_2} \quad (2.26)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_3 - \hat{\phi}_1 r_2}{r_1} \quad (2.27)$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\phi}_1 + \frac{1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2}{\hat{\phi}_1 - r_1 + \hat{\phi}_2 r_1} - \frac{\hat{\phi}_1 - r_1 + \hat{\phi}_2 r_1}{(\hat{\phi}_1 - r_1 + \hat{\phi}_2 r_1) \hat{\theta}_1} \quad (2.28)$$

$$\hat{\sigma}^2(\varepsilon) = s^2 \frac{\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2 r_1 - r_1}{\hat{\theta}_1} \quad (2.29)$$

s^2 corresponde a la varianza de Y_t , $r_k = m_k/s^2$ es el estimador del coeficiente de autocorrelación de Y_t que es definido como $R_k = E[Y_t Y_{t-k}]/E[Y_t Y_t]$. m_k es el

estimador del coeficiente de autocovarianza de Y_t con $M_k = [Y_t Y_{t-k}]$. En el modelo anterior se asume $E[Y_t] = 0$. También se tiene en cuenta que $S^2 = m_0$.

El proceso de generación de la serie sintética se realiza aplicando la ecuación (2.17). Se generan los números aleatorio z_t con distribución normal estándar y luego se calcula ε_t de la siguiente manera:

$$\varepsilon_t = \sigma(\varepsilon) z_t \quad (2.30)$$

Para la generación de la serie correlacionada Y_t , es necesario seguir un procedimiento de calentamiento (warm-up), en este proceso los valores anteriores de Y_t de $t=1$, se suponen iguales a la media del proceso que en este caso es cero; por lo tanto Y_1, Y_2, \dots, Y_{N+L} son generados empleando la ecuación (2.17) y generando $\varepsilon_{1-q}, \varepsilon_{2-q}, \varepsilon_{3-q}, \dots$ con la ecuación (2.30), N es la longitud requerida para ser generados y L es la longitud del periodo de calentamiento (warm-up) necesario para remover el efecto de los valores iniciales supuestos para Y_t . El proceso de calentamiento (warm-up) tiene como ventaja que puede ser utilizado para modelos periódicos y estacionarios para diferentes ordenes, ya sean mayores o menores; mientras que los procedimientos de generación exacta disponibles en la literatura solo se aplican a modelos ARMA estacionarios o modelos periódicos con ordenes menores (Sveinsson *et al.*, 2007).

Para la modelación de series mensuales de precipitación las cuales pueden tener correlación mes con mes se utiliza el modelo autorregresivo de promedio móvil periódico PARMA (p,q), la forma general del modelo es (Salas, 1993):

$$Y_{v,\tau} = \sum_{i=1}^p \phi_{i,\tau} Y_{v,\tau-i} + \varepsilon_{v,\tau} - \sum_{j=1}^q \theta_{j,\tau} \varepsilon_{v,\tau-j} \quad (2.31)$$

donde $Y_{v,\tau}$ representa la variable precipitación para el año v y la temporada o mes τ . Para cada τ el proceso tiene distribución normal con media igual a cero y varianza $\sigma_{\tau}^2(Y)$. $\varepsilon_{v,\tau}$ es el ruido blanco que tiene distribución normal con media igual a cero y varianza $\sigma_{\tau}^2(\varepsilon)$, $\{\phi_{1,\tau}, \dots, \phi_{p,\tau}\}$ son los parámetros autorregresivos periódicos y $\{\theta_{1,\tau}, \dots, \theta_{q,\tau}\}$ son los parámetros de la componente de promedios móviles periódicos.

Si el número de temporadas o meses es ω , entonces un modelo PARMA (p,q) consiste de ω número de modelos individuales ARMA (p,q) .

Para la estimación de los parámetros en modelos univariados PARMA (p,q) , seguimos el método de los momentos (MOM); se puede ilustrar la estimación de los momentos de un modelo PARMA $(1,1)$, PARMA $(2,1)$ de la siguiente manera (Salas *et al*, 1982):

Para un modelo PARMA $(1,1)$:

$$Y_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} Y_{v,\tau-1} + \varepsilon_{v,\tau} - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-1} \quad (2.32)$$

$$\hat{\phi}_{1,\tau} = \frac{m_{2,\tau}}{m_{1,\tau-1}} \quad (2.33)$$

$$\hat{\theta}_{1,\tau} = \hat{\phi}_{1,\tau} + \frac{s_\tau^2 - \hat{\phi}_{1,\tau} m_{1,\tau}}{\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - m_{1,\tau}} - \frac{\hat{\phi}_{1,\tau+1} s_\tau^2 - m_{1,\tau+1}}{(\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - m_{1,\tau}) \hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (2.34)$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2(\varepsilon) = \frac{\hat{\phi}_{1,\tau+1} s_{\tau-1}^2 - m_{1,\tau+1}}{\hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (2.35)$$

Para un modelo PARMA (2,1):

$$Y_{v,\tau} = \phi_{1,\tau} Y_{v,\tau-1} + \phi_{2,\tau} Y_{v,\tau-2} + \varepsilon_{v,\tau} - \theta_{1,\tau} \varepsilon_{v,\tau-1} \quad (2.36)$$

$$\hat{\phi}_{1,\tau} = \frac{m_{2,\tau} m_{1,\tau-2} - s_{\tau-2}^2 m_{3,\tau}}{m_{1,\tau-1} m_{1,\tau-2} - s_{\tau-2}^2 m_{2,\tau-1}} \quad (2.37)$$

$$\hat{\phi}_{2,\tau} = \frac{m_{3,\tau} - \hat{\phi}_{1,\tau} m_{2,\tau-1}}{m_{1,\tau-2}} \quad (2.38)$$

$$\hat{\theta}_{1,\tau} = \hat{\phi}_{1,\tau} + \frac{s_\tau^2 - \hat{\phi}_{1,\tau} m_{1,\tau} - \hat{\phi}_{2,\tau} m_{2,\tau}}{\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - m_{1,\tau} + \hat{\phi}_{2,\tau} m_{1,\tau-1}} - \frac{\hat{\phi}_{1,\tau+1} s_\tau^2 - m_{1,\tau+1} + \hat{\phi}_{2,\tau+1} m_{1,\tau}}{(\hat{\phi}_{1,\tau} s_{\tau-1}^2 - m_{1,\tau} + \hat{\phi}_{2,\tau} m_{1,\tau-1}) \hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (2.39)$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2(\varepsilon) = \frac{\hat{\phi}_{1,\tau+1} s_\tau^2 + \hat{\phi}_{2,\tau+1} m_{1,\tau} - m_{1,\tau+1}}{\hat{\theta}_{1,\tau+1}} \quad (2.40)$$

donde s_{τ}^2 es la varianza estacional o temporal y $m_{k,\tau}$ es el estimador del coeficiente de autocovarianza de $Y_{v,\tau}$ que es definido como $M_{k,\tau} = E[Y_{v,\tau} Y_{v,\tau-k}]$, si se asume $E[Y_{v,\tau}] = 0$, se puede notar que $s_{\tau}^2 = m_{0,\tau}$.

La generación sintética de datos con modelos PARMA(p,q) es llevada a cabo de manera similar que los modelos ARMA(p,q).

2.4 Identificación de modelos

Un criterio para seleccionar los parámetros p y q del modelo ARMA es el análisis de las variaciones en el correlograma (dibujo de r_j contra j) y en el correlograma parcial ($\phi_{p,p}$ contra p) Salas, *et al.*, 1980). Otro procedimiento de selección es el criterio de información de Akaike, muy utilizado en la definición de parámetros de hidrogramas (Jena y Tiwari, 2006).

2.4.1 El criterio de Akaike

En el ámbito de la identificación de sistemas, existen diversos procedimientos que permiten estimar el orden de modelos dinámicos a partir de los datos medidos. El criterio de información de Akaike es uno de los métodos más utilizados para estimar el número de términos en un modelo dinámico.

Akaike (1972, 1977) ha recomendado la utilización de un estadístico, basado en la teoría de la información y el principio de máxima verosimilitud, el AIC, para elegir entre modelos el mejor.

Dada una distribución de probabilidad discreta (x_i, p_i) , donde x_i representa los valores particulares de la variable aleatoria, y p_i las probabilidades respectivas. La entropía de información de Shannon se escribe como sigue:

$$S = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i = -E\{\ln p\} \quad (2.41)$$

La función S es siempre positiva y alcanza su máximo cuando las probabilidades son iguales y vale cero cuando para un valor de x_i se tiene $p_i = 1$. La entropía puede considerarse como una medida natural de la incertidumbre global asociada a una distribución de probabilidad discreta.

La extensión de este concepto al caso continuo mediante:

$$S = -E\{\ln f(x)\} = -\int f(x) \ln f(x) dx \quad (2.42)$$

Con la ecuación anterior, puede demostrarse que la entropía así definida es, para algunas distribuciones, negativa y, para otras, infinita. Una dificultad adicional, es que la entropía de una distribución continua no es invariante respecto a transformaciones monótonas de la variable, como en el caso discreto. Kullback y Leibler (1951) parten de la noción de información como idea central, definiendo la variación de información al pasar de la distribución inicial a la final.

Esta medida admite una generalización directa para distribuciones continuas. Se define la variación de información al pasar de f a g mediante:

$$I(g;f) = \int g(x) \ln \frac{g(x)}{f(x)} dx \quad (2.43)$$

Es conocida como la cantidad de información en el sentido de Kullback al pasar de la distribución f a la g y es positiva a no ser que ambas distribuciones coincidan en casi todo punto.

El criterio de selección de modelos propugnado por Akaike (1974), se basa en la expresión anterior; se supone que $g(x)$ representa la distribución verdadera de una variable y sea $f(x/\theta)$ una familia paramétrica de modelos, donde θ representa un vector de parámetros. La idea de Akaike (1974), fue escoger aquel modelo que minimiza la cantidad de información requerida para pasar de $f(x/\theta)$ a $g(x)$, es decir, escoger aquel modelo más próximo desde esta perspectiva al modelo teórico. Si se tiene en cuenta que:

$$I(g(\square);f(\square/\theta)) = \int g(x) \ln g(x) dx - \int g(x) \ln f(x/\theta) dx \quad (2.44)$$

Minimizar $I(g;f)$ es equivalente a maximizar la segunda integral, que es la esperanza de $\ln f(x/\theta)$. Un estimador consistente de esta cantidad es su media muestral dada por:

$$E\{\ln f(x/\theta)\} = \frac{1}{N} \sum \ln f(x/\theta) \quad (2.45)$$

Y, minimizar esta expresión que es el objetivo del método de la máxima verosimilitud conduce a minimizar $I(g;f)$. Este resultado muestra como el método de máxima verosimilitud puede considerarse como un criterio natural de ajuste de un modelo (Akaike, 1974). Si se tiene en cuenta el sesgo del estimador anterior, ecuación (2.45), la minimización de la integral conduce a escoger el modelo con un valor menor de:

$$AIC = -2 \left[\sum_{j=1}^N \ln f(x_j/\hat{\theta}) \right] + 2K \quad (2.46)$$

donde K es el número de parámetros estimados, dimensión del vector θ , y $\hat{\theta}$ es el estimador de máxima verosimilitud. Este criterio se conoce con la abreviatura MAIC.

La aplicación de este criterio a un modelo ARMA es inmediato, su función de verosimilitud es (Box y Jenkins, 1970):

$$\ln(\theta, \sigma_a^2) = f(\theta) - \frac{N}{2} \ln \sigma_a^2 - \frac{\sum a^2}{2\sigma_a^2} \quad (2.47)$$

donde θ representa el vector de parámetros del modelo y $f(\theta)$ es despreciable cuando el tamaño muestral es grande. Entonces:

$$AIC = -2 \left(-\frac{N}{2} \ln \sigma_a^2 - \frac{\sum a^2}{2\sigma_a^2} \right) + 2K \quad (2.48)$$

y de aquí

$$AIC = N \ln \sigma_a^2 + N + 2K \quad (2.49)$$

donde N es el número total de datos utilizados en la estimación de los parámetros del modelo ARMA, y K representa el número de parámetros estimados que será, para un modelo estacional igual a la suma de los órdenes de los operadores más uno, debido a σ_a^2 ; más uno únicamente cuando la media de la serie estacionaria sea distinta de cero.

El enfoque de Akaike es atractivo porque amplía la teoría de estimación clásica de Fisher-Neyman y Pearson, donde la forma del modelo se supone conocida a priori, a situaciones más generales donde la identificación de la estructura del modelo puede resolverse como un problema de estimación. Akaike (1976) ha utilizado este criterio para investigar representaciones canónicas multivariantes para series temporales y ha presentado sus implicaciones en el análisis bayesiano, en especial en el establecimiento de distribuciones *a priori* (Akaike, 1978b), y en la selección bayesiana del orden de un proceso autorregresivo (Akaike, 1979a).

Dado que el establecimiento de este criterio se basa en un procedimiento heurístico su “racionalidad” para la selección de modelos depende de su eficacia empírica. Akaike (1974,1978a) ha presentado ejemplos de utilización con series

simuladas; ha estudiado la serie E ajustando modelos autorregresivos hasta llegar al orden veinte, y el criterio *MAIC* lo conduce a escoger un AR(2).

En conclusión, el criterio de Akaike combina el valor de la varianza y la significatividad del contraste.

Por lo tanto una aproximación sistemática a la modelación de series temporales estaría compuesta de las siguientes fases (Salas *et al.*, 1980):

- 1- Identificación de la composición del modelo
- 2- Selección del tipo de modelo
- 3- Identificación de la forma del modelo
- 4- Estimación de los parámetros del modelo
- 5- Comprobación de la bondad de ajuste del modelo
- 6- Evaluación de incertidumbres

Finalmente un modelo necesita ser comprobado para verificar si cumple ciertas hipótesis relativas al modelo y como representa las series de tiempo hidrológicas históricas.

Normalmente suele comprobarse la independencia y normalidad de los residuos ó también si el modelo reproduce estadísticamente estadísticos tales como medias, varianzas, sesgos, correlaciones y estadísticos relacionados con la variable en estudio (Estrela, 1991a,1991b,1992).

3 ANÁLISIS FRACTAL

3.1 Introducción

La principal diferencia entre la geometría fractal y la geometría clásica es que esta última presenta contornos diferenciables, mientras que en la geometría fractal aparecen contornos quebrados (no diferenciables), difíciles de medir. Por ejemplo, si se trata de medir el contorno de un país, el resultado dependerá de la resolución del mapa, de manera que una mayor resolución implica mayor longitud. Es por ello por lo que se tratará de medir los fractales usando otro tipo de dimensiones (dimensión fractal), de forma que se pueda comparar la longitud del litoral de un país con el de otro.

3.1.1 Estado del arte

La palabra fractal (del latín *fractus*, roto, irregular) fue introducida por Mandelbrot (1975, 1977) para hacer referencia a objetos demasiado irregulares como para ser descritos según la geometría tradicional. La geometría fractal (Mandelbrot, 1977; 1982) es una extensión de la geometría clásica y engloba la descripción, la clasificación y el análisis de subespacios geoméricamente ‘complicados’. Generalmente, la estructura y organización de un conjunto fractal no hace posible donde se sitúa cada punto que lo compone. Por ello debe definirse alguna relación entre las diversas estructuras observadas en el mismo para varios niveles de resolución (e.g. Barnsley, 1993). Esta relación se formula cuantitativamente mediante el concepto de *dimensión fractal*, que describe el comportamiento de escala de las estructuras fractales.

Al igual que sucede con los objetos fractales, los procesos y sistemas invariantes de escala, no poseen una escala que los caracterice (al menos para un intervalo de escalas elevado). Teniendo esto en cuenta, un proceso fractal es aquel en el que el mismo proceso elemental tiene lugar a distintas escalas. Para el intervalo de escalas analizadas, los estadísticos del proceso siguen leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. La relación entre los estadísticos para las diferentes escalas consistirá simplemente en cocientes de escala. Independientemente de que se hable de objetos, sistemas o procesos, puede distinguirse entre fractales determinísticos y fractales aleatorios (e.g. Falconer, 1990; Hastings y Sugihara, 1993):

Fractales determinísticos. Se construyen mediante reglas determinísticas y se clasifican como uniescalares y multiescalares. Un fractal uniescalar se obtiene dividiendo un objeto simple, definido en \mathbb{R}^n , en N piezas idénticas, siendo cada pieza una copia del objeto original reducido por el mismo factor $r < 1$. Cada una de esas piezas vuelve a dividirse en N partes, que se ordenan de igual forma en que lo estaban las partes procedentes del objeto original. Repitiendo este proceso indefinidamente obtenemos el fractal.

En un fractal multiescalar, el objeto primario se divide también en N partes, que esta vez no son idénticas. Se trata de reducciones del objeto original por diversos factores $r_j < 1$, variando j desde 1 hasta N .

Fractales aleatorios. Presentan aleatoriedad en cada fase de su construcción. No tienen auto-similitud entre las partes que los componen. Esta apariencia no uniforme es la que los hace útiles a la hora de describir determinados fenómenos naturales (por ejemplo, las líneas de costas, las curvas de nivel, las nubes...). Cuando para construir un fractal han de producirse infinitos pasos aleatorios, debe recurrirse a la teoría de la probabilidad (Falconer, 1990).

La figura 3.1 muestra la construcción de los tipos de fractales descritos, sobre el ejemplo clásico propuesto por Georg Cantor (1883). En el primer caso 3.1 (a), se divide la parte inicial en tres partes iguales y se borra la intermedia, repitiendo este proceso indefinidamente sobre las partes que permanecen. En la figura 3.1 (b) (fractal determinístico multiescalar), la parte inicial se divide en dos intervalos de longitudes diferentes, obtenidos con factores de reducción $r_1 = 0.25$ y $r_2 = 0.5$. La tercera parte de la figura 3.1 (c) muestra la generación de un fractal aleatorio, donde cada parte de las que se forman en cada uno de los pasos, se divide en tres iguales, de las que algunas son seleccionadas para ser eliminadas.

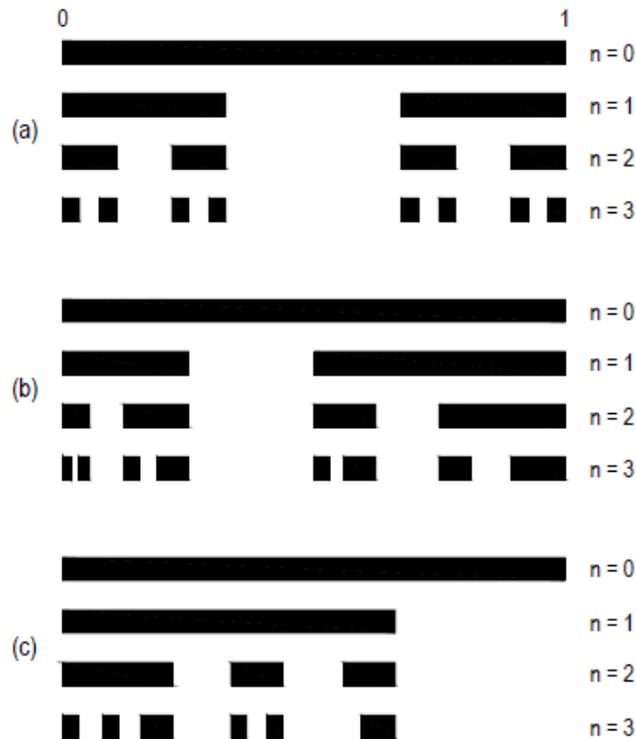


Figura. 3.1. Tipos de fractales

3.2 Sobre la estacionariedad

En el análisis de series temporales el objetivo es utilizar la teoría de procesos estocásticos para determinar qué proceso estocástico ha sido capaz de generar la serie temporal bajo estudio con el fin de caracterizar el comportamiento de la serie y predecir en el futuro. Si se quieren conseguir métodos de predicción consistentes, no se puede utilizar cualquier tipo de proceso estocástico, sino que es necesario que la estructura probabilística del mismo sea estable en el tiempo.

La filosofía que subyace en la teoría de la predicción es siempre la misma: se aprende de las regularidades del comportamiento pasado de la serie y se proyectan hacia el futuro. Por lo tanto, es preciso que los procesos estocásticos generadores de las series temporales tengan algún tipo de estabilidad. Si, por el contrario, en cada momento de tiempo presentan un comportamiento diferente e inestable, no se pueden utilizar para predecir. A estas condiciones que se les impone a los procesos estocásticos para que sean estables para predecir, se les conoce como estacionariedad.

El concepto de estacionariedad se puede caracterizar bien en términos de la función de distribución o de los momentos del proceso. En el primer caso, se habla de estacionariedad en sentido estricto y, en el segundo, de estacionariedad de segundo orden o en covarianza.

Estacionariedad estricta. Un proceso estocástico, Y_t , es estacionario en sentido estricto si y solo si:

$$F[Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}] = F[Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}] \quad \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ y } k \quad (3.1)$$

es decir, si la función de distribución de cualquier conjunto finito de n variables aleatorias del proceso no se altera si se desplaza k periodos en el tiempo.

Estacionariedad en covarianza. Un proceso estocástico, Y_t , es estacionario en covarianza si y solo si:

Es estacionario en media, es decir, todas las variables aleatorias del proceso tienen la misma media y es finita:

$$E(Y_t) = \mu < \infty, \quad \forall t \quad (3.2)$$

Todas las variables aleatorias tienen la misma varianza y es finita, es decir, la dispersión en torno a la media constante a lo largo del tiempo es la misma para todas las variables del proceso:

$$V(Y_t) = E[Y_t - \mu]^2 = \sigma_Y^2 < \infty, \quad \forall t \quad (3.3)$$

Las autocovarianzas solo dependen del número de periodos de separación entre las variables y no del tiempo, es decir, la covarianza lineal entre dos variables aleatorias del proceso que disten k periodos de tiempo es la misma que existe entre cualesquiera otras dos variables que estén separadas también k periodos, independientemente del momento concreto de tiempo al que estén referidas:

$$\text{cov}(Y_t, Y_s) = E[Y_t - \mu][Y_s - \mu] = \gamma_{[t-s]} = \gamma_k < \infty, \quad \forall k \quad (3.4)$$

Por lo tanto, un proceso estocástico es estacionario en covarianza si y solo si:

$$E(Y_t) = \mu < \infty \quad (3.5)$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_s) = \begin{cases} v(Y_t) = \sigma_Y^2 < \infty & t = s \\ \gamma_{[t-s]} = \gamma_k < \infty & t \neq s \end{cases} \quad (3.6)$$

Un proceso estocástico estacionario en covarianza está caracterizado si se conoce:

$$\mu, V(Y_t) \text{ y } \gamma_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.7)$$

Si un proceso estocástico es estacionario en covarianza y su distribución es Normal, es estacionario en sentido estricto.

3.2.1 Función de autocovarianzas y de autocorrelación

En principio, si se considera el proceso estocástico teórico, Y_t , que comienza en algún momento del pasado lejano y acaba en un futuro indeterminado se pueden calcular un número indefinido de autocovarianzas, por lo que conviene definir una función que las agrupe a todas.

Función de autocovarianza (FACV). La función de autocovarianza de un proceso estocástico estacionario es una función de k (número de periodos de separación entre las variables) que recoge el conjunto de las autocovarianzas del proceso y se denota por:

$$\gamma_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

Características de la función de autocovarianzas:

Incluye la varianza del proceso para $k = 0$:

$$\gamma_0 = E[Y_t - \mu][Y_t - \mu] = V(Y_t) \quad (3.9)$$

Es una función simétrica:

$$\gamma_k = E[Y_t - \mu][Y_{t+k} - \mu] = E[Y_t - \mu][Y_{t-k} - \mu] = \gamma_{-k} \quad (3.10)$$

La función de autocovarianzas de un proceso estocástico recoge toda la información sobre la estructura dinámica lineal del mismo. Pero depende de las unidades de medida de la variable, por lo que, en general, se suele utilizar la función de autocorrelación.

Función de autocorrelación (FAC). El coeficiente de autocorrelación de orden k de un proceso estocástico estacionario mide el grado de asociación lineal existente entre dos variables aleatorias de un proceso separadas k periodos:

$$\rho_k = \frac{\text{COV}(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0\gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (3.11)$$

Por ser un coeficiente de correlación, no depende de unidades y $[\rho_k] \leq 1, \forall k$.

La función de autocorrelación de un proceso estocástico es una función de k que recoge el conjunto de los coeficientes de autocorrelación del proceso y se denota por $\rho_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$. La función de autocorrelación se suele representar gráficamente por medio del correlograma, figura 3.2.

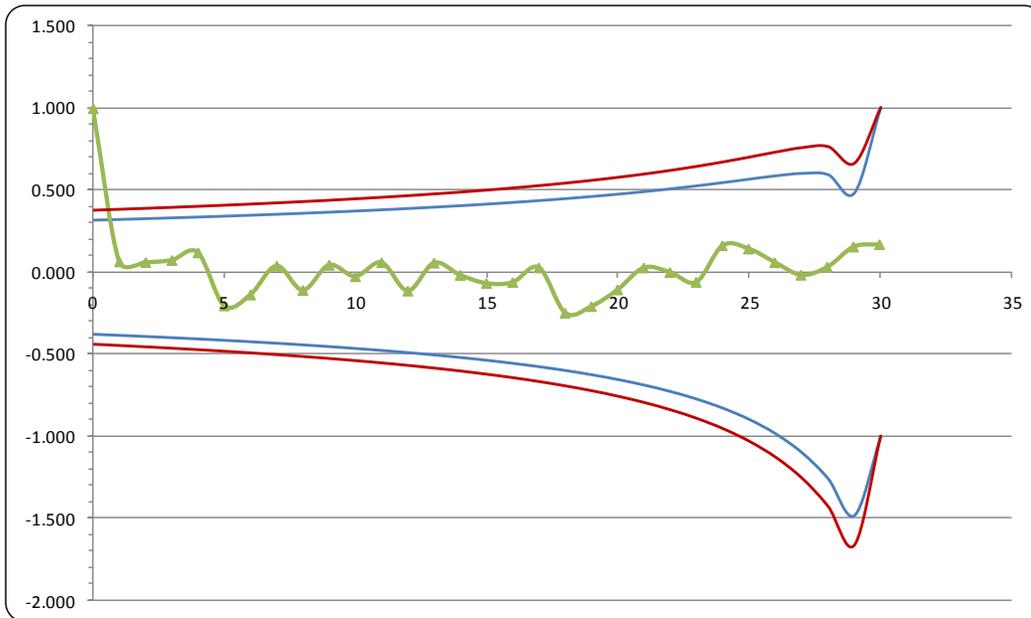


Figura. 3.2. Correlograma de la serie de tiempo de la estación El Salado, Córdoba – Colombia

Para el correlograma anterior se tiene; que cuando más se aproxime a 1 ó -1, mayor será su dependencia lineal entre las variables, si ρ_k se aproxima a cero la dependencia lineal será prácticamente nula. Por lo tanto la función de autocorrelación mide el grado de dependencia lineal de la serie en estudio

Por otro lado para series independientes, el correlograma poblacional debes ser igual a cero; pero debido a la variabilidad en el muestreo, el correlograma puede fluctuar alrededor de cero.

Las características de la función de autocorrelación de un proceso estocástico estacionario son:

El coeficiente de autocorrelación de orden 0 es, por definición, 1. Por eso, a menudo, no se le incluye explícitamente en la función de autocorrelación.

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1 \quad (3.12)$$

Es una función simétrica: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_{-k}}{\gamma_0} = \rho_{-k}$. Por ello, en el correlograma se representa la función de autocorrelación solamente para los valores positivos del retardo k .

La función de autocorrelación de un proceso estocástico estacionario tiende a cero rápidamente cuando k tiende a ∞ .

La función de autocorrelación es el principal instrumento para recoger la estructura dinámica lineal del modelo.

3.3 Elementos de la geometría fractal

Se introducen a continuación algunas definiciones fundamentales de la Geometría Fractal siguiendo a Falconer (1990).

Se define el tamaño $|U| = \delta$ de un subconjunto U no vacío de \mathbb{R}^E , donde E es la dimensión de Euclides y \mathbb{R} el conjunto de los números reales, como la más grande distancia entre un par de puntos x e y en U , *i.e.* : $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.

Si $\{U_j\}_\delta$ es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a δ , que cubre un conjunto F , i.e. F es un subconjunto de la unión de los conjuntos U_j , con $0 < |U_j| = \delta_j \leq \delta$, se dice que $\{U_j\}_\delta$ es una δ -cubierta de F .

La medida de Lebesgue. Para un subconjunto F de \mathbb{R}^E se define para cada $\delta > 0$ la medida siguiente:

$$L_\delta^E(F) = \inf \left\{ \sum_j \delta_j^E : \delta_j = |U_j|; \{U_j\}, \delta\text{-cubierta de } F \right\} \quad (3.13)$$

La medida *E-dimensional* de Lebesgue del conjunto F , denotada por $L^E(F)$, se define como el límite de la ecuación (3.13) cuando δ tiende a cero:

$$L^E(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_\delta^E(F) \quad (3.14)$$

Existen subconjuntos del conjunto de los números reales, cuya cantidad de elementos es igual al propio conjunto de los números reales y que su medida de Lebesgue es cero. El ejemplo clásico es el conjunto perfecto de Cantor (polvo de Cantor), un subconjunto del intervalo $[0,1]$. Este conjunto tiene entre sus propiedades la de no contener ningún intervalo, esto es, el conjunto de Cantor está formado sólo por puntos y cada uno de ellos es de acumulación. Se hace notar que la medida de Lebesgue no hace diferencia entre un punto aislado y el conjunto de Cantor, los dos conjuntos tienen medida de Lebesgue cero y es deseable poder hacer una diferencia entre estos dos conjuntos. También existen conjuntos que sin contener ningún intervalo tienen medida de Lebesgue positiva,

ejemplos de estos conjuntos son los llamados conjuntos “gordos” de Cantor que están formados sólo por puntos de acumulación. Es por lo tanto conveniente definir una medida más “fina” que la de Lebesgue. Una medida que haga diferencia entre puntos aislados y el “polvo” de Cantor. Una medida capaz de diferenciar fractales.

La medida de Hausdorff. Para un subconjunto F de \mathbb{R}^E se puede definir para cada $\delta > 0$ la medida siguiente:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_j \delta_j^s : \delta_j = |U_j|; \{U_j\}, \delta\text{-cubierta de } F \right\} \quad (3.15)$$

donde s es un número no negativo, no necesariamente entero.

Cuando se está interesado en minimizar, para cada cubierta de F de tamaños inferiores o iguales a δ , la suma de los tamaños de los conjuntos cubiertas a la potencia s , la clase de cubiertas admisibles de F se reduce a medida que δ disminuye; esto implica que el infimum de la suma disminuye y tiende a un límite cuando δ tiende a cero. Es decir:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (3.16)$$

donde $H^s(F)$ es la medida s -dimensional de Hausdorff del conjunto F .

La dimensión de Hausdorff-Besicovich. Un gráfico de $H^s(F)$ en función de s ($0 \leq s \leq E$) muestra que existe un valor crítico de S donde la medida de Hausdorff

salta de ∞ a 0 (e.g. Falconer, 1990). Este valor crítico $D = \dim_H(F)$ es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto F.

La dimensión fractal de Mandelbrot. Si F es cubierto por una colección finita de conjuntos ($j = 1, 2, \dots, N_\delta$) de la misma forma y tamaño (δ), de las ecuaciones (3.15) y (3.16) se obtiene:

$$H^D = \lim_{\delta \rightarrow 0} [N_\delta \delta^D] \quad (3.17)$$

Usando esta relación y la continuidad de la función logaritmo, Mandelbrot (1983) define una nueva dimensión como sigue:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\log(N_\delta)}{\log(H/\delta)} \right] \quad (3.18)$$

también llamada dimensión de conteo de cajas por la manera de calcularla (Barnsley, 1993): $D = \dim_B(F)$.

Se puede demostrar que se satisface la desigualdad siguiente: $\dim_H(F) \leq \dim_B(F)$. La dimensión de Mandelbrot es fácil de calcular y usualmente aproxima rápidamente la dimensión de Hausdorff-Besicovich, que es más difícil de calcular.

La ecuación (3.17) indica que en los objetos fractales, el número de conjuntos cubiertas de tamaño δ es inversamente proporcional a δ^D cuando $\delta \rightarrow 0$, es decir:

$$N_{\delta} = \left(\frac{H}{\delta}\right)^D \quad (3.19)$$

Volumen del cuerpo paralelo. Se define el cuerpo δ -paralelo P_{δ} de un conjunto F por: $P_{\delta}(F) = \{x \in \square^E : |x - y| \leq \delta, y \in F\}$. El volumen del cuerpo paralelo se obtiene como el producto del volumen del conjunto cubierta, es decir $c\delta^E$ donde c es un coeficiente de forma ($c = 1$ si las cubiertas son paralelepípedos), y del número de cubiertas, es decir: $\text{vol}_E(P_{\delta}) = N_{\delta}c\delta^E$. Considerando la ecuación (3.19) se obtiene cuando $\delta \rightarrow 0$:

$$\text{vol}_E(P_{\delta}) = cH^E \left(\frac{\delta}{H}\right)^{E-D} \quad (3.20)$$

La fórmula (3.20) puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir del volumen del cuerpo paralelo. Es decir:

$$D = E - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[\text{vol}_E(P_{\delta})/cH^E]}{\log(\delta/H)} \quad (3.21)$$

Notése que el volumen del cuerpo paralelo del fractal no es igual al volumen de la cáscara, esta última definida por: $C_{\delta}(F) = \{x \in \square^E - F : |x - y| \leq \delta, y \in F\}$.

3.4 Análisis geoestadístico

3.4.1 Semivariogramas

La función básica que describe la variabilidad espacial de un fenómeno de interés se conoce como semivariograma. El semivariograma da respuesta a que tan parecidos son los puntos en el espacio a medida que estos se encuentran más alejados.

El semivariograma como herramienta de estudios fue originalmente desarrollada para el estudio de variables regionalizadas por Matheron (1961). Su aplicabilidad ha sido ampliada al estudio de la evolución de variables en el tiempo, o series de tiempo. En lo sucesivo, las variables en una línea del espacio es tratada como una serie de tiempo o viceversa.

En un dominio determinado se toman muestras a una distancia constante, para cada variable analizada, se calcula la varianza encontrada entre todos los pares de puntos separados. También se puede intercalar las distancias entre muestras separadas en diagonal. La representación gráfica de todas las varianzas en función de la distancia que separa a las muestras es el semivariograma (o variograma), y el cálculo de la varianza entre pares separados por intervalos de tiempo se conoce como semivarianza y es estimada como:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [X(t_i + h) - X(t_i)]^2 \quad (3.22)$$

donde $\gamma(h)$ es la semivarianza para todas las muestras localizadas en el espacio separado por el intervalo de tiempo h , $N(h)$ es el número total de pares de muestras separados por un intervalo de tiempo h . $X(t_i)$ es el valor de la variable en el tiempo t_i (o una posición en el espacio); $X(t_i+h)$ es el valor de la variable en una posición localizada a una distancia h de t_i .

Sin embargo, el semivariograma puede ser ajustado a una función para cuantificar el grado y escala de variación temporal. Existen numerosos modelos que se utilizan en geostatística, siendo los más comúnmente usados los modelos esférico, exponencial, gaussiano y lineal.

El ajuste a una función permite extraer una serie de parámetros que son los que van a ser usados para la interpolación geostatística (krigeado) y que definen el grado y escala de variación temporal. Estos parámetros son el rango (a), la pepita (γ_0), la meseta (γ_∞), y la proporción de la varianza explicada por el espacio $\gamma_*(a) = [\gamma(a) - \gamma_0] / [\gamma_\infty - \gamma_0]$, a menudo expresada en porcentaje. El rango (A_0) es la distancia a la que la semivarianza deja de aumentar. El rango, por tanto, indica la distancia a partir de la cual las muestras son espacialmente independientes unas de otras, y representa el tamaño de grano o mancha que representa la variable. La pepita es la varianza no explicada por el modelo, y se calcula como la intercepción con el eje vertical. Se conoce también como varianza error puesto que la varianza de dos puntos separados por una distancia nula debería ser cero. Es por ello que esta varianza está normalmente indicando variabilidad a una escala inferior a la muestreada.

Además, los errores analíticos o de muestreo también contribuyen a la aparición de la varianza error. La máxima semivarianza encontrada entre pares de puntos

se conoce como meseta y debe coincidir con la varianza de la población. El parámetro $\gamma_*(a)$ da el grado de variación espacial, y por tanto el grado de incertidumbre a la hora de interpolar puntos en el espacio. Un alto cociente indica una variable espacialmente predecible.

3.4.1.1 Modelo semiesférico

El modelo semiesférico es el siguiente:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right]; & h \leq a \\ \gamma_\infty; & a < h \end{cases} \quad (3.23)$$

donde γ_0 es la pepita, γ_∞ es la meseta y representa el valor del semivariograma en a , llamado rango. Este modelo tiene un comportamiento lineal a distancias de separación pequeñas cerca del origen pero se va aplanando a mayores distancias y alcanza la meseta a una distancia igual al rango.

3.4.1.2 Modelo exponencial

El modelo exponencial tiene la siguiente estructura:

$$\gamma(h) = \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{h_c}\right) \right] \quad (3.24)$$

donde h_c es el tiempo (o distancia) de autocorrelación.

Se debe notar que la meseta se alcanza asintóticamente ($h \rightarrow \infty$). Se define un rango equivalente cuando $[\gamma(a) - \gamma_0] / [\gamma_\infty - \gamma_0] = 0.95$.

3.4.1.3 Modelo gaussiano

El modelo gaussiano se escribe como:

$$\gamma(h) = \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{h}{h_c}\right)^2\right] \right\} \quad (3.25)$$

donde h_c es una escala de tiempo (o distancia) característica. Al igual que el modelo exponencial la meseta se alcanza de manera asintótica; el rango equivalente se define del mismo modo que el precedente.

3.4.1.4 Modelo lineal

El modelo lineal tiene la estructura:

$$\gamma(h) = \gamma_0 + bh \quad (3.26)$$

donde b es la pendiente de la recta.

El modelo lineal puede ser modificado para incluir una meseta de manera análoga al modelo semiesférico, a saber:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0)(h/a); & h \leq a \\ \gamma_\infty; & a < h \end{cases} \quad (3.27)$$

3.4.2 Semivariograma cruzado

Es posible aprovechar la información espacial que contiene otra variable asociada con la primera. De esta forma se puede construir un semivariograma en donde la varianza representada no sea entre puntos de la misma variable sino de una variable con respecto a otra. Esta representación se conoce como semivariograma cruzado. Si el semivariograma cruzado da una estructura interpretable, esta información puede usarse para la predicción de la primera variable en una técnica que se conoce como cokrigado. La información que tiene una variable sobre otra es siempre menor que la que tiene una variable sobre sí misma. El cokrigado puede mejorar el krigeado cuando una de las dos variables haya sido muestreada con menor intensidad que la otra.

El semivariograma cruzado entre dos variables $X(t)$ y $Y(t)$ se define como:

$$\gamma_{XY}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [X(t_i+h) - X(t_i)][Y(t_i+h) - Y(t_i)] \quad (3.28)$$

La modelación del semivariograma cruzado se realiza a través de la modelación de los semivariogramas de cada variable, $\gamma_X(h)$ y $\gamma_Y(h)$, y del que resulta de la suma de las mismas $\gamma_{X+Y}(h)$. Reemplazando X por $X+Y$ en la ecuación (3.22), considerando la ecuación (3.28), se deduce la expresión del semivariograma cruzado a partir de los semivariogramas definidos anteriormente:

$$\gamma_{XY}(h) = \frac{1}{2} [\gamma_{X+Y}(h) - \gamma_X(h) - \gamma_Y(h)] \quad (3.29)$$

3.5 Análisis fractal clásico

3.5.1 Gráficas de funciones

El análisis de la gráfica de una serie de tiempo puede proporcionar información de su posible naturaleza fractal. Se sigue la exposición de Falconer (1990).

Dimensión de gráficas. La gráfica de una función $\text{graf}(f) = \{(t, f(t)) \mid a < t < b\}$ vista como un subconjunto del plano coordenado (t, x) puede ser un fractal. Si f tiene una derivada continua entonces la dimensión de $\text{graf}(f)$ es la unidad, es de hecho un 1-conjunto regular; lo mismo es cierto si f es de variación acotada, es decir, si $\sum_{i=0}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})| \leq \text{constante}$ para cada partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$. También

es posible para una función continua ser lo suficientemente irregular para tener una gráfica de dimensión estrictamente superior a la unidad, como la función de Weierstrass $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t)$, donde $1 < s < 2$ y $\lambda > 1$, la cual es una función continua en ningún punto diferenciable y tiene como dimensión de conteo por cajas $\dim_B \text{graf}(f) = s$.

Para deducir algunos estimadores de la dimensión de conteo por cajas de la gráfica de una serie de tiempo se introduce la definición del rango máximo de una función en un intervalo $[t_1, t_2]$:

$$R_f[t_1, t_2] = \sup_{t_1 < t, u < t_2} |f(t) - f(u)| \quad (3.30)$$

Proposición. Sea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supóngase que $0 < \delta < 1$, y m el mínimo entero más pequeño o igual que $1/\delta$. Entonces, si N_δ es el número de cuadrados de la δ -cuadrícula que intercepta la $\text{graf}(f)$,

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta] \quad (3.31)$$

Prueba. El número de cuadrados de lado r en la columna arriba del intervalo $[i\delta, (i+1)\delta]$ que intercepta la $\text{graf}(f)$ es al menos $R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$ y a lo más $2 + R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$, usando la continuidad de f . Sumando sobre todos los intervalos se deduce la ecuación (3.31). Lo anterior se ilustra en la figura 3.3.

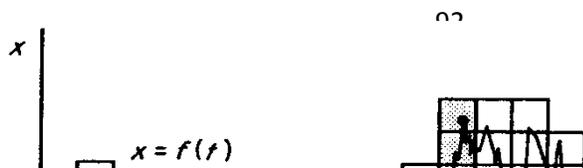


Figura 3.3 El número de cuadrados de lado δ en una columna arriba de un intervalo de tamaño δ que intercepta la gráfica (f) es aproximadamente el rango de f sobre el intervalo dividido por δ . Sumándolos da un estimador de la dimensión de conteo por caja de la graf (f) (Falconer, 1990).

La proposición se aplica inmediatamente a funciones que satisfacen una condición de Hölder. Como es bien sabido una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada una función de Hölder de exponente α , si $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ con $x, y \in X$, para una constante c . La función es llamada de Lipschitz si α puede ser tomado como la unidad, y una función bi-Lipschitz si $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$ para $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$.

Corolario. Sea $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

a) Supóngase

$$|f(t) - f(u)| \leq c|t - u|^{2-s} \quad ; \quad 0 \leq t, u \leq 1 \quad (3.32)$$

donde $c > 0$ y $1 < s < 2$. Entonces $H^s(F) < \infty$ y $\dim_H \text{graf}(F) \leq \dim_B \text{graf}(F) \leq s$. Esto permanece cierto si (3.32) se mantiene cuando $|t - u| < \delta$ para algún $\delta > 0$.

b) Supóngase que hay números $c > 0$, $\delta_0 > 0$ y $1 < s < 2$ con la siguiente propiedad: para cada $t \in [0, 1]$ y $0 < \delta < \delta_0$ existe u tal que $|t - u| < \delta$ y

$$|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s} \quad (3.33)$$

entonces $s \leq \underline{\dim}_B \text{graf}(F)$.

3.5.2 Semivariograma de funciones fractales

Por conveniencia para el análisis se asume que $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Sobre grandes períodos $[-T, T]$ se define el semivariograma como la mitad del valor medio de la integral de los cuadrados de las diferencias entre f en tiempos separados por h :

$$2\gamma(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t+h) - f(t)]^2 dt \quad (3.34)$$

Si f satisface las condiciones (3.32) y (3.33) del corolario precedente, entonces hay constantes c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 h^{2(2-s)} \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t+h) - f(t)]^2 dt \leq c_2 h^{2(2-s)} \quad ; \quad h \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

Así, el semivariograma de una serie de tiempo fractal tiene el comportamiento:

$$\gamma(h) \propto ch^{2(2-D)} \quad ; \quad h \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

donde c es una constante y no es irrazonable esperar que $s = D$ sea la dimensión de conteo de cajas de la gráfica de f .

3.5.3 Autocorrelación de funciones fractales

Se asume que el valor medio de la función f existe en largos periodos, definida por:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt \quad (3.37)$$

Una medida de la correlación entre f en tiempos separados por h es proporcionada por la función de autocorrelación definida por:

$$C(h) = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t+h) - \langle f \rangle][f(t) - \langle f \rangle] dt \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+h)f(t) dt - \langle f \rangle^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

Puesto que

$$\int [f(t+h) - f(t)]^2 dt = \int [f(t+h)]^2 dt + \int [f(t)]^2 dt - 2 \int f(t+h)f(t) dt$$

se deduce la relación entre la función de autocorrelación y el semivariograma:

$$C(0) - C(h) = \gamma(h) \quad (3.39)$$

donde $C(0) = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$ es la varianza de f y se ha supuesto que la media del cuadrado de f existe:

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t)]^2 dt \quad (3.40)$$

Igualando las ecuaciones (3.36) y (3.39) se obtiene el comportamiento de la función de autocorrelación siguiente:

$$C(0) - C(h) \propto ch^{2(2-D)} \quad ; \quad h \rightarrow 0 \quad (3.41)$$

3.5.4 Espectro de potencia de funciones fractales

El espectro de potencia de una función f está definida por:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T e^{it\omega} f(t) dt \right|^2 \quad (3.42)$$

Se puede demostrar que la función de autocorrelación y el espectro de potencia forman un par de transformadas de Fourier, es decir:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} C(t) dt \quad ; \quad C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ih\omega} S(\omega) d\omega \quad (3.43)$$

También se puede demostrar a partir de las ecuaciones (3.42) y (3.43) que las funciones $C(h)$ y $S(\omega)$ son pares, y en consecuencia:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} C(t) \cos(\omega t) dt \quad ; \quad C(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega \quad (3.44)$$

La estructura de la ecuación (3.41) puede ser obtenida si el comportamiento de $S(\omega)$ para valores altos de la frecuencia sigue una ley en potencia:

$$S(\omega) \propto b\omega^{-\beta} ; \quad \beta > 0 \quad (3.45)$$

De la ecuación (3.44) se tiene $\pi C(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$ y según una identidad trigonométrica:

$$\pi[C(0) - C(h)] = \int_0^{\infty} S(\omega)[1 - \cos(\omega h)] d\omega = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \sin\left(\frac{1}{2}\omega h\right) d\omega \quad (3.46)$$

Introduciendo la ecuación (3.45) en la ecuación (3.46) y haciendo el cambio de variables $u = \omega h$, se obtiene:

$$C(0) - C(h) = \left[(2b/\pi) \int_0^{\infty} u^{-\beta} \sin\left(\frac{1}{2}u\right) du \right] h^{\beta-1} \quad (3.47)$$

la cual tiene la estructura de la ecuación (3.41) ; su parámetro c es igual al término entre corchetes y la igualdad de los exponentes proporciona una manera de obtener la dimensión fractal a partir del parámetro β estimado en la región de altas frecuencias del espectro de potencia, a saber:

$$D = \frac{1}{2}(5 - \beta) \quad (3.48)$$

El análisis precedente indica que la forma del semivariograma de una serie de tiempo, la cual puede tener características fractales, sigue una ley en potencia cuando los intervalos de tiempo son pequeños, ecuación (3.36). Con fines de generalidad se agrega el efecto de pepita, introducido en la geostatística para escribir esta ley en potencia; también se reemplaza el exponente $(2-D)$ por un parámetro α , ya que el valor obtenido mediante el ajuste del semivariograma experimental con el semivariograma fractal fuera de su dominio de validez no necesariamente corresponderá a su significado teórico.

El semivariograma en potencia con efecto de pepita se puede escribir como sigue:

$$\gamma(h) = \gamma_0 + bh^{2\alpha} \quad (3.49)$$

Este puede ser adaptado cuando el semivariograma tiene una asíntota (γ_∞), es decir:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0)(h/a)^{2\alpha}; & h \leq a \\ \gamma_\infty; & a < h \end{cases} \quad (3.50)$$

Una posibilidad para estimar la dimensión fractal es a partir del ajuste del semivariograma experimental con:

$$\gamma(h) = \gamma_0 + (\gamma_\infty - \gamma_0) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{h}{h_c} \right)^{2\alpha} \right] \right\} \quad \text{con} \quad \alpha = 2 - D \quad (3.51)$$

El semivariograma exponencial corresponde a $\alpha = \frac{1}{2}$, es decir a $D = \frac{3}{2}$, mientras que el gaussiano a $\alpha = 1$, es decir a $D = 1$. El ruido blanco corresponde a $\alpha = 0$, es decir a $D = 2$.

3.5.5 Análisis de rango reescalado

El hidrólogo británico Harold Edwin Hurst (1880-1978) fue el primero en estudiar las series ahora fractales; sus ideas fueron retomadas por Mandelbrot quien colocó su trabajo en un contexto más general bajo el nombre de *Análisis de Rango Reescalado* (R/S). Hurst fue constructor de presas en los inicios del Siglo XX y por un tiempo trabajó en el proyecto de la presa del río Nilo. En el momento del diseño de la presa se le presentó un problema interesante de hidrología concerniente en determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos como lluvias y riachuelos y un flujo controlado de salida del río utilizado primordialmente en el riego. Sin embargo, muchos hidrólogos habían supuesto este comportamiento del influjo como un proceso aleatorio, una suposición razonable cuando se trabaja en un ecosistema complejo. Sin embargo, a él no le pareció que se explicara de forma tan fácil este comportamiento. Él estudió los registros históricos (de 622 D.C. a 1469 D.C.) que mantenían los egipcios y observó que en el proceso flujos más grandes del promedio eran seguidos por sobre flujos todavía más grandes. Inesperadamente el proceso cambiaba, flujos menores que el promedio eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores. Parecían ciclos pero cuya

longitud no era periódica. Un análisis estándar revelaba la no existencia de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrollo su propia metodología.

El R/S tiene media cero y se expresa en términos de la desviación estándar. En general los valores de R/S se incrementan con n, y sigue una ley en potencia cuyo exponente se denomina exponente de Hurst; esta es la primera conexión del fenómeno Hurst y la geometría Fractal. El exponente de Hurst (H) puede estimarse por medio de una regresión lineal de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$, o sea:

$$\ln(R/S)_n = \ln(c) + H\ln(n) \quad (3.52)$$

Si el sistema estuviera distribuido independientemente entonces $H = \frac{1}{2}$, sin embargo de sus investigaciones del río Nilo encontró $H = 0.91$. Mandelbrot demostró que en series de tiempo cuyas observaciones son independientes el estadístico (R/S) es asintóticamente proporcional a la raíz cuadrada, es decir si $H = \frac{1}{2}$ resulta un evento aleatorio puro. Hurst supone como hipótesis nula que el comportamiento del fenómeno sea de una caminata aleatoria o un movimiento browniano. Dependiendo del valor que tome H puede clasificarse la independencia o dependencia de los procesos de acuerdo al siguiente criterio:

Si $H = \frac{1}{2}$ el proceso es independiente y es importante notar que un análisis R/S no requiere que el proceso subyacente se distribuya normalmente, solo independiente. El análisis R/S es no paramétrico por lo que pueden considerarse distribuciones como t – de student, gamma entre otras.

Si $\frac{1}{2} < H < 1$ las series de tiempo son persistentes, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda en un momento dado repercute en el futuro. No hay escala de tiempo característica, que es la propiedad clave de las series de tiempo fractales. En términos de dinámica caótica existe sensibilidad sobre las condiciones iniciales. Las series persistentes son las más comunes encontradas en la naturaleza.

Si $0 < H < \frac{1}{2}$ significa que la serie de tiempo es antipersistente. Un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática.

Hurst desarrolló una metodología para el cálculo del coeficiente H que aplicó al caso del flujo del río Nilo, pero que en términos generales puede aplicarse a cualquier serie que se sospeche se comporte como fractal en cualquier área de estudio. La idea es dividir el conjunto o serie original de datos en subconjuntos más pequeños pero de igual tamaño que se analizan por separado. Para cada grupo se determina el valor esperado de la dicha muestra y se calcula la diferencia de cada elemento de la serie respecto de la media, posteriormente se construye una variable que vaya sumando dichas diferencias. En cada subconjunto se determina los valores máximos, mínimos y en seguida la diferencia entre ambos para luego promediar dicha diferencia en todos los subgrupos. Esta desviación calculada de esta forma se compara con la desviación estándar muestral y de esta forma se estima el rango reescalado $(R/S)_n$ para diferentes tamaños de subconjuntos de n . Al final se hace una regresión de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$ y de esta manera se obtiene el coeficiente H .

3.5.6 Ondoletas

A través de los tiempos, se ha buscado una manera eficaz de representar distinto tipo de señales. Hasta hace poco, para analizar señales complejas se utilizaban principalmente métodos de series de tiempo, en particular, análisis espectrales de las potencias, como es el caso del conocido análisis de Fourier. En general, todos los análisis espectrales descomponen una forma de onda compleja en una suma lineal de componentes de onda más elementales; en el caso particular del análisis de Fourier, las ondas elementales son seno y coseno. Al aplicar la transformación lineal, la señal que está en el dominio del tiempo cambia a otra función en el dominio de las frecuencias. Sin embargo, estos análisis se basan en supuestos que muchas veces las señales no satisfacen. La Transformada de Fourier presupone que la señal tenga ciertas características, entre ellas, la estacionalidad. Habitualmente, este supuesto es violado, es decir, se aplica la transformación de Fourier a señales que no son estacionarias, de modo que el resultado pudiera no representar la realidad. Problemas de este tipo son los que han motivado la búsqueda de otras formas de análisis de señales, como las llamadas ondeletas.

Esta transformada proporciona información sobre el espacio y la frecuencia dependiendo de la serie de tiempo. La transformada tiene bases fractales, y su uso particular es cuando aplica multiescalas en series de tiempo no periódicas.

La transformada de Ondoleta es un filtro $g\left[\frac{t'-t}{a}\right]$ donde pasa una serie de tiempo $f(t')$. La forma general de la transformada de Ondoleta está dada por:

$$W(t,a) = \frac{1}{a^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t'-t}{a}\right) f(t') dt' \quad (3.53)$$

El filtro está centrado en t , parámetro de posición, con parámetro de escala a ; t' es la variable de integración. El ancho efectivo del filtro se toma generalmente como una constante, múltiplo del parámetro de escala. La cantidad $g(t')$ es conocida como la “ondoleta madre”. Otras ondoletas son versiones reescaladas de la ondoleta madre. El factor $a^{1/2}$ es una energía de normalización a fin de que la señal sea transformada a la misma energía en todas las escalas. El área de cada ondoleta debe sumar cero, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t') dt' = 0 \quad (3.54)$$

Cuando a es incrementado un conjunto de ondoletas pueden generar un amplio rango de escalas en la señal $f(t')$. Los valores pequeños del parámetro de escala a son equivalentes a examinar altas frecuencias de una serie de tiempo; valores grandes de a son equivalentes a examinar bajas frecuencias.

Es común utilizar como ondoleta madre el “Sombrero Mexicano”, la cual es el negativo de la segunda derivada de la campana de Gauss, es decir:

$$g(t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - t'^2) e^{-\frac{1}{2}t'^2} \quad (3.55)$$

Sustituyendo la ecuación (3.55) en (3.53) se obtiene:

$$W(t,a) = \left(\frac{1}{2a\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{t' - t}{a} \right)^2 \right] e^{-(1/2)((t' - t)/a)^2} f(t') dt'$$

3.5.7 Filtro de Kalman

El filtro tiene su origen en el documento de Kalman (1960) donde describe una solución recursiva para el problema del filtrado lineal de datos discretos. La derivación de Kalman fue dentro de un amplio contexto de modelos estado-espacio, en donde el núcleo es la estimación por medio de mínimos cuadrados recursivos. Desde ese momento, debido en gran parte al avance en el cálculo digital, el filtro de Kalman ha sido objeto de una extensiva investigación y aplicación, particularmente en el área de la navegación autónoma y asistida, en rastreo de misiles y en economía.

La representación estado-espacio es esencialmente una notación conveniente para la estimación de modelos estocásticos donde se asumen errores en la medición del sistema, lo que permite abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo. Entre los usos particulares se encuentra la modelación de componentes no observables y parámetros que cambian en el tiempo, así como la representación de modelos ARIMA y de algunos otros que requieren ser aproximados por máxima verosimilitud.

Caso de tiempo discreto. Se tiene un sistema dado por:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.56)$$

$$z_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + u_k \quad (3.57)$$

donde w_k es ruido blanco de valor promedio igual a cero y con varianza Q_k en el instante k ; u_k es ruido blanco de valor promedio igual a cero y con varianza R_k Q_k en el instante k .

El filtro de Kalman permite identificar el estado x_k a partir de las mediciones anteriores de u_k, z_k, Q_k, R_k y las identificaciones anteriores de x_k .

Caso de tiempo continuo. Se tiene un sistema dado por:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \quad (3.58)$$

$$z(t) = C(t)x(t) + u(t) \quad (3.59)$$

donde $w(t)$ es ruido blanco de valor promedio igual a cero y con varianza $Q(t)$ en el intervalo de tiempo descrito como t ; $u(t)$ $w(t)$ es ruido blanco de valor promedio igual a cero y con varianza $R(t)$ en el intervalo de tiempo descrito como t .

El filtro de Kalman permite identificar el estado $x(t + dt)$ a partir de las mediciones anteriores de $u(t), z(t), Q(t), R(t)$ y las identificaciones anteriores de $x(t)$.

3.6 La entropía

3.6.1 La entropía de Boltzmann

Si un sistema aislado no está en equilibrio, se puede suponer que tiene una distribución de partículas entre los niveles accesibles al sistema de menor probabilidad que la máxima o de equilibrio; el sistema evolucionará hasta alcanzar la distribución de máxima probabilidad. Para describir esta tendencia natural, irreversible, hacia el equilibrio, a partir del trabajo de Carnot como base, Clausius introduce el concepto de entropía (S) definido de modo que $dS = dQ/T$, donde dQ es la variación en la cantidad de calor en el sistema y T es la temperatura absoluta; un sistema aislado en una situación de no equilibrio evolucionará en la dirección en que la entropía aumente, siendo esta característica la base del segundo principio de la Termodinámica.

Boltzmann demuestra que la entropía está relacionada con el número Ω de estados del sistema mediante:

$$S = k \log \Omega \quad (3.60)$$

donde k una constante, conocida en Mecánica Estadística como la constante de Boltzmann y vale $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$ si el logaritmo es el neperiano.

Si se acepta que un sistema está más organizado mientras mayor es el número de restricciones impuestas, la entropía es entonces la medida de la falta de organización de un sistema macroscópico aislado; cada vez que se remueve una restricción en este sistema, se induce un proceso que, al terminar, deja al sistema en un estado con una restricción menos y, por lo tanto, más desorganizado.

3.6.2 La entropía de información

Shannon (1948) inicia la teoría de la información como una rama de la probabilidad, en la cual propone e investiga un nuevo modelo matemático de sistemas de comunicación; la investigación de Shannon se basa en el problema de la transmisión eficiente de la información. Uno de los postulados básicos de la teoría de la información es que ésta se puede tratar como una cantidad física mensurable, tal como densidad o masa. Shannon muestra que cuando se calcula un valor numérico para la información, éste puede ser asimilado a una entropía. Aplicando la segunda ley de la termodinámica a la teoría de información la entropía de Shannon es una medida de la falta de información o incertidumbre de un experimento probabilístico.

Considerando un conjunto de eventos $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ con probabilidades de ocurrencia $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ de modo que:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (3.61)$$

se introduce la entropía de Shannon para medir la falta de información del conjunto definida por:

$$S(p_1, p_2, \dots, p_N) = -k \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) \quad (3.62)$$

La base logarítmica puede ser arbitraria, en teoría de información se toma la base dos y $k = 1$, y que el esquema consiste en dos eventos con igual probabilidad de ocurrir (sí o no) y la unidad de entropía es llamada bit; el resultado es el mismo se toma $k = 1/\log 2$.

Se puede demostrar que para N fijo, la entropía de Shannon tiene un máximo cuando los eventos son equiprobables ($p_1 = p_2 = \dots = p_N$). Dada la condición de normalización, definida por la ecuación (3.61), se puede eliminar una de las N variables, luego expresar la entropía definida por la ecuación (3.62), en función de las $(N-1)$ variables restantes, y enseguida buscar sus valores donde la entropía presenta un extremo. Sin embargo, existe un método general para tratar este tipo de problemas, conocido como método de los multiplicadores de Lagrange. Se trata de buscar los extremos de la función $S(p_1, p_2, \dots, p_N)$ sabiendo que las N variables están ligadas por la relación $\sum_{i=1}^N p_i - 1 = 0$. El método de Lagrange consiste en buscar los extremos de la función:

$$S_\lambda(p_1, p_2, \dots, p_N) \equiv S(p_1, p_2, \dots, p_N) + \lambda \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right) \quad (3.63)$$

como si las N variables fueran independientes; λ es un parámetro llamado multiplicador.

Derivando la función (3.63) con respecto a cada una de las variables, considerando la ecuación (3.62), se obtiene:

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial p_i} = -k \left[\log(p_i) + 1 - \frac{\lambda}{k} \right] ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.64)$$

La anulaci3n de las N derivadas conduce a $\log(p_i) = \lambda/k - 1$, de donde se infiere que las N probabilidades son iguales entre s3. Igualdad que llevada a la ecuaci3n (3.61) proporciona $p_i = 1/N$, el cual introducido a su vez en la ecuaci3n (3.62) proporciona $S = k \log(N)$, resultado equivalente a la entrop3a de Boltzmann, ecuaci3n .

N3tese que la entrop3a de informaci3n es nula cuando una de las probabilidades vale la unidad y el resto de las mismas son nulas.

3.6.3 Entrop3a de R3nyi

La entrop3a de R3nyi est3 definida por:

$$R(p_1, p_2, \dots, p_n) = -k \frac{1}{q-1} \log \left[\sum_{i=1}^n (p_i)^q \right] \quad (3.65)$$

donde q es un n3mero real.

La entrop3a de Shannon se deduce de la ecuaci3n (3.65) cuando $q \rightarrow 1$ y considerando la condici3n de normalizaci3n definida en la ecuaci3n (3.61).

3.7 Medidas multifractales

Siguiendo a Falconer (1990), considérese que μ es una medida soportada por una región acotada de \mathbb{R}^E con masa total $\mu(\mathbb{R}^E) = 1$; el soporte de la medida puede o no ser fractal. Para cada $0 < \delta < 1$, sean $\{B_i\}$ los cubos de una δ -malla que intercepta el soporte de la medida; y se calcula el número de los cubos de la malla con una medida significativa. Para $-\infty < \alpha < \infty$ se define:

$$N_\delta(\alpha) = \{i : \mu(B_i) \geq \delta^\alpha\} \quad (3.66)$$

También se definen las sumas sobre los cubos de la δ -malla para $-\infty < q < \infty$:

$$S_\delta(q) = \sum_i \mu_i^q \quad \text{con} \quad \mu_i = \mu(B_i) \quad \text{y} \quad \sum_i \mu_i = 1 \quad (3.67)$$

Puesto que $S_\delta(0) = N_\delta$ (soporte de μ) es el número de cubos de la δ -malla requerido para cubrir el soporte de la medida, el límite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \log S_\delta(q) / -\log \delta$ generaliza la idea de la dimensión de conteo por cajas.

La teoría de las medidas multifractales depende del hecho que, en muchos casos, $N_\delta(\alpha)$ y $S_\delta(q)$ sigan leyes en potencia cuando $\delta \rightarrow 0$, es decir: $N_\delta(\alpha) \propto \delta^{-f(\alpha)}$ y

$S_\delta(q) \propto \delta^{-\tau(q)}$; en esta situación, además, existen relaciones fundamentales entre los exponentes.

Se asume que, para ε pequeño, el número de cubos B_i de la δ -malla, con $\delta^{\alpha+\varepsilon} \leq \mu_i < \delta^\alpha$ es gruesamente del orden de $\delta^{-f(\alpha)}$ para δ pequeño. Un estimador crudo basado en tal supuesto da:

$$S_\delta(\alpha) \square \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \delta^{q\alpha} \delta^{-f(\alpha)} d\alpha = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \delta^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha \quad (3.68)$$

Para δ pequeño la contribución dominante a esta integral viene del valor de α para el cual $f(\alpha) - q\alpha$ es el más grande; nótese que en esta contribución q está fijo. Escribiendo $\tau(q)$ para este valor máximo, se tendrá la ley en potencia anunciada: $S_\delta(q) \propto \delta^{-\tau(q)}$.

La deducción precedente puede ser precisada bajo la siguiente hipótesis sobre $N_\delta(\alpha)$: para $\alpha_{\min} \leq \alpha < \alpha_{\max}$ el siguiente límite existe (Falconer, 1990; Rodriguez-Iturbe y Rinaldo, 1997):

$$\limlim_{\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \frac{\log[N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon)]}{-\log \delta} \equiv f(\alpha) \quad (3.69)$$

en la cual se permite la posibilidad que $f(\alpha) = -\infty$. Esto implica que, dado $\eta > 0$,

$$\delta^{-f(\alpha)+\eta} \leq N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \leq \delta^{-f(\alpha)-\eta} \quad (3.70)$$

para todo δ suficientemente pequeño.

Para establecer estos resultados se establece la siguiente proposición, cuya demostración resulta casi evidente a partir de los considerandos anteriores (Falconer, 1990).

Proposición. Asúmase que $N_\delta(\alpha)$ satisface (3.69), y definiendo

$$\tau(q) = \sup_{\alpha_{\min} \leq \alpha < \alpha_{\max}} [f(\alpha) - q\alpha] \quad (3.71)$$

entonces

$$\tau(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log \delta} \quad (3.72)$$

y en particular este límite existe.

Así, en resumen tendremos que si la medida cuando δ es pequeño tiene el comportamiento:

$$\mu(B) \propto \delta^\alpha \quad (3.73)$$

entonces se tendrá:

$$S_\delta(q) \propto \delta^{-\tau(q)} \quad ; \quad N_\delta(\alpha + \varepsilon) - N_\delta(\alpha - \varepsilon) \propto \delta^{-f(\alpha)} \quad (3.74)$$

Para el estudio de la función f son necesarias sin embargo algunas hipótesis adicionales. Ya que muchos resultados del análisis de esta función, y en general de los exponentes involucrados, pueden tener un equivalente funcional en termodinámica, se asume que f es una función diferenciable de α con $f'(\alpha) > 0$, y es estrictamente convexa, lo que es equivalente a decir que la derivada primera $f'(\alpha)$ es estrictamente decreciente en relación con el parámetro α .

Supóngase que, para cada q , el supremo definido por la ecuación (3.71) es alcanzado en $\alpha = \alpha(q) > 0$. Entonces en $\alpha(q)$, se tiene:

$$\frac{d}{d\alpha} [f(\alpha) - q\alpha] = 0 \quad (3.75)$$

lo que da

$$q = \frac{d}{d\alpha} f[\alpha(q)] \quad (3.76)$$

Así $\alpha(q)$ es el valor de α en el cual la gráfica de f tiene pendiente q . De la ecuación (3.71) se tiene:

$$\tau(q) = f[\alpha(q)] - q\alpha(q) \quad (3.77)$$

es decir, donde este exponente es evaluado cuando α hace máximo precisamente a $f(\alpha) - q\alpha$ para cada q . Así, si α es diferenciable como una función de q , se tiene:

$$\frac{d\tau}{dq} = \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq} - \alpha - q \frac{d\alpha}{dq} \quad (3.78)$$

Introduciendo en la ecuación (3.78) la ecuación (3.76) que viene del máximo en cuestión se deduce la importante relación:

$$\frac{d\tau}{dq}(q) = -\alpha(q) \quad (3.79)$$

Las ecuaciones (3.77) y (3.79) son un par de transformadas de Legendre, ampliamente utilizadas en termodinámica, que relacionan las variables independientes q y τ a las variables independientes α y f . La curva $f(\alpha)$ es denominada el *espectro multifractal de la medida* μ , ver figura 3.4.

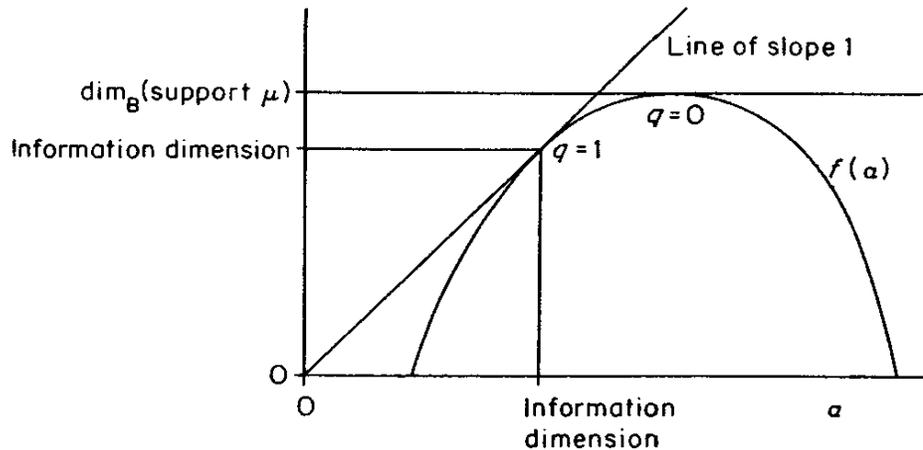


Figura 3.4 El espectro multifractal. Gráfica de $f(\alpha)$ contra α (Falconer, 1990).

Hay valores notables de q . Cuando $q=0$, se tiene $S_\delta(0) = N_\delta(\text{soporte de } \mu)$ como antes, así $\tau(0) = \dim_B(\text{soporte de } \mu) = f[\alpha(0)]$ por la ecuación (3.77); y puesto que por la ecuación (3.76), lo anterior corresponde al máximo de f .

Cuando $q=1$, de acuerdo con la ecuación (3.67) se tiene $S_\delta(1) = 1$, de modo que $\tau(1) = 0$; y más aún $f[\alpha(1)] = \alpha(1)$, con $df[\alpha(1)]/d\alpha = 1$, según las ecuaciones (3.76) y (3.77). De la ecuación (3.67), se tiene:

$$\frac{d}{dq} \log S_{\delta}(q) = \frac{\sum_i (\mu_i)^q \log \mu_i}{\sum_i (\mu_i)^q}$$

Así que cuando $q = 1$ se tiene:

$$\frac{d}{dq} \frac{\log S_{\delta}(q)}{-\log \delta} = \frac{\sum_i \mu_i \log \mu_i}{-\log \delta}$$

y asumiendo convergencia de la derivada cuando $\delta \rightarrow 0$, se tendrá de acuerdo con las ecuaciones (3.72) y (3.79):

$$a(1) = -\frac{dt}{dq}(1) = \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_i m_i \log m_i}{-\log d} \right) \quad (3.80)$$

La expresión $-\sum_i \mu_i \log \mu_i$ es la entropía de información definida por la ecuación (3.62).

En cuanto a las aplicaciones de las medidas multifractales a la precipitación, en la ecuación (3.67) la medida puede ser asimilada a la masa de lluvia precipitada en una unidad de tiempo. Y la exploración de las escalas temporales corresponderá a los datos existentes en cuestión.

3.8 Análisis multifractal de fluctuaciones (MF-DFA)

Muchas señales presentan características de “autosimilaridad”, es decir, que tienen propiedades similares en todas las escalas. Normalmente, la autosimilaridad es correlacionada con las dimensiones fractales, esto es, la relación no entera entre la medida del dominio y la medida del gráfico. Consideremos que tenemos una medida m con un soporte C . Podemos recubrir a este soporte con una familia de conjuntos formados por $N(s)$ cajas $B_i(s)$ cada una de lado s . La función de partición asociada con la medida y con la cobertura se define como:

$$Z(q,s) = \sum_{i=1}^{N(s)} m_i^q(s) \quad (3.81)$$

donde q es un número real y $m_i^q(s)$ es una función de $B_i(s)$.

Admitiendo que para $s \rightarrow 0^+$ se tiene la siguiente relación exponencial,

$$Z(q,s) \sim s^{\tau(q)} \quad (3.82)$$

A partir de esta relación, el formalismo multifractal usa la transformada de Legendre para relacionar el exponente de escala $\tau(q)$ con el espectro multifractal.

Suponiendo que $\tau(q)$ es una función de concavidad negativa, la transformada de Legendre de la función $-\tau(q)$ es

$$\inf \{ -t(q) + qa \} \quad (3.83)$$

Y se puede establecer (Falconer, 1997; Jaffard, 1997) que

$$d(a) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{ -t(q) + qa \} \quad (3.84)$$

dado, derivando $-t(q) + qa$, se tiene que el mínimo se alcanza en un único q y esto sucede cuando

$$a = t'(q) \quad (3.85)$$

asi mismo, se estima

$$d(a) = qa - t(q) \quad (3.86)$$

donde a es la intensidad de la singularidad o el exponente de Hölder y $d(a)$ es el espectro multifractal.

Descripción del método

Supongamos que $\{x_1, \dots, x_N\}$ es una serie de tiempo equiespaciada de longitud N , que está definida sobre un soporte compacto. El algoritmo se basa en cinco pasos:

1. Se determina el “perfil”. Para $i = 1, \dots, N$ se define,

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i (x_k - \langle x \rangle) \quad (3.87)$$

donde $\langle x \rangle$ es el promedio de la serie, es decir,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (3.88)$$

2- Se divide el perfil $Y(i)$ sobre $N_s \circ \text{int}(N/s)$ segmentos no solapados de igual longitud entera s .

3- Se calcula la tendencia local en los N_s segmentos ajustando los datos del perfil de cada segmento con un polinomio usando el método de mínimos cuadrados (el polinomio puede ser lineal, cuadrático o de un orden superior, en cada caso el método será MF DFA1, MF DFA2, ...). Entonces, si y_u es el polinomio que ajusta los datos $(i, Y(i))$ sobre cada segmento $u, u = 1, \dots, N_s$, se eliminan las tendencias polinomiales del perfil en cada segmento u calculando,

$$Y((u-1)s+i) - y_u((u-1)s+i) \quad (3.89)$$

Luego se determina la varianza

$$F^2(u,s) \circ \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left\{ Y((u-1)s+i) - y_u((u-1)s+i) \right\}^2 \quad (3.90)$$

4- Se promedian sobre todos los segmentos para obtener la función de q – ésimo orden de fluctuación o fluctuación media con $q \neq 0$, se utiliza la siguiente expresión,

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{u=1}^{N_s} \left\{ F^2(u,s) \right\}^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (3.91)$$

Para $q = 0$, tomando ímite cuando , se define,

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{u=1}^{N_s} \ln \left(F^2(u,s) \right) \right\} \quad (3.92)$$

5- Se determina el comportamiento escalar de la función de fluctuación analizando los gráficos Log-Log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q . Si la serie presenta correlaciones con una ley de potencia, entonces,

$$F_q(s) \sim S^{h(q)} \quad (3.93)$$

Finalmente, se obtiene la función $h(q)$ tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (3.93), y se tiene,

$$\log(F_q(s)) = h(q) \cdot \log(s) + c \quad (3.94)$$

Para series de tiempo $\{x_1, \dots, x_N\}$ estacionarias, tales que $x_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^N x_k = 1$, (Kantelhard *et al.*, 2002) encontraron que los exponentes $h(q)$ se relacionan con el exponente de escala $t(q)$ del formalismo multifractal introducido en la ecuación (3.82). Para estas series de tiempo el paso 3 no es necesario pues no hay que eliminar tendencias; luego la definición de varianza se simplifica a:

$$F^2(u, s) = \left\{ Y(us) - Y((u-1)s) \right\}^2 \quad (3.95)$$

Entonces, suponiendo que la longitud N de la serie es un múltiplo entero de la escala s y reemplazando en la ecuación (3.91) se tiene

$$F_q(s) = \left\{ \frac{s}{N} \sum_{u=1}^{N/s} \left| Y(us) - Y((u-1)s) \right|^q \right\}^{1/q} \quad (3.96)$$

usando la relación (3.93) se obtiene

$$\sum_{v=1}^{N/s} |Y(vs) - Y((v-1)s)|^q \sim s^{qh(q)-1} \quad (3.97)$$

Además,

$$Y(us) - Y((u-1)s) = \sum_{k=(u-1)s+1}^{us} x_k = p_s(u) \quad (3.98)$$

donde $p_s(u)$ es la probabilidad caja en el formalismo multifracta standard.

Entonces, volviendo a la ecuación (3.97) tenemos que,

$$\sum_{v=1}^{N/s} |p_s(v)|^q \sim s^{qh(q)-1} \quad (3.99)$$

como consecuencia de las relaciones de las ecuaciones (3.82),(3.85) y (3.86) encontramos que,

$$t(q) = qh(q) - 1, \quad a = t'(q) = h(q) + qh'(q) \quad \text{y} \quad d(a) = q(a - h(q)) + 1 \quad (3.100)$$

4 APLICACIONES HIDROLÓGICAS

4.1 Información disponible

Se utilizan para los diferentes análisis los datos de precipitación y temperatura anual, mensual y diaria registrados en la estación climatológica Presa Centenario, dicha estación se encuentra ubicada en el estado de Querétaro – México; los datos comprenden 50 años de registro. Ver figura 4.1a y 4.1b.

Figura 4.1a Serie de tiempo de precipitación diaria registrada en la estación Presa Centenario durante los años de 1951 a 2001.

Figura 4.1b Serie de tiempo de temperatura diaria registrada en la estación Presa centenario durante los años de 1951 a 2001.

El Estado de Querétaro se encuentra ubicado en el centro geográfico de la República Mexicana, entre las coordenadas 20° 01' 16" y 21° 35' 38" Latitud Norte 99° 00' 46" y 100° 35' 46" Longitud Oeste.

Climatología del estado de Querétaro. En el estado se encuentran diversos tipos de climas que van desde los cálidos relativamente húmedos del este de la Sierra Madre Oriental, hasta los secos y semisecos de la Mesa del Centro.

Se distinguen tres áreas climáticas bien definidas: la porción sur, que comprende parte de la provincia fisiográfica del Eje Neovolcánico; la región centro que abarca áreas del Eje Neovolcánico, La Sierra Madre Oriental y la Mesa del Centro; y la zona norte que corresponde a una porción de la Sierra Madre Oriental.

Climas templados subhúmedos del sur. Se distribuyen en la porción austral del estado, por Amealco, Huimilpan, San Pedrito y San Bartolomé. Estos climas son estables en lo que se refiere a temperatura, pues su régimen térmico medio anual varía de 12° a 18°C y sus precipitaciones más abundantes se registran en verano, pero a la mitad de esa estación se registra un periodo seco.

El grado de humedad aumenta conforme se avanza hacia el sur, la precipitación anual oscila entre 630 y 860 mm.

Climas secos y semisecos del centro. Se presentan en terrenos rodeados de sierras, mesetas y lomeríos que impiden el paso de los vientos húmedos del Golfo y la Mesa del Centro, que en sus laderas boreales retiene la humedad de los vientos que viajan de norte a sur. La disposición de esas áreas origina un índice de precipitación bajo en la zona y provoca una oscilación térmica de 7° a 14°C, que determina el carácter extremoso de estos climas.

Clima Semiseco Semicálido. La temperatura media anual varía de 18° a 19°C, la precipitación total anual fluctúa entre 450 y 630 mm.

Las áreas donde rige esta variante están situadas en los alrededores de la ciudad de Querétaro, Villa Corregidora, El Marqués, Santa Rosa de Jáuregui, la localidad Paso de Tablas y en la colindancia del municipio de Peñamiller con el estado de Guanajuato.

Clima Semiseco Templado. Es el más común, ya que cubre aproximadamente 35% de la superficie estatal, esta variante rige en las poblaciones de Ezequiel Montes, Cadereyta, Tequisquiapan, San Juan del Río y Puerta de Enmedio.

Las temperaturas medias anuales oscilan entre 16° y los 18°C, la precipitación total anual fluctúa entre 450 y 630 mm.

Clima Seco Semicálido. Influye principalmente las poblaciones de Peñamiller y Tolimán. La precipitación total anual va de 370 a 470 mm. Es clasificado como un clima extremoso porque sus diferencias térmicas (medias mensuales) superan los 7°C.

Climas calidos y semicalidos del norte. Prevalecen en la región de la Sierra Madre Oriental, donde hay variaciones de altitud considerables, que aunadas a la humedad atmosférica y a las temperaturas, entre otros factores, favorecen la presencia de fenómenos meteorológicos complejos. De norte a sur se presenta una graduación térmica que va de cálida a fría.

Clima Cálido Subhúmedo con Lluvias en Verano. Abarcan áreas que pertenecen a los municipios de Arroyo Seco y Jalpan de Serra. Las lluvias en esta zona son de carácter veraniego y presentan precipitaciones anuales que alcanzan 850 mm. El mes más cálido es mayo y el más frío diciembre. Este clima se considera extremo debido a que su oscilación térmica es superior a 7°C.

Clima Semicálido Subhúmedo con Lluvias en Verano. Tiene una temperatura media anual de 18°C, con diferentes grados de humedad, comprende parte de los municipios de Arroyo Seco, Jalpan de Serra, Pinal de Amoles y Landa de Matamoros. La precipitación total anual fluctúa entre 773 y 1270 mm.

Heladas. En la región de climas cálido y semicálidos del norte no existe riesgo considerable para los cultivos, ya que las heladas ocurren en un rango de 0 a 5 días al año.

Hacia el sur, en donde los climas cálidos se tornan gradualmente más secos, dicho fenómeno se presenta de 5 a 20 días al año. Existen lugares con climas templados y altitudes superiores a 2 000 m, con un rango de días con heladas que oscila entre los 60 y los 80. En los alrededores de la localidad de Vigil, llegan a ser de 80 a 100 días en un año.

En la porción centro, la presencia de heladas va de 20 a 40 días, aunque en sitios donde las temperaturas medias anuales fluctúan de 12 a 16°C, se incrementan hasta 60 días al año.

Granizadas. Las granizadas no guardan un patrón de comportamiento bien definido, pero generalmente se presentan en la estación más cálida del año, sobre todo en los meses de mayo, junio y agosto. En el estado, este fenómeno se presenta de 0 a 2 días al año, aunque existen regiones que pueden alcanzar hasta 8 días.

4.2 Modelación de la precipitación con modelos autorregresivos

Dadas las diferentes aplicaciones, los modelos autorregresivos se han convertido en una herramienta global para la realización de pronósticos y estudio de variables climáticas en este caso la precipitación.

Se utilizan para el análisis los datos de precipitación anual y mensual registrados en la estación climatológica Presa Centenario, dicha estación se encuentra ubicada en el estado de Querétaro, México. Ver figuras 4.2a y 4.2b.

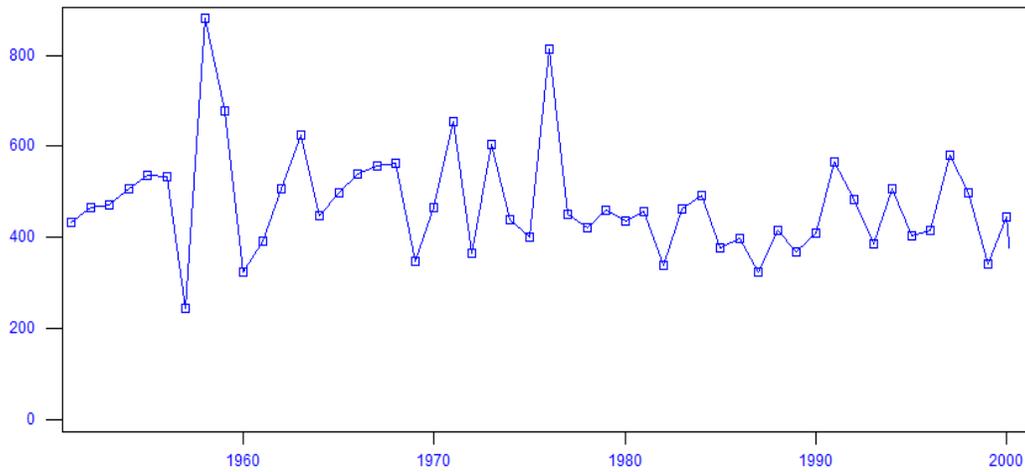


Figura 4.2a Serie de tiempo de precipitación anual registrada en la estación Centenario durante los años de 1951 a 2001.

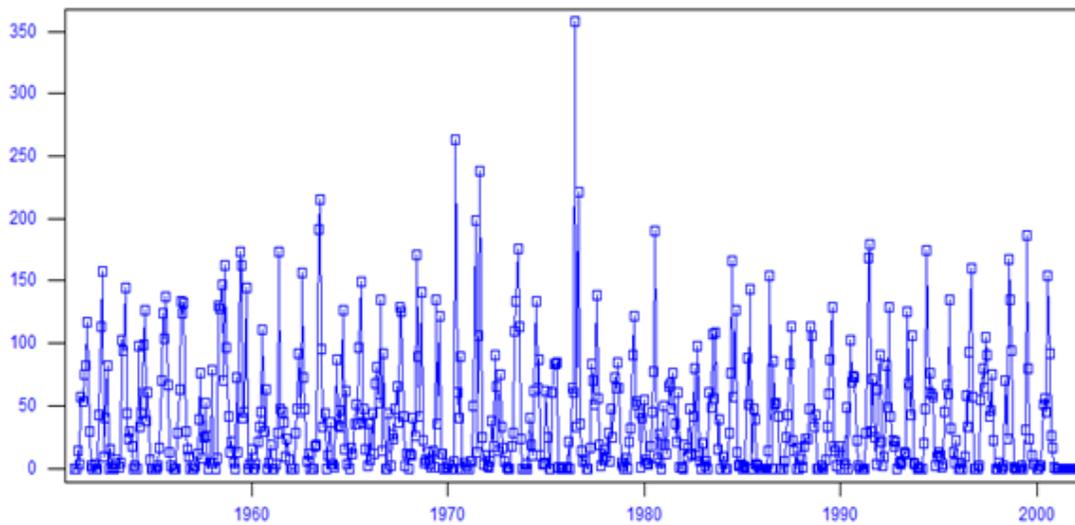


Figura 4.2b Serie de tiempo de precipitación mensual registrada en la estación Centenario durante los años de 1951 a 2001.

4.2.1 Modelación Anual de la precipitación

Teniendo en cuenta la serie de valores de precipitación anual correspondientes a la figura 4.2a, se calcula el correlograma de la serie aplicando la ecuación (3.11).

En la figura 4.3 se puede apreciar el correlograma de la serie de valores anuales de precipitación.

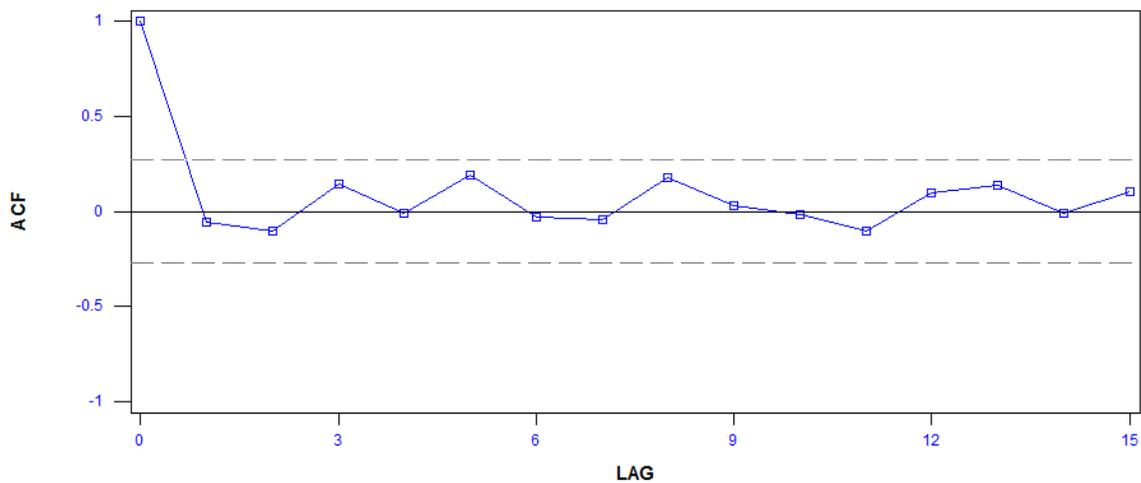


Figura 4.3 Función de autocorrelación de valores anuales de precipitación representada gráficamente mediante el correlograma.

Para el correlograma anterior se tiene; que cuando más se aproxime a 1 ó -1, mayor será su dependencia lineal entre las variables, si ρ_k se aproxima a cero la dependencia lineal será prácticamente nula. Por lo tanto la función de autocorrelación mide el grado de dependencia lineal de la serie en estudio. Por otro lado para series independientes, el correlograma poblacional debes ser igual a cero; pero debido a la variabilidad en el muestreo, el correlograma puede fluctuar alrededor de cero.

Las técnicas disponibles para la modelación de las series de tiempo, en su mayoría requieren que éstas tengan una distribución Normal, lo que en ocasiones no se cumple, por lo tanto se recomienda transformar la serie observada a otra y posteriormente se estandariza la serie.

Se utiliza la transformación que presenta mejor ajuste; en este caso la logarítmica representada por la ecuación (2.13), el proceso de estandarización se lleva a cabo aplicando la ecuación (2.16). En la figura 4.4 se puede apreciar la serie transformada y estandarizada con distribución Normal.

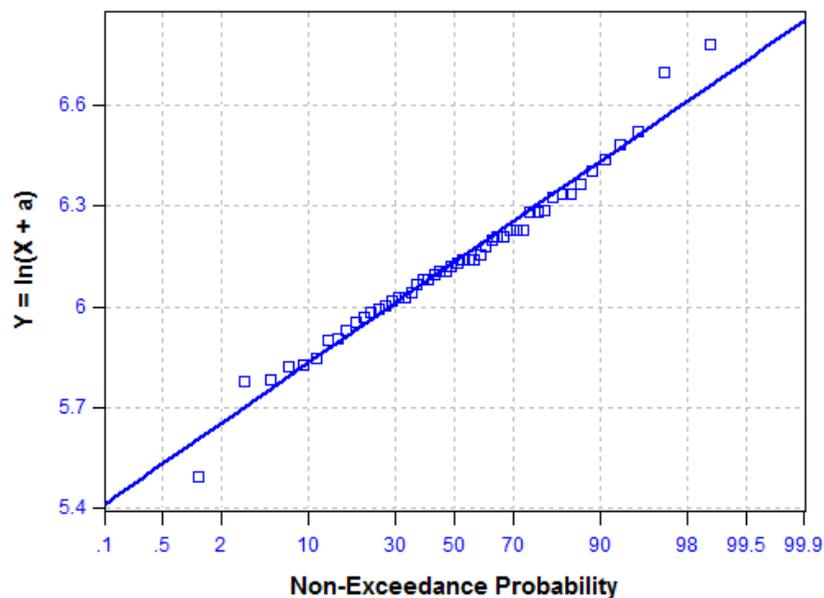


Figura 4.4 Valores de precipitación anual transformados con distribución Normal

La normalidad es verificada aplicando las pruebas de normalidad de Snedecor y Cochran (1980) y Filliben (1975), ambas son aplicadas para un 10% de nivel de significancia.

Para la estimación de los parámetros en modelos univariados ARMA (p q), se pueden emplear varios métodos, entre ellos tenemos el método de los momentos (MOM) y el método de mínimos cuadrados (LS); en este caso empleamos el método de los momentos para la estimación de dichos parámetros.

En la tabla 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 se reportan los parámetros (p q) estimados para distintos modelos ARMA, también se reporta la componente de ruido blanco, varianza y el criterio de información de Akaike (AICC).

Tabla 4.1 Parámetros estimados para un modelo ARMA (1,0)

Media	Varianza	AICC	SIC	Ruido Blanco	Parámetro ϕ
6.13386	0.0543094	53.098	52.755	0.977121	-0.15126

Tabla 4.2 Parámetros estimados para un modelo ARMA (2,0)

Media	Varianza	AICC	SIC	Ruido Blanco	Parámetro ϕ_1	Parámetro ϕ_2
6.13386	0.0543094	50.856	52.158	0.892866	-0.195676	-0.293645

Tabla 4.3 Parámetros estimados para un modelo ARMA (3,0)

Media	Varianza	AICC	SIC	Ruido Blanco	Parámetro ϕ_1	Parámetro ϕ_2	Parámetro ϕ_3
6.13386	0.0543094	51.739	54.587	0.866762	-0.145467	-0.260187	0.170985

Tabla 4.4 Parámetros estimados para un modelo ARMA (2,1)

Media	Varianza	AICC	SIC	Ruido Blanco	Parámetro ϕ_1	Parámetro ϕ_2	Parámetro θ_1
6.13386	0.0543094	50.903	53.75	0.852385	-0.727752	-0.374126	-0.609938

Aplicando el criterio de información de Akaike, ecuación (2.49), se tiene que el modelo más adecuado para generar las serie sintética de precipitaciones es un ARMA (2,1), tabla 4.4, presentando valor de 50.903 para dicho criterio.

Los parámetros reportados en la tabla 4.4 se estiman aplicando las ecuaciones (2.26) hasta (2.29).

La generación sintética se lleva a cabo aplicando la ecuación (2.25). En la figura 4.5 se observa la serie generada para 50 años.

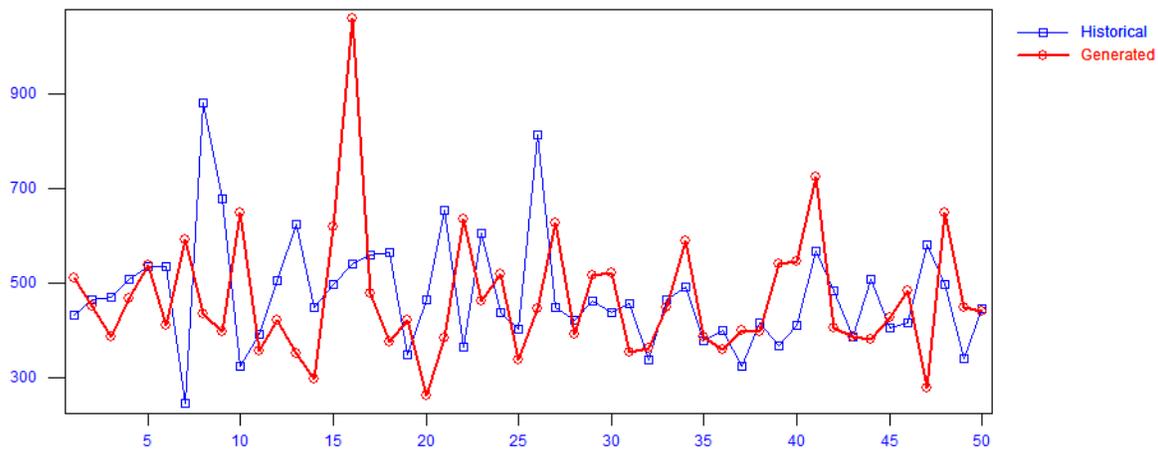


Figura 4.5 Serie generada para 50 años a partir de un modelo ARMA (2,1)

Las series univariadas se describen generalmente a través de sus características estadísticas como la media, desviación estándar, coeficiente de asimetría, coeficiente de curtosis, distribución de probabilidad y de la estructura de dependencia en el tiempo (Salas *et al.*, 1980). En la tabla 4.5 se reportan los estadísticos históricos y generados, se aprecian que los estadísticos históricos se conservan en la serie sintética, por lo tanto el modelo es validado. Los estadísticos

evaluados son la media, desviación estándar, coeficiente de variación, coeficiente de asimetría, valor máximo, valor mínimo y los coeficientes de autocorrelación.

Tabla 4.5 Comparación de los estadísticos históricos y generados

Parámetro	Histórico	Generado
Mean	474.2	474.6
StDev	116.8	111.8
CV	0.2462	0.2334
Skew	1.216	0.6094
Min	243.8	274.8
Max	880	785.1
acf(1)	-0.1012	-0.1508
acf(2)	-0.2344	-0.2486

En la figura 4.6, se puede observar la comparación de las funciones de autocorrelación históricas y generadas. El correlograma generado se encuentra en el rango de 1 ó 1, cuando más se aproxime a 1 ó -1, mayor será su dependencia lineal entre las variables.

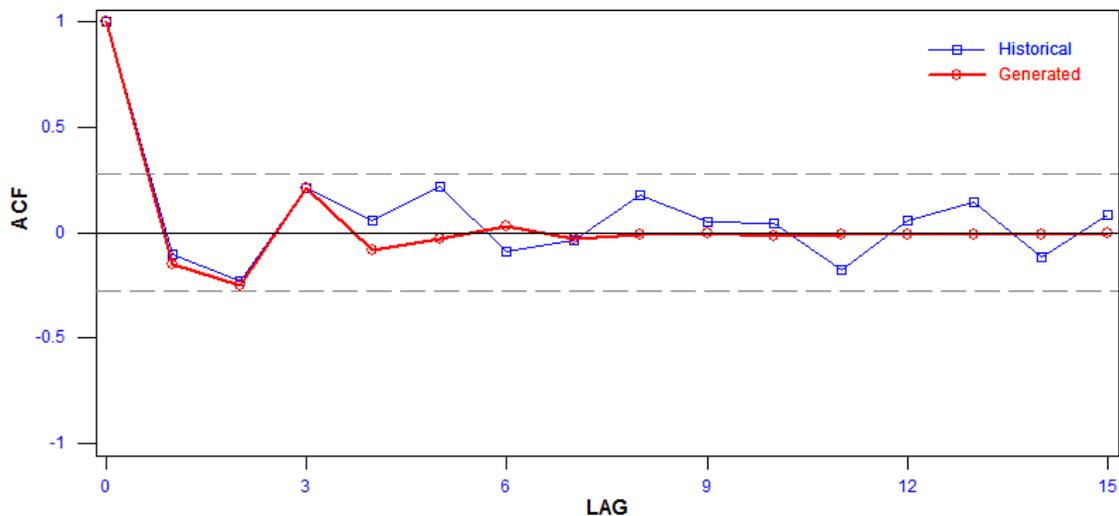


Figura 4.6 Comparación de la función de autocorrelación (ACF) de valores anuales de precipitación históricos y generados, representados gráficamente mediante el correlograma

Debido a la variabilidad en el muestreo, el correlograma puede fluctuar alrededor de cero, así mismo la función de autocorrelación de un proceso estocástico estacionario tiende a cero rápidamente cuando k tiende a ∞ .

Aplicando la ecuación (3.52) se calcula el exponente de Hurst tanto de la serie histórica como la generada, reportado en la tabla 4.6.

Tabla 4.6 Comparación del exponente de Hurst

Parámetro	Histórico	Generado
Coef. Hurst	0.6925	0.5636

A parte de los estadísticos establecidos por Salas *et al.* (1980). Las series univariadas también pueden ser descritas con el coeficiente de Hurts, para los valores de la tabla 4.6 se puede establecer que las series son persistentes, por lo tanto la variable es sensible a su historia. El proceso de persistencia aumenta entre el valor se acerca a 1.

4.2.2 Modelación mensual de la precipitación

Teniendo en cuenta la serie de valores de precipitación anual correspondientes a la figura 4.2b, se calcula el correlograma de la serie aplicando la ecuación (3.11).

En la figura 4.7 se puede apreciar el correlograma de la serie de valores mensuales de precipitación.

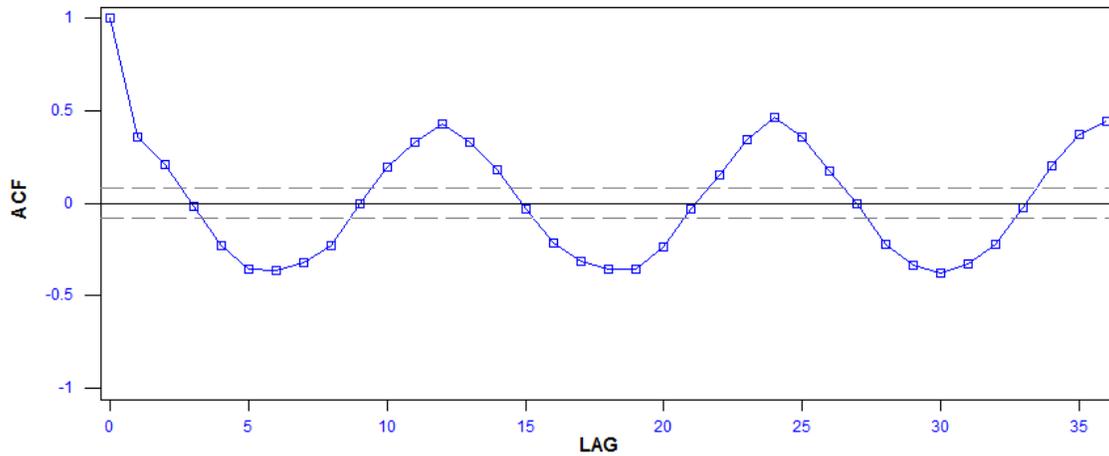


Figura 4.7 Función de autocorrelación de valores mensuales de precipitación representada gráficamente mediante el correlograma.

Para el correlograma anterior se tiene; que cuando más se aproxime a 1 ó -1, mayor será su dependencia lineal entre las variables, si ρ_k se aproxima a cero la dependencia lineal será prácticamente nula. Por lo tanto la función de autocorrelación mide el grado de dependencia lineal de la serie en estudio. Por otro lado para series independientes, el correlograma poblacional debes ser igual a cero; pero debido a la variabilidad en el muestreo, el correlograma puede fluctuar alrededor de cero.

Las técnicas disponibles para la modelación de las series de tiempo, en su mayoría requieren que éstas tengan una distribución Normal, lo que en ocasiones no se cumple, por lo tanto se recomienda transformar la serie observada a otra y posteriormente se estandariza la serie.

Se utiliza la transformación que presenta mejor ajuste; en este caso la logarítmica y gamma representadas por la ecuación (2.13) y (2.14), el proceso de estandarización se lleva a cabo aplicando la ecuación (2.15). En la figura 4.8 se puede apreciar la serie transformada y estandarizada con distribución Normal.

En el caso de modelaciones mensuales, se acostumbra a modelar mes por mes por lo tanto, para el presente análisis se escoge el mes 8 (Agosto) para ilustrar la modelación.

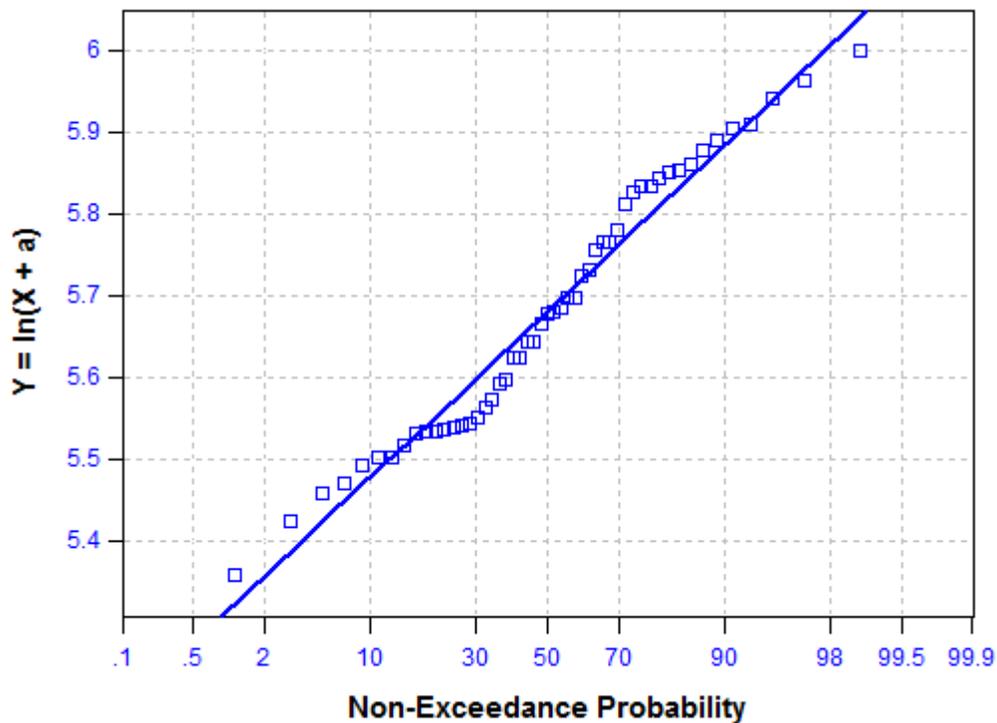


Figura 4.8 Valores de precipitación del mes 8 transformados con distribución Normal

La normalidad es verificada aplicando las pruebas de normalidad de Snedecor y Cochran (1980) y Filliben (1975), ambas son aplicadas para un 10% de nivel de significancia.

A diferencia de la modelación anual que se puede realizar utilizando modelos ARMA (p,q), la modelación mensual se efectúa empleando modelo PARMA (p,q).

Para la estimación de los parámetros en modelos univariados PARMA (p q), se pueden emplear varios métodos, entre ellos tenemos el método de los momentos (MOM) y el método de mínimos cuadrados (LS); en este caso empleamos el método de los momentos para la estimación de dichos parámetros.

En la tabla 4.7, se reportan los parámetros (p q) estimados un modelo PARMA, también se reporta la componente de ruido blanco, varianza y el criterio de información de Akaike (AICC).

Tabla 4.7 Parámetros estimados para un modelo PARMA (2,1)

Mes	Media	Varianza	AICC	SIC	Ruido Blanco	Parámetro ϕ_1	Parámetro ϕ_2	Parámetro θ_1
1	-1.19466	14.4466	52.444	55.37	0.864504	0.880932	-0.302366	0.865837
2	-0.0331879	4.10212	52.658	55.584	0.868144	0.261461	0.207139	-0.021175
3	-0.65616	8.35341	53.147	56.073	0.876507	-0.706329	0.400376	-0.984421
4	2.05214	2.17126	57.763	60.689	0.959543	0.042621	0.064367	-0.15611
5	0.00264004	0.975038	53.183	56.109	0.877117	5.411352	-0.922972	5.179749
6	4.87894	0.160698	26.441	29.367	0.519204	-2.83278	0.910514	-2.906368
7	4.58647	0.321512	59.764	62.69	0.997926	0.004956	0.037597	0.040778
8	5.68107	0.0248607	59.246	62.171	0.98784	-1.990162	-0.108055	-1.987424
9	4.34479	0.364248	51.724	54.65	0.852385	-3.365957	0.08386	-3.360064
10	0.0125231	0.912338	38.447	41.373	0.657017	1.410208	0.293627	1.461761
11	1.20428	2.9088	49.812	52.738	0.821021	-0.54711	0.365683	-0.611938
12	-0.0504505	5.21509	52.378	55.303	0.863379	0.878334	0.141234	0.912219

Aplicando el criterio de información de Akaike, ecuación (2.49), se tiene que el modelo más adecuado para generar las serie sintética de precipitaciones es un PARMA (2,1), tabla 4.7, los valores del criterio de información (AICC) son reportados para cada mes en dicha tabla.

Los parámetros reportados en la tabla 4.7 se estiman aplicando las ecuaciones (2.37) hasta (2.40).

La generación sintética se lleva a cabo aplicando la ecuación (2.36). En la figura 4.9 se observa la serie generada para el mes ocho (Agosto).

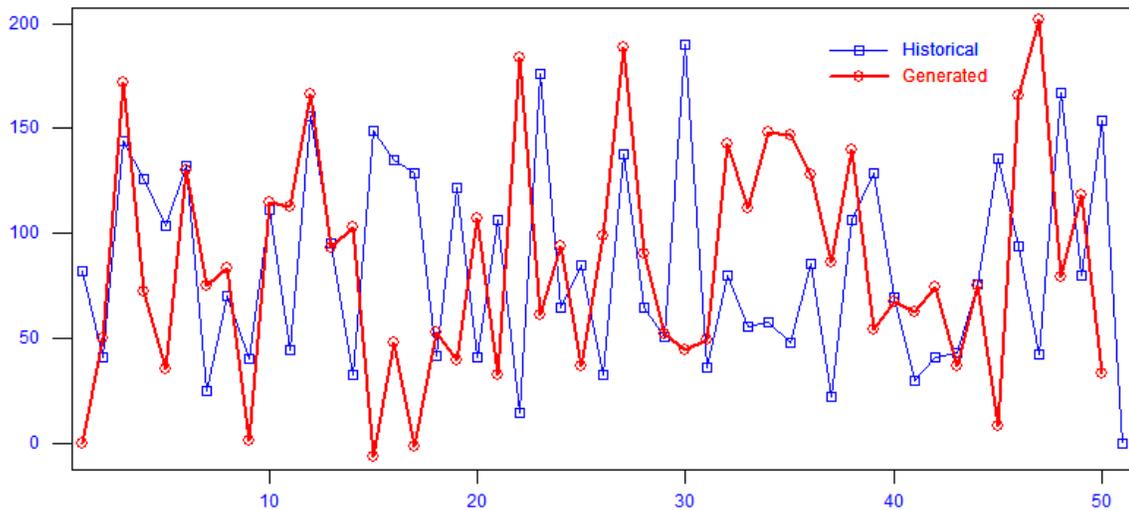


Figura 4.9 Serie generada para el mes de Agosto durante 50 años a partir de un modelo PARMA (2,1)

Las series univariadas se describen generalmente a través de sus características estadísticas como la media, desviación estándar, coeficiente de asimetría, coeficiente de curtosis, distribución de probabilidad y de la estructura de dependencia en el tiempo (Salas et al., 1980). En la tabla 4.8 se reportan los estadísticos históricos y generados, se aprecian que los estadísticos históricos se conservan en la serie sintética, por lo tanto el modelo es validado. Los estadísticos evaluados son la media, desviación estándar, coeficiente de variación, coeficiente de asimetría, valor máximo, valor mínimo y los coeficientes de autocorrelación.

Tabla 4.8 Comparación de los estadísticos históricos y generados para el mes de Agosto

Parámetro	Histórico	Generado
Mean	84.15	84.09
StDev	47.24	46.64
CV	0.5614	0.5532
Skew	0.3549	0.4154
Min	0	0
Max	201	206.5
acf(1)	-0.3014	-0.023
acf(2)	0.1363	-0.02011

En la figura 4.10, se puede observar la comparación de las funciones de autocorrelación históricas y generadas. El correlograma generado se encuentra en el rango de 1 ó 1, cuando más se aproxime a 1 ó -1, mayor será su dependencia lineal entre las variables.

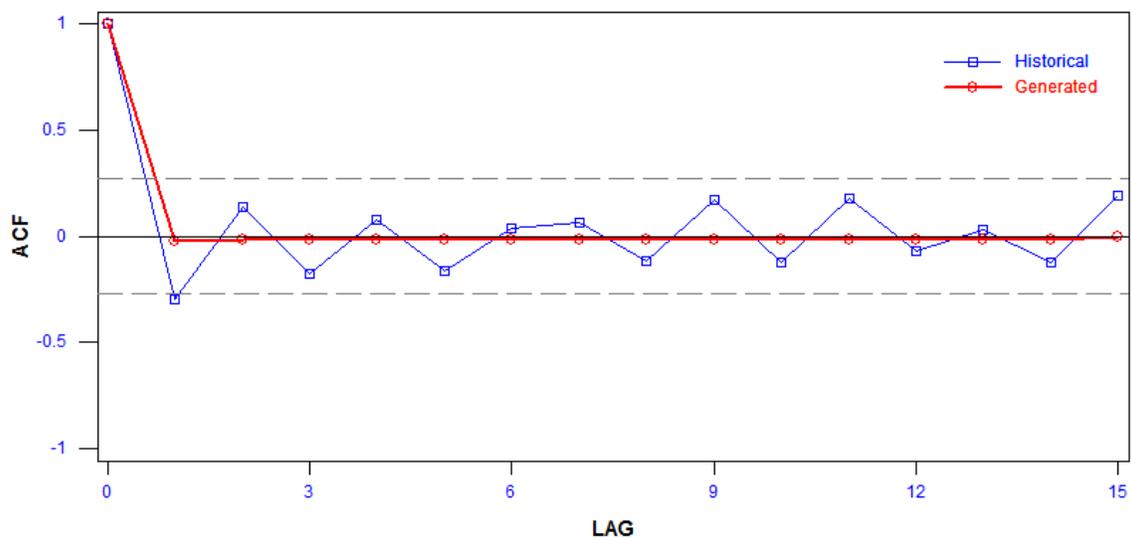


Figura 4.10 Comparación de la función de autocorrelación (ACF) de valores mensuales de precipitación históricos y generados, representados gráficamente mediante el correlograma para el mes de Agosto.

Debido a la variabilidad en el muestreo, el correlograma puede fluctuar alrededor de cero, así mismo la función de autocorrelación de un proceso estocástico estacionario tiende a cero rápidamente cuando k tiende a ∞ .

Aplicando la ecuación (3.52) se calcula el exponente de Hurst tanto de la serie histórica como la generada, reportado en la tabla 4.9.

Tabla 4.9 Comparación del exponente de Hurst

Parámetro	Histórico	Generado
Coef. Hurst	0.662	0.629

A parte de los estadísticos establecidos por Salas *et al.* (1980). Las series univariadas también pueden ser descritas con el coeficiente de Hurts, para los valores de la tabla 4.9 se puede establecer que las series son persistentes, por lo tanto la variable es sensible a su historia. El proceso de persistencia aumenta entre el valor se acerca a 1.

4.3 Sobre el cambio climático

Mediante el análisis fractales se puede determinar la variabilidad temporal de una serie de tiempo y su persistencia; así mismo se puede determinar la existencia de un cambio en el patrón de precipitación y temperatura de acuerdo a la evidencia histórica.

Se utilizan para los diferentes análisis los datos de precipitación y temperatura anual, mensual y diaria registrados en la estación climatológica Presa Centenario, dicha estación se encuentra ubicada en el estado de Querétaro – México; los datos comprenden 50 años de registro. Ver figura 4.1a y 4.1b.

4.3.1 Análisis de tendencias de temperatura y precipitación

A partir de los valores medios de temperatura y precipitación se obtiene la tendencia de la variable. Ver figura 4.11 y 4.12 respectivamente.

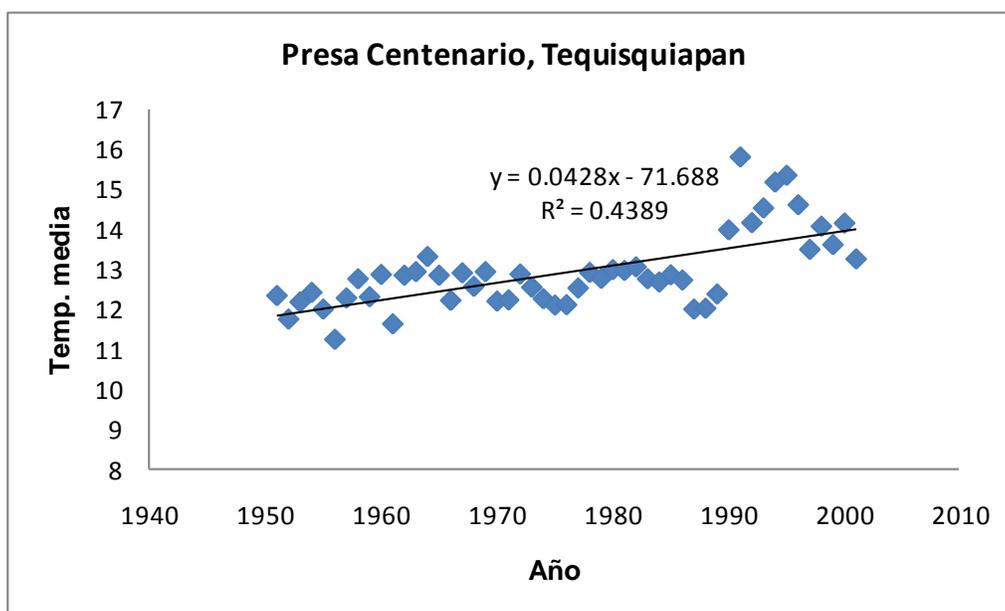


Figura 4.11 Tendencia de los valores medios de temperatura, correspondientes a la estación Presa Centenario.

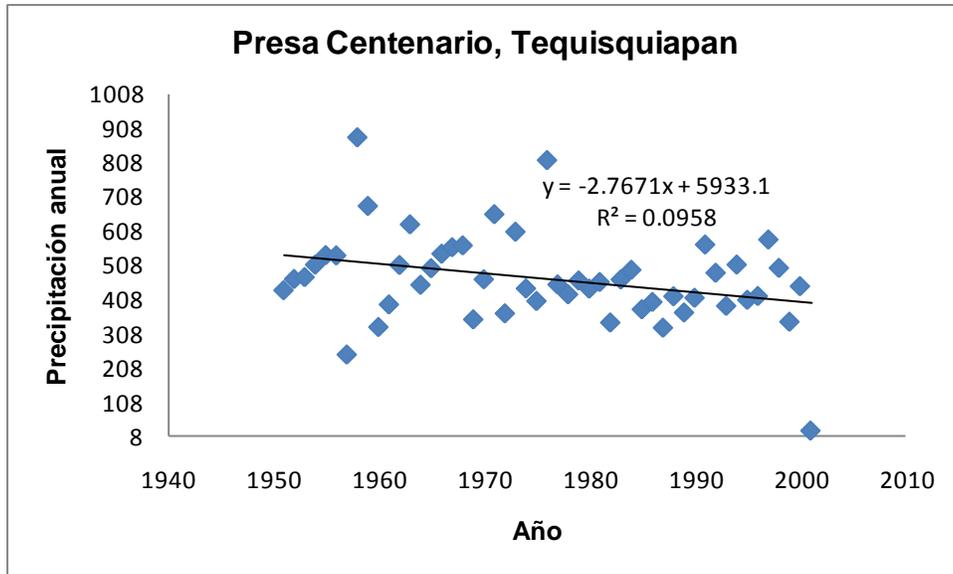


Figura 4.12 Tendencia de los valores medios de precipitación, correspondientes a la estación Presa Centenario.

En la figura 4.11 se puede apreciar un que la temperatura media anual aumenta a razón de 0.43°C por década, es decir que al final del presente siglo la temperatura aumentaría 4.3°C en concordancia con la extrapolación lineal realizada precedentemente de 5°C a nivel global. En la figura 4.12 la precipitación media anual disminuye a razón de 28 mm por década de modo que, siguiendo la misma línea de inferencia, habría una disminución conservadora de 280 mm de agua precipitada por los cielos a finales. También se puede inferir que las series anteriores no son estacionarias, ya que los valores medios no son constantes en el tiempo.

4.3.2 Análisis fractal para la variable temperatura y precipitación

Se desarrollan las técnicas de análisis fractal clásico expuestas con anterioridad en el capítulo 3.

En la figuras 4.13 y 4.14 se muestran los semivariogramas de temperatura y precipitación para la estación en estudio, se obtienen aplicando la ecuación (3.22).

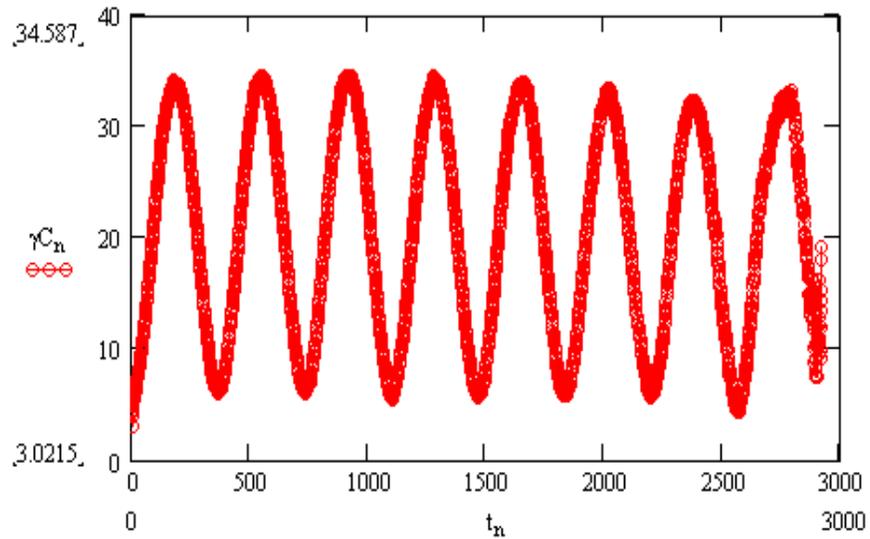


Figura 4.13 representación de la varianza en función de intervalos de tiempo que separan las muestras en pares por medio del semivariograma de temperatura.

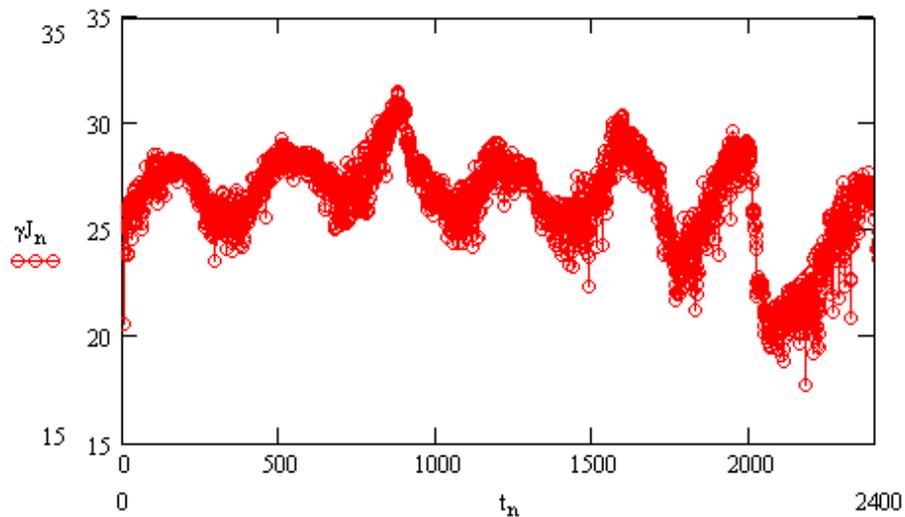


Figura 4.14 representación de la varianza en función de intervalos de tiempo que separan las muestras en pares por medio del semivariograma de precipitación.

En los semivariogramas anteriores el parámetro $\gamma(J_n)$ da el grado de variación espacial, y por tanto el grado de incertidumbre a la hora de interpolar puntos en el espacio. Un alto cociente indica una variable espacialmente predecible.

Para aprovechar la información espacial que contiene otra variable asociada con la primera, se construye un semivariograma en donde la varianza representada no es entre puntos de la misma variable sino de una variable con respecto a otra, de esta representación se obtiene el semivariograma cruzado aplicando la ecuación (3.28) . Ver figura 4.15.

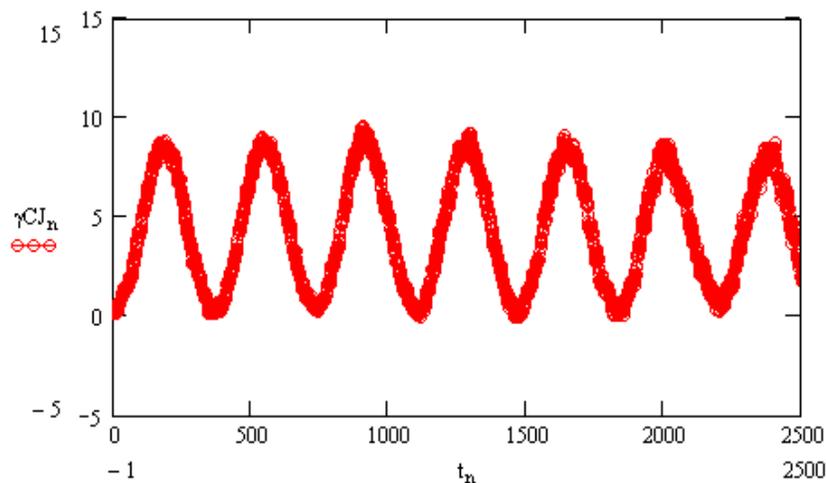


Figura 4.15 Semivariograma cruzado de la temperatura vs precipitación

Una posibilidad para estimar la dimensión fractal es a partir del ajuste del semivariograma experimental con (3.51), se obtiene el variograma de temperatura. Ver figura 4.16.

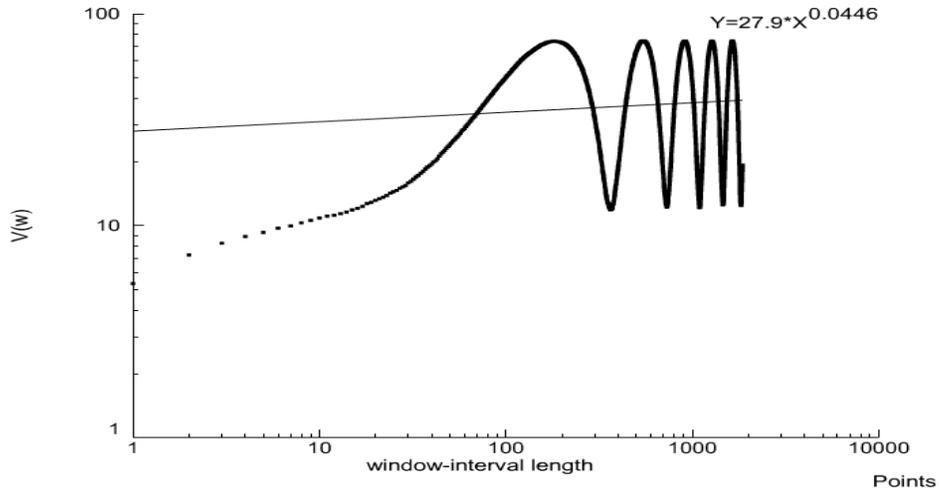


Figura 4.16 Variograma de la temperatura

Para describir la variación de la temperatura con respecto a la frecuencia se obtiene el espectro de potencia aplicando la ecuación (3.42). Ver figura 4.17; también mediante el espectro de potencia se puede determinar la medida de la fuerza de la persistencia de una serie de tiempo en este caso la temperatura.

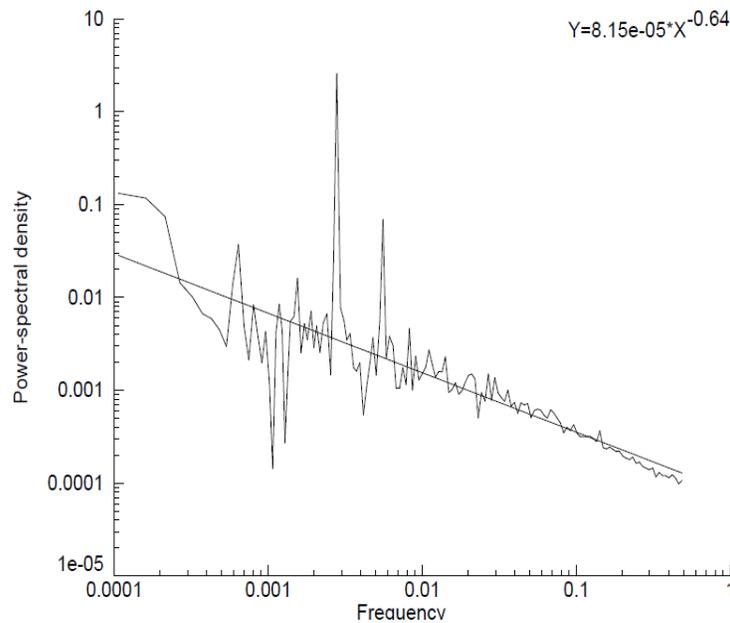


Figura 4.17 Espectro de potencia de la temperatura

Para obtener información sobre el espacio y la frecuencia se determina la transformada ondoleta, la cual se obtiene aplicando la ecuación (3.53), ver figura 4.18.

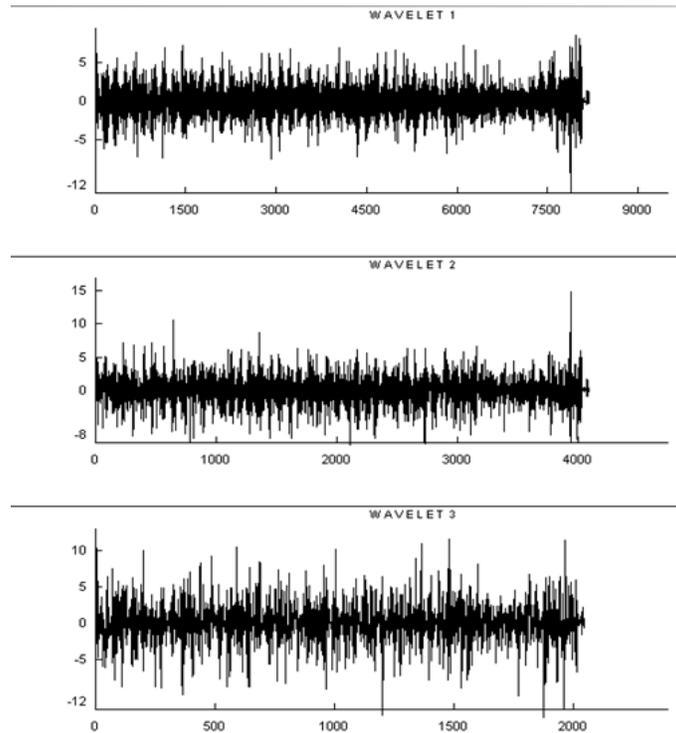


Figura 4.18 Ondeletas de la serie de temperatura

Aplicando la ecuación (3.52) se obtiene el análisis de rango reescalado tanto de la serie histórica; mediante esta técnica se puede establecer si la serie es persistente. En la figura 4.19 se puede apreciar la gráfica del rango reescalado para la temperatura.

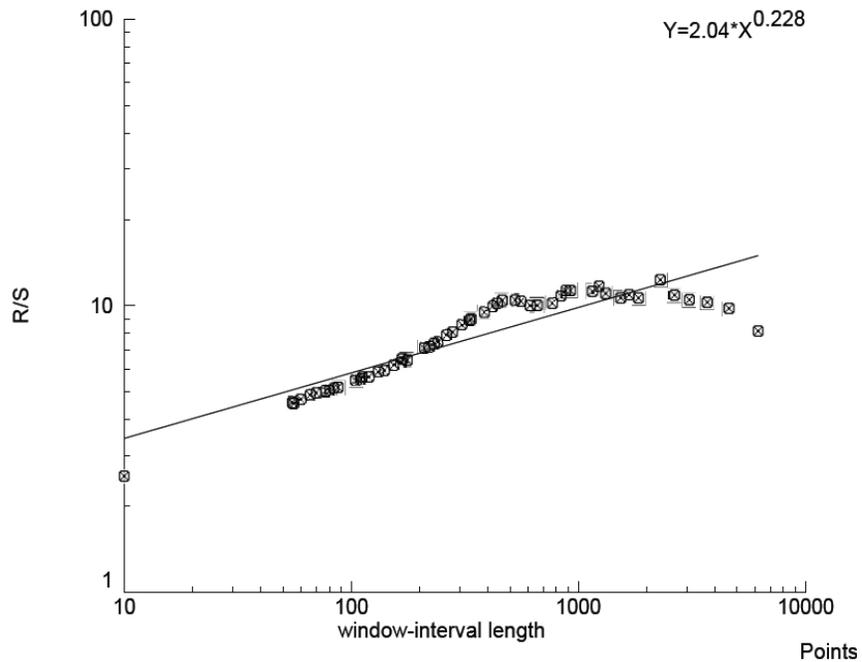


Figura 4.19 Rango reescalado de la serie de temperatura

En la tabla 4.10 se reportan las técnicas que se emplean para el análisis fractal de la temperatura. También es reportado el valor de la desviación estándar calculada en cada técnica, así mismo los valores de los elementos de la geometría fractal tales como: exponente de Hurst y el valor de la dimensión fractal.

Tabla 4.10 Técnicas que se utilizan en el análisis fractal de la temperatura

Variograma		Rango reescalado		Ondoleta		Espectro de potencia	
Cálculo de H	0.022	Cálculo de H	0.228	Cálculo de H	0.014	Cálculo de H	0
Dimensión fractal	1.978	Dimensión fractal	1.772	Dimensión fractal	1.986	Dimensión fractal	2
Desviación estándar	133.433502	Desviación estándar	0.2420511	Desviación estándar	-	Desviación estándar	23.0587559
Número de datos	18628	Número de datos	18628	Número de datos	18628	Beta	0.64
						Número de datos	18628

Si $0 < H < \frac{1}{2}$ significa que la serie de tiempo es antipersistente. Un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática. Los valores reportados en la tabla 4.10, permiten determinar que

la serie es antipersistente; esto significa que si en un pequeño rango de tiempo la temperatura aumenta, la probabilidad es alta que en el siguiente rango de tiempo la temperatura descienda.

Se analiza la serie de precipitación en décadas mediante la técnica de ondeletas. Ver tabla 4.11.

Tabla 4.11 Evaluación de la precipitación por décadas mediante la transformada de ondeletas

Año	Wavelets method	
	Dimensión Fractal (D_w)	Hurts (H)
1951 - 1961	1.848	0.152
1961 - 1971	1.842	0.158
1971 - 1981	1.967	0.033
1981 - 1991	1.864	0.136
1991 - 2001	1.834	0.166

A partir de la tabla 4.11 podemos la precipitación determinar que es antipersistente, por lo tanto si en un pequeño rango de tiempo la precipitación aumenta, la probabilidad es alta que en el siguiente rango de tiempo la precipitación descienda. La dimensión fractal se conserva casi constante empleando un análisis por décadas.

4.4 Analisis Multifractal empleando la técnica MF-DFA

Una de las principales ventajas que posee la teoría de los fractales es analizar los sistemas sin escala característica o sin rasgos determinados, debido a su invariancia, por ello, la teoría de los fractales es aplicable en numerosos sistemas. Las propiedades estadísticas de estos sistemas para diferentes escalas vienen dadas por simples coeficientes, que buscan y analizan características independientes del tamaño físico del objeto o del sistema de estudio (García, 2007).

Por lo tanto, debido a la heterogeneidad que presenta la geometría en la naturaleza, la aproximación fractal se puede aplicar como un método analítico que proporciona información adicional a la obtenida por la estadística descriptiva.

4.4.1 Analisis Multifractal de series de temperatura

Se realiza una aplicación de la técnica MF-DFA sobre las series de temperatura utilizadas en la sección 4.1.

A continuación se muestran los resultados obtenidos, una vez es desarrollada la metodología referenciada en el punto 3.8.

El objetivo es obtener el espectro multifractal para comprobar la naturaleza multifractal de las series temporales de temperatura y precipitación. Para ello, necesitamos definir el momento estadístico “ q ”, el cual fijamos entre (-10, 10). Para un $q = 2$ y aplicando la ecuación (3.87) se determina el perfil de la serie; con el perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones para $q = 2$, como se muestra en la figura 4.20.

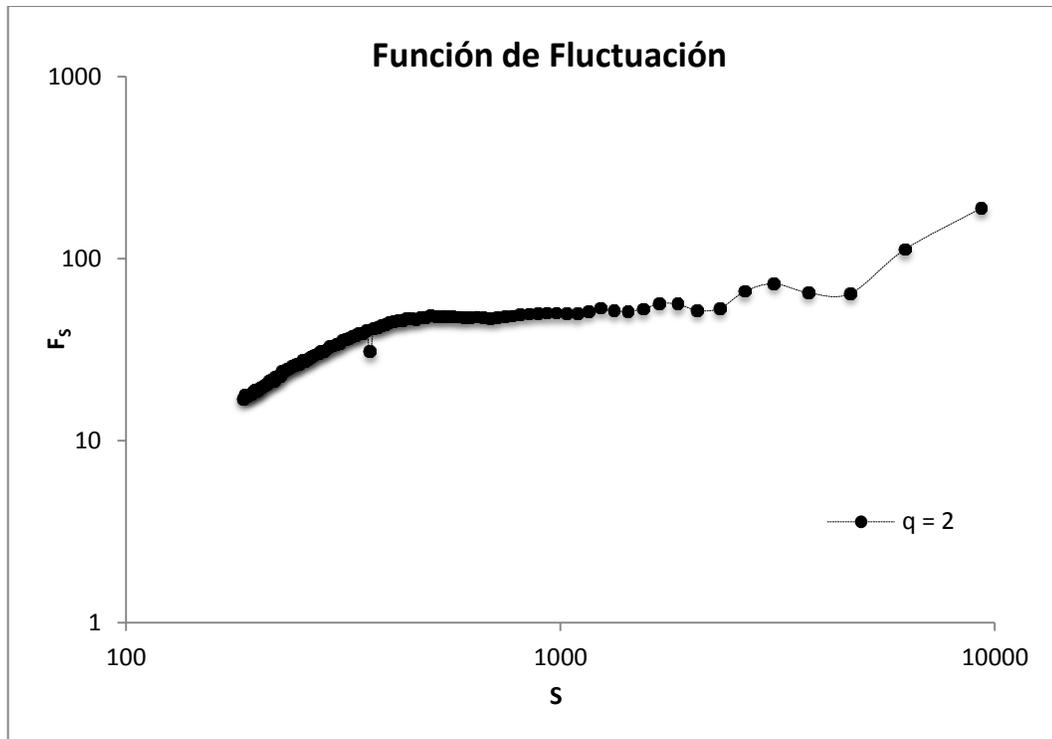


Figura 4.20 Representación log-log para la función de fluctuación, $q = 2$.

La función de fluctuaciones de la figura 4.20 representa la evolución de la función de fluctuaciones a partir de un número determinado de ventanas para el análisis, en este caso igual a 100.

Así mismo en dicha gráfica se observan varios cambios de pendiente y oscilaciones. Los cambios de pendiente nos dicen que la señal exhibe múltiples escalamientos; es decir, es de naturaleza multifractal.

Este procedimiento se repite para todas las escalas de tiempo (segmentos) para obtener una relación entre $F(s)$ y el tamaño del segmento S , esto es aplicado para distintos valores de q . Por otro lado, la pendiente de la función de fluctuación corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$, véase la ecuación (3.93).

Tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (3.94) se obtiene la gráfica del exponente de Hurst generalizado para valores de q entre -2 y 2. Los resultados se observan en la figura 4.21 donde se muestran las funciones $h(q)$ y $t(q)$, véase la ecuación (3.100)

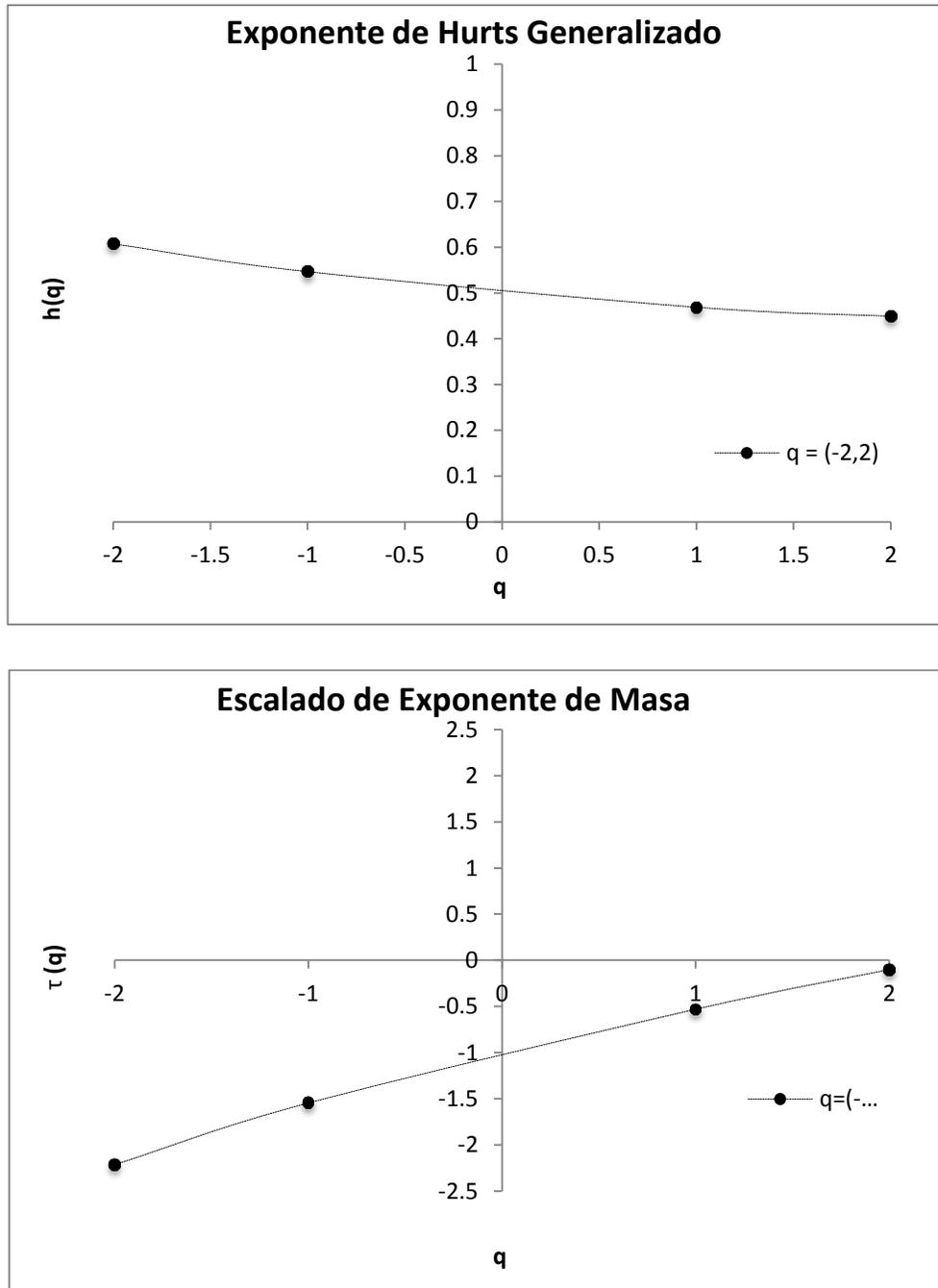


Figura 4.21 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -2, 2$; a partir de dicha función se

genera el espectro multifractal.

En la figura anterior se observa que la serie de tiempo en estudio es un proceso multifractal por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $t(q)$. Para valores $q < 0$ y $q > 0$ se tienen distintos comportamientos, esto se puede observar por la variación en la pendiente de la línea que une los puntos, siendo distinta para valores negativos y positivos. De acuerdo a la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=2) - 1 = H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.44, la dimensión fractal puede ser obtenida como $D_f = (2 - H) = 1.56$.

Finalmente podemos encontrar el espectro multifractal o de singularidades, a partir de las ecuaciones (3.100), en la figura 4.22, se puede observar el espectro multifractal.

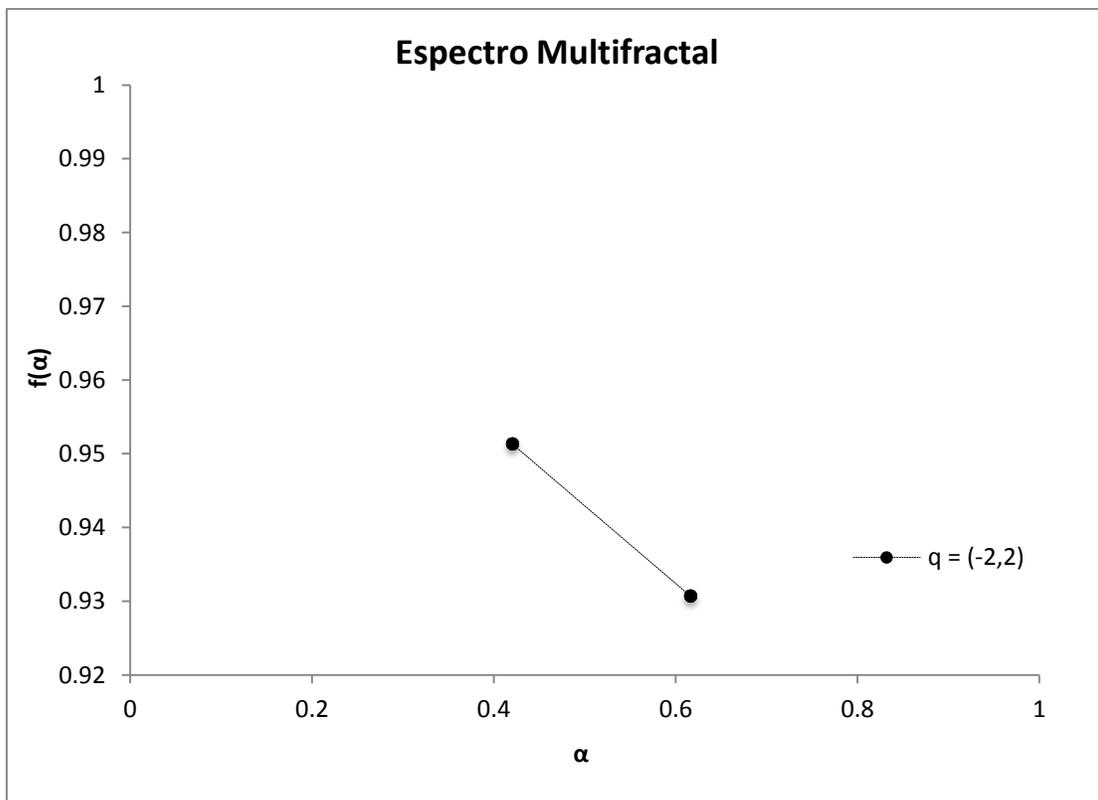


Figura 4.22 Espectro multifractal $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -2, 2$.

El espectro multifractal presentado en la figura anterior, aparentemente no representa una función cóncava, producto del valor de paso del exponente igual a 1; dicha situación no se presenta para valores de q superiores a $(-2,2)$. Un exponente de Hölder denota monofractalidad, mientras que en el caso multifractal, las diferentes partes de la estructura está caracterizada por diferentes valores de (a) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(a)$. El comportamiento de parábolas invertidas es un hecho que prueba la naturaleza multifractal de la serie, por otro lado el ancho del espectro $(a_{\max} - a_{\min})$ nos da idea de la variabilidad de la variable en estudio, en este caso temperatura.

Cuando la acumulación de puntos en los extremos es de de forma concentrada, puede indicar la existencia de valores extremos lejanos de la media, situación presentada para ordenes mayores para rangos de q ; por otro lado cuando una de las ramas del espectro multifractal es mas corta que otra, es un indicativo de valores homogéneos.

A continuación se muestran los resultados obtenidos se forma similar para diferentes rangos de q , y a partir de las funciones $F(s), h(q)$ y $t(q)$ se obtienen los espectros multifractales $f(a)$ para valores entre -10 y 10 , demostrando el comportamiento multifractal de la temperatura.

Para valores de $q = (-4,4)$, tenemos los siguientes resultados:

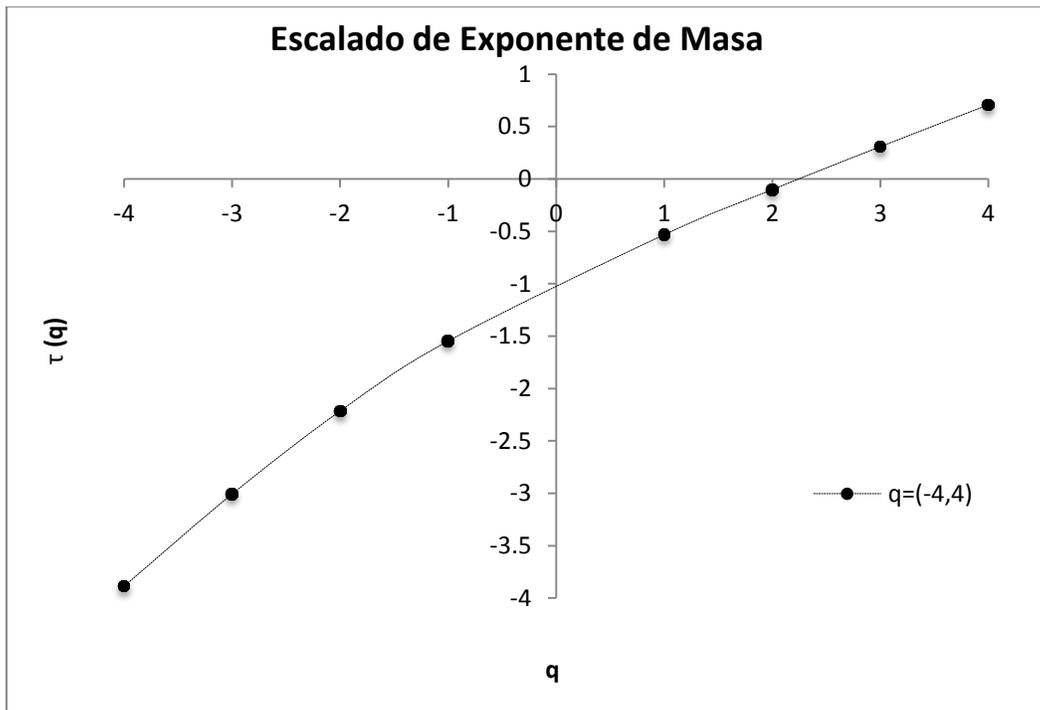
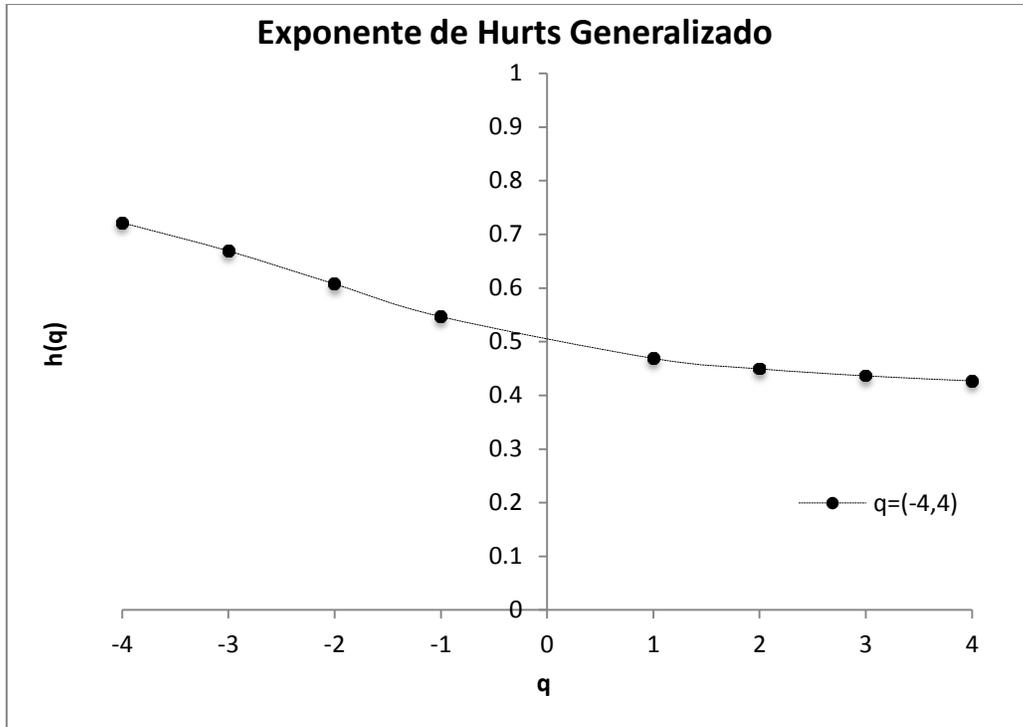


Figura 4.23 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -4, 4$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

A diferencia del espectro de la figura 4.22, El espectro multifractal presentado en la figura 4.24, representa una función cóncava para $q = (-4,4)$, por lo tanto se presenta el comportamiento de parábolas invertidas, por lo tanto es un hecho que prueba la naturaleza multifractal de la serie, por otro lado el ancho del espectro $(a_{\max} - a_{\min})$ nos da idea de la variabilidad de la variable en estudio, en este caso temperatura.

La acumulación de puntos en en el extremo izquierdo, puede indicar la existencia de valores extremos lejanos de la media, por otro lado la presencia de una rama del espectro multifractal mas corta que otra, es un indicativo de valores homogéneos.

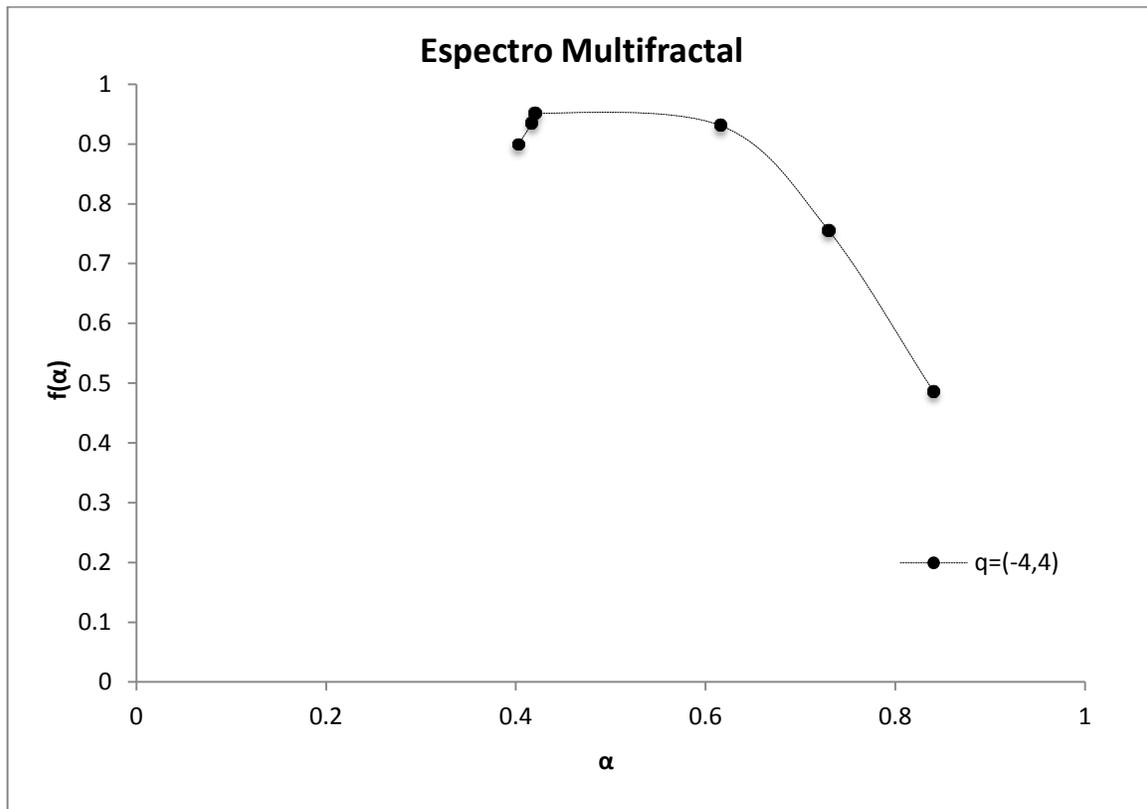


Figura 4.24 Espectro multifractal $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -4,4$.

Para valores de $q = (-6,6)$, tenemos los siguientes resultados:

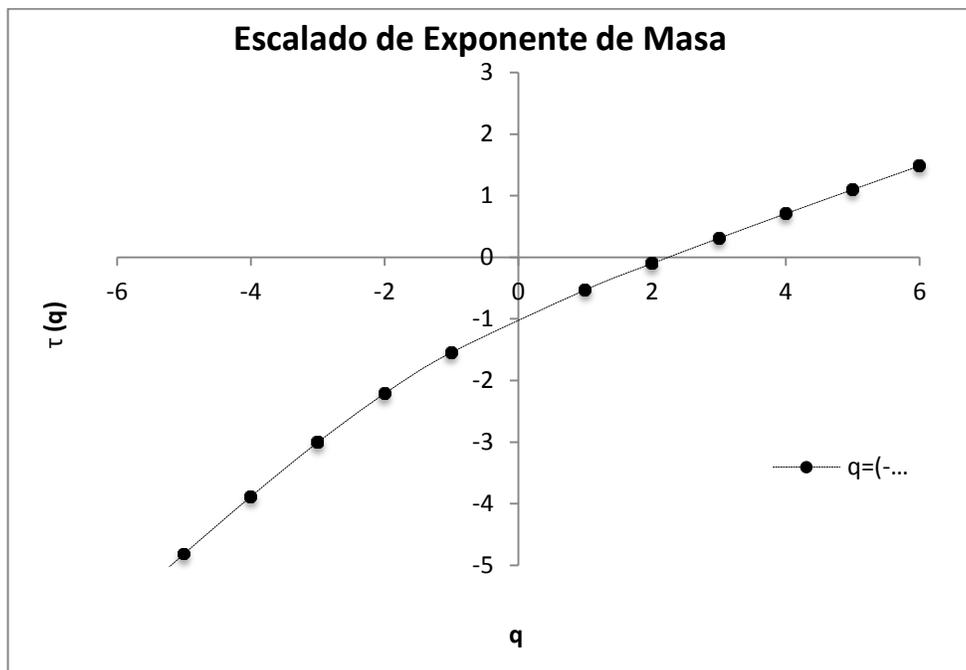
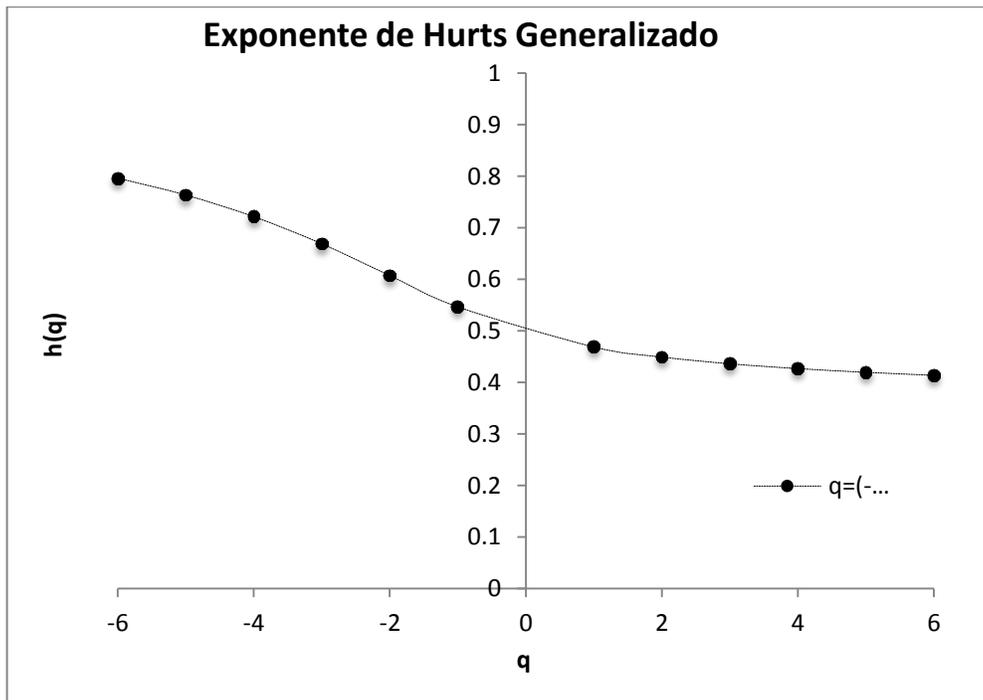


Figura 4.25 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6, 6$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

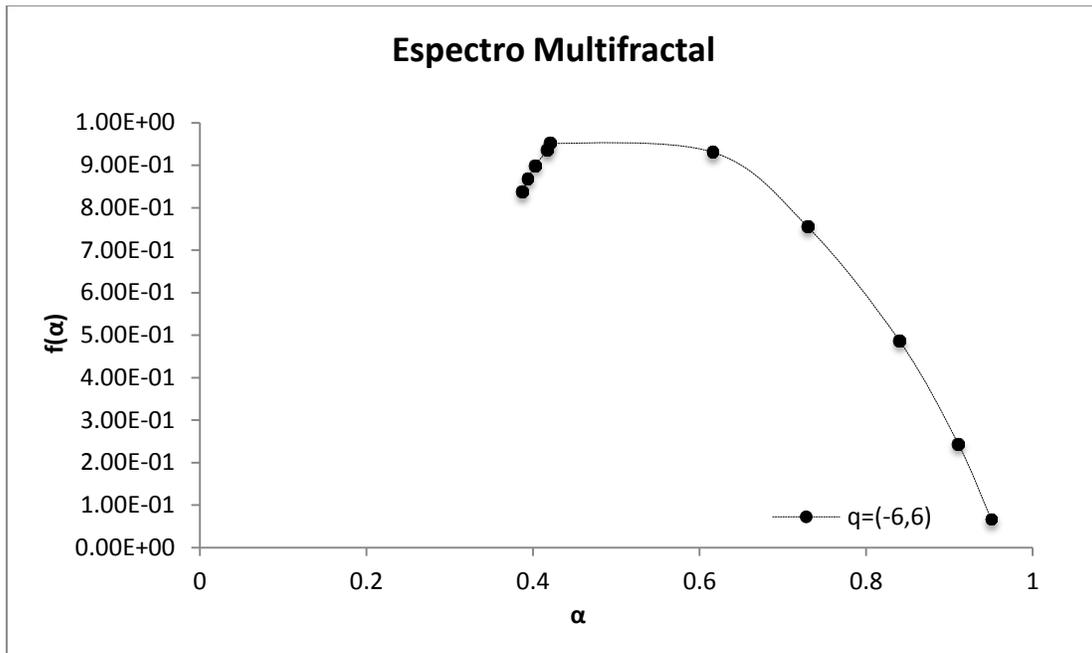
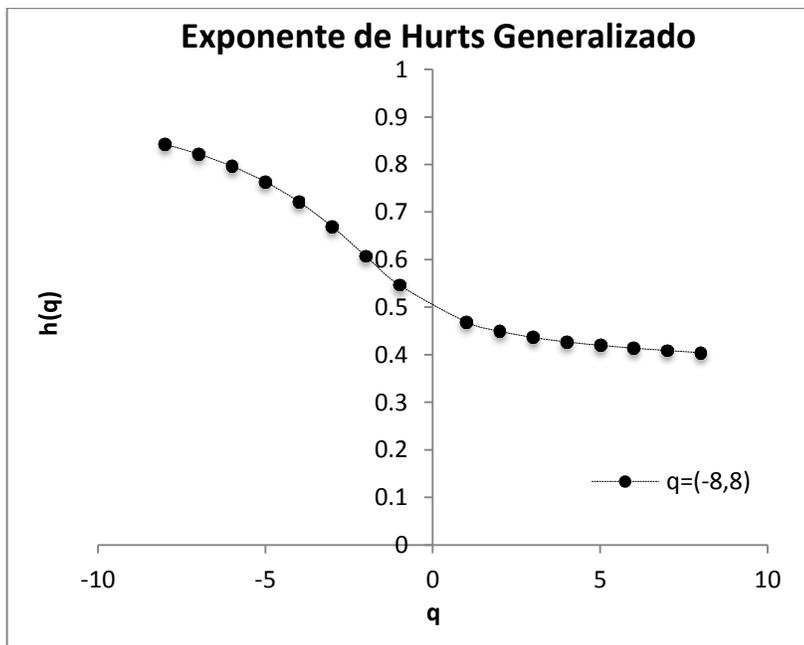


Figura 4.26 Espectro multifractal $f(\alpha)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6,6$.

Para valores de $q = (-8,8)$, tenemos los siguientes resultados:



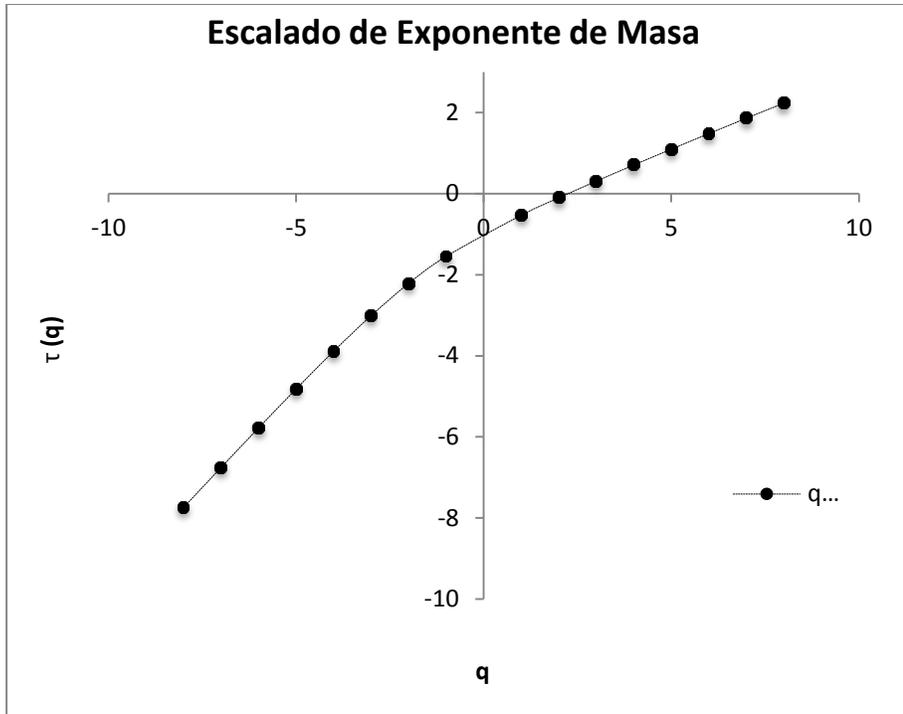


Figura 4.27 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -8, 8$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

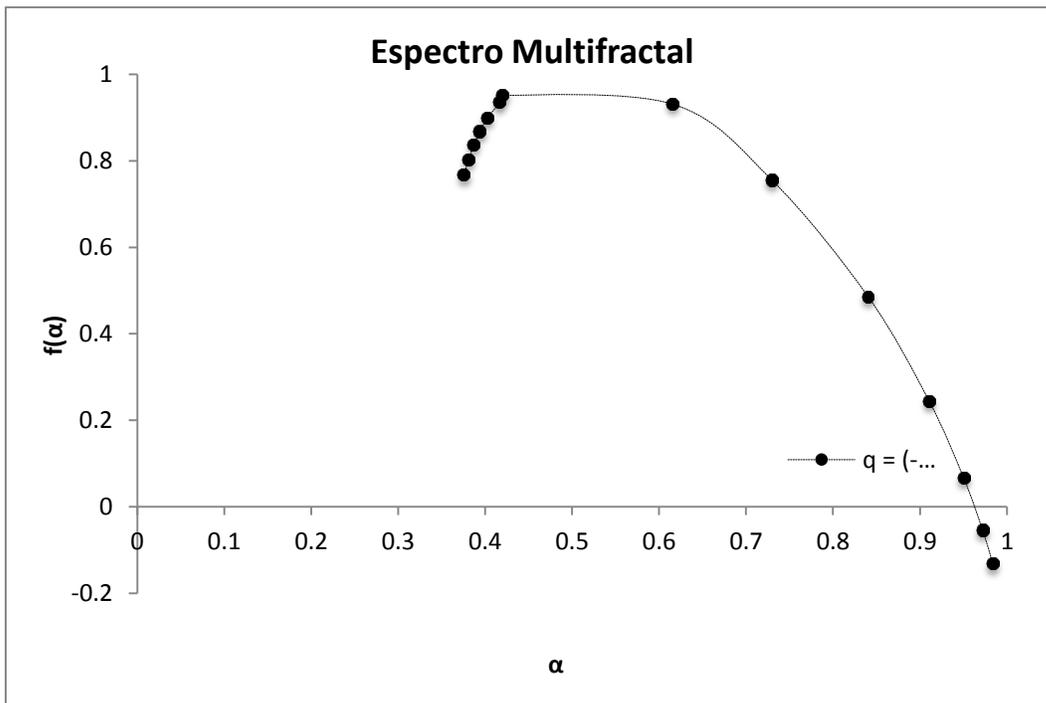


Figura 4.28 Espectro multifractal $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -8,8$.

Para valores de $q = (-10,10)$, tenemos los siguientes resultados,

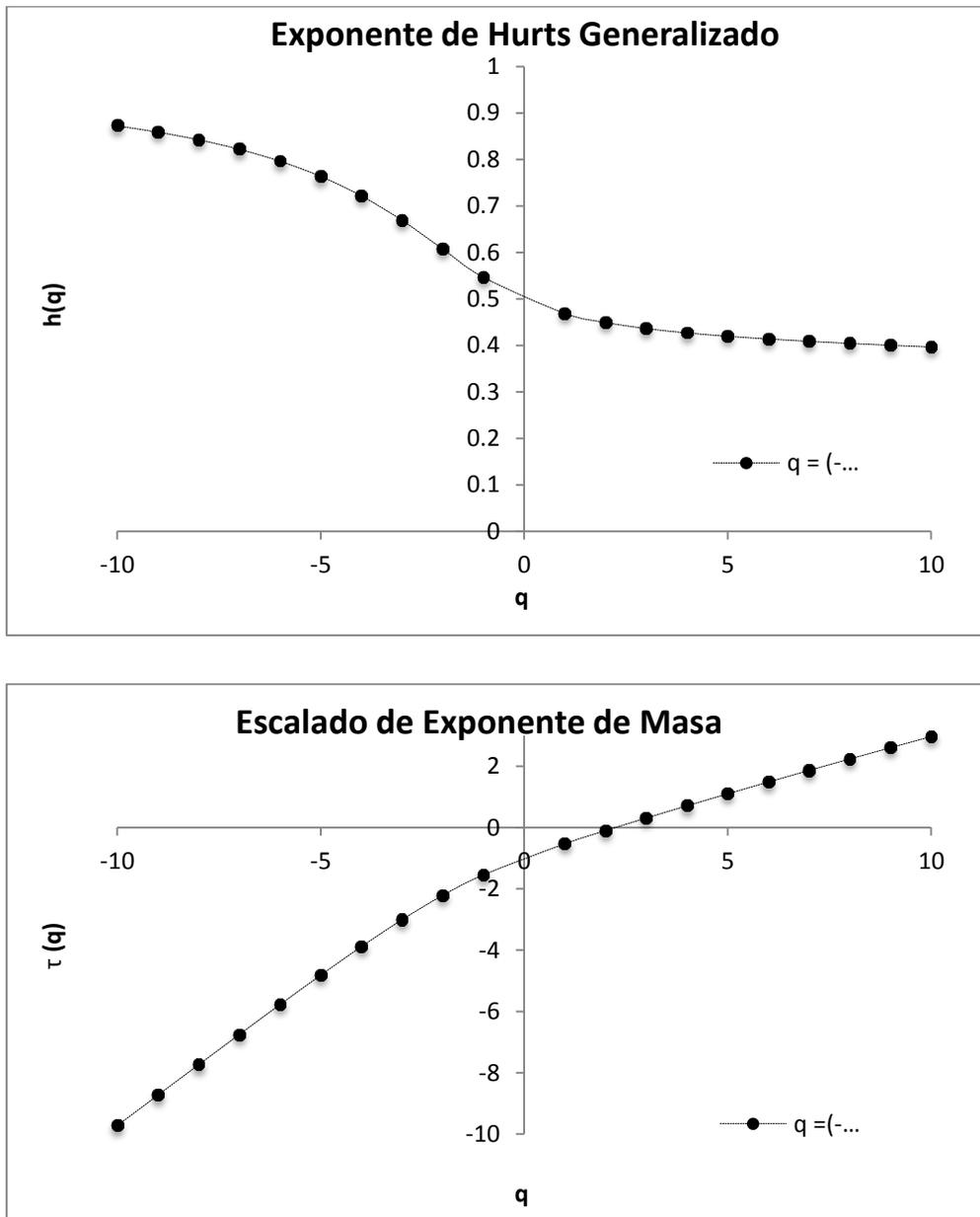


Figura 4.29 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -10, 10$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

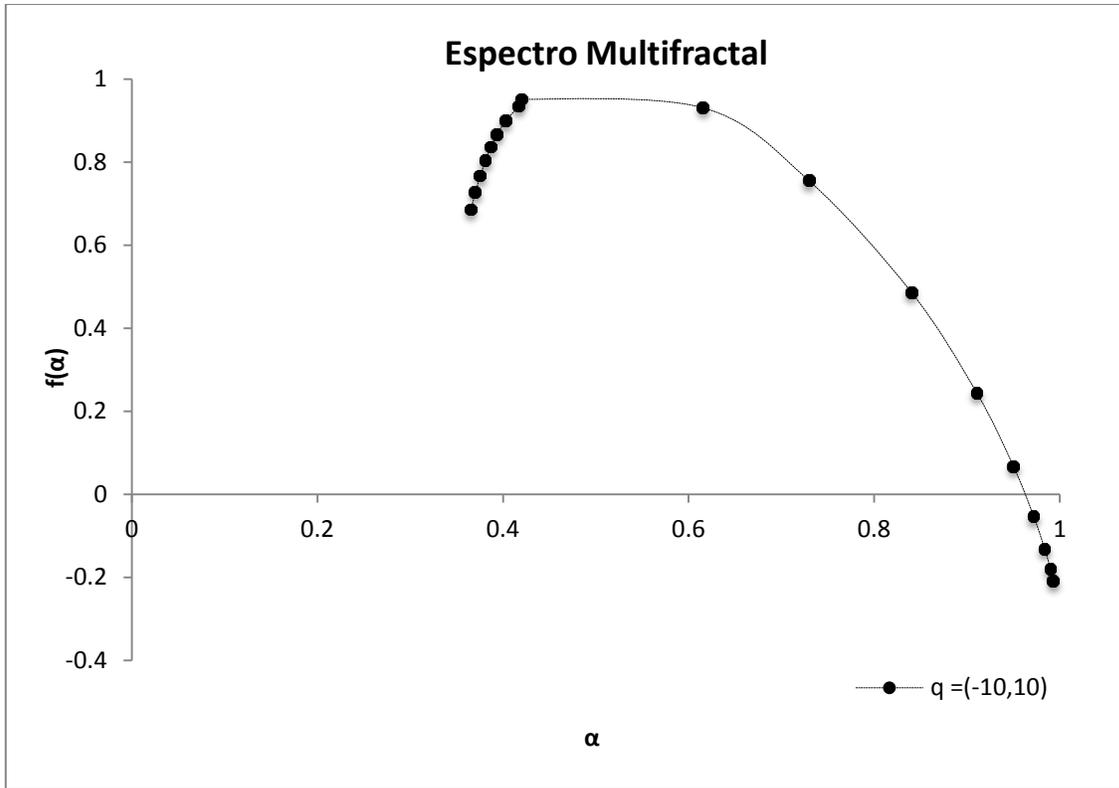


Figura 4.30 Espectro multifractal $f(\alpha)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -10,10$.

Se puede observar que para $q = -8,8; -10,10$, los espectro multifractales claramente representan una función cóncava, reflejando el comportamiento multifractal de la temperatura.

Por lo tanto en el análisis multifractal se pretende evaluar estructuras más finas de la señal en este caso temperatura.

4.5.1 Analisis Multifractal de series de precipitación

En esta sección, se realiza una aplicación de la técnica MF-DFA sobre las series de tiempo de precipitación mostradas en el punto 4.1 las cuales comprenden los años de registros a partir del año de 1951 hasta el año 2001.

La estructura de evento de lluvia que se utiliza para el análisis, se plantea de tal forma que un evento de lluvia (i) se define como una secuencia de cantidades no nulas de lluvia, y su tamaño es representado por la columna de agua acumulada desde el inicio hasta el momento en que finaliza la precipitación; por lo tanto cada valor que conforma la serie de tiempo de precipitaciones, constituye un evento acumulado de lluvia. Así mismo cabe mencionar que para efectos de cálculos se eliminan los espacios nulos o días donde no hay registros de lluvia, conformando así una serie de tiempo continua conformada por todos los eventos de lluvia con valores mayores a cero.

A continuación se muestran los resultados obtenidos, una vez es desarrollada la metodología MF-DFA referenciada en el punto 3.8.

El objetivo es obtener el espectro multifractal para comprobar la naturaleza multifractal de las series temporales precipitación. Para ello, necesitamos definir el momento estadístico “ q ”, el cual fijamos entre (-10, 10). Para un $q = 10$ y aplicando la ecuación (3.87) se determina el perfil de la serie; con dicho perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones para $q = 10$ y $q = 6$, como se muestra en la figura 4.31. Hay que resaltar que en este caso el análisis de fluctuaciones es dado a partir de un número de 100 de segmentos o ventanas.

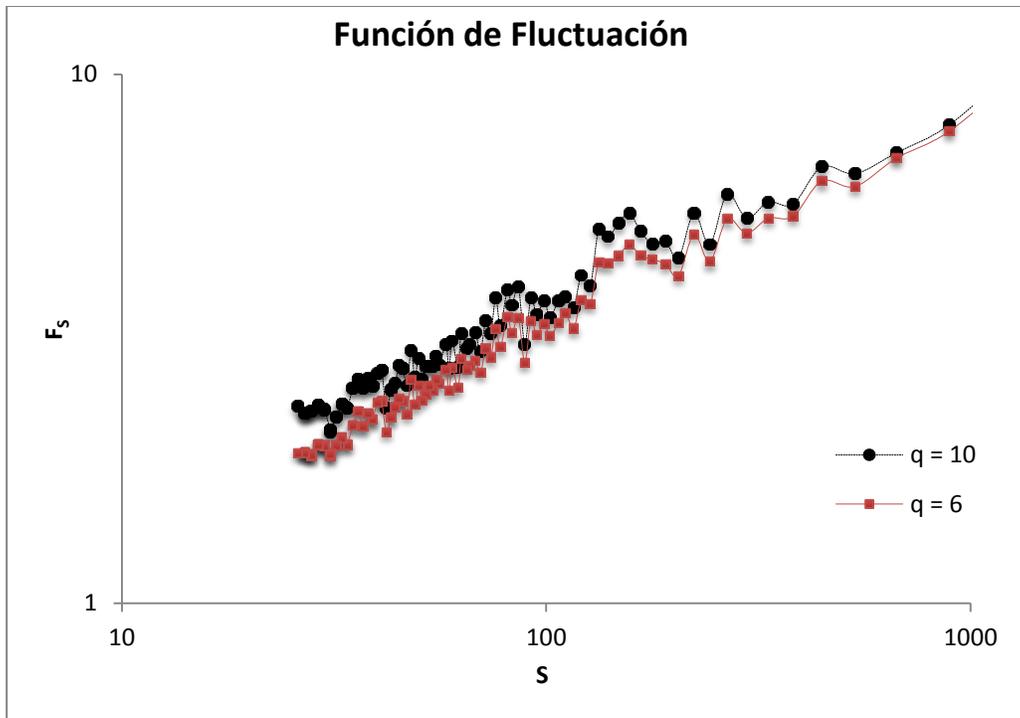


Figura 4.31 Representación log-log para la función de fluctuación de datos de precipitación para un $q = 10$ y $q = 6$.

La función de fluctuaciones de la figura 4.31 representa la evolución de la función de fluctuaciones a partir de un número determinado de ventanas para el análisis, así mismo en dicha gráfica se observan varios cambios de pendiente y oscilaciones. Los cambios de pendiente nos dicen que la señal exhibe múltiples escalamientos; es decir, es de naturaleza multifractal; este comportamiento es muy similar para los momentos analizados, en este caso $q = 10$ y $q = 6$.

El procedimiento anterior se repite para todas las escalas de tiempo (segmentos) para obtener una relación entre $F(s)$ y el tamaño del segmento S , esto es aplicado para distintos valores de q . Por otro lado, la pendiente de la función de fluctuación corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$, véase la ecuación (3.93).

Tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (3.94) se obtiene la gráfica del exponente de Hurst generalizado para valores de q , en este caso entre -10 y 10.

Los resultados se observan en la figura 4.32 donde se muestran las funciones $h(q)$ y $t(q)$, véase la ecuación (3.100).

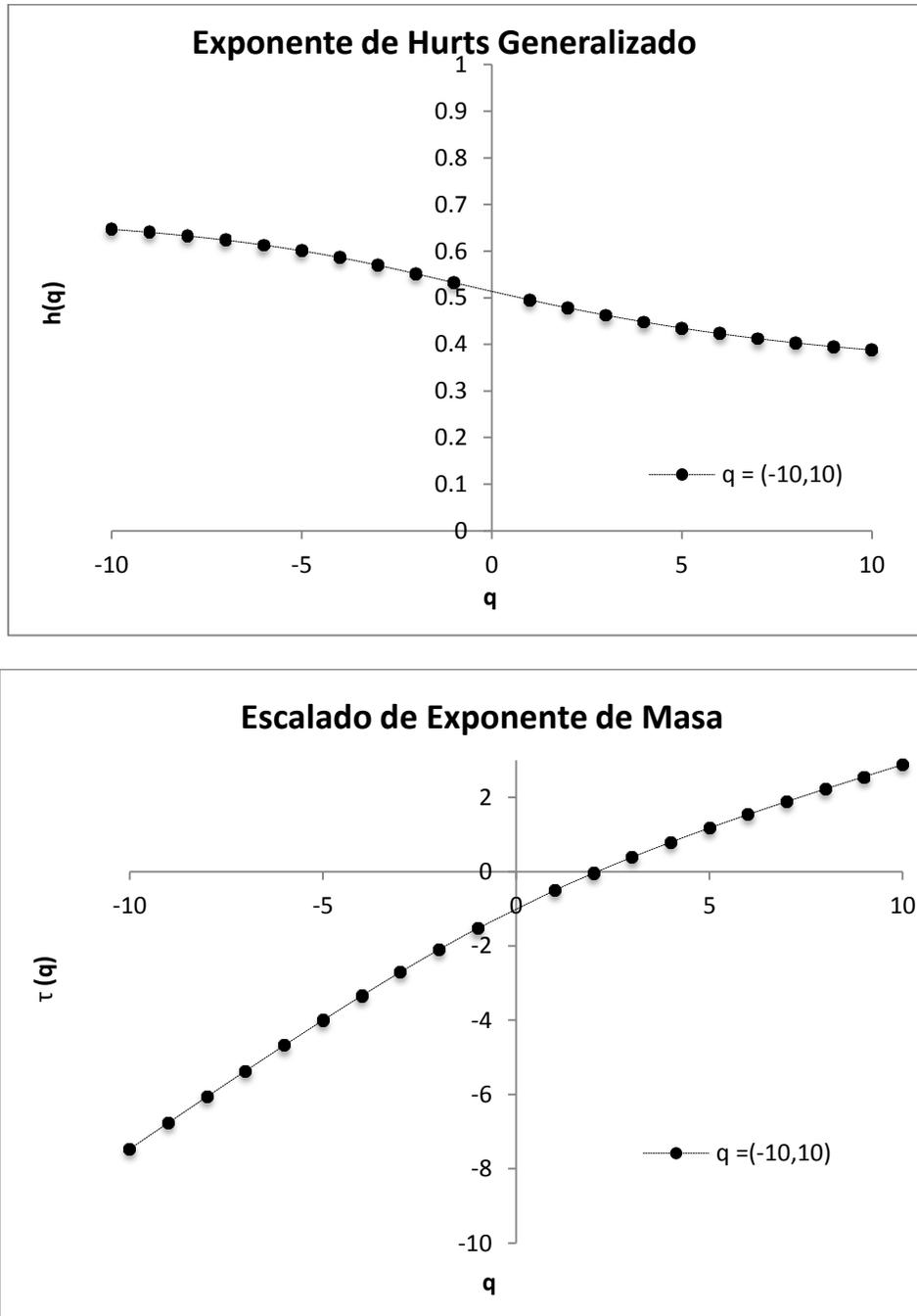


Figura 4.32 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -2, 2$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

En la figura anterior se observa que la serie de tiempo de precipitaciones es un proceso multifractal por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $t(q)$. Para valores $q < 0$ y $q > 0$ se tienen distintos comportamientos, esto es debido por la variación en la pendiente de la línea que une los puntos, siendo distinta para valores negativos y positivos. De acuerdo a la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=10) - 1 = H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.38, la dimensión fractal puede ser obtenida como $D_f = (2 - H) = 1.62$. Para valores negativos de q tenemos una pendiente $t(q)$ de 0.69, y para valores positivos 0.34. También se puede notar que la curva $t(q)$ es convexa, siendo esto un indicativo de multifractalidad.

El espectro multifractal o de singularidades, se puede obtener a partir de las ecuaciones (3.100) correspondientes al par de transformadas de Legendre; en la figura 4.33, se puede observar el espectro multifractal de la precipitación para valores de $q = -10, 10$.

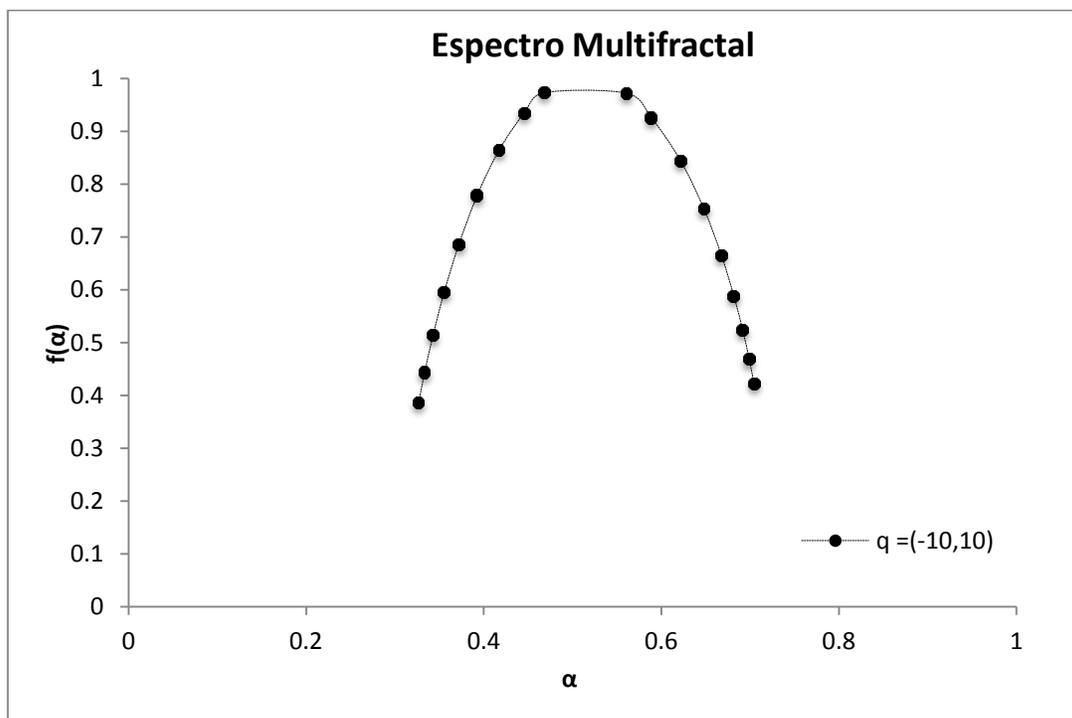


Figura 4.33 Espectro multifractal de la serie de precipitaciones registradas entre los años

1951 – 2001, $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -10, 10$.

El espectro multifractal presentado en la figura 4.33, representa una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (a) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(a)$. El comportamiento de parábolas invertidas es un hecho que prueba la naturaleza multifractal de la serie, por otro lado el ancho del espectro $Da = (a_{\max} - a_{\min})$ nos da idea de la variabilidad de la variable en estudio, en este caso la precipitación. Una fuerza multifractal es una medida de que tan fuerte es la multifractalidad presente en un proceso. En este análisis se estima (Da) para la serie de datos de precipitación. En el espectro de la figura 4.33 se tienen valores de $a_{\max} = 0.70$ y para $a_{\min} = 0.32$, por lo tanto el ancho del espectro tiene un valor $Da = 0.38$. Los valores anteriores de $(a_{\max} - a_{\min})$ representan el rango entre los valores máximos y mínimos de precipitaciones.

Cuando la acumulación de puntos en los extremos es de de forma concentrada, puede indicar la existencia de valores extremos lejanos de la media, situación que puede ser presentada para ordenes mayores para rangos de q ; por otro lado cuando una de las ramas del espectro multifractal es mas corta que otra, es un indicativo de valores homogéneos.

A continuación se realiza un análisis similar al del anterior momento $q = 10$, y se muestran los resultados obtenidos se forma similar para $q = 6$; a partir de las funciones $F(s), h(q)$ y $t(q)$ se obtienen los espectros multifractales $f(a)$ para valores entre -6 y 6 , demostrando el comportamiento multifractal de la precipitación para este orden de momento.

Una vez más, tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (3.94) se obtiene la gráfica del exponente de Hurst generalizado para valores de q , en este caso

entre -6 y 6. Los resultados se observan en la figura 4.34 donde se muestran las funciones $h(q)$ y $t(q)$, véase la ecuación (3.100).

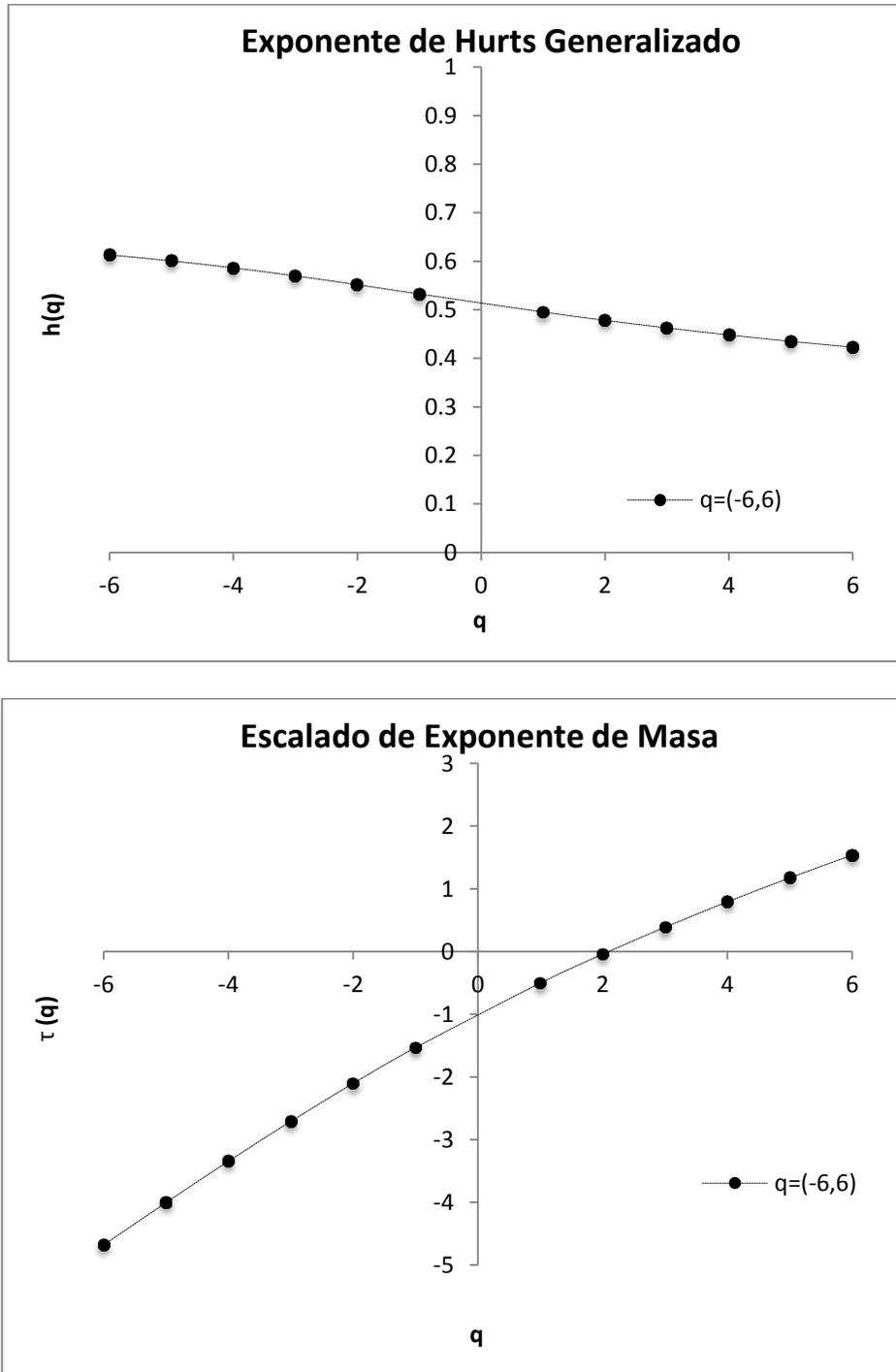


Figura 4.34 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6, 6$; a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

En la figura 4.34, también se puede apreciar que la serie de tiempo de precipitaciones es un proceso multifractal por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $t(q)$. Para valores $q < 0$ y $q > 0$ también se tienen distintos comportamientos, debido por la variación en la pendiente de la línea que une los puntos, siendo distinta para valores negativos y positivos. Siguiendo la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=6) - 1 = H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.42, la dimensión fractal se obtiene como $D_f = (2 - H) = 1.58$. En ese caso para valores negativos de q tenemos una pendiente $t(q)$ de 0.62, y para los valores positivos 0.38. La curva $t(q)$ también es convexa, por lo tanto presenta características multifractales.

Como se ha mencionado anteriormente, el espectro multifractal o de singularidades, se obtiene a partir de las ecuaciones (3.100) correspondientes al par de transformadas de Legendre; en la figura 4.35, se puede observar el espectro multifractal de la precipitación para valores de $q = -6, 6$.

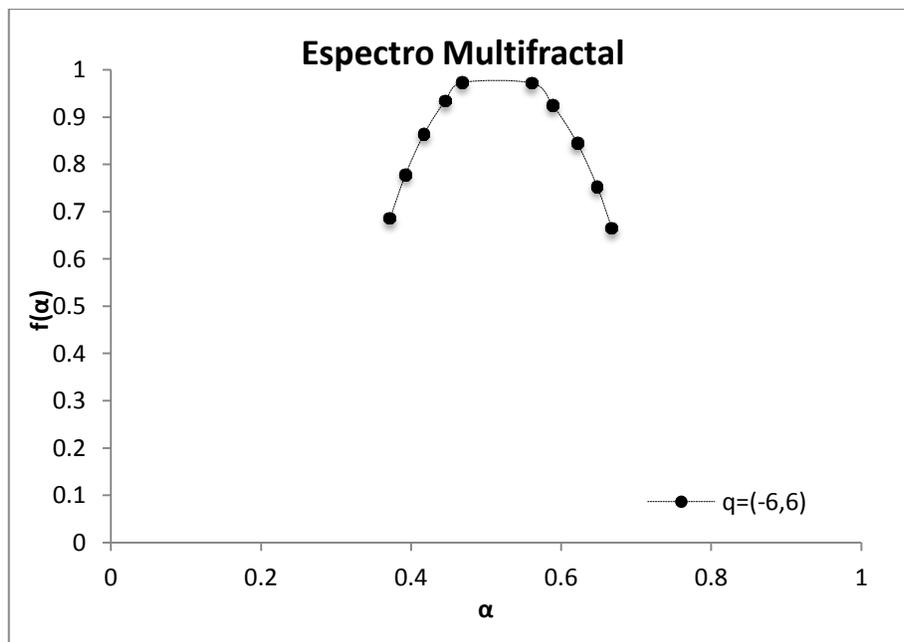


Figura 4.35 Espectro multifractal de la serie de precipitaciones registradas entre los años 1951 – 2001, $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6, 6$.

El espectro multifractal presentado en la figura 4.35, también es una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (a) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(a)$. En este análisis se estima (Da) para la serie de datos de precipitación. En el espectro de la figura 4.35 se tienen valores de $a_{\max} = 0.67$ y para $a_{\min} = 0.36$, por lo tanto el ancho del espectro tiene un valor $Da = 0.29$. Los valores anteriores de $(a_{\max} - a_{\min})$ representan el rango entre los valores máximos y mínimos de precipitaciones.

También se resalta que los espectros multifractales correspondientes a las figuras 4.33 y 4.35, tienen una distribución de valores de (a) y $f(a)$ homogénea ya que su ramas derechas e izquierdas son de longitudes similares.

A continuación se presenta el análisis multifractal para la serie de tiempo anterior, con la diferencia que el análisis de fluctuaciones es dado a partir de un número de 50 segmentos o ventanas. Los momentos estadísticos “ q ”, son los mismos que el análisis anterior; aplicando la ecuación (3.87) se determina el perfil de la serie; con dicho perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones para $q = 10$ y $q = 6$, como se muestra en la figura 4.36.

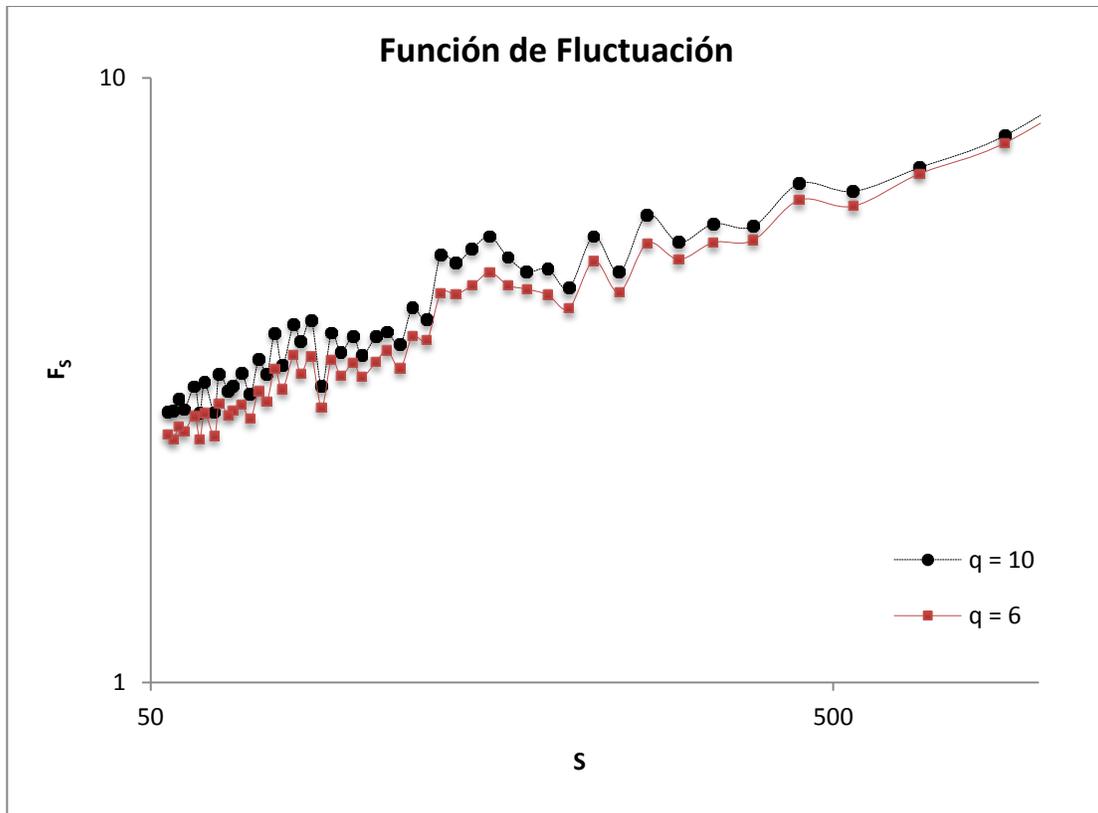


Figura 4.36 Representación log-log para la función de fluctuación de datos de precipitación para un $q = 10$ y $q = 6$, a partir de un número de de 50 segmentos o ventanas.

La función de fluctuaciones de la figura 4.36 representa la evolución de la función de fluctuaciones a partir del número de ventanas utilizadas para el análisis, en este caso 50; así mismo en dicha gráfica se observan varios cambios de pendiente y oscilaciones tanto para $q = 10$ y $q = 6$. Haciendo una comparación entre las funciones de fluctuaciones que se muestran en la figuras 4.31 y 4.36, cabe resaltar que las funciones de fluctuaciones de la figura 4.36, presentan menores oscilaciones producto del tamaño de ventana, por lo tanto se tiene una mejor discretización de la señal. Como se menciona en el análisis anterior, los cambios de pendiente nos dicen que la señal exhibe múltiples escalamientos; es decir, es de naturaleza multifractal; este comportamiento es muy similar para los momentos analizados, en este caso $q = 10$ y $q = 6$; la pendiente de la función de

fluctuación corresponde al exponente de Hurst generalizado para el momento de orden q , $h(q)$.

Nuevamente tomando logaritmo a ambos lados de la ecuación (3.94) se obtiene la gráfica del exponente de Hurst generalizado para valores de q , en este caso entre -10 y 10. Los resultados se observan en la figura 4.37 donde se muestran las funciones $h(q)$ y $t(q)$.

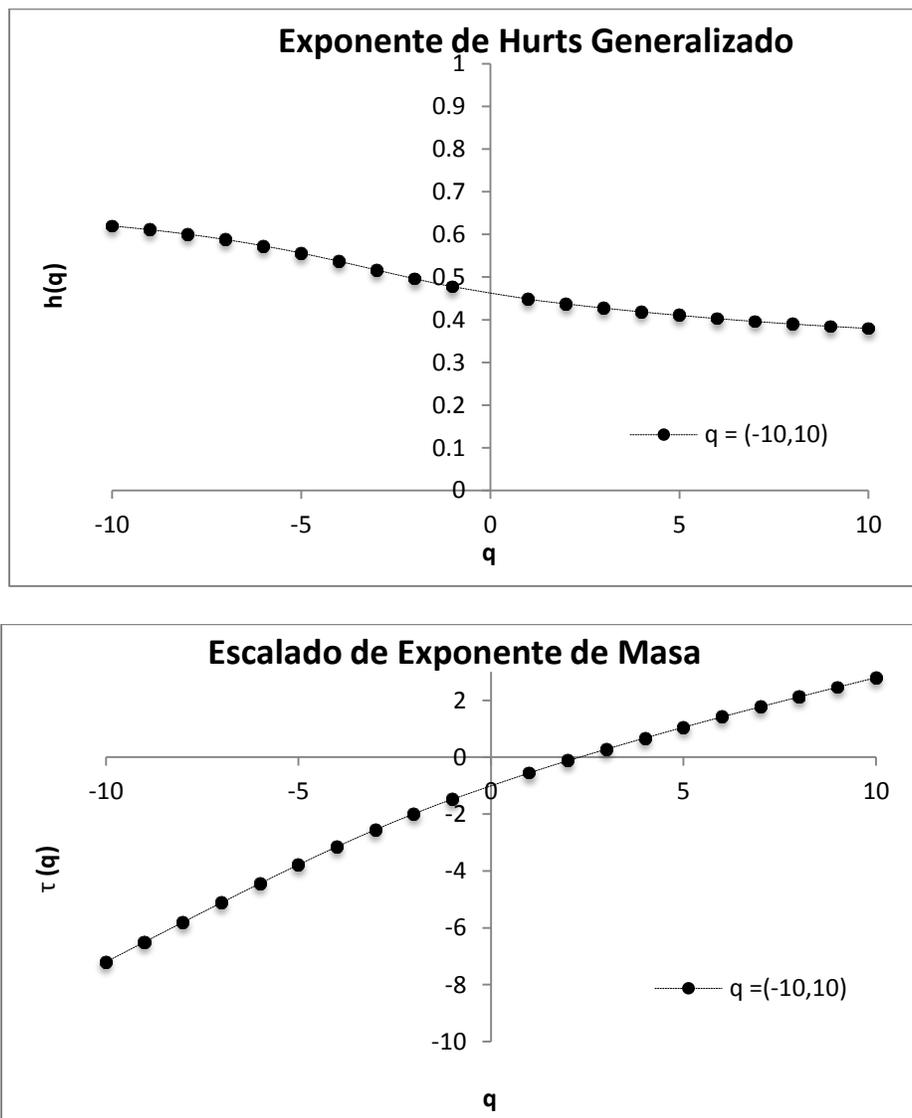


Figura 4.37 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -10, 10$; con un número de 50 segmentos o ventanas, a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

En la figura 4.37, también se puede apreciar que la serie de tiempo de precipitaciones es un proceso multifractal por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $t(q)$. Para valores $q < 0$ y $q > 0$ también se tienen distintos comportamientos, debido por la variación en la pendiente de la línea que une los puntos, siendo distinta para valores negativos y positivos. Siguiendo la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=10) - 1 = H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.38, la dimensión fractal se obtiene como $D_f = (2 - H) = 1.62$. En ese caso para valores negativos de q tenemos una pendiente $t(q)$ de 0.69, y para los valores positivos 0.35. La curva $t(q)$ también es convexa, por lo tanto presenta características multifractales.

A partir de las ecuaciones (3.100) correspondientes al par de transformadas de Legendre se obtiene el espectro multifractal o de singularidades; en la figura 4.38, se puede observar el espectro multifractal de la precipitación para valores de $q = -10, 10$.

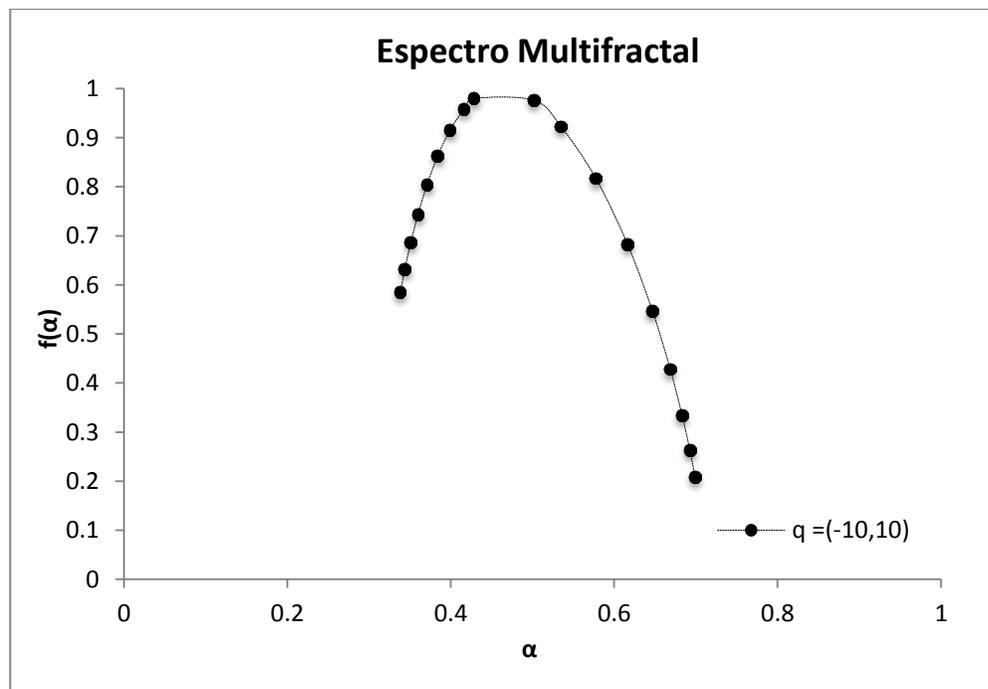


Figura 4.38 Espectro multifractal de la serie de precipitaciones registradas entre los años

1951 – 2001, $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -10, 10$, para un número de 50 segmentos o ventanas.

El espectro multifractal presentado en la figura 4.38, también es una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (a) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(a)$. En este análisis se estima (Da) para la serie de datos de precipitación. En el espectro de la figura 4.38 se tienen valores de $a_{\max} = 0.69$ y para $a_{\min} = 0.40$, por lo tanto el ancho del espectro tiene un valor $Da = 0.36$. Los valores anteriores de $(a_{\max} - a_{\min})$ representan el rango entre los valores máximos y mínimos de precipitaciones.

En el espectro anterior la rama de la derecha es mucha más larga que la de la izquierda, esto indica una gran heterogeneidad entre los valores de precipitación de la serie.

A continuación se vuelve a realizar un análisis similar al del anterior momento $q = 10$, y se muestran los resultados obtenidos se forma similar para $q = 6$; a partir de las funciones $F(s), h(q)$ y $t(q)$ se obtienen los espectros multifractales $f(a)$ para valores entre -6 y 6.

Una vez más se toman logaritmos a ambos lados de la ecuación (3.94) y se obtiene la gráfica del exponente de Hurst generalizado para valores de q , en este caso entre -6 y 6. Los resultados se observan en la figura 4.39 donde se muestran las funciones $h(q)$ y $t(q)$.

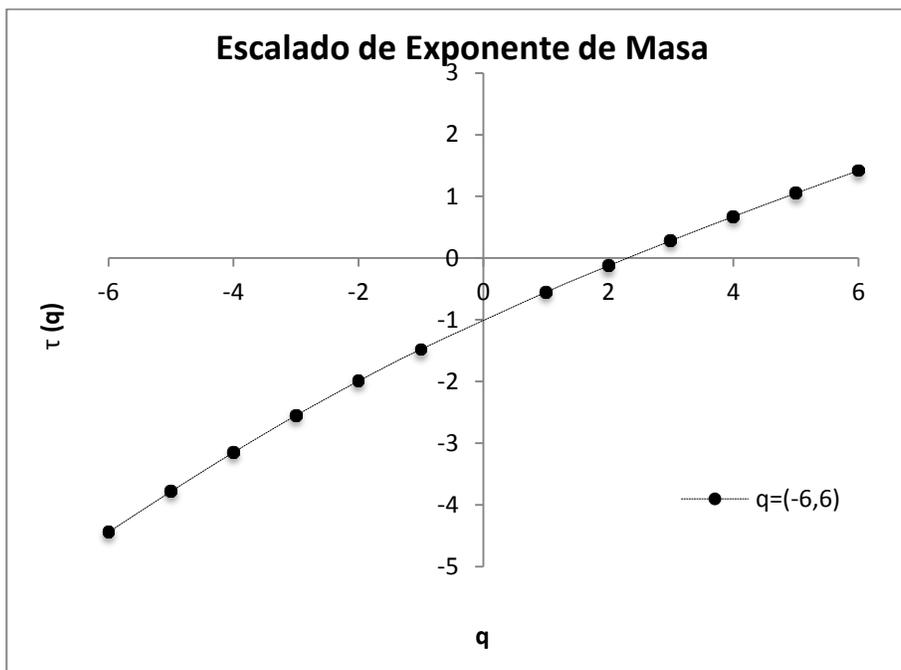
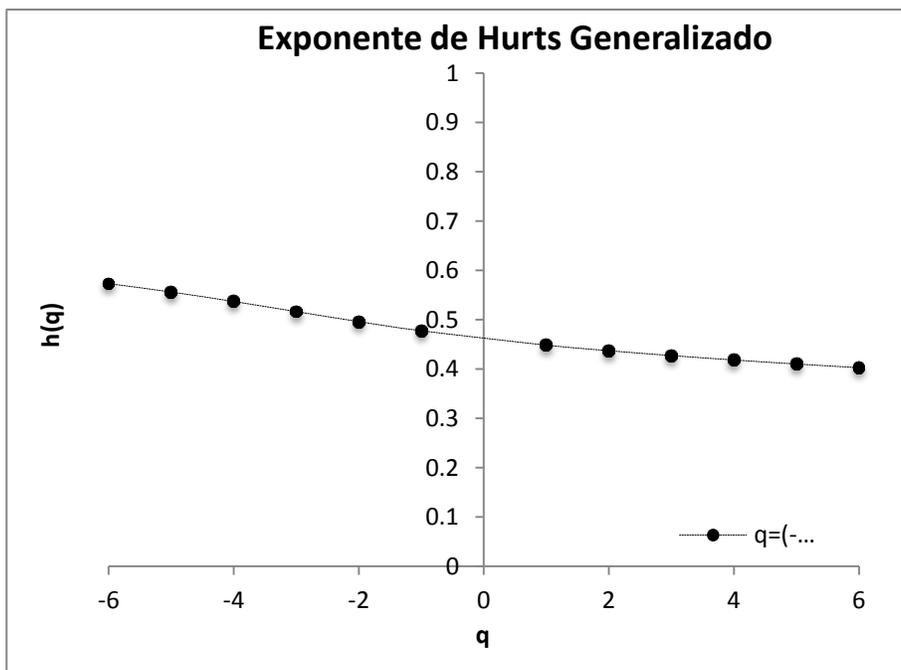


Figura 4.39 Función $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6, 6$; con un número de 50 segmentos o ventanas, a partir de dicha función se genera el espectro multifractal.

En la figura 4.39, también se puede apreciar que la serie de tiempo de

precipitaciones es un proceso multifractal por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $t(q)$. Para valores $q < 0$ y $q > 0$ también se tienen distintos comportamientos, debido por la variación en la pendiente de la línea que une los puntos, siendo distinta para valores negativos y positivos. Siguiendo la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=10) - 1 = H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.40, la dimensión fractal se obtiene como $D_f = (2 - H) = 1.60$. En ese caso para valores negativos de q tenemos una pendiente $t(q)$ de 0.69, y para los valores positivos 0.38. La curva $t(q)$ también es convexa, por lo tanto presenta características multifractales.

A partir de las ecuaciones (3.100) correspondientes al par de transformadas de Legendre se obtiene el espectro multifractal o de singularidades; en la figura 4.40, se puede observar el espectro multifractal de la precipitación para valores de $q = -6, 6$.

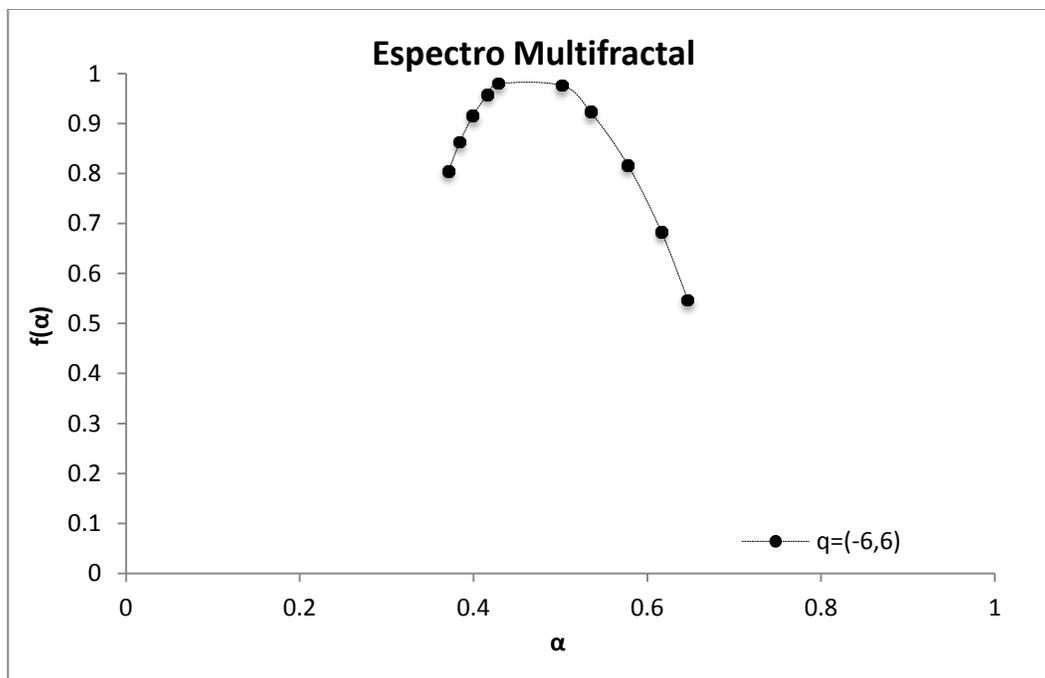


Figura 4.40 Espectro multifractal de la serie de precipitaciones registradas entre los años 1951 – 2001, $f(a)$ a partir de las funciones $h(q)$ y $t(q)$ para valores de $q = -6, 6$, para un número de 50 segmentos o ventanas.

El espectro multifractal presentado en la figura 4.40, también es una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (a) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(a)$. En este análisis se estima (Da) para la serie de datos de precipitación. En el espectro de la figura 4.40 se tienen valores de $a_{\max} = 0.64$ y para $a_{\min} = 0.37$, por lo tanto el ancho del espectro tiene un valor $Da = 0.27$. Los valores anteriores de $(a_{\max} - a_{\min})$ representan el rango entre los valores máximos y mínimos de precipitaciones.

En el espectro anterior la rama de la derecha es mucha más larga que la de la izquierda, esto indica una gran heterogeneidad entre los valores de precipitación de la serie.

4.6 Conclusiones

La modelación anual y mensual de las series de precipitación mediante la utilización de modelos autorregresivos, permite establecer las siguientes conclusiones:

La planificación racional exige prever los sucesos del futuro que probablemente vayan a ocurrir. La previsión, a su vez, se suele basar en lo que ha ocurrido en el pasado.

El análisis de series de tiempo constituye la técnica más importante para hacer inferencias sobre el futuro con base en lo ocurrido en el pasado.

Se lograron reproducir los estadísticos y modelar series de tiempo de precipitación anual y mensual con modelos del tipo ARMA, conservando los estadísticos históricos de la serie.

El análisis fractal de la temperatura y precipitación en la estación climática considerada permite establecer las conclusiones siguientes:

Los datos recopilados durante cincuenta años en una estación de Querétaro indican que la temperatura media anual ha aumentado a una razón $0.5\text{ }^{\circ}\text{C}/10\text{ años}$.

Se han utilizado las técnicas fractales tales como: el semivariograma, el rango reescalado, las ondoletas y el espectro de potencia, para el análisis de la serie de tiempo de temperatura y precipitación; los resultados preliminares no obstante

muestran que las series estudiadas son no persistentes, es decir que la probabilidad es alta de que la temperatura y precipitación aumenten en un rango de tiempo inmediatamente posterior a un rango donde se observa un descenso.

La dimensión fractal cercana a la unidad indica que la señal es continua. La dimensión de información menor de la unidad indica que el subconjunto donde se concentra la medida no es igual al intervalo de variación de la misma.

Los semivariogramas cruzados permiten inferir que las temperaturas y precipitaciones observadas en las estaciones climáticas se encuentran correlacionadas significativamente.

Para la cuenca del río sinú, con valores de dimensión fractal cercanos a 1, el proceso se hace cada vez más fiable, pues expone mayor persistencia. Es decir, la tendencia de cada serie se fortalece a medida que transcurre el tiempo. Por lo tanto la serie poseen alta persistencia.

El análisis multifractal se ha mostrado como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar la temperatura y precipitación. Los espectros multifractales obtenidos en la estación climatológica Presa Centenario son asimétricos, presentando ramas derechas más largas, lo que se relaciona con una mayor heterogeneidad de las variables de temperatura y precipitación. El método MF-DFA permite completar la información aportada por la estadística descriptiva, ya que detecta la presencia de valores que pueden ser extremos y explica el origen de la heterogeneidad y variabilidad de la distribución de las variables de precipitación y temperatura.

REFERENCIAS

- 1- Akaike, H. 1972. Information theory and Extension of the Maximum likelihood principle. In proc. And int. Symp. Information theory, supp. To Problems of Control and Information Theory. Pp. 267-281.
- 2- Akaike, H. 1974. A new look at statistical model identification, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-19, 716-722,1974.
- 3- Akaike, H. 1976. Canonical Correlation Analysis of time series and the use of an information criterion. En System Identification: Advances and case studies. Ad. R.K. Mehra y D.G. Lainiotis. Academic Press.
- 4- Akaike, H. 1977. An entropy maximization principle, Applications of Statistics, P.R. Krishnaiah, ed., North Holland, Amsterdam.
- 5- Akaike, H. 1978. On the likelihood of a time series model. Ponencia invitada en la Conference on Time Series Analysis and Forecasting, Cambridge University, 1978a.
- 6- Akaike, H. 1979. A new look at the Bayes procedure. Biometrika, 65,1, pp. 53-59, 1978b.
- 7- Alados- Arboledas, L., Olmo, F.J., Domingo, F., Villagarcía, L. y Puigdefábregas, J. 2002. Estimating sensible heat flux over semi-arid shrublands by means of radiometric surface temperature. Agricultural and Forest Meteorology (sometido).
- 8- Alfaro, E. y L. Cid, 1999. ajuste de un modelo VARMA para los campos de anomalías de precipitación en Centroamérica y los índices de los océanos Pacífico y Atlántico Tropical. *Atmósfera*, 12(4).
- 9- Allen, R.G., Pereira, L. S., Raes, D. y Smith, M. 1998. Crop evapotranspiration - Guidelines for computing crop water requirements - FAO Irr. and drain. paper 56. Roma, Italia.
- 10- Aparicio, M.F.J. 2008. Fundamentos de hidrología de superficie. Ed. Limusa. México. D.F.
- 11- Ayuso Muñoz, J. Métodos de cálculo usuales en el diseño de canales y embalses en cuencas pequeñas. Universidad de Córdoba. 2006. 113 pp.

- 12-Barnsley MF. 1993. Fractals everywhere. Academic Press Professional, Boston, USA, 531 p.
- 13-Belmonte Serrato, F. 1999. Interceptación en bosque y matorral mediterráneo semiárido: balance hídrico y distribución de la lluvia neta. Tesis doctoral, Universidad de Murcia. 375 pp.
- 14-Belmonte Serrato, F. y Romero Díaz, A. 1998. Modelos y técnicas en interceptación. Cuadernos Técnicos de la S.E.G. nº 11, Geoforma Ediciones. Logroño
- 15-Box, G. E. P., Y Jenkins, G. M. 1970. Time series analysis, forecasting and control, Holden-Day, San Francisco, Calif.
- 16-Bras, L. y Rodriguez-Iturbe, I., 1985. Random Function and Hydrology.
- 17-Calder, I.R. 1990. Evaporation in the uplands. J.Wiley (ed) Chichester.
- 18- Campos, A. D. F., Gómez, D. R. 1990. Procedimiento para obtener curvas I-D-Tr a partir de registros pluviométricos. Revista Ingeniería Hidráulica en México. Vol. V. Núm. 2. II Época.
- 19-Cantor, G. 1883. "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V" [On infinite, linear point-manifolds (sets)], *Mathematische Annalen*, vol. 21, pages 545–591.
- 20-Carvajal, Y., Marco, J. 2008. Modelos multivariados de predicción de caudal mensual utilizando variables macroclimáticas. Caso de estudio río Cauca, Colombia. Revista Universidad del Valle, Colombia.
- 21- Chen, C. 1983. Rainfall intensity – duration – frequency formulas. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 109, núm. 12, p. 1603-1621.
- 22-Choudhury, B.J. y Monteih, J.L. 1988. A four-layer model for the heat budget of homogenous land surfaces. Q. J. of the Royal Meteorological Society 114: 373-398.
- 23- Chow, V. T.; Maidment, D.R.; y Mays, L.W. 1998. Hidrologia aplicada. Ed. McGraw Hill. Santafé de Bogotá, Colombia. 584 pp.
- 24-Chao Z., Hua-Sheng H., Wei-Min B., Luo-Ping Z. 2008. robust recursive estimation of auto-regressive updating model parameters for real-time flood forecasting. Journal of Hydrology, 349, pp 376-382.

- 25-Chapman, T., 1997. Stochastic modelling of daily rainfall in the Western Pacific. *Math. Comput. Simulat.*, 43, 351–358.
- 26-Cox, D.R. and Isham, V., 1994. Stochastic models of precipitation. In: *Statistics for the environment 2, Water issues*, V. Barnett and K.F. Turkman (Eds.), Wiley, New York, 3–18.
- 27-Crockford, R. H., and D. P. Richardson, 2000. “Partitioning of rainfall into throughfall, stemflow and interception: effect of forest type, ground cover and climate”, *Hydrol. Process.* 14: 2903-2920.
- 28-de Lima MIP. 1998. Multifractals and the temporal structure of rainfall. Ph.D Thesis, Wageningen Agricultural Univ., 229 pp.
- 29-de Lima MIP, Grasman J. 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology* 220: 1-11.
- 30-Doorenbos, J. y Pruitt, W.O. 1977. Guidelines for predicting crop water requirements. *Irrig. Drain. Pap.*, 24, 144 pp. FAO. Roma, Italia.
- 31-Eichinger, W., Cooper, D., Kao, J., Chen, L.C., Hipps, L., Prueger J., Cooper, D., Kao, J., Chen, L.C., Hipps, L. y Prueger, J. 2000. Estimation of spatially distributed latent heat flux over complex terrain from a Raman lidar. *Agricultural and Forest Meteorology* 105: 145-159.
- 32-Escalante Sandoval, C.A y Reyes Chávez, L. *Técnicas Estadísticas en Hidrología*. México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2002, 298 pp.
- 33-Estrela T, 1991a. La calibración automática de parámetros en los modelos hidrológicos determinísticos. *Ingeniería Civil* n°78. CEDEX. Madrid.
- 34-Estrela T, 1991b. Sensitivity analysis as a tool to improve the parameter calibration of a watershed model. *Proceedings of the XXIV I.A.H.R. Congress*. Madrid September 1991.
- 35-Estrela T, 1992. *Modelos matemáticos para la evaluación de recursos hídricos*, CEDEX.
- 36-Falconer K J, 1990. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 288 pp.
- 37-Fiering, M; Jackson, B.1971. *Synthetic streamflows*. Water Resources Monograph 1. American Geophysical Union.
- 38-Filliben, J.J., 1975. The probability plot correlation coefficient test for normality. *Technometrics*,17(1):111–117.

- 39-Fraedrich K, Larnder C. 1993. Scaling regimes of composite rainfall time series. *Tellus Series A-Dynamic Meteorology and Oceanography* 45A: 289-298.
- 40-García-Marin A P, Jiménez-Hornero F J, Ayuso-Muñoz J L. 2007. The Multifractal analysis as a tool for validating a rainfall model. *Hydrological Processes*.
- 41- García Marín, A. P.(2007) Análisis multifractal de series de datos pluviométricos en Andalucía, Tesis doctoral.
- 42-Gash, J.H.C. 1979. An analytical model of rainfall interception by forests. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 105: 43-55.
- 43-Haltiner, J.P. Y Salas, J.D. 1988. *J. Hydrol*, 104: 247-272.
- 44-Hastings H M, Sugihara G. 1993. *Fractals: a user's guide for the natural sciences*. Oxford University Press, Oxford, UK, 235 pp.
- 45-Horton, R.E., 1919. Rainfall interception. *Mon. Weather Rev.*, 47: 603–623.
- 46-Jena, S. y Tiwari, K. 2006. Modeling synthetic unit hydrograph parameters of watersheds, *Journal of Hydrology*, Vol. 319 (1-4) pp. 1-14.
- 47-Jensen, M.E. (ed.) 1971. Consumptive use of water and irrigation water requirements. *Rep. Tech. Comm. Irrig. Water Require. Am. Soc. Civ. Eng., Irrig. Div.*, 227 pp.
- 48- Kalman, R. E. 1960. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* Vol. 82: pag. 35-45.
- 49-Kantelhardt JW, Koscielny-Bunde E, Rybski D, Braun P, Bunde A, Havlin S. 2006. Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records. *Journal of geophysical research-atmospheres* 111 (D1): Art. No. D01106.
- 50-Kantelhard S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde and H. E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316: 87-114, 2002.
- 51-Keim, R.F., Skaugset, A.E., Link T.E and Iroume A. 2004. A stochastic model of throughfall for extreme events.
- 52-K. Falconer. *Techniques in fractal geometry*, John Wiley and Sons Ltd, New York, 1997.

- 53-Kiely G, Ivanova K. 1999. Multifractal analysis of hourly precipitation. *Physics and Chemistry of the Earth Part B-Hydrology Oceans and Atmosphere* 24: 781-786.
- 54-Kullback, S.; Leibler, R.A. (1951). "On Information and Sufficiency". *Annals of Mathematical Statistics* 22 (1): 79–86.
- 55-Labat D, Mangin A, Ababou R. 2002. Rainfall-runoffs relations for karstic springs: multifractal analyses. *Journal of Hydrology* 256: 176-195.
- 56-Ladoy P, Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. 1993. The multifractal temporal variability of Nimes rainfall data. *Comptes Rendus del Academie des Sciences Serie II* 317(6): 775-782.
- 57-Langousis A, Veneziano D. 2007. Intensity-duration-frequency curves from scaling representations of rainfall. *Water Resources Research*. 43, W02422, doi: 10.1029/2006WR005245.
- 58-Mandelbrot B. 1975. *Les objets fractals: forme, hazard et dimension*. Flammarion, Paris.
- 59-Mandelbrot B. 1977. *Fractals: form, chance and dimension*. Freeman, San Francisco, 365 pp.
- 60-Mandelbrot B. 1982. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 460 pp.
- 61-Mastachi-Loza C. 2007. Evaluación del fenómeno de la intercepción en vegetación arbórea. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Querétaro.
- 62-Mohammadi, K., Eslami, H., Kahawita, R. 2006. Parameter estimation of an ARMA model for river forecasting using goal programming. *Journal of Hydrology*, 331, pp. 293-299.
- 63-Monteih, J.L. 1965. Evaporation and the environment. *Proc. Soc. Exp. Biol.* 19, 205-234.
- 64-Mulder, J.P.M. 1985. Simulating interception loss using standard meteorological data. *The forest Atmosphere Interation*. Reidel, Dordrecht, 177-196.

- 65-Novelo-Díaz, B. 2009. Variabilidad climática en el valle de Querétaro: análisis fractal de persistencia de temperatura y precipitación. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro.
- 66-Olsson J, Burlando P. 2002. Reproduction of temporal scaling by rectangular pulses rainfall model. *Hydrological Processes*, 16, 611-630
- 67-Over TM, Gupta VK. 1994. Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing. *Journal of Applied Meteorology*, 33, 1526-1543.
- 68-Padilla, A., Pulido-Bosch, A. y Calvache, M.L. 1995. *CR. Acad. Sei. Paris*, 321, s. Ha, 31-37.
- 69-Penman H.L. 1948. Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 193:120-145.
- 70-Piwowar, J. M. y Ledrew, F. E. 2002. ARMA time series modeling of remote sensing imagery: a new approach for climate studies. *International Journal of Remote Sensing*.
- 71-Priestley, G.H.B. y Taylor, R.J. 1972. On the assessment of surface heat flux and evaporation using scale parameters. *Mon. Weather Rev.* 100: 81-92.
- 72-Quispe, C. 2007. Forecast of sea surface temperature of the Peruvian coast using an autoregressive integrated moving average model. *Rev. Perú. Biol.* 14(1): 109-115.
- 73-Rodriguez-Iturbe, I., and A. Rinaldo, 1997. *Fractal River Basins: Chance and Self-Organization*, Cambridge Univ.
- 74-Rutter, A. J., Kershaw, K.A, P.C, and Morton. A. R., 1971. A predictive rainfall interception in forest. I Derivation of the model from observations in plantation of Corsican pines. *Agri. Meteorology.*, 9: 367-384.
- 75-Salas, Delleur, Yevjevich and Lane, 1980. "Applied Modeling of Hydrologic Time Series". *Water Resources Publications*, 484 pp.
- 76-Salas J.D. Boes D.C, y Smith R.A. 1982. "Estimation of ARMA Models with Seasonal Parameters", *Water Resour. Res.*, Vol. 19, pp. 1006- 1010.

- 77-Salas, J.D., 1993. Analysis and Modeling of Hydrologic Time Series, chapter 19. Handbook of Hydrology. McGraw-Hill.
- 78-Sanchez-Toribio, M.I. 1992. Métodos para el estudio de la evaporación y evapotranspiración. Geofoma Ediciones, 35 pp
- 79-Schellekens, J., Bruijnzeel, L.A., Scatena, F.N., Bink, N.J., Holwerda, F. 2000. Evaporation from a tropical rain forest, Luquillo Experimental Forest, eastern Puerto Rico. Water Resources Research, Vol. 36, No. 8: 2183-2196.
- 80-Schertzer D, Lovejoy S. 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. Journal of Geophysical Research Atmospheres 92: 9693-9714.
- 81-Schowalter, T.D. 1999. Throughfall volume and chemistry as affected by precipitation volume, sampling size, and defoliation intensity. Great Basin Nat. 59:79-84.
- 82-Sevenije, H.G. 2004. The importance of interception and why we should delete the term evapotraspiration from our vocabulary. Hydrol. Processes, 18, 1507-1511.
- 83-Shannon, E. 1948. A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal, 27:379-423, 623-656.
- 84-Sharma, A. and Lall, U., 1999. A nonparametric approach for daily rainfall simulation. Math. Comput. Simulat., 48, 361-371.
- 85-Shuttleworth, W.J. y Wallace, J.S. 1985. Evaporation from sparse crops-an energy combination theory. Q. J. of the Royal Meteorological Society 111: 839-855.
- 86-Shuttleworth, W.J. y Gurney, R.J. 1990. The theoretical relationships between foliage temperature and canopy resistance in sparse crops. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 116: 497-519.
- 87-Slutsky, E. 1937. "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes", Econometrica, 5, 105.
- 88-Snedecor, G.W. and Cochran, W.G., 1980. Statistical Methods. Iowa State University Press, Iowa, seventh edition.

- 89-Srikanthan, R. (2004), Stochastic generation of daily rainfall data using a nested model. 57th Canadian Water Resources Association Annual Congress, 16-18 June, 2004, Montreal, Canada.
- 90-Srikanthan, R. (2005), Stochastic generation of daily rainfall using a nested transition probability model. 29th Hydrology and Water Resources Symposium, Engineers Australia, 20 – 23 February, 2005, Canberra
- 91-Srikanthan, R. and McMahon, T.A., 1985. Stochastic generation of rainfall and evaporation data. AWRC Technical Paper No. 84, 301pp.
- 92-Srikanthan, R. and T.A. McMahon., 2001., Stochastic generation of annual, monthly and daily climate data: A review, Hydrology and Earth System Sciences, 5(4), pp. 653-670.
- 93-Srikanthan, R., Zhou S. 2003. Stochastic Generation of Climate Data. Technical Report. Report03/12. Cooperative Research Centre for Catchment Hydrology. Australia, November.
- 94-Spolia, S.K. and Chander, S., 1973. Modelling of surface runoff systems by ARMA model. J. Hydrol., 22: 317-332.
- 95- Spolia, S.K.,Chander, S. and O'Connor, K.M., 1980. An autocorrelation approach for parameter estimation of fractional order equal-root autoregressive models using hyper geometric functions. J. Hydrol., 47: 1-17
- 96-Stewart, J.B. 1995. Turbulent surface fluxes derived from radiometric surface temperature of sparse prairie grass. J. Geophys. Res. 100 (D12): 25429-25433.
- 97-Svensson C, Olsson J, Berndtsson R. 1996. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. Water Resources Research 32: 2463-2472.
- 98-Sveinsson, O.G.B., Salas, J.D., Lane, W.L. and Frevert, D. K. 2007. "Stochastic Analysis, Modeling and Simulation (SAMS) Version 2000 - User's Manual", Colorado State University, Water Resources Hydrologic and Environmental Sciences, Technical Report Number 11, Engineering and Research Center, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 118 pp.
- 99-S. Jaffard. Multifractal formalism for functions, Parts I and II. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 28(4): 944 -998, 1997.

- 100- Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. 1993. Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 223-250.
- 101- Tessier Y, Lovejoy S, Hubert P, Schertzer D, Pecknold S. 1996. Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres* 101: 26427-26440.
- 102- Thornthwaite, C.W. 1948. An approach toward a rational classification of climate. *Geogr. R.* 38: 55-94
- 103- Ula, T.A. (1990): *Water Resour. Res.*, 26(5): 855-861.
- 104- Unal, N, E., Aksoy, H., and Akar, T. 2004. Annual and monthly rainfall data generation schemes, *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.*, 18, 245–257.
- 105- Veneziano D, Furcolo P, 2002. Multifractality of rainfall and scaling of intensity duration- frequency curves. *Water Resources Research* 38 (12), doi: 10.1029/2001WR000372.
- 106- Veneziano D, Langousis A, Furcolo P. 2006. Multifractality and rainfall extremes: A review. *Water Resouces Research* 42(6): Art. No. W06D15.
- 107- Villón Béjar, M. 2006. *Hidrología Estadística*. Editorial Ténologica de Costa Rica. 440 pp.
- 108- Wang, Q.J. and R.J. Nathan 2002. A daily and monthly mixed algorithm for stochastic generation of rainfall time series. *Hydrology and Water Resources Symposium*, Melbourne.
- 109- Watts, C.J., Chehbouni, A., Rodriguez, J.-C., Kerr, Y.H., Hartogensis, O. y de Bruin, H.A.R. 2000. Comparison of sensible heat flux estimates using AVHRR with scintillometer measurements over semi-arid grassland in northwest Mexico. *Agricultural and Forest Meteorology* 105: 81-89.
- 110- Weeks, W. D. and Boughton W. C. 1987. Tests of ARMA Model Forms for Rainfall Runoff Modeling, *J. Hydrol.*, 91: 29-47.

- 111- WOLD, H. 1954. A Study in the Analysis of Stationary Time Series, 2nd. edition (first edition of 1938), Stockholm: Almqvist and Wickselís.
- 112- YULE, G. U. 1926. "Why do we Sometimes get Nonsense-Correlations Between Time-Series? A Study in Sampling and the Nature of Time-Series", Journal of the Royal Statistical Society, 89,1-64.
- 113- YULE, G. L.J. (1927), "On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with special reference to Wolfer's Sunspot Numbers", Philosophical Transaction, A 226, 267-29.