



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Aplicaciones de la Teoría de Localización en el transporte. Estudio de caso en San Juan del Río.

TESIS

Que para obtener el título de
Lic. en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

De Santiago Badillo Yadira Alondra

Dirigido por:

Dr. Moreno Quintero Eric

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Junio de 2009
México

BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

No. Adq. H73620

No. Título _____

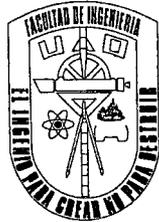
Clas TS

388.1

D441a



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Secretaría Académica



Centro Universitario, 01 de Junio de 2009

C. Yadira Alondra de Santiago Badillo
Pasante de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Presente:

Le comunico que una vez revisado el oficio en el que informa la terminación de Tesis Individual "Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río", y con base en la atribución que me confiere el artículo 51 del reglamento de titulación vigente he nombrado como sinodales a los siguientes catedráticos: **Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera, M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez, M. en C. Martha Elizabeth de la Torre Romero** y como Director de Tesis al **Dr. Eric Moreno Quintero**.

Cabe mencionar que para continuar con los trámites de titulación, es necesario obtener el voto aprobatorio del trabajo por parte de los maestros mencionados.

Sin más por el momento, quedo de usted.

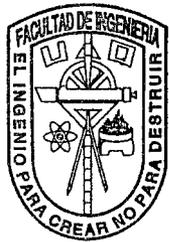
Atentamente

"El Ingenio para crear, No para Destruir"

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director

c.c.p. **Dr. Eric Moreno Quintero.**
Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera
M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez
M. en C. Martha Elizabeth de la Torre Romero

*GHR/besh



C. U. 19 de enero de 2009

C. YADIRA ALONDRA DE SANTIAGO BADILLO
Pasante de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Presente.

Con relación a su oficio enviado al H. Consejo Académico de la Facultad en el que solicita titularse bajo la opción de tesis individual, me permito informarle que en la sesión ordinaria del 19 de enero del año en curso, este cuerpo colegiado acordó aceptar la opción de titulación por lo que deberá trabajar en el tema "**Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río**", bajo la dirección del Dr. Eric Moreno Quintero

El Contenido aceptado por el H. Consejo Académico es el siguiente:

Resumen

Dedicatorias

Agradecimientos

Índice

Índice de cuadros

Índice de figuras

1. Introducción
2. Planteamiento del problema
3. Antecedentes de la Teoría de Localización
4. Problemas básicos de localización y sus algoritmos de solución
5. Estudio de caso en el marco de la teoría de localización
6. Aplicaciones de los modelos
7. Resultados y conclusiones

Bibliografía

Apéndice

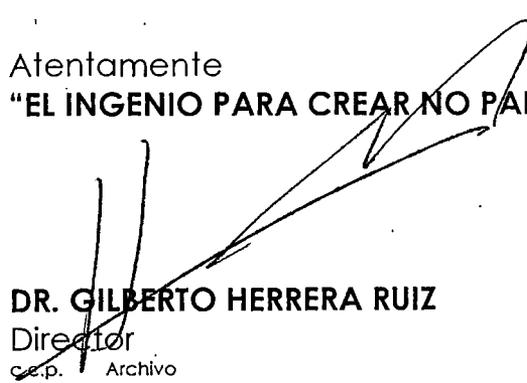


Universidad Autónoma de Querétaro Facultad de Ingeniería

También hago de su conocimiento las disposiciones de nuestra Facultad, en el sentido que antes del Examen profesional deberá cumplir con los requisitos de nuestra legislación y deberá imprimir el presente oficio en todos los ejemplares de su tesis.

Atentamente

"EL INGENIO PARA CREAR NO PARA DESTRUIR"



DR. GILBERTO HERRERA RUIZ

Director

c.e.p. Archivo

*GHR/DHM.

Centro Universitario, 5 de Junio de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río**", de la **C. Yadira Alondra de Santiago Badillo**, Pasante de la Licenciatura en **Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,



Dr. Eric Moreno Quintero
Director de Tesis

Centro Universitario, 5 de Junio de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río**", de la **C. Yadira Alondra de Santiago Badillo**, Pasante de la Licenciatura en **Matemáticas Aplicadas** de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.

Atentamente,



Dra. Rebeca del Rocío Peniche Vera
Sinodal

Centro Universitario, 5 de Junio de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río**", de la **C. Yadira Alondra de Santiago Badillo**, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.



Atentamente,

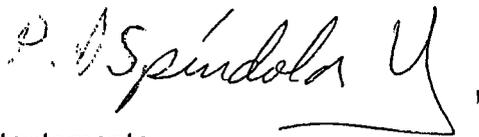
M. en C. Martha Elizabeth de la Torre Romero
Sinodal

Centro Universitario, 5 de Junio de 2009

Dr. Gilberto Herrera Ruíz
Director de la Facultad de Ingeniería
Presente:

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **Aplicaciones de la Teoría de Localización en el Transporte, Estudio de Caso en San Juan del Río**", de la **C. Yadira Alondra de Santiago Badillo**, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

Emito mi Voto Aprobatorio.



Atentamente,

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yañez
Sinodal

Resumen

En las últimas décadas la Teoría de Localización ha adquirido gran importancia, pues se ha visto que a través de ella es posible encontrar la ubicación geográfica óptima de centros de interés en diversos sectores, como el industrial, de comunicaciones, transporte o transmisión.

A pesar de que existe una gran diversidad de situaciones donde se puede aplicar la Teoría de Localización en todas ellas se plantea como principal objetivo encontrar la ubicación óptima que permita minimizar alguna función que represente los “costos de operación” en algún sentido, los cuales pueden ser considerados como: ponderaciones indicando importancia relativa, número de usuarios perdidos, promedio o máximo tiempo de respuesta o algún otro indicador.

En este trabajo se dará una aplicación de la Teoría de Localización en el contexto del problema de transporte intercomunitario en el municipio de San Juan del Río, en donde se ha observado que en los últimos años este municipio aparece como un centro dinámico de actividad económica regional con una movilidad creciente desde y hacia las comunidades rurales de su entorno. Estos flujos de pasajeros que usan la red de transporte ya están produciendo desequilibrios en los sistemas de transporte de pasajeros urbano, regional y rural de la zona. Tal circunstancia motivó un estudio por parte del Instituto Mexicano del Transporte para buscar soluciones al problema de transporte, considerando cuáles son las zonas de influencia de dicho municipio y el flujo de pasajeros entre las comunidades y hacia la cabecera municipal. Dentro de este estudio, la teoría de localización viene a ser un complemento importante que aborda la cuestión de hallar ubicaciones optimales de diversos recursos y servicios como las terminales de pasajeros o los puntos de transferencia intermodal.

Palabras clave:

Problema de Localización, p-mediana, p-centro, algoritmos.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a las personas que siempre han estado conmigo apoyando cuando más lo he necesitado, pues me han brindado seguridad para seguir adelante y gran comprensión cuando he querido desistir. A mis padres y hermanos dedico este trabajo, espero se sientan orgullosos de lo que hemos logrado hasta ahora.

Alondra De Santiago

Agradecimientos

Agradezco a Dios por existir, a mis padres por estar siempre a mi lado e impulsarme a dar lo mejor de mi cada día, a mis hermanos por estar siempre conmigo dándome su cariño y apoyo incondicional, a mis amigos y compañeros, a mis maestros por compartir sus conocimientos y formar parte de mi desarrollo tanto profesional como personal, a mi director de tesis y sinodales por estar aquí y formar parte del fin de este camino de Licenciatura.

Índice general

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	4
2.1. Planteamiento matemático del problema	6
3. Antecedentes de la Teoría de localización	8
3.1. El primer problema de localización	8
3.2. Generalización del problema de Fermat	14
3.3. El estado aislado -Von Thünen-	16
3.4. Localización industrial -Alfred Weber-	19
4. Problemas básicos de la teoría de localización	22
4.1. Definiciones básicas para la localización en Redes	24
4.2. Notación para el problema de Localización	26
4.3. P-centros	39
4.3.1. El problema de p-centros	47
4.4. P-mediana	48
4.4.1. El problema de la p-mediana	59
4.5. Algoritmos de solución	61
4.5.1. Algoritmo para determinar el centro de una red	62
4.5.2. Algoritmo para determinar la mediana de una red.	63
5. Estudio de caso en el marco de la Teoría de Localización	71
6. Aplicaciones de los modelos	80
7. Resultados y conclusiones	86
Apéndice A. Matriz D y vector W	90

Índice de figuras

3.1. Primer problema de localización	9
3.2. Punto de Torricelli	10
3.3. Construcción auxiliar para el teorema 1	12
3.4. Líneas de Simson	13
3.5. Problema de Fagnano	14
3.6. Árbol de expansión de peso mínimo	16
3.7. El estado aislado	18
4.1. Ejemplo de un <i>f-punto</i>	27
4.2. Gráficas posibles de la distancia <i>punto-vértice</i>	30
4.3. Ejemplo de distancia <i>punto - vértice</i> . Gráfica tipo1	32
4.4. Si $d(r, j) = 5$, obtenemos una gráfica del Tipo 2.	33
4.5. Tomando $d(r, j) = 14$ y $d(s, j) = 5$. Gráfica tipo3	34
4.6. Arcos de longitud 1	35
4.7. Gráfica para el ejemplo	40
4.8. Distancias punto-vértice $d(f - (3, 4), j)$	45
4.9. Distancias punto-vértice $d(f - (1, 4), j)$	45
4.10. Distancias punto-vértice $d(f - (2, 3), j)$	46
4.11. Función de distancia cóncava	52
4.12. Red de transporte en la cual se encuentra una mediana	64
4.13. Depósitos B y H.	69
5.1. Motivos de viajes en los diez primeros orígenes	72
5.2. Representación gráfica del problema de localización de la terminal de San Juan del Río	76
6.1. Matriz $w_j \cdot d(i, j)$	82
6.2. Matriz al dividir la distancia entre el total de usuarios que utilizan la red	83

Índice de cuadros

4.1. Resumen de distancias para el problema de Localización	38
5.1. Tabla de Frecuencia Relativa de las comunidades	75
A.1. Tabla de Frecuencia de las 42 comunidades de San Juan del Río elaborada con base en datos de encuesta O-D, 2007	93

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Localización es la disciplina matemática que estudia los problemas de ubicación, construye los modelos matemáticos apropiados y desarrolla los métodos específicos para resolverlos, dichos métodos se pueden implementar en códigos de cómputo eficientes para su aplicación en la práctica.

En las últimas décadas la Teoría de Localización ha adquirido gran importancia, pues se ha visto que, a través de ella es posible encontrar la ubicación geográfica óptima de centros de interés en diversos sectores, como el industrial, de comunicaciones, transporte o transmisión. Dentro de estos sectores los sitios de interés pueden ser de diversa índole, por ejemplo, puntos de transferencia (terminales de autobuses), hospitales, escuelas, estaciones de bomberos, centros de atención de emergencias o tiraderos de basura. A pesar de que existe una gran diversidad de situaciones donde se puede aplicar la Teoría de Localización en todas ellas se plantea como principal objetivo encontrar la ubicación óptima que permita minimizar alguna función que represente los “costos de operación” en algún sentido, los cuales pueden ser considerados como: ponderaciones indicando importancia relativa, número de usuarios perdidos, promedio o tiempo máximo de respuesta o algún otro indicador. Una posible clasificación para los problemas de localización es dividirlos en las siguientes tres áreas de investigación:

* *Localización continua*: permite que las localizaciones estén en cualquier lugar dentro de un espacio d dimensional.

- * *Localización discreta*: hay que especificar a priori un número finito de posibles localizaciones en el espacio. A veces también se denomina localización-asignación.
- * *Localización en redes*: problemas de localización que se plantean sobre redes, entendiendo como una red a un conjunto de vértices unidos por un conjunto de aristas que representan conexiones entre estos puntos, dichos arcos y aristas tienen asignados parámetros.

Mencionemos algunos ejemplos para ilustrar la aplicación práctica de la Teoría de Localización:

1. Localización de una unidad de servicios de emergencia en un área rural para minimizar el tiempo máximo de intervención a poblaciones.
2. Los problemas de localización de almacenes pueden modelarse frecuentemente como redes de caminos, donde el objetivo puede ser minimizar el costo total de envío de un almacén a otro.
3. Localización de sensores para el tráfico vehicular en una red (Gentili & Mirchandani, 2005)[11]. En este trabajo se usa la teoría de localización para determinar en qué lugares colocar sensores de tráfico para monitorear o administrar clases particulares de flujos vehiculares. El trabajo se enfoca a responder lo siguiente: ¿Cuántos sensores y en qué lugares deben colocarse para obtener suficiente información de los volúmenes vehiculares que pasan por ciertos caminos?; y dada una distribución de sensores ya colocados, ¿cuántos sensores nuevos y en dónde deben ponerse para maximizar la información sobre volúmenes de tráfico en la red?. El artículo concluye presentando un algoritmo exacto para resolver casos especiales y uno aproximado para el caso general.”

En el presente trabajo se espera mostrar una aplicación de la Teoría de Localización enfocada al problema de transporte intercomunitario en el municipio de San Juan del Río para así contribuir en la determinación óptima de la terminal de autobuses intercomunitaria, pues actualmente se ha incrementado considerablemente el flujo de pasajeros entre la cabecera municipal y las comunidades. También se pretende hacer una compilación de

los aspectos más relevantes de la Teoría de Localización y generar un código de cómputo para su implementación por usuarios potenciales de estas técnicas.

La información sobre el flujo de pasajeros fue obtenida a través del proyecto denominado “Movilidad Intercomunitaria en el Municipio de San Juan del Río: Diagnóstico y propuesta de solución” desarrollado por el Instituto Mexicano del Transporte para un proyecto patrocinado por el CONACYT y en el cual participamos algunos estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

Ubicar de manera óptima estaciones de servicios como: estaciones de bomberos, centros comerciales, fábricas, aeropuertos o centros de transferencia (terminales), es un problema de planeación urbana y/o rural, que puede ser tratado, a través de la Teoría de Localización. Particularmente, el problema de determinar puntos de transferencia puede planearse sobre una red de transporte conformada por un conjunto de vértices y aristas conectados entre sí y por lo tanto la ubicación de los centros de interés (terminal) sólo puede ser localizada sobre los vértices o las aristas, no en cualquier punto del plano, como ocurren en los modelos planares (caso continuo).

Dentro de esta Teoría de Localización, se tienen las siguientes consideraciones: cada vértice debe tener asignado un determinado peso y cada arista una longitud. Los pesos de los nodos dependerán de los criterios establecidos en la función objetivo pues, generalmente para modelar adecuadamente problemas reales es necesario involucrar más de un parámetro en cada vértice (demanda, importancia, número de clientes, etc) y en cada arista (longitud, tiempo, costo de tránsito, etc.)

En el caso del problema de transporte en el municipio de San Juan del Río, se buscó dar una solución al problema de transporte urbano, pues en los últimos años este municipio se ha convertido en un centro de transferencia y actividad económica de suma importancia y como consecuencia de este crecimiento se ha observado un importante incremento en el flujo de pasajeros entre las comunidades y hacia la cabecera municipal, lo cual comienza a provocar desequilibrios en los sistemas de transporte de pasajeros urbano, regional y rural

de la zona. Específicamente el interés fue analizar si la ubicación actual de la Terminal de autobuses intercomunitaria responde de manera eficiente a la demanda de los usuarios y en caso contrario, sugerir un punto de reubicación que permita minimizar distancias entre nodos y por ende costo y tiempo de traslado.

Una vez definidos los parámetros para los elementos de la red, el siguiente paso fue establecer el valor de éstos. En el caso de los nodos, la frecuencia de viaje se obtuvo a través de 1300 encuestas origen-destino aplicadas a una muestra aleatoria simple; dichas encuestas se aplicaron en las rutas de transporte así como en la terminal de autobuses intercomunitaria ubicada a un costado del mercado 5 de Mayo. Y para determinar el valor del parámetro distancia, como primer paso se utilizó información de GPS (*Geographical Position System*) para obtener la representación geográfica de los diversos trayectos de los autobuses. Posteriormente los mapas generados se manejaron con el software ArcView, el cual permitió calcular la longitud de cada recorrido, para que finalmente se construyera la matriz de distancias $D_{n \times n}$, con $n = 42$.

El método de solución para este problema fue el método de las *p-medianas*, pues, en un problema de mediana se intenta localizar una instalación (terminal) con la finalidad de minimizar la distancia promedio entre la instalación y los usuarios del servicio. Es importante mencionar que en este tipo de problemas, la suposición hecha más frecuentemente es que la demanda del servicio aparece solamente en los vértices de la red de transporte por lo que a cada nodo se le atribuye una cierta intensidad en la demanda del servicio. Es claro que, en cierto número de casos la demanda de servicios también aparece a lo largo de las aristas de la red, pues hay usuarios que de pronto aparecen a lo largo del camino provocando con esto que los autobuses improvisen paradas, generándose así nuevos nodos a lo largo de la arista original, por lo cual, se sigue cumpliendo que la demanda de los servicios sólo aparece en los vértices.

Los algoritmos de solución para el problema de las *p-medianas* se especifican en el capítulo 5. Con estos métodos y algoritmos se buscó contribuir a la consolidación de nuevas formas de reordenación del territorio y de reubicación de los recursos, para proporcionar patrones de poblamiento menos concentrados mediante el vínculo eficiente de las zonas urbanas con su entorno rural a través de un eficiente sistema de transporte regional y rural, los resultados obtenidos se discuten en el capítulo 7.

2.1. Planteamiento matemático del problema

Los problemas de localización de una instalación simple, consiste en: dadas n instalaciones existentes o puntos demandantes (comunidades) con coordenadas $X_i = (x_i, y_i)$ y pesos w_i , $i = 1, \dots, n$, dados por la demanda en cada nodo, el objetivo es encontrar un punto $X = (x, y)$ tal que el costo total

$$z_p(X) = \sum_{i=1}^n w_i d_p(X, X_i) \quad (2.1)$$

sea mínimo y donde $d_p(X, X_i) = [|x - x_i|^p + |y - y_i|^p]^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$ (Melachrinoudis, E. 1988. An Efficient Computational Procedure for the Rectilinear MAXIMIN Location Problem. Vol. 22 No. 3 p. 217). La mayoría de las veces p toma el valor de 1 ó 2. En este caso tomaremos $p = 2$, ya que ArcView¹ maneja los mapas por medio del sistema de coordenadas cartesianas.

Para manejar $d_p(X, X_i)$ se utilizó la *matriz simétrica* de distancias $D_{42 \times 42}$:

$$D = \begin{bmatrix} & \text{Amealco} & \text{Amealco} & \text{La Llave} & \dots & \text{Vistha} \\ & \text{-Galindo} & \text{-Sta. Lucia} & & & \\ \text{Amealco} & 0 & d_{12} & d_{13} & & d_{1n} \\ \text{-Galindo} & & & & & \\ \text{Amealco} & d_{21} & 0 & d_{23} & & d_{2n} \\ \text{-Sta. Lucia} & & & & & \\ \text{La Llave} & d_{31} & d_{32} & 0 & & d_{3n} \\ \vdots & & & & 0 & \\ \text{Vistha} & d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & & 0 \end{bmatrix}$$

n : número de comunidades.

El vector de frecuencias $W_{1 \times 42}$, que representa la demanda en los nodos, fue de la siguiente forma:

¹ArcView es un software para manejo de datos en un sistema de información geográfica (SIG) que es producido por la empresa ESRI y es de uso común en sistemas geográficos. Permite hacer mapas, calcular distancias, rutas, etc

²Aunque Amealco es otro municipio se consideró la ruta San Juan del Río-Amealco pues incluye comunidades como Galindo, Vaquerías, entre otras

$$W = \begin{bmatrix} & \textit{Comunidad} & \textit{Demanda} \\ \text{Amealco-Galindo} & & w_{11} \\ \text{Amealco-Sta Lucia} & & w_{21} \\ \text{La Llave} & & w_{31} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Vistha} & & w_{n1} \end{bmatrix}$$

En el apéndice 1, se muestran las matrices D y W con la información del proyecto.

Capítulo 3

Antecedentes de la Teoría de localización

3.1. El primer problema de localización

Los orígenes de la Teoría de Localización se remontan aproximadamente al año de 1647 a un problema muy antiguo de la literatura matemática propuesto por Fermat, quien consideró el siguiente planteamiento:

"Dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias a estos tres puntos sea mínima."

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ tres puntos en el plano y sea $X = (x, y)$ el cuarto punto a encontrar, como se muestra en la Figura 3.1. Denotemos por $f(X)$ la función de distancia de X a los tres puntos dados, luego entonces nuestro problema es minimizar

$$f(X) = d(X, P_1) + d(X, P_2) + d(X, P_3) \quad (3.1)$$

recordando que $d(X, P_i) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (x - b_i)^2}$ es la distancia Euclidiana para $i = 1, 2, 3$. Figura 3.1:

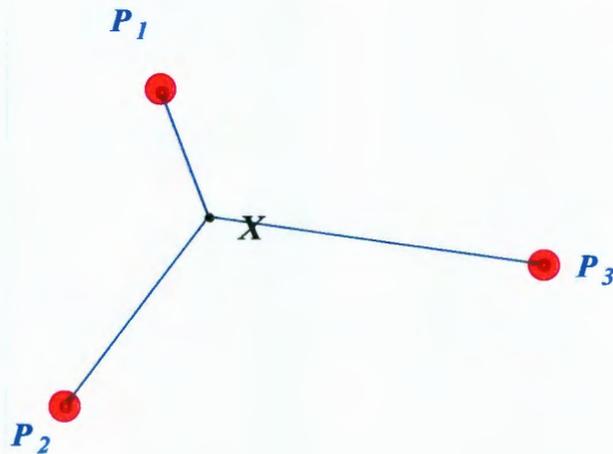


Figura 3.1: Primer problema de localización

Este problema había sido resuelto por Torricelli antes de 1640, a través de la siguiente construcción: trazó $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ y $\overline{P_1P_3}$, sobre cada uno de estos segmentos construyó un triángulo equilátero y trazó las circunferencias circunscritas para cada uno de ellos, demostrando que el punto de intersección de las circunferencias, conocido en la literatura como el punto de Torricelli (*The first location problem*) es el punto X , que minimiza $f(X)$.
Figura 3.2

Para demostrar que X , es el punto que minimiza la función $f(X)$, usaremos la siguiente notación:

- $\triangle P_1P_2P_3$: triángulo con vértices P_1 , P_2 y P_3 .
- $\overline{P_1P_2}$: segmento con extremos P_1 y P_2 .
- $\overrightarrow{P_1P_2}$: vector con punto inicial P_1 y punto final P_2 .
- $d(P_1, P_2)$: distancia de P_1 a P_2 .
- $\widehat{P_1P_2P_3}$: ángulo de vértice P_2 .

Supóngase que los puntos P_1, P_2 y P_3 son no colineales, por lo que si existe un punto X que minimice $f(X)$ debe estar en el interior del $\triangle P_1P_2P_3$, ya que si se toma un punto X' exterior al triángulo, la aproximación de éste al lado más cercano del triángulo supone

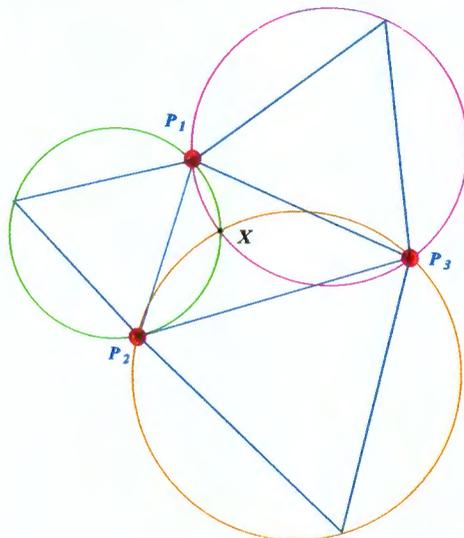


Figura 3.2: Punto de Torricelli

un aumento de las distancias $d(X, P_i)$, $i = 1, 2, 3$. Este hecho nos permite restringir la búsqueda de X al interior del triángulo $\triangle P_1P_2P_3$.

El algoritmo de Torricelli a quien se le atribuye generalmente la autoría de la primera solución a este problema de localización, consta de tres pasos:

paso 1 Se trazan $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, y $\overline{P_1P_3}$. Construyendo así el triángulo $\triangle P_1P_2P_3$.

paso 2 Se construyeron triángulos equiláteros sobre cada uno de los lados del triángulo $\triangle P_1P_2P_3$.

paso 3 Se trazan las circunferencias circunscritas a cada uno de los triángulos equiláteros formados.

Esta construcción es válida solamente cuando los ángulos interiores del triángulo $\triangle P_1P_2P_3$, son menores a 120° .

Proposición 1 Si el triángulo $\triangle P_1P_2P_3$ no posee ningún ángulo interior mayor o igual a 120° , entonces existe un punto X en el interior, tal que

$$\widehat{P_1XP_2} = \widehat{P_1XP_3} = \widehat{P_2XP_3} = 120^\circ \quad (3.2)$$

Torema 2 *Un punto X , distinto de P_1 , P_2 y P_3 es la única solución al problema de Fermat si y sólo si X verifica la igualdad anterior.*

Demostración. A través de la proposición (1) se conoce la existencia de un punto X que verifica la igualdad (3.2), pero además se concluye que para dicho punto las rectas perpendiculares a los segmentos $\overline{XP_1}$, $\overline{XP_2}$ y $\overline{XP_3}$, en P_1 , P_2 y P_3 , respectivamente, forman un triángulo equilátero que contiene a $\triangle P_1P_2P_3$. En efecto sea $\triangle QRS$ el triángulo descrito anteriormente (Figura 3.3). Dado que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360° , entonces:

$$\widehat{P_1QP_2} = 360 - \widehat{QP_1X} - \widehat{QP_2X} - \widehat{P_1XP_2} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Análogamente, obtenemos que todos los ángulos interiores del $\triangle QRS$ miden 60° , es decir, $\triangle QRS$ es un triángulo equilátero.

Sea Y un punto cualquiera en el interior del $\triangle P_1P_2P_3$ con $Y \neq X$, y sean P'_1 , P'_2 y P'_3 las proyecciones perpendiculares de Y sobre los segmentos \overline{QR} , \overline{SQ} y \overline{RS} , respectivamente. Véase Figura 3. Es claro que $\triangle YP_iP'_i$, $i = 1, 2, 3$, es una recta ($P_i = P'_i$) o un triángulo rectángulo ($P_i \neq P'_i$). En el caso de que $\triangle YP_iP'_i$ sea una recta, se tiene que $d(Y, P_i) = d(Y, P'_i)$, y en el caso de que sea un triángulo, la longitud de la hipotenusa es mayor que la de los dos catetos, de modo que, $d(Y, P_i) > d(Y, P'_i)$, para $i = 1, 2, 3$, y como $Y \neq X$, para al menos un índice, entonces se tiene la desigualdad estricta.

Finalmente, como el triángulo es equilátero, se tiene:

$$\sum_{i=1}^3 d(Y, P_i) > \sum_{i=1}^3 d(Y, P'_i) = \sum_{i=1}^3 d(X, P_i) \quad (3.3)$$

para todo $Y \neq X$ del triángulo, donde la última igualdad se sigue del Teorema de Viviani¹. De la desigualdad estricta obtenida en (3.3), por la proposición 1, las igualdades de (3.1) son una caracterización de la solución óptima del problema de Fermat y que además es única. ■

¹"En un triángulo equilátero la suma de las tres distancias de un punto interior a los lados de un triángulo tiene un valor que es independiente de la posición del punto. Este valor es igual a la altura del triángulo."

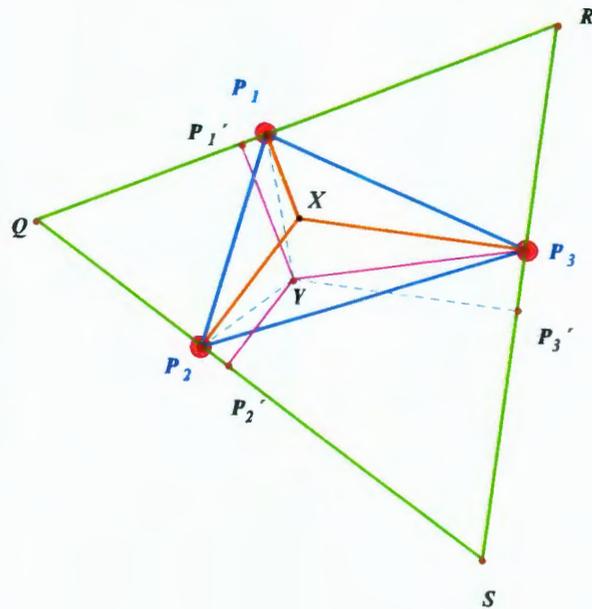


Figura 3.3: Construcción auxiliar para el teorema 1

Una construcción alternativa a la anterior es la desarrollada por Simson en "Doctrine and Application of Fluxions", 1750. Simson probó que el punto de Torricelli coincide con la intersección de las tres líneas de Simson² para los tres triángulos equiláteros descritos anteriormente. Y en 1834 Heinen demostró que las longitudes de las tres líneas de Simson son iguales entre sí, y también son iguales a la suma mínima de las distancias de X a los tres puntos dados P_1 , P_2 y P_3 . Véase Figura 3.4

²Se conoce como línea de Simson a la línea que une los pies de las perpendiculares desde un punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo dado.

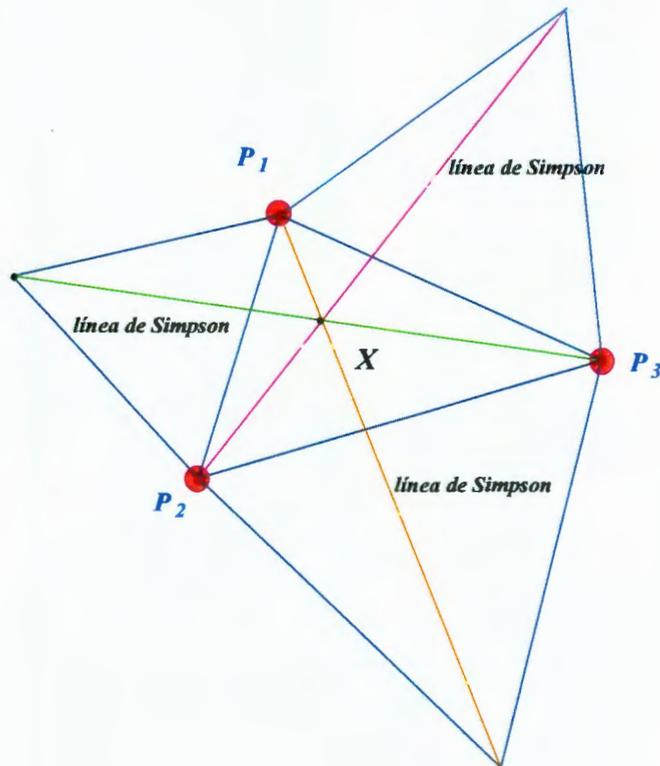


Figura 3.4: Líneas de Simson

Posteriormente en 1775 Fagnano planteó el siguiente problema: Dado un triángulo acutángulo encontrar un triángulo inscrito cuyo perímetro sea tan pequeño como sea posible, encontrando que la solución a este problema era la construcción del triángulo órtico, el cual tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo original, Figura 3.5. También trabajó el caso para un rectángulo, concluyendo que " el quinto punto cuya distancia a los vértices del rectángulo era mínima está dado por la intersección de las diagonales".

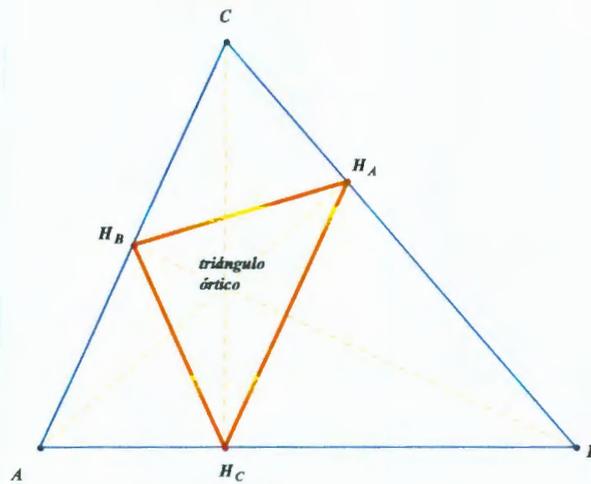


Figura 3.5: Problema de Fagnano

3.2. Generalización del problema de Fermat

La generalización del primer problema de localización planteado por Fermat, fue extendido posteriormente considerando más de tres puntos localizados en cualquier parte del plano y estableciendo también que cada uno de éstos puntos tenían asociado un peso positivo.

Esto es, dados n puntos distintos $P = (x_i, y_i)$ en el plano y sus respectivos pesos $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. El problema es encontrar un punto $X = (x, y)$ tal que la suma de los pesos de la distancia Euclidiana de X a todos los puntos dados sea mínima.

Es decir,

$$f(X) = \min \sum_{i=1}^n w_i d(X, P_i). \quad (3.4)$$

La generalización del problema de Fermat es minimizar $f(X)$. Este problema también es conocido en la literatura como el problema de Weber, o problema de 'Steiner' o problema del mínimo.

Se observa que la función $d(X, P_i)$ es una función convexa, luego la suma de los pesos de funciones convexas es también convexa, entonces $f(X)$ es también una función convexa de X . Si los n puntos distintos P_i son no colineales, $f(X)$ es absolutamente una función convexa de X , y entonces $f(X)$ tiene un único punto mínimo.

Tedenat en 1810 resolvió en forma gráfica la generalización del problema que planteó Fermat y en 1837 Steiner estableció las condiciones necesarias y suficientes para encontrar el óptimo (árbol de Steiner). Dicho árbol es similar al árbol de expansión de peso mínimo pero con la diferencia principal de que en el árbol de Steiner se pueden ir agregando vértices intermedios y arcos adicionales a la gráfica original, algo que no se puede hacer en el árbol de expansión de peso mínimo. Para el caso del árbol de expansión de peso mínimo Taha (2004, p.215) afirma que el problema es enlazar los nodos de una red en forma directa o indirecta, con la mínima longitud total de las ramas enlazantes. En la Figura 3.6 se muestra un ejemplo de un árbol de expansión de peso mínimo.

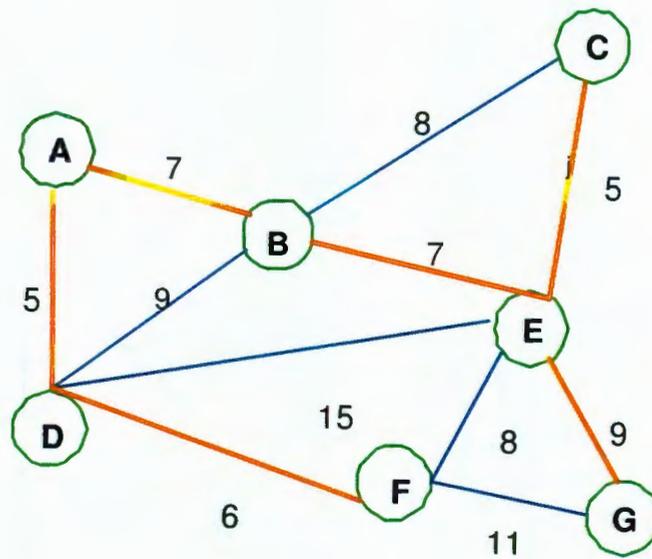


Figura 3.6: Árbol de expansión de peso mínimo

3.3. El estado aislado -Von Thünen-

Las teorías de ubicación tienen su origen en el modelo sobre el uso de la tierra que el economista alemán Johann Heinrich von Thünen publicó en su obra 'El estado aislado' en 1820. Dicha obra fue creada antes de la industrialización y se basa en la siguiente suposición: imaginemos un poblado muy grande en el centro de una planicie uniformemente fértil; un espacio isotrópico³. Tras el espacio fértil se extiende un desierto que incomunica el poblado del resto del mundo, es decir, no hay otras poblaciones. El único mercado compra toda la producción agrícola de la región, y se transporta en línea recta, que es el camino más corto.

³ Un espacio isotrópico, es un espacio con las mismas características geográficas en toda dirección y desde cualquier punto.

En estas condiciones todos los hombres se comportan de manera semejante en asuntos económicos, es decir, tienen las mismas necesidades, producen por igual y poseen un conocimiento total del espacio y pretenden alcanzar el máximo rendimiento. Aunado a esto debemos considerar el costo de transporte dependiendo de la distancia, la cantidad y lo perecedero de la mercancía.

En estas condiciones Von Thünen empleó la variable única: distancia desde la granja hasta el pueblo central de comercio. Si la actividad agrícola se pudiese concentrar, como la producción industrial, se situaría cerca del mercado y la distancia sería un costo insignificante en el precio del producto. Pero como la agricultura requiere grandes cantidades de superficie para cada granja es necesario que se sitúen a diferentes distancias. Por lo tanto, los productos se transportarán desde diferentes distancias, lo que provoca un aumento del costo para los productos más lejanos.

Es decir, la **renta de ubicación** (R) es igual al rendimiento (r) multiplicado por el precio (p) menos el costo (c), menos el rendimiento multiplicado por el costo de transporte (t) y por la distancia (d), esto es:

$$R = r(p - c) - rtd \quad (3.5)$$

En esta ecuación existe una sola variable, la renta, que depende sólo del factor distancia el cual puede variar; el resto de los parámetros varían para cada tipo de mercancías pero son constantes en todas partes para un mismo tipo de mercancía.

En el modelo de Von Thünen se enfatiza el rol de los costos en función de la distancia al mercado. En su enfoque denominado renta de ubicación, la renta es generada por el factor distancia y por tanto varía en función de la distancia del lugar de producción con respecto al mercado.

Esto quiere decir que, un incremento de la renta generada por el aumento de precio en el mercado o por la disminución del coste de producción, provoca un alejamiento de la distancia al mercado, y viceversa.

La distancia al mercado es inversamente proporcional a la razón de embarque (cantidad que se embarca), esto es, si la distancia al mercado aumenta la tasa de embarque disminuye e inversamente. En el modelo matemático de Von Thünen la renta de ubicación, a cualquier

distancia del mercado, depende de cuatro parámetros: rendimiento, precio, costo y costo de transporte. Dependiendo de las características de los productos se creará un sistema diferenciado de cosechas, esto es, si pudiéramos ubicar en círculos concéntricos diferentes actividades agrícolas deberíamos poner en la zona más cercana al centro, es decir, al 'Estado', los alimentos más perecederos o de mayor importancia, y así sucesivamente hasta ubicar en el círculo concéntrico más alejado las actividades agrícolas de menor importancia. Gráficamente esto se puede ilustrar en la siguiente Figura 3.7:

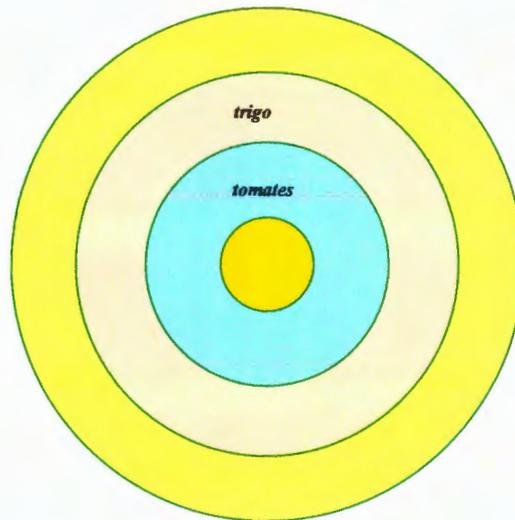


Figura 3.7: El estado aislado

Por ejemplo, si quisiéramos sembrar tomates y trigo, los tomates deberían estar sembrados en una zona más cercana al centro pues son más perecederos y por lo tanto su manejo produce un costo mayor en relación con el costo de manejo del trigo pues éste es menos perecedero.

Podemos mencionar, que en modelo anterior los sectores más cercanos al centro, serán utilizados con mayor intensidad por lo que su extensión de tierra debe ser menor pero con mayor mano de obra compensando así que los sectores exteriores tengan un mayor costo

de transporte y extensión territorial para así obtener rentas similares independientemente de la posición de los sectores.

3.4. Localización industrial -Alfred Weber-

A pesar de los trabajos de Thünen se considera que el origen de la Teoría de Localización moderna se remonta al siglo XX y se atribuye a Alfred Weber, pues es el que incorpora el problema original de Fermat al análisis de localización en su influyente tratado sobre la teoría de localización industrial. El problema estudiado por Weber consiste en determinar la localización óptima de una fábrica sobre un espacio isótropo donde los recursos se localizan en un punto y el mercado en otro. En estas condiciones el factor fundamental para decidir la localización es la distancia entre la planta de producción, los recursos y el mercado. Se supone que los puntos donde se encuentran los recursos y el mercado ya están dados, así que la única ubicación por determinar es la localización de la planta de producción que permita tener un costo de transporte mínimo.

Dentro de esta teoría se considera que para la elaboración de cualquier bien se necesita más de un recurso, por ello en la teoría de Weber los materiales se clasifican en: materiales puros, que se venden tal y como se encuentran en la naturaleza y materiales brutos que son los que han sufrido algún tipo de elaboración y han perdido peso, como la madera para muebles o los productos minerales.

Según Weber la ubicación de una planta está relacionada con cuatro factores fundamentales: la distancia a los recursos naturales, la distancia al mercado, los costos de mano de obra y las economías de aglomeración⁴.

En un primer supuesto Weber considera que los costos de producción no dependen de la ubicación geográfica de la planta, ya que las variaciones en el costo unitario de un determinado producto sólo dependerán del costo de transportación, es decir, sólo se debe buscar la ubicación de la planta que permita minimizar los costos de transporte. Otro factor que considera Weber es la cantidad de recurso que se pierde en el proceso de elaboración

⁴ "Una economía de aglomeración es el ahorro en los costos de producción debido al uso de servicios comunes a varias empresas que se encuentran en un mismo lugar".

y, para determinar la importancia de dicha pérdida Weber elaboró un índice de materiales, en el que se divide el peso de los recursos utilizados entre el peso del producto elaborado, esto se representa mediante la siguiente expresión:

$$IM = \frac{p_1}{p_2} \quad (3.6)$$

IM : Índice de materiales

p_1 : peso de los recursos

p_2 : peso del producto elaborado.

En los productos puros $IM = 1$, en los materiales brutos $IM > 1$, observemos que en cuanto mayor sea el índice de materiales mayor será la dependencia existente entre la localización de la planta y los recursos, ya que el producto elaborado pierde más peso y por lo tanto cuesta más transportar la materia prima que el producto terminado; cuanto más bajo sea el índice de materiales la planta se localizará más cerca del mercado.

Weber considera como peso de ubicación al índice de materiales más uno. Esto es:

$$PU = IM + 1 \quad (3.7)$$

PU : peso de ubicación

IM : índice de materiales.

En este primer caso Weber no consideró el gasto de energía empleada ni el valor añadido del producto y de forma análoga a Fermat, representó su teoría en un triángulo, en el cual, dos vértices corresponden a los productos que necesita en su elaboración y el otro vértice es el mercado.

En el segundo supuesto Weber considera cambios en función del costo de mano de obra y de las economías de aglomeración. Estos factores pueden hacer que el costo de producción descienda en algún otro punto, y la planta tendería a instalarse allí, pues la producción le saldría más barata, siempre y cuando el ahorro de los costos de producción superen el aumento de los costos de transporte a los que se ha de hacer frente, ya que la nueva localización no es el óptimo de reducción de los costos de transporte. Bajo esta consideración el triángulo que Weber utilizó en su primer modelo ahora se ve rodeado de

círculos concéntricos que representan el costo de transporte en una determinada área, cada línea circular formada es llamada una isodapana. Si ubicamos un punto en el cual los costos de mano de obra son menores que los costos de transporte, dentro de la isodapana, la planta se ubicará en ese punto, pero si los costos de la mano de obra quedan fuera de la isodapana, la planta no se trasladará. El límite entre los costos de transporte y el ahorro en la fuerza de trabajo es la isodapana crítica.

Weber también tuvo en cuenta el efecto de las economías de aglomeración, pues por el hecho de estar situada en una región industrial, una planta puede beneficiarse de ahorros en cuestiones como el acceso a los mercados, a las vías de comunicación, a la mano de obra especializada, a los servicios comunes y a los proveedores, sin embargo, estos ahorros pueden desencadenar una competencia por la tierra y dispararse el precio del suelo, anulando con esto los posibles ahorros.

Aunque cualquier modelo matemático, incluyendo el de Weber pueden no representar totalmente la compleja realidad, este modelo nos ayuda a comprender muchos fenómenos de localización industrial.

Hoy en día gracias a la Teoría de Localización se puede dar una solución óptima a diversos problemas y para ello se ha hecho uso principalmente de dos técnicas: determinación de p – medianas y centros de gravedad o p – centros.

La p – mediana es un modelo de localización que permite localizar un número finito de sitios, de tal manera que la distancia total recorrida por los usuarios a estos servicios sea mínima. En estos modelos los nodos pueden considerarse sitios con ciertos requerimientos o demandas y los arcos de la red representan el acceso a la instalación para cubrir esa demanda.

El problema de los p – centros consiste en colocar p centros de servicio y asignar clientes a dichos centros de forma que se minimice la máxima distancia entre un cliente y su centro de servicio.

Capítulo 4

Problemas básicos de la teoría de localización

Diseño del sistema de distribución

Uno de los problemas más frecuentes en las empresas es el almacenaje, ya que se debe tener cuidado en la distribución física de productos. Considérese una gran tienda la cual fabrica muchos productos y que mantiene centros de distribución regionales, además es propietaria de cientos de tiendas de menudeo. Esta empresa tendría el control sobre la localización de todos los componentes intermedios del sistema logístico.

Supongamos que la empresa no es propietaria de algún almacén. Entonces los cargamentos de mercancías tendrían que ser hechos directamente de las fábricas a las tiendas de menudeo. Si la fábrica se localiza lejos de sus suministros de materias primas, deben pagar por transportar estos materiales a la planta. Además, los tiempos grandes de entrega incrementan la probabilidad de la escasez de productos. Por otro lado, los costos de transportación y el tiempo de entrega se incrementan considerablemente, si la planta se localiza lejos de los grupos de tiendas de menudeo. El uso de almacenes colocados cerca de las tiendas puede hacer eficiente y rápida la entrega a tiendas de menudeo, mientras se permita que las fábricas estén cerca de los proveedores. Los almacenes también son usados para consolidar muchos pedidos pequeños de tiendas de menudeo para reducir los costos de transporte.

Los problemas de localización de almacenes pueden ser modelados frecuentemente como redes de caminos donde las empresas trasportistas mueven sus cargas. Los almacenes

podrían ubicarse en cualquier intersección (nodos) o a lo largo de los caminos (aristas) de la red. El objetivo típico podría ser minimizar el costo total de envío de productos de un almacén a otro.

Localización de cuentas bancarias

El número de días requeridos para liquidar un cheque en una sucursal bancaria de una ciudad, depende de la ciudad en la cual el cheque es cobrado. Este tiempo es llamado el tiempo de acreditación del cheque ("float.^{en} inglés), y el emisor del cheque continúa ganando intereses sobre los fondos hasta que el cheque es cobrado. En grandes empresas, la diferencia de unos cuantos días puede tener una significación económica importante. Por eso, para maximizar los fondos disponibles, una compañía que paga facturas a numerosos proveedores en varias localidades podría encontrar ventajoso mantener varias cuentas en sucursales bancarias localizadas estratégicamente. Podría entonces pagar a sus proveedores en una ciudad con cheques de una sucursal bancaria en otra ciudad que tuviera el mayor tiempo de acreditación posible.

Un problema relacionado es el llamado problema de las cajas de seguridad. Con respecto a las cuentas por cobrar, las empresas desean coleccionar sus fondos tan rápido como sea posible. Esto puede hacerse ubicando centros de colecta de cheques o cajas de seguridad en localidades estratégicas de manera que el tiempo de acreditación de las cuentas por cobrar (cheques que cobra la empresa) sea mínimo.

Si las ciudades se representan por vértices de una gráfica y los arcos corresponden a los enlaces de información, ambos problemas pueden modelarse como problemas de localización en la gráfica. Se busca entonces localizar las cuentas bancarias o las cajas de seguridad en los vértices de la gráfica de modo que se optimice un objetivo adecuado para la empresa.

Localización de una instalación de emergencia

Muchos problemas de localización involucran la ubicación de instalaciones de emergencia como hospitales, estaciones de bomberos, delegaciones o paramédicos. Como en la situación de distribución, los vehículos de emergencia pueden viajar a lo largo de una red de caminos y la instalación puede ser localizada en cualquier intersección o a lo largo de algún segmento de camino. El objetivo usual es minimizar el tiempo de respuesta de aviso a una emergencia. Frecuentemente, el objetivo es localizar la instalación de tal manera que el tiempo de respuesta máximo hacia cualquier punto de demanda sea minimizado.

Otras aplicaciones de los problemas de localización incluyen el cambio de la localización de centros en redes de comunicación, instalación de computadoras, paradas de autobuses, buzones, instalaciones públicas tales como parques, plazas comerciales y puntos de abastecimiento militar.

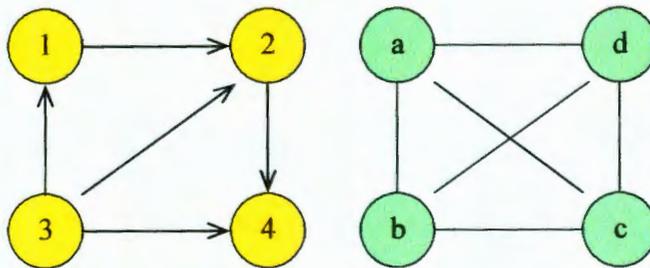
4.1. Definiciones básicas para la localización en Redes

Los modelos de localización en redes pueden clasificarse como continuos o discretos, pues esto depende de que las instalaciones puedan ser ubicadas en las aristas o en los vértices de la red que representa el problema considerado. Además, cabe mencionar que un problema con representación gráfica puede tomar distintas formas: gráfica no dirigida, dirigida o árbol.

Se ha mencionado que se hablará de problemas que tienen representación en una red, donde

Definición 4.1 Una red $G = (V, A)$ es una gráfica (dirigida o no) que tiene asociados parámetros en nodos y/o arcos.

Definición 4.2 Una gráfica dirigida $G = (X; U)$ es una pareja constituida por un conjunto finito X llamado conjunto de vértices y un conjunto U llamado conjunto de arcos.



Ejemplo de un grafo dirigido y un grafo no dirigido

Definición 4.3 Una gráfica en la cual la dirección de los arcos no está especificada, se llamará una gráfica no dirigida y se denotará $G = (X; U)$, en este caso, U es el conjunto de aristas.

Definición 4.4 El peso de un vértice $v \in V$ representa la demanda de v y se denota por $w(v) \geq 0$

Definición 4.5 La longitud de una arista $a \in A$ representa el costo (distancia) de viajar a través de a y se denota por $l(a) > 0$. Suponemos que cada arista es un segmento rectilíneo comprendido entre dos vértices.

Definición 4.6 Un punto x en una gráfica G es un punto a lo largo de cualquier arista $a = (u, v)$ de G y su localización precisa se determina por la distancia de x a u o v .

Definición 4.7 Un espacio métrico S es un espacio que consiste en un conjunto de puntos con una función de valor real $d(x, y)$ definida para todos los pares de puntos $x, y \in S$ con las siguientes propiedades:

a) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ para todo $x, y \in S$

Definición 3

b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in S$

Podemos considerar las siguientes medidas de distancia para los problemas de localización en el plano (\mathbb{R}^2), dados $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$:

Definición 4.8 La distancia Euclidiana (l_2) entre x y y es

$$d(x, y) = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 4.9 La distancia rectilínea (l_1) entre x y y es

$$d(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Definición 4.10 La distancia Euclidiana cuadrada entre x y y es

$$d(x, y) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

El uso de la distancia rectilínea es frecuente cuando se habla de distancia entre ciudades, fábricas, etc, poniéndolas en forma de una malla rectangular por lo que, en la literatura la podemos encontrar como la medida de la distancia de Manhattan o también llamada "métrica del taxi". La distancia Euclideana se utiliza cuando es posible un viaje en línea recta. Por otro lado, la distancia Euclidiana cuadrada se puede utilizar cuando es posible el viaje en línea recta pero la distancia es excesiva, pues recordemos que tratamos de que la distancia recorrida sea mínima.

4.2. Notación para el problema de Localización

Antes de adentrarnos en los problemas de la p -mediana y del p -centro, se harán algunas definiciones indispensables para plantear dichos problemas. Las definiciones necesarias describen los puntos y los arcos así como los diferentes tipos de distancias que existen entre ellos.

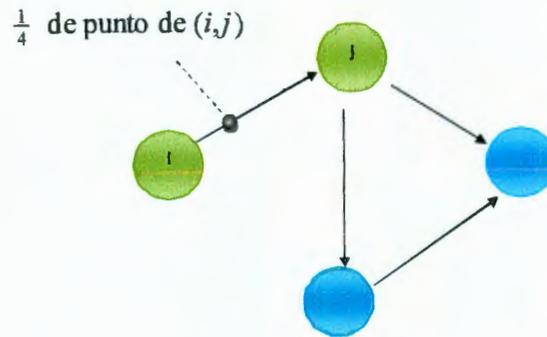
Sea $G = (V, A)$ una gráfica con n vértices y m aristas. Ahora dentro de esta gráfica consideremos cualquier arco (i, j) , entonces:

$a(i, j)$: es la **longitud** del vértice i al vértice j .

donde $a(i, j) > 0 \forall i \neq j$.

Sea el f -punto del arco (i, j) , un punto sobre el arco (i, j) que está a $fa(i, j)$ unidades del vértice i y a $(1 - f)a(i, j)$ unidades del vértice j , $\forall f$ tal que $0 \leq f \leq 1$.

Ejemplo 4 El $\frac{1}{4}$ -punto del arco (i, j) está a una distancia de un cuarto del vértice i (sobre el arco (i, j)), como se muestra en la Figura 4.1:

Figura 4.1: Ejemplo de un f -punto

Ejemplo 5 El 0 – punto del arco (i, j) está a 0 unidades del punto i , por lo que, necesariamente el 0 – punto es el mismo vértice i .

Ejemplo 6 El 1 – punto del arco (i, j) está a 1 unidad del punto i , por lo que el 1 – punto del arco (i, j) es el vértice j .

De los últimos ejemplos se observa que los vértices también pueden ser nombrados como puntos. Los puntos se pueden clasificar de la siguiente manera:

1. *Puntos interiores*: Aquellos puntos que no son vértices.
2. *Punto no interior*: Son aquellos que son vértices.

Sean

P : Conjunto de todos los puntos de la gráfica.

X : Conjunto de todos los puntos no interiores o vértices.

$P - X$: Conjunto de todos los puntos interiores.

$d(i, j)$: Longitud del camino más corto de i a j .

$D_{n \times n}$: Matriz cuadrada de $n \times n$ cuyas entradas son los elementos $d(i, j)$.

Es decir,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz D son llamados *distancia vértice-vértice*. Para calcular dichas distancia se pueden utilizar los algoritmos de Floyd o Dantzig.

Definamos ahora:

$d(f - (r, s), j)$: distancia *punto-vértice*, es decir, la longitud de la ruta más corta del $f - punto$ sobre el arco (r, s) al vértice j .

Si el arco (r, s) es no dirigido, es decir, que se puede recorrer en ambas direcciones, la distancia debe ser la más pequeña de las dos siguientes:

- a) La distancia del $f - punto$ al vértice r más la distancia del vértice r al vértice j .
- b) La distancia del $f - punto$ al vértice s más la distancia del vértice s al vértice j .

Por lo que

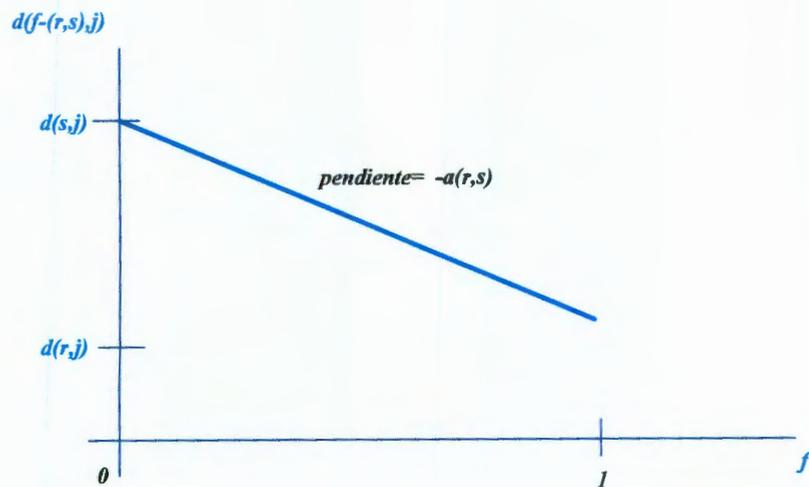
$$d(f - (r, s), j) = \text{mín} \{fa(r, s) + d(r, j), (1 - f)a(r - s) + d(s, j)\} \quad (4.1)$$

Si (r, s) es un arco dirigido, es decir, que viaja en una sola dirección de r a s , entonces el primer término de la fórmula anterior es eliminado y entonces tenemos:

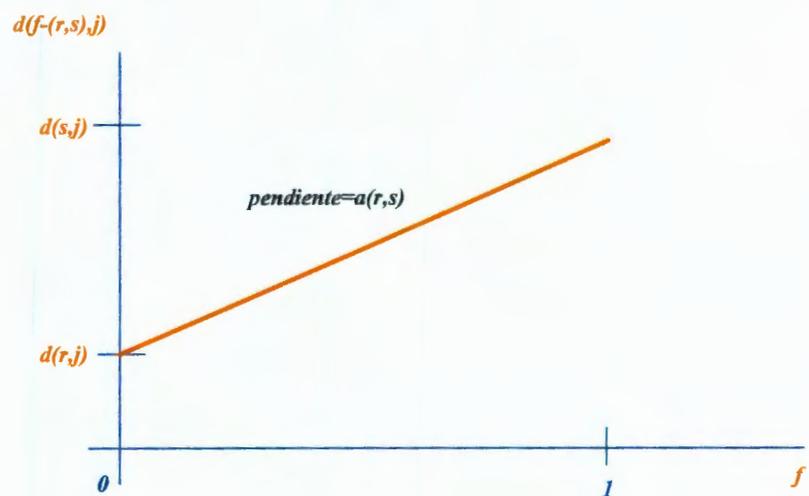
$$d(f - (r, s)) = (1 - f)a(r, s) + d(s, j) \quad (4.2)$$

Obsérvese que para calcular las distancias *vértice-punto* es necesario calcular la longitud del arco (r, s) y la matriz D .

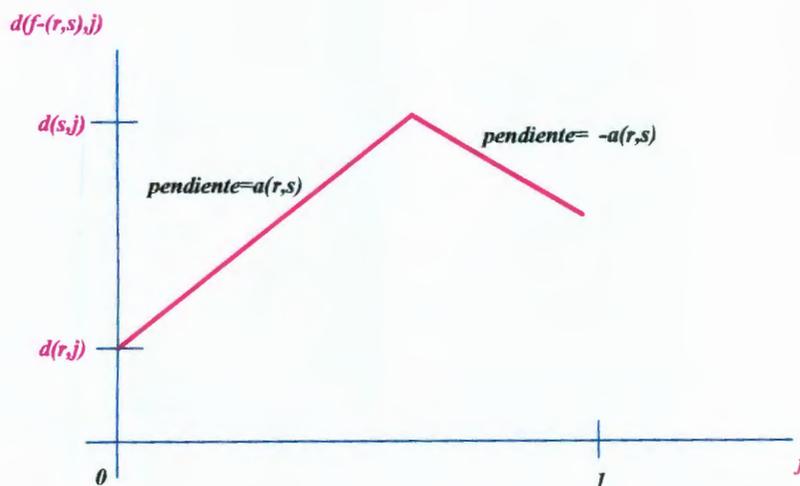
Al graficar en función de f la distancia *punto-vértice* para un arco dado (r, s) y un vértice dado j , la gráfica debe tomar una de las siguientes tres formas mostradas en la Figura 4.2:



Tipo 3



Tipo 2



Tipo 1

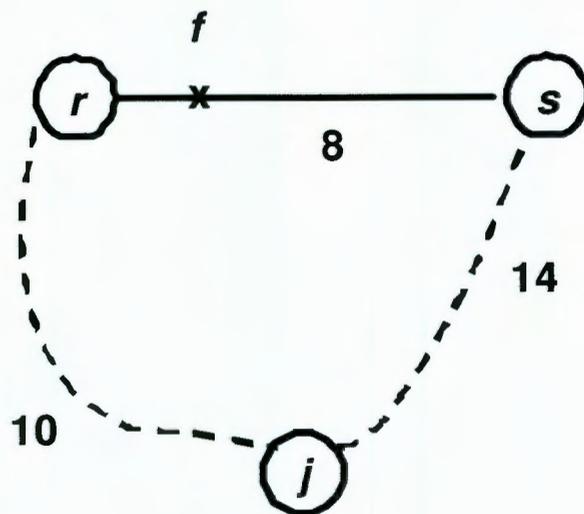
Figura 4.2: Gráficas posibles de la distancia *punto-vértice*

Se observa que la pendiente del segmento de línea es la longitud del arco (r, s) denotada como $a(r, s)$ ó $-a(r, s)$ y que la pendiente hace a lo más un cambio de $+a(r, s)$ a $-a(r, s)$.

Después, considere la distancia más corta para el vértice j a cada punto sobre el arco (r, s) . Para algún punto en el arco (r, s) , esta distancia toma su máximo valor, denotada por $d'(j, (r, s))$ y llamada *distancia vértice-arco*.

Si el arco (r, s) es no dirigido, hay dos maneras para viajar del vértice j al f - punto sobre el arco (r, s) : vía el vértice r o vía el vértice s . Entonces se elige la menor de las dos rutas. Si éstas rutas tienen diferentes distancias, entonces algún punto vecino del f - punto sobre el arco (r, s) es aún más lejano al vértice j .

Un ejemplo numérico donde se puede apreciar el tipo de gráfica de un f - punto es el siguiente: Consideremos el arco (r, s) cuya longitud $a(r, s) = 8$, y el punto j , cuyas distancias más cortas a r y s son 10 y 14, respectivamente como se ve en el diagrama.



Entonces, la distancia del f -punto del arco (r, s) al punto j vía r está dada por la recta:

$$L1 : fa(r, s) + d(r, j) = 8f + 10$$

Y la distancia del f -punto del arco (r, s) al punto j vía s está dada por la recta:

$$L2 : (1 - f)a(r, s) + d(s, j) = 8(1 - f) + 14 = -8f + 22$$

La Figura 4.3 muestra las gráficas de $L1$, $L2$ y el $\min\{L1, L2\}$ correspondientes:

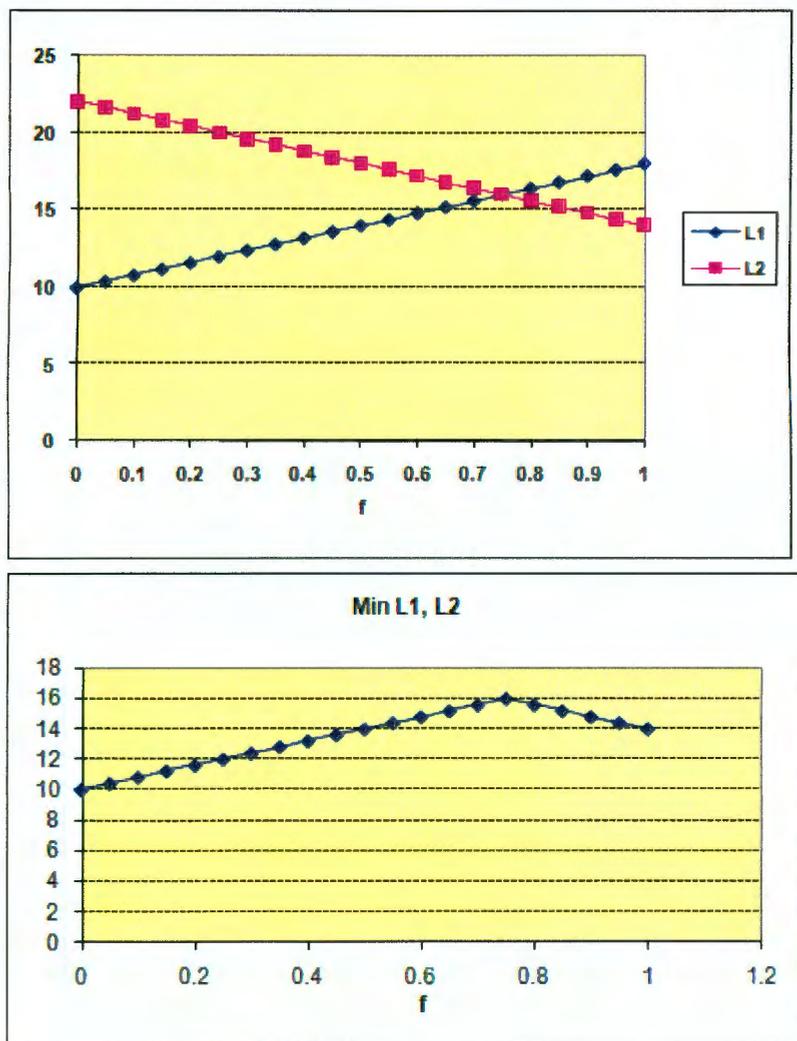


Figura 4.3: Ejemplo de distancia *punto – vértice*. Gráfica tipo 1

Si el valor de $d(r, j)$ fuera 5 en vez de 10, las correspondientes gráficas de $L1$, $L2$ son

como se ve en la Figura 4.4, con lo que el mínimo de $L1$, $L2$ coincide con $L1$.

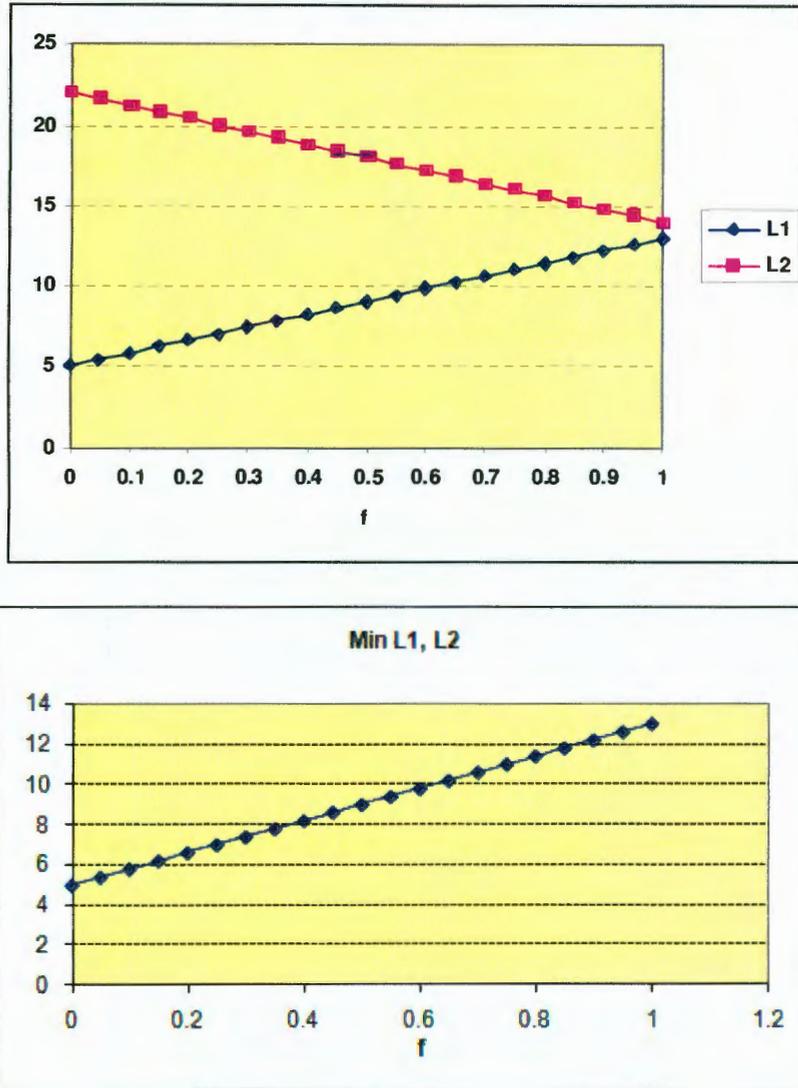


Figura 4.4: Si $d(r, j) = 5$, obtenemos una gráfica del Tipo 2.

Y si se tuvieran los valores de $d(r, j) = 14$, $d(s, j) = 5$, las gráficas de $L1$, $L2$ son como

se muestra en la Figura 4.5, con lo que el mínimo de $L1$, $L2$ coincide con $L2$.

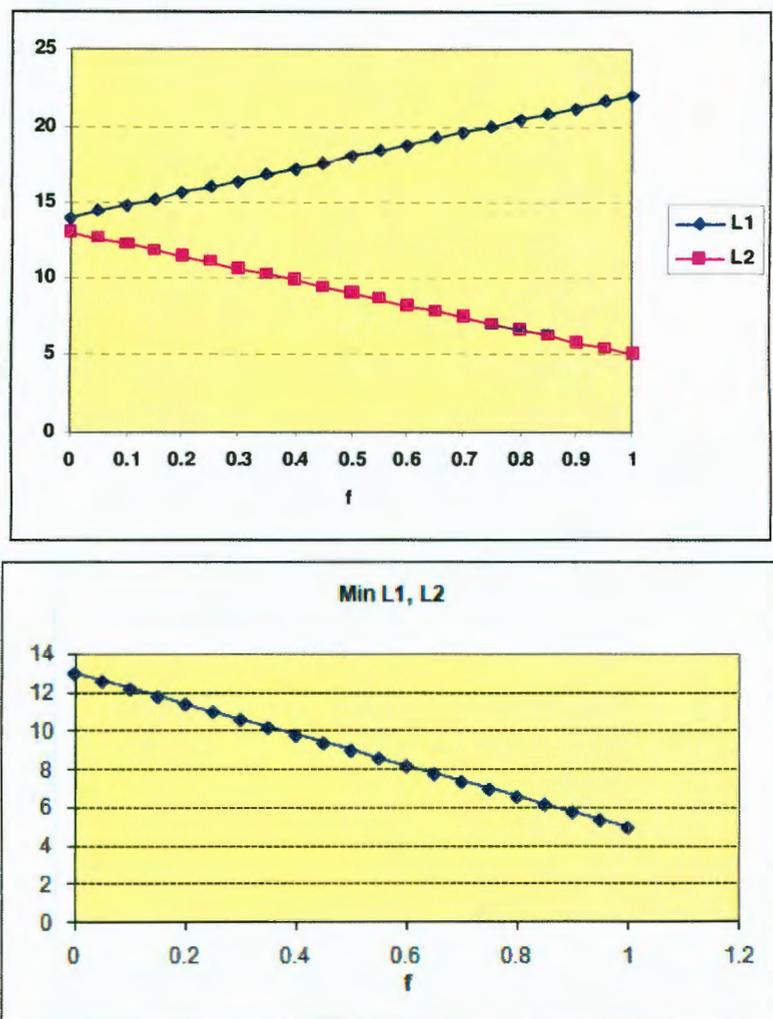


Figura 4.5: Tomando $d(r, j) = 14$ y $d(s, j) = 5$. Gráfica tipo3

Otro ejemplo es el siguiente, en la Figura 4.6, el 0,25 – punto del arco (4, 5) es 2,25 ó 1,75 unidades del vértice 2, dependiendo si viajamos vía el vértice 4 o 5, respectivamente. Conforme disminuimos el valor de f los valores de las distancias son iguales a lo más en el

punto más cercano al vértice 4. Por ejemplo si f va de 0.25 a 0.10, la menor distancia del vértice 2 al 0,10 – *punto* del arco (4, 5) es $\min\{2,10, 1,90\} = 1,90$.

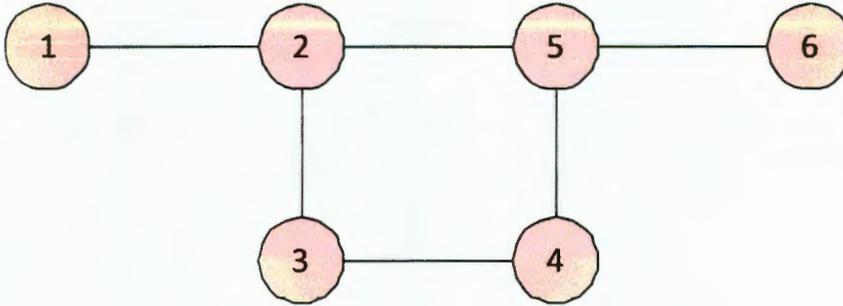


Figura 4.6: Arcos de longitud 1

La suma de tales distancias es:

$$d(j, r) + f(a(r, s)) + (1 - f)a(r, s) + d(r, s) = d(j, r) + a(r, s) + d(j, s)$$

Por lo que,

$$d'(j, (r, s)) = \frac{d(j, r) + d(j, s) + a(r, s)}{2}. \quad (4.3)$$

Si el arco (r, s) es dirigido, entonces el punto en el arco (r, s) puede ser alcanzado solamente vía el vértice r . Por tanto los puntos más distantes sobre (r, s) desde cualquier vértice son los puntos más cercanos al vértice s , es decir, los f – *puntos* para los cuales f es aproximadamente 1. Se tiene que

$$d'(j, (r, s)) = d(j, r) + a(r, s). \quad (4.4)$$

Por lo tanto, si enumeramos los arcos de la gráfica G de 1 a n y D' es la matriz de $n \times n$ cuyo elemento j, k – *ésimo* es la distancia *vértice-arco* del vértice j al arco k , se observa que la matriz D' de distancias *vértice-arco* puede ser calculada de la matriz D de distancias *vértice-vértice* y las longitudes de arco utilizando las ecuaciones (4.3) y (4.4).

Sea $d'(f - (r, s), (t, u))$ la distancia máxima del f – *punto* del arco (r, s) a los puntos sobre el arco (t, u) . Esta distancia es llamada la distancia *punto-arco*.

Si el arco (r, s) es no dirigido y si $(r, s) \neq (t, u)$, entonces la ruta más larga del f -punto sobre el arco (r, s) al punto sobre (t, u) debe ser vía el vértice r o vía el vértice s . De lo que se sigue que,

$$d'(f - (r, s), (t, u)) = \text{mín} \{ fa(r, s) + d'(r, (t, u)), (1 - f)a(r, s) + d'(s, (t, u)) \}. \quad (4.5)$$

Si el arco (r, s) es dirigido y $(r, s) \neq (t, u)$, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$d'(f - (r, s), (t, u)) = (1 - f)a(r, s) + d'(s, (t, u)). \quad (4.6)$$

Si $(r, s) = (t, u)$, y el arco (r, s) es dirigido, el punto más distante sobre el arco (r, s) del f -punto sobre el arco (r, s) es el g -punto donde g se aproxima a valores menores de f . Por lo tanto, en este caso,

$$d'(f - (r, s), (r, s)) = (1 - f)a(r, s) + d(s, r). \quad (4.7)$$

Si $(r, s) = (t, u)$ y el arco (r, s) no tiene dirección, la distancia máxima del f -punto sobre el arco (r, s) a cualquier g -punto sobre (r, s) ($g < f$) no debe exceder

$$A = \text{mín} \left\{ fa(r, s), \frac{1}{2} [a(r, s) + d(s, r)] \right\}.$$

En la ecuación anterior de las rutas del f -punto al g -punto, el primer término en la minimización está restringido al arco (r, s) . El segundo término dentro de la minimización en la ecuación anterior para las rutas del f -punto sobre (r, s) al g -punto sobre (r, s) que cruzan por el vértice s .

Análogamente, la distancia máxima del f -punto sobre (r, s) para algún g -punto sobre (r, s) con $f > g$, no puede exceder el valor:

$$B = \text{mín} \left\{ (1 - f)a(r, s), \frac{1}{2} [a(r, s) + d(r, s)] \right\}.$$

El primer término en el cálculo anterior de minimización es para las rutas de los f -puntos a los g -puntos restringidos al arco (r, s) y el segundo término es para las rutas de los f -puntos sobre el arco (r, s) al g -punto sobre (r, s) , a través, del vértice r .

En consecuencia, si el arco (r, s) es no dirigido, entonces

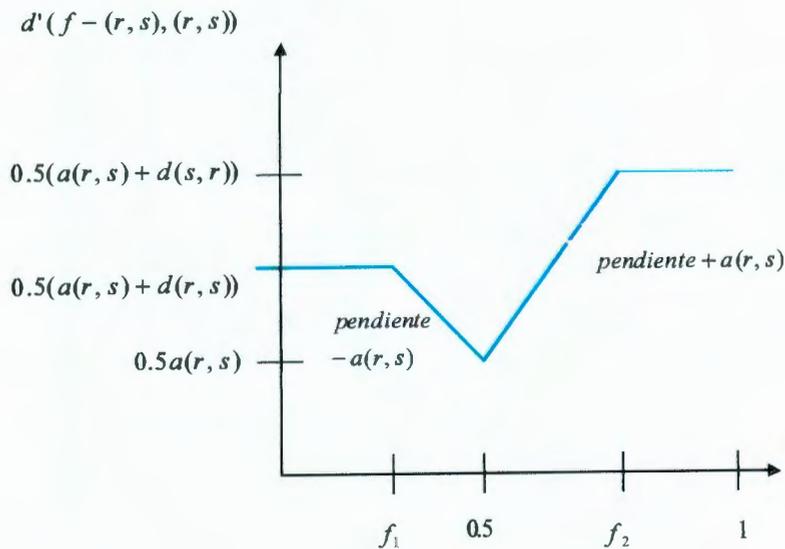
$$d'(f - (r, s), (r, s)) = \text{máx} \{A, B\}$$

equivalentemente,

$$d'(f - (r, s), (r, s)) = \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \{fa(r, s), \frac{1}{2}[a(r, s) + d(s, r)]\}, \\ \text{mín} \{(1 - f)a(r, s), \frac{1}{2}[a(r, s) + d(r, s)]\} \end{array} \right\}. \quad (4.8)$$

Cuando $d'(f - (r, s), (t, u))$ se grafica como una función de f para todo $(r, s) \neq (t, u)$, la curva toma la misma forma que la distancia *punto-vértice* que se muestra en la Figura 4.2, ya que la ecuación (4.5) tiene la misma forma que la ecuación (4.1) y la ecuación (4.6) tiene la misma forma que la ecuación (4.2). Solamente las constantes son diferentes, pero la forma de la ecuación es la misma.

Por otro lado, cuando $d'(f - (r, s), (r, s))$ es graficada como una función de f para cualquier arco (r, s) no dirigido la curva toma la forma mostrada en la Figura ???. Esto se sigue de la ecuación (4.8).



Distancia *punto-vértice*

Notación	Nombre	Ecuación
$a(i, j)$	Longitud del arco	Dada
$d(i, j)$	Distancia vértice-vértice, VV	Algoritmo de Floyd o Dantzig
$d(f - (r, s), j)$	Distancia punto-vértice, PV	(4.1), (4.2)
$d'(j, (r, s))$	Distancia vértice-arco, VA	(4.3), (4.4)
$d'(f - (r, s), (t, u))$	Distancia punto-arco, PA	(4.5), (4.6), (4.7) y (4.8).

Cuadro 4.1: Resumen de distancias para el problema de Localización

Estas ecuaciones se resumen en la Tabla 4.1

Con base en los conceptos de distancia anteriores, se definen:

$MVV(i)$: distancia máxima de cualquier vértice al vértice i .

$SVV(i)$: distancia total de todos los vértices al vértice i .

$MPV(f - (r, s))$: distancia máxima de cualquier vértice al $f - punto$ sobre el arco (r, s) .

$SPV(f - (r, s))$: distancia total de todos los vértices al $f - punto$ sobre el arco (r, s) .

Las cuales están dadas por las ecuaciones siguientes:

$$MVV(i) = \max_j \{d(i, j)\} \quad (4.9)$$

$$SVV(i) = \sum_j d(i, j) \quad (4.10)$$

$$MPV(f - (r, s)) = \max_j \{d(f - (r, s), j)\} \quad (4.11)$$

$$SPV(f - (r, s)) = \sum_j d(f - (r, s), j) \quad (4.12)$$

De manera análoga podemos definir $MVA(i)$, $SVA(i)$, $MPA(f - (r, s))$, $SPA(f - (r, s))$ tomando los máximos o las sumas sobre todos los arcos, en lugar de la suma sobre todos los vértice como en la ecuación (4.9)-(4.12).

Las definiciones anteriores nos dan la pauta para enunciar nuevas definiciones más rigurosas para varios tipos de localización que consideraremos.

4.3. P-centros

La localización de estaciones de bomberos, ambulancias y estaciones de policía, son algunos ejemplos de problemas donde la mayoría de las veces tienen por objetivo minimizar la distancia a los usuarios más alejados. Este tipo de problemas en la literatura se conoce como un *problema de centro* y según Daskin (1995) [7], llamado un *problema minimax*.

No olvidemos que la demanda del servicio sólo aparece en los nodos de la red, pues de lo contrario, si también la demanda aparece sobre las aristas, introducimos el número de nodos necesarios para que este supuesto se siga cumpliendo.

Ahora bien, como el objetivo del problema de los centros es minimizar la máxima distancia desde un centro de servicio hasta sus usuarios asignados, entonces primero debemos calcular las rutas más cortas entre los nodos de la red, por lo que veremos algunos conceptos importantes para posteriormente dar un algoritmo y encontrar el centro de una red.

Definición 4.11 *Un centro de una gráfica G es cualquier vértice x con la propiedad de que la distancia al vértice más distante a x es tan pequeña como sea posible, es decir*

$$MVV(x) = \min_i \{MVV(i)\} \quad (4.13)$$

donde $MVV(i)$ denota la distancia máxima de cualquier vértice al vértice i .

La distancia máxima $MVV(i)$ de cualquier vértice al vértice i es la entrada mayor en el i -ésimo renglón de la matriz D .

Entonces un centro es cualquier vértice x con el menor valor posible de $MVV(x)$; esto es, un centro es cualquier vértice cuyo renglón en la matriz D tiene la más pequeña de las entradas máximas.

Ejemplo 7 *Encuentre un centro para la gráfica mostrada en la Figura 4.7.*

arco	orden
1	(1, 2)
2	(1, 3)
3	(1, 4)
4	(2, 4)
5	(2, 3)
6	(3, 4)

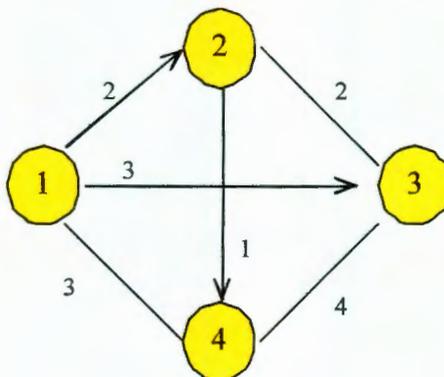


Figura 4.7: Gráfica para el ejemplo

Usando el algoritmo de Floyd¹ tenemos que

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que,

$$MVV(1) = \text{máx} \{0, 2, 3, 3\} = 3$$

$$MVV(2) = \text{máx} \{4, 0, 2, 1\} = 4$$

$$MVV(3) = \text{máx} \{6, 2, 0, 3\} = 6$$

$$MVV(4) = \text{máx} \{3, 5, 4, 0\} = 5$$

Por lo tanto,

$$MVV(i) = \text{mín} \{3, 4, 6, 5\} = 3 = MVV(1)$$

Es decir, el vértice 1 es un centro para esta gráfica y el vértice más lejano del vértice 1 está a 3 unidades, donde ningún otro vértice puede mejorar las 3 unidades.

¹Para una descripción detallada del algoritmo revisar Taha 2007 p256.

Definición 4.12 *Un centro general es cualquier vértice x con el menor valor posible de $MVA(x)$, esto es, cualquier vértice tal que la distancia del punto más alejado del vértice x es tan pequeña como sea posible.*

$$MVA(x) = \min_i \{MVA(i)\} \quad (4.14)$$

Ejemplo 8 *Encontrar un centro general para la gráfica de la Figura 4.7.*

Los arcos de la gráfica son enumerados de 1 hasta 6. Usando la matriz de distancias D vértice-vértice dada en el ejemplo anterior y usando la longitud de arcos mostrada en la Figura 4.7, se hace uso de la fórmula anterior para calcular D' .

Por ejemplo, para el arco 6, como es no dirigido usamos la ecuación (4.3) y para $j = 1$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} d'(1, (3,4)) &= \frac{1}{2} [d(1,3) + d(1,4) + a(3,4)] \\ &= \frac{1}{2} [3 + 3 + 4] = 5 \end{aligned}$$

para el arco 4 que es dirigido usamos la ecuación (4.4) con $j = 1$ tenemos:

$$d'(1, (2,4)) = d(1,2) + a(2,4) = 2 + 1 = 3$$

realizando las mismas operaciones para los 6 arcos y los 4 vértices obtenemos la siguiente matriz D'

$$D' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3,5 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 1 & 2 & 3,5 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 2 & 3,5 \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 5,5 & 4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$MVA(2) = \max\{6, 7, 6, 1, 2, 3,5\} = 7$$

$$MVA(3) = \max\{8, 9, 6, 3, 2, 3,5\} = 9$$

$$MVA(4) = \max\{5, 6, 3, 6, 5,5, 4\} = 6$$

Ahora $\min MVA(i) = \min\{5, 7, 9, 6\} = 5 = MVA(1)$. Por lo que, el vértice 1 es un centro general de la gráfica.

Del ejemplo anterior podemos decir que un *centro general* lo podemos encontrar en la fila de D' que tenga la entrada máxima lo más pequeña posible. Esta fila corresponde a un vértice que es un centro general, o bien, podemos decir que encontrando $MVA(i)$ igual a la mayor entrada en la i -ésima fila de la matriz D' de distancias vértice-arco.

Definición 4.13 Un *centro absoluto* de la gráfica G es cualquier f -punto sobre cualquier arco (r, s) de la gráfica G , tal que

$$MPV(f - (r, s)) = \min_{f - (t, u) \in P} \{MPV(f - (t, u))\}. \quad (4.15)$$

De la definición podemos observar que, encontrar un centro absoluto es más complejo pues, es necesario considerar todos los puntos interiores además de los vértices. Sin embargo, no todos los puntos interiores de un arco dirigido pueden ser un centro absoluto pues, los caminos sólo tienen una dirección por lo que, los vértices finales de un arco dirigido están tan cerca de cada vértice en la gráfica que cualquier otro punto interior del arco dirigido, por lo tanto, para encontrar un centro absoluto basta considerar vértices y puntos interiores de arcos no dirigidos.

Entonces, un candidato para el centro absoluto se encuentra seleccionando el punto en cada arco no dirigido cuya distancia mayor al vértice esté tan cerca como sea posible. El candidato con la menor distancia entre él mismo y su vértice más distante es seleccionado como un centro absoluto. La selección de este candidato en cada arco requiere hacer una gráfica de todas las distancias punto-vértice como una función de los puntos sobre el arco, un ejemplo de este tipo de gráfica se muestra en la Figura 4.2.

Lo anterior lo podemos resumir en un método propuesto por Hakimi (1964)[2], que consiste en graficar la distancia punto-vértice:

Paso 1: Graficar $d(f - (r, s), j)$ para todo f , $0 \leq f \leq 1$, y para todos los vértices j .

Paso 2: El valor f^* de f en el cual está la parte más alta de todas las gráficas donde toma su valor mínimo es el mejor candidato sobre el arco (r, s) . La parte más alta de todas estas gráficas representa $\max_j d(f - (r, s), j)$.

Entonces el centro absoluto es $f^* - (r, s)^*$ con la distancia mínima para su vértice más lejano, es decir,

$$\max_j \{d(f^* - (r, s)^*, j)\} = \min_{(t,u)} \left\{ \max_j d(f^* - (t, u), j) \right\}.$$

Ejemplo 9 Encontrar un centro absoluto para la gráfica de la Figura 4.7.

Sabemos que todos los centros absolutos deben ser vértices o puntos interiores de un arco no dirigido y el vértice candidato a centro absoluto sería el vértice seleccionado como centro. En el ejemplo de calcular el centro de esta gráfica, encontramos que el vértice 1 fue el centro y todos los vértices estaban a 3 unidades del vértice 1. Por lo tanto, el vértice 1 es el mejor candidato con un rango de 3 unidades.

De aquí en adelante examinaremos el punto interior de los tres arcos no dirigidos (1, 4), (2, 3) y (3, 4).

Primero examinemos el arco (3, 4). Entonces de la ecuación (4,1),

$$\begin{aligned} d(f - (3, 4), 1) &= \min \{fa(3, 4) + d(3, 1), (1 - f)a(3, 4) + d(4, 1)\} \\ &= \min \{4f + 6, 4(1 - f) + 3\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 4f + 6 \text{ para } f \leq \frac{1}{8} \\ 7 - 4f \text{ para } f \geq \frac{1}{8} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

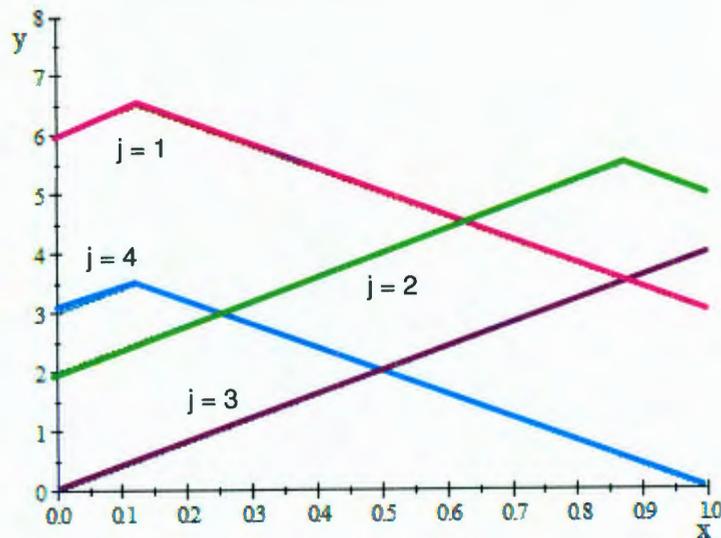
$$\begin{aligned} d(f - (3, 4), 2) &= \min \{fa(3, 4) + d(3, 2), (1 - f)a(3, 4) + d(4, 2)\} \\ &= \min \{4f + 2, 4(1 - f) + 5\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 4f + 2 \text{ para } f \leq \frac{7}{8} \\ 9 - 4f \text{ para } f \geq \frac{7}{8} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f - (3, 4), 3) &= \min \{fa(3, 4) + d(3, 3), (1 - f)a(3, 4) + d(4, 3)\} \\ &= \min \{4f, 4(1 - f) + 4\} \\ &= 4f \text{ (para toda } f, \quad 0 \leq f \leq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(f - (3, 4), 4) &= \text{mín} \{fa(3, 4) + d(3, 4), (1 - f)a(3, 4) + d(4, 4)\} \\
 &= \text{mín} \{4f + 3, 4(1 - f) + 0\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 4f + 3 \text{ para } f \leq \frac{1}{8} \\ 4 - 4f \text{ para } f \geq \frac{1}{8} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Estas distancias *punto – vértice* están graficadas en la Figura 4.8. El valor inferior de la porción más alta de estas curvas ocurre cuando $d(f - (3, 4), 1) = d(f - (3, 4), 2)$. Por lo tanto,

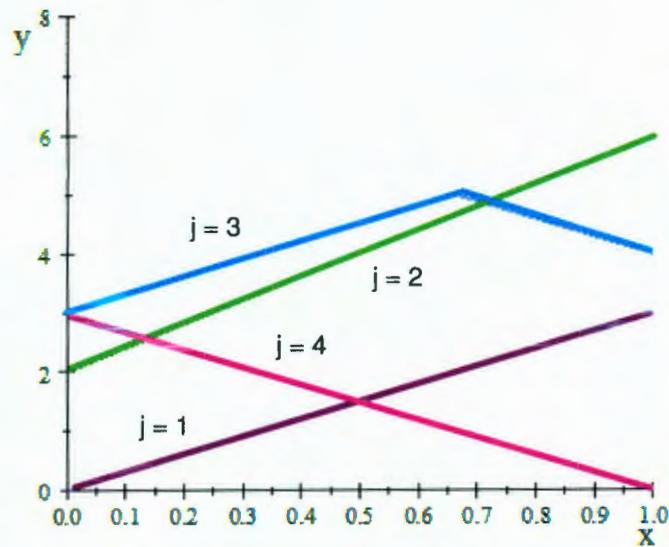
$$\begin{aligned}
 7 - 4f^* &= 4f^* + 2, \quad f^* = \frac{5}{8} \\
 d\left(\frac{5}{8} - (3, 4), 1\right) &= d\left(\frac{5}{8} - (3, 4), 2\right) = 4\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$



En consecuencia, $\frac{5}{8}$ - *punto* es el mejor candidato para centro absoluto sobre $(3, 4)$, y no existe ningún vértice a más de $4\frac{1}{2}$ unidades sobre $(3, 4)$.

Figura 4.8: Distancias punto-vértice $d(f - (3, 4), j)$

La Figura 4.9 muestra el mismo resultado para el arco $(1, 4)$. Nótese que el mejor candidato para el centro absoluto sobre el arco $(1, 4)$ es el 0 - *punto* que es el vértice 1.

Figura 4.9: Distancias punto-vértice $d(f - (1, 4), j)$

La Figura 4.10 muestra el mismo resultado para el arco $(2, 3)$. Nótese que el mejor candidato para el centro absoluto sobre $(2, 3)$ es el 0 - *punto* el cual es el vértice 2. De lo

anterior sabemos que todos los vértices están a 4 unidades del vértice 2.

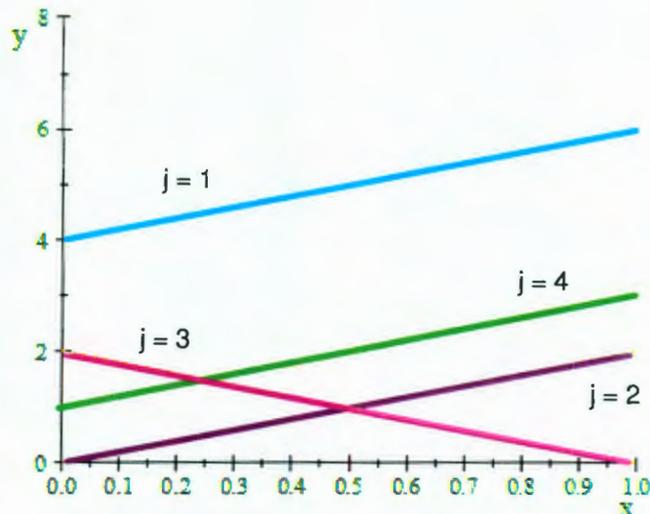


Figura 4.10: Distancias punto-vértice $d(f - (2, 3), j)$

En consecuencia, el mejor candidato para punto interior es el $\frac{5}{8}$ – punto sobre $(3, 4)$ con una distancia máxima de $4\frac{1}{2}$ unidades. El mejor candidato es el vértice 1 para el cual la distancia máxima es de $4\frac{1}{2}$ unidades. El mejor vértice candidato es el vértice 1 con una distancia máxima de 3 unidades. De aquí que el vértice 1 es el centro absoluto de la gráfica.

Definición 4.14 *Un centro general absoluto de la gráfica G es cualquier f – punto sobre cualquier arco (r, s) de G , tal que el punto más lejano al f – punto está tan cerca como sea posible, para ello hay que encontrar un punto $f - (r, s)$ tal que*

$$MPA(f - (r, s)) = \min_{f-(t,u) \in P} \{MPA(f - (t, u))\}. \quad (4.16)$$

Para la búsqueda de un centro general absoluto basta considerar los vértices y puntos interiores de los arcos no dirigidos, ya que en un punto no interior de un arco dirigido todo

viaje es en una dirección, y el vértice terminal de un arco dirigido es un mejor candidato para centro absoluto general el cual es cualquier punto interior de este arco, pues el vértice terminal está más cerca a todos los arcos de la gráfica.

En la mayoría de los problemas reales, el punto más distante del f – punto sobre el arco (r, s) no estará sobre el arco (r, s) . En este caso, podemos simplemente omitir la consideración de la función de distancia *punto – arco* $d'(f - (r, s), (r, s))$. El problema de encontrar un centro absoluto general puede ahora ser resuelto por la técnica usada anteriormente. La única diferencia es, que la función de distancia *punto – arco* puede ser reemplazada por la función de distancia *punto – vértice*. Como hay más arcos que vértices se requieren más gráficas para encontrar un centro general absoluto.

Sin embargo, si existe una posibilidad de que el punto más distante del f – punto sobre el arco (r, s) también esté sobre el arco (r, s) , entonces la gráfica de las funciones de las distancias *punto – arco* $d'(f - (r, s), (r, s))$ deben ser incluidas en los cálculos para el mejor candidato sobre (r, s) . La ecuación (4,3) puede ser usada para construir esta gráfica, cuyo resultado es un segmento de línea con al menos 4 partes, como se muestra en la Figura ??.

4.3.1. El problema de p -centros

El problema de los p – centros consiste en colocar p centros de servicio y asignar clientes a dichos centros de forma que se minimice la máxima distancia entre un cliente y su instalación; para ello, consideremos una red no orientada $G(N, A)$. Sea $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ el conjunto de p puntos en la red G . Denotamos $d(i, x_p)$ como la distancia más corta entre el nodo i y los puntos x_1, x_2, \dots, x_p :

$$d(i, x_p) = \text{mín } d_{i, x_j} \quad \text{con } x_j \in X_p.$$

Denotamos por $f(X_p)$ la mayor de las distancias más pequeñas entre los nodos de la red G y los puntos x_1, x_2, \dots, x_p :

$$f(x_p) = \text{máx } d(i, x_p) \quad i \in N.$$

El conjunto X_p^* de p puntos es llamado el p – centro de la red G si para cada $X_p \in G$, se cumple que:

$$f(X_p^*) \leq f(X_p).$$

Ahora bien, si consideramos la intensidad de la demanda de servicio denotada por w_i para los nodos de la red $i \in N$, podemos interpretar dicha cantidad como el peso o significancia asociada al nodo i .

Suponiendo que la intensidad de demanda del servicio es w_i , podemos usar la siguiente expresión en lugar de la distancia más corta $d(i, X_p)$ entre el nodo i y cualquier punto x_1, x_2, \dots, x_p .

$$w_i d(i, X_p).$$

De manera análoga, $F(X_p)$ se define como:

$$F(X_p) = \text{máx} [w_i d(i, X_p)] \quad i \in N.$$

En este caso el conjunto X_p^* de puntos p es llamado el p -centro de la red G , si para cada $X_p \in G$ lo siguiente es cierto:

$$F(X_p^*) \leq F(X_p).$$

4.4. P-mediana

Dentro de la gran variedad de problemas que se abordan en la Teoría de localización aplicada a redes se encuentra el problema de la p -mediana. Los problemas de la mediana son particularmente importantes para *actividades de transporte* ya que aparecen cuando se diseñan diferentes sistemas de distribución, como son: vías férreas, carreteras, redes urbanas, etc., todo ello con el fin de localizar p instalaciones con el objetivo de minimizar la distancia promedio entre las instalaciones y los usuarios de los servicios.

Antes de adentrarnos en el problema de la p -mediana, se darán algunas definiciones.

Definición 4.15 *Una mediana es cualquier vértice x , con la menor distancia total posible de x a todos los demás vértices. Por lo tanto, la mediana es cualquier vértice x tal que*

$$SVV(x) = \text{mín} \{SVV(i)\} \quad (4.17)$$

donde $SVV(i)$ denota la distancia total de todos los vértices al vértice i .

$$SVV(i) = \sum_j d(i, j)$$

$d(i, j)$: distancia del vértice i al vértice j .

Esto es, una mediana corresponde a cualquier suma de las entradas de la i -ésima fila de una matriz D de distancias vértice-vértice si y sólo si la suma de dichas entradas es la suma mínima.

Ejemplo 10 Encontrar una mediana para la gráfica de la siguiente Figura 4.7.

Usando la figura del ejemplo tenemos que, la matriz de distancias D , es como sigue:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} SVV(1) &= 0 + 2 + 3 + 3 = 8 \\ SVV(2) &= 4 + 0 + 2 + 1 = 7 \\ SVV(3) &= 6 + 2 + 0 + 3 = 11 \\ SVV(4) &= 3 + 5 + 4 + 0 = 12. \end{aligned}$$

De aquí que $\min_i \{SVV(i)\} = \min \{8, 7, 11, 12\} = 7 = SVV(2)$, y el vértice 2 es la mediana de esta gráfica, pues la distancia total del vértice 2 a todos los vértices es 7 unidades.

Definición 4.16 Una mediana general es cualquier vértice x con la menor distancia total a cada arco, donde la distancia de un vértice a algún arco tomará la distancia máxima del vértice a los puntos sobre el arco. Por lo tanto, una mediana general es cualquier vértice x para el cual

$$SVA(x) = \min_i \{SVA(i)\} \quad (4.18)$$

donde

$$SVA(i) = \sum_j d(i, j). \quad (4.19)$$

La suma de las entradas en la i -ésima fila de la matriz D' de distancias vértice-arco es igual a la suma de las distancias del vértice i a todos los arcos, esto es, $SVA(i)$. Así que, la mediana general corresponde a cualquier fila D' con suma mínima.

Ejemplo 11 Encontrar una mediana general para la gráfica de la Figura 4.7. La matriz D' está definida como sigue:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3\frac{1}{2} & 5 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3\frac{1}{2} \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 2 & 3\frac{1}{2} \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 5\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

donde cada una de las entradas se calculó por medio de la fórmula (4.19)

Por lo que,

$$\begin{aligned} SVA(1) &= 2 + 3 + 3 + 3 + 3\frac{1}{2} + 5 = 19 \\ SVA(2) &= 6 + 7 + 4 + 1 + 2 + 3\frac{1}{2} = 23\frac{1}{2} \\ SVA(3) &= 8 + 9 + 6 + 3 + 2 + 3\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2} \\ SVA(4) &= 5 + 6 + 3 + 6 + 5\frac{1}{2} + 4 = 29\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De aquí que, $\min_i \{SVA(i)\} = \min \{19\frac{1}{2}, 23\frac{1}{2}, 31\frac{1}{2}, 29\frac{1}{2}\} = 19\frac{1}{2} = SVA(1)$, por lo que el vértice 1 es la mediana general de esta gráfica. La distancia total del vértice 1 a todas las aristas es $19\frac{1}{2}$ unidades.

Definición 4.17 Una mediana absoluta es cualquier punto para el cual la distancia total a todos los vértices es tan pequeña como sea posible.

Teorema 4.1 Existe siempre un vértice que es una mediana absoluta.

Demostración. Considera cada una de las distancias *punto-vértice* $d(f - (r, s), j)$ como una función de f . Cuando graficamos esta función toma la forma que se muestra en la Figura ???. Obsérvese que cada función de ésta forma tiene la propiedad de que si cualquiera dos puntos sobre la curva son conectados por una línea recta (ver Figura 4.11), entonces la línea recta siempre queda sobre o debajo de la curva. Cualquier función con esta propiedad es llamada *función cóncava*. Sin embargo, el valor mínimo de la función cóncava siempre ocurre en uno de sus puntos frontera, es decir, para algún $f = 0$ o $f = 1$.

Después consideremos $SPV(f - (r, s)) = \sum_i d(f - (r, s), j)$ como una función de f . Ya que esta función es la suma de funciones cóncavas, entonces ésta también es cóncava. Por lo tanto, $SPV(f - (r, s))$ es minimizada en $f = 0$ o $f = 1$. En consecuencia, un punto no interior del borde (r, s) es un mejor candidato para ser una mediana absoluta que uno de sus vértices extremos. ■

La demostración del teorema anterior no sólo es válida para distancias *punto-vértice* sino también para cualquier función cóncava de la distancia de *punto-vértice*.

Como consecuencia del teorema anterior, en la búsqueda de una mediana general absoluta sólo necesitamos considerar los vértices. Por lo tanto, cualquier mediana es también

una mediana absoluta, y no se necesita entonces incluir ninguna nueva técnica de búsqueda.

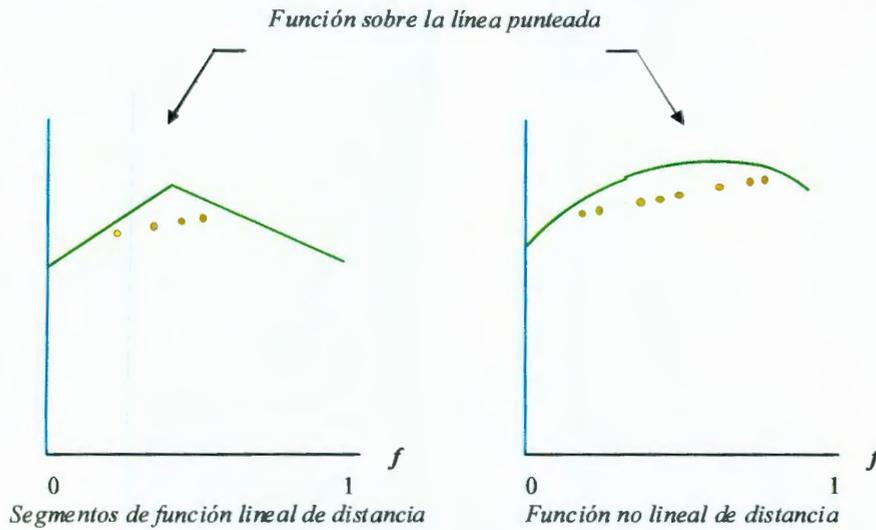


Figura 4.11: Función de distancia cóncava

Teorema 4.2 Una mediana general absoluta es cualquier punto con la propiedad de que la distancia total de este a todos los arcos es tan pequeña como sea posible.

Nuevamente, la distancia de un punto a un arco es calculada como la distancia máxima del punto a todos los puntos sobre el arco. Por lo tanto, una mediana general absoluta es cualquier punto $f = (r, s)$, tal que

$$SPA(f = (r, s)) = \min_{f = (t, u) \in P} \{SPA(f = (t, u))\}.$$

El teorema anterior enuncia que siempre existe un vértice que es una mediana absoluta. La demostración del teorema anterior se apoya en el hecho de que todas las funciones de distancia *punto-vértice* fueron cóncavas. Si todas las funciones de distancia *punto-arco* fueran también cóncavas, este teorema sería demostrado de manera análoga al teorema

anterior. Desafortunadamente este no es el caso, ya que la función de distancia *punto-arco* $d'(f - (r, s), (r, s))$ no es cóncava como se puede observar en la Figura ??.

Por otra parte, todas las funciones de distancia *punto-arco* son cóncavas como se observa en la Figura 4.2. En consecuencia, es posible que todas las medianas generales absolutas sean puntos interiores, por lo que se podrían eliminar algunos arcos interiores. Primero obsérvese que, un punto no interior de un arco dirigido puede ser una mediana general absoluta. Esto se sigue porque el vértice terminal de un arco dirigido es un mejor candidato para una mediana general absoluta que cualquier punto interior de este arco dirigido. Además,

Teorema 4.3 Un punto no interior de un arco no dirigido (r, s) es una mediana general absoluta si

$$|SVA(r) - SVA(s)| > \frac{1}{2} [d(r, s) + d(s, r)]. \quad (4.20)$$

Demostración. La distancia total del vértice r a todos los arcos es

$$SVA(r) = d'(r, (r, s)) + \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(r, (x, y)). \quad (4.21)$$

Igualmente,

$$SVA(s) = d'(s, (r, s)) + \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(s, (x, y)). \quad (4.22)$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $SVA(r) \leq SVA(s)$

Ya que $d'(f - (r, s), (t, u))$ es cóncava para todo $(r, s) \neq (t, u)$ se sigue que: es

$$\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(f - (r, s), (x, y))$$

está debajo de la línea recta que conecta los puntos extremos, los cuales son

$$\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(0 - (r, s), (x, y)) = \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(r, (x, y))$$

y

$$\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(1 - (r, s), (x, y)) = \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(s, (x, y))$$

Por lo que, cuando $f = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d' \left(\frac{1}{2} - (r, s), (x, y) \right) \geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} [d'(s, (x, y)) + d'(r, (x, y))].$$

Ahora como f se incrementa de cero a $\frac{1}{2}$, la cantidad

$$\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(f - (r, s), (x, y))$$

se incrementa en al menos $\frac{1}{2} \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} [d'(s, (x, y)) - d'(r, (x, y))]$.

Después examinemos $d'(f - (r, s), (r, s))$. Esta función toma su valor mínimo en $f = \frac{1}{2}$ y está dado por $d'(\frac{1}{2} - (r, s), (r, s))$; ver la ecuación (4.8) y la Figura ???. Como f va de cero a $\frac{1}{2}$, $d'(f - (r, s), (r, s))$ experimenta una disminución igual a $d'(r, (r, s)) - \frac{1}{2}a(r, s)$.

Si $\sum_{(x,y)} d'(f - (r, s), (x, y)) < SV A(r)$ para algún valor de f , $0 < f < 1$, entonces es necesario que el decremento máximo de $d'(f - (r, s), (r, s))$ en $f = \frac{1}{2}$ sea igual o exceda al incremento mínimo de $\sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} d'(f - (r, s), (x, y))$ en $f = \frac{1}{2}$. En otras palabras si un punto interior del arco (r, s) es un mejor candidato que el vértice r para ser mediana general absoluta, entonces éste necesariamente cumple

$$d'(r, (r, s)) - \frac{1}{2}a(r, s) \geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y):(x,y) \neq (r,s)} [d'(s, (x, y)) - d'(r, (x, y))]. \quad (4.23)$$

Equivalentemente, es necesario que

$$d'(s, (r, s)) + d'(r, (r, s)) - a(r, s) \geq SV A(s) - SV A(r). \quad (4.24)$$

Sustituyendo la ecuación (4.3) en la desigualdad (4.19), tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[d(s, r) + a(r, s) + \frac{1}{2} [d(r, s) + a(r, s)] - a(r, s) \right] \\ & \geq SVA(s) - SVA(r) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Simplificando la desigualdad (4.19), tenemos

$$\frac{1}{2} [d(r, s) + d(s, r)] \geq SVA(r) - SVA(s) \quad (4.26)$$

Si inicialmente se hubiera supuesto $SVA(s) \leq SVA(r)$, entonces la desigualdad (4.20) quedaría como

$$\frac{1}{2} [d(r, s) + d(s, r)] \geq SVA(r) - SVA(s) \quad (4.27)$$

Combinando las desigualdades (4.26) y (4.27) tenemos la desigualdad (4.14). ■

El teorema anterior es útil porque proporciona una manera fácil de eliminar arcos en la búsqueda de una mediana general absoluta sin hacer una extensa consideración de arcos. Para comprobar la condición (4.20), solamente se necesitan la matriz D de distancias *vértice-vértice*, y la matriz de distancias *vértice-arco* D' .

Si no todos los arcos son eliminados por el Teorema 4.3, también podemos seguir eliminando arcos si se cumple lo siguiente:

Lema 4.1 Para cualquier punto interior f sobre cualquier arco (r, s)

$$SPA(f - (r, s)) \geq SVA(r) - \frac{1}{2}d(r, s) \quad (4.28)$$

y

$$SPA(f - (r, s)) \geq SVA(s) - \frac{1}{2}d(s, r). \quad (4.29)$$

Demostración. De la demostración del teorema (4.3), sabemos que f se incrementa de cero a $\frac{1}{2}$ la distancia $d'(f - (r, s), (r, s))$ se decrementa por $d'(r, (r, s)) - \frac{1}{2}a(r, s)$, lo cual por la ecuación (4.3) es igual a $\frac{1}{2}d(r, s)$. De esta manera la condición (4.28) se cumple.

Si f decrece de 1 a $\frac{1}{2}$, entonces $d'(f - (r, s), (r, s))$ decrece en $d'(s, (r, s)) - \frac{1}{2}a(r, s) = \frac{1}{2}d(s, r)$ y tenemos la condición (4.29).

Este lema puede ser usado para generar una cota inferior de la distancia total para cada punto interior sobre cualquier arco que no haya sido eliminado por el teorema 4.3. Cada uno de los límites inferiores del arco, pueden ser comparados con la menor distancia total del vértice, denotada como $\min_i \{SVA(i)\}$. Si el límite inferior para un arco es creado por la menor distancia total de un vértice, este arco puede ser eliminado.

Cada arco (r, s) no eliminado puede ser examinado completamente evaluando $SPA(f - (r, s))$ para toda f . Esperamos que el mejor candidato para ser mediana general absoluta en el interior del arco examinado (r, s) tendrá una distancia total tal que será menor que el límite inferior de cualquier arco no examinado. En este caso, este arco no examinado podría también ser eliminado.

Finalmente, todos los arcos deben eliminarse o ser completamente examinados. Una mediana general absoluta es seleccionada del conjunto de vértices y candidatos a puntos interiores. ■

Ejemplo 12 *Supongamos que un Estado ha decidido construir una oficina postal para que la distancia total de la oficina postal a todos los municipios sea minimizada, como se muestra en la Figura 4.6. En este caso, localizar la oficina postal en el punto medio del arco $(2, 5)$ daría una distancia total de $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$ unidades desde el punto medio del arco $(2, 5)$ a los vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6 respectivamente.*

Ejemplo 13 *Encontrar una mediana general absoluta para una red que tiene la siguiente matriz de distancias vértice-vértice.*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el orden de los arcos es como sigue:

1. $(1,2)$
2. $(2,3)$

3. (3,4)

4. (4,5)

5. (5,6)

6. (2,5)

De la ecuación (4.3) la matriz de distancias vértice-arco D' puede ser calculada, obteniendo:

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto,

$$SVA(1) = 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$$

$$SVA(2) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$$

$$SVA(3) = 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 11$$

$$SVA(4) = 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 = 11$$

$$SVA(5) = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$$

$$SVA(6) = 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 14$$

en consecuencia los vértices 2 y 5 son los mejores vértices candidatos para ser mediana general absoluta, ya que cada uno de estos vértices tiene una distancia total a todos los arcos igual a 9 unidades.

Después, tratemos de eliminar los puntos interiores de algunos arcos aplicando la condición (4.20) del teorema 4.2. Observe que en esta gráfica todos los arcos son no dirigidos, por lo que el lado derecho de la condición (4.20), viene dada por $d(r, s)$.

1. El arco (1, 2) es eliminado porque

$$|SVA(1) - SVA(2)| = |14 - 9| = 5 > 1 = d(1, 2)$$
2. El arco (2, 3) es eliminado porque

$$|SVA(2) - SVA(3)| = |9 - 11| = 2 > 1 = d(2, 3)$$
3. El arco (3, 4) no es eliminado porque

$$|SVA(3) - SVA(4)| = |11 - 11| = 0 < 1 = d(3, 4)$$
4. El arco (4, 5) es eliminado porque

$$|SVA(4) - SVA(5)| = |11 - 9| = 2 > 1 = d(4, 5)$$
5. El arco (5, 6) es eliminado porque

$$|SVA(5) - SVA(6)| = |9 - 14| = 5 > 1 = d(5, 6)$$
6. El arco (2, 5) no es eliminado porque

$$|SVA(2) - SVA(5)| = |9 - 9| = 0 < 1 = d(2, 5)$$

Por lo que, solamente los arcos (3, 4) y (2, 5) son considerados. Después, aplicamos las condiciones (4.28) y (4.29) del Lema 4.1 para ver si es posible eliminar cualquier otro arco.

1. El arco (3, 4) puede ser eliminado por la condición (4.28), ya que

$$|SPA(f - (3, 4))| \geq SVA(3) - \frac{1}{2}d(3, 4) = 11 - \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$

Lo cual es mayor a las unidades que se obtienen seleccionando un vértice como mediana general absoluta.

2. El arco (2, 5) puede ser eliminado por la condición ((4.28) y (4.29) ya que

$$SPA(f - (2, 5)) \geq SPA(2) - \frac{1}{2}d(2, 5) = 9 - \frac{1}{2} < 9$$

y

$$SPA(f - (2, 5)) \geq SPA(5) - \frac{1}{2}d(5, 2) = 9 - \frac{1}{2} < 9$$

Por lo que solamente es considerado el arco $(2, 5)$. Las ecuaciones (4.5) y (4.8) pueden ser utilizadas para general las distancias punto arco para el arco $(2, 5)$:

$$\begin{aligned}d'(f - (2, 5), (1, 2)) &= 1 + f \\d'(f - (2, 5), (2, 3)) &= 1 + f \\d'(f - (2, 5), (3, 4)) &= 2 \\d'(f - (2, 5), (4, 5)) &= 1 + (1 - f) \\d'(f - (2, 5), (5, 6)) &= 1 + (1 - f) \\d'(f - (2, 5), (2, 5)) &= \text{máx}\{f, (1 - f)\}\end{aligned}$$

Sumando estas distancias *punto-arco* obtenemos:

$$\begin{aligned}SPA(f - (2, 5)) &= (1 + f) + (1 + f) + 2 + (2 - f) + (2 - f) + \text{máx}\{f, (1 - f)\} \\&= 8 + \text{máx}\{f, (1 - f)\}\end{aligned}$$

ya que $\text{mín}_{0 \leq f \leq 1} \text{máx}\{f, (1 - f)\}$ ocurre en $f = \frac{1}{2}$, el mejor candidato para ser mediana absoluta es el $\frac{1}{2}$ -*punto* sobre el arco $(2, 5)$ ya que $SPA(\frac{1}{2} - (2, 5)) = 8\frac{1}{2}$. Pues la mejor distancia posible de un vértice es 9, concluimos que el $\frac{1}{2}$ -*punto* del arco $(2, 5)$ es la mediana general absoluta de ésta gráfica con una distancia total a todos los arcos igual a $8\frac{1}{2}$.

Este teorema es útil porque proporciona una manera fácil de eliminar arcos al momento de estar buscando una mediana general absoluta cuando existe una gran cantidad de arcos.

4.4.1. El problema de la p -mediana

Para el problema de la p -*mediana* se consideran p depósitos en una red no orientada $G = (V, A)$, donde V , denota el conjunto de n vértices (puntos demandantes) de la red y A es el conjunto de aristas de la red. Dentro de esta red, se considera la instalación de p centros de servicio. Los puntos o elementos de V son puntos de demanda y el peso (demanda) de estos vértices está dado por $w_i > 0$ para el nodo i . Denotemos por $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ el conjunto de todas las instalaciones, denotemos también por $d(i, X_p)$ la distancia más pequeña entre el nodo i y el conjunto de puntos x_1, x_2, \dots, x_p los cuales contienen las instalaciones. Y denotemos por a_i el número de nodos que demandan el

servicio del nodo i . La intensidad de la demanda w_i correspondiente al servicio del nodo i es:

$$w_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \forall i$$

Es claro que,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Luego, la distancia promedio entre las instalaciones y los usuarios en esta red es:

$$L(X_p) = \sum_{i=1}^n w_i d(i, X_p) \quad (4.30)$$

Es claro que, estamos intentando localizar instalaciones en la red para minimizar la distancia promedio $L(X_p)$ entre las instalaciones y los usuarios. Y también que la demanda w_i es satisfecha por las instalaciones más cercanas. Por lo que, $w_i d(i, X_p)$ indica el costo total asociado (de transportar), por tener una determinada demanda w_i en el nodo i y ser satisfecha por su instalación más cercana en el candidato fijo X_p .

$L(X_p)$ representa el costo total de transportación que satisfacen las demandas si la instalación es localizada en X_p .

El conjunto X_p^* de puntos en la red G es el conjunto de p - medianas de la red si:

$$L(X_p^*) \leq L(X_p) \quad \forall X_p \in G.$$

Hakimi demostró que hay al menos un conjunto de p - medianas en los nodos de la red G , lo que significa que las localizaciones óptimas para las p instalaciones en la red deben ser encontradas exclusivamente en los nodos de la red. Este hecho facilita significativamente el procedimiento para encontrar las p - medianas, ya que solamente las localizaciones encontradas en los nodos deben ser examinadas en nuestra búsqueda de medianas.

El teorema de la p – mediana, no sólo enuncia que una p – mediana siempre puede encontrarse de tal manera que sólo consista de vértices sino también establece que si el costo de satisfacer la demanda de los vértices es $f_i(d(i, X_p))$, en lugar de $w_i \cdot d(i, X_p)$, con tal de que $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función cóncava no decreciente para todo $i = 1, \dots, n$ (\mathbb{R}^+ denota el conjunto de números reales positivos). En este caso, la función objetivo para el problema de la p – mediana es:

$$L(X_p) = \sum_{i=1}^n f_i d(i, X_p) \quad (4.31)$$

El algoritmo para determinar la mediana de una red se aborda en la siguiente sección.

4.5. Algoritmos de solución

Los problemas de Optimización, particularmente los problemas de Localización de instalaciones son problemas que surgen de situaciones de aplicación práctica, donde se busca determinar cual es la ubicación óptima de un centro de servicio para cumplir con una cierta función objetivo. Aunque teóricamente es posible enumerar y analizar cada una de las soluciones factibles y evaluar la función objetivo en cada uno de estos puntos, en la práctica esto es imposible debido a que el número de combinaciones posibles crece exponencialmente con el tamaño del problema, por ello la importancia de contar con algoritmos eficientes que requieran un tiempo de cómputo razonable y que no requieran de la enumeración explícita de cada una de las soluciones factibles de problema. Pues, por ejemplo, para el problema de la p – mediana ésta puede encontrarse a través de una búsqueda finita de todos los casos posibles de n en p vértices, esto es, $\binom{n}{p}$. Esto aparentemente es una tarea fácil, pero si p es un número relativamente grande ($p > 5$) esto se complica demasiado. Más aún, el mejor algoritmo conocido para el problema de la p – mediana y el p – centro en una red $G = (V, A)$ con n vértices y m aristas tiene una complejidad en el peor de los casos de $O(n^{p+1})$ y $O(m^p n^p (\log n)^2)$ en el mejor de los casos, respectivamente.

Si p es una variable de entrada independiente, es decir p puede crecer con n , entonces el problema del p – centro y la p – mediana son NP-hard. Por lo que es muy improbable que un algoritmo se encuentre con tiempos de ejecución de grado polinómico n, m y p .

Este hecho ha motivado el desarrollo y auge de métodos Heurísticos en donde el principal objetivo es buscar solución de calidad (subóptimas) en tiempos de cómputo razonable, pues un tiempo de cómputo elevado representa gastos elevados.

Definición 4.18 *Se llama algoritmo heurístico a cualquier algoritmo que con poco esfuerzo computacional proporciona una solución factible cuyo valor objetivo es cercano al valor objetivo óptimo del problema original. Las soluciones obtenidas a través de un algoritmo heurístico se determinan soluciones heurísticas.*

Dado $\varepsilon > 0$, se llama algoritmo ε -aproximado a cualquier heurístico que produzca una solución cuyo costo \bar{z} , respecto al costo z^ de una solución óptima cumpla $|\bar{z} - z^*| < \varepsilon |z^*|$.*

Definición 4.19 *Un algoritmo se dice polinomial si su orden de crecimiento está acotado por un polinomio en n , es decir, es del tipo $O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Definición 4.20 *Un algoritmo se dice de aproximación totalmente polinomial si $\forall \varepsilon > 0$, es un algoritmo ε -aproximado cuya complejidad algorítmica está acotada por un polinomio en el tamaño de los datos de la distancia y $1/\varepsilon$.*

4.5.1. Algoritmo para determinar el centro de una red

Un algoritmo para determinar un centro en una gráfica G de tipo árbol sin peso propuesto por Rosen (2000):

Paso 1 Encontrar el camino P más largo en G .

Paso 2 Sea u_1 y u_2 los vértices finales de P , encuentre el punto medio de este camino: es decir, el punto x tal que $d(x, u_1) = d(x, u_2)$

4.5.2. Algoritmo para determinar la mediana de una red.

El algoritmo para determinar una mediana en una gráfica G no orientada está compuesto por los siguientes pasos:

- Paso 1** Calcular la distancia mínima d_{ij} entre el par de nodos i, j en la red G y mostrarlos en la matriz de distancias más cortas D .
- Paso 2** Multiplicar la j -ésima columna del matriz D por el número de la demanda de servicio del nodo i , es decir, por a_i . El elemento $(a_i d_{ij})$ es la "distancia recorrida" por los usuarios del nodo j , los cuales son servidos por el nodo i .
- Paso 3** Dividir los elementos de la matriz $(a_i d_{ij})$ por $\sum_{j=1}^n a_j$. Así, una nueva matriz es obtenida y sus elementos son $u_i d_{ij}$. Además, los elementos de todas las filas i de la matriz son $(u_j d_{ij})$. La expresión $\sum_{j=1}^n u_j d_{ij}$ es la distancia promedio cubierta por los usuarios cuando la instalación esta ubicada en el nodo i .
- Paso 4** El nodo cuya columna correspondiente es la mínima distancia promedio recorrida por los usuarios es la localización de la mediana.

Ejemplo 14 Considereremos la red de transporte mostrada en la Figura 4.12. Los nodos en la red de transporte están denotados por A, B, C, \dots, H . Diariamente la demanda de servicio está dada en paréntesis para cada nodo. Todas las longitudes de las aristas son también mostradas. El problema es como sigue: ¿Dónde debemos localizar la instalación de servicio para que brinde servicio a todos los usuarios (localizados en los nodos) de tal manera que la distancia promedio sea minimizada?

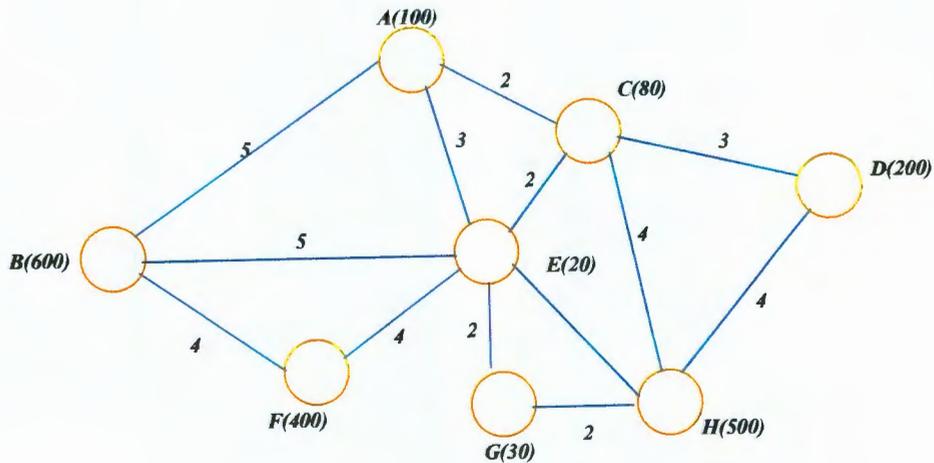


Figura 4.12: Red de transporte en la cual se encuentra una mediana

Como consecuencia del teorema 4.1, sabemos que la mediana sólo puede estar ubicada en los vértices de la red, por lo tanto, podemos concluir que hay 8 puntos candidatos a ser mediana, es decir, donde la instalación puede ser localizada. Dichos puntos son los nodos: A, B, C, \dots, H .

Usando el algoritmo de Floy o Dantzig calculamos las rutas mínimas d_{ij} entre todos los pares de nodos (i, j) en la red de transporte. Estas distancias mínimas están dadas en la siguiente matriz D .

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 5 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 10 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 3 & 0 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 9 & 4 & 0 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 6 & 0 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & 4 & 3 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso es calcular la expresión $a_j \cdot d(i, j)$ multiplicando cada columna de la matriz de rutas mínimas por el número de la demanda de servicio del nodo j . La matriz $[a_j D]$, la cual es como sigue:

$$[a_j D] = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 160 & 1000 & 60 & 2800 & 150 & 3000 \\ 500 & 0 & 560 & 2000 & 100 & 1600 & 210 & 40000 \\ 200 & 4200 & 0 & 600 & 40 & 2400 & 120 & 2000 \\ 500 & 6000 & 240 & 0 & 100 & 3600 & 180 & 2000 \\ 300 & 3000 & 160 & 1000 & 0 & 1600 & 60 & 1500 \\ 700 & 2400 & 480 & 1800 & 80 & 0 & 180 & 3500 \\ 500 & 4200 & 320 & 1200 & 40 & 2400 & 0 & 1000 \\ 600 & 4800 & 320 & 800 & 60 & 2800 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

Suponemos además, que las filas de matriz anterior da el número de kilómetros que viajan los usuarios si la instalación es ubicada en el nodo donde se comienza a sumar la fila.

Es claro que, la instalación debe estar localizada en el nodo el cual para el cual se obtiene la suma más pequeña. Dividiendo la suma total por el número total de usuarios en la red de transporte, en este caso 1930, damos el promedio de las distancias cubiertas por uno de los usuarios para satisfacer su demanda en dicha instalación. La siguiente tabla da el número total de kilómetros viajados y el promedio de las distancias recorridas por cada usuario cuando la instalación está localizada en un nodo específico de la red:

Nodo donde se ubica la instalación	Núm de km recorridos	Promedio de distancia
A	10170	5,2
B	8970	4,6
C	9760	5,05
D	12620	6,5
E	7620	3,9
F	9140	4,7
G	9660	5
H	9440	4,8

De acuerdo a la tabla anterior, es claro que, la instalación deber ser localizada en el nodo E ya que la distancia promedio de 3,9 es menor que todas las otras distancias promedio.

Algoritmo para encontrar k medianas

Permitámonos ahora ver la red de transporte mostrada en la Figura 4.12. Determina la localización de dos medianas para esta red. Por la teoría de Hakimi (Teorema 4.1), es claro que, la mediana debe ser localizada en el nodo 2. Ahora debemos ubicar dos medianas en la red, y dichas medianas pueden ser localizadas en cualquiera de los 8 vértices que conforman la red. Luego, tenemos $\binom{8}{2}$ posibilidades para localizar las dos medianas. Supongamos que todos los usuarios siempre usarán los servicios de la instalación más cercana. Por lo que, por ejemplo, el número de kilómetros recorridos por los usuarios del nodo D cuando las instalaciones están localizadas en los nodos A y C , será:

$$\text{mín} [a_D \cdot d_{A,D}; a_D \cdot d_{C,D}] = \text{mín} [1000, 600]$$

Basados en la matriz $(a_j D)$ el número total de kilómetros viajados por los usuarios puede ser calculada para cualquiera de las posibilidades.

El número total de kilómetros viajados para cada una de las 28 posibilidades de las localizaciones de los dos depósitos está dada por la siguiente tabla:

No. Posibilidad	Ubicación de los depósitos	No. Km
1	<i>A, B</i>	5970
2	<i>A, C</i>	8160
3	<i>A, D</i>	8170
4	<i>A, E</i>	7380
5	<i>A, F</i>	6770
6	<i>A, G</i>	7600
7	<i>A, H</i>	6880
8	<i>B, C</i>	4560
9	<i>B, D</i>	4620
10	<i>B, E</i>	4620
11	<i>B, F</i>	6530
12	<i>B, G</i>	4660
13	<i>B, H</i>	3340
14	<i>C, P</i>	8960
15	<i>C, E</i>	6960
16	<i>C, F</i>	5560
17	<i>C, G</i>	8640
18	<i>C, H</i>	7500
19	<i>D, E</i>	6620
20	<i>D, F</i>	5400
21	<i>D, G</i>	8380
22	<i>D, H</i>	8460
23	<i>E, F</i>	5420
24	<i>E, G</i>	7100
25	<i>E, H</i>	5920
26	<i>F, G</i>	5460
27	<i>F, H</i>	4240
28	<i>G, H</i>	8260

Podemos observar que la menor de las distancias viajadas ocurre cuando los depósitos son localizados en el par de nodos *B, H*.

En este caso determinar las dos medianas fue algo muy fácil, sin embargo, con más nodos la dificultad de los cálculos puede surgir cuando este procedimiento es usado. Por

ello se ha determinado un algoritmo especial para determinar un gran número de medianas. Dicho algoritmo es dado en el libro de Larson y Odonis[15].

El algoritmo comienza con encontrar la localización de una mediana, y posteriormente una nueva mediana es encontrada a cada paso adicional. El algoritmo termina cuando todas las k medianas han sido encontradas. Debido a la Teoría de Hakimi, la localización de las k medianas puede ser solamente sobre los nodos de la red. Así, denotemos por S el conjunto de nodos donde las medianas son localizadas (temporalmente) y por m el número de nodos en el conjunto S . Mientras se busca la localización de las k medianas, m crece de 1 a k . El siguiente **algoritmo heurístico** está compuesto de los siguientes pasos:

- Paso 1** Dado $m = 1$. Encuentra la localización para una mediana utilizando el algoritmo apropiado. Dado que esta mediana está localizada en el nodo i . Esto significa que $S = (i)$.
- Paso 2** La siguiente mediana está localizada en un nodo del conjunto N, S , por lo que se alcanza una gran mejora a la función objetivo. Ahora tenemos $m = m + 1$.
- Paso 3** Ahora intentemos mejorar el valor de la función objetivo por una sustitución sistemática uno a uno de los nodos en el conjunto S por uno de los nodos del conjunto $N - S$, cada vez con la intención de tener un mejor lugar y, cuando a la función objetivo no se le puede hacer ninguna mejora entonces pasamos al paso 4.
- Paso 4** Si $m = k$ el algoritmo termina. Si no ir al paso 2.

Ejemplo 15 Usar el algoritmo anterior para encontrar dos medianas en la red de transporte de la Figura 4.13

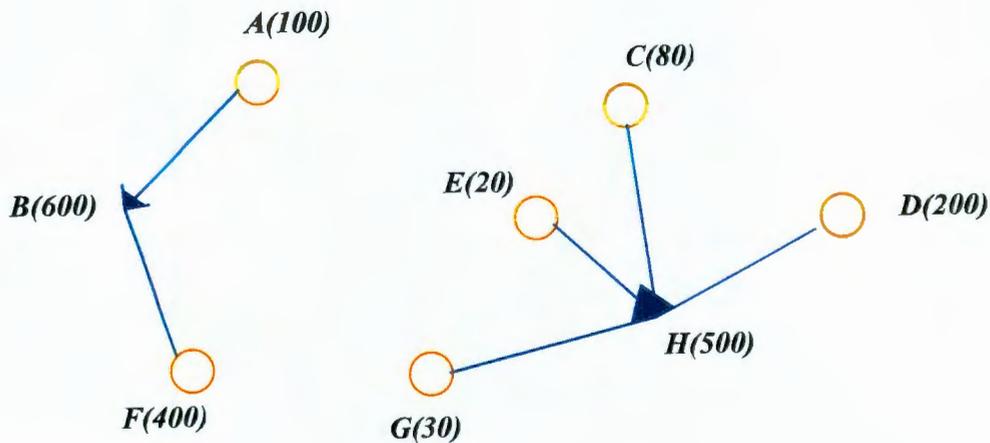


Figura 4.13: Depósitos B y H.

El primer paso es determinar la localización óptima de una mediana, dicha ubicación es en el nodo E. Por esta razón $S = (E)$. En el paso 2 debemos comparar el valor de la función objetivo para el caso cuando la mediana está localizada en los siguientes nodos:

$A, E, B, E, D, E, D, E, E, F, E, G$ y E, H .

Basados en los valores de los elementos de la matriz $(u_j \cdot D)$ damos a la función objetivo los siguientes valores: 7380, 4620, 6960, 5420, 7100 y 5920.

Esto significa que ahora $S = (B, E)$. Ahora comparamos esta nueva ubicación en el nodo B, con lo cual obtenemos:

$A, B, B, C, B, D, B, F, B, G, B, H$.

Ya que el valor de la función objetivo es 3340 para la solución $S = (B, H)$. Esta es ahora la nueva solución.

La función objetivo para esta solución es ahora comparada con los valores de la solución siguiente:

$A, H, C, H, D, H, E, H, F, H, G, H.$

Después de estas comparaciones no hay mejoras en la función objetivo. La solución B, H es comparada con las soluciones $A, B, B, C, B, D, B, E, B, F, B, G$. No puede hacerse ninguna mejora a la función objetivo después de cualquiera de éstas comparaciones. Dado $m = 2 = k$, hemos completado el algoritmo con la solución $S = (B, H)$.

Para redes orientadas se debe tener claro si lo más deseable es minimizar la distancia del usuario a la instalación, de la instalación al usuario o si es minimizar la distancia total del usuario a la instalación y de regreso.

Capítulo 5

Estudio de caso en el marco de la Teoría de Localización

Para la determinación de la movilidad regional de San Juan del Río, en el estudio realizado en el IMT se identificaron 42 localidades que generan y atraen viajes de los usuarios, clasificados por los siguientes motivos de viaje: trabajo, estudio, compras, servicios de salud, paseo y otros.

En la Figura 5.1 se ilustra los diez principales orígenes y los diez principales destinos de estos viajes.

La importancia que tienen los distintos puntos de origen en la generación de viajes se cuantificó con la frecuencia relativa de viaje por día (conviene explicar cómo se calculó) de los movimientos que se dirigen desde las comunidades hacia la cabecera municipal de San Juan del Río.

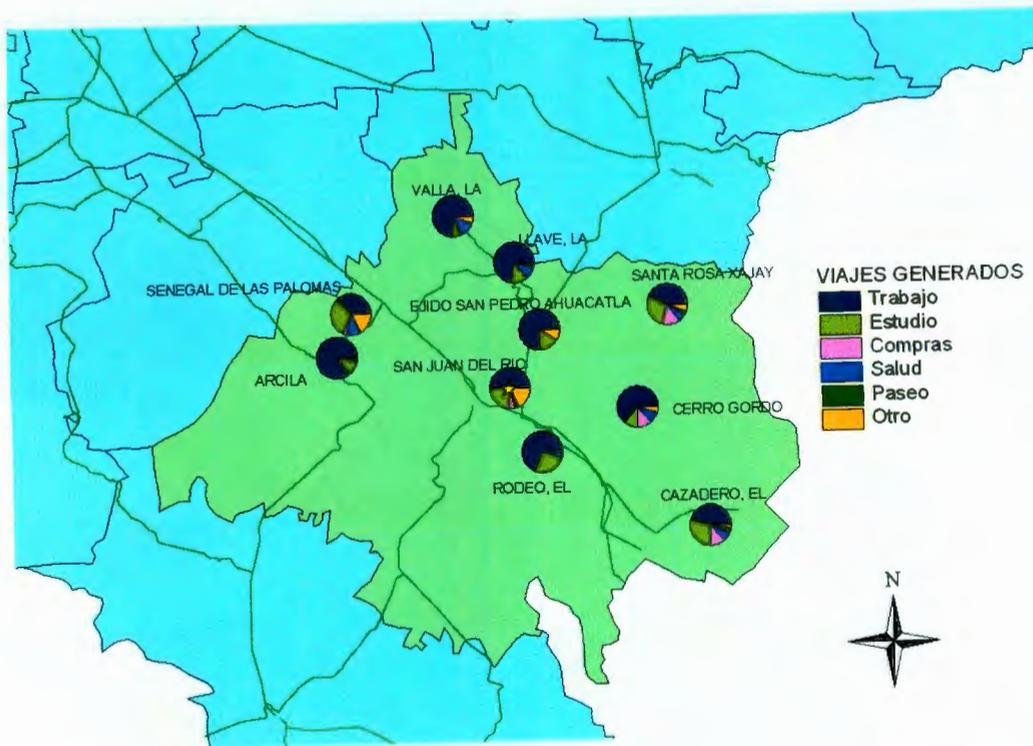
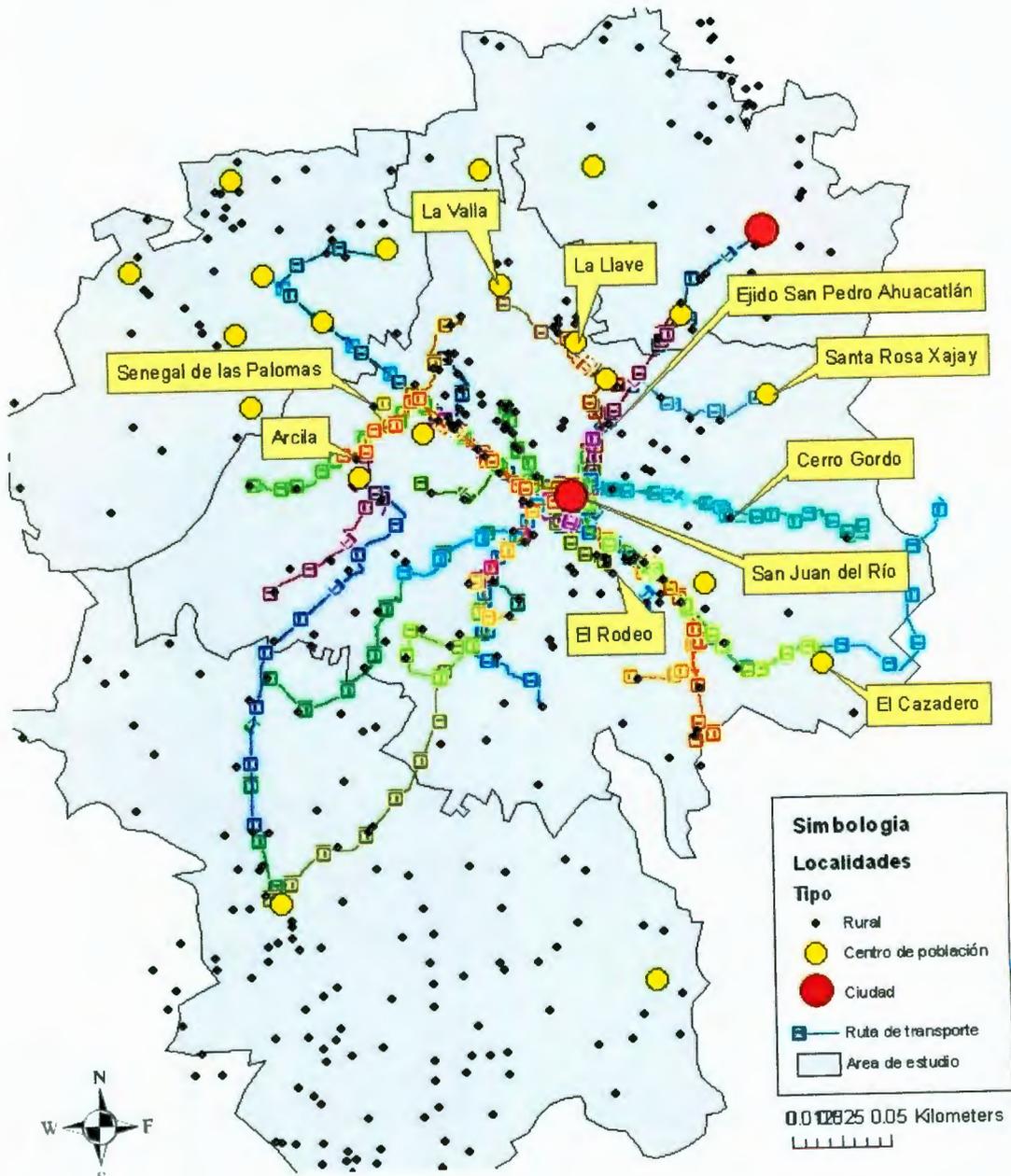


Figura 5.1: Motivos de viajes en los diez primeros orígenes



Diez principales orígenes y destinos

La importancia que tienen los distintos puntos de origen en la generación de viajes se cuantificó con la frecuencia relativa de viaje por día de los movimientos que se dirigen desde las comunidades hacia la cabecera municipal de San Juan del Río.

Para el cálculo de la frecuencia relativa se consideró lo siguiente: de las encuestas que se realizaron se contabilizó los viajes que generaba cada localidad, posteriormente el total de viajes de cada comunidad se dividió entre el total de viajes generados. Para contar los viajes se utilizaron las bases de datos de encuesta O-D, 2007 proporcionadas por el Instituto Mexicano del Transporte.

Dada la naturaleza multicriterio del problema planteado en el estudio de San Juan del Río, se concluyó, que el valor de los pesos de los nodos era la frecuencia relativa de viaje por día desde las diferentes comunidades hacia la cabecera municipal. La Tabla 5.1, muestra dicha información:

Si enumeramos las comunidades del vector de frecuencias anterior, tendríamos 42 nodos, por lo que en una representación gráfica tendríamos 42 nodos donde no todos los nodos están conectados, en la Figura 5.2 se observa un mapa de la representación gráfica del

	ORIGEN	FRECUENCIA RELATIVA
1	AMEALCO x Santa Lucía	1.22
2	AMEALCO x GALINDO	0.26
3	ARCILA	8.00
4	BUENAVISTA	0.52
5	CAZADERO	4.35
6	CERRO GORDO	4.61
7	COTO, EL	0.78
8	CUADRILLA DE EN MEDIO	3.91
9	DOLORES GODOY	0.09
10	ESTANCIA	2.35
11	JAZMIN	3.39
12	LA LLAVE	11.30
13	LA VALLA	7.65
14	OJO DE AGUA	2.87
15	ORGANAL, EL	3.39
16	PALOMAS	0.09
17	PARAISO	0.00
18	PERALES 1	0.52
19	PUERTA DE PALMILLAS	0.35
20	RODEO, EL	9.04
21	ROSARIO, EL	1.13
22	SABINO, EL	0.96
23	SAN ANTONIO	0.35
24	SAN CLEMENTE	0.61
25	SAN GERMAN	1.22
26	SAN ILDEFONSO	0.00
27	SAN JUAN DEL RIO	8.78
28	SAN JUAN Tx	0.09
29	SAN MIGUEL GALINDO	0.35
30	SAN NICOLAS	3.91
31	SAN SEBASTIAN BARRANCAS	2.96
32	SANTA BARBARA	3.39
33	SANTA ISABEL	0.00
34	SANTA LUCIA	1.74
35	SANTA MATILDE	3.04
36	SANTA ROSA XAJAY	3.30
37	SITIO, EL	0.17
38	SOLEDAD DEL RIO	0.09
39	TLAXCALILLA	0.52
40	TUNA MANZA	0.70
41	VAQUERIAS	0.00
42	VISTHA	2.00

Cuadro 5.1: Tabla de Frecuencia Relativa de las comunidades

problema.

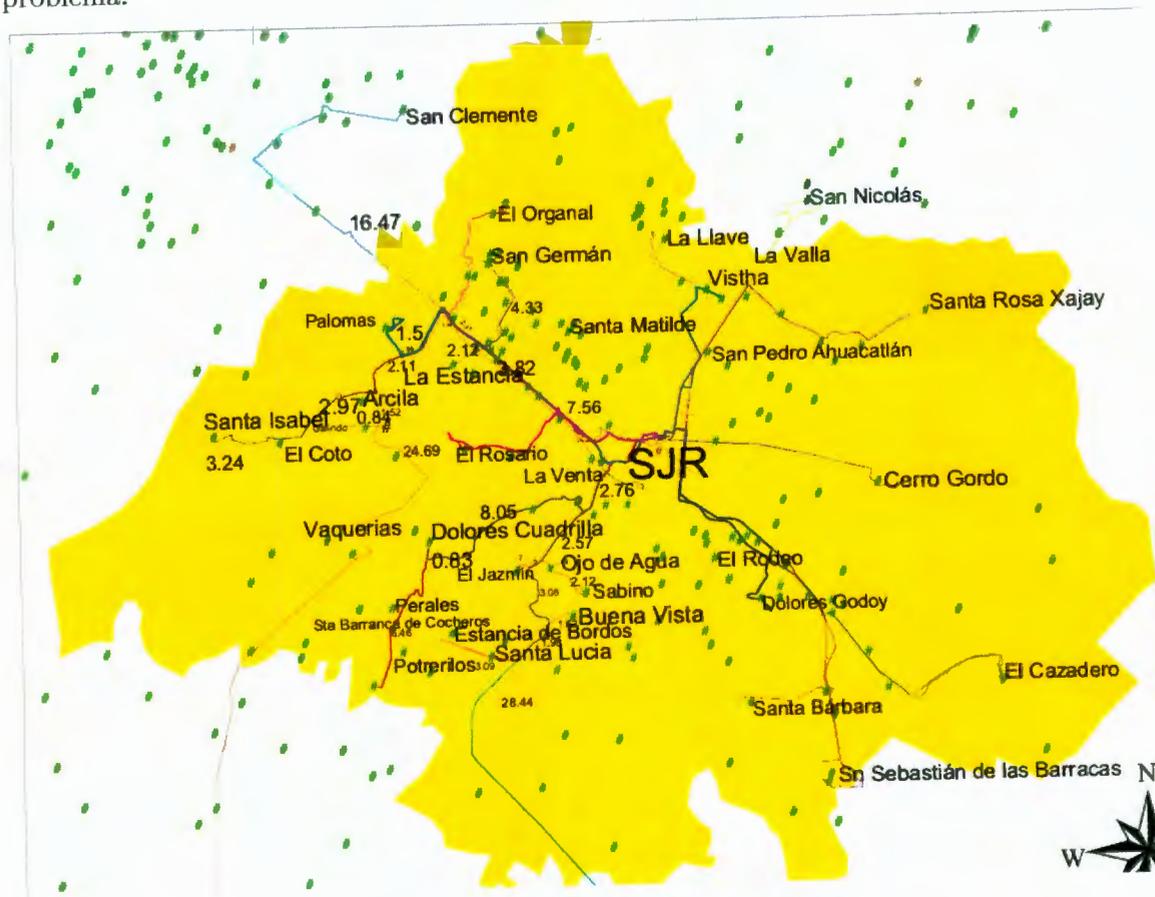


Figura 5.2: Representación gráfica del problema de localización de la terminal de San Juan del Río

Conociendo la gráfica anterior, se construye una matriz de 42×42 , donde cada elemento d_{ij} de la matriz D representa la distancia de la comunidad i a la comunidad j , donde $i, j = 1, 2, \dots, 42$, cuya matriz ya se había definido en el capítulo 2.

Por lo que podemos construir la matriz de rutas más cortas con ayuda del software Tora, el cual aplica el algoritmo de Floyd (Taha, 2004) [21] para determinar la que se muestra a continuación:

Matriz de rutas más cortas entre las comunidades de San Juan del Río

0.0	27.0	33.4	36.5	46.0	30.3	36.4	33.7	34.7	38.4	32.3	35.3	34.7	32.3	30.7	29.8	43.3	42.0	33.3	45.8	34.1	33.7	41.3	48.3
27.0	0.0	11.3	29.0	26.4	8.0	14.2	26.5	12.4	16.2	27.9	29.3	25.3	27.9	8.3	7.7	38.9	19.6	28.9	31.4	24.3	26.5	36.9	25.9
33.4	11.3	0.0	3.1	32.9	14.5	3.0	30.3	18.9	10.3	28.9	31.9	31.8	28.9	14.9	3.6	39.9	26.2	29.9	32.4	19.6	30.3	37.9	21.2
36.5	29.0	3.1	0.0	30.7	24.1	36.1	7.9	16.7	32.2	5.5	25.2	29.6	5.8	32.6	29.9	33.2	22.6	23.2	25.7	24.0	7.9	31.2	42.4
46.0	26.4	32.9	30.7	0.0	29.6	35.8	28.2	14.0	37.9	31.8	34.8	39.2	30.4	30.0	29.3	42.8	21.2	32.8	35.2	33.6	28.2	40.8	47.6
30.3	8.0	14.5	24.1	29.6	0.0	17.4	21.3	15.6	19.5	19.9	21.3	17.3	19.9	11.6	10.9	30.9	22.9	20.9	23.4	21.7	21.3	28.9	29.2
36.4	14.2	3.0	36.1	35.8	17.4	0.0	33.3	21.8	13.3	31.9	34.9	34.7	31.9	17.8	6.6	42.9	29.1	32.9	35.3	22.6	33.3	40.9	24.3
33.7	26.5	30.3	7.9	28.2	21.3	33.3	0.0	14.2	29.4	3.9	22.4	26.9	2.2	30.1	27.1	30.4	19.8	20.4	22.9	21.2	0.0	28.4	39.6
34.7	12.4	18.9	16.7	14.0	15.6	21.8	14.2	0.0	23.9	18.1	23.9	28.4	16.4	16.0	15.3	31.9	7.2	21.9	24.4	22.7	14.2	29.9	33.6
38.4	16.2	10.3	32.2	37.9	19.5	13.3	29.4	23.9	0.0	28.0	31.0	35.4	28.0	8.9	8.6	39.0	31.2	29.0	31.4	10.3	29.4	37.0	20.9
32.3	27.9	28.9	5.5	31.8	19.9	31.9	3.9	18.1	28.0	0.0	21.0	25.5	1.8	28.9	25.7	29.0	18.2	19.0	21.5	19.8	3.9	27.0	38.2
35.3	29.3	31.9	25.2	34.8	21.3	34.9	22.4	23.9	31.0	21.0	0.0	7.0	21.0	31.9	28.7	32.0	31.2	22.0	24.5	22.8	22.4	30.0	41.3
34.7	25.3	31.8	29.6	39.2	17.3	34.7	26.9	28.4	35.4	25.5	7.0	0.0	25.4	28.9	28.2	36.4	35.6	26.4	28.9	27.2	26.9	34.4	45.7
32.3	27.9	28.9	5.8	30.4	19.9	31.9	2.2	16.4	28.0	1.8	21.0	25.4	0.0	28.9	25.7	29.0	17.7	19.0	21.5	19.8	2.2	27.0	38.2
30.7	8.3	14.9	32.6	30.0	11.6	17.8	30.1	16.0	8.9	28.9	31.9	28.9	28.9	0.0	11.3	40.0	23.3	30.0	32.4	18.0	30.1	37.9	27.5
29.8	7.7	3.6	29.9	29.3	10.9	6.6	27.1	15.3	8.6	25.7	28.7	28.2	25.7	11.3	0.0	36.7	22.6	26.7	29.0	18.0	27.0	34.7	20.6
43.3	38.9	39.9	33.2	42.8	30.9	42.9	30.4	31.9	39.0	29.0	32.0	36.4	29.0	40.0	36.7	0.0	39.2	30.0	32.5	31.0	30.4	38.0	49.2
42.0	19.6	26.2	22.6	21.2	22.9	29.1	19.8	7.2	31.2	18.2	31.2	35.6	17.7	23.3	22.6	39.2	0.0	29.2	31.7	30.0	19.8	37.2	40.9
33.3	28.9	29.9	23.2	32.8	20.9	32.9	20.4	21.9	29.0	19.0	22.0	26.4	19.0	30.0	26.7	30.0	29.2	0.0	22.5	21.0	20.4	28.0	39.2
45.8	31.4	32.4	25.7	35.2	23.4	35.3	22.9	24.4	31.4	21.5	24.5	28.9	21.5	32.4	29.0	32.5	31.7	22.5	0.0	23.3	22.9	30.5	41.7
34.1	24.3	19.6	24.0	33.6	21.7	22.6	21.2	22.7	10.3	19.8	22.8	27.2	19.8	18.0	18.0	31.0	30.0	21.0	23.3	0.0	21.2	28.8	27.2
33.7	26.5	30.3	7.9	28.2	21.3	33.3	0.0	14.2	29.4	3.9	22.4	26.9	2.2	30.1	27.0	30.4	19.8	20.4	22.9	21.2	0.0	28.4	39.6
41.3	36.9	37.9	31.2	40.8	28.9	40.9	28.4	29.9	37.0	27.0	30.0	34.4	27.0	37.9	34.7	38.0	37.2	28.0	30.5	28.8	28.4	0.0	47.2
48.3	25.9	21.2	42.4	47.6	29.2	24.3	39.6	33.6	20.9	38.2	41.3	45.7	38.2	27.5	20.6	49.2	40.9	39.2	41.7	27.2	39.6	47.2	0.0
34.8	12.5	7.9	26.9	34.2	15.7	10.8	24.2	20.2	6.5	22.8	25.8	30.2	22.8	13.3	10.8	33.8	27.4	23.0	26.2	13.0	24.2	31.8	23.3
62.8	42.5	37.7	32.0	59.0	45.7	34.8	36.7	45.0	48.0	34.2	51.5	55.9	34.6	46.0	41.4	59.5	50.6	23.8	52.0	50.0	36.7	57.5	59.0
23.3	18.9	19.9	13.2	22.8	10.9	22.9	10.4	11.9	19.0	9.0	12.0	16.4	9.0	20.0	16.7	20.0	19.2	49.5	12.5	10.8	10.4	18.0	29.2
44.3	39.4	40.9	34.1	43.7	31.9	43.8	31.4	32.9	39.9	30.0	33.0	37.4	29.9	40.9	37.7	41.0	40.1	10.0	33.4	31.8	31.4	39.0	50.0
26.7	2.4	8.9	26.7	24.0	5.6	11.8	24.2	10.0	13.9	25.5	26.9	22.9	25.5	6.0	5.3	36.5	17.2	31.0	29.0	22.0	24.2	34.5	23.6
37.3	32.9	33.9	27.2	36.4	24.9	36.9	24.4	25.9	33.0	23.0	26.0	30.5	23.0	33.9	30.7	34.0	33.2	26.5	26.5	25.0	24.4	32.0	43.2
45.8	28.7	35.3	33.0	19.7	32.0	38.2	30.5	16.3	40.2	31.5	34.5	38.9	31.5	32.2	31.7	42.5	23.6	24.0	34.9	33.3	30.5	40.5	50.0
42.7	26.4	33.0	30.7	17.3	29.7	35.9	28.2	14.0	37.9	28.4	31.4	35.9	28.4	30.0	29.4	39.4	21.3	32.5	32.0	30.2	28.2	37.4	47.7
33.3	10.9	6.2	35.2	35.4	14.2	3.2	32.7	19.0	16.5	33.0	35.5	31.5	33.0	14.5	9.8	44.0	25.9	29.4	36.5	25.8	32.7	42.0	27.4
40.5	35.7	37.1	6.7	37.3	28.1	40.1	11.4	23.3	36.2	8.2	29.3	36.7	9.2	37.1	34.0	37.2	26.4	34.0	29.7	28.0	11.3	35.2	46.5
34.5	30.0	31.1	24.4	34.0	22.1	34.0	21.6	23.1	30.2	20.2	23.2	27.7	20.2	31.1	27.9	31.2	30.4	27.0	23.7	22.0	21.6	29.2	40.4
38.7	34.3	35.3	28.6	38.1	26.3	38.2	25.8	27.3	34.3	24.4	20.7	27.7	24.3	35.3	32.0	35.4	34.5	21.0	27.8	26.2	25.8	33.4	44.6
42.5	21.0	27.5	32.4	42.0	13.0	30.4	20.6	28.6	32.5	28.2	31.2	30.3	28.2	24.6	23.9	39.2	35.9	25.4	31.7	30.0	29.6	37.2	42.2
24.3	19.9	20.9	14.2	23.8	11.9	23.9	11.4	12.9	20.0	10.0	13.0	17.4	10.0	21.0	17.7	21.0	20.2	29.2	13.5	11.8	11.4	19.0	30.2
60.0	55.7	56.7	50.0	59.5	47.7	59.7	47.2	48.7	55.8	45.8	48.8	52.2	45.8	57.0	53.5	56.8	56.0	11.0	49.2	47.6	47.2	54.8	66.0
35.9	31.5	32.5	16.1	35.3	23.5	35.5	14.5	24.5	31.6	10.6	24.6	29.0	12.4	32.5	29.3	32.6	28.8	46.8	25.0	23.4	14.5	30.6	41.8
50.5	46.0	47.1	40.4	49.9	38.1	50.0	37.6	39.0	46.2	36.2	39.2	43.7	36.2	47.0	43.8	47.2	46.4	22.6	39.7	38.0	37.6	45.2	56.4
31.9	27.5	28.5	21.8	31.4	19.5	31.5	19.0	20.5	27.6	17.6	4.4	11.4	17.6	28.5	25.5	21.6	27.8	37.2	21.0	19.4	19.0	26.7	37.8

34.8	62.8	23.3	44.3	26.7	37.3	45.8	42.7	33.3	40.5	34.5	38.7	42.5	24.3	60.0	35.9	50.5	31.9
12.5	42.5	18.9	39.4	2.4	32.9	28.7	26.4	10.9	35.7	30.0	34.3	21.0	19.9	55.7	31.5	46.0	27.5
7.9	37.7	19.9	40.9	8.9	33.9	35.3	33.0	6.2	37.1	31.1	35.3	27.5	20.9	56.7	32.5	47.1	28.5
26.9	32.0	13.2	34.1	26.7	27.2	33.0	30.7	35.2	6.7	24.4	28.6	32.4	14.2	50.0	16.1	40.4	21.8
34.2	59.0	22.8	43.7	24.0	36.4	19.7	17.3	35.4	37.3	34.0	38.1	42.0	23.8	59.5	35.3	49.9	31.4
15.7	45.7	10.9	31.9	5.6	24.9	32.0	29.7	14.2	28.1	22.1	26.3	13.0	11.9	47.7	23.5	38.1	19.5
10.8	34.8	22.9	43.8	11.8	36.9	38.2	35.9	3.2	40.1	34.0	38.2	30.4	23.9	59.7	35.5	50.0	31.5
24.2	36.7	10.4	31.4	24.2	24.4	30.5	28.2	32.7	11.4	21.6	25.8	20.6	11.4	47.2	14.5	37.6	19.0
20.2	45.0	11.9	32.9	10.0	25.9	16.3	14.0	19.0	23.3	23.1	27.3	28.6	12.9	48.7	24.5	39.0	20.5
6.5	48.0	19.0	39.9	13.9	33.0	40.2	37.9	16.5	36.2	30.2	34.3	32.5	20.0	55.8	31.6	46.2	27.6
22.8	34.2	9.0	30.0	25.5	23.0	31.5	28.4	33.0	8.2	20.2	24.4	28.2	10.0	45.8	10.6	36.2	17.6
25.8	51.5	12.0	33.0	26.9	26.0	34.5	31.4	35.5	29.3	23.2	20.7	31.2	13.0	48.8	24.6	39.2	4.4
30.2	55.9	16.4	37.4	22.9	30.5	38.9	35.9	31.5	36.7	27.7	27.7	30.3	17.4	52.2	29.0	43.7	11.4
22.8	34.6	9.0	29.9	25.5	23.0	31.5	28.4	33.0	9.2	20.2	24.3	28.2	10.0	45.8	12.4	36.2	17.6
13.3	46.0	20.0	40.9	6.0	33.9	32.2	30.0	14.5	37.1	31.1	35.3	24.6	21.0	57.0	32.5	47.0	28.5
10.8	41.4	16.7	37.7	5.3	30.7	31.7	29.4	9.8	34.0	27.9	32.0	23.9	17.7	53.5	29.3	43.8	25.5
33.8	59.5	20.0	41.0	36.5	34.0	42.5	39.4	44.0	37.2	31.2	35.4	39.2	21.0	56.8	32.6	47.2	21.6
27.4	50.6	19.2	40.1	17.2	33.2	23.6	21.3	25.9	26.4	30.4	34.5	35.9	20.2	56.0	28.8	46.4	27.8
23.0	23.8	49.5	10.0	31.0	26.5	24.0	32.5	29.4	34.0	27.0	21.0	25.4	29.2	11.0	46.8	22.6	37.2
26.2	52.0	12.5	33.4	29.0	26.5	34.9	32.0	36.5	29.7	23.7	27.8	31.7	13.5	49.2	25.0	39.7	21.0
13.0	50.0	10.8	31.8	22.0	25.0	33.3	30.2	25.8	28.0	22.0	26.2	30.0	11.8	47.6	23.4	38.0	19.4
24.2	36.7	10.4	31.4	24.2	24.4	30.5	28.2	32.7	11.3	21.6	25.8	29.6	11.4	47.2	14.5	37.6	19.0
31.8	57.5	18.0	39.0	34.5	32.0	40.5	37.4	42.0	46.5	40.4	44.6	42.2	19.0	54.8	30.6	45.2	26.7
23.3	59.0	29.2	50.0	23.6	43.2	50.0	47.7	27.4	47.7	27.4	46.5	40.4	30.2	66.0	41.8	56.4	37.8
0.0	45.5	13.8	34.7	10.0	27.8	36.2	33.2	13.9	31.0	25.0	29.0	28.7	14.8	50.5	26.3	41.0	22.4
45.5	0.0	39.5	60.5	40.0	53.5	61.3	59.0	31.5	38.7	50.6	54.8	58.7	40.4	76.3	33.8	66.7	48.0
13.8	39.5	0.0	21.0	16.5	14.0	22.5	19.4	24.0	17.2	11.2	15.4	19.2	1.0	36.8	12.6	27.2	8.6
34.7	60.5	21.0	0.0	37.5	6.9	43.4	40.4	45.0	38.2	32.2	15.4	40.2	22.0	57.7	33.5	48.0	29.5
10.0	40.0	16.5	37.5	0.0	30.5	26.4	24.0	8.6	33.4	27.7	32.0	18.6	17.5	53.3	29.0	43.8	25.1
27.8	53.5	14.0	6.9	30.5	0.0	36.5	33.4	38.0	31.2	25.2	12.8	33.2	15.0	50.8	25.6	41.2	22.6
36.2	61.3	22.5	43.4	26.4	36.5	0.0	9.7	35.0	39.7	33.7	37.8	41.7	23.5	59.3	35.0	49.7	31.0
33.2	59.0	19.4	40.4	24.0	33.4	9.7	0.0	32.6	36.6	30.6	34.8	38.6	20.4	56.2	32.0	46.6	28.0
13.9	31.5	24.0	45.0	8.6	38.0	35.0	32.6	0.0	41.2	35.2	39.4	27.2	25.0	60.1	36.6	51.2	32.6
31.0	38.7	17.2	38.2	33.4	31.2	39.7	36.6	41.2	0.0	28.4	32.6	36.4	18.2	54.0	18.8	44.4	25.9
25.0	50.6	11.2	32.2	27.7	25.2	33.7	30.6	35.2	28.4	0.0	26.6	30.3	12.2	48.0	23.8	38.4	19.8
29.0	54.8	15.4	15.4	32.0	12.8	37.8	34.8	29.4	32.6	26.6	0.0	35.0	16.4	52.2	28.0	42.6	24.0
28.7	58.7	19.2	40.2	18.6	33.2	41.7	38.6	27.2	36.4	30.3	35.0	0.0	20.2	56.0	31.8	46.4	27.8
14.8	40.4	1.0	22.0	17.5	15.0	23.5	20.4	25.0	18.2	12.2	16.4	20.2	0.0	37.8	13.6	28.0	9.6
50.5	76.3	36.8	57.7	53.3	50.8	59.3	56.2	60.1	36.6	18.8	44.4	56.0	0.0	49.4	64.0	64.0	35.4
26.3	33.8	12.6	33.5	29.0	25.6	35.0	32.0	36.6	18.8	23.8	28.0	31.8	13.6	49.4	0.0	39.7	21.2
41.0	66.7	27.2	48.0	43.8	41.2	49.7	46.6	51.2	44.4	38.4	42.6	46.4	28.0	64.0	39.7	0.0	36.0
22.4	48.0	8.6	29.5	25.1	22.6	31.0	28.0	32.6	25.9	19.8	24.0	27.8	9.6	35.4	21.2	36.0	0.0

En el siguiente capítulo se describirá el algoritmo aplicado para determinar la 1 – *mediana* (nueva terminal de autobuses), haciendo uso del vector de frecuencias que se tomará como el peso para cada nodo (comunidad) y la matriz de rutas más cortas descrita anteriormente. El algoritmo se realizará un programa en Matlab 6.1, cuyos datos de entrada son la matriz de rutas más cortas y el vector de frecuencias, para que finalmente nos de como salida la ubicación de la terminal de autobuses.

Capítulo 6

Aplicaciones de los modelos

Por las características del estudio de caso San Juan del Río, se determinó que el algoritmo apropiado es el de la 1 – mediana, pues lo que nos interesa es determinar la ubicación óptima de la Terminal de Autobuses Intercomunitaria y con ello garantizar a los usuarios recorrer la distancia mínima desde cualquier comunidad del municipio al centro de la ciudad de San Juan del Río.

La función objetivo que modela lo anterior está dada por:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{42} w_i d(C, X_i)$$

donde

w_i es la frecuencia de viaje para la comunidad i

C es la terminal a encontrar

X_i la comunidad i .

y cuya restricción es:

$$\sum_{i=1}^{42} X_i = 1 \quad (6.1)$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la terminal de autobuses se ubica en la comunidad } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.2)$$

la restricción (6.1) asegura que sólo sea instale una terminal de autobuses. Mientras que (6.2) establece la ubicación de la terminal como una variable binaria.

El algoritmo que se programó, usando matlab 6.1, es el descrito en el capítulo 4, el cual contiene las siguientes líneas:

```

function[frecdist, divfrecdis, localizacion, pmed, mindistancia]
= pmediana(matriz_distancias, frecuencia)

for i= 1:42

    frecdist(1 : 42, i) = frecuencia(i) * matriz_distancias(1 : 42, i);      (L1)

end
sumfrec = sum(frecuencia);

    divfrecdis(1 : 42, 1 : 42) = frecdist(1 : 42, 1 : 42)/sumfrec;      (L2)

for i = 1:42

    localizacion(i) = sum(divfrecdis(i, 1 : 42));      (L3)

end

    [mindistancia, pmed] = min(localizacion)      (L4)

```

Los parámetros necesarios para la función *pmediana* son:

matriz_distancias : calculada en capítulo anterior
 frecuencia : dada en el capítulo 5

En la línea L1, se calcula la expresión $w_j \cdot d(i, j)$ multiplicando cada columna de la matriz de rutas mínimas (*matriz_distancias*(1 : 42, *i*)) por el número de la demanda de servicio del nodo *i* (*frecuencia*(*i*)), obteniendo la matriz *frecdist*, la Figura 6.1 se observa

una parte de dicha matriz (42 x 42) al ejecutar el programa:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	4.59	175.68	12.41	131.56	91.809	18.564	86.609	2.082
2	21.6	0	59.438	9.86	75.504	24.24	7.242	68.105	0.744
3	26.72	1.921	0	1.054	94.094	43.935	1.53	77.871	1.134
4	29.2	4.93	16.306	0	87.802	73.023	18.411	20.303	1.002
5	36.8	4.488	173.05	10.438	0	89.688	18.258	72.474	0.84
6	24.24	1.36	76.27	8.194	84.656	0	8.874	54.741	0.936
7	29.12	2.414	15.78	12.274	102.39	52.722	0	85.581	1.308
8	26.96	4.505	159.38	2.686	80.652	64.539	16.983	0	0.852
9	27.76	2.108	99.414	5.678	40.04	47.268	11.118	36.494	0
10	30.72	2.754	54.178	10.948	108.39	59.085	6.783	75.558	1.434
11	25.84	4.743	152.01	1.87	90.948	60.297	16.269	10.023	1.086
12	28.24	4.981	167.79	8.568	99.528	64.539	17.799	57.568	1.434
13	27.76	4.301	167.27	10.064	112.11	52.419	17.697	69.133	1.704
14	25.84	4.743	152.01	1.972	86.944	60.297	16.269	5.654	0.984
15	24.56	1.411	78.374	11.084	85.8	35.148	9.078	77.357	0.96

Figura 6.1: Matriz $w_j \cdot d(i, j)$

En la línea L2 se realiza la división de los elementos de la matriz de *frecdist* por el total de clientes que utiliza la red, en este caso se consideró como frecuencia, y así se obtiene la

matriz *divfrecdis*, obteniendo la Figura 6.2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0.0459	1.7568	0.1241	1.3156	0.91809	0.18564	0.86609	0.02082
2	0.216	0	0.59438	0.0986	0.75504	0.2424	0.07242	0.68105	0.00744
3	0.2672	0.01921	0	0.01054	0.94094	0.43935	0.0153	0.77871	0.01134
4	0.292	0.0493	0.16306	0	0.87802	0.73023	0.18411	0.20303	0.01002
5	0.368	0.04488	1.7305	0.10438	0	0.89688	0.18258	0.72474	0.00884
6	0.2424	0.0136	0.7627	0.08194	0.84656	0	0.08874	0.54741	0.00936
7	0.2912	0.02414	0.1578	0.12274	1.0239	0.52722	0	0.85581	0.01308
8	0.2696	0.04505	1.5938	0.02686	0.80652	0.64539	0.16983	0	0.00852
9	0.2776	0.02108	0.99414	0.05678	0.4004	0.47268	0.11118	0.36494	0
10	0.3072	0.02754	0.54178	0.10948	1.0839	0.59085	0.06783	0.75558	0.01434
11	0.2584	0.04743	1.5201	0.0187	0.90948	0.60297	0.16269	0.10023	0.01086
12	0.2824	0.04981	1.6779	0.08568	0.99528	0.64539	0.17799	0.57568	0.01434
13	0.2776	0.04301	1.6727	0.10064	1.1211	0.52419	0.17697	0.69133	0.01704
14	0.2584	0.04743	1.5201	0.01972	0.86944	0.60297	0.16269	0.05654	0.00984
15	0.2456	0.01411	0.78374	0.11084	0.858	0.35148	0.09078	0.77357	0.0096

Figura 6.2: Matriz al dividir la distancia entre el total de usuarios que utilizan la red

En la línea L3, se calcula el vector *localizacion*, es decir, la distancia promedio si la terminal de autobuses intercomunitaria se ubicara en el nodo i , cuyo vector transpuesto es:

31.18
 22.13
 23.32
 19.16
 28.06
 16.59
 26.29
 17.86

17.46
23.88
16.85
17.91
21.17
16.76
23.62
20.69
29.10
24.35
35.14
20.28
18.34
17.87
27.11
34.43
19.49
44.90
9.28
28.92
19.78
22.09
28.29
25.50
26.69
25.08
19.96
22.75
25.92
10.23
45.47
20.96
36.36
15.68

Y finalmente en la línea L4, se determina la comunidad donde se debe localizar la terminal de autobuses, lo cual da por resultado que en la ubicación 28 se debe localizar la terminal de autobuses para que los usuarios recorran la distancia mínima desde cualquier comunidad, dicha ubicación corresponde a San Juan del Río.

Capítulo 7

Resultados y conclusiones

Los problemas de localización han adquirido gran importancia por las diversas aplicaciones que encuentran en los sectores tanto privado como público.

Para el sector privado, los planes de negocios de las empresas que desean ubicar nuevas instalaciones o ampliar las redes de servicios que ya están en operación requieren la utilización óptima de los recursos, a fin de contribuir a mejorar las utilidades.

Para el sector público, particularmente en el subsector transporte, las decisiones relacionadas con la instalación de infraestructura como terminales, paraderos de autobuses, teléfonos de emergencia, servicios médicos o plazas de cobro de peaje requieren de minimizar el uso de los recursos escasos, que provienen de los contribuyentes, a la vez que exigen optimizar el desempeño de los sistemas de servicio público.

En términos generales el problema de localización es encontrar la mejor ubicación para instalar un nuevo servicio, por ejemplo hospitales, bancos, una central de autobuses, paradas de autobuses, escuelas, un tiradero de basura, etc., que optimice algún objetivo. Por lo que dependiendo de dicho objetivo los problemas de localización en redes se pueden clasificar de acuerdo a la “distancia” en consideración. Es por ello que los problemas presentados en el capítulo 4, p-mediana y p-centro, se basan en la distancia total o promedio y en la máxima distancia, respectivamente.

En los modelos de distancia promedio, el objetivo es optimizar la distancia total entre las instalaciones y los nodos de demanda, y también podemos encontrar además del problema

de la p -mediana, el problema del nodo central (hub) en una configuración radial de rutas, el problema de localización de instalaciones que tienen un costo fijo independiente de los flujos vehiculares (fixed charge) y el problema de localización maxisum.

Mientras que el objetivo en los modelos de máxima distancia es optimizar la distancia al nodo de demanda más lejano a la nueva instalación, en otros problemas los enfoques pueden cambiar, como son: problema de localización del conjunto de cobertura (set covering), o el problema de localización de máxima cobertura.

Respecto a la complejidad computacional de los modelos de localización, cabe mencionar que el problema de la p -mediana está clasificado en la literatura como un problema NP- Hard, sin embargo de acuerdo a Drezner y Hamacher [8] para instancias con $p < 5$ y nodos < 50 , es posible resolverlos en un tiempo razonable.

En este trabajo se da una idea de los problemas de localización básicos, sin embargo además de los anteriores existen el problema de localización dinámica, en el cual consideramos el tiempo, podemos abrir o posiblemente cerrar una nueva instalación durante un tiempo determinado o la nueva instalación se mantendrá abierta sobre el tiempo en el que se realiza la planificación, se dice que es dinámica pues los parámetros del problema (por ejemplo la demanda) varían con el tiempo e influyen en la decisión del esquema planteado de la nueva instalación; el de localización estocástica, en el cual se tiene demanda estocástica en los nodos; los modelos multiobjetivo, en los que se atienden simultáneamente varios objetivos de interés para el modelador, entre otros. La variedad que ofrecen los diferentes modelos de localización resulta de utilidad para los planificadores privados y públicos que pueden requerir llenar distintas necesidades en los problemas de localización para sus distintas empresas.

En particular este trabajo se enfocó a examinar el problema de localización de la terminal de autobuses intracomunitario del municipio de San Juan del Río, que de acuerdo al objetivo del mismo, se pretendía minimizar la distancia promedio de los usuarios del servicio a la terminal de autobuses, por lo tanto el modelo elegido fue el de la 1-mediana.

El interés en este problema surgió del estudio "Movilidad Intercomunitaria en el Municipio de San Juan del Río: Diagnóstico y Propuesta de Solución" que se desarrolló auspiciado por el CONACYT, para responder a las inquietudes del municipio de San Juan del Río

sobre la conveniencia de sacar la Terminal de autobuses del centro de esa ciudad a otra localización hacia las orillas de la misma. Con los datos que se obtuvieron del estudio citado, se abordó el problema de localización resultante, y en el capítulo 6 se detallan los resultados obtenidos de este análisis.

La conclusión del análisis referido fue que la ubicación de la terminal de autobuses intracomunitaria coincide con la ubicación actual y no resulta ventajoso cambiarla de sitio. Este resultado coincide con el estudio realizado por el Instituto Mexicano del Transporte (IMT)[17], lo cual representa un apoyo importante a las autoridades municipales dada la magnitud de costos de reubicar la actual Terminal de Autobuses.

La metodología de la 1-mediana utilizada en el problema de localización para la Terminal de autobuses permitirá, una vez que se obtengan estimaciones para cambios futuros de los viajes a los nodos (comunidades) en el mediano y en el largo plazo, estimar la conveniencia de tener una nueva ubicación para la Terminal de Autobuses, lo que será un elemento importante de apoyo en la toma de decisiones del municipio.

Una generalización útil del problema anterior es el modelo de la p -mediana, que se puede utilizar para apoyar la toma de decisiones cuando se planea ubicar p instalaciones de interés para el planificador, como son puntos de venta de boletos, servicios de información para viajeros, servicios comerciales tales como máquinas vendedoras de (refrescos, botanas, etc), tiendas de conveniencia (p. ej OXXO, Super-Q, etc), cajeros automáticos, entre otros, cuya función objetivo se adecue al mejoramiento del desempeño del sistema de transporte.

Otro aspecto también importante es que el incremento que se ha observado en el flujo de pasajeros requerirá en un futuro, definir las paradas oficiales de las rutas de servicio interurbano, a fin de prevenir el congestionamiento vial. Para este propósito, los planificadores municipales pueden apoyarse con el uso de los modelos de localización presentados en este trabajo, y utilizar herramientas básicas para determinación de las rutas más cortas, como es el algoritmo de Floyd que se comenta en el desarrollo del modelo de la 1-mediana.

Finalmente, de la experiencia tenida en este proyecto cabe hacer notar que la disposición de datos es fundamental para el buen uso de los modelos, y que la difusión de estas técnicas de localización entre los potenciales usuarios, particularmente entre los planificadores del

ambiente urbano, son sin duda un paso hacia el uso de técnicas que brindan elementos de decisión objetivos y que permiten mejorar las decisiones que en muchas ocasiones son tomadas con criterios subjetivos, dada la carencia de información del uso de estas técnicas o debido a las presiones para solucionar problemas que reclaman respuestas con urgencia.

Apéndice A

Matriz D y vector W

Como ya se había mencionado en el capítulo 2, la matriz de distancias D entre las comunidades de San Juan del Río construída con ayuda de ArcView es la que se observa en las siguientes hojas y cuyo vector de frecuencias W se muestra en la Tabla A.1.

	COMUNIDAD	FRECUENCIA
1	AMEALCO x Santa Lucía	14
2	AMEALCOxGALINDO	3
3	ARCILA	92
4	BUENAVISTA	5
5	CAZADERO	50
6	CERRO GORDO	53
7	COTO, EL	9
8	CUADRILLA DE EN MEDIO	45
9	DOLORS GODOY	1
10	ESTANCIA	27
11	JAZMIN	39
12	LA LLAVE	130
13	LAYALLA	80
14	OJO DE AGUA	33
15	ORGANAL, EL	39
16	PALOMAS	1
17	PARAISO	0
18	PERALES 1	6
19	PUERTA DE PALMILLAS	4
20	RODEO, EL	104
21	ROSARIO, EL	13
22	SABINO, EL	11
23	SAN ANTONIO	4
24	SAN CLEMENTE	7
25	SAN GERMAN	14
26	SAN ILDEFONSO	0
27	SAN JUAN DEL RIO	101
28	SAN JUAN Tx	1
29	SAN MIGUEL GALINDO	4
30	SAN NICOLAS	45
31	SAN SEBASTIAN BARRANCAS	34
32	SANTA BARBARA	39
33	SANTA ISABEL	0
34	SANTA LUCIA	20
35	SANTA MATILDE	35
36	SANTA ROSA XAJAY	38
37	SITIO, EL	2
38	SOLEDAD DEL RIO	1
39	TLAXCALILLA	6
40	TUNA MANZA	6
41	VAQUERIAS	0
42	VISTHA	23
	TOTAL	1150

Cuadro A.1: Tabla de Frecuencia de las 42 comunidades de San Juan del Río elaborada con base en datos de encuesta O-D, 2007

Bibliografía

- [1] Aceves, R., 2007, "El problema de la localización de servicios", consultado el 15 de Enero, 2008, de <http://www.semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/1AcevesRicardo.pdf>
- [2] Aneja, Y.P. and Parlar, M. (1994). Algorithms for weber facility location in the presence of forbidden regions and/or barriers to travel. *Transportation Science* No. 1, pp. 70-76 vol. 28.
- [3] Aykin, T. and Brown, G.F. (1992). Interacting new facilities and location-allocation problems, *Transportation Science* No. 3, pp. 212-222 vol. 26.
- [4] Ballou, R.H. (2004). *Business Logistics/supply chain Management*, Pearson-Prentice Hall USA, 5a edición.
- [5] Berman, O. and Kaplan, E.H. (1990). Equity maximizing facility location schemes. *Transportation Science* No. 2, pp. 137-144 vol. 24.
- [6] Colebrook, M. y Sicilia, J, "Localización de servicios en redes", consultado el 18 de Enero, 2008, de <http://www-eio.upc.es/personal/homepages/elena/Tutoriales/redes.pdf>
- [7] Daskin M. (1994). *Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications*. Wiley Interscienc. p 154.
- [8] Dreznder, Z. and Wesolowsky, G.O. (1989). The asymmetric distance location problem. *Transportation Science* No. 3, pp. 201-207 vol. 23.
- [9] Facility Location, 2007, revisado el 15 de Diciembre, 2008, de <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/facloc.html>
- [10] Facility Location, revisado el 1 de Febrero, 2008, de <http://en.wikipedia.org/wiki/facilitylocation>
- [11] Gentili, M.; Mirchandani, P. *Annals of Operations Research*, Jan2005, Vol. 136 Issue 1-4, pp 229-257, 29p; DOI: 10.1007/s10479-005-2047-z; (AN 17089827).

- [12] Hakimi, S.L. (1964). Optimum Locations of Switching Centers and Medians of a Graph, *Oper. Res.*, 12, pp. 450-459
- [13] Hiller, F. & Lieberman. (2001). *Investigación de Operaciones*, McGraw Hill, 7ª edición.
- [14] ITE Technical Council Committee 5c-1a. (1992). "The location and design of bus transfer facilities", *Ite Journal* No. 8, vol. 62, No. 8, pp. 33-37.
- [15] Larson R. & A. Odoni (1981). *Urban Operations Research*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NS.
- [16] Las Teorías de la localización,, revisado el 23 de Enero, de 2008, de <http://www.eumed.net/tesis/2007/fjcv/teorias%20de%20localizacion.htm>
- [17] Martner, C; Balbuena, A; Bustos, A; De la Torre, E;. *Transporte y territorio. Movilidad Regional en San Juan del Río*.IMT ISBN 978-970-960-18-0-0,
- [18] Melachrindoudis, E. (1988). An efficient computational procedure for the rectilinear MAXIMIN location problem. *Transportation Science* No. 3, pp. 217-223 vol. 22.
- [19] Revelle, C. and Hogan, K. (1989). The maximum availability location problem. *Transportation Science* No. 3, pp. 192-200 vol. 23.
- [20] Rosen, K.H., Michaels J.G., Gross J.L., Grossman, J.W. (2000). *Handbook of Discrete & Combinatorial Maths*, CRS Press, pp. 986-996.s
- [21] Taha H. (2004). *Investigación de Operaciones*, Prentice Hall, 7ª.edición.
- [22] Teoría de la localización industrial, 2007, consultada el 23 de Enero, 2008, de <http://geografia.laguia2000.com/economia/teoria-de-la-localizacion-industrial>
- [23] Teoria de Localización, consultada el 17 de Enero, 2008, en <http://www.math.clemson.edu/faculty/Dearing/Dearing/location/totalcost.pdf>
- [24] Xy, N. and Lowe, T.J. (1993). On the equivalence of dual methods for two location problems. *Transportation Science* No. 2, pp. 194-199 vol. 27.