UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO.
DIRECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO.
SECCION DE DOCENCIA DE LAS MATE -
MATICAS.

MODELADO Y ANALISIS DE UN ALGORITMO ESTOCASTICO

TESIS QUE PRESENTA

ANTONIO AGUSTIN ORDAZ HERNANDEZ

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS.

CREDITOS ASIGNADOS A LA TESIS: 11

JURADO:

DR. CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO ____________ 27/V/88
PRESIDENTE

M. CESAR RINCON ORTA ____________ 27/V/88
SECRETARIO

M. JORGE MARTINEZ SANCHEZ ____________ 27/V/88
VOCAL

COORDINADOR DE LA SECCION:

ING. ALEJANDRO PADILLA GONZALEZ

____

DIRECTOR DE ESTUDIOS DE POSGRADO:

M. EN I. JOSE ALFREDO ZEPEDA GARRIDO

____

Con cariño a

mi mamá Jovita

mi esposa Tere

mis hijas Gaby, Paty, Tere y Claudia

Mi mas sincero agradecimiento al Maestro JORGE MARTINEZ SANCHEZ por su asesoria en la realizacion de este trabajo.

Agradezco a la U.A.Q. por esta oportunidad de superarcion.

Al Ing. ALEJANDRO PADILLA G. por sus atenciones.

CONTENIDO

PROLOGO.

Para obtener información del "mundo real" es necesario contar con un modelo matemático que permita caracterizar lo más acertado posible los fenómenos y/o procesos que ocurran en éste.

El rápido progreso de las ciencias computacionales es en mayor parte debido al desarrollo de herramientas matemáticas apropiadas. Los modelos matemáticos han sido aplicados acertadamente a un amplio rango de problemas en diferentes áreas tales como diseño de computadoras y sistemas computacionales, análisis del costo de ejecución de un algoritmo, desarrollo de lenguajes de programación, distribución de recursos de sistemas de computadoras etc.

En el presente trabajo se modela y optimiza un algoritmo computacional de ordenamiento pensado como un proceso que tiene comportamiento estocástico. En la introducción se describe el algoritmo a modelar y se clarifica su origen aleatorio. En lo que se enuncia como problema fundamental se establece claramente el objetivo de este trabajo. Es importante hacer notar que el modelo buscado es a modo de generalización de modelos parciales. Primero se estudian las permutaciones 2-ordenadas así como una interpretación geométrica de éstas en lo que denominaremos DIAGRAMAS DE REJILLA. A continuación se obtiene un modelo parcial del promedio de la cantidad de inversiones que tienen las permutaciones 2-ordenadas y h-ordenadas. En la página (17), se muestra el modelo general que describe el comportamiento del algoritmo citado. Se da enseguida una buena aproximación (utilizando aproximación asintótica de Stirling), lo cual permite determinar una secuencia de incrementos H que permite minimizar el promedio asintótico de la cantidad de movimientos que se realizan en todo el proceso.

ANTONIO AGUSTIN ORDAZ HERNANDEZ.

Querétaro, Qro., febrero de 1988.

TERMINOLOGIA USADA

$\lfloor u \rfloor$	Mayor entero de u. ($\lfloor u \rfloor = n$ tal que $n \leq u < n + 1$).
$\lceil u \rceil$	Menor entero de u. ($\lceil u \rceil = n$ tal que $n < u \leq n + 1$).
$\lvert u \rvert$	Valor absoluto de u.
$\langle an \rangle$	Permutación del conjunto de enteros $\{1,2, \ldots ,n\}$.
$C(n,r)$	Combinaciones de n elementos tomados r a la vez.
$\#(A)$	Cardinalidad del conjunto A.
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturales.
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales.
$G^{(n)}(z)$	n-ésima derivada de G.
$n \bmod h$	Residuo que resulta al dividir el entero n por el entero h. ($n = q\,h + r$)
e	Base de los logaritmos naturales.
$O(g)$	Orden g. Conjunto de todas las funciones, las cuales están dominadas asintóticamente por una función dada g.
$\sum\limits_{i,j}$	$\sum\limits_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$

INTRODUCCION.

Un problema frecuente en computación es el de ordenar números en orden ascendente o descendente. Existen métodos muy eficientes que desempeñan este trabajo, se estudiará un método que aunque no es óptimo en cuanto se refiere al tiempo de ejecución, involucra problemas matemáticos fascinantes. A tal método lo llamaremos DISMINUCION DE INCREMENTOS, y fue propuesto en 1959 por Donald F. Shell. La tabla 1 que a continuación se muestra proporciona una idea general de este método.

TABLA 1

DISMINUCION DE INCREMENTOS

*sucesión dada:
503 087 512 061 908 170 897 275 653 426 154 509 612 677 765 703
*primer paso;
503 087 154 061 612 170 765 275 653 426 512 509 908 677 897 703
*segundo paso;
503 087 154 061 612 170 512 275 653 426 765 509 908 677 897 703
*tercer paso;
154 061 503 087 512 170 612 275 653 426 765 509 897 677 908 703
*cuarto paso;
061 087 154 170 275 426 503 509 512 612 653 677 703 765 897 908

Primero dividimos los 16 números en 8 grupos de dos cada uno, esto es (R_1, R_9), (R_2, R_{10}), ... , (R_8, R_{16}). ordenando cada grupo separadamente se tiene la segunda fila de la tabla 1; esto es llamado el primer paso. Ahora dividimos los números en 4 grupos de 4 cada uno, esto es (R_1, R_5, R_9, R_{13}), ... , $(R_4, R_8, R_{12}, R_{16})$, y nuevamente cada grupo es ordenando separadamente; este 2o. paso hace la fila tres. Un tercer paso ordena dos grupos de 8 números, el 4o. paso completa el trabajo ordenando los 16 números. La sucesión (8, 4, 2, 1) usada en el ejemplo no es única, puede usarse alguna otra sucesión de la forma h_t, h_{t-1}, h_{t-2}, ... , h_1, h_1 es 1.

PROBLEMA FUNDAMENTAL.

El presente estudio consiste en encontrar un modelo matemático de este algoritmo y con esto determinar una sucesión H adecuada que permita una minimización en el tiempo de ejecución al efectuar el proceso de ordenamiento mediante el método expuesto. El factor dominante es la cantidad de movimientos de números, que denotaremos por B. Para analizar esta cantidad asumiremos que los números a ordenar son distintos y al inicio aleatoriamente distribuidos.

DEFINICION. Una permutación del conjunto de enteros {1, 2, , ..., n} denotado por J_n, es una aplicación

Ψ: {1, 2, ..., n} ----> {1, 2, ..., n}

de J_n en sí mismo, tal que si $i, j \in J_n$ $i \neq j$, entonces $\Psi(i) \neq \Psi(j)$.

En adelante representaremos una permutación mediante la sucesión $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, o simplemente $\langle a_n \rangle$, entendiendo que $a_i = \Psi(i)$.

DEFINICION. Si $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ y $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ son dos permutaciones en las cuales existen i y j tales que $a_i = b_j$ y $a_j = b_i$ y $a_k = b_k$ para toda $k \neq i$ y toda $k \neq j$, se dice que una es transposición de la otra.

DEFINICION. Una transposición elemental (también llamada movimiento) es una transposición para la cual $j=i+1$.

DEFINICION. Se dice que una permutación de números $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$ es h-ordenada si $a_i \leq a_{i+h}$ para $1 \leq i \leq n-h$.
A la permutación 1-ordenada se le llamará en adelante simplemente ordenada.

DEFINICION. Sea $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ una permutación del conjunto {1, 2, ..., n}. Si $i<j$ y $a_i > a_j$, la pareja (a_i, a_j) es llamada una inversión de la permutación.
Se dice que a_i y a_j están h-distanciados si $j = i+h \leq n$.

DEFINICION. Un proceso de h-ordenamiento consiste en la eliminación del total de inversiones mediante una secuencia de transposiciones elementales en las sucesiones de elementos h-distanciados.
Como se observó el método consiste en un proceso de h_t-ordenamiento, seguido por un h_{t-1}-ordenamiento, ... , seguido por un h_1-ordenamiento. En el caso particular $h_2 = 2$ y $h_1 = 1$, durante el segundo paso se tendría una sucesión 2-ordenada de números $\langle k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \rangle$. Es fácil ver que el número de permutaciones $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de {1, 2, 3, ... , n} tal que $a_i \leq a_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n-2$ es

$$C(n, \lfloor n/2 \rfloor) , \qquad (1)$$

puesto que obtenemos exactamente una permutación 2-ordenada por cada elección de $\lfloor n/2 \rfloor$ elementos para colocar en posición par a_2, a_4, a_6, ... , con residuo $\lceil n/2 \rceil$ elementos dados en posición impar. Cada permutación 2-ordenada es igualmete posible después que un conjunto aleatorio ha sido 2-ordenado.

Un problema que surge de lò anterior es la determinación del número promedio de inversiones en una permutación aleatoria de este estilo.

Sea A_n el número total de inversiones en todas las permutaciones 2-ordenadas de {1, 2, 3, ... , n}. Es claro que $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=2$, $A_4=8$ Etc. Un primer poblema fundamental es investigar una forma general de A_n.

PERMUTACIONES DOS-ORDENADAS.

Sean

$S_v = \{\overline{L_i L_{i+1}} \mid L_i = (a_i, b_i),\ L_{i+1} = (a_{i+1}, b_i),\ a_j, b_j \in \mathbb{N}\ \}$

$S_h = \{\overline{L_i L_{i+1}} \mid L_i = (a_i, b_i),\ L_{i+1} = (a_i, b_{i+1}),\ a_j, b_j \in \mathbb{N}\ \}$,

$S = S_v \cup S_h$.

Considérese el conjunto W de todas las sucesiones de elementos de S. Sean

$T = \{t \in W \mid t = \langle \overline{L_0 L_1}, \overline{L_1 L_2}, \ldots , \overline{L_{n-1} L_n}\rangle,\ n \in \mathbb{N}\ \}$

$D_n = \{d \in T \mid L_0 = (0, 0) \text{ y } L_n = (\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil)\}$.

LEMA 1. Sean $d \in D_n$, $V \subseteq S_v$, $H \subseteq S_h$ y $d^* = V \cup H$. Si los elementos de d son los mismos que los de d^*, entonces $\#(V) = \lfloor n/2 \rfloor$ y $\#(H) = \lceil n/2 \rceil$.

El enunciado de este lema es verdadero dado que los elementos de la sucesión d forman un conjunto constituido de elementos de V y H y dado que $L_0 = (0, 0)$ y $L_n = (\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil)$ (siendo $d_1 = \overline{L_0 L_1}$), se sigue que $\#(V) = \lfloor n/2 \rfloor$ y $\#(H) = \lceil n/2 \rceil$.

Sea

$P_n = \{p \in P_n^* \mid p = \langle a_n \rangle,\ a_i \leq a_{i+2},\ 1 \leq i \leq n-2\}$,

donde P_n^* es el conjunto de permutaciones de {1,2, ..., n}.

Sea g: P_n ---> Pot(S) La función definida como

$$g(\langle a_n \rangle) = \{T_i \in S \mid 1 \leq i \leq n\} = T_{an} \qquad (2)$$

siendo

$$T_i = \begin{cases} \{(\overline{j,\ a_i - [j+1])(j,\ a_i - j)} \mid 0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor,\ \lceil n/2 \rceil \geq a_i - j > 0\} & \text{si } i \text{ es par} \\ \{(\overline{a_i - [j+1],\ j)(a_i - j,\ j)} \mid 0 \leq j \leq \lceil n/2 \rceil,\ \lfloor n/2 \rfloor > a_i - j > 0\} & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

y Pot(S) el cojunto potencia de S.

Se define también,

h: Im(g) ---> D_n como: $h(T_{an}) = d$,

con el conjunto de elementos d^* definido por:

i) si $n = 1$, $d^* = \{(\overline{0,0)(1,0})\}$.

ii) si $n > 1$,

$$d^* = \{(\overline{k,l)(k',l'}) \in T_i \mid \exists\ (\overline{k',l')(k'',l''}) \in T_j \text{ con } a_j = a_i + 1 \text{ ó } (a_i = n \text{ y } \exists\ (\overline{k'',l'')(k,l}) \in T_j \text{ con } a_j = n-1)\}.$$

Dado que los sistemas de ecuaciones resultantes son consistentes, la condición de existencia se cumple para todos los casos. Por lo tanto se tienen suficientes elementos para construir d. Ahora se verá que esta construcción no es ambigua.

Note que según la definición de T_i, $T_i \in S_h$ ó $T_i \in S_v$ pero no ambas.

Sean $s_1 = (\overline{k,l)(k',l'})$ y $s_2 = (\overline{k,l)(k'',l''})$,

si $\overline{s_1}$ y $\overline{s_2} \in T_i$, por definición, $\overline{s_1} = \overline{s_2}$.

Sup. $\overline{s_1} \in T_i$, $\overline{s_2} \in T_m$,

---> $(j_1, a_i - (j_1+1)) = (a_m - (j_2+1), j_2)$,

---> $a_i = a_m$ ---> $i = m$,

---> $T_i = T_m$.

Por tanto, $\overline{s_1} = \overline{s_2}$.

De acuerdo a lo anterior, se establece que f: P_n ---> D_n, (composición de h y g), es una función bien definida

En adelante, los elementos de T, se denominarán trayectorias y los elementos de D_n, trayectorias de esquina a esquina.

DIAGRAMAS DE REJILLA. (Una interpretación geométrica de los elementos de D_n y de las permutaciones 2-ordenadas).

Es posible dar una interpretación geométrica de T y D_n mediante DIAGRAMAS DE REJILLA, la cual se construye mediante la siguiente asociación,

$(a_i, b_i) \in \mathbb{N}^2$ ------> $L_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$.

$\overline{L_i L_{i+1}} \in S$ ------> $\overline{L_i L_{i+1}} \in \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 1.

para $n = 6$ un ejemplo de una permutación dos-ordenada es $\langle a_6 \rangle = \langle 4, 1, 5, 2, 6, 3 \rangle$ donde por aplicación de f, le corresponde una única trayectoria de esquina a esquina del diagrama de rejilla de la figura 1.

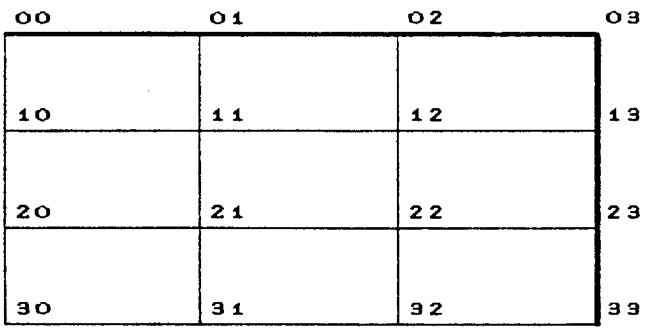

fig. 1

$d_1 = (\overline{0,3)(1,3})$, $d_2 = (\overline{0,0)(0,1})$, $d_3 = (\overline{1,3)(2,3})$,

$d_4 = (\overline{0,1)(0,2})$, $d_5 = (\overline{2,3)(3,3})$, $d_6 = (\overline{0,2)(0,3})$.

por tanto

$$f\langle 4, 1, 5, 2, 6, 3\rangle = \langle(\overline{0,0)(0,1}), (\overline{0,1)(0,2}), (\overline{0,2)(0,3}), (\overline{0,3)(1,3}), (\overline{1,3)(2,3}), (\overline{2,3)(3,3})\rangle.$$

De acuerdo a lo descrito anteriormente e ilustrado en el ejemplo 1, existe una conexión entre el conjunto de permutaciones dos-ordenadas y el conjunto de trayectorias de esquina a esquina (de (0,0) a $(\lfloor n/2\rfloor, \lceil n/2\rceil)$) en el diagrama de rejilla. Es claro que la imagen de una permutación dos-ordenada, queda completamente caracterizada por una cadena ordenada de elementos $v \in V$ y $h \in H$ recordando que por el lema 1, $\#(V) = \lfloor n/2\rfloor$ y $\#(H) = \lceil n/2\rceil$.

Para el ejemplo 1, una caracterización de la imagen bajo f de la permutación dos ordenada <4, 1, 5, 2, 6, 3> será

$$f\langle 4, 5, 1, 2, 6, 3\rangle = \langle h\ h\ h\ v\ v\ v\rangle,$$

en donde cada "h" representa un segmento de recta horizontal y cada "v" uno vertical en el diagrama de rejilla asociado a la permutación, y la contigüidad de dos de estas letras significa que ambos segmentos están conectados por un extremo L_i común.

Una forma alternativa de determinar la sucesión ordenada de v's y h's que determinan la imagen de una permutación dos ordenada bajo f es a través de transposiciones elementales de la permutación ordenada (también 2-ordenada) <1, 2, 3, ..., n>. De acuerdo con la definición de f,

$$f\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle = \langle(\overline{0,0)(1,0}), (\overline{1,0)(1,1}), \ldots, (\overline{\lfloor n/2\rfloor, \lceil n/2\rceil - 1)(\lfloor n/2\rfloor, \lceil n/2\rceil})\rangle,$$

Quedando caracterizada la imagen via v's y h's de la forma

$$f\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle = \langle v\ h\ v\ h\ \ldots\ w\rangle, \text{ donde } w = h \text{ ó } w = v.$$

En la fig. 2, se muestra la trayectoria de esquina a esquina en el diagrama de rejilla correspondiente a la permutación ordenada $\langle 1, 2, 3, \ldots, n \rangle$, para n par.

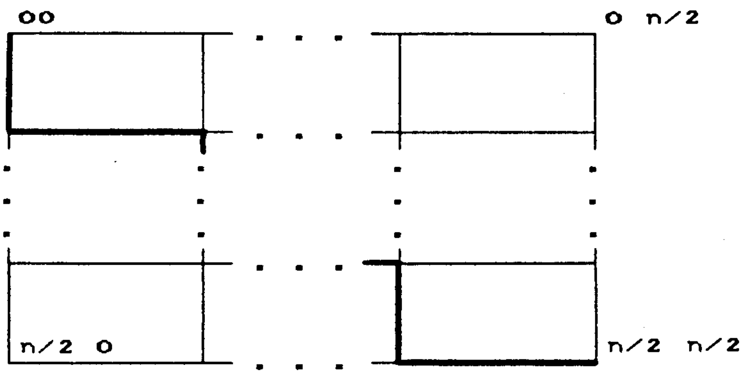

fig. 2.

Una transposición del elemento a_i con a_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$), causa una modificación de estos elementos respecto de su paridad o imparidad (i.e. un intercambio de un elemento $v \in V$ con un elemento $h \in H$). En la figura 3, se muestra la modificación que sufre la trayectoria correspondiente a la permutación ordenada cuando se trasponen los elementos a_i con a_{i+1}.

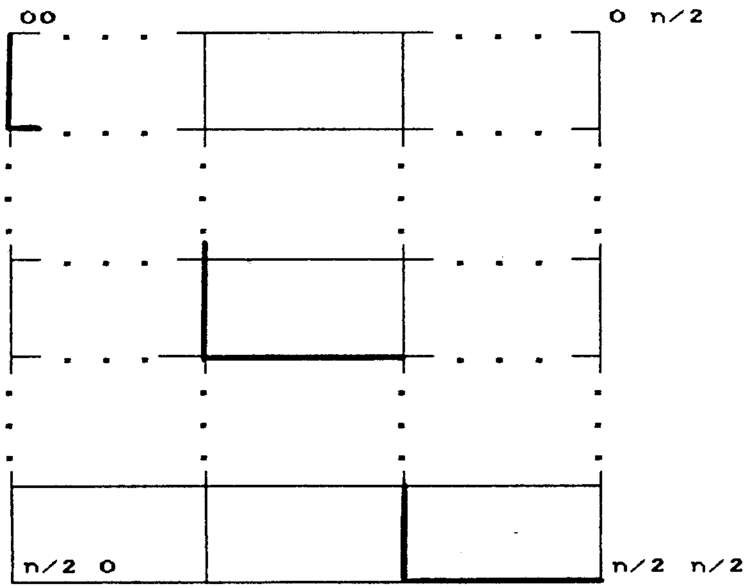

fig. 3.

EJEMPLO 2.

Trayectorias correspondientes a $\langle a_6 \rangle$ ordenada y a distintas permutaciones dos-ordenadas obtenidas con transposiciones elementales de $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle$.

a) $f\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle = \langle vhvhvh \rangle$,

b) $f\langle 2, 1, 3, 4, 5, 6 \rangle = \langle hvvhvh \rangle$,

c) $f\langle 1, 3, 2, 4, 5, 6 \rangle = \langle vvhhvh \rangle$,

d) $f\langle 1, 2, 4, 3, 5, 6 \rangle = \langle vhhvvh \rangle$,

e) $f\langle 1, 2, 3, 5, 4, 6 \rangle = \langle vhvvhh \rangle$,

f) $f\langle 1, 2, 3, 4, 6, 5 \rangle = \langle vhvhhv \rangle$.

En la figura 4. se muestran las desviaciones en la trayectoria provocadas por por las transposiciones de la permutación ordenada del ejemplo 2.

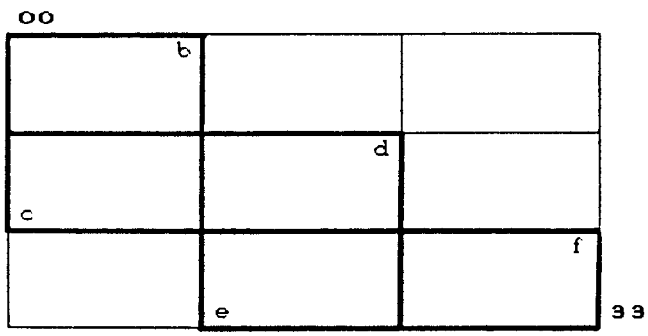

fig. 4.

Inversamente, un intercambio de una v y una h contiguas, provoca una transposición del elemento a_i con a_{i+1} en la permutación ordenada $\langle 1, 2, 3, \ldots, n \rangle$.

i.e.

$\langle vh \ldots vh \ldots vh \rangle \dashrightarrow \langle 1, 2, \ldots, i, i+1, \ldots, n-1, n \rangle$,

$\langle vh \ldots hv \ldots vh \rangle \dashrightarrow \langle 1, 2, \ldots, i+1, i, \ldots, n-1, n \rangle$.

DEFINICION. Llamaremos secuencia ordenada v-h, a una cadena de la forma c = <vhvh ...>, donde el conjunto de elementos asociados $c^* = V \cup H$ con $\#(V) = \lfloor n/2 \rfloor$ y $\#(H) = \lceil n/2 \rceil$.

LEMA 2. A partir de cualquier secuencia c' asociada con c'*, es posible mediante un número finito de intercambios de elementos contiguos reducir c' a una sucesión v-h ordenada c y viceversa. Lo anterior es fácil de ver, ya que se reduce a obtener permutaciones de un arreglo de longitud n con elementos repetidos.

TEOREMA 1. f es una función BIYECTIVA.

Prueba. Dado que

$$\#(P) = \#(D_n) = C(n, \lfloor n/2 \rfloor),$$

sólo probamos que f es sobreyectiva. Una transposición de elementos a_i, a_{i+1} (en la permutación ordenada) provoca un intercambio de elementos adyacentes en una secuencia c y por tanto una desviación de la trayectoria de esquina a esquina y por aplicación del lema 2, siempre es posible dado $d \in D_n$ encontrar $p \in P$ tal que $f(p) = d$.

EJEMPLO 3. Determinar $f^{-1}(d)$ para $n = 6$, donde d es como se muestra en la figura 5.

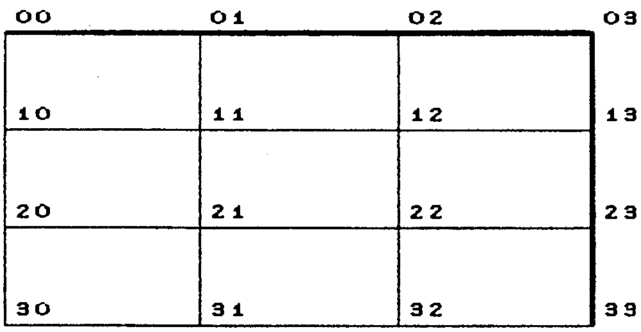

fig. 5.

La secuencia c' correspondiente a esta trayectoria es de la forma

c' = <hhhvvv>

La cual se puede reducir a c mediante los siguientes pasos

<hhhvvv> <--> <hhvhvv>

<--> <hvhhvv>

<--> <hvhvhv>

<--> <vhhvhv>

<--> <vhvhhv>

<--> <vhvhvh>,

Ahora, tomando las permutaciones correspondientes con una transposición elemental de la permutación ordenada obtenemos

<vhvhvh> <---------> <1, 2, 3, 4, 5, 6>

<vhvhhv> <---------> <1, 2, 3, 4, 6, 5>

<vhhvhv> <---------> <1, 2, 4, 3, 6, 5>

<hvhvhv> <---------> <2, 1, 4, 3, 6, 5>

<hvhhvv> <---------> <2, 1, 5, 3, 6, 4>

<hhvhvv> <---------> <3, 1, 5, 2, 6, 4>

<hhhvvv> <---------> <4, 1, 5, 2, 6, 3>

Por tanto

$f^{-1}(d) = \langle 4, 1, 5, 2, 6, 3 \rangle$.

CONTEO DEL NUMERO DE INVERSIONES EN UNA PERMUTACION 2-ORDENADA.

Dado que una sola transposición de los elementos a_i y a_{i+1} de la permutación ordenada <1, 2, 3, ..., n> provoca una DESVIACION DE LA TRAYECTORIA, esto genera geométricamente el área encerrada por el cuadrado formado por la trayectoria correspondiente a la permutación ordenada y la permutación dos-ordenada que se obtiene al efectuar la transposición, esta área (un cuadrado) corresponde a tener una INVERSION de la permutación ordenada. Por tanto, contando los cuadrados distinguidos entre la trayectoria ordenada y una trayectoria 2-ordenada cualquiera, se puede determinar el número de inversiones de la última.

EJEMPLO 4. La permutación del ejemplo 3, tiene 6 inversiones.

Una alternativa para determinar el número de inversiones en una permutación dos-ordenada es mediante la utilización de los PESOS que tiene una trayectoria.

DEFINICION. El peso de un segmento vertical $\overline{(i,\ j)(i+1,\ j)}$ se define como

$$I(\overline{(i,\ j)(i+1,\ j)}) = |i - j|.$$

Para la trayectoria correspondiente a la permutación ordenada,

$$I(\overline{(i,j)(i+1,\ j)}) = 0, \quad 0 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor \ , \quad 0 \le j \le \lceil n/2 \rceil .$$

Los pesos asociados a cada segmento vertical, miden la LEJANIA de este segmento con respecto a los segmentos verticales de la trayectoria correspondiente a la permutación ordenada.

Una forma equivalente de determinar el número de inversiones de una permutación dos-ordenada es sumando los pesos a través de la trayectoria correspondiente a esta permutación.

EJEMPLO 5. En la figura 6, se muestran los pesos asociados a la trayectoria correspondiente a la permutación del ejemplo 3, mostrándose el número de inversiones de esta permutación.

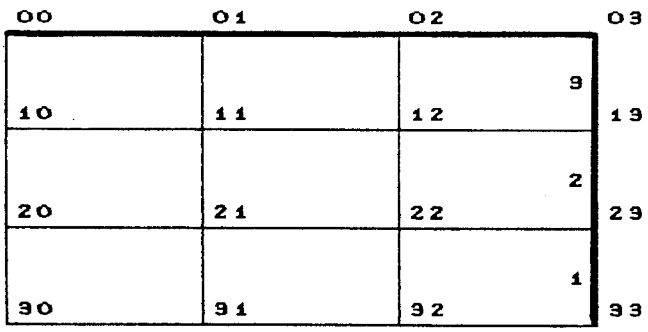

fig. 6.

CALCULO DE A_n Y PROMEDIO DE INVERSIONES EN UNA PERMUTACION 2-ORDENADA.

TEOREMA 2. En un diagrama de rejilla, el número de trayectorias de (a, b) a (a', b') cuando $a \le a'$ y $b \le b'$ está dado por

$$C(a'-a+b'-b,\ a'-a). \tag{3}$$

DEMOSTRACION. El número de trayectorias de (a, b) a (a', b') corresponde al número de formas de combinar a'-a líneas verticales ("v"), con b'-b lineas horizontales("h"), obteniéndose con esto (3).

COROLARIO 1. En un diagrama de rejilla, el número de permutaciones que corresponden a las trayectorias que pasan por el segmento de línea vertical (i,j)(i+1, j) está dado por

$$C(i+j,\ i)\ C(n-i-j-1,\ \lfloor n/2 \rfloor - j). \tag{4}$$

DEMOSTRACION. De acuerdo al teorema 2, el número de trayectorias de (0, 0) a (i, j) está dado por

$$C(i+j,\ i),$$

y el número de trayectorias de (i+1, j) a $(\lfloor n/2 \rfloor,\ \lceil n/2 \rceil)$ está dado por

$$C(\lfloor n/2 \rfloor-i-1+\lceil n/2 \rceil-j,\ j) = C(n-i-j-1,\ j).$$

De acuerdo al PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACION, el número de trayectorias que pasan por el segmento de línea vertical (i,j) a (i+1, j) estará dado según (4).

El número de inversiones en todas las permutaciones 2-ordenadas de ⟨1, 2, ... , n, n+1, ... , 2n⟩ y ⟨1, 2, ... , n, n+1, ... , 2n+1⟩, se obtiene multiplicando (4) por el peso asociado y sumando sobre todos los segmentos dados. i.e.

$$A_{2n} = \sum_{i,j} |i-j|\ C(i+j,\ i)\ C(2n-i-j-1,\ n-j); \tag{5}$$

$$A_{2n+1} = \sum_{i,j} |i-j|\ C(i+j,\ i)\ C(2n-i-j,\ n-j). \tag{6}$$

TEOREMA 3. Si A_{2n} y A_{2n+1}, se definen como en (5) y en (6) respectivamente, Entonces

$$A_{2n+1} = 2 A_{2n} , \tag{7}$$

DEMOSTRACION. Usando la forma recurrente (de Pascal)

$$C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$$

en (6) se tiene

$$A_{2n+1} = \sum_{i,j} |i-j| \; C(i+j,i)[C(2n-i-j-1, n-j-1) + C(2n-i-j-1, n-j)]$$

$$= \sum_{i,j} |i-j| \; C(i+j, i) \; C(2n-i-j-1, n-j-1)$$

$$+ \sum_{i,j} |i-j| \; C(i+j, i) \; C(2n-i-j-1, n-j)$$

$$= A_{2n} + \sum_{i,j} |i-j| \; C(i+j, i) \; C(2n-i-j-1, n-j-1).$$

Si intercambiamos en A_{2n} definida en (5) i con j se tiene

$$A_{2n} = \sum_{i,j} |j-i| \; C(i+j, j) \; C(2n-j-i-1, n-i),$$

y dado que $C(2n-i-j-1, n-i) = C(2n-i-j-1, n-j-1)$, $C(j+i, j) = C(i+j,i)$ y $|i-j| = |j-i|$ concluimos que

$$A_{2n+1} = A_{2n} + A_{2n} = 2 A_{2n}.$$

Por aplicación de (7), se tiene que $A_{2n} = (A_{2n+1})/2$, y por tanto

$$A_{2n} = 1/2 \sum_{i,j} |i-j| \; C(i+j,\ i)\ C(2n-i-j,\ n-j)$$, de donde

$$A_{2n} = \sum_{0 \le i \le j \le n} (j-i)\ C(i+j,\ i)\ C(2n-i-j,\ n-j). \qquad (8)$$

La sucesión $\langle A_{2n} \rangle$ se obtiene a partir de la función generatriz G definida por

$$G(z) = \sum_{n \ge 0} A_{2n}\, z^n = \frac{z}{(1-4z)^2}^{(*)} \qquad (9)$$

Dado que (9) converge para $z_0 = 0$, $G(z)$ puede ser escrita como

$$G(z) = \sum_{n \ge 0} \frac{(z-z_0)^n\, G^{(n)}(z_0)}{n!} = \sum_{n \ge 0} \frac{z^n}{n!}\, G^{(n)}(0).$$

de donde

$$A_{2n} = \frac{G^{(n)}(0)}{n!} \text{ para } n \ge 0.$$

Es posible establecer que

$$G^{(n)}(0) = n\, n!\, 4^{n-1}, \text{ para } n \ge 1.$$

obteniendo con esto la relación compacta

$$A_{2n} = n\, 4^{n-1}. \qquad (10)$$

Mediante un cambio de variable obtenemos

* ver referencia (1).

$$A_n = \lfloor n/2 \rfloor \; 2^{n-2}, \qquad (11)$$

que es la relación buscada.

Por aplicación de (1) y (11) se tiene que el promedio de inversiones de un permutación aleatoria 2-ordenada es

$$(\lfloor n/2 \rfloor \; 2^{n-2})/C(n, \; \lfloor n/2 \rfloor). \qquad (12)$$

Mediante aproximación de Stirling ($n! \approx \sqrt{2\pi\, n}\,(n/e)^n$) la expresión (12) se puede aproximar asintóticamente a

$$\sqrt{\pi/128}\; n^{3/2} \approx 0.5\; n^{3/2}. \qquad (13)$$

Finalmente, es fácil ver que el número máximo de inversiones es

$$C(\lfloor n/2 \rfloor + 1, \; 2) \;=\; 1/8\; n^2. \qquad (14)$$

Consideraremos ahora la generalización del caso de permutaciones 2-ordenadas, esto es cuando los incrementos son h y 1.

PROMEDIO DE INVERSIONES EN UNA PERMUTACION H-ORDENADA.

TEOREMA 3. El número promedio de inversiones de una permutación h-ordenada de {1, 2, 3, ... , n} es

$$F(n,h) = \frac{2^{2q-1}\; q!q!}{(2q+1)!}(C(h,2)q(q+1)+C(r,2)(q+1)-(1/2)C(h-r,2)q), \qquad (15)$$

donde $q = \lfloor n/h \rfloor$, y $r = n \bmod h$.

Note que cuando $h \geq n$, $F(n,h) = 1/2C(n, 2)$.

DEMOSTRACION. Una permutación h-ordenada, contiene r subsecuencias ordenadas de longitud q+1, y h-r de longitud q.

Cada inversión se genera a partir de una pareja de distintas subsecuencias, y una pareja dada de distintas subsecuencias en una permutación aleatoria h-ordenada define una permutación aleatoria dos-ordenada. Es decir, si tenemos las subsecuencias a_i, a_{i+h}, ..., a_{i+ph} y a_j, a_{j+h}, ..., a_{j+uh} donde p y u son q ó q+1 y j>i, se puede formar la subsecuencia dos ordenada a_i, a_j, a_{i+h}, a_{j+h}, ..., a_{i+ph}, a_{j+ph}.

Los promedios de inversiones en las subsecuencias resultantes son

i) $C(r,2) \dfrac{A_{2q+1}}{C(2q+2,\ q+1)}$ si $p=q+1$ y $u=q+1$.

ii) $r(h-r) \dfrac{A_{2q+1}}{C(2q+1,\ q)}$ si $p=q$ y $u=q+1$ ó $p=q+1$ y $u=q$.

iii) $C(h-r,\ 2) \dfrac{A_{2q}}{C(2q,\ q)}$ si $p=q$ y $u=q$.

El número promedio total de inversiones es por tanto la suma de los promedios del número de inversiones entre cada par de subsecuencias

$$F(n,h)=C(r,2)\frac{A_{2q+2}}{C(2q+2,q+1)} + r(h-r)\frac{A_{2q+1}}{C(2q+1,q)} + C(h-r,\ 2)\frac{A_{2q}}{C(2q,q)} .$$

La cual se reduce a (15).

COROLARIO 2. Si la secuencia de incrementos h_t, ... , h_1 satisface la condición

$$h_{s+1} \bmod h_s = 0, \quad \text{para} \quad t > s \geq 1, \tag{16}$$

entonces el promedio de movimientos $\overline{B}$ es

$$\overline{B} = \sum r_s\, F(q_s + 1,\ h_{s+1}/h_s) + (h_s - r_s)\, F(q_s,\ h_{s+1}/h_s), \tag{17}$$

donde $r_s = n \bmod h_s$, $q_s = n/h_s$, $h_{t+1} = n\, h_t$

y F es definida en (15).

DEMOSTRACION. El proceso de h_s-ordenamiento consiste en la eliminación de transposiciones elementales en r_s subconjuntos(h_{s+1}/h_s)-ordenados de cardinalidad $q_s + 1$, y en $(h_s - r_s)$ subconjuntos de cardinalidad q_s. La condición de divisibilidad implica que cada subconjunto es una permutación(h_{s+1}/h_s)-ordenada. En esencia cada permutación (h_{s+1}/h_s)-ordenada es igualmente posible, puesto que asumimos que el conjunto original fué una permutación aleatoria de elementos distintos.

EJEMPLO 6. En la tabla 2 se muestra un h_s-ordenamiento con $h_3=9$, $h_2=3$, $h_1=1$.

TABLA 2.

503 087 512 061 908 170 897 275 653 426 154 509 612 677 765 703
9-ordenamiento
426 087 509 061 677 170 703 275 653 503 158 512 612 908 765 897
3-ordenamiento
061 087 170 426 158 509 503 275 512 612 677 653 703 908 765 897
1-ordenamiento
061 087 158 170 275 426 503 509 512 612 653 677 703 765 897 908

Aplicando el corolario anterior a este caso particuar se tiene que para el 9-ordenamiento, se tienen por procesar 7 subsecuencias 3-ordenandas de longitud 2 y dos subsecuencias de longitud 1. Para el 3-ordenamiento se tienen por procesar una subsecuencia 3-ordenada de longitud 6 y dos subsecuencias de longitud 5. Finalmente para el 1-ordenamiento se tiene por procesar una subsecuencia 3-ordenada de longitud 16. Por tanto

$\overline{B} = 29.$

La condición de divisibilidad (17) en el corolario anterior siempre se satisface para un método de dos pasos, esto es, cuando los incrementos son h y 1. Si $q = \lfloor n/h \rfloor$ y $r = n \bmod h$, la cantidad B deberá tener un promedio de

$$r\ F(q+1,\ n) + (h-r)\ F(q,\ n) + F(n,\ h)$$

$$= (r/2)\ C(q+1,\ 2) + \frac{h-r}{2}\ C(q,\ 2) + F(n,\ h). \qquad (18)$$

Haciendo uso de la aproximación asintótica de Stirling descrita anteriormente, F(n, h) se puede expresar como

$F(n, h) = (\sqrt{\pi}/8)\ n^{3/2}h^{1/2}.$

Así el número promedio de inversiones para el caso dos pasos puede expresarse en forma asintótica como

$$u(n, h) = 1/8\ (\ 2n^2/h\ +\ \sqrt{\pi\ n^3 h}\ ).$$

Minimizándose u con un valor $h\ = \sqrt[n]{16\ n\ /\ \pi}$.

MODELO ASINTOTICO DEL PROMEDIO TOTAL DE MOVIMIENTOS.

Es posible reducir el número promedio de movimientos usando un mayor número de incrementos. En lo siguiente se discute la elección óptima $h_t, \ldots, h_1$ ($h_1=1$), cuando t es fijo y las h's están sujetas a la condición de divisibilidad (16).

Mediante aproximación asintótica de Stirling, $\bar{B}$ puede expresarse como

$$\bar{B} = 1/4(n^2/h_t)\ +\ \sqrt{\pi}/8[n^{3/2}h_t^{1/2}/\ h_{t-1}\ +\ \ldots\ +\ n^{3/2}h_2^{1/2}/h_1].$$

Y finalmente quedando la forma que modela el promedio asintótico de la cantidad de movimientos como

$$\bar{B} = 1/8\ \sqrt{\pi}\ n^{3/2}[h_{t+1}^{1/2}/h_t\ +\ h_t^{1/2}/h_{t-1}\ +\ \ldots\ +\ h_2^{1/2}/h_1]\ , \qquad (19)$$

donde $h_{t+1} = 4n/\pi$.

SELECCION DE H OPTIMA.

Es posible minimizar $\bar{B}$ minimizando W, donde

$$W(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_t) = \sum_{t\ \geq\ s\ \geq\ 1} \frac{h_{s+1}^{1/2}}{h_s}\ , \quad \text{cuando} \quad h_1=1.$$

Derivando con respecto a h_t e igualando a cero obtenemos

$$W_{h_s}(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_t) = \frac{1}{2h_s^{1/2}\ h_{s-1}} - \frac{h_{s+1}^{1/2}}{h_s^{2}} = 0,$$

obteniendo la forma recurrente

$$h_s^3 = 4\ h_{s+1}\ h_{s-1}^2 \text{ en donde } t > s \geq 1,\ h_{t+1} = 4n/\pi \text{ y } h_1 = 1, \qquad (20)$$

cuya solución es

$$h_s = 2^{s-2\ +\ s/(2s\ -\ 1)}\ h_{s+1}^{(2^{s-1}-1)/(2^{s}-1)} \quad \text{en donde}$$

$$t \geq s \geq 1,\ h_{t+1} = 4n/\pi \ \text{ y } h_1 = 1. \qquad (21)$$

Obteniendo con esto la secuencia óptima H que permite minimizar B cuando se cumple la condición de divisibilidad (16).

La secuencia H se obtiene con incrementos reales dado que fueron resultado de la optimización sobre un modelo asintótico. Hay que tener en cuenta que al elegir los incrementos de trabajo sean enteros y cumplan con la condición de divisibilidad (16).

CONCLUSIONES.

Es posible reducir el promedio asintótico de movimientos bajo una elección adecuada de H (secuencia de incrementos). En este trabajo se discutió una posibilidad de minimización de este promedio asintóntico cuando se toma en cuenta la condición de divisibilidad (17). A medida que se aumente el número de incrementos según (22) es posible hacer tender este promedio asintótico a $O(n^{3/2})$. De acuerdo a lo anterior es claro que se tiene la grave desventaja que la minimización ocurre cuando $t \longrightarrow \infty$. Existen otras alternativas de elección de la secuencia de incrementos óptima que permiten una mejora al tiempo de ejecución del algoritmo DISMINUCION DE INCREMENTOS que fueron propuestas en distintas épocas. Algunos de estos planteamientos son los siguientes: A.A. Papernov y G.V. Stasevich (1965), "El tiempo de ejecución del algoritmo Disminución de incrementos es $O(n^{3/2})$ cuando $h_s = 2^s - 1,\ 1 \leq s \leq t = \lfloor Lg_2 n \rfloor$ ". Vaughan Pratt (1969), "Si los incrementos se eligen del conjunto de todos los números de la forma $2^p 2^q$ los cuales son menores que n, el tiempo de ejecución del algoritmo disminución de incrementos es $O(n\ Lg_2^2\ n)$". Así como se hace un análisis para el caso de elegir una secuencia de incremetos que cumpla con la condición de divisibilidad (17), es posible hacer un análisis similar para otros tipos de secuencias tales como los Números de Fibonacci u otras.En resumen se tiene que el método de Disminución de incrementos se torna en un problema abierto en cuanto se refiere a cuál es en general la secuencia óptima que minimice el tiempo de ejecución.

REFERENCIAS

1) KNUTH, D. E., The art of computer programing; vol. 1 /Fundamental algorithms.: Addison-Wesley.

2) KNUTH, D. E., The art of computer programing; vol. 3 /Sorting and searching.: Addison Wesley.

3) LANG, S., Algebra lineal.: Fondo educativo interamericano, S.A.

4) STANAT, D. F., Discrete mathematics in computer science.: Prentice-Hall, Inc.

5) KREYSZIG, E., Introducción a la estadística matemática, principios y métodos.: Limusa.

6) VERDE, L., Introducción a las matemáticas discretas.: IV Coloquio del departamento de matemáticas del centro de in-- vestigación y estudios avanzados del IPN.