Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas

NÚMERO DE DISCONEXIÓN EN GRÁFICAS FINITAS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:

Victor Antonio Aguilar Arteaga

Dirigido por:

MC. Roberto Torres Hernández

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Enero de 2012
México

A la memoria de mi papa Benito, mi mama Toña y mi tía Angelina.
—por que la sangre nunca muere.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer principalmente a mis padres Servando y Laura, por que sin su apoyo este trabajo no hubiera sido posible. A mis hermanos Daniel y Lucero que también estuvieron conmigo en todo momento.
A Gilberto Reynoso Meza pues fue quien me encamino en la olimpiada de matemáticas. Gracias a su ejemplo y consejos, pude terminar esta carrera.
Al M.C. Roberto Torres Hernández quien amablemente me dirigio esta tesis, siempre me brindo su apoyo y me encamino en la Teoría de Continuos.
Al Dr. Alejandro Illanes Mejía por dedicar tiempo a revisar este trabajo y darme la oportunidad de asistir a los talleres de investigación en Hiperespacios y Continuos.
Al Dr. Raúl Escobedo por su apoyo y por el tiempo dedicado a este trabajo.
A la MDM Carmen Sosa Garza por todo su apoyo durante la carrera y la confianza ofrecida a mi trabajo.
Al MC. Armando Baldenebro Obeso por dedicarle tiempo a este trabajo y por las discusiones ofrecidas en los cursos de Análisis Matemático.
A todos mis amigos y compañeros que hicieron que estos años durante la carrera fueran de los mejores de mi vida.

RESUMEN

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo.
Una *gráfica finita* es un continuo que se puede poner como una unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito.

Dado un punto p en G, se define su orden como el número natural n tal que p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un $n-odo$ de manera que el vértice del $n-odo$ se corresponda con p y se denota como $o(p, G)$.
A los puntos de orden 1 se les llama *puntos terminales* de G, a los puntos de orden 2 se les llama *puntos ordinarios* de G y a los puntos de orden mayor o igual que 3 se les llama *puntos de ramificación* de G.
Los vértices de G son los puntos v en G tales que $o(v, G) \neq 2$.
Dada una gráfica finita G se denota por E el conjunto de arcos de G, por N el conjunto de vértices de G y por P el conjunto de puntos terminales de G.
Se usara la notación $\#C$ para denotar el número de elementos de un conunto finito C.
La caracteristica de Euler $\chi(G)$ se define de la siguiente manera:

$$\chi(G) = \#N - \#E.$$

Se dice que un continuo X tiene *número de disconexión* n, $n \leq \aleph_0$, si para cualquier $A \subset X$ con cardinalidad n se cumple que $X - A$ es disconexo. Se escribe $D(X) \leq \aleph_0$ para indicar que X tiene un número de disconexión. Cuando $D(X) \leq \aleph_0$, la notación $D^s(X)$ denota el más pequeño número de disconexión para X.
Sea p un punto en un continuo X. Se dice que p es un *punto de corte* de X si $X - \{p\}$ es disconexo y que p es un *punto no de corte* de X si $X - \{p\}$ es conexo.

Es bien sabido que todo continuo X tiene un punto que no es de corte (Non-Cut Point Existence Theorem). Entonces para cualquier continuo X se tiene

$$D^s(X) \geq 2.$$

El presente trabajo tiene como intención estudiar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles continuos X satisfacen $D^s(X) = n$?, donde n es un número natural.

2. Dado un número natural $n \geq 2$, ¿Cuántos continuos distintos existen tales que $D^s(X)$?.

La prueba del Non-Cut Point Existence Theorem se encuentra en el capítulo 1, así como los preliminares necesarios para empezar a estudiar las preguntas anteriores. La respuesta a la primer pregunta se da en el capítulo 2, donde se prueba que un continuo X satisface $D^s(X) = n$, con $n > 1 \in \mathbb{N}$, si y sólo si X es una gráfica finita, por esta razón tiene

sentido estudiar la pregunta 2. Además se establece una fórmula para calcular $D^s(G)$ de la siguiente manera:

$$D^s(G) = 2 - \chi(G) + \#E$$

ó

$$D^s(G) = 2 - \#V + \#A + \#E$$

y se dan algunas caracterizaciones a gráficas finitas.

La segunda pregunta es más difícil de contestar, pues en la literatura matemática no se encuentra aún la respuesta. Sin embargo, se presentan los resultados recientes encaminados a responder dicha pregunta. En el capítulo 3 se presentan estos resultados, de manera concreta se prueba un teorema que permite construir las gráficas X tales que $D^s(X) = n+1$ a partir de las gráficas G tales que $D^s(G) = n$ y se establecen cotas para estimar el crecimiento de D^s_n, donde para cada $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, D^s_n denota el conjunto de gráficas topológicamente diferentes X tales que $D^s(X) = n$.

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria I

Agradecimientos III

Resumen V

Índice general VII

1. PRELIMINARES **1**
- 1.1. Topología General . . . 1
  - 1.1.1. Espacios Métricos . . . 1
  - 1.1.2. Espacios Topológicos . . . 5
  - 1.1.3. Bases y Subbases . . . 9
  - 1.1.4. Conjuntos Asociados . . . 13
  - 1.1.5. Funciones Continuas y Homeomorfismos . . . 17
  - 1.1.6. Axiomas de Separación . . . 20
  - 1.1.7. Conexidad . . . 21
  - 1.1.8. Compacidad . . . 25
- 1.2. Teoría de Continuos . . . 27
  - 1.2.1. Definición de Continuo . . . 27
  - 1.2.2. Puntos de Corte . . . 30
  - 1.2.3. Gráficas Finitas . . . 34

2. NÚMERO DE DISCONEXIÓN **41**
- 2.1. Definición . . . 41
- 2.2. Resultados sobre Gráficas Finitas . . . 42
- 2.3. Resultados Auxiliares . . . 47
- 2.4. Teorema Principal de Caracterización . . . 51
- 2.5. Algunas aplicaciones del Teorema Principal de Caracterización . . . 52

3. NÚMERO DE DISCONEXIÓN DE UNA GRÁFICA FINITA **57**
- 3.1. Descripción del problema de Sam B. Nadler . . . 57
- 3.2. Teorema Principal . . . 58
- 3.3. Consecuencias del Teorema Principal . . . 62

Bibliografía **69**

I. PRELIMINARES

En este capítulo se revisan los conceptos básicos de Topología General y Teoría de Continuos que son necesarios para el desarrollo de los temas centrales de esta tesis.

I.1. Topología General

I.1.1 Espacios Métricos

Se puede pensar en una distancia como una función que a un par de objetos distintos les asigna un número real positivo (su separación). Sin embargo esta distancia no puede ser una función arbitraria. Por ejemplo, si la función $d(x, y) = |x - 2y|$ fuera una distancia en el conjunto de los números reales, pasarían cosas muy extrañas como que la distancia entre 100 y 50 es 0 pero la de 50 a 100 es 150, es decir, 100 esta infinitamente cerca de 50, pero 50 esta algo lejos de 100.
Para evitar este tipo de situaciones se estableció una definición rigurosa que es muy intuitiva y se ajusta a las necesidades matemáticas.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una **distancia** (o métrica) en X si se cumplen las siguientes propiedades*

1. $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; \forall x, y, z \in X$ *(Desigualdad del triángulo)*

En estas condiciones se dice que el par (X, d) es un espacio métrico.

Con el abuso de notación, muchas veces se dice que X, en vez de (X, d), es un espacio métrico si se da por supuesto cúal es la distancia d.

Ejemplo 1.1 *La distancia más común en $\mathbb{R}$ es la definida por $d(x, y) = |x - y|$ y se conoce como la distancia usual.*

Ejemplo 1.2 *La distancia usual se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:*

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

o

$$d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplo 1.3 *En el conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función*

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

define una distancia.

Ejemplo 1.4 *Sea el conjunto*

$$X = \{\Theta, \Phi, \Omega\}$$

una métrica para X es

$$\begin{array}{lll} d(\Theta,\Theta) = 0 & d(\Phi,\Phi) = 0 & d(\Omega,\Omega) = 0 \\ d(\Theta,\Phi) = 1 & d(\Theta,\Omega) = 1 & d(\Phi,\Omega) = 1 \end{array}$$

Con el ejemplo anterior se puede observar que en cualquier conjunto, por raro que parezca, se puede definir una distancia.

Ejemplo 1.5 *Sea X un conjunto no vacío. La distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = y \\ 1 & \textit{si } x \neq y \end{cases}$$

Se conoce como la métrica discreta, pues separa a cada par de puntos a la misma distancia.

Con frecuencia se necesita considerar simultáneamente todos los puntos que están suficientemente cerca, a menos de una distancia dada, de algún punto dado. Para esto se introducen dos nuevos conceptos.

Definición 1.2 *Si (X,d) es un espacio métrico, se llama **bola abierta** centrada en $x \in X$ y de radio $\epsilon > 0$ al conjunto*

$$B(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$$

*Análogamente, se llama **bola cerrada** centrada en $x \in X$ y de radio $\epsilon > 0$ al conjunto*

$$\overline{B}(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon\}$$

Ejemplo 1.6 *En $\mathbb{R}$ se tiene*

$$\begin{array}{rl} B(0,2) = \overline{B}(0,2) = 0 & \textit{Con la distancia discreta} \\ B(0,2) = (-2,2) & \textit{Con la distancia usual} \\ \overline{B}(0,2) = [-2,2] & \textit{Con la distancia usual} \end{array}$$

Definición 1.3 *Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que $U \subset X$ es un **conjunto abierto** si para todo $x \in X$ existe una bola abierta $B(x,\epsilon) \subset X$. En este caso, también se dice que U es un entorno (entorno abierto) de cualquiera de los puntos que contiene.*

Ejemplo 1.7 *El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.*

Ejemplo 1.8 *El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ no es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual. Pues por ejemplo, ninguna bola abierta centrada en el origen está totalmente contenida en A.*

Ejemplo 1.9 *El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.*

Ejemplo 1.10 *$A = \mathbb{Q}$ no es un abierto de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, pues cualquier bola centrada en un número irracional contiene números irracionales.*

Teorema 1.1 *En cualquier espacio métrico, (X, d) las bolas abiertas son conjuntos abiertos.*

Demostración Sea $B(x, \epsilon)$ una bola abierta en X.
Se requiere probar que para todo $y \in B(x, \epsilon)$ existe un $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$.
Sea $y \in B(x, \epsilon)$ entonces $d(x, y) < \epsilon$.
Tomando $\delta = \epsilon - d(x, y)$ se tiene, para cualquier $z \in B(y, \delta)$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta = d(x, y) + (\epsilon - d(x, y)) = \epsilon$$

Así, para todo $z \in B(y, \delta)$ se cumple que $z \in B(x, \epsilon)$, es decir, $B(y, \delta) \subset B(x, \epsilon)$.
Por tanto, las bolas abiertas son conjuntos abiertos.

Trabajando un poco se puede ver que se pueden crear nuevos conjuntos abiertos a partir de otros conjuntos abiertos, además de que existen ciertos conjuntos que siempre son abiertos, esto se describe en el siguiente Teorema.

Teorema 1.2 *Sea (X, d) un espacio métrico se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *El vacío es un conjunto abierto.*

2. *X es un conjunto abierto.*

3. *Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos abiertos entonces $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ es abierto.*

4. *Si para cada $\alpha \in I$, A_α es un conjunto abierto, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto.*

Demostración Se tiene:

1. Es cierto por vacuidad.

2. Basta con tomar $\epsilon = 1$ y por la definición de Bola, $B(x, 1) \subset X \quad \forall x \in X$.

   Así, X es vecindad de cada uno de sus puntos y por tanto es abierto.

3. Sea $x \in A = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. Entonces para cada $i : 1, 2, ..., n$ existe un $\epsilon_i > 0$ tal que $B(x, \epsilon_i) \subset A_i$.

   Tomando $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n\}$ se tiene que $B(x, \epsilon) \subset A$.

   Así, A es vecindad de cada uno de sus puntos y por tanto es abierto.

4. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ entonces $x \in A_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in I$.

   Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A_{\alpha_0} \subset A$. Así, A es vencindad de cada uno de sus puntos y por tanto es abierto.

Los complementos de los conjuntos abiertos, tienen un interés especial y por eso también reciben nombre.

Definición 1.4 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjuto $F \subseteq X$ se llama* ***cerrado*** *si y sólo si su complemento es abierto.*

Observación El complemento de un subconjunto A de un conjunto X suele denotarse por A^c o $X - A$.

Ejemplo 1.11 *En $\mathbb{R}$ con la distancia usual el conjunto $[0, 2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$ es un conjunto cerrado.*

Ejemplo 1.12 *El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.*

Como consecuencia de las propiedades del conjuntos abiertos (Teorema 1.2) se pueden deducir algunas propiedades de los conjuntos cerrados.

Teorema 1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico, se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *El vacío es un conjunto cerrado.*

2. *X es un conjunto cerrado.*

3. *Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos cerrados entonces $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ es cerrado.*

4. *Si para cada $\alpha \in I$, A_α es un conjunto cerrado, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ es cerrado.*

Demostración Se tiene

1. Como X es un conjunto abierto entonces el vacío es cerrado.

2. Como $\emptyset$ es un conjunto abierto entonces X es cerrado.

3. Como cada uno de los conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ es cerrado entonces $A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c$ son conjuntos abiertos. Por las leyes de De'Morgan obtenemos

$$\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n\right)^c = A_1^c \bigcap A_2^c \bigcap \cdots \bigcap A_n^c$$

   Así, el complemento de $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es abierto, pues es intersección finita de conjuntos abiertos.

   Por tanto, A es cerrado.

4. Como A_α es cerrado $\forall \alpha \in I$ entonces A_α^c es abierto $\forall \alpha \in I$. Por las leyes de De'Morgan obtenemos

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

   Asi, el complemento de $A = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto, pues es una unión arbitraria de conjuntos abiertos.

   Por tanto, A es cerrado.

I.1.2 Espacios Topológicos

Cuando se estudia continuidad es necesario definir quienes son los conjuntos abiertos. Pero cuando no hay una métrica para distinguir aquellos puntos cercanos a un punto dado se necesitan definir los abiertos de otra manera. El desarrollo de la teoría ha extendido el concepto de continuidad más allá de los espacios métricos creando los espacios topológicos.

Definición 1.5 *Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{T}$ es una **topología** definida sobre X si τ es una colección de subconconjuntos de X tales que*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. *Si* $U_\alpha \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in I$ *entonces* $\underset{\alpha \in I}{\cup} A_\alpha \in \mathcal{T}$
3. *Si* $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ *entonces* $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Además, a los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama abiertos y se dice que el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Como con los espacios métricos, si $\mathcal{T}$ se sobreentiende, se abrevia $(X, \mathcal{T})$ por X.

Observación Esta definición es mejor considerarla como un convenio al que se recurre para comprobar que algo es una topología. También es interesante ver como una Topología conserva las propiedades de los abiertos en los espacios métricos.

Como en los espacios métricos, los complementos de los conjuntos abiertos reciben el mismo nombre.

Definición 1.6 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $F \subseteq X$ es un **cerrado**, si su complemento es abierto, es decir, si $F^c \in \mathcal{T}$.*

Observación De la definición de Topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y la unión finita de cerrados es un cerrado. La prueba es la misma que la realizada en el Teorema 1.3 (véase la página 4) pues en esta demostración solo se usaron las definiciones de abierto y cerrado y en ningún momento se utilizo el hecho de ser espacio métrico.

Ejemplo 1.13 *Sea $X = \{\Box, \triangle, \diamondsuit, \heartsuit\}$. Las colecciones de subconconjuntos de X*

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{\Box\}, \{\Box, \triangle\}, \{\Box, \triangle, \diamondsuit\}\} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{\heartsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\triangle, \Box\heartsuit\}\}$$

son topologías sobre X pero $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{\heartsuit\}, \{\Box\}\}$ no lo es porque $\{\Box\}$ y $\{\heartsuit\}$ son abiertos pero su unión no.

Los siguientes dos ejemplos muestran que con cualquier conjunto se puede definir una topología.

Ejemplo 1.14 *Se llama topología discreta sobre X, a la formada por todos los subconjuntos de X. Por ejemplo, si $X = \{\sharp, \flat, \natural\}$*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{\sharp\}, \{\flat\}, \{\natural\}, \{\sharp, \flat\}, \{\sharp, \natural\}, \{\flat, \natural\}, \{\sharp, \flat, \natural\}\}$$

es la topología discreta sobre X.

Ejemplo 1.15 *Se llama topología trivial sobre X a $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Es decir, solo hay dos abiertos, los triviales.*

Ejemplo 1.16 *En cualquier conjunto X se define la* ***topología cofinita*** *como la topología en la que los abiertos son $\emptyset, X$ y todos los subconjuntos de X cuyo complemento tenga un número finito de elementos. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ la topología cofinita es*
$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U : U = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N} x_n\}$.

Observación En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por que ser un abierto o un cerrado, respectivamente.
Por ejemplo, en la topología cofinita $\mathcal{T}$ definida sobre $\mathbb{R}$, tomando los abiertos $U_x = \mathbb{R} - \{x\}$ se tiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} U_x = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}.$$

Si d define una distancia en un conjunto, también la define en cualquiera de sus subconjuntos sin más que restringirla a ese subconjunto.
Algo parecido se puede hacer con los espacios Topológicos.

Definición 1.7 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. Se llama* ***topología del subespacio, topología inducida, topología relativa o topología heredada*** *(de $\mathcal{T}$) a la topología sobre A dada por*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

Observación Lo que quiere decir la definición anterior es que los abiertos en A se obtienen intersectando todos los abiertos en X con A. En otras palabras, un subconjunto H de A es un conjunto $\mathcal{T}_A-$abierto, es decir, abierto respecto a A, si y sólo si existe un subconjunto $\mathcal{T}-$abierto G de X tal que

$$H = G \cap A$$

.
También $\mathcal{T}_A$ hereda las propiedades topológicas de $\mathcal{T}$.

Hasta el momento se ha definido la topológia relativa con la palabra "topología", sin haber comprobado las 3 propiedades que se deben satisfacer. Pues bien, la topología relativa como se ha definido forma una topología.

Teorema 1.4 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. La topología relativa sobre A dada por*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología.

Demostración Se tiene

1. $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$ pues se obtienen de la siguiente manera $\emptyset = \emptyset \cap A$ y $A = A \cap X$ respectivamente.

2. Sean $A_\alpha \in \mathcal{T}_A \ \forall \alpha \in I$. Entonces existen abiertos $U_\alpha \in \mathcal{T}$ tales que $A_\alpha = A \cap U_\alpha$.

   Realizando la unión de los A_α se obtiene

   $$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap U_\alpha) = A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right)$$

   Así, la unión arbitraria de abiertos en $\mathcal{T}_A$ es de nuevo un abierto, pues es la intersección de A con una unión arbitraria de abiertos en $\mathcal{T}$, que es un abierto en $\mathcal{T}$.

3. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abiertos en $\mathcal{T}_A$. Entonces existen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos en $\mathcal{T}$ tales que $A_1 = A \cap U_1, A_2 = A \cap U_2, \ldots, A_n = A \cap U_n$

   Realizando la intersección de los A_i se obtiene

   $$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) \cap \ldots \cap (A \cap U_n) = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right)$$

   Así, la intersección finita de abiertos en $\mathcal{T}_A$ es de nuevo un abierto, pues es la intersección de A con una intersección finita de abiertos en $\mathcal{T}$, que es un abierto en $\mathcal{T}$.

De $1, 2$ y 3 se concluye que la topología relativa sobre A es una topología.

Una caracterización para los conjuntos cerrados en la topología relativa es la siguiente:

Proposición 1.1 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. $B \subset A$ es cerrado en $\mathcal{T}_A$ si y sólo si $B = C \cap A$ donde C es cerrado en $\mathcal{T}$.*

Demostración B es cerrado en $\mathcal{T}_A$ si y sólo si $A - B \in \mathcal{T}_A$, es decir, si y sólo si $A - B = U \cap A$ para algún $U \in \mathcal{T}$ y esto equivale a $B = (X - U) \cap A$, así basta con tomar $C = X - U$.

Ejemplo 1.17 *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ una topología sobre X es*

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Tomando el subconjunto $A = \{a, d, e\}$ de X, se puede ver que

$$X \cap A = A, \quad \{a\} \cap A = \{a\}, \quad \{a, c, d\} \cap A = \{a, d\}$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset, \quad \{c, d\} \cap A = \{d\}, \quad \{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}$$

Por tanto, la topología relativa de $\mathcal{T}$ sobre A es

$$\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$

Definición 1.8 *Sean X y Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una función sobreyectiva. La función p se dice que es una **función cociente** siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Con este tipo de funciones se puede definir una topología.

Definición 1.9 *Sea X un espacio topológico, A un conjunto y p una función cociente. Se llama **topología cociente** sobre A a la topología en la que un conjunto $U \subset A$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Observación Otra manera de definir la topología cociente es como la más fina sobre $X/\sim$ tal que p es continua.

Teorema 1.5 *Sea X un espacio topológico, A un conjunto y p una función cociente. La topología cociente $\mathcal{T}$ es una topología.*

Demostración Se tiene

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ por que $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $p^{-1}(A) = X$.

2. Sean U_α con $\alpha \in I$ abiertos en $\mathcal{T}$ se tiene

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} p^{-1}\left(U_\alpha\right)$$

Luego, $p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)$ es la unión de abiertos en la topología de X lo que es abierto.

Así, la unión arbitraria de abiertos en $\mathcal{T}$ es un abierto.

3. Sean $U_1, U_2, \cdots, U_n$ abiertos en $\mathcal{T}$ se tiene

$$p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

Luego, $p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)$ es la intersección finita de abiertos en la topología de X lo que es un abierto.

Así, la intersección finita de abiertos en $\mathcal{T}$ es un abierto.

$1, 2$ y 3 prueban que $\mathcal{T}$ es una topología.

Ejemplo 1.18 *Sea p la aplicación de la recta real $\mathbb{R}$ sobre el conjunto de tres puntos $A = \{a, b, c\}$ definida por*

$$p(x) = \begin{cases} a & \textit{si } x > 0 \\ b & \textit{si } x < 0 \\ c & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

La topología cociente sobre A inducida por p es la siguiente

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

El último caso de un espacio topológico que se definirá involucra a el conjunto cociente. Para recordar, si en un conjunto X se ha definido una relación de una equivalencia, $\sim$, se llama **conjunto cociente**, X^*, al conjunto de las clases de equivalencia.

Definición 1.10 *Sea X un espacio topológico , $\sim$, una relación de equivalencia definida en X y $p : X \to X^*$ la función sobreyectiva que asigna a cada elemento de X la clase de equivalencia a la que pertenece. En la topología cociente inducida por p, el espacio X^* se denomina* ***espacio cociente*** *de X.*

Se puede pensar en el espacio cociente como aquel que agrupa elementos similares. Intuitivamente lo que hace p es *pegar* esos puntos y la topología cociente del espacio cociente dice que algo será abierto si al *despegarlo* lo es en el espacio topológico inicial.

Ejemplo 1.19 *Sea X el intervalo cerrado $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ y sea X^* la partición de X dada por todos los conjuntos unipuntuales $\{\{x\} : 0 < x < 1\}$ junto con el conjunto $\{0, 1\}$.*
El espacio cociente X^* es homeomorfo al conjunto $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.
Intuitivamente lo que hace el espacio cociente es tomar el $[0, 1]$ como si fuera un hilo, "pegarlo" en los puntos 0,1 y los demás puntos dejarlos intactos.

I.1.3 Bases y Subbases

Para estudiar conceptos como convergencia y continuidad es bueno saber reconocer los abiertos "muy pequeños", esto motiva el concepto de base. Una base puede pensarse con las bolas abiertas en el espacio métrico: $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual.
La idea intuitiva es que los elemenetos de una base lo cubren todo y se pueden empequeñecer.

Definición 1.11 *Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{B}$ es una* ***base*** *si es una colección de subconjuntos de X que satisface*

1. $\forall x \in X\ \exists B \in \mathcal{B}:\ x \in B$.
2. $\forall x \in B_1 \cap B_2$, *con* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si se piensa en los elementos de la base como bolas abiertas, almenos se debería poder trabajar con ellos como con las bolas abiertas.

Definición 1.12 *Dada una base $\mathcal{B}$ en X la* ***topología generada por*** *$\mathcal{B}$, es aquella tal que U es abierto si y sólo si para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

Es necesario ver que la topología generada por la base es efectivamente una topología, para justificar la palabra topología en la definición anterior.

Teorema 1.6 *Sean X un conjunto distinto del vacío y $\mathcal{B}$ una base de X. La topología generada por la base es realmente una topología.*

Demostración Sea tiene

1. El vacío esta por vacuidad y X esta en la topología pues cumple la definición de abierto.
2. Sean U_α abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$. Si $x \in \cup U_\alpha$ entonces $x \in U_{\alpha_0}$ para algún α_0 y como $x \in U_{\alpha_0}$ es abierto en la en la topología generada por la base existe un elemento de la base B tal que $x \in B \subset U_{\alpha_0} \subset \cup U_{alpha}$. Así, $\cup U_\alpha$ cumple la definición de abierto.

   Por tanto, la unión arbitraria de abiertos en la topología generada por la base es de nuevo un abierto.
3. Se probará por inducción que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base es de nuevo un abierto.

   Sean U_1 y U_2 abiertos, si $x \in U_1 \cap U_2$ entonces por la definición de abierto en la topología generada por $\mathcal{B}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2$. Luego por la segunda propiedad de base existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Luego, $U_1 \cap U_2$ es abierto.

   Supongamos que la intersección de cualesquiera k abiertos en la topología generada por $\mathcal{B}$ es un abierto. Sean $U_1, U_2, ..., U_k, U_{k+1}$ abiertos, por la hipótesis de inducción, la intersección de los primeros k abiertos es un abierto, digamos U. Se tiene

   $$\bigcap_{i=1}^{k+1} U_i = U \bigcap U_{k+1}$$

   Luego, esto se reduce a la intersección de dos abiertos en la topología generada por $\mathcal{B}$ que por el caso base se sabe que es un abierto.

   Así, la intersección de cualesquiera n abiertos es un abierto.

De $1, 2$ y 3 se concluye que la topología generada por $\mathcal{B}$ es efectivamente una topología.

Ya que se ha probado que la topología generada por una base es efectivamente una topología, es hora de dar un par de ejemplos.

Ejemplo 1.20 *La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$.*
*La topología en $\mathbb{R}$ generada por esta base se conoce como **topología usual**.*

Ejemplo 1.21 *La colección $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$.*
*La topología en $\mathbb{R}$ generada por esta base se conoce como **topología de Sorgenfrey** o **topología del límite inferior**.*

El ejemplo 1.18 sugiere la siguiente afirmación:

Proposición 1.2 *Dado un espacio métrico (X, d) las bolas abiertas forman un base.*

Demostración Sea $x \in X$, se tiene

1. $x \in B(x, 1)$.
2. Si $x \in B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$. Tomando $\epsilon = min\{\epsilon_1 - d(x, x_1), \epsilon_2 - d(x, x_2)\}$, se probará que $B(x, \epsilon) \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$. Sea $y \in B(x, \epsilon)$ se tiene que

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x) + d(x, y) < d(x_1, x) + \epsilon \leq d(x_1, x) + \epsilon_1 - d(x, x_1) = \epsilon_1$$

Luego, $y \in B(x_1, \epsilon_1)$. Análogamente, $y \in B(x_2, \epsilon_2)$.

Así, $y \in B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$, es decir, $B(x, \epsilon) \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$.

Por tanto, las bolas abiertas forman un base.

La proposición anterior da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.13 *Dado un espacio métrico (X, d), se llama **topología inducida por d** ó **topología métrica** a la generada por la base formada por todas las bolas abiertas.*

Ejemplo 1.22 *Se llama **Topología usual en** $\mathbb{R}^n$ a la inducida por la distancia usual.*

Es conveniente dar una caracterización para los abiertos en la topología generada por una base.

Proposición 1.3 *Dada una base, $\mathcal{B}$, cada uno de sus elementos es abierto en la topología que genera y, de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

Demostración Si $B \in \mathcal{B}$, basta con tomar $U = B$, se cumple la definición 1.9 y se tiene automáticamente que B es abierto.
Para cualquier abierto U se tiene

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B(x) \subset U$$

Donde $B(x)$ significa que $x \in B$ para algún $B \in \mathcal{B}$. Por otro lado,

$$U \subset \bigcup_{x \in U} B(x) \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B(x)$$

Por tanto, U es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.23 *El conjunto $A = \mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado en las topologías usual y la de Sorgenfrey, pues no existe ningún intervalo (a, b) ni $[a, b)$ con $a < b$ totalmente contenido en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

Ejemplo 1.24 *Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:*

$$A_1 = \{x : x > 0\} \quad A_2 = \{x : x \geq 0\} \quad A_3 = [0, 1] \quad A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$$

Se puede observar lo siguiente:

1. *A_1 es un abierto en la topología usual y en la de Sorgenfrey, pues si $x \in A_1$ entonces $x \in (\frac{x}{2}, 2x) \subset A_1$ y $x \in [x, x+1) \subset A_2$.*

2. *A_2 no es abierto en la topología usual pues no existe ningún intervalo (a, b) tal que $0 \in (a, b) \subset A_2$. Sin embargo, si es abierto en la topología de Sorgenfrey pues*

   $x \in [x, x+1) \subset A_2$ para cualquier $x \in A_2$.

   A_2 es cerrado en la topología usual por que su complemento es abierto.

3. *A_3 no es abierto en la topología usual por la misma razón que A_2 y tampoco es abierto en la de Sorgenfrey por que no esxiste $[a, b)$ tal que $1 \in [a, b) \subset [0, 1]$.*

   Sin embargo, A_3 es cerrado en la topología usual y en la topología del limite inferior.

4. *A_4 es abierto en la topología usual pues $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto y como la unión de abiertos es abierto, A_4 también lo es. En base a lo anterior basta con decir que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es un abierto en la topología de Sorgenfrey para decucir que A_4 también lo es, y si es abierto por que para cualquier $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ se cumple $x \in [x, \frac{1}{n}) \subset (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$.*

Se puede crear una topología sobre un conjunto de manera artificial, dividiendo el conjunto en pedazos y haciendo todas las intersecciones y uniones necesarias para que se cumpla la definición de Topología.

Definición 1.14 *Se dice que $\mathcal{S}$ es una **subbase** si es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X, y se llama topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ a aquella cuyos abiertos son $\emptyset$ y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

Teorema 1.7 *Sea X un conjunto distinto del vacío y $\mathcal{S}$ una subbase de X. La topología generada por la subbase es realmente una topología.*

Demostración Se demostrará que la clase $\mathcal{B}$ de las intersecciones finitas de elementos de la subbase $\mathcal{S}$ forman una base. Se tiene

1. $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ entonces $B_1 \cap B_2 = B_3 \in \mathcal{S}$ pues es interseección finita de elementos de $\mathcal{S}$. Luego, existe $B \in \mathcal{B}$ (B_3) tal que $B \subset B_1 \cap B_2$.

Así, $\mathcal{B}$ es una base de X y por la proposición 1.2 la topología generada por una subbase es realmente una topología.

Ejemplo 1.25 *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\mathcal{S} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$ una subbase de X. Las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ son*

$$\mathcal{B} = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$$

Las uniones de los elementos de $\mathcal{B}$ producen la topología

$$\mathcal{T} = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}\}.$$

Ejemplo 1.26 *Sea $\mathcal{S} = \{[a, a+1] : a \in \mathbb{R}\}$ (los intervalos cerrados de longitud 1) una subbase de $\mathbb{R}$. Se tiene que $[p-1, p] \cap [p, p+1] = \{p\}$ esta en la topología $\mathcal{T}$ generada por la subbase $\mathcal{S}$.*
Así, todos los conjuntos unitarios $\{p\}$ pertenecen a $\mathcal{T}$.
Por tanto, $\mathcal{T}$ es la topología discreta de $\mathbb{R}$.

I.1.4 Conjuntos Asociados

Si se tiene un subconjunto A de un espacio topológico X se pueden definir algunos conjuntos naturales *asociados* a A de la siguiente manera:

Definición 1.15 *Se llama **interior** de A, y se denotará como Int(A), a la unión de todos los abiertos contenidos en A.*

La idea intuitiva de interior es que es el abierto *más grande* dentro del conjunto A.

Observación Es inmediato de la definición que $A =$Int$(A) \Leftrightarrow A$ es abierto.

Definición 1.16 *Se llama **cierre** o **clausura** de A, y se denotará con $\overline{A}$, a la intersección de todos los cerrados que contienen a A.*

La idea intuitiva de cierre es que es el cerrado *más pequeño* que contiene al conjunto A.

Observación De la definición es más o menos claro que $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ es cerrado.

Definición 1.17 *Se llama* ***frontera*** *de A, y se denotará con Fr(A), al conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente al cierre de A y de su complemento. Es decir,*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

La idea intuitiva de la frontera es que son los puntos “adyacentes“ al conjunto A y a su complemento.

Definición 1.18 *Se llama conjunto de* ***puntos límite*** *o de* ***acumulación*** *de A, y se denotará por A', al conjunto de puntos tales que cualquier abierto que lo contiene intersecta a A en algún punto distinto de él mismo. Es decir,*

$$A' = \{x : \forall U abierto, x \in U \Rightarrow (U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Se puede pensar en un punto límite como los puntos que tienen muchos puntos de A ”cercanos” a él, pero hay que tener cuidado por que esta es una idea que proviene de los espacios métricos.

Ejemplo 1.27 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $A = (1, 2]$.*

Si $x \in (1, 2)$ entonces $x \in$ Int(A) pues se cumple $x \in (1, 2) \subset A$. Por otro lado, $2 \notin$ Int(A) por que no existen a, b tales que $2 \in (a, b) \subset A$. Así, Int$(A) = (1, 2)$.

$[1, 2]$ es el “cerrado más chico” que contiene a A, asi que $\overline{A} = [1, 2]$.

Si $x \in [1, 2]$ se tiene para cualquier abierto (a, b) que lo contiene $(a, b) \cap A \neq \emptyset$. Para $x > 2$ y $z < 1$, tomando los abiertos $(2, x + 1), (z - 1, 1)$ se tiene $(2, x + 1) \cap A = \emptyset$ y $(z - 1, 1) \cap A = \emptyset$ luego $x, z \notin \overline{A}$. Así $\overline{A} = [1, 2]$.

Un argumento similar al anterior sirve para verificar que $\overline{X - A} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty]$ y así Fr$(A) = \{1\} \cup \{2\}$.

Ejemplo 1.28 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual. Para $\mathbb{Q}$ se tiene que Int$(\mathbb{Q}) = \emptyset$ pues cualquier intervalo abierto contiene una infinidad números racionales e irracionales, por esta razón también se tiene que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ y que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Por último, como $\overline{X - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ entonces Fr$(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.*

Definición 1.19 *Se dice que un subconjunto A es* ***denso*** *en el espacio topológico X si $\overline{A} = X$.*

Ejemplo 1.29 *En base al ejemplo anterior, se tiene que $\mathbb{Q}$ es denso en X con la topología usual.*

Definición 1.20 *Se les llama* ***puntos aislados*** *a los elementos del conjunto $\overline{A} - A'$.*

Ejemplo 1.30 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología discreta entonces 1 es un punto aislado de $[0, 2]$ pues $\overline{[0, 2]} = [0, 2]$ por ser $[0, 2]$ cerrado y 1 no es punto límite porque con el abierto $\{1\}$ se tiene que $(\{1\} - \{1\}) \cap [0, 2] = \emptyset$.*

Ejemplo 1.31 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología indiscreta, 1 no es punto aislado del conjunto $A = \{0, 1, 2\}$ pues $\overline{A} = \mathbb{R}$ y $A' = \mathbb{R}$, así el conjunto de los puntos aislados es el vacío.*

Los ejemplos anteriores sirven para ilustrar que cuando se usen topologías distintas de la usual, más que imaginar a los puntos aislados como “lejos” del conjunto, hay que imaginarlos como no *relacionados* con otros puntos de A mediantes abiertos de la topología. Esto sirve para hacer la siguiente observación.

Observación De la definición de puntos aislados se puede deducir lo siguiente

$$x \in A - A' \Leftrightarrow \exists U(x) : U(x) \cap A = \{x\}$$

donde $U(x)$ significa que existe un abierto U que contiene a x.

Proposición 1.4 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. A es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si $A' \subset A$.*

Demostración Supóngase que A es cerrado. Sea $p \in A'$, si $p \notin A$ entonces $p \in A^c$ y como A es cerrado, $p \in A^c$ es abierto. Luego, $A \cap A^c = \emptyset$, es decir, existe un abierto que contiene a p y cuya intersección con A es el vacío, con contradicción, pues p es punto límite. Así, $p \in A$
Por tanto, $A' \subset A$ si A es cerrado. Supóngase que $A' \subset A$. Sea $p \in A^c$ como $p \notin A'$ existe un abierto U tal que

$$(U - \{p\}) \cap A = \emptyset = U \cap A$$

Así, para todo $p \in A^c$ existe un abierto U tal que $U \in A^c$ y en consecuencia A^c es un abierto, pues es unión de abiertos.
Por tanto, A es cerrado si $A' \subset A$.

Proposición 1.5 *Si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$.*

Demostración Si $p \in A'$ entonces para todo abierto U que contiene a p se tiene

$$(U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Pero como $A \subset B$, entonces para todo abierto U que contiene a p se tiene

$$(U - \{p\}) \cap B \neq \emptyset.$$

Así, $p \in B'$ y por tanto, $A' \subset B'$.

Se puede sospechar de los ejemplos que los conjuntos asociados Int(A), A' y Fr(A) no son tan independientes. Para probar esto se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.8 *Si X es un espacio topológico y $A \subset X$ entonces*

1. $\overline{A} = A \cup A'$
2. $\overline{A} =$*Int*$(A)\cup$*Fr*(A).

Demostración Se tiene

1. Como $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A}$ es cerrado, entonces $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Así, $A' \cup A \subset \overline{A}$.

   Por otro lado, si $x \in \overline{A}$ entonces $x \in A$ ó $x \notin A$. Para todo abierto U que contiene a x se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, pues si existe un abierto U^* que contiene a x y tal que $U^* \cap A = \emptyset$, tomando el cerrado $F = X - U^*$ se tienen $A \subset F$ y $x \notin F$ y como consecuencia $x \notin \overline{A}$, con contradicción.

   Luego, si $x \notin A$ se cumple $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para cualquier abierto U que contiene a x y entonces $x \in A'$. Así, $\overline{A} \subset A' \cup A$.

   Por tanto, se da la igualdad $\overline{A} = A \cup A'$.

2. Como Int$(A)\cup$Fr(A) =Int$(A) \cup (\overline{A} \cap \overline{X - A}) = (Int(A) \cup \overline{(X - A)} \cap \overline{A}$.

   Basta con probar que Int$(A) = X - \overline{(X - A)}$. Como $\overline{(X - A)}$ es cerrado,

   $x \in X - \overline{(X - A)}$ si y sólo si existe un abierto U tal que $x \in U \in X - (X - A) = A$, es decir, si y sólo si $x \in$Int(A). Así, Int$(A) = X - \overline{(X - A)}$ tal como se quería probar.

Proposición 1.6 *Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración Si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$ por la proposición 1.4.
Así, $A \cup A' \subset B \cup B'$ y por tanto, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposición 1.7 *Sea X un espacio topológico. Para cualquier par de subconjuntos A_1, A_2, se cumple*

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

Demostración Como $A_1, A_2 \subset A_1 \cup A_2$ entonces $\overline{A_1}, \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$.
Así, $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$.

Por otro lado, $A_1 \cup \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ que es un conjunto cerrado pues es la unión de conjuntos cerrados.
Luego, $A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ por que $\overline{A \cup B}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $A \cup B$. Así, $\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$

Por tanto, se obtiene la igualdad $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

Observación La igualdad puede extenderse hasta un número finito de subconjuntos, es decir, es cierto que

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

esto se deduce aplicando $n - 1$ veces el teorema anterior.

Sin embargo, esta propiedad no puede extenderse a un número infinito de subconjuntos, es decir, en general es falso que

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

Para ver esto, basta con tomar $A_n = \{\frac{1}{n}\}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

I.1.5 Funciones Continuas y Homeomorfismos

Definición 1.21 *Sean* $(X,\mathcal{T}_X)$ *e* $(Y,\mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos. Dada una función* $f : X \to Y$ *se dice que es una* ***función continua*** *si para cada* $U \in \mathcal{T}_Y$ *se tiene que* $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$*. Es decir, la imagen inversa de un abierto es siempre un abierto.*

Observación f^{-1} indica la imagen inversa conjuntista, es decir,

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

La función no tiene restricción alguna, esto es, no se pide que sea inyectiva o sobreyectiva.

Antes de ver un ejemplo, es bueno tener una herramienta para estudiar la continuidad sin tener que analizar a todos los abiertos.

Proposición 1.8 *Sean* $(X,\mathcal{T}_X)$ *e* $(Y,\mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos y* $\mathcal{B}$ *una base que genera a* $\mathcal{T}_Y$*, entonces* $f : X \to Y$ *es continua si y sólo si* $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$*.*

Demostración Supóngase que la función f es continua. De la definición de continuidad se obtiene que $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$, pues los elementos de una base son conjuntos abiertos.

Por otro lado, suponiendo que $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ y como cada abierto $U \in \mathcal{T}_Y$ se puede escribir como unión de elementos de la base, se obtiene

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Rightarrow f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

Así, $f^{-1}(U)$ es abierto pues es unión de abiertos en $\mathcal{T}_X$ y por tanto, f es continua.

Ejemplo 1.32 *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología usual y la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2$.

Para probar que f *es continua según la proposición anterior hay que demostrar que* $f^{-1}((a,b)) = \{x \in \mathbb{R} : a < f(x) < b\}$*, con* $a < b$*, es abierto. Se tienen tres casos:*

1. $f^{-1}((a,b)) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$
2. $f^{-1}((a,b)) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$
3. $f^{-1}((a,b)) = \emptyset$

En cualquier caso, $f^{-1}((a,b))$ *es abierto y por tanto* $f(x) = x^2$ *es continua.*

Observación $f^{-1}(abierto) = abierto \not\Rightarrow f(abierto) = abierto$ porque, $f(f^{-1}(A)) \neq A$, en general.

Definición 1.22 *Se dice que una función* $f : X \to Y$ *es* ***abierta*** *si para todo abierto* $U \subset X$ *se tiene que* $f(U)$ *es abierto en* Y*. Análogamente, se dice que es* ***cerrada*** *si para todo cerrado* $F \subset X$ *se tiene que* $f(F)$ *es cerrado en* Y*.*

Ejemplo 1.33 *Considerando a* $\mathbb{R}$ *con la topología usual se tiene*

1. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$, es abierta. Sin embargo, no es cerrada por que $\mathbb{R}$ es cerrado pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es cerrado.*

2. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)1 - x^2$, es cerrada. Por otro lado, no es abierta por que $f((-1, 1)) = (0, 1]$ que no es abierto.*

Hay muchas equivalencias de la definición de continuidad, como las siguientes.

Teorema 1.9 *Dada una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua*
2. *Si F es cerrado en Y entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado en X*
3. *Si $A \subset X$ entonces $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Demostración Se probará en dos pasos:

1. $1) \Leftrightarrow 2)$

   "$\Rightarrow$ " Si f es continua, sea F cerrado en Y. Así, F^c es abierto en Y y se tiene que $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$ es un abierto en X. Por tanto, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

   "$\Leftarrow$ " Sea U abierto en Y, entonces U^c es cerrado en Y. Se tiene que $(f^{-1}(U))^c = f^{-1}(U^c)$ es cerrado en X y así, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Por tanto, f es continua.

2. $2) \Leftrightarrow 3)$

   "$\Rightarrow$ " Sea $A \subset X$, se tiene $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$.

   Como $\overline{f(A)}$ es cerrado, tomando clausuras se obtiene

   $$\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(f(A))} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

   Es decir, $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ y así $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

   "$\Leftarrow$ " Si F es cerrado, tomando $A = f^{-1}(F)$ se tiene

   $$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

   y así $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$.

   Por tanto, $f^{-1}(F)$ es cerrado.

Dados $A \subset X$ y $f : X \to Y$ se denota con $f|_A$ a la restricción de f a A, es decir, $f|_A = f \circ j$ donde $j : A \to X$ es la inclusión $j(x) = x$. En otras palabras, $f|_A$ no es más que evaluar f solamente en los elementos del subconjunto A.
Algunas propiedades naturales de las funciones estan descritas en el siguiente teorema.

Teorema 1.10 *Sean X, Y y Z espacios topológicos, se tiene*

1. *Si $A \subset X$ entonces la inclusión $j : A \to X$ dada por $j(x) = x$. es continua.*

2. *Si $f : X \to Y, g : Y \to Z$ son continuas entonces $g \circ f : X \to Z$ también lo es.*

3. *(**Lema del Pegado**) Si $X = A \cup B$ con A, B cerrados en X entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f|_A$ y $f|_B$ lo son.*

Observación En los apartados 1 y 3 que involucran subespacios de X la topología que se considera en ellos es de manera natural, la topología relativa.

Demostración Se tiene

1. Si $U \subset X$ es abierto entonces $j^{-1}(U) = j^{-1}(U \cap A) = U \cap A$ es un abierto con la topología relativa. Por tanto, la inclusión j es continua.

2. Sea $U \subset Z$ abierto entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser g continua, además $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X por ser f continua.

   Es decir, $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X y por tanto, $g \circ f$ es continua.

3. "$\Rightarrow$ " Se tiene que $f|_A = f \circ j$ y $f|_B = f \circ j$ donde j es la función inclusión. Como f es continua, por 1, j es una función continua, entonces usando 2 se concluye que tanto $f|_A$ como $f|_B$ son funciones continuas.

   "$\Leftarrow$ " Sea $F \subset Y$ por la naturaleza de X se tiene que

   $f^{-1}(F) = (f|_A)^{-1}(F) \cup (f|_B)^{-1}(F)$, luego $(f|_A)^{-1}(F)$ y $(f|_B)^{-1}(F)$ son cerrados en A y en B respectivamente por que $f|_A$ y $f|_B$ son continuas.

   $(f|_A)^{-1}(F)$ es cerrado en X por que si $(f|_A)^{-1}(F)$ es cerrado en A entonces

   $(f|_A)^{-1}(F) = C \cap A$ con C cerrado en X y así, $(f|_A)^{-1}(F)$ es intersección de dos cerrados en X.

   Análogamente $(f|_B)^{-1}(F)$ es cerrado en X.

   Así, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X pues es unión de dos cerrados en X y por tanto, f es continua (Teorema 1.9).

Observación El nombre de Lema del Pegado, viene de que f es el resultado de pegar las funciones $f|_A$ y $f|_B$. Algunas veces se parte de $f_1 : A \to Y, f_2 : B \to Y$ que coinciden en $A \cap B$ y se construye f tal que $f|_A = f_1$ y $f|_B = f_2$.

Una de las definiciones más importantes en topología es la siguiente.

Definición 1.23 *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Se dice que f es un **homeomorfismo** y que X e Y son **homeomorfos** si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.*

Observación Decir que una función biyectiva, $f : X \to Y$, es un homeomorfismo es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1. U es abierto $\Leftrightarrow f(U) \subset Y$ es abierto.

2. f es continua y abierta.

3. $F \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow f(F) \subset Y$ es cerrado.

4. f es continua y cerrada.

Un homeomorfismo $f : X \to Y$ transforma en correspondencia uno a uno los abiertos de X en los de Y y viceversa. Así que dos espacios homeomorfos son indistinguibles desde el punto de vista topológico, sólo difieren en el "nombre" de los abiertos.

Cuando a una función sólo le falta ser sobreyectiva para ser un homeomorfismo, se puede definir la función solo entre la imagen.

Definición 1.24 *Se dice que $f : X \to Y$ es una **inmersión** si $f : X \to$Imf es un homeomorfismo.*

En los siguientes ejemplos se considera a $\mathbb{R}$ con la topología usual y a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la topología inducida por la usual. S^1 denota la circunferencia unidad, es decir, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejemplo 1.34 *$X = [0, 1]$ e $Y = [a, b]$, con $a < b$, son homeomorfos. Basta considerar la función $f(x) = (b - a)x + a$ que de alguna manera estira y traslada al $[0, 1]$.*

Ejemplo 1.35 *Los espacios $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Basta considerar los homeomorfismos $f(x) =$tan$(\frac{\pi x}{2})$ ó $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Procediendo como en el ejemplo anterior se tiene que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto.*

Ejemplo 1.36 *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$ no es un homeomorfismo por que no es sobreyectiva, ya que Im$f = (0, \infty)$. Sin embargo, si es una inmersión por que $f : \mathbb{R} \to$Imf admite la inversa $f^{-1}(y) = log(y)$ que es continua, al igual que la función.*

Ejemplo 1.37 *La función $f : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $f(x) = ($cos x, sen $x)$ no es un homeomorfismo ni una inmersión por que f no es inyectiva y por tanto no admite inversa.*

I.1.6 Axiomas de Separación

Muchas de las propiedades de los espacios topológicos dependen del mayor o menor número de conjuntos abiertos que contenga el espacio. De alguna manera los axiomas de separación establecen la existencia de "suficientes" conjuntos abiertos. En este apartado solo se revisan los necesarios para desarrollar los temas de esta tesis.

Definición 1.25 *Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio** T_1 si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ cada uno pertenece a un conjunto abierto que no contiene al otro. Es decir, existen conjuntos abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U, y \notin V$ y $y \in V, y \notin U$.*

Proposición 1.9 *Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico T_1 entonces $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$.*

Demostración Sea $x \in X$ fijo. Para cada $y \in X - \{x\}$ existe un abierto $U_y \in \mathcal{T}$ tal que

$$y \in U_y \text{ y } x \notin U_y$$

por ser X un espacio T_1.
Luego, $U_y \subset X - \{x\}$ para cada $y \in X - \{x\}$ entonces

$$\bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y \subset X - \{x\}.$$

Por otro lado,

$$X - \{x\} \subset \bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y$$

y así

$$X - \{x\} = \bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y.$$

Por tanto, $X - \{x\}$ es abierto pues es unión de abiertos y entonces $\{x\}$ es cerrado.
Como x es un elemento arbitrario de X entonces $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$.

Definición 1.26 *Se dice que un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es un **espacio** T_2 o **Espacio de Hausdorff** si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ cada uno pertenece a un conjunto abierto y estos conjuntos abiertos son disjuntos. Es decir, existen conjuntos abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Observación Un Espacio de Hausdorff es siempre un espacio T_1.

Proposición 1.10 *Todo espacio métrico (X, d) es un espacio de Hausdorff.*

Demostración Sean $x, y \in X$ puntos distintos, entonces $d(x, y) = \epsilon > 0$. Tomando los abiertos $U = B(x, \frac{\epsilon}{3})$ y $V = B(y, \frac{\epsilon}{3})$ se tiene que U y V son disjuntos por que si $p \in U \cap V$ entonces $d(p, x) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(p, y) < \frac{\epsilon}{3}$ y por la desigualdad del triángulo se obtiene

$$d(x, y) < d(x, p) + d(p, y) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}$$

con contradicción pues $d(x, y) = \epsilon$. Así, U y V son disjuntos y por tanto X es un espacio de Hausdorff.

I.1.7 Conexidad

Definición 1.27 *Un espacio topológico X es **conexo** si no existen dos abiertos ,U y V, disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Cuando un espacio no es conexo se dice que los dos abiertos U, V con las propiedade anteriores, forman una **separación**.*

Observación Una manera equivalente de decir que un espacio es no conexo es demostrando que no existen dos cerrados F, G disjuntos tales que $X = F \cup G$.

Así, F y G forman un separación o son subconjuntos separados si y sólo si $F \cap \overline{G} = \emptyset$ y $\overline{F} \cap G = \emptyset$.

Definición 1.28 *Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es **conexo**, si lo es con la topología relativa.*

Ejemplo 1.38 *En cualquier espacio topológico los puntos son conexos.*

Ejemplo 1.39 $\mathbb{R}$ *con la topología cofinita es conexo.*

Ejemplo 1.40 $A = (2,3] \cup [4,5)$ *no es conexo en* $\mathbb{R}$ *con la topología usual por que se tiene la separación* $A = U \cup V$ *con* $U = (2,3]$ *y* $V = [4,5)$.

Ejemplo 1.41 $\mathbb{R}$ *con la topología de Sorgenfrey no es conexo por que* $\mathbb{R} = U \cup V$ *con* $U = (-\infty, 0)$ *y* $V = [0, \infty)$.

Ejemplo 1.42 *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual,* $\mathbb{Q}$ *no es conexo por que* $\mathbb{Q} = U \cup V$ *con* $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ *y* $V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

Proposición 1.11 *Sea* X *es un espacio topológico. Si* X *es conexo entonces los únicos subconjuntos de* X *simultáneamente abiertos y cerrados son* X *y* $\emptyset$.

Demostración Si existiera un subconjunto $U \subset X$ abierto y cerrado distinto del vacío y del total, entonces $V = X - U$ también lo sería y se tendría se tendría que $U \cup V = X$ es una separación de X, con contradicción a la conexidad de X.

Proposición 1.12 *El intervalo* $[0,1]$ *es conexo con la topología usual.*

Demostración Supongamos que existe una separación de $[0,1]$, es decir, $[0,1] = U \cup V$ donde U y V son abiertos en la topología relativa. Sin pérdida de generalidad $1 \in V$. Sea $s = \sup\{x : x \in U\}$ se tiene que $s \in [0,1]$ y $s \neq 0, 1$, por que si $s = 0$ entonces $V = [0,1]$ y si $s = 1$ entonces V no es abierto pues no existe ningún entorno de 1 contenido en V, en ambos casos con contradicción. Si $s \in U$, como U es abierto, existe un ϵ tal que $s \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \subset U$ y entonces $s < s + \frac{\epsilon}{2} \in U$, con contradicción pues s es cota superior de U. De la misma manera, si $s \in V$ entonces $s \in (s-\epsilon, s+\epsilon) \subset V$ y $s - \frac{\epsilon}{2}$ sería cota superior para U y s no sería el supremo.
Asi, $s \notin U \cup V$, con contradicción a que $U \cup V$ es una separación de X y por tanto, $[0,1]$ es conexo.

Observación La misma demostración sirve para decir que cualquier intervalo (abierto, cerrado, semiabierto, finito o infinito) es conexo en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

De manera intuitiva un espacio es conexo si no está roto en trozos. Pero esos trozos se pueden caracterizar matemáticamente diciendo que dos puntos pertenecen al mismo trozo si existe un conexo en él que están contenidos.

Definición 1.29 *Sea* $\sim$ *la relación de equivalencia en un espacio topológico* X *dada por* $x \sim y$ *si y sólo si existe* $A \subset X$ *conexo con* $x, y \in A$. *Se llaman **componentes conexas** de* X *a cada una de las clases de equivalencia.*

Observación La componente conexa de A a la que pertenece $x \in A$ es el mayor subconjunto conexo de A que contiene a x.

Ejemplo 1.43 $X = (2,3) \cup [5,6)$ *tiene dos componentes conexas (con la topología usual):* $C_1 = (2,3)$ *y* $C_2 = [5,6)$ *por que cada par de puntos* $x, y \in C_1$ *o* $x, y \in C_2$ *están dentro del conexo* C_1 *o* C_2*, y si* $x \in C_1$ *y* $y \in C_2$ *no existe* $A \subset X$ *conexo que contenga a ambos.*

El siguiente ejemplo ilustra lo "pequeñas" que pueden ser las componentes conexas.

Ejemplo 1.44 *En* $X = \mathbb{Q}$ *con la topología usual, las componentes conexas son los puntos. La razón es que los puntos y el vacío son los únicos subconjuntos conexos de* $\mathbb{Q}$ *pues si* $A \subset \mathbb{Q}$ *tiene al menos dos puntos,* $x < y$, *tomando* $x < z < y$ *con* $z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *se forma la siguiente separación de* $A : ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A)$.

Teorema 1.11 *Si* X *es conexo y* $f : X \to Y$ *es continua, entonces* $f(X) =$*Im*f *es conexo.*

Demostración Supongamos que Imf no fuera conexo, es decir, existen dos abiertos U y V tales que Im$f = U \cup V$, entonces $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ sería una separación de X, con contradicción. Por tanto, Imf es conexo.

Ejemplo 1.45 S^1 *es conexo con la topología usual por que es la imagen de la función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *con* $f(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$.

Teorema 1.12 *Si* $A_\alpha \subset X$ *son subconjuntos conexos y* $\cap A_\alpha \neq \emptyset$ *entonces* $\cup A_\alpha$ *es conexo.*

Demostración Sea $U \cup V = \cup A_\alpha$ una separación y sea $x \in \cap A_\alpha$. Sin pérdida de generalidad $x \in U$. Luego, $A_\alpha \subset U$ por que de lo contrario $(A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$ sería una separación de A_α con contradicción. Pero si cualquier $A_\alpha \subset U$ entonces $\cup A_\alpha \subset U$ y así $V = \emptyset$ con contradicción. Por tanto, $\cup A_\alpha$ es conexo.

Ejemplo 1.46 *Como en el ejemplo anterior, cada circunferencia* $C_r = \{(x,y) : (x-r)^2 + y^2 = r^2\}$ *con* $0 < r \leq 1$, *es conexa, por tanto el círculo* $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ *(que es la unión de ellas) también lo es.*

Teorema 1.13 *Si* $A \subset X$ *es un subconjunto conexo entonces cualquier subconjunto* $B \subset X$ *con* $A \subset B \subset \overline{A}$, *es también conexo.*

Demostración Si $U \cup V$ es una separación de B, entonces $A \subset U$ ó $A \subset V$ por que de lo contrario $(A \cap U) \cup (A \cap V)$ sería una separación de A. Sin pérdida de generalidad $A \subset U$, entonces $\overline{A} \subset X - V$ por que $X - V$ es cerrado y contiene a A. Luego, $B \subset X - V$ y esto contradice que $U \cup V$ es una separación. Por tanto, B es conexo.

Ejemplo 1.47 *El subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *definido como*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = sen(1/x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1,1]\}$$

es conexo, por que $S = \overline{A}$ *con* $A = \{(x, sen(1/x)) : x > 0\}$ *y* A *es conexo por que es la imagen de la función continua* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, *definida por* $f(t) = (t, sen(1/t))$.
Al conjunto S *se le llama* ***curva seno del topólogo.***

Corolario 1.1 *Si A es conexo entonces $\overline{A}$ también lo es.*

Demostración Basta con tomar $B = \overline{A}$ en el teorema anterior.

Corolario 1.2 *Las componentes conexas de un espacio topológico son conjuntos cerrados.*

Demostración Si C es una componente conexa, es conexa y, por el corolario anterior, $\overline{C}$ también es conexo. Pero entonces $\overline{C} \subset C$ por que $x \sim y$ para todo $x, y \in \overline{C}$. Así, $C = \overline{C}$ y por tanto C es cerrado.

Definición 1.30 *Se dice que un espacio topológico X, es* ***localmente conexo en*** *p si y sólo si todo conjunto abierto que contiene a p contiene un conjunto conexo abierto que contiene a p. Se dice entonces que X es* ***localmente conexo*** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Observación Conexión local no implica conexión y viceversa.

Para el primer caso basta considerar el subconjunto $A = (0,1) \cup (2,3)$ de $\mathbb{R}$ con la topología usual, A es no conexo pero cada punto esta contenido en un entorno conexo: el intervalo al que pertenece.

Para el segundo caso hay que considerar la curva seno del topólogo que es conexa pero no es localmente conexa en el punto $(0,1)$.

Definición 1.31 *Un subconjunto E de un espacio topológico X es un conjunto* ***arco-conexo*** *si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una trayectoria $f : I = [0,1] \to X$ de a a b que está contenida en E, es decir, $f[I] \subset X$.*

Ejemplo 1.48 *Sean los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$*

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{(x,0) : \frac{1}{2} \geq x \geq 1\}.$$

A consiste en los puntos de los segmentos de recta que unen el origen $(0,0)$ con los puntos $(1, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$; y B consiste en los puntos del eje de las x comprendidas entre $\frac{1}{2}$ y 4.
A y B son arco-conexos.

Definición 1.32 *Sea X un espacio topológico y $p \in X$. Se dice que X es* ***localmente arco-conexo en*** *p (LAC en p) si cada vecindad de p contiene una vecindad arco-conexa de p.*
Se dice que X es ***localmente arco-conexo*** *(LAC) si X es localmente arco-conexo en cada uno de sus puntos.*

Intuitivamente se puede pensar que un conjunto X es arco-conexo si cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ pueden ser conectados con un arco que empieza en a, termina en b y está totalmente contenido en X.

I.1.8 Compacidad

Definición 1.33 *Dado un espacio topológico X, un* ***recubrimiento abierto*** *$\mathcal{C}$ es una colección de abiertos cuya unión es todo el espacio. Un* ***subrecubrimiento*** *es una subcolección de $\mathcal{C}$ con la misma propiedad.*

Definición 1.34 *Se dice que un espacio topológico, X, es* ***compacto*** *si todo recubrimiento abierto de X admite un recubrimiento finito.*

Definición 1.35 *Un subconjunto de un espacio topológico, $A \subset X$, es* ***compacto*** *si lo es con la topología relativa.*

Observación Para subconjuntos se puede entender un recubrimiento abierto como una colección de abiertos, U_α, en X, tales que $A \subset \cup U_\alpha$.

Ejemplo 1.49 *$\mathbb{R}$ no es compacto por que*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$$

y no se puede suprimir ninguno de los intervalos por que si no algún entero quedaría sin cubrir.

Ejemplo 1.50 *Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual. A no es compacto por que el recubrimiento*

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

no tiene subrecubrimientos.

Definición 1.36 *Una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de puntos de un espacio topológico X* ***converge*** *a un punto $b \in X$, o b es límite de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, lo que se denota por*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b \quad o \quad a_n \to b$$

si y sólo si, para todo conjunto abierto U que contiene a b existe un entero positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $a_n \in U$, es decir, U contiene a casi todos (excepto un número finito) los términos de la sucesión.

Ejemplo 1.51 *Sea A como en el ejemplo anterior, $\overline{A}$ es compacto por que dado un recubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de $\overline{A}$, existe $U_0 \in \mathcal{C}$ con $0 \in U_0$.*
Como $\frac{1}{n} \to 0$ se tiene que $\frac{1}{n} \in U_0$ excepto un número finito de veces: $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \cdots, \frac{1}{n_k}$. Tomando $U_j \in \mathcal{C}$ con $\frac{1}{n_j} \in U_j$ se tiene

$$A \subset \bigcup_{j=0}^{k} U_j.$$

Proposición 1.13 *En $\mathbb{R}$ con la topología usual $[0,1]$ es compacto.*

Demostración Si $\mathcal{C}$ es un recubrimiento abierto de $[0,1]$ sea

$$s = \{x \in [0,1] : [0,x] \textit{ puede cubrirse con un número finito de abiertos en } \mathcal{C}\}$$

$s > 0$ porque cualquier abierto que contiene a cero contiene a $[0,\epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.
Si $s < 1$ entonces para cualquier abierto $U \in \mathcal{C}$ que contiene a s existe un $\epsilon > 0$ tal que $[s-\epsilon, s+\epsilon] \subset U$. Por la definición de s, $[0, s-\epsilon]$ está recubierto por un número finito de abiertos del recubrimiento, pero añadiendo U a ese recubrimiento se obtiene un recubrimiento finito de $[0, s+\epsilon]$, con contradicción de que s es el supremo.
Así, s no puede ser menor a 1, es decir, $s = 1$.
Por tanto, $[0,1]$ es compacto.

Como en el caso de los conexos, la imagen continua de un compacto es un compacto.

Teorema 1.14 *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es continua y $K \subset X$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración Si $\cup U_\alpha$ es un recubrimiento de $f(K)$ sin recubrimientos finitos entonces $\cup f^{-1}(U_\alpha)$ es un recubrimiento de K sin recubrimientos finitos, con contradicción.
Por tanto, $f(K)$ es compacto.

Ejemplo 1.52 *En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $(-1,1)$ no es compacto. Por que si $(-1,1)$ fuera compacto se tendría tomando la función continua $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ que $f((0,1)) = \mathbb{R}$ es compacto, con contradicción. Como $(-1,1)$ es homeomorfo a $(0,1)$, aplicando el mismo razonamiento se tiene que $(0,1)$ no es compacto.*

Teorema 1.15 *Sea X un espacio topológico. Si $F \subset K \subset X$ con F cerrado y K compacto, entonces F es compacto.*

Demostración Si existiera un recubrimiento $\mathcal{C}$ de F sin recubrimientos finitos entonces $(X - F) \cup \mathcal{C}$ sería un recubrimiento de K sin recubrimientos finitos, con contradicción, pues K es compacto.
Por tanto, F es compacto.

Observación Lo que dice el teorema anterior es que cerrado dentro de compacto es compacto.

Ejemplo 1.53 $\{(-1)^n/n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}$ *es compacto por que es un cerrado dentro de un compacto.*

Por último se enuncia un teorema muy conocido en Análisis Matemático.

Definición 1.37 *Se dice que un subconjunto A es **denso en ninguna parte** en un espacio topológico X si su cerradura tiene interior vacío. En forma equivalente, A es denso en ninguna parte si A^c es un subconjunto denso en X.*

Definición 1.38 *Se dice que un conjunto X es un **espacio de Baire** si se satisface la siguiente condición: dada cualquier familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X, todos con la propiedad de ser densos en ninguna parte, su unión $\cup A_n$ también es denso en ninguna parte.*

Intuitivamente se puede pensar que un espacio de Baire es muy grande y tiene suficientes puntos para un cierto proceso límite.

Observación Las siguientes son caracterizaciones alternas de un espacio de Baire.

1. Toda intersección de conjuntos abiertos densos es densa.
2. Siempre que la unión de un número numerable de conjuntos cerrados de X tiene un punto interior, uno de los conjuntos cerrados debe tener un punto interior.
3. Todo subconjunto abierto no vacío de un espacio de Baire es, en su topología relativa, un espacio de Baire.

Ejemplo 1.54 $\mathbb{R}$ *con la topología usual es un espacio de Baire.*

Teorema 1.16 *(**Teorema de la categoria de Baire**) Si X es un espacio de Hausdorff compacto entonces X es un espacio de Baire.*

La prueba de este teorema se encuentra en [4, pág. 337].

I.2. Teoría de Continuos

El estudio de la Teoria de Continuos tiene su origen en la escuela polaca de matemáticas a principios del siglo XX. Dicha escuela escogió a la teoria de continuos como una de las cuatro ramas de la matemática a las que se dedicarían y fortalecerían.

I.2.1 Definición de Continuo

Definición 1.39 *Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Definición 1.40 *Un continuo es **no degenerado** si tiene más de un punto.*

Algunas veces se relaja un poco la definición, es decir, en lugar de que el espacio sea métrico se le puede pedir que sea T_1 o T_2.

Definición 1.41 *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un **Continuo** T_1 si es T_1, conexo y compacto y se dice que X es un **Continuo** T_2 si es T_2, conexo y compacto.*

Observación Como ya se probó en la subsección 1.16 (Axiomas de Separación) todo espacio métrico es un espacio T_1 y T_2, así un continuo es un continuo T_1 y un continuo T_2.
En esta tesis, cuando se enuncia la palabra continuo se refiere a los espacios métricos, compactos y conexos.

Definición 1.42 *Sea X un continuo, se dice que X es un **Continuo de Peano** si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Los siguientes teoremas establecen la arco-conexidad de los continuos de Peano.

Teorema 1.17 *Cada Continuo no degenerado de Peano es arco-conexo.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [6, pág. 130].

Teorema 1.18 *Cualquier subconjunto abierto y conexo de un continuo de Peano es arco-conexo.*

La prueba de este teorema se encuentra en [6, pág. 132].

Teorema 1.19 *Cada subconjunto abierto de un continuo de Peano es localmente arco-conexo. En particular, cada continuo de Peano es localmente arco-conexo.*

La prueba de este teorema se puede revisar en [6, pág. 131].

Definición 1.43 *Sea $X, (\mathcal{T})$ un espacio topológico, se dice que X es **conexo en pequeño en** $p \in X$ o **cik en** $p \in X$ si y sólo si para todo $U \in \mathcal{T}$ con $p \in U$ existe un subconjunto conexo $V \subset X$ con $p \in int(V) \subset V \subset U$.*

Observación De manera equivalente se puede decir que un continuo X es un continuo de Peano si X es cik en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 1.55 *El continuo más sencillo es el intervalo $[0, 1]$, a cualquier espacio homeomorfo a él se le llama **arco**.*

Ejemplo 1.56 *Otro continuo de los más sencillos es $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, a cualquier espacio homeomorfo a él se le llama **circunferencia** o **curva cerrada simple**.*

Ejemplo 1.57 *La curva seno del topólogo,*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = sen(1/x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1]\}$$

también es un continuo.

Se pueden construir continuos uniendo un número finito de continuos que se vayan intersectando, para que el resultado sea conexo.

Ejemplo 1.58 *El **n-odo simple** es el continuo que se construye uniendo n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice** del $n-$odo, dicho vértice tiene que ser un extremo de cada uno de los n arcos y los otros extremos de los arcos se llaman **extremos** del $n-$odo.*

Ejemplo 1.59 *Los siguientes continuos, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, son de gran interés y por eso reciben cierto nombre:*

1. ***Paleta:***

$$\mathcal{P} = S^1 \cup [1,2] \times \{0\}.$$

2. ***Ocho:***

$$\mathcal{O} = S^1 \cup S^* \text{ donde } S^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}.$$

3. ***Pesa:***

$$\mathcal{P}^* = S^1 \cup [1,2] \times \{0\} \cup S^* \text{ donde } S^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 1\}.$$

4. ***Theta:***

$$\theta = S^1 \cup [-1,1] \times \{0\}.$$

Definición 1.44 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se definen el **límite inferior** (*lím *inf) y el **límite superior** (*lím *sup) de A_n de la siguiente manera:*

$$\text{lím } \textit{inf } A_i = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ con } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para casi todo } i \in \mathbb{N}\}$$
$$\text{lím } \textit{sup } A_i = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{T} \text{ con } x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para una infinidad de } i \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 1.45 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Se dice que $\text{lím } A_i = A$ si $\text{lím } \textit{inf } A_i = A = \text{lím } \textit{sup } A_i$.*

Definición 1.46 *Sea X un espacio métrico, un subcontinuo no degenerado A de X se llama **continuo de convergencia** de X si existe una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos A_i de X tales que*

$$\text{lím } A_i = A \quad y \quad A_i \cap A = \emptyset \ \forall i.$$

Observación Algunos continuos no contienen continuos de convergencia, por ejemplo, el arco y la curva cerrada simple.

A continuación se enuncian algunos teoremas conocidos en Teoria de Continuos, de algunos solamente se escribe el enunciado pues su importancia radica en que serán de ayuda en el capítulo 2.

Teorema 1.20 *(**Teorema de los golpes en la frontera II**) Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$ (de manera equivalente, como $\overline{K} \subset \overline{E}$ entonces $\overline{K} \cap \overline{(X-E)} \neq \emptyset$).*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [5, pág. 74].

Teorema 1.21 ***(Teorema de los golpes en la frontera III)*** *Sean X un continuo, E subconjunto propio no vacío de X y K una componente de E.*
Si E es abierto en X, entonces

$$\overline{K} \subset (X - E) \neq \emptyset \quad i.e. \quad \overline{K} - E \neq \emptyset.$$

Si E es cerrado en X, entonces

$$K \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset.$$

Demostración Por el teorema 1.20 se tiene que $\overline{K} \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset$.
Para el primer caso se tiene que como E es abierto entonces $X - E$ es cerrado y así $\overline{(X - E)} = X - E$. Luego, $\overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$, y como $\overline{K}$ es conexo se tiene $\overline{K} \subset (X - E) \neq \emptyset$.
Para el segundo caso, por el corolario 1.2 (pág. 24) se tiene que K es cerrado y así, $K = \overline{K}$ entonces $K \cap \overline{(X - E)} \neq \emptyset$.

Proposición 1.14 *Sea X un continuo y sea A un subcontinuo propio de X. Si K es componente de $X - A$, entonces $K \cup A$ es un continuo.*

Demostración Como K es cerrado en $X - A$ entonces $\overline{K} - K \subset A$. Luego, $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$, es decir, $K \cup A$ es conexo y además $K \cup A$ es compacto pues es unión de compactos. Por tanto, $K \cup A$ es un continuo.

Teorema 1.22 ***(Teorema de Continuos de convergencia)*** *Sea X un continuo y sea*

$$N = \{x \in X : X \; no \; es \; cik \; en \; X\}.$$

Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en $[5$, pág. $76]$.

I.2.2 Puntos de Corte

Definición 1.47 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico conexo y $p \in X$. Se dice que p es un* ***punto de corte*** *si $X - \{p\}$ es disconexo y que p es un* ***punto no de corte*** *si $X - \{p\}$ es conexo.*

Si X es un espacio topológico se escribe $X = P|Q$ para indicar que $X = P \cup Q, P \neq \emptyset, Q \neq \emptyset, P \cap Q = \emptyset$, y P y Q son abiertos en X. En otras palabras, $X = P|Q$ indica que $X = P \cup Q$ donde P y Q son conjuntos no vacíos que son mutuamente separados en X, es decir, $P \cap \overline{Q} = \emptyset$ y $\overline{P} \cap Q = \emptyset$.

Proposición 1.15 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico conexo y sea C un subconjunto conexo de X tal que*

$$X - C = A|B$$

entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Además, si X y C son continuos entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.

Demostración Supóngase que $A \cup C$ es no conexo entonces $A \cup C = K|L$, como C es conexo se tiene que $C \subset K$ o $C \subset L$, sin pérdida de generalidad $C \subset K$. Luego, $L \subset A$. Así, $\overline{L} \cap B = \emptyset$ y $\overline{B} \cap L = \emptyset$. Se sigue que

$$X = L|(B \cup K)$$

con contradicción, pues X es conexo. Por tanto, $A \cup C$ es conexo.
Análogamente se tiene que $B \cup C$ es conexo.

Si C es continuo, por ser parte de una separación, A es cerrado y en consecuencia compacto, así $A \cup C$ es un continuo.
Análogamente, $B \cup C$ es continuo.

Lema 1.1 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico conexo. Sean $x, y \in X$ tales que*

$$X - \{x\} = K|L \quad X - \{y\} = M|N.$$

Si $x \in M$ y $y \in K$ entonces $N \cup \{y\} \subset K$.

Demostración Por la proposición 1.15 se tiene que $N \cup \{y\}$ es conexo. Como $x \in M$ entonces $x \notin N \cup \{y\}$. Luego $(N \cup \{y\}) \cap K \neq \emptyset$ pues $y \in K$.
Así, $N \cup \{y\}$ es un subconjunto conexo de $X - \{x\}$ y $N \cup \{y\}$ intersecta a K.
Por tanto, $N \cup \{y\}$ debe estar contenido en K pues $S - \{x\} = K|L$.

Para probar el teorema central de esta subsección se necesitan dos definiciones y un teorema, que como escapa de los objetivos de esta tesis, solo se va a enunciar.

Definición 1.48 *Una relación R en A, que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama orden (parcial) en A. El par (A, R) se le llama conjunto (parcialmente) ordenado.*

Ejemplo 1.60 *La relación definida por $m|n$ si y sólo si m divide a n, es un orden en el conjunto de los números enteros positivos.*

Ejemplo 1.61 *Si X es un conjunto, la contención de conjuntos es un orden en $\mathcal{P}(X)$.*

Definición 1.49 *Sea $B \subset A$ donde A esta ordenado por $\leq$. B es una **cadena** en $(A, \leq)$ si cualesquiera dos elementos de B son $\leq -$comparables.*

Teorema 1.23 ***(Principio Maximal de Hausdorff)*** *Si $\mathcal{L}$ es una colección de conjuntos, entonces cualquier cadena en $\mathcal{L}$ esta contenida en una cadena $\mathcal{C}$ $\subseteq -$maximal.*

Lo que dice el Principio Maximal de Hausdorff es que toda cadena de $\mathcal{L}$ esta contenida en una una cadena $\mathcal{C}$ fija.

Ahora si, el teorema principal de la subsección.

Teorema 1.24 ***Existencia de puntos no de corte*** *Sea $(X,\mathcal{T})$ un continuo de Hausdorff no degenerado. Supóngase que X tiene un punto de corte c, es decir*

$$X - \{c\} = U|V.$$

Entonces, existe un punto no de corte de X en U y un punto no de corte de X en V.

Por tanto, X tiene almenos 2 puntos no de corte.

Demostración Sea N el conjunto de todos los *puntos no de corte* de X (N puede ser igual al vacío pues se quiere llegar a una contradicción al suponer que no tiene *puntos no de corte*). Supóngase que $N \subset V$, es decir, cada $x \in U$ es punto de corte de X.

Afirmación 1: Para cada $x \in U$ se tiene $X - \{x\} = U_x | V_x$ con $c \in V_x$.
Es cierta pues $x \neq c$ y x es punto de corte de X.

Afirmación 2: Para cada $x \in U$ se cumple $U_x \cup \{x\} \subset U$.
Por la afirmación 1 se tiene $X - \{x\} = U_x | V_x$ con $c \in V_x$ y además $X - \{c\} = U|V$ con $x \in U$. Luego por el Lema 1.1 se cumple que $U_x \cup \{x\} \subset U$.

Afirmación 3: Para cada $x \in U$, se tiene que $U_x \cup \{x\}$ y $V_x \cup \{x\}$ son conexos.
Como $X - \{x\} = U_x | V_x$, por la proposición 1.15 se cumple que $U_x \cup \{x\}$ y $V_x \cup \{x\}$ son conexos.

Afirmación 4: Si $x \in U$ y $y \in U_x$ entonces $U_y \cup \{y\} \subset U_x$ y, así, $x \notin U_y \cup \{y\}$.
Como $y \in U_x$ entonces $y \in U$ por la afirmación 2 y por la afirmación 1 existen U_y y V_y tales que $X - \{y\} = U_y | V_y$ con $c \in V_y$. Los conjuntos $U_y \cup \{y\}$ y $V_y \cup \{y\}$ son conexos por la afirmación 3, luego $y \neq x$ (por que $y \in U_x$) y $U_y \cap V_y = \emptyset$, así que uno de ellos debe estar contenido en $X - \{x\}$. Así, uno de los siguientes cuatro casos se debe cumplir

1. $U_y \cup \{y\} \subset U_x$
2. $V_y \cup \{y\} \subset U_x$
3. $U_y \cup \{y\} \subset V_x$
4. $V_y \cup \{y\} \subset V_x$

Como $y \in U_x$ se tiene que $y \notin V_x$ y por tanto 3 y 4 no son posibles. Por la afirmación 1, $c \in V_x \cap V_y$, luego $c \notin U_x$ y $c \in V_y$ entonces 2 no es posible. Por lo tanto, se debe de cumplir 1, esto prueba la afirmación 4.
Ahora sea

$$\mathcal{L} = \{U_x \cup \{x\} : x \in U\}$$

por el Principio Maximal de Hausdorff existe una cadena maximal $\mathcal{C}$ en $\mathcal{L}$.
Cada elemento de $\mathcal{C}$ es cerrado en X pues es unión de dos cerrados (U_x y $\{x\}$) y como $\mathcal{C}$ es una cadena de subconjuntos (encadenados) entonces cada subcolección finita no vacía de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía.

Afirmación 5: La intersección de elementos de $\mathcal{C}$ es no vacía, es decir, $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Si

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{C_i \in \mathcal{C}} C_i = \emptyset$$

entonces

$$\left(\bigcap_{C_i \in \mathcal{C}} C_i \right)^c = \bigcup_{C_i \in \mathcal{C}} C_i^c = X$$

Como X es compacto, existe una cantidad finita de $C_i's$ tales que

$$X = C_{i_1}^c \cup C_{i_2}^c \cup \cdots \cup C_{i_n}^c.$$

Luego,

$$X^c = \emptyset = C_{i_1}^c \cap C_{i_2}^c \cap \cdots \cap C_{i_n}^c$$

con contradicción, pues la intersección finita de elementos de $\mathcal{C}$ es distinta del vacío. Por tanto, $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Sea $p \in \mathcal{C}$, por la afirmación 2 se tiene que $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos de U y así $p \in U$. Luego, por la afirmación 1, $X - \{p\} = U_p|V_p$ con $c \in V_p$.
Para cada $U_x \cup \{x\}$ se tiene

1. $U_p \cup \{p\} \subset U_x$ si $p \in U_x$, por la afirmación 4.

2. $U_p \cup \{p\} = U_x \cup \{x\}$ si $p = x$.

Así, $p \in U_x$ o $p = x$ y entonces $U_p \cup \{p\} \subset \cap\mathcal{C}$.
Ahora sea $q \in U_p$, por la afirmación 1, $U_p \neq \emptyset$ y por la afirmación 4, $U_q \cup \{q\} \subset U_p \cup \{p\}$, además $U_q \cup \{q\} \in \mathcal{L}$ pues $q \in U$.
Realizando repetidamente este último proceso se obtiene una cadena $\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ con contradicción a que $\mathcal{C}$ es maximal.
Como la contradicción viene de suponer que U no contiene puntos *no de corte* de X, se concluye que U tiene almenos un punto *no de corte* de X.
Similarmente, V tiene almenos un punto *no de corte* de X.

El Teorema anterior dice que todo Continuo T_1 tiene almenos dos puntos que no son de corte.

Corolario 1.3 *Sea $(S,\mathcal{T})$ un continuo de Hausdorff. Si N denota el conjunto de todos los puntos no de corte de S, entonces ningún subconjunto propio conexo de S contiene a N.*

Demostración Supóngase que existe un subconjunto propio Z de S tal que $N \subset Z$. Sea $c \in S - Z$, entonces como $c \in S - N$ es un punto de corte y se tiene

$$S - \{c\} = U|V.$$

Como Z es un subconjunto conexo de $S - \{c\}$ entonces $Z \subset U$ ó $Z \subset V$. Como $N \subset Z$ entonces $N \subset U$ ó $N \subset$ lo que es una contradicción al teorema 1.24.

Por tanto, ningún subconjunto propio conexo de S contiene a N.

Teorema 1.25 *Sean X un continuo, A subcontinuo propio de X y K una componente de $X - A$. Entonces existe un punto no de corte p de $K \cup A$ tal que $p \in K$, y además p es también punto no de corte de X.*

Demostración Por la proposición 1.14 (pág. 30), $K \cup A$ es un continuo. Luego, A es un subcontinuo propio de $K \cup A$, por el corolario 1.3 existe un punto no de corte p de $K \cup A$ tal que $p \in K$. Se tiene que

$$X - \{p\} = [(K \cup A) - \{p\}] \cup [\cup\{L \cup A : L \text{ es componente de } X - A \text{ y } L \neq K\}]$$

donde $(K\cup A)-\{p\}$ es conexo, cada $L\cup A$ es conexo por la proposición 1.14 y la intersección de todos los conjuntos es no vacía por que $p \notin A$, entonces $X - \{p\}$ es conexo por el teorema 1.12 (pág. 23.) Así, p es punto no de corte de X tal como se quería probar.

I.2.3 Gráficas Finitas

Definición 1.50 *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede poner como una unión finita de arcos de manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito.*

Observación En esta tesis todo el tiempo la letra G denotara una gráfica finita, también la palabra gráfica será la forma reducida de decir gráfica finita.

Proposición 1.16 *Si X y Y son gráficas tales que la intersección $X \cap Y$ es no vacía y finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica.*

Demostración Por la definición de gráfica se puede escribir

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde cada A_i es un arco y cualesquiera de esos dos arcos son disjuntos o se intersectan en uno o ambos de sus puntos terminales. De igual, manera

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

donde cada B_i es un arco y cualesquiera de esos dos arcos son disjuntos o se intersectan en uno o ambos de sus puntos terminales. Luego,

$$X \cup Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i \right).$$

Así, $X \cup Y$ es la unión de arcos donce cualesquiera de esos dos arcos son disjuntos o se intersectan en uno o ambos de sus puntos terminales.
Por tanto, $X \cup Y$ es una gráfica.

Definición 1.51 *Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene ningún subconjunto homeomorfo a una curva cerrada simple.*

Ejemplo 1.62 *El arco, $[0,1]$ es una gráfica finita y además es un árbol.*

Ejemplo 1.63 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *es una gráfica finita.*

Ejemplo 1.64 *La paleta, el ocho, la pesa y le theta son ejemplos de gráficas finitas que no son árboles.*

Definición 1.52 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subset X$. Sea β un número cardinal, se dice que A **es de orden menor o igual a** β y se escribe ord$(A,X) \leq \beta$ si para cada $U \in \mathcal{T}$ existe $V \in \mathcal{T}$ tal que*

$$A \subset V \subset U \qquad y \qquad |Fr(V)| \leq \beta.$$

*Se dice que A **es de orden** β **en** X y se escribe ord$(A,X) = \beta$ si ord$(A,X) \leq \beta$ y ord$(A,X) \nleq \alpha$ para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$.*

Observación Si $A = p$ frecuentemente se escibe ord(p, X) en lugar de ord$(\{p\}, X)$ y se dice: p *es de orden...* en lugar de $\{p\}$ *es de orden....*

Definición 1.53 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. A los puntos $p \in X$ tales que ord$(p, X) = 1$ se les llama **puntos terminales** y a los puntos $q \in X$ tales que ord$(q, X) = 2$ se les llama **puntos ordinarios**.*

El siguiente teorema es muy importante para estudiar las gráficas finitas.

Teorema 1.26 *Cada espacio conexo contiene dos puntos a y b tales que*

$$\text{ord}(a, X) = 1 = \text{ord}(b, X) \text{ con } a \neq b$$
$$\text{ord}(x, X) = 2 \text{ para } a \neq x \neq b$$

es decir, forman un arco ab.

La prueba de este teorema se puede encontrar en [3, pág. 293, Teorema 5].

Cuando se trata de gráficas finitas, es más interesante hablar del orden de un punto que del orden de un subconjunto y además los puntos tienen orden $< \aleph_0$, por esta razón es conveniente dar una definición equivalente a la anterior para puntos de orden $< \aleph_0$, que quizá es más comprensible.

Definición 1.54 *Dado un punto p en un continuo X, se define su **orden** como el número natural n tal que p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un $n - odo$ de manera que el vértice del $n - odo$ se corresponda con p y se denota como $o(p, X)$.*

Observación La equivalencia de la definición anterior se basa en el Menger's n-Beinsatz Theorem [3,pág. 277].

Una caracterización de la curva cerrada simple es la siguiente:

Teorema 1.27 *Si X es un continuo tal que ord$(x, X) = 2$ para todo $x \in X$ entonces X es una curva cerrada simple.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [3, pág. 294, teorema 5].

Sea G una grafica finita, se tienen los siguientes nombres para ciertos puntos.

Definición 1.55

1. *A los puntos de orden 1 se les llama **puntos terminales** de G. El conjunto de vértices de G se escribe $P(G)$.*
2. *A los puntos de orden 2 se les llama **puntos ordinarios** de G.*
3. *A los puntos de orden mayor o igual a 3 se les llama **puntos de ramificación** de G.*
4. *A los puntos de orden distinto a 2 se les llama **vértices** de G. El conjunto de vértices de G se escribe $N(G)$.*

Definición 1.56 *Sea G una gráfica, un **arco libre abierto** o **arista** de G es cualquier subconjunto de la forma $A-\{x,y\}$ donde A es un arco en G con puntos terminales x, y y $A-\{x,y\}$ es abierto en G. x y y son llamados puntos terminales de $A-\{x,y\}$. El conjunto de aristas de G se escribe $E(G)$.*

Observación Dado un conjunto finito C, se usará la siguiente notación: $\#C$ para indicar el número de elementos de C.

Definición 1.57 *Para una gráfica finita G se define la **Caracaterística de Euler** $\chi(G)$ como el número de vértices menos el número de aristas de G, es decir,*

$$\chi(G) = \#N(G) - \#E(G).$$

A continuación se presentan algunas propiedades de las gráficas finitas a través de la caracteristica de Euler, estas pruebas se basan en la arco-conexidad de las gráficas finitas pues los procesos que se realizan la involucran, sin embargo, no se menciona en las pruebas.

Proposición 1.17 *Si G es un árbol entonces $\chi(G) = 1$.*

Demostración Como G esta formado por un número finito de arcos entonces se puede aplicar inducción sobre el número de aristas de G.

Inducción. Para $n = 1$ y $n = 2$ se tiene un arco con dos vértices y una arista, así

$$\chi(G) = 2 - 1 = 1.$$

Entonces la proposición se cumple para $n = 1$ y $n = 2$.

Supóngase ahora que para cualquier árbol G con n aristas se cumple que $\chi(G) = 1$. Considerando a T un árbol con $n+1$ aristas, sea $p \in T$ algún punto terminal y sea A la arista con puntos terminales p y q, como T es distinto del arco entonces $ord(q,T) \geq 3$.
Sea $T^* = T - (A - \{q\})$, luego T^* es un árbol con n aristas y por la hipótesis de inducción $\chi(T^*) = 1$.
Como $T = T^* \cup A$ la caracteristica de Euler se puede calcular de la siguiente manera:
Si $ord(q,T) = 3$ entonces

$$\chi(T) = [\#N(T^*) + 2] - [\#E(T^*) + 2] = \#N(T^*) - \#E(T^*) = \chi(T^*) = 1.$$

Si $ord(q,T) > 3$ entonces

$$\chi(T) = [\#N(T^*) + 1] - [\#E(T^*) + 1] = \#N(T^*) - \#E(T^*) = \chi(T^*) = 1.$$

Por tanto $\chi(T) = 1$.

Así, si la proposición es válida para n también es válida para $n + 1$. El principio de Inducción esta completo y la proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.28 *Si G es una gráfica finita entonces $\chi(G) \leq 1$.*

Demostración Se aplicará inducción fuerte sobre el número de arcos.

Para $n = 1$ se tiene que G es el arco o $G = S^1$. Luego, $\chi(arco) = 1$ y $\chi(S^1) = 0$. En cualquier caso, para $n = 1$ se satisface que $\chi(G) \leq 1$.

Supóngase que para una gráfica G con $1, 2, \cdots, n$ arcos se cumple que $\chi(G) \leq 1$. Sea G^* una gráfica con $n+1$ arcos. Si G^* es un árbol por la proposición 1.17 se tiene que $\chi(G) = 1$. Si G^* no es árbol entonces G^* tiene un subconjunto S homeomorfo a una curva cerrada simple. Se distinguen los siguientes seis casos:

Caso 1: S tiene exactamente un vértice de G^* y este vértice tiene orden 3 en G^*.
Sea $v \in S$ tal que $\operatorname{ord}(v, G^*) = 3$, entonces existe un arco A con puntos terminales v y u tal que $A - \{u, v\}$ es una arista de G^* y u es vértice de G^* que no está en S. Sea $G = (G^* - S) \cup \{v\}$, por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$. Así, por la construcción de G,

$$\chi(G^*) = (\#N(G)) - (\#E(G) + 1) = \chi(G) - 1 < 1.$$

Caso 2: S tiene exactamente un vértice de G^* y este vértice tiene orden 4 en G^*.
Sea $v \in S$ tal que $\operatorname{ord}(v, G^*) = 4$ entonces existen dos arcos A_1 y A_2 con puntos terminales v, u_1 y v, u_2 respectivamente, tales que $A_1 - \{u_1, v\}$ y $A_2 - \{u_2, v\}$ son aristas de G^* y u_1, u_2 son vértices de G^* que no están en S. Sea $G = (G^* - S) \cup \{v\}$, v es un punto ordinario en G, por la hipótesis de inducción se cumple que $\chi(G) \leq 1$. Por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$ y como G^* puede ser obtenida de G pegando una circunferencia S en el punto ordinario v, entonces

$$\chi(G^*) = (\#N(G) + 1) - (\#E(G) + 2) = \chi(G) - 1 < 1.$$

Caso 3: S tiene exactamente un vértice de G^* y este vértice tiene orden ≥ 5 en G^*.
Sea $v \in S$ tal que $\operatorname{ord}(v, G^*) \geq 5$. Sea $G = (G^* - S) \cup \{v\}$, v es vértice de G, por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$. y como G^* puede ser obtenida de G pegando una circunferencia S en el vértice v, entonces

$$\chi(G^*) = (\#N(G)) - (\#E(G) + 1) = \chi(G) - 1 < 1.$$

Caso 4: Hay almenos dos vértices de G^* en S de orden 3 en G^*.
En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G^* y se puede asumir que existe un arco A en G^* con puntos terminales u y v tales que $\operatorname{ord}(u, G^*) = 3$, $\operatorname{ord}(v, G^*) = 3$ y $\operatorname{ord}(x, G^*) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G = (G^* - A) \cup \{u, v\}$, u, v son puntos ordinarios de G. Por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$ y como G^* puede ser obtenida de G pegando un arco A en G de tal manera que $G \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G^*) = (\#N(G) + 2) - (\#E(G) + 3) = \chi(G) - 1 < 1.$$

Caso 5: Hay almenos dos vértices de G^* en S uno de orden 3 y el otro de orden ≥ 4 en G^*.
En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G^* y se puede asumir que existe un arco A en G^* con puntos terminales u y v tales que $\operatorname{ord}(u, G^*) = 3$, $\operatorname{ord}(v, G^*) \geq 4$ y $\operatorname{ord}(x, G^*) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G = (G^* - A) \cup \{u, v\}$, u es puntos ordinario de G y v es vértice de G. Por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$ y como G^* puede ser obtenida de G pegando un arco A en G de tal manera que $G \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G^*) = (\#N(G) + 1) - (\#E(G) + 2) = \chi(G) - 1 < 1.$$

Caso 6: Hay almenos dos vértices de G^* en S de orden ≥ 4 en G^*.
En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G^* y se puede asumir que existe un arco A en G^* con puntos terminales u y v tales que ord$(u, G^*) \geq 4$, ord$(v, G^*) \geq 4$ y ord$(x, G^*) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G = (G^* - A) \cup \{u, v\}$, u, v son vértices de G. Por la hipótesis de inducción se tiene que $\chi(G) \leq 1$ y como G^* puede ser obtenida de G pegando un arco A en G de tal manera que $G \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G^*) = (\#N(G)) - (\#E(G) + 1) = \chi(G) - 1 < 1.$$

En cualquier caso se tiene que $\chi(G) \leq 1$.

Así, si la proposición es válida para n también es válida para $n + 1$. El principio de Inducción esta completo y la proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.4 *Si G es una gráfica finita que no es un árbol entonces $\chi(G) < 1$.*

Demostración Si G es una circunferencia entonces $\chi(G) = 0$. Supóngase que G es distinta de una circunferencia, entonces G tiene un subconjunto S homeomorfo a una curva cerrada simple. Se distinguen los siguientes seis casos:
Caso 1: S tiene exactamente un vértice de G y este vértice tiene orden 3 en G.
Sea $v \in S$ tal que ord$(v, G) = 3$, entonces existe un arco A con puntos terminales v y u tal que $A - \{u, v\}$ es una arista de G y u es vértice de G que no está en S. Sea $G^* = (G - S) \cup \{v\}$, por el teorema 1.28 se tiene que $\chi(G^*) \leq 1$. Así, por la construcción de G,

$$\chi(G) = (\#N(G^*)) - (\#E(G^*) + 1) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

Caso 2: S tiene exactamente un vértice de G y este vértice tiene orden 4 en G.
Sea $v \in S$ tal que ord$(v, G) = 4$ entonces existen dos arcos A_1 y A_2 con puntos terminales v, u_1 y v, u_2 respectivamente, tales que $A_1 - \{u_1, v\}$ y $A_2 - \{u_2, v\}$ son aristas de G y u_1, u_2 son vértices de G que no están en S. Sea $G^* = (G - S) \cup \{v\}$, v es un punto ordinario en G^*, por el teorema 1.28 se cumple que $\chi(G^*) \leq 1$. Como G^* puede ser obtenida de G pegando una circunferencia S en el punto ordinario v, entonces

$$\chi(G) = (\#N(G^*) + 1) - (\#E(G^*) + 2) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

Caso 3: S tiene exactamente un vértice de G y este vértice tiene orden ≥ 5 en G.
Sea $v \in S$ tal que ord$(v, G) \geq 5$. Sea $G^* = (G - S) \cup \{v\}$, v es vértice de G^*. Por el teorema 1.28 se cumple que $\chi(G^*) \leq 1$ y como G puede ser obtenida de G^* pegando una circunferencia S en el vértice v, entonces

$$\chi(G) = (\#N(G^*)) - (\#E(G^*) + 1) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

Caso 4: Hay almenos dos vértices de G en S de orden 3 en G.
En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G y se puede asumir que existe un arco A en G con puntos terminales u y v tales que ord$(u, G) = 3$, ord$(v, G) = 3$ y ord$(x,) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G^* = (G - A) \cup \{u, v\}$, u, v son puntos ordinarios

de G^*. Por el teorema 1.28 se cumple que $\chi(G^*) \leq 1$ y como G puede ser obtenida de G^* pegando un arco A en G^* de tal manera que $G^* \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G) = (\#N(G^*) + 2) - (\#E(G^*) + 3) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

<u>Caso 5:</u> Hay almenos dos vértices de G en S uno de orden 3 y el otro de orden ≥ 4 en G. En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G y se puede asumir que existe un arco A en G con puntos terminales u y v tales que ord$(u, G) = 3$, ord$(v, G) \geq 4$ y ord$(x, G) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G^* = (G - A) \cup \{u, v\}$, u es puntos ordinario de G^* y v es vértice de G^*. Por el teorema 1.28 se cumple que $\chi(G) \leq 1$ y como G puede ser obtenida de G^* pegando un arco A en G^* de tal manera que $G^* \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G) = (\#N(G^*) + 1) - (\#E(G^*) + 2) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

<u>Caso 6:</u> Hay almenos dos vértices de G en S de orden ≥ 4 en G.
En este caso S puede verse como un circuito en la gráfica G y se puede asumir que existe un arco A en G con puntos terminales u y v tales que ord$(u, G) \geq 4$, ord$(v, G) \geq 4$ y ord$(x, G) = 2$ para todo $x \in A - \{u, v\}$. Sea $G^* = (G - A) \cup \{u, v\}$, u, v son vértices de G^*. Por el teorema 1.28 se cumple que $\chi(G) \leq 1$ y como G puede ser obtenida de G^* pegando un arco A en G^* de tal manera que $G^* \cap A = \{u, v\}$, entonces

$$\chi(G) = (\#N(G^*)) - (\#E(G^*) + 1) = \chi(G^*) - 1 < 1.$$

Por tanto, en cualquiera de las situaciones se satisface que $\chi(G) < 1$, si G no es un árbol.

Teorema 1.29 *Una gráfica G es un árbol si y sólo si $\chi(G) = 1$.*

Demostración Si G es un árbol entonces por la proposición 1.17 se tiene que $\chi(G) = 1$.

Por otro lado, tomando el contrapositivo del corolario 1.4 se concluye que si $\chi(G) = 1$ entonces G es un árbol.

II. NÚMERO DE DISCONEXIÓN

Una clásica caracterización de la curva cerrada simple (S^1) es que es el único continuo que llega a ser disconexo al quitarle cualesquiera dos puntos. En este capítulo se discute la siguiente pregunta ¿Que continuos son disconexos al remover cualesquiera n puntos donde $n \leq \aleph_0$ es fijo?. Aqui se da la repuesta a la pregunta anterior y se dan algunas aplicaciones.

II.1. Definición

Definición 2.1 *Sea X un espacio conexo. Un número cardinal $n \leq \aleph_0$ se llama* ***número de disconexión*** *para X si para cualquier $A \subset X$ con cardinalidad n se cumple que $X - A$ es disconexo. Se escribe $D(X) \leq \aleph_0$ para indicar que X tiene un número de disconexión. Cuando, $D(X) \leq \aleph_0$, la notación $D^s(X)$ denota el más pequeño número de disconexión para X.*

Observación Un número natural n es el más pequeño número de disconexión para X, ($D^s(X) = n$) si y sólo si existen $n-1$ puntos de X, $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, tales que $X - \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ es conexo y para cualesquiera n puntos de X, $y_1, \cdots, y_n$, se tiene que $X - \{y_1, \cdots, y_n\}$ es disconexo.

Las siguientes proposiciones son casi inmediatas a partir de la definición de número de disconexión y van encaminadas a responder la pregunta central del capítulo.

Proposición 2.1 *Si X es un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$, entonces $D^s(X) \geq 2$.*

Demostración Por el Teorema de Existencia de no puntos de corte (teorema 1.17) todo continuo tiene almenos un punto que no es de corte. Así, $D^s(X) \neq 1$ y por tanto $D^s(X) \geq 2$.

Proposición 2.2 *Si X es un continuo entonces $D(X) \leq \aleph_0$ si y sólo si $\aleph_0$ es número de disconexión para X.*

Demostración Si $\aleph_0$ es número de disconexión para X entonces se obtiene que $D(X) \leq \aleph_0$. Por otro lado, supóngase que $D(X) \leq \aleph_0$. Sea $D^s(X) = n$ y para que sea de interés con la prueba, sea $n < \aleph_0$. Sean $A \subset X$ tal que $|A| = \aleph_0$ y $B \subset A$ tal que $|B| = n$. Como $D^s(X) = n$ entonces $X - B$ es disconexo. Sean K_1 y K_2 las dos componentes de $X - B$, luego por la primera parte del Teorema de los golpes en la frontera III (teorema 1.21, pág. 30) se tiene $\overline{K_i} \subset B$ para cada $i : 1, 2$, es decir, $\overline{K_i} \cap B \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2$. Luego K_1 y K_2 deben ser no degeneradas y como son componentes conexas deben ser no numerables. Así,

$$K_1 - A \neq \emptyset \text{ y } K_2 - A \neq \emptyset.$$

Por tanto, $X - A$ es disconexo, es decir, $\aleph_0$ es número de disconexión para X.

Proposición 2.3 *Sea X un continuo. Si un entero n es número de disconexión para X, entonces cualquier entero $j > n$ es también número de disconexión.*

Demostración Sean $A \subset X$ tal que $|A| = j$ y $B \subset A$ tal que $|B| = n$. Como n es número de disconexión de X entonces $X - B$ es disconexo. Sean K_1 y K_2 las dos componentes de $X - B$, luego por la primera parte del Teorema de los golpes en la frontera III (teorema 1.21, pág. 30) se tiene $\overline{K_i} \subset B$ para cada $i : 1, 2$, es decir, $\overline{K_i} \cap B \neq \emptyset$ para cada $i = 1, 2$. Luego K_1 y K_2 deben ser no degeneradas y como son componentes conexas deben ser no numerables. Así,

$$K_1 - A \neq \emptyset \text{ y } K_2 - A \neq \emptyset.$$

Por tanto, $X - A$ es disconexo, es decir, j es número de disconexión para X.

II.2. Resultados sobre Gráficas Finitas

En esta sección se presentan propiedades que serán de utilidad relacionadas con las gráficas finitas.

Proposición 2.4 *Si X es un continuo tal que ord$(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$, entonces cada subcontinuo de X es un continuo de Peano.*
Así, cada subcontinuo de una gráfica es un continuo de Peano.

Demostración Supóngase que X es un continuo tal que ord$(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$. Entonces por la definición de orden de un punto (definición 1.52, pág. 34) y por la definición 1.46 (pág. 29) X no contiene un continuo de convergencia. Así, ningún subcontinuo de X es un continuo de convergencia. Luego, por el teorema 1.22 cada subcontinuo de X es cik (definición 1.43, pág. 28) en cada uno de sus puntos. Así, X es un continuo de Peano (definición 1.42, pág. 27) y por tanto cada subcontinuo de X es un continuo de Peano.
Por otro lado, si X es una gráfica entonces ord$(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$ y así, cada subcontinuo de X es un continuo de Peano.

Proposición 2.5 *Si X es un continuo no degenerado entonces ord$(x, X) \geq 2$ para todo $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración Si X es una curva cerrada simple o un arco entonces por la definición 1.54 (pág. 35) ord$(x, X) \geq 2$ para todo $x \in X$. Por otro lado, supóngase que ord$(x, X) \geq 2$ para todo $x \in X$ entonces por la proposición 9.4 X es un continuo de Peano y por el teorema 1.17 (pág. 28), X es arco-conexo.
Si X no tiene puntos de orden 1 entonces ord$(x, X) = 2$ para todo $x \in X$ y por el teorema 1.27 (pág. 35) se tiene que X es una curva cerrada simple.
Si X tiene un punto p de orden 1, entonces por la arco-conexidad de X y como X no tiene puntos de orden ≥ 3 se tiene que $X = \{p\}$, lo que no puede ser pues X es no degenerado.
Si X tiene dos puntos de orden 1 entonces por el teorema 1.26 (pág. 35) se tiene que X es un arco.

Si X tiene tres o más puntos de orden 1 entonces X tiene un punto de orden ≥ 3 por la arco-conexidad de X, con contradicción.
Por tanto, si ord$(x, X) \geq 2$ para todo $x \in X$ entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Teorema 2.1 *Un continuo X es una gráfica si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. *ord$(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$.*

2. *ord$(x, X) \leq 2$ para todos excepto un número finito de $x \in X$.*

Demostración Si X es una gráfica finita, por definición, X esta formada por unión de arcos que son ajenos o se intersectan en un número finito de puntos, entonces se satisfacen las condiciones 1 y 2.

Por otro lado, sea X un continuo que satisface 1 y 2.
Se probará usando inducción fuerte que sobre k (k el número de puntos de orden ≥ 3 en X) que X es una gráfica.

Para $k = 0$ se tiene por la proposición 2.5 que X es un árbol o una curva cerrada simples, es decir, X es una gráfica.

Supóngase que si X es un continuo con a lo más k puntos de orden ≥ 3 y que satisface las condiciones 1 y 2 entonces X es una gráfica.
Sea Y un continuo con exactamente $k+1$ puntos $p_i, 1 \leq i \leq k+1$, de orden ≥ 3 y que satisface las condiciones 1 y 2.
Como Y satisface 1 se tiene que Y es un continuo de Peano por la proposición 2.4. Así, existe un subconjunto abierto U de Y tal que $p_1 \in U$ y $p_i \notin \overline{U}$ para $i \neq 1$. $\overline{U}$ es un continuo, pues es conexo y compacto, además p_1 es el único punto de orden ≤ 3 en $\overline{U}$.
Sea ord$(p_1, \overline{U}) = n$, se tiene que $n < \aleph_0$ por que X satisface 1. Entonces, p_1 es el vértice de un $n - odo$ simple que es vecindad de p_1 en $\overline{U}$ y por tanto de X.
Así, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p_1 \in V$, $\overline{V}$ es un $n - odo$ y $|Fr(V)| = n$.
Como $Fr(X-V) = Fr(V)$ entonces $X - V$ tiene a lo más n componentes $K_1, \cdots, K_j$ pues V es un $n - odo$. Como $p_1 \notin K_i$ para cualquier i, entonces por la hipótesis de inducción se tiene que cada K_i es una gráfica. También usando el teorema 1.20 (pág. 29) poniendo $X = Y$ y $E = Y - V$ se obtiene $K_i \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y como $K_i \cap \overline{V} \subset Fr(V)$ se tiene que cada $K_i \cap \overline{V}$ es finito. Por ser $\overline{V}$ una gráfica se puede aplicar la proposición 1.16 (pág. 34) para obtener que $\overline{V} \cup K_1$ es una gráfica.
También se tiene que $(\overline{V} \cup K_1) \cap K_2 = \overline{V} \cap K_2$, aplicando nuevamente la proposición 1.16 $(\overline{V} \cup K_1) \cup K_2$ es una gráfica.
Continuando con este proceso y aplicando j veces la proposición 1.16 se obtiene que Y es una gráfica. Así, si la proposición es válida para k también es válida para $k+1$. El principio de inducción esta completo y la proposición es válida para todo $k \in \mathbb{N}$.
Con esto se prueba que X es una gráfica.

Corolario 2.1 *Cada subcontinuo de una gráfica es una gráfica.*

Demostración Sea G una gráfica y $Y \subset G$. Se tiene que Y satisface

1. ord$(y, Y) < \aleph_0$ para todo $y \in Y$.

2. ord$(y, Y) \leq 2$ para todos excepto un número finito de $y \in Y$.

entonces por el teorema 2.1 Y es una gráfica.

Definición 2.2 *Sea X un espacio métrico. Se define el* ***diamétro*** *de X como*

$$Dm(X) = \text{máx}\{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Lema 2.1 *Sea X un continuo tal que existen puntos $x_1, x_2, \cdots$ que satisfacen*

$$\textit{ord}(x_i, X) \geq 3 \textit{ para cada } i \textit{ y } x_i \neq x_j \textit{ cuando } i \neq j.$$

Entonces existe un subcontinuo K de X tal que

$$ord(K, X) \geq \aleph_0$$

y, si X es un continuo de Peano, existe un subcontinuo L de X tal que $|P(L)| \geq \aleph_0$ donde $P(L)$ es el conjunto de puntos terminales de L.

Demostración Si X no es un continuo de Peano, entonces por el teorema de continuos de convergencia (teorema 1.22, pág. 30) existe $p \in X$ tal que ord$(p, X) \geq \aleph_0$ y tomando $K = \{p\}$ se prueba la primera parte del lema.

Supóngase ahora que X es un continuo de Peano, también se puede asumir sin pérdida de generalidad que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto $x \in X$ y que $x_i \neq x$ para todo i. Como X es localmente conexo pues es continuo de Peano, entonces existen subconjuntos abiertos U_i de X tales que

$$x_i \in U_i,\ Dm(U_i) < \frac{1}{i} \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \ \ si \ \ i \neq j.$$

Entonces se debe cumplir alguno de los siguientes dos casos:

1. Existe un arco A en X tal que $x_i \in A$ para una infinidad de $i's$.

2. Ningún arco en X contiene a x_i para una infinidad de $i's$.

Sin pérdida de generalidad supóngase que se cumple 1 para todo i. Como ord$(x_i, X) \geq 3$ y ord$(x_i, A) \leq 2$ para cada i entonces existe $p_i \in U_i - A$ para cada i. Por el teorema 1.18 (pág. 28) existe para cada i un arco A_i en U_i tal que A_i tiene puntos terminales x_i y p_i. Sea

$$K = A \ \ y \ \ L = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

K y L satisfacen:

$$ord(K, X) \geq \aleph_0$$
$$|P(L)| \geq \aleph_0$$

pues K tiene una infinidad de puntos con orden ≥ 3 y L es unión de una infinidad de arcos con puntos terminales ajenos.

Supóngase ahora que se cumple el caso 2, como X es localmente arco-conexo (teorema 1.19, pág. 28) en x y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a x entonces existen arcos B_n, $n = 1, 2, ...$, con puntos terminales x y x_{i_n} tales que

$$Dm(B_n) < \tfrac{1}{n} \text{ y } x_{i_n} \notin B_j \text{ para cualquier } j \neq n.$$

Para cada n, sea C_n un sub-arco propio de B_n tal que x es uno de los puntos terminales de C_n y $C_n \cap U_{i_n} \neq \emptyset$. Sea

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = L$$

Luego, K y L tienen las siguientes propiedades

$$ord(K, X) \geq \aleph_0$$

$$|P(L)| \geq \aleph_0$$

Lo que termina la prueba del lema.

Teorema 2.2 *Un continuo de Peano X es una gráfica si y sólo si cada subcontinuo de X tiene solo un número finito de puntos terminales.*

Demostración Sea X una gráfica entonces por el corolario 2.1 cada subcontinuo de X es una gráfica finita, es decir, tiene un número finito de arcos y por tanto tiene un número finito de puntos terminales.

Por otro lado, supóngase que X es un continuo de Peano tal que cada subcontinuo de X tienen solamente un número finito de puntos terminales. Entonces por el contrapositivo de la segunda parte del lema 2.1 X tiene solo un número finito de puntos de orden ≥ 3. Así, X satisface la condición 2 del teorema 2.1.

Basta con probar que X satisface la condición 1 del teorema 2.1 para concluir que X es una gráfica.

Supóngase que x no satisface la condición 1 del teorema 2.1, es decir, supóngase que existe un $p \in X$ tal que ord$(p, X) \geq \aleph_0$. Luego, como se satisface 2 de 2.1 existe $U \subset X$ abierto y conexo tal que ord$(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X - \{p\}$ y $Dm(U) < 1$. Sea $p_1 \in U - \{p\}$, por el teorema 1.18 (pág. 28) , U es arco-conexo y así existe un arco A_1 en U con puntos terminales p y p_1. Procediendo inductivamente se pueden definir n arcos $A_i,\ 1 \leq i \leq n$, con puntos terminales p y p_i tales que para cada i

$$Dm(A_i) < \frac{1}{i}, \quad A_i \cap A_j = \{p\} \ \ si \ \ i \neq j.$$

Sea $V \subset U$ abierto y conexo tal que $p \in V,\ p_i \notin V$ para cualquier i y $Dm(V) < \frac{1}{n+1}$. Como $V \subset U$ se tiene que ord$(x, X) \leq 2$ para todo $x \in V - \{p\}$. Entonces por la construcción inductiva y como el ord$(p, X) > n$ existe $p_{n+1} \in V - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Por el teorema 1.18, V es arco-conexo y así existe un arco A_{n+1} en V con puntos terminales p y p_{n+1}. Como ord$(x, X) \leq 2$ para todo $x \in V - \{p\}$ y $p_i \notin A_{n+1}$ para cualquier i entonces para cada $i = 1, \cdots, n$ se tiene que $A_{n+1} \cap A_i = \{p\}$. Continuando con este preoceso y por la construcción inductiva se pueden encontrar A_i arcos, $i = 1, 2, \cdots$, tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ es un subcontinuo de X con una infinidad de puntos terminales, con contradicción.

Así, X satisface la condición 1 del teorema 2.1 y por tanto, X es una gráfica, tal como se quería probar.

Proposición 2.6 *Sea G una gráfica no degenerada, entonces $D(X) \leq \aleph_0$ y de hecho, $D^s(X) < \aleph_0$.*

Demostración Como G es gráfica entonces

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad (1 \leq k < \infty)$$

donde cada A_i es un arco y cualesquiera dos de los arcos son disjuntos o se intersectan solo en uno o en ambos de sus puntos terminales. Sea

$$n = \begin{cases} k+1 & \text{si } X \text{ no es un arco} \\ 3 & \text{si } X \text{ es un arco.} \end{cases}$$

Si G es un arco, se verifica que X es disconexo al remover cualesquiera tres puntos. Si G no es arco, remover cualesquiera dos puntos sobre un mismo arco de G disconecta a G, luego por como se definío n y por el principio del palomar, al quitar n puntos siempre hay 2 puntos que se quitan sobre un mismo arco, es decir, al quitar n puntos (tal como se definio n) G siempre es disconexa. Así, n es número disconexión, es decir, $D(X) \leq \aleph_0$ y por tanto $D^s(X) \leq n < \aleph_0$.

Observación El principio del palomar establece que si se tienen $n+1$ objetos y se quieren acomodar en n cajas, entonces hay una caja que contiene 2 objetos.

Proposición 2.7 *Si G es una gráfica que no es un árbol entonces existe $G^* \subset G$ tal que se cumple lo siguiente:*

1. *G^* es una gráfica;*
2. $\chi(G^*) = \chi(G) + 1$;
3. *$|P(G^*)| = |P(G)| + 2$;*
4. *$D^s(G^*) = D^s(G) + 1$.*

Demostración Como G no es árbol existe un círculo topológico S.
Sea $D^s(G) = n$, luego existen $n-1$ puntos $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ tales que $X - \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ es conexo, por la observación a la definición 2.1 (pág. 41).

Afirmación: Algún $x_i \in S$ con $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.
Supóngase que para todo x_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, se tiene que $x_i \notin S$.
Como $S \cap \overline{(G-S)} \neq \emptyset$ y $S \cap \overline{(G-S)} \neq S$, sean $p \in \overline{(G-S)}$ y $a \in S$ tal que $a \notin \overline{(G-S)}$ y ord$(a, G) = 2$. Como G es arco-conexo existen arcos A_1 y A_2 tales que los puntos terminales de A_1 y A_2 son a y p, tanto A_1 como A_2 son subconjuntos de S y $A_1 \cap A_2 = \{a, p\}$.
Luego, $G - \{a\}$ es conexo pues A_1, A_2 son conexos y $(A_1 - \{a\}) \cap \overline{(G-S)} \neq \emptyset$ y $(A_2 - \{a\}) \cap \overline{(G-S)} \neq \emptyset$.
Considerando los puntos $x_1, x_2, \cdots, a$, se obtiene que $X - \{x_1, x_2, \cdots, a\}$ es conexo, con contradicción, por que $D^s(G) = n$.
Por tanto, algún $x_i \in S$ con $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

Sin pérdida de generalidad, sea $x_1 = a \in S$, a tal como se escogío anteriormente.
Luego, existe un arco $A \subset S$ con puntos terminales a, b tal que $\mathrm{ord}(x, G) = 2$ para todo $x \in A$ y $A \cap \overline{(G_S)} = \emptyset$.
Sea $G^* = G - (A - \{a, b\})$, se tiene

1. G^* es una gráfica por su construcción.

2. $\chi(G^*) = [N(G) + 2] - [E(G) + 1] = [N(G) - E(G)] + 1 = \chi(G) + 1.$

3. $|P(G^*)| = |P(G)| + 2$, pues por la construcción de G^*, los puntos terminales G son puntos terminales de G^* y además, a, b son puntos terminales de G^* que no lo son de G.

Afirmación 2: $D^s(G^*) = D^s(G) + 1$.
Sean $x_1 = a, x_2, \cdots, x_{n-1}$ los $n - 1$ puntos tales que
$G - \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ es conexo. Dos de los x_i no pueden estar en S pues disconectarían a G, entonces $(G - A) - \{x_2, ..., x_{n-1}\}$ es conexo.
Como $G^* = (G - A) \cup \{a, b\}$ y además a, b son puntos terminales de G^* entonces
$G^* - \{x_2, \cdots, a, b\}$ es conexo. Así, existen n puntos que no disconectan a G, por tanto
$D^s(G^*) \leq n + 1$.
Por otro lado, como $G^* = (G - S) \cup (S - (A - \{a, b\}))$ y de los $n - 1$ puntos que no disconectan G hay $n-2$ contenidos en $G-S$, entonces cualesquiera $n-1$ puntos removidos de $G - S$ disconectan a G por que $D^s(G) = n$. Así, por la construcción de G^* cualesquiera $n - 1$ puntos removidos de $G - S$ disconectan a G^*.
Por otro lado, cualesquiera tres puntos "removidos" de $S - (A - \{a, b\})$ disconectan a G^*, pues bastaban solo dos puntos para disconectar a G pero en G^*, $S - (A - \{a, b\})$ tiene dos puntos terminales.
Ahora se probará que cualesquiera $n + 1$ puntos disconectan a G^*.
Sean $n + 1$ puntos cualesquiera de G^*, el caso extremo es tomar los n puntos que no disconectan a G^* y q un punto cualquiera.
Si $q \in G - S$ entonces $G^* - \{x_1 = a, x_2, \cdots, x_{n-1}, b, q\}$ es disconexo y si $q \in (S - \{a, b\})$ entonces $G^* - \{x_1 = a, x_2, \cdots, b, q\}$ es disconexo. Así, cualesquiera $n+1$ puntos disconectan a G^* y existen n puntos, $x_1 = a, x_2, \cdots x_{n-1}, b$ tales que $G^* - \{x_1 = a, x_2, \cdots, x_{n-1}, b, q\}$ es conexo.
Por tanto, $D^s(G^*) = n + 1 = D^s(G) + 1$.

De $1, 2, 3$ y la afirmación 2 se concluye que existe $G^* \subset G$ tal que se cumplen las características deseadas.

Observación En la prueba de la proposición anterior se uso la siguiente propiedad: Si X es un continuo y $P(X)$ es el conjunto de puntos límites de X entonces $X - P(X)$ es conexo, la conclución de este resultado es muy clara y como que se entiende de manera natural, sin embargo, se puede encontrar una prueba formal de este hecho en [3, pág. 293, Teorema 4].

II.3. Resultados Auxiliares

El objetivo de este capítulo es probar el inverso de la proposición 2.3, la prueba esta basada en los 5 resultados que se presentan en esta subsección.

Lema 2.2 *Sea X un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$. Sea Z un subcontinuo propio de X y sea m la cardinalidad del conjunto de componentes de $X - Z$. Entonces $m < D^s(X)$ y así, $m < \aleph_0$.*

Demostración Si $m \geq \aleph_0$ sea $\mathcal{C}$ una colección de $\aleph_0$ componentes de $X - Z$; si $m < \aleph_0$, sea $\mathcal{C}$ la colección de todas las componentes de $X - Z$.
En cualquiera de los dos casos, sea $g = |\mathcal{C}|$ y sea $C_i,\ 1 \leq i \leq g$ una numeración de los elementos C_i de $\mathcal{C}$.
Para cada C_i, sea $K_i = C_i \cup Z$, por la proposición 1.14 (pág. 30) cada K_i es un continuo.
Por tanto, Z es un subcontinuo propio de cada K_i y por el teorema 1.25 (pág. 33) se puede escoger un punto no de corte q_i de cada K_i tal que $q_i \in C_i$ para cada i.
Sea $Q = \{q_i : 1 \leq i \leq g \text{ y } q_i \neq q_j \text{ si } i \neq j\}$, Q se puede construir pues para $i \neq j$ se pueden escoger q_i y q_j en diferentes componentes de $X - Z$ y así, $|Q| = g$.
Se definen ahora $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ (el conjunto $\mathcal{P}$ puede ser vacío)de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \{K_i - \{q_i\} : 1 \leq i \leq g\}$$
$$\mathcal{P} = \{C \cup Z : C \text{ es componente de } X - Z \text{ y } C \notin \mathcal{C}\ \}$$

Cada elemento de $\mathcal{L}$ es conexo y contiene a Z, además si $\mathcal{P}$ es distinto del vacío lo mismo es cierto para cada elemento de $\mathcal{P}$, esto por la proposición 1.14. Luego, $(\cap\mathcal{P}\ ) \cap (\cap\mathcal{L}\ ) \neq \emptyset$ entonces por el teorema 1.12 (pág. 23) se tiene que $(\cup\mathcal{L}\ ) \cup (\cup\mathcal{P}\ )$ es conexo.
Por otro lado, $(\cup\mathcal{L}\ ) \cup (\cup\mathcal{P}\ ) = X - Q$, entonces $X - Q$ es conexo. Por tanto, g no es número de disconexión para X, pues $|G| = g$. Además, Como $g \leq \aleph_0$ entonces $g < D^s(X)$ pues de lo contrario, por la proposición 2.3 se tendría que g es número de disconexión de X, con contradicción y tambíen $g < \aleph_0$ pues $D^s(X) \leq \aleph_0$.
Por lo tanto, $g = m$ y así $m < D^s(X)$ y $m < \aleph_0$.

Lema 2.3 *Sea X un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$. Entonces X no contiene algún subcontinuo denso en ninguna parte y no degenerado.*

Demostración Supóngase que X contiene un subconjunto denso en ninguna parte y no degenerado Z. Por el lema 2.2 $X - Z$ tiene solamente un número finito de componentes $C_1, C_2, \cdots, C_m$. Como Z es denso en ninguna parte entonces

$$\overline{(X - Z)} = X = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} C_i}$$

luego,

$$Z = Z \cap \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{m} C_i} \right)$$

por la observación al teorema 1.7 (pág. 16),

$$Z = Z \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{C_i} \right)$$

Así,

$$(1)\quad Z = \bigcup_{i=1}^{m} (\overline{C_i} \cap Z)$$

Luego, por el teorema 1.16 (pág. 27) X es un espacio de Baire y entonces existe k tal que $\overline{C_k} \cap Z$ contiene un subconjunto abierto no vacío W de Z, esto por una de las caracterizaciones de un espacio de Baire (observación a la definición 1.38, pág. 27). Sea V un subconjunto propio, abierto y no vacío de Z tal que $\overline{V} \subset W$ y sea

$$K = \cup \{\overline{C_i} \cap V : |\overline{C_i} \cap V| \leq \aleph_0\}$$

K puede ser vacío. Como $|k| \leq \aleph_0$ entonces existe $A \subset V - K$ tal que $|A| = \aleph_0$ esto es cierto por que V es un espacio de Baire en la topología relativa (observación a la definición 1.38, pág. 27). Sea

$$L = (\overline{C_k} - A) \cup (Z - V).$$

Afirmación 1: L es conexo. Como $A \subset Z$, entonces $C_k \subset \overline{C_k} - A \subset \overline{C_k}$ y por el teorema 1.13 (pág. 23) se tiene que $\overline{C_k} - A$ es conexo.
Por otro lado, sea Q una componente de $Z - V$, como Q es cerrado en Z por el teorema 1.20 (29) se tiene que $Q \cap$ Fr$Z - V \neq \emptyset$, es decir, $Q \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Luego, $\overline{V} \subset W \subset \overline{C_k}$ entonces $Q \cap \overline{C_k} \neq \emptyset$ y como $A \subset V$ se tiene $Q \cap A = \emptyset$. Luego, $(\overline{C_k} - A) \cap Q \neq \emptyset$ y ambos son conexos entonces $(\overline{C_k} - A) \cup Q$ es un subconjunto conexo de L. Como Q es una componente cualquiera de $Z - V$ se concluye por el teorema 1.12 (pág. 23) que L es conexo.

Afirmación 2:

$$L \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{C_i} - A) \right) \quad \textit{es conexo.}$$

Sea i fijo. Por la primera parte del teorema 1.21 (30) se tiene que $\overline{C_i} \cap Z \neq \emptyset$. Supóngase que $\overline{C_i} \cap Z \subset A$, entonces como $|A| = \aleph_0$ y $V \subset Z$ se tiene que $|\overline{C_i} \cap V| \leq \aleph_0$. Luego, $\overline{C_i} \cap V \subset K$. Como $\overline{C_i} \cap Z \neq \emptyset$, existe un punto $p \in \overline{C_i} \cap Z$. Así, se obtiene

$$\overline{C_i} \cap Z \subset A, \quad A \subset V, \quad \overline{C_i} \cap V \subset K$$

Se observa que $p \in A \cap K$, lo que es una contradicción, pues $A \cap K = \emptyset$ por la elección de A. Por tanto, $\overline{C_i} \cap Z \nsubseteq A$. Así, existe $q \in \overline{C_i} \cap Z$ tal que $q \notin A$. Si $q \in V$, como $V \subset \overline{C_k}$ entonces $q \in \overline{C_k} - A$, de lo contrario $q \in Z - V$, en cualquier caso se cumple que $q \in L$ y así $L \cap (\overline{C_i} - A) \neq \emptyset$. Como $A \subset Z$, entonces $C_i \subset \overline{C_i} - A \subset \overline{C_i}$ y por el teorema 1.13 (pág. 23) se tiene que $\overline{C_i} - A$ es conexo. Hasta este momento i se tomo fijo pero arbitrario, así $\overline{C_i} - A$ es conexo y además $L \cap (\overline{C_i} - A) \neq \emptyset$ esto para todo i tal que $1 \leq i \leq m$. Así, por el teorema 1.12 se obtiene que

$$L \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{C_i} - A) \right) \quad \textit{es conexo.}$$

Luego, como $A \subset V \subset Z$ se tiene que

$$(3) \quad L \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} (\overline{C_i} - A) \right) = X - A.$$

Así, $|A| = \aleph_0$ y por la afirmación 2 junto (3) se tiene que $X - A$ es conexo, es decir, $\aleph_0$ no es número de disconexión para X, pero esto es una contradicción a la proposición 2.2 (pág. 41) , pues $D(X) \leq \aleph_0$.

Como la contradicción viene de suponer que X contiene un subconjunto denso en ninguna parte y no degenerado, se concluye que no puede existir tal subconjunto.

Proposición 2.8 *Si X es un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$ entonces X es un continuo de Peano.*

Demostración Por el lema 2.3 ningún subcontinuo de X denso en ninguna parte, es decir, para cualquier subcontinuo A se tiene que int$(\overline{A}) \neq \emptyset$. Como A es cerrado, se tiene que int$(A) \neq \emptyset$, entonces existe $p \in A$ tal que $p \in U \subset A$ para algún abierto U. Así, para cualquier sucesión $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X se tiene que $A \neq \text{lím inf } A_i$ y por la definición 1.46 (pág. 29), A no es un continuo de convergencia. Por tanto, X no contiene algún continuo de convergencia.
Así, por el teorema 1.22 (pág. 30)se tiene que X es cik en cada uno de sus puntos, es decir, X es un continuo de Peano (por la observación a la definición 1.42, pág. 27).

Lema 2.4 *Ses X un continuo tal que $D(X) \geq \aleph_0$. Si Z es un subcontinuo no degenerado de X, entonces $D(Z) \leq \aleph_0$.*

Demostración Si $Z = X$ no hay nada que demostrar. Supóngase que $Z \neq X$.
Sea $A \subset Z$ tal que $|A| = \aleph_0$.

Afirmación: $Z - A$ es disconexo.
Supóngase que $X - A$ es conexo, por el lema 2.2, $X - Z$ tiene solamente un número m de componentes $C_1, C_2, \cdots, C_m$. Por la primera parte del teorema 1.21 se tiene $\overline{C_i} \cap Z \neq \emptyset$ para cada i. Luego, existe $p_i \in \overline{C_i} \cap Z$ para cada i. Sean:

$$H_i = C_i \cup \{p_i\} \quad \forall i;$$
$$M = (Z - A) \cup \{p_1, p_2, \cdots, p_m\};$$
$$B = A - \{p_1, p_2, \cdots, p_m\} \quad (B \textit{ puede ser igual a } B).$$

Luego, por el teorema 1.16 (pág. 27) X es un espacio de Baire y por la observación a la definición 1.38 (pág. 27) Z es un espacio de Baire, como $|A| = \aleph_0$ entonces A es una uníon numerable de conjuntos cerrados de Z, todos con la propiedad de ser densos en ninguna parte (unión de todos los puntos) y así, A es denso en ninguna parte por la definición 1.38, luego entonces $\overline{Z - A} = Z$. Como $C_i \subset H_i \subset \overline{C_i}$ para cada i y $Z - A \subset M \subset \overline{Z - A}$ entonces por el teorema 1.13 (pág. 23) se tiene que M es conexo y H_i es conexo para todo i.
Así, se tiene que $H_i \cap M \emptyset$ para cada i, entonces por el teorema 1.12 (pág. 23)

$$(1) \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{m} H_i \right) \cup M \;\; \textit{es conexo}.$$

Además,

$$(2) \quad \left(\bigcup_{i=1}^{m} H_i\right) \cup M = (X-Z)\cup(Z-A)\cup\{p_1,\cdots,p_m\} = X-(A-\{p_1,\cdots,p_m\}) = X-B$$

y por (1) y (2), $X - B$ es conexo. Luego, $|B| = \aleph_0$ pues $|A| = \aleph_0$ y $m < \aleph_0$, entonces $\aleph_0$ no es número de disconexión para X, con contradicción a la proposición 2.2, pues $D(X) \leq \aleph_0$.
Por lo tanto, $Z - A$ es disconexo.
Por la proposición 2.2 se tiene que $D(Z) \leq \aleph_0$, que es lo que se quería probar.

Corolario 2.2 *Si X es un continuo tal que $D(X) \leq \aleph_0$, entonces cada subcontinuo de X tiene solamente un número finito de puntos terminales.*

Demostración Sea Z un subcontinuo de X y sea J el conjunto de puntos terminales de Z. Si $|Z| = 1$ entonces $|J| = 0$. Supóngase ahora que Z es no degenerado, entonces por el lema 2.4, $D(Z) \leq \aleph_0$.
Supóngase que $|J| \geq \aleph_0$, entonces existe $H \subset J$ tal que $|H| = \aleph_0$, luego $Z - H$ es conexo, es decir, $\aleph_0$ no es número de disconexión para X, con contradicción a la proposición 2.2 (pág. 41). Por tanto, $|J| < 0$, que es lo que se quería probar.

II.4. Teorema Principal de Caracterización

Con lo resultados obtenidos en las secciones anteriores se puede probar el Teorema Central de este capitulo que caracteriza a la gráficas finitas a través de su número de disconexión.

Teorema 2.3 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es una gráfica finita.*
2. *$D(X) \leq \aleph_0$.*
3. *Algún entero n es número de disconexión para X, es decir, $D^s(X) < \aleph_0$.*

Demostración Por la proposición 2.6 (pág. 46), si X es una gráfica entonces $D(X) \leq \aleph_0$ y además $D^s(X) < \aleph_0$,es decir, se tiene que (1) implica a (2) y (3).
Si algún entero n es número de disconexión para X entonces por la proposición 2.3 (pág. 42) también $\aleph_0$ es número de disconexión para X y así, (3) implica (2).
Supóngase que se cumple (2), X es un continuo de Peano por la proposición 2.8 (pág. 50) y por la proposición 2.2 (pág. 51) X tiene solo un número finito de puntos terminales, entonces por el teorema 2.2 X es una gráfica. Por tanto, (2) implica (1).

Este Teorema es muy importante pues establece que si se quieren estudiar aquellos continuos con número de disconexión n, donde n es un número natural, basta con analizar las gráficas finitas, es decir, se establece el siguiente corolario.

Corolario 2.3 *Sea X un continuo no degenerado. $D^s(X) < \aleph_0$ si y sólo si X es una gráfica finita.*

II.5. Algunas aplicaciones del Teorema Principal de Caracterización

En la seccción anterior se probó que solamente las gráficas finitas tienen número de disconexión un número natural, una pregunta interesante es la siguiente: Dada una gráfica finita no degenerada G, ¿cuál es el menor número de disconexión para G?, es decir, ¿Quien es $D^s(G)$?.
La siguiente proposición establece una fórmula para calcular $D^s(G)$ a través de la característica de Euler y la cantidad de puntos terminales de G.

Proposición 2.9 *Sea G una gráfica finita no degenerada, entonces*

$$D^s(G) = 2 - \chi(G) + |P(G)|.$$

Demostración La demostración se realiza usando inducción sobre la característica de Euler, hay que recordar que por el teorema 1.28 (pág. 36).

Si $\chi(G) = 1$ entonces por el teorema 1.29 (pág. 39) G es un árbol. Se tiene que $X - P(X)$ ($P(X)$ es el conjunto de puntos termianles de G) es conexo, sin embargo, para cualquier $F \subset G$ tal que $|F| = |P| + 1$, $X - F$ es disconexo, pues F contiene un punto de corte de G. Entonces

$$D^s(G) = |P(G)| + 1 = 2 - 1 + |P(G)| = 2 - \chi(G) + |P(G)|.$$

Así, la proposición es cierta para $\chi(G) = 1$.

Supóngase que para cualquier gráfica finita no degenerada G_0 tal que $\chi(G_0) = k$ para $k \geq 1$ se cumple

$$D^s(G_0) = 2 - \chi(G_0) + |P(G_0)|.$$

Sea G una gráfica tal que $\chi(G) = k - 1$. Entonces por el teorema 1.29, G no es un árbol. Luego, por la proposición 2.7 (pág. 46) existe $G^* \subset G$ tal que:

1. G^* es una gráfica;
2. $\chi(G^*) = \chi(G) + 1$;
3. $|P(G^*)| = |P(G)| + 2$;
4. $D^s(G^*) = D^s(G) + 1$.

Por 2 se tiene que $\chi(G^*) = k$ y por la hipótesis de inducción se obtiene

$$D^s(G^*) = 2 - \chi(G^*) + |P(G^*)|.$$

Luego, usando 3

$$D^s(G) + 1 = 2 - k + |P(G^*)|$$

por 4 se obtiene

$$D^s(G) + 1 = 2 - k + |P(G)| + 2$$

entonces

$$D^s(G) = 1 - k + |P(G)| + 2 = 2 - (k - 1) + |P(G)| = 2 - \chi(G) + |P(G)|.$$

Así, si la proposición es válida para k también es válida para $k-1$ y el principio de inducción esta completo.

La siguiente proposición es de ayuda para identificar homeomorfismos de gráficas con el mismo $D^s(G)$.

Proposición 2.10 *Sea X una gráfica no degenerada y sea $D^s(X) = n$. Si Y es un subcontinuo de X para el cual existen $n-1$ subconjuntos abiertos mutuamente disjuntos W_i de $Y - \overline{(X-Y)}$ y puntos $y_i \in W_i, 1 \leq i \leq n-1$, tales que los conjuntos*

$$Y - \bigcup_{i=1}^{n-1} W_i, \quad Y - \{y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}\}$$

son conexos, entonces $X = Y$.

Demostración Sean $W = \bigcup_{i=1}^{n-1} W_i$ y $Z = Y - W$.

Supóngase que $Y \neq X$, se tiene que $Z \neq X$ porque cada W es no vacío, además $Z \neq \emptyset$ pues si $Z = \emptyset$ y como $W \subset Y$ (por hipótesis) entonces $Y = W$ y por hipótesis cada W_i es abierto en X entonces W es abierto en X, así Y es abierto en X. Como Y es subcontinuo de X también es cerrado en X. Entonces se tiene que $Y \subset X, Y \neq emptyset, Y \neq X$, Y es abierto y cerrado en X lo que es una contradicción a la conexidad de X (1.11, pág. 22), por tanto, $Z \neq \emptyset$.
Z es conexo por hipótesis y como W es abierto, entonces $Z - W$ es un cerrado tal que $Z - W \subset Y \subset X$ por el teorema 1.15 (pág. 26) se tiene que Z es compacto. Así,

(1) Z es un subcontinuo propio de X.

Por otro lado, se tiene que

$$X - Z = X - (Y - W) = (X - Y) \cup W = (X - Y) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} W_i \right)$$

donde los conjuntos $X - Y, W_1, \cdots, W_{n-1}$ son no vacíos, mutuamente disjuntos y abiertos en $X - Z$. Escogiendo una componente de cada uno de estos conjuntos se obtiene

(2) $X - Z$ tiene almenos n componentes distintas.

Como $D^s(X) = n$, las afirmaciones (1) y (2) están en contradicción al lema 2.2 (pág. 48). Como la contradicción viene de suponer que $Y \neq X$ entonces se cumple que $Y = X$, tal como se quería probar.

El siguiente teorema es uno de los teorema importantes pues establece que una continuo que es disconexo al quitarle cualesquiera dos puntos debe ser una curva cerrada simple, además muestra la utilidad del teorema anterior.

Teorema 2.4 *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si $D^s(X) = 2$.*

Demostración Si X es una curva cerrada simple por la proposición 2.9 se tiene que $D^s(X) = 2 - 0 = 2$.

Por otro lado, sea X un continuo tal que $D^s(X) = 2$, entonces X es no degenerado y por el corolario 2.3 (pág. 51), X es una gráfica finita. Como un árbol no degenerado tiene almenos dos puntos terminales, X no es un árbol por que al quitarle dos puntos terminales X sería conexo lo que contradice que $D^s(X) = 2$. Así, X no es un árbol y contiene un subespacio homeomorfo a una curva cerrada simple Y. Sea $y_1 \in Y - \overline{(X - Y)}$ tal que $\operatorname{ord}(y_1, X) = 2$. Existe un subconjunto conexo abierto W_1 de Y tal que

$$y_1 \in W_1 \text{ y } W_1 \subset Y - \overline{(X - Y)}.$$

Como Y es homeomorfo a una curva cerrada simple, $Y - \{y_1\}$ y $Y - W$ son conexos. Así se satisfacen las hipótesis de la proposición 2.10 y entonces $X = Y$, es decir, X es una curva cerrada simple.

El teorema anterior establece que solamente existe un continuo X que satisface $D^s(X) = 2$, es natural pregunatarse ¿Cuántos continuos homeomorfamente distintos X existen tales que $D^s(X) = 3$?.
El siguiente teorema da respuesta a la pregunta anterior.

Teorema 2.5 *Sea X un continuo. Entonces $D^s(X) = 3$ si y sólo si X es uno de los siguientes cinco continuos: un arco, una paleta, el ocho, la pesa y la theta.*

Demostración Por la proposición 2.9 y el ejemplo 1.59 se tiene

1. Si X es un arco entonces $D^s(X) = 2 - 1 + 2 = 3$.
2. Si X es una paleta entonces $D^s(X) = 2 - 0 + 1 = 3$.
3. Si X es un ocho entonces $D^s(X) = 2 - (-1) + 0 = 3$.
4. Si X es una pesa entonces $D^s(X) = 2 - (-1) + 0 = 3$.
5. Si X es una theta entonces $D^s(X) = 2 - (-1) + 0 = 3$.

Por otro lado, sea X un continuo tal que $D^s(X) = 3$, entonces X es no degenerado y por el cororolario 2.3 (pág. 51), X es una gráfica. Se distinguen los siguientes tres casos:

Caso 1: X es un árbol.
Como cualquier árbol distinto del arco tiene almenos tres puntos terminales, entonces el arco es el único árbol que satisface $D^s(X) = 3$.

Caso 2: X contiene exactamente un subconjunto homeomorfo a una curva cerrada simple.
Por el teorema 2.4 $X \neq S$ y por el corolario 1.3 existe un punto no de corte de y_1 de X tal que $y_1 \notin S$. Sea un arco A un arco en X con puntos terminales y_1 y $v \in S$ tal que $A \cap S = \{v\}$. Sea $Y = A \cup S$ entonces Y es una paleta. Como S es la única curva cerrada en X entonces y_1 es un punto terminal de X. Usando 2 del teorema 2.1 (pág. 43) existe un subconjunto conexo W_1 de X tal que $y_1 \in W_1$ y $W_1 \subset A$, además $W_1 \subset Y - \overline{(X - Y)}$. Usando nuevamente 2 del teorema 2.1 existe $y_2 \in S$ y un subespacio abierto conexo W_2 de $S - \overline{(X - S)}$ tal que

$y_2 \in W_2$, además $W_1 \subset Y - \overline{(X-Y)}$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Como y_1 es punto terminal, y_2 esta en S y por la elección de los W_i entonces $Y - \{y_1, y_2\}$ y $Y - (W_1 \cup W_2)$ son conexos. Así, se satisfacen las hipótesis de la proposición 2.10 y por tanto $X = Y$.

Caso 3: X contiene dos o más subconjuntos homeomorfos a una curva cerrada simple.

Si X contiene tres curvas cerradas simples se pueden tomar tres puntos sobre cada una de las curvas de tal manera que al quitarlos de X no lo disconctan, entonces X no puede contener tres subconjuntos homeomorfos a una curva cerrada simple. Sean S_1 y S_2 dos curvas cerradas simples en X. Si $|S_1 \cap S_2| = 1$ entonces $S_1 \cup S_2$ es una figura ocho; Si $|S_1 \cap S_2| \geq 2$ entonces $S_1 \cup S_2$ contiene una figura theta; Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ entonces existe un arco con puntos terminales a_1, a_2 tal que $S_i \cap A = \{a_i\}$ y así, $S_1 \cup A \cup S_2$ es una pesa.

Sea $Y \subset X$ donde Y es el ocho, la theta o la paleta. Hay que probar que $X = Y$ usando la proposición 2.10. En cualquiera de los tres casos usando 2 del teorema 2.1 se pueden encontrar dos subconjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos W_1 y W_2 de $Y - \overline{(X-Y)}$ y puntos $y_i \in W_i, i = 1\ y\ 2$, (procediendo como en el caso 2 y tomando los W_i en S_i respectivamente) tales que $Y - (W_1 \cup W_2)$ y $Y - \{y_1, y_2\}$ son conexos. Entonces se puede aplicar la proposición 2.10 para concluir que $Y = X$. Entonces X es el ocho, la pesa o la theta.

Así, se han cubierto todos los casos y entonces X solo puede ser un arco, el ocho, la theta, la paleta y la pesa.

Estos continuos se muestran en la siguiente imágen.

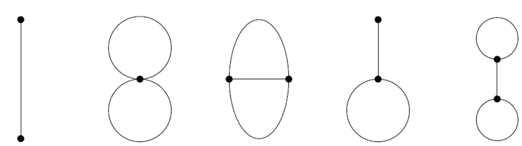


Figura 2.1: Gráficas con $D^s(G) = 3$.

El teorema anterior establece que solo existen 5 continuos tales que $D^s(X) = 3$. La pregunta natural ahora es ¿Que pasa con los continuos X tales que $D^s(X) = 4$?.

Esta pregunta no es tan fácil de contestar y su respuesta se dsicute en el siguiente capítulo.

III. NÚMERO DE DISCONEXIÓN DE UNA GRÁFICA FINITA

En el artículo: *Continuum theory and graph theory: Disconnection numbers*, Sam B. Nadler introduce los resultados presentados en el capitulo 2, de una manera muy similar a como se exponen en esta tesis. Se interesa por estudiar y clasificar a las gráficas finitas a través del número de disconexión, por esta razón deja dos preguntas abiertas en dicho artículo, una de ellas relacionada con las gráficas finitas.

III.1. Descripción del problema de Sam B. Nadler

En la sección 2.5 se encontraron los siguientes resultados:

1. Un continuo X satisface $D^s(X) = 2$ si y sólo si X es una curva cerrada simple.

2. Un continuo X satisface $D^s(X) = 3$ si y sólo si X es alguno de los siguientes continuos: Un arco, una paleta, una pesa, un ocho o una theta.

La pregunta natural es: Si X es un continuo que satisface $D^s(X)$ ¿Quien es X?. Esta pregunta puede ser un tanto complicada y puede relajarse a preguntar ¿Cuántos continuos X (topológicamente distintos) satisfacen que $D^s(X) = 4$?.

Se sabe que cualquiera de estos continuos tienen que ser gráficas finitas, sin embargo, estas preguntas se complican de tal manera que no se pueden abordar de la misma manera como se resolvieron los puntos 1 y 2 antes mencionados.

Sam B. Nadler conjeturó que existen almenos 26 gráficas (topológicamente distintas) que cumplen $D^s(X) = 4$. No prueba esta conjetura y deja una pregunta abierta de manera más general, que se expone a continuación.

Para cada $n = 2, 3, ...$ sea D_n^s el conjunto de gráficas topológicamente diferentes G tales que $D^s(G) = n$.

PROBLEMA ([7], pág. 180, 8.3) : Encontrar una fórmula que pueda ser usada para calcular $\#D_n^s$ para cada n. En la ausencia de tal fórmula, sería interesante encontrar cotas inferiores o superiores para $\#D_n^s$ o estimar que tan rápido crece $\#D_n^s$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

La intención de esta tesis es presentar los avances que se han tenido respecto a este problema, así como exponer la teoría necesaria para el estudio de los números de disconexión en gráficas finitas.

El problema se planteó en 1993 y en la literatura no hay referencia a solución alguna, es hasta finales del año 2010 y principios del año 2011 que se presentan resultados parciales de la solución de dicho problema.

III.2. Teorema Principal

A finales del año 2010 aparece un primer artículo en la revista Topology and its Applications encaminado a resolver el problema mencionado en la sección. El artículo se titula: *A note on the disconnection number* y el autor es Benjamin Vejnar de la Republica Checa.

Por otro lado, a principios del año 2011 en la misma revista, Topology and its Applications, aparece un artículo titulado: *The disconnection number of a graph* de autores alemanes, a saber, Helma Gladdines y Marcel van de Vel, con intenciones de responder la pregunta de Sam B. Nadler.

El teorema más importante que mencionan los tres autores en los dos artículos es en esencia el mismo, pero en redacción es un poco distinto, sin embargo, puede conjuntarse de la siguiente manera:

Teorema 3.1 *Sea X un continuo con $D^s(X) = n$ que no es un arco o una curva cerrada simple. Entonces existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando una de las siguientes cuatro operaciones a Y :*

1. *Adjuntando un arco A a Y tal que $Y \cap A = \{p\}$, donde p es un punto terminal de A y p no es punto terminal de Y.*

2. *Adjuntando un arco A a Y tal que $Y \cap A = \{p_1, p_2\}$, donde $p_1 \neq p_2$ son puntos terminales de A y ninguno de ellos es punto terminal de Y.*

3. *Adjuntando un círculo S (S^1) a Y tal que $Y \cap S = \{p\}$, donde p no es punto terminal de Y.*

4. *Adjuntando una paleta $\mathcal{P}$ a Y tal que $Y \cap \mathcal{P} = \{p\}$, donde p es el punto terminal de $\mathcal{P}$ y no es punto terminal de Y.*

Inversamente, si Y es un continuo tal que $D^s(Y) = n - 1$, al aplicar alguna de las cuatro operaciones descritas se obtiene un continuo X que satisface $D^s(X) = n$.

Demostración Sea X un continuo con $D^s(X) = n$ que no es un arco o una curva cerrada simple, por el corolario 2.3 (pág. 51) X es una gráfica finita.

Si X tiene un punto terminal q, sea $A \subset X$ el arco que tiene como punto terminal a q, como X es distinto del arco, el otro punto terminal p de A tiene orden ≥ 3 en X. Sea $Y := (X - A) \cup \{p\}$, por construcción, Y es una gráfica y p no es punto terminal de Y, pues ord$(p, Y) \geq 2$. Si ord$(p, X) = 3$ entonces ord$(p, Y) = 2$, luego $\chi(Y) = (\#N(G) - 2) - (\#E(G) - 2) = \#N(G) - \#E(G) = \chi(G)$. Si ord$(p, X) > 3$ entonces ord$(p, Y) \geq 3$, luego $\chi(Y) = (\#N(G) - 1) - (\#E(G) - 1) = \#N(G) - \#E(G) = \chi(G)$. Así, por la proposición 2.9 (pág. 52) se obtiene

$$D^s(Y) = 2 - \chi(Y) + (\#P(Y) = 2 - \chi(X) + (\#P(X) - 1) = D^s(X) - 1.$$

Por tanto, existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando la operación 1.

Si X no tiene puntos terminales, X no es un árbol y como X no es curva cerrada simple entonces X contiene un círculo topológico S. Además, por la proposición 2.9 se tiene

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + 0 = 2 - \chi(X).$$

Se tienen los siguientes tres casos:

<u>Caso 1:</u> Hay almenos dos vértices de X en S de grado ≥ 3.

En este caso S se deriva de un circuito en X, entonces existe un arco A con puntos terminales p_1 y p_2 de orden ≥ 3 en X, tal que ord$(x, X) = 2$ para todo $x \in A - \{p_1, p_2\}$. Sea $Y := (X - A) \cup \{p_1, p_2\}$.
Y es gráfica por construcción y los puntos p_1, p_2 tienen orden ≥ 2 en Y, es decir, p_1, p_2 no son puntos terminales de Y. Para probar que $D^2(Y) = n - 1$ hay que distinguir tres casos:

1. Si p_1 y p_2 tienen orden 3 en X entonces p_1 y p_2 tienen orden 2 en Y, luego $\chi(Y) = (\#N(X) - 2) - (\#E(X) - 3) = \#N(X) - \#E(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

2. Un punto terminal tiene orden 3 y el otro tiene orden ≥ 4 en X. Sin pérdida de generalidad, ord$(p_1, X) = 3$ y ord$(p_2, X) \geq 4$ entonces ord$(p_1, Y) = 2$ y ord$(p_2, Y) \geq 3$, luego $\chi(Y) = (\#N(X) - 1) - (\#E(X) - 2) = \#N(X) - \#E(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

3. Si ord$(p_1, X) \geq 4$ y ord$(p_2, X) \geq 4$ entonces ord$(p_1, Y) \geq 3$ y ord$(p_2, X) \geq 3$, luego $\chi(Y) = (\#N(X)) - (\#E(X) - 1) = \#N(X) - \#E(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(Y) = 2 - \chi(Y) = 2 - (\chi(X) + 1) = 2 - \chi(X) - 1 = D^s(X) - 1 = n - 1.$$

Por tanto, existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando la operación 2.

<u>Caso 2:</u> El Círculo topológico S tiene exactamente un vértice de X con orden ≥ 4 en X.

Sea $p \in S$ tal que ord$(p, X) \geq 4$ y definase $Y := (X - S) \cup \{p\}$. Por construcción Y es gráfica y ord$(p, Y) \geq 2$, es decir, p no es punto terminal de Y. Para probar que $D^2(Y) = n-1$ hay que distinguir dos casos:

1. Si ord$(p, X) = 4$ entonces ord$(p, Y) = 2$ y luego $\chi(Y) = (\#N(X) - 1) - (\#E(X) - 2) = \#N(X) - \#N(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

2. Si ord$(p, X) > 4$ entonces ord$(p, Y) \geq 3$ y luego $\chi(Y) = \#N(X) - (\#E(X) - 1) = \#N(X) - \#N(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(Y) = 2 - \chi(Y) = 2 - (\chi(X) + 1) = 2 - \chi(X) - 1 = D^s(X) - 1 = n - 1.$$

Por tanto, existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando la operación 3.

Caso 3: El círculo topológico S tiene exactamente un vértice de orden 3 en X.

Sea $x \in S$ tal que ord$(x, X) = 3$, entonces existe un arco A de X con puntos terminales x y p. El punto terminal p del arco A no esta en S y así, $S \cup A = \mathcal{P}$ forman una paleta $\mathcal{P}$, además ord$(p, X) \geq 3$. Sea $Y := (X - \mathcal{P}\ ) \cup \{p\}$. Por construcción Y es una gráfica y p es punto terminal de $\mathcal{P}$ pero no es punto terminal de Y, pues ord$(p, Y) \geq 2$.

Para probar que $D^2(Y) = n - 1$ hay que distinguir dos casos:

1. Si ord$(p, X) = 3$ entonces ord$(p, Y) = 2$ y luego
   $\chi(Y) = (\#N(X) - 1) - (\#E(X) - 2) = \#N(X) - \#N(X) + 1 = \chi(X) + 1$.
2. Si ord$(p, X) > 3$ entonces ord$(p, Y) \geq 3$ y luego $\chi(Y) = \#N(X) - (\#E(X) - 1) = \#N(X) - \#N(X) + 1 = \chi(X) + 1$.

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(Y) = 2 - \chi(Y) = 2 - (\chi(X) + 1) = 2 - \chi(X) - 1 = D^s(X) - 1 = n - 1.$$

Por tanto, existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando la operación 4.

Así, como se han cubierto todos los casos, se concluye que dado un continuo X con $D^s(X) = n$ existe un subcontinuo Y de X con $D^s(Y) = n - 1$ y además X puede obtenerse a partir de Y aplicando una de las cuatro operaciones descritas a Y :

Para probar el inverso, sea Y un continuo tal que $D^s(Y) = n - 1$, Y es una gráfica y se tienen cuatro casos para Y:

Caso 1: Aplicarle la operación 1 a Y.

Si A es un arco con puntos terminales p y q, sea $X := Y \cup A$ tal que $Y \cap A = \{p\}$ y p no es punto terminal de Y. Se tiene que X es gráfica por construcción y q es punto terminal de X. Para calcular $D^s(X)$, se distinguen dos casos para p

1. Si ord$(p, X) = 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 2) - (\#E(Y) + 2) = \#N(Y) - \#E(Y) = \chi(Y)$.
2. Si ord$(p, X) > 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 1) - (\#E(Y) + 1) = \#N(Y) - \#E(Y) = \chi(Y)$.

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + \#P(X) = 2 - \chi(Y) + (\#P(X) + 1) = D^s(Y) + 1 = n.$$

Caso 2: Aplicarle la operación 2 a Y.

Si A es un arco con puntos terminales p_1 y p_2, sea $X := Y \cup A$ tal que $Y \cap A = \{p_1, p_2\}$ y p_1, p_2 no son puntos terminales de Y. Por construcción X es gráfica, el conjunto de puntos terminales de X, $P(X)$, es el mismo para Y, es decir, $P(X) = P(Y)$ y para calcular $D^s(X)$ se tienen tres casos:

1. Si ord$(p_1, X) = 3$ y ord$(p_2, X) = 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 2) - (\#E(Y) + 3) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$
2. Si ord$(p_1, X) = 3$ y ord$(p_2, X) > 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 1) - (\#E(Y) + 2) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$
   Analógamente si ord$(p_2, X) = 3$ y ord$(p_1, X) > 3$ entonces $\chi(X) = \chi(Y) - 1$.
3. Si ord$(p_1, X) > 3$ y ord$(p_2, X) > 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y)) - (\#E(Y) + 1) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + \#P(X) = 2 - (\chi(Y) - 1) + \#P(Y) = D^s(Y) + 1 = n.$$

<u>Caso 3:</u> Aplicarle la operación 3 a Y.

Si S un círculo, sea $X := Y \cup S$ tal que $Y \cap S = \{p\}$ donde p no es punto terminal de Y. Por construcción X es gráfica, $P(X) = P(Y)$ y para calcular $D^s(X)$ se tienen dos casos:

1. Si ord$(p, X) = 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 1) - (\#E(Y) + 2) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$
2. Si ord$(p, X) > 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y)) - (\#E(Y) + 1) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + \#P(X) = 2 - (\chi(Y) - 1) + \#P(Y) = D^s(Y) + 1 = n.$$

<u>Caso 4:</u> Aplicarle la operación 4 a Y.

Si $\mathcal{P}$ es una paleta, sea $X := Y \cup \mathcal{P}$ tal que $Y \cap \mathcal{P} = \{p\}$ donde p es el punto terminal de $\mathcal{P}$. X es gráfica por construcción, $P(X) = P(Y)$ y para calcular $D^s(X)$ se tienen dos casos:

1. Si ord$(p, X) = 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y) + 1) - (\#E(Y) + 2) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$
2. Si ord$(p, X) > 3$ entonces
   $\chi(X) = (\#N(Y)) - (\#E(Y) + 1) = (\#N(Y) - \#E(Y)) - 1 = \chi(Y) - 1.$

Así, por la proposición 2.9

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + \#P(X) = 2 - (\chi(Y) - 1) + \#P(Y) = D^s(Y) + 1 = n.$$

Por tanto, si Y un continuo tal que $D^s(Y) = n - 1$, entonces al aplicarle a Y cualquiera de las cuatro operaciones descritas, se obtiene un continuo X tal que $D^s(X) = n$, tal como se quería probar.

Así, la primera parte del teorema principal de [1] es un corolario del teorema que se acaba de probar.

Corolario 3.1 *Sea D^s_{n+1} el conjunto de gráficas topológicamente diferentes G tales que $D^s(G) = n + 1$, con $n \geq 3$ entero positivo. Cada elemento de D^s_{n+1} puede obtenerse de un elemento Y de D^s_n aplicando una de las siguientes cuatro operaciones a Y :*

1. *Adjuntando un arco A a Y tal que $Y \cap A = \{p\}$, donde p es un punto terminal de A y p no es punto terminal de Y.*
2. *Adjuntando un arco A a Y tal que $Y \cap A = \{p_1, p_2\}$, donde $p_1 \neq p_2$ son puntos terminales de A y ninguno de ellos es punto terminal de Y.*
3. *Adjuntando un círculo S (S^1) a Y tal que $Y \cap S = \{p\}$, donde p no es punto terminal de Y.*
4. *Adjuntando una paleta $\mathcal{P}$ a Y tal que $Y \cap \mathcal{P} = \{p\}$, donde p es el punto terminal de $\mathcal{P}$ y no es punto terminal de Y.*

Demostración Sea $X \in D^s_{n+1}$, por el teorema anterior existe una gráfica Y tal que $Y \subset X, D^s(Y)$, es decir, $Y \in D^s_n$, y X puede ser obtenido a partir de Y aplicandole a Y una de las cuatro operaciones descritas.

Este teorema es muy importante pues permite descrbir a las gráficas del conjunto D^s_n, el problema de este teorema es que se pueden construir todas las gráficas G tales que $D^s(G) = n$ sólo si se conocen todas las gráficas con número de disconexión $n-1$. Además no garantiza que se puedan distinguir homeomorfismos de gráficas, es decir, al tomar el conjunto D^s_n y aplicarle cada una de las cuatro operaciones del teorema 3.1 a cada una de las gráficas el conjunto D^s_n, es seguro que al tomar dos gráficas distintas y aplicarles dos operaciones distintas se obtenga la misma gráfica, como se verá en un teorema más adelante.

El problema planteado por Sam B. Nadler sigue sin respuesta por que de manera muy intuitiva al aplicar el teorema 3.1 al conjunto D^s_n se necesitan observar de alguna manera las gráficas construidas para descartar homeomorfismos de gráficas.

III.3. Consecuencias del Teorema Principal

Aunque el teorema central de este capítulo no resuelve el problema de Sam B Nadler, si permite hacer estimaciones del tamaño del conjunto D^s_n, además ayuda a probar los teoremas 2.4 (pág. 53) y 2.5 (pág. 54) de una manera más sencilla y lo que es interesante es que permite probar la conjetura establecida por Sam B. Nadler en [7] afirmando que existen almenos 26 gráficas (topológicamente distintas) que cumplen $D^s(X) = 4$.

Teorema 3.2 *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si $D^s(X) = 2$.*

Demostración Si X es una curva cerrada simple entonces $\chi(X) = \#N(X) - \#E(X) = 1 - 1 = 0$ y por la proposición 2.9

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + P(X) = 2 - 0 - 0 = 2.$$

Por otro lado, si X un continuo tal que $D^s(X) = 2$ y X no es una curva cerrada simple, X no es un arco A pues $D^s(A) = 2 - 1 + 2 = 3$ y entonces por el teorema 3.1 existe un subcontinuo Y de X tal que $D^s(Y) = 2-1 = 1$, con contradicción a la proposición 2.1 (pág. 41). Así, si X es un continuo tal que $D^s(X) = 2$ entonces X es una curva cerrada simple.

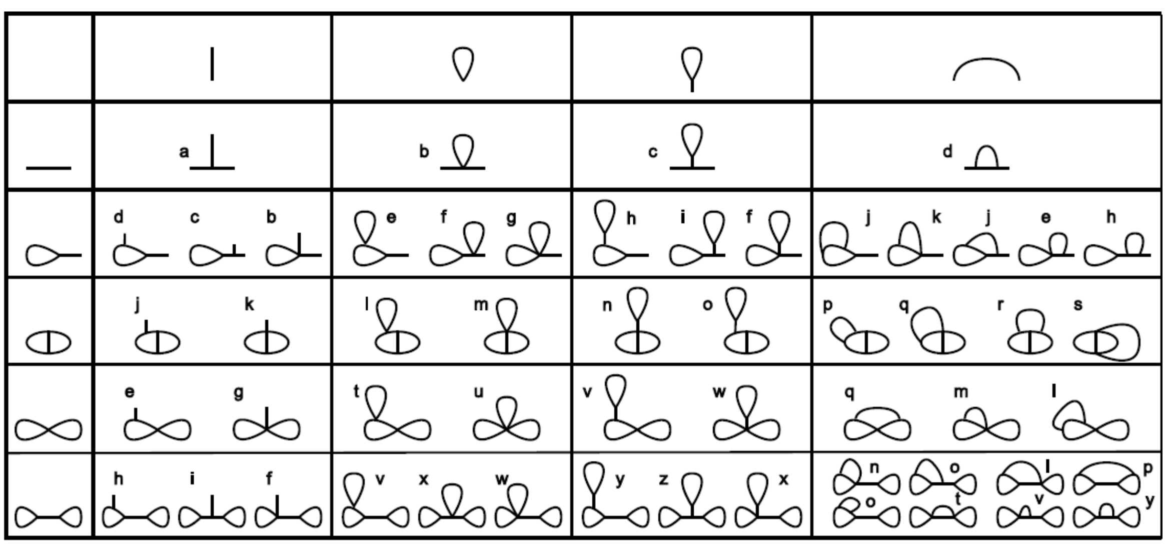
Teorema 3.3 *Los únicos continuos X tales que $D^s(X) = 3$ son el arco, la paleta, la pesa, la theta y el ocho (ejemplo 1.59, pág. 28).*

Demostración Si X es un arco, $D^s(X) = 2-1+2 = 3$. Cada continuo X que no es un arco y que cumple $D^s(X) = 3$ se obtiene de S^1 por medio de cuatro operaciones, esto por el teorema 3.1, obteniendo que X puede ser la paleta, la theta, el ocho y la pesa, respectivamente.

Así, los únicos continuos X tales que $D^s(X) = 3$ son el arco, la paleta, la pesa, la theta y el ocho.

Teorema 3.4 *Existen exactamente* 26 *continuos X topológicamente distintos tales que* $D^s(X) = 4$.

Demostración Usando el corolario al teorema 3.1, cada uno de las gráficas del conjunto D^s_4 se puede obtener a partir de los cinco continuos del conjunto D^s_3, aplicando cada una de las cuatro operaciones descritas. Para esto, se tiene la siguiente tabla donde la primer columna presenta los cinco elementos de D^s_3 y la primer fila las cuatro operaciones posibles. Al descartar homeomorfismos de gráficas se obtuvieron exactamente 26 continuos $a, b, c, ..., z$.



Hasta el momento se sabe lo siguiente con respecto al problema de encontrar una fórmula para calcular $\#D^s_n$.

1. $\#D^s_2 = 1$
2. $\#D^s_2 = 5$

3. $\#D_2^s = 26$

Un patrón numérico no es evidente para el autor de la tesis y por lo leido ni para los autores de [1] y [8]. El problema es que la técnica usada al construir el conjunto de gráficas G tales que $D^s(G) = n$ (D_n^s) a partir de D_{n-1}^s no distingue gráficas homeomorfas y estás se tienen que descartar de alguna manera, como se vío en la prueba del teorema anterior. Por esta razón, no es fácil encontrar la fórmula, a menos que se conozca una manera distinta para construir D_n^s.

Sin embargo, si se pueden dar estimaciones sobre la máxima cantidad de arcos y vértices que utiliza una gráfica del conjunto D_n^s.

Proposición 3.1 *Sea $n \geq 3$ y sea $G \in D_n^s$. Entonces G tiene a lo más $2n - 4$ vértices y a lo más $3n - 6$ arcos.*

Demostración La prueba se hace por inducción.

Para $n = 3$, la proposición predice correctamente un máximo de 2 vértices y 3 arcos (ver la imágen de la página 55).

Supóngase que la proposición es válida para n, es decir, si $G^* \in D_n^s$ entonces G^* tiene a lo más $2n - 4$ vértices y a lo más $3n - 6$ arcos. Hay que probar que si $G \in D_{n+1}^s$ entonces G tiene a lo más $2(n + 1) - 4$ vértices y a lo más $3(n + 1) - 6$ arcos.
Sea $G \in D_{n+1}^s$, por el corolario 3.1, G puede escribirse como $G = G^* \cup F$, donde $G^* \in D_n^s$ y la unión con F esta en uno de los siguientes cuatro casos:

1. F es un arco adjuntado a X por un punto terminal de F.

2. F es un arco adjuntado a X por sus dos puntos terminales de F.

3. F es un circunferencia adjuntado a X por un punto.

4. F es una paleta adjuntada a X por el punto terminal de F.

Además, ningún punto de $F \cap G^*$ es punto terminal de G^*.
La operación 1 agrega a lo más dos vértices a G^* y el número de arcos de G^* se incrementa en a lo más 2.
La operación 2 agrega a lo más dos vértices a G^* y el número de arcos de G^* se incrementa en a lo más 3.
La operación 3 agrega a lo más un vértice a G^* y el número de arcos de G^* se incrementa en a lo más 2.
La operación 4 agrega a lo más dos vértices a G^* y el número de arcos de G^* se incrementa en a lo más 3.
Por tanto, el número máximo de vértices de G es $2n - 4 + 2 = 2(n + 1) - 4$ y el máximo número de arcos de G es $3n - 6 + 3 = 3(n + 1) - 6$, tal como se quería probar. Así, si la proposición es válida para n también es válida para $n + 1$. El principio de inducción esta completo y la proposición es válida para todo $n \geq 3 \in \mathbb{N}$.

Aunque encontrar la fórmula es algo complicado, si se pueden dar estimaciones del crecimiento de $\#D_n^s$. Para esto se necesitan algunos lemas.

Proposición 3.2 *Sea n un número natural. El número de soluciones enteras de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 = n \text{ con } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

es $\binom{n+2}{2}$.

Observación La notación $\binom{n}{k}$ representa el número de maneras distintas de escoger un subconjunto con k elementos de un conjunto con n elementos y se calcula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ donde } m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Demostración Se utilizarán separadores. Para esto, primero se representa a n como n veces el número 1, es decir,

$$n \equiv \underbrace{1\,1\,1\,1 \cdots\,1\,1}_{n}$$

Como esta permitido que las variables tomen el valor 0, se agregan dos ceros al inicio de la notación anterior, quedando

$$0\;0\;\underbrace{1\,1\,1\,1 \cdots\,1\,1}_{n}.$$

En la notación anterior se agregan 2 separadores $(|)$, la suma de los números que quedan entre los separadores indica una solución a la ecuación, por ejemplo,

$$0\;|0\;\underbrace{1\,1\,|1\,1 \cdots\,1\,1}_{n}.$$

representa la solución $x_1 = 0, x_2 = 2$ y $x_3 = n - 3$.
Como se tienen $n+2$ espacios para poner los 2 separadores (los espacios entre los números), y cada posición de los separadores da una solución a la ecuación, el problema es equivalente a encontrar todos los subconjuntos de 2 elementos de un conjunto de $n+2$ elementos, es decir, $\binom{n+2}{2}$.
Por tanto, hay $\binom{n+2}{2}$ soluciones a la ecuación, que es lo que se quería probar.

Lema 3.1 *Sea n un número natural. El número de soluciones de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n \text{ con } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ y } x_1 \text{ par.}$$

Es,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-2(k-1)}{2}$$

donde la notación $[m]$ representa la parte entera de un número m.

Demostración Como x_1 es un número par, la soluciones se pueden encontrar de la siguiente manera: se fija $x_1 = 0$ y se encuentran las soluciones de x_1, x_2 y x_3 como en la proposición 3.2, luego se fija $x_1 = 2$ y se encuentran las soluciones de x_1, x_2 y x_3 con $n-2$, como en la proposición 3.2, de manera general, se fija $x_1 = p$ y se encuentran las soluciones de x_1, x_2 y

x_3 con $n-p$ como en la proposición 3.2 hasta recorrer todos los pares menores o iguales a n. Así, el número total de soluciones es

$$\binom{n+2}{2}+\binom{(n-2)+2}{2}+\cdots+\binom{(n-2[\frac{n}{2}])+2}{2}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-2(k-1)}{2}$$

tal como se quería probar.

Lema 3.2 *Si $G \in D_n^s$ entonces al aplicarle a G cualquiera de las siguientes tres operaciones se obtiene un gráfica de D_n^s.*

1. *Adjuntarle a G un circunferencia en un punto terminal.*
2. *Adjuntar dos arcos A_1, A_2 en dos puntos terminales p_1, p_2, de tal manera que $A_1 \cap A_2 = \{p_1, p_2\}$.*
3. *Reemplazando el arco A que contiene a un punto terminal de G por una circunferencia unida en el otro punto terminal de A en G.*

Demostración Sea $G \in D_n^s$, se tienen los siguientes casos:

1. Sea G^* la gráfica obtenida al adjuntarle a G una circunferencia en un punto terminal p, entonces por la construcción, ord$(p, G^*) = 3$, el conjunto de puntos terminales de G^* es un elemento menor al de G, es decir, $\#P(G^*) = \#P(G) - 1$, y además

   $$\chi(G^*) = \#N(G) - (\#E(G) + 1) = \chi(G) - 1.$$

   Así,

   $$D^s(G^*) = 2 - \chi(G^*) + \#P(G^*) = 2 - (\chi(G) - 1) + (\#P(G) - 1) =$$
   $$= 2 - \chi(G) + \#P(G) = D^s(G).$$

2. Sea G^* la gráfica obtenida al adjuntar dos arcos A_1, A_2 en dos puntos terminales p_1, p_2, de tal manera que $A_1 \cap A_2 = \{p_1, p_2\}$. Por construcción se tiene que ord$(p_1, G^*) = 3 =$ord(p_2, G^*), $\#P(G^*) = \#P(G) - 2$ y además

   $$\chi(G^*) = (\#N(G)) - (\#E(G) + 2) = \chi(G) - 2.$$

   Así,

   $$D^s(G^*) = 2 - \chi(G^*) + \#P(G^*) = 2 - (\chi(G) - 2) + (\#P(G) - 2) =$$
   $$= 2 - \chi(G) + \#P(G) = D^s(G).$$

3. Sea G^* la gráfica obtenida al reemplazar el arco A que contiene a un punto terminal de G por una circunferencia unida en el otro punto terminal de A en G. Por construcción se tiene que $\#P(G^*) = \#P(G), \#E(G^*) = \#E(G)$ y $\#N(G^*) = \#N(G)$. Así,

   $$D^s(G^*) = 2 - \chi(G^*) + \#P(G^*) = 2 - \chi(G) + \#P(G) = D^s(G).$$

De los tres casos anteriores se concluye que ninguna de las operaciones realizadas a alguna gráfica G altera el número $D^s(G)$.

Proposición 3.3 *Para $n \geq 3$, se tiene*

$$\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-2(k-1)}{2} \right) \cdot \#\mathcal{T}_n \leq \#D^s_{n+1} \leq \left(\frac{25n^2}{2} - \frac{69n}{2} + 19 \right) \cdot \#D^s_n$$

donde $\mathcal{T}_n$ representa la subclase de D^s_{n+1} que consiste de todos los árboles con n puntos terminales.

Demostración Primero se probará la segunda desigualdad. Sea $G \in D^s_n$, por la proposición 3.1 G tiene a lo más $2n-4$ vértices y a lo más $3n-6$ arcos, entonces hay a lo más $3(2n-4)$ posibilidades para adjuntar un arco, una circunferencia o una paleta en un vértice de G y hay a lo más $3(3n-6)$ posibilidades para adjuntar alguno de esos tres continuos en un punto de un arco, que no es punto terminal.
Para adjuntar un arco por sus puntos terminales hay $(2n-4)$ posibilidades para seleccionar un vértice y $(2n-5)$ para seleccionar un segundo vértice, pero como no importa el orden si no la pareja seleccionada, entonces hay a lo más $\frac{1}{2}(2n-4)(2n-5)$ para seleccionar dos vértices distintos de G, análogamente hay a lo más $(2n-4)(3n-6)$ maneras distintas para seleccionar un vértice y un arco de G y a lo más $\frac{1}{2}(3n-6)(3n-7)+(3n-6)$ posibilidades para seleccionar dos arco, no necesariamente diferentes.
Así, a lo más se pueden construir

$$3(2n-4)+3(3n-6)+\frac{1}{2}(2n-4)(2n-5)+(2n-4)(3n-6)+$$

$$+\frac{1}{2}(3n-6)(3n-7)+(3n-6) = \frac{25}{2}n^2 - \frac{69}{2}n + 19$$

gráficas con $D^s = n+1$, esto por el corolario 3.1 . Lo que prueba la segunda desigualdad.

Por otro lado, para probarar la primer desigualdad, sea $X \in D^s_{n+1}$ por el lema 3.2, al aplicarle a G cualquiera de las siguientes tres operaciones se obtiene un gráfica de D^s_{n+1}.

1. Adjuntarle a G un circunferencia en un punto terminal.
2. Adjuntar dos arcos A_1, A_2 en dos puntos terminales p_1, p_2, de tal manera que $A_1 \cap A_2 = \{p_1, p_2\}$.
3. Reemplazando el arco A que contiene a un punto terminal de G por una circunferencia unida en el otro punto terminal de A en G.

Como $\mathcal{T}_n \subset D^s_{n+1}$ se va a crear una subclase de D^s_{n+1} a partir de $\mathcal{T}_n$. Para esto, sea (r,s,t,u) una descomposición de n, es decir, $r+s+t+u=n$ donde $r,s,t,u \geq 0$ con r par. Por el lema 3.1 el número de tales descomposiciones es

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-2(k-1)}{2}.$$

Una descomposición (r,s,t,u) se usa de la siguiente manera: sea $T \in \mathcal{T}_n$, se escogen r puntos terminales de T y se dividen en $\frac{r}{2}$ parejas y se aplica la operación 2, se escogen s y t puntos terminales y se aplican las operaciones 1 y 3 respectivamente y por último se dejan u puntos terminales intactos. Para cada descomposición (r,s,t,u) de n se considera una partición de los puntos terminales como la descripción anterior.
Bajo este procedimiento se obtiene una extensión de T con una colección de círculos topológicos disjuntos. Para cada descomposición de n y al realizar el preocedimiento descrito a T se obtiene una gráfica G^* tal que $G^* \in D_n^s$, además, cada descomposición construye una gráfica distinta, así hay almenos

$$\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-2(k-1)}{2}\right) \cdot \#\mathcal{T}_n$$

gráficas en D_{n+1}^s, tal como se quería probar.

Estas son buenas estimaciones sobre el número de elementos del conjunto D_n^s. Continuando con el problema de calcular el tamaño de D_n^s, los autores de $[1]$ mencionan el uso de algún tipo de software para construir y estimar el tamaño de D_n^s, usando el corolario 3.1. Sin embargo, solamente pudieron calcular satisfactoriamente el tamaño de D_n^s para $n = 4, 5, 6, 7$ y 8. Para el caso $n = 9$ solo se da una aproximación.

El problema planetado por Nadler es un buen reto que no se ha podido resolver, lo más destacable hasta el momento son las cotas inferiores y superiores, así como calcular el tameño de D_n^s para algunos valores de n, lo que se resume en la siguiente tabla.

Tamaño de D_n^s	
D_2^s	1
D_3^s	5
D_4^s	26
D_5^s	213
D_6^s	2310
D_7^s	32512
D_8^s	555323
D_9^s	± 10612000

BIBLIOGRAFÍA

[1] Gladdines, Helma; van de Vel, Marcel.*The disconnection number of a graph*. Topology and its Applications 158 (2011) 424 - 431.

[2] Illanes Mejia, Alejandro. *Hiperespacios de Continuos*. Sociedad Matemática Mexicana. México. 2004.

[3] K. Kuratowski. *Topology, volume II.* Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[4] Lipschutz Seymour. *Teoria y Problemas de Topología General.* Mc Graw Hill. México. 1982.

[5] Munkres, James. *Topología.* 2da. Edición. Pretince Hall. España. 2002.

[6] Nadler, Sam B. *Continuum Theory: An Introduction.* Marcel Decker. United States, 1993.

[7] Nadler, Sam B. *Continuum theory and graph theory: Disconnection numbers.* J. Lond. Math. Soc. (2) 47 (1993) 167 - 181.

[8] Vejnar Benjamín. *A note on the disconnection number.* Topology and its Applications 157 (2010) 2873 - 2875.