



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO EN SUELOS NO SATURADOS
MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO Y MÉTODOS ANALÍTICOS

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Ing. Luis Alberto Soto Reyes

Dirigido por:

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Presidente

Dra. María De La Luz Pérez Rea

Secretaria

Dr. Jaime Moises Horta Rangel

Vocal

Dr. Roberto Augusto Gómez Loenzo

Suplente

Dr. Damián Vargas Vázquez

Suplente

Dr. Aurelio Domínguez González

Director de la Facultad

Octavio Cornejo Pérez
Firma

[Signature]
Firma

[Signature]
Firma

[Signature]
Firma

Goana
Firma

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña

Directora de Investigación y Postgrado

Centro Universitario
Santiago de Querétaro, Qro.
Noviembre de 2015
México

RESUMEN

Una variable importante dentro del estudio de los suelos no saturados es el potencial total de succión. Esta característica del suelo ayuda a comprender fenómenos del suelo como cambios volumétricos, comportamiento esfuerzo-deformación y flujo de humedad al interior de la matriz de suelo.

Este trabajo de tesis presenta un estudio sobre el comportamiento de flujo en suelos parcialmente saturados mediante la solución de la ecuación de Richards en términos de la succión del suelo. Se plantean las funciones necesarias para representar la distribución inicial, los cambios de succión en la superficie y una fuente o sumidero de humedad dentro del suelo. Además se exhiben los resultados del modelo numérico desarrollado a partir del método Galerkin, así como los resultados analíticos obtenidos mediante el método de desarrollo en autofunciones.

Se comparan los resultados numéricos y analíticos para el caso con una fuente de humedad dentro del suelo. Los métodos se validan al compararlos en el caso donde no se incluye una fuente-sumidero de humedad con datos experimentales previamente obtenidos por diversos investigadores.

(Palabras clave: ecuación de Richards, comportamiento de flujo, suelos no saturados, succión).

SUMMARY

The total potential of suction is a very important variable within the study of non-saturated soils, such characteristic of soils is useful to understand phenomena such as volumetric changes, strain-stress behavior, and moisture flow entering the soil domain.

This thesis work presents an approach to study the behavior of moisture flow in partially saturated soils by means of the Richard's equation solution given in terms of the soil suction variable. The explicit functions for initial distribution, changes of suction on the soil surface, and moisture source within the soil, are provided. The main results for the numerical model developed on the basis of the Galerkin method, and the analytical results obtained through the method of development in autofunctions, are shown.

The numerical and analytical results, achieved for the case of a system with a moisture source within the soil, are compared. The methods are validated by comparing with previous experimental results, obtained by several researchers, for the case of a system without a moisture source-sink.

(Key words: Richard's equation, behavior of flow, non-saturated flow, suction)

A mi familia y amigos

—por su apoyo incondicional a lo largo de este proyecto.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Octavio Cornejo Pérez por ser el director de este proyecto y brindarme su apoyo en cada paso de esta investigación

A la Dra. María de la Luz Pérez Rea porque sin su guía y ayuda este proyecto no hubiera sido posible

Al Dr. Jaime Moises Horta Rangel quien me brindo sus conocimientos los cuales fueron fundamentales para la realización de este trabajo

A mis sinodales por sus valiosas opiniones y recomendaciones las cuales enriquecieron esta investigación

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo el cual permitió llevar acabo esta investigación

A mis amigos y compañeros que me dieron su ayuda a lo largo de estos dos años de nuevos retos y desafíos

ÍNDICE GENERAL

Resumen	I
Summary	II
Dedicatoria	III
Agradecimientos	IV
Índice general	VI
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Descripción del problema	2
1.3. Justificación	3
1.4. Hipótesis y objetivos	5
1.4.1. Hipótesis	5
1.4.2. Objetivos	5
2. Revisión de la literatura	6
2.1. Modelación de flujo en suelos no saturados	6
2.1.1. Algunos conceptos básicos de mecánica de suelos no saturados	6
2.1.2. Ecuación de Richards	7
2.1.3. Parámetros de la ecuación de Richards	9
2.1.4. Algunos modelos que utilizan la ecuación de Richards	11

2.2. Métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales	16
2.2.1. Diferencias finitas	16
2.2.2. Métodos de residuos pesados	18
3. Metodología	20
3.1. Planteamiento del problema	20
3.2. Variaciones de succión	21
3.2.1. Distribución inicial de succiones	21
3.2.2. Variaciones de succión debido al clima	21
3.2.3. Variaciones de succión debido a una fuente-sumidero puntual	22
3.3. Desarrollo de la solución numérica	24
3.3.1. Método de Galerkin	24
3.3.2. Elemento triangular lineal	27
3.3.3. Forma de las matrices	29
3.3.4. Diferencias finitas para el tiempo	32
3.4. Métodos analíticos	35
3.4.1. Método de desarrollo en autofunciones	35
4. Resultados	42
4.1. Aproximación de funciones	42
4.2. Solución numérica	48
4.3. Solución analítica	61
4.4. Comparación de resultados	65
5. Discusión y Conclusiones	73

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Flujo de agua en suelos no saturados

En las últimas décadas la mecánica de suelos parcialmente saturados ha tomado gran relevancia en diversas áreas de estudio como la Hidrología, Ingeniería Ambiental, Edafología, Geotecnia y otras ciencias relacionadas con los suelos. En particular en Geotecnia se han realizado una variedad de estudios acerca de suelos no saturados, entre los cuales se encuentran aquellos sobre el flujo del agua a través de medios porosos (Prasad *et al.*, 2001; Menziani *et al.*, 2007; Weill *et al.*, 2009; Paulus *et al.*, 2013). En la actualidad se siguen desarrollando métodos con la finalidad de obtener un mejor conocimiento de este tipo de fenómenos, para ello uno de los elementos que se utiliza en la realización de estos modelos de flujo en suelos no saturados es la ecuación de Richards.

Ecuación de Richards

En 1931 Richards propuso por primera vez la ecuación que determina la dinámica del flujo a partir de potenciales en el cuerpo del suelo, es decir, por medio de ésta se observa la variación del contenido de humedad respecto al tiempo y el espacio en un medio poroso. La ecuación se basa en dos importantes teorías, "*la ley de Darcy*" para suelos no saturados y "*la ecuación de continuidad*" (Richards, 1931).

La ecuación de Richards ha sido estudiada en los últimos años debido a la importancia que ha tomado la mecánica de suelos no saturados dentro de los estudios de ingeniería. Existe una variedad de planteamientos y métodos (Barari *et al.*, 2009; Fahs *et al.*, 2009; Merz y Rybka, 2010; Sun *et al.*, 2013) propuestos para la solución de esta ecuación que van desde los más simples e idóneos hasta los más complejos pero con una mayor semejanza a la realidad.

1.2. Descripción del problema

Una de las dificultades que se tiene en el momento de realizar modelación para el flujo de humedad en suelos no saturados es la no linealidad que presenta la ecuación de Richards. Por lo tanto, se emplean métodos numéricos para encontrar su solución, ya que los métodos analíticos pueden tornarse demasiado complicados en un gran número de casos. Los métodos numéricos como el método de elemento finito, proveen una solución que se puede calcular de manera más sencilla. Ahora bien la solución numérica es aproximada y por tanto, conlleva incertidumbre inherente al método numérico. Debido a esto, es de gran importancia obtener no sólo la solución numérica sino también intentar llevar a cabo la solución cerrada para complementar el conocimiento sobre el objeto de estudio, en este caso la variación de la succión en medios porosos.

Otro aspecto a considerar es el papel que juegan las fuentes de humedad dentro del suelo. Éstas son un factor que a menudo no se toma en cuenta al tratar de resolver una ecuación diferencial mediante métodos analíticos, el motivo es nuevamente el aumento de la dificultad al momento de calcular la solución. A pesar de lo anterior es importante tomar en cuenta las fuentes de humedad ya que tienen una fuerte influencia dentro del comportamiento del sistema y esto daría como resultado un modelo fiel al fenómeno real.

Gran parte de las investigaciones realizadas proponen un modelo de la variación de humedad con base en el contenido volumétrico de agua, que es un potencial positivo, es decir que fluye de un mayor contenido volumétrico de agua a uno menor. Sin embargo, muy pocas toman la ecuación de Richards en términos del potencial total de succión que es un potencial negativo, esto significa que va de donde hay un menor potencial de succión a uno mayor. El estudiar el fenómeno en términos del potencial total de succión en vez del contenido volumétrico de humedad permite tener una nueva perspectiva del problema y así poder observar el comportamiento del sistema bajo un punto de vista distinto, el cual proporcione más información sobre lo que ocurre dentro del fenómeno de flujo de agua en suelos. De esto se desprende el problema de la falta de un mayor entendimiento de la fenomenología en suelos no saturados; lo cual demanda más estudios sobre las distintas variables que intervienen en dicho fenómeno.

1.3. Justificación

El estudio de los suelos como rama de la ingeniería civil es una de las más complicadas debido a la heterogeneidad de los suelos. Por tal razón en un inicio se han hecho simplificaciones en los trabajos de mecánica de suelos, de las cuales se han obtenido resultados aceptables. Sin embargo, estos modelos ya no son suficientes al momento de necesitar una mejor comprensión de la fenomenología de los suelos, motivo por el cual se requiere de nuevos enfoques para la modelación de este tipo de problemas, sobre todo cuando se trata con suelos no saturados.

La mecánica de suelos saturados es frecuentemente utilizada en una amplia variedad de proyectos geotécnicos, sin embargo, sus postulados no pueden ser directamente aplicados a suelos no saturados, los cuales abarcan gran parte del territorio en el mundo. Esto hace que se tengan que desarrollar nuevas teorías y modelos para los fenómenos que involucran este tipo de suelo.

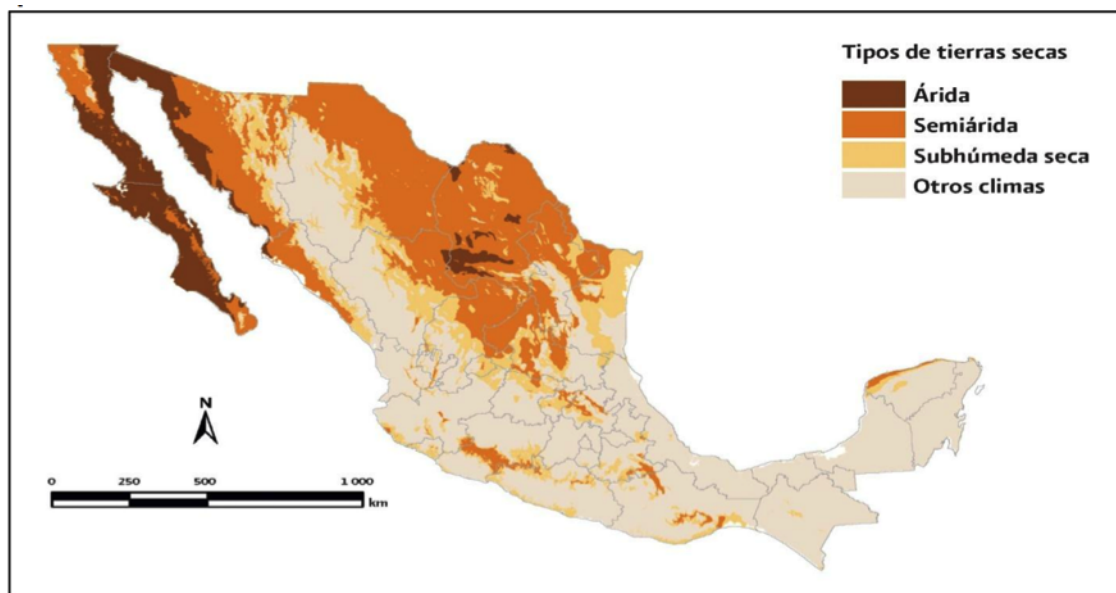


Figura 1.1. Clasificación del territorio nacional basada en el criterio de índice de aridez.

La Figura 1.1 muestra la distribución de tierras secas de México a partir del índice de aridez, este parámetro permite clasificar las regiones geográficas según su precipitación, temperatura media anual, entre otros factores. Esto es relevante debido a que los suelos no saturados se presentan principalmente en zonas áridas y semiáridas que representan más de la mitad del territorio nacional. Por consiguiente, el interés de entender la fenomenología de los suelos no saturados toma una importancia significativa dentro del crecimiento del país, debido a que la eco-

nomía de una nación se basa en gran medida en el desarrollo de infraestructura de vanguardia. Uno de estos fenómenos es la difusión de humedad en el suelo, éste causa variaciones de volumen en el suelo lo que afecta directamente a las estructuras soportadas en él y por tanto influye en el desarrollo de proyectos de Ingeniería Civil.

De manera local se han desarrollado numerosos avances en el estudio de la Geotecnia (Lopez-Lara *et al.*, 1999; Pérez-Rea *et al.*, 2003; Rojas *et al.*, 2011; Arroyo *et al.*, 2013; Horta *et al.*, 2013; Arroyo *et al.*, 2015), los cuales han permitido formar un panorama de como son y de que manera se comportan los suelos no saturados. La ciudad de Querétaro esta ubicada sobre una zona donde el suelo es en gran parte arcilloso, el cual entra en la categoría de arcillas expansivas, este tipo de suelo tiende a tener significativos cambios de volumen cuando hay una variación de humedad dentro de él, lo que afecta sus propiedades mecánicas y por lo que representa un caso de interés para aquellos que desarrollan cualquier tipo de construcciones. Lo mencionado anteriormente hace pertinente profundizar más en el estudio de los suelos no saturados en el estado de Querétaro.

Como se ha podido observar un factor importante en el comportamiento de los suelos parcialmente saturados es la variación de la humedad que se presenta dentro del cuerpo poroso. Esto puede ser ocasionado por fenómenos naturales (lluvia, sequía, etc.) o por la acción del hombre (fugas, extracciones, etc.). Diversas investigaciones desde hace varias décadas se han dedicado a la comprensión de la variación de humedad en un medio poroso (Zhou *et al.*, 2013).

Aún con la gran variedad de trabajos realizados en este tema, queda una cantidad sustancial de preguntas sobre el fenómeno de difusión en los suelos no saturados. La mayoría de los estudios utiliza al contenido volumétrico de agua como variable dependiente de la ecuación de Richards, por lo tanto, es poco lo que se conoce sobre la variación de la humedad en términos de potencial de succión.

En este trabajo se plantea un modelo de flujo en suelos no saturados con base en una variable poco utilizada como lo es el potencial total de succión, en el cual se proponen funciones que representan variaciones de humedad tanto dentro del suelo como en su superficie. Este modelo es resuelto numéricamente mediante el método de elemento finito mostrado en el Capítulo 3, los resultados del modelo numérico y de la exploración de soluciones cerradas factibles son mostrados en el Capítulo 4, con la finalidad de contribuir al conocimiento del fenómeno de flujo en suelos no saturados.

1.4. Hipótesis y objetivos

1.4.1 Hipótesis

El comportamiento del flujo de humedad en suelos no saturados es descrito mediante la solución numérica y analítica de un modelo basado en la succión el cual incluye funciones determinadas a partir de datos experimentales de arcillas CH de Jurica, Querétaro.

1.4.2 Objetivos

Objetivo general

Determinar el comportamiento del flujo en suelos no saturados mediante la solución numérica y analítica de la ecuación de Richards modificada con funciones específicas propuestas a partir de datos experimentales de estudios realizados en la localidad de Jurica, Querétaro.

Objetivos particulares

1. Obtener los parámetros necesarios para la ecuación de Richards en función de la succión mediante datos encontrados en la literatura sobre arcillas CH de Jurica.
2. Definir las funciones que representen variaciones de humedad en la superficie y dentro del suelo; así como la distribución inicial de succión en el suelo, a partir de datos de arcillas CH de Querétaro.
3. Determinar la solución numérica y analítica de la ecuación de Richards en términos de la succión del suelo y con las funciones planteadas.
4. Explorar mediante métodos analíticos soluciones factibles a la ecuación de Richards en términos de la succión del suelo y con las funciones planteadas.
5. Validar los resultados obtenidos con los datos experimentales encontrados en la literatura de arcillas CH de Jurica, Querétaro.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. Modelación de flujo en suelos no saturados

2.1.1 Algunos conceptos básicos de mecánica de suelos no saturados

Para adentrarse en el tema de modelación de flujo en suelos, se muestran algunos de los conceptos más relevantes para el desarrollo de este trabajo.

El suelo consta de distintas fases, en el estado saturado se tiene la fase líquida (agua) y sólida (partículas de suelo); en el estado no saturado se compone de la fase gaseosa (aire), líquida (agua) y partículas sólidas. Las fases líquida y gaseosa del suelo conforman el volumen de vacíos, mientras la fase sólida constituye el volumen de sólidos.

Uno de los parámetros comúnmente utilizados es el contenido volumétrico de agua o humedad volumétrica (θ) que es la cantidad de agua contenida en un material, en este caso el suelo. Esta propiedad se expresa como una proporción que puede ir de 0 cuando el suelo está completamente seco hasta el valor de la porosidad del suelo en el punto de saturación. Se calcula mediante la ecuación

$$\theta = \frac{V_w}{V_T}, \quad (2.1)$$

donde V_w es el volumen de agua de la muestra y V_T es el volumen total de la muestra.

Otra propiedad importante de los suelos no saturados es la *succión*. El potencial total de succión (u) es un potencial negativo dentro del suelo el cual está compuesto por la succión osmótica y la succión mátrica. Los efectos matriciales provienen de las presiones desarrolladas por el menisco capilar y adsorción del agua debido a fuerzas ejercidas por las superficies de las partículas, éstas son cuantificadas de forma global debido a la dificultad de discriminarlas.

$$u_{total} = u_{osm} + u_{mat}. \quad (2.2)$$

Un concepto importante que permite vincular las dos propiedades mencio-

nadas anteriormente es la curva característica del suelo, ésta es una gráfica que relaciona el potencial de succión con el contenido de agua en el suelo. A partir de la curva se puede obtener más información del suelo e incluso se han desarrollado metodologías que utilizan la curva característica para determinar parámetros del suelo, un ejemplo es el cálculo de la permeabilidad no saturada desarrollada por Fredlund *et al.* (1994).

2.1.2 Ecuación de Richards

Como se vió en el capítulo anterior, una de las ecuaciones más utilizadas en fenómenos que involucran flujo de agua en suelos no saturados es la ecuación de Richards (Richards, 1931). Esta ecuación es usada en la modelación de flujo, el transporte de masa en un suelo no saturado, entre otros fenómenos. El fundamento de ésta es la ley de Darcy, empleada normalmente para suelos saturados, aunque puede ser aplicada en suelos no saturados, y junto a la ecuación de continuidad permiten obtener la ecuación de Richards para suelos no saturados (Marzan, 2013). Considerando la ley de Darcy:

$$q = -k\nabla H, \quad (2.3)$$

donde:

q = densidad del flujo o descarga por unidad de área,

k = conductividad hidráulica,

H = carga hidráulica,

y para cada una de las direcciones de flujo se tiene entonces

$$q_i = -k(\theta)\frac{\partial H}{\partial x_i} = -k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

donde q_i con $i = 1, 2, 3$ representa el flujo en cada una de las direcciones espaciales, esto al combinarse con la *Ecuación de Continuidad*,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla q, \quad (2.5)$$

se forma lo que se conoce como la *Ecuación General de Flujo no Saturado*,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\theta)\frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(\theta)\frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\theta)\frac{\partial H}{\partial z} \right], \quad (2.6)$$

además se sabe que la carga hidráulica se puede expresar como la suma de los efectos de las cargas de presión y de altura, es decir, que $H = \psi + z$ y al reemplazar esto en la ecuación (2.6) se tiene la ecuación de Richards,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} + k(\theta) \right]. \quad (2.7)$$

Dado que θ esta relacionada a ψ por la curva relación agua-suelo, se puede también expresar $k(\theta)$ como $k(\psi)$, a través de la introducción de la *Capacidad Específica* del agua $C(\psi)$; además el lado izquierdo de la ecuación $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ puede ser expresado en términos de la variable ψ ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.8)$$

tomando $C(\psi)$ como $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$, la cual puede ser entendida como la pendiente de la curva de retención agua- suelo. Ahora bien, reemplazando por $K(\psi)$ y sustituyendo la ecuación (2.8) en la (2.7) se tiene,

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + k(\psi) \right]. \quad (2.9)$$

Si el flujo es vertical y no lineal, la ecuación de Richards se puede reducir a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right], \quad (2.10)$$

y sí el término $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ se expresa como

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.11)$$

aquí el término $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ es la pendiente de la curva característica (Fredlund y Rahardjo, 1993). Al sustituir la ecuación (2.11) en (2.10)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 \right) \right], \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(\theta) \right], \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} k(\theta), \quad (2.14)$$

siendo $D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ la difusividad del agua en el suelo. Además se puede ver que la *Capacidad Específica* del agua es

$$C(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \quad (2.15)$$

por lo tanto el coeficiente de difusión del contenido de agua puede representarse de la siguiente forma:

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)}. \quad (2.16)$$

2.1.3 Parámetros de la ecuación de Richards

Uno de los parámetros necesarios para utilizar la ecuación de Richards es la conductividad hidráulica o permeabilidad, éste determina la facilidad con la que el medio deja pasar el agua a través de él por unidad de área transversal a la dirección del flujo. Van Genuchten (1980) comenzó el desarrollo de modelos para la predicción de la conductividad hidráulica en suelos no saturados. El modelo de van Genuchten se sigue usando en algunos modelos de flujo de agua y transporte de masa en suelos no saturados (Prasad *et al.*, 2001). Las relaciones constitutivas propuestas por van Genuchten se muestran a continuación.

Relación $\theta - \psi$,

$$S_e = \left[\frac{1}{(1 + |\alpha \psi|^n)} \right]^m, \quad (2.17)$$

donde α y n son parámetros del suelo no saturado con $m = 1 - (1/n)$ y S_e es la saturación efectiva, también definida como

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (2.18)$$

aquí θ_s y θ_r son el contenido de humedad saturado y contenido de humedad residual

del suelo respectivamente.

Relación $k - \theta$,

$$k = k_s S_e^{1/2} [1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2, \quad (2.19)$$

con k_s como la conductividad hidráulica saturada. Aunque este modelo se continúa empleando en diversas investigaciones, también existen algunos otros métodos dentro de los que destaca el mencionado por Fredlund y Rahardjo (1993), en el cual la permeabilidad se obtiene a partir de la curva característica de los suelos y la siguiente ecuación:

$$k_w(\theta_w) = \frac{k_s}{k_{sc}} A_d \sum_{j=1}^m \{(2j + 1 - 2i)(u_a - u_w)^{-2}\} \text{ con } i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.20)$$

donde:

- $k_w(\theta)$ es el coeficiente de permeabilidad del agua predicho en $[m/s]$,
- i es el número de intervalo el cual aumenta con forme el contenido volumétrico de agua decrece,
- j es el número contador de i a m ,
- m es el número total de intervalos entre el contenido volumétrico de agua saturado θ_s y el más bajo contenido volumétrico de agua en la curva característica θ_r ,
- k_s es el coeficiente de permeabilidad saturado,
- k_{sc} es el coeficiente de permeabilidad saturado teórico $[m/s]$,
- A_d es la constante de ajuste, la cual se obtiene mediante la ecuación (2.21),

$$A_d = \frac{T_s^2 \gamma_w g \theta_s^P}{2\mu_w N^2} \left[\frac{m}{seg} kPa^2 \right] \quad (2.21)$$

T_s	es la tensión superficial del agua [kN/m],
γ_w	es la densidad del agua [kg/m^3],
g	es la aceleración de la gravedad [m/s^2],
μ_w	es la viscosidad absoluta del agua [Ns/m^2],
θ_s	es el contenido volumétrico de agua en la saturación,
P	es la constante que cuenta para la interacción de poros de varios tamaños (igual a 2),
N	es el número total de intervalos calculados entre el contenido volumétrico de agua saturado,
$(U_a - U_w)$	es la succión mátrica correspondiente al j -ésimo intervalo en [kPa],
U_a	representa la presión del aire de poro y
U_w	es la presión del agua de poro.

Otro de los parámetros importantes en la ecuación de Richards es el coeficiente de difusión, $D(\theta)$, éste representa la facilidad que tiene un fluido de atravesar un medio determinado. Dentro de la teoría de suelos saturados este coeficiente así como el de permeabilidad se consideran constantes, sin embargo en la mecánica de suelos no saturados estos parámetros dependen en gran medida de la humedad en el sistema. Una forma de definir el coeficiente de difusión es como la relación de la conductividad hidráulica y la capacidad específica del agua. También puede obtenerse mediante pruebas experimentales; un ejemplo son las pruebas de evaporación o saturación.

Por otro lado, aun cuando se conoce que el coeficiente de difusión y la permeabilidad son función de la humedad, en la mayoría de los estudios estos parámetros son considerados constantes pues de lo contrario la ecuación de Richards se convierte en una ecuación altamente no lineal, lo cual complica su solución.

2.1.4 Algunos modelos que utilizan la ecuación de Richards

La evolución del conocimiento en esta área se ha visto diversificada por la variedad de fenómenos en los que está involucrada. Desde el desarrollo de modelos de interacción suelo-estructura (Li, 1996) hasta modelos de interacción planta-suelo-agua (Cornelissen *et al.*, 2013).

La ecuación de Richards se ha resuelto mediante varios métodos y con diferentes enfoques. Se ha reducido mediante transformada de Boltzmann a una ecuación diferencial ordinaria y posteriormente solucionada con diferencias finitas;

también se han utilizado transformadas de Fourier y Laplace para reducir el orden de la ecuación para así poder resolverla; e inclusive Fahs *et al.* (2009) desarrollaron un método mezclando elemento finito con el método de líneas para resolver esta ecuación. A continuación se muestra de una manera un poco más detallada lo que algunos investigadores han realizado respecto a la ecuación de Richards y modelos de flujo en suelos.

Fityus y Smith (2001) utilizaron las transformadas de Laplace y de Fourier para reducir la ecuación de Richards a una ecuación diferencial ordinaria en términos de un contenido de agua y variables de transformación, pero teniendo en cuenta que este nuevo contenido de agua es un contenido de agua transformado. Las soluciones ejemplificadas son comparadas con soluciones de elemento finito linealizadas. La concordancia que obtuvieron entre éstas fue buena y además describieron una adaptación del método de líneas a la ecuación de Richards cuasi-linealizado con variable de difusión.

Pachepsky *et al.* (2003) mostraron una ecuación generalizada mediante una derivada fraccionaria del contenido de agua en el tiempo:

$$\frac{\partial^\gamma \theta}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_\gamma(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right], \quad (2.22)$$

el valor de γ es el orden de la derivada fraccionaria y D_γ es el coeficiente de difusión fraccionario. El orden de la derivada fraccionaria es menor o igual a uno. La ecuación (2.22) se transforma en la ecuación clásica de Richards cuando $\gamma = 1$. El coeficiente de difusión fraccionario D_γ depende del contenido de agua. El flujo de agua Q es gobernado por la ley de Darcy

$$Q = -D_\gamma(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Como en la ecuación clásica de Richards. Al final se aproxima una solución mediante el método de diferencias finitas, también se exhibe una forma de calcular el coeficiente de difusión fraccionario que aparece en la ecuación que presenta.

Un parámetro importante dentro del estudio de los suelos no saturados es la succión, esto debido a la influencia que tiene dentro del comportamiento mecánico del suelo. Por lo que el conocer la manera en que se distribuye la succión dentro de la matriz de suelo es de gran relevancia. En este aspecto uno de los trabajos que toman en cuenta el potencial de succión es el de Li (2006), el cual muestra un modelo de flujo de humedad basado en la ley de Darcy y ecuaciones de continuidad

introduciendo la succión como conducto del flujo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right), \quad (2.24)$$

ésta es la ecuación que describe el flujo de humedad no saturado, donde u es la succión total; θ es el contenido volumétrico de agua; Ψ es el potencial de succión; t es la variable del tiempo; k_{ij} es el coeficiente de permeabilidad o conductividad hidráulica; y x_i, x_j son coordenadas espaciales.

Si el suelo es asumido como homogéneo e isótropo, la ecuación diferencial se puede simplificar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.25)$$

considerando una fuente de humedad generada en el suelo, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{f(x, y, z, t)}{p} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.26)$$

donde:

u = potencial total de succión,

$D = p/(C\rho_d)$ = coeficiente de difusión,

$C = \frac{\Delta w}{\Delta u}$ = humedad característica,

p = permeabilidad no saturada (función de la succión del suelo),

ρ_d = densidad del suelo seco,

w = contenido gravimétrico de agua y

$f(x, y, z, t)$ = una fuente de humedad generada en el suelo.

El coeficiente de difusión, D , es análogo al coeficiente de consolidación en la teoría clásica de consolidación, y su magnitud define la velocidad de difusión de la humedad bajo gradientes de cambio de succión. Aunque el valor de D es estrictamente una función no lineal que depende del contenido de humedad, este puede ser estimado a partir de los resultados de pruebas experimentales. En la Figura 2.2 se muestra una ilustración del modelo físico que Li planteó para su estudio.

Posteriormente Menziani *et al.* (2007) obtuvieron soluciones analíticas de la ecuación de Richards linealizada para condiciones iniciales y de frontera discretas. La condición inicial en su modelo, puede ser cualquier perfil de contenido de agua

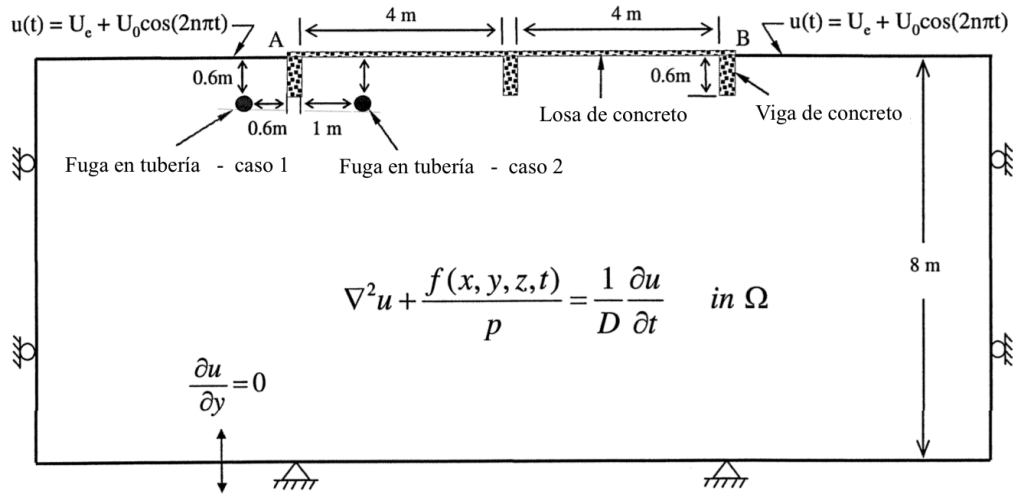


Figura 2.1. Modelo en dos dimensiones propuesto por Li.

discreto, como el que se mide experimentalmente y las condiciones de contorno pueden ser cualquier flujo en la superficie aplicado de manera discreta. El resultado es el contenido de agua en el suelo a cualquier profundidad y tiempo en un dominio semi-infinito de un medio poroso.

También se ha mostrado un modelo basado en la ecuación de Richards para determinar el flujo en la superficie, zona no saturada y zona saturada del suelo, esta ecuación con varios dominios es resuelta mediante un método híbrido de elemento finito. Para su validación se comparó con una solución analítica y otros modelos hidrológicos comúnmente utilizados (Weill *et al.*, 2009). Fuentes y Rendón (2012) hicieron una compilación de artículos sobre riego por gravedad, usando la ecuación de Richards para describir el flujo subterráneo en el proceso de infiltración del riego por gravedad y la ecuación de Saint-Venant para el proceso de infiltración superficial.

Después Zhou *et al.* (2013) introdujeron una transformada de Boltzmann generalizada para convertir la ecuación de Richards en una ecuación diferencial ordinaria y obtuvieron una solución aproximada para el movimiento del frente de humedad del transporte de agua en suelos no saturados. Además afirman que esta teoría es también válida para el transporte de agua en medios porosos.

Otros investigadores propusieron una solución muy original al dividir las ecuaciones en tres dimensiones en ecuaciones en una dimensión para los componentes verticales y una ecuación en dos dimensiones para el plano horizontal (Paulus *et al.*, 2013). El objetivo de esto fue considerar columnas verticales independientes de infiltración acopladas con la transferencia lateral de masa a través de las condiciones de contorno. Con esto ellos postularon que la transferencia de ma-

sa en tres dimensiones está correctamente representada. De esta forma, problemas como la regeneración de acuíferos, el resurgimiento de aguas subterráneas a aguas superficiales o la capacidad de memorización de eventos de lluvia pasados, pueden ser representados de una manera confiable.

De los trabajos recientes, Cao y Yue (2014), se enfocaron en la homogenización de la ecuación de Richards del modelo de van Genuchten – Mualem (Van Genuchten, 1980), el cual es una ecuación diferencial parabólica no lineal. Aplicaron la transformación de Kirchhoff a la ecuación y obtuvieron una ecuación equivalente más simple con un término de difusión lineal oscilatorio.

Aunque existen diversas investigaciones relacionadas con los métodos numéricos y en cómo mejorar su implementación en ecuaciones como la ecuación de Richards, desde los propios estudios de Richards sobre la dificultad numérica en la solución (El-Hames y Richards, 1995) hasta esquemas más actuales (An *et al.*, 2012; Radu y Wang, 2014); aun falta desarrollar en mayor medida modelos de flujo en suelos no saturados que pueden expresar de una mejor manera el efecto de otras variables de estado como la succión y las fuentes de humedad que existe de forma natural en el sistema como fugas y árboles, entre otros. Por lo anterior en el área de la Geotecnia y la Matemática Aplicada dedicada a la modelación hay una gran oportunidad de poder realizar investigación sobre los temas mencionados anteriormente.

2.2. Métodos numéricos para Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son una de las formas más comunes de modelar los fenómenos físicos e ingenieriles. Por tal motivo el uso de herramientas numéricas para la solución de estas se ha vuelto en uno de los métodos más utilizados en diversas áreas de la ciencia e ingeniería. De entre estos métodos los más conocidos son el de *Diferencias Finitas* y el *Método de Elemento Finito* (MEF, por sus siglas en inglés). En esta sección se presentarán las generalidades de ambos métodos las cuales se utilizarán más adelante en este trabajo.

2.2.1 Diferencias finitas

El método de *Diferencias Finitas* consiste en una aproximación de las derivadas ordinarias o parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados llamados nodos. Como resultado de esta aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los nodos. El sistema de ecuaciones algebraicas debe ser resuelto y puede llevar un número largo de operaciones aritméticas. En general, el método se basa en aproximar una ecuación diferencial ordinaria o parcial a partir de conceptos matemáticos como lo es la definición de derivada y herramientas numéricas:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.27)$$

Para la aplicación del método es necesario hacer una discretización del dominio, es decir, dividir un dominio finito en un número también finito de nodos.

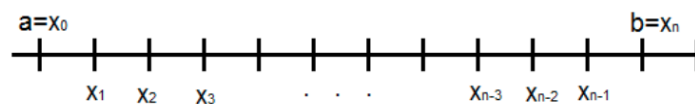


Figura 2.2. Diagrama de un intervalo [a,b] dividido en un número finito de nodos.

Ahora si se considera la ecuación (2.27) se puede obtener la aproximación de la primera derivada

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \quad (2.28)$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$ es el incremento o tamaño de paso entre el nodo sobre el que se hace la aproximación y el nodo posterior, tal paso determina que tan grande o pequeño es el error de aproximación, es decir el error es de orden h . Y de la misma forma se puede desarrollar la aproximación para la derivada parcial

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}, \quad (2.29)$$

en este caso, Δx es el incremento o tamaño de paso de la variable x . A las ecuaciones (2.28) y (2.29) se le conoce como aproximación de *diferencias finitas hacia adelante* de la derivada ordinaria y parcial respectivamente.

Ahora bien, se puede llegar a la siguiente parte al definir la derivada de una forma distinta a la ecuación (2.27)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad (2.30)$$

con esta definición se puede determinar la siguiente ecuación

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}. \quad (2.31)$$

Esta ecuación se le denomina *diferencias hacia atrás* de la misma forma se tiene una para ecuaciones parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x, y) - F(x - \Delta x, y)}{\Delta x}, \quad (2.32)$$

y el error de *diferencias hacia atrás* es igual h .

Para mostrar la variante que generaliza las aproximaciones de diferencias hacia adelante y diferencias hacia atrás. Considerando el parámetro de interpolación γ definido como

$$\gamma = \frac{x_{i+\gamma} - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (2.33)$$

tal que $0 \leq \gamma \leq 1$, con este parámetro la aproximación numérica está dada por

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+\gamma}) - f(x_{i-1+\gamma})}{\Delta x}, \quad (2.34)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(x_{i+1} - x_i) + (1 - \gamma)(x_i - x_{i-1}), \\ f(x_{i+\gamma}) &= f(x_i) + \gamma(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \text{ y} \\ f(x_{i-1+\gamma}) &= f(x_{i-1}) + \gamma(f(x_i) - f(x_{i-1})). \end{aligned}$$

En esta ecuación se puede observar que si el valor de $\gamma = 1$ entonces la ecuación (2.34) se convierte en la aproximación de *diferencias finitas hacia adelante*, en cambio si $\gamma = 0$ se obtiene la ecuación de *diferencias hacia atrás*, y con $\gamma = \frac{1}{2}$ la aproximación *diferencias centrales*.

2.2.2 Métodos de residuos pesados

Los métodos de residuos pesados al igual que otros métodos numéricos involucra una integral. En este tipo de método, una solución aproximada es sustituida dentro de la ecuación diferencial. Debido a que la solución aproximada no satisface la ecuación, aparece un término residuo o error. Suponiendo que $y = h(x)$ es una solución aproximada a

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0, \quad (2.35)$$

al sustituirla en ésta se tiene

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0, \quad (2.36)$$

ya que $y = h(x)$ no satisface la ecuación. El método de residuos pesados requiere que

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0. \quad (2.37)$$

El residual $R(x)$ es multiplicado por la función de peso $W_i(x)$, y la integral del producto necesita ser cero. El número de funciones de peso debe ser igual al número de coeficientes desconocidos en la solución aproximada. Existen diversas formas

de definir estas funciones de peso, se muestran algunas a continuación.

- Método de colocación. Funciones impulso $W_i(x) = \delta(x - X_i)$ son seleccionadas como las funciones de peso. Esta selección es equivalente a pedir que el residual se desvanezca en puntos específicos. El número de puntos seleccionados es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.
- Método del subdominio. Cada una de las funciones de peso se selecciona como unidad, $W_i(x) = 1$, sobre una región específica. Esto es equivalente a pedir que la integral del residual se desaparezca sobre un intervalo de la región. El número de intervalos de integración es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.
- Método de Galerkin. El método de Galerkin usa las mismas funciones usadas en la ecuación de aproximación para $W_i(x)$. Esta aproximación es la base del método del elemento finito para problemas que involucran términos de primera derivada.
- Método de mínimos cuadrados. El método de mínimos cuadrados utiliza el residuo como las funciones de peso y se obtiene un nuevo término de error definido por

$$Er = \int_0^H [R(x)]^2 dx. \quad (2.38)$$

Este error es minimizado con respecto a los coeficiente desconocidos en la solución aproximada. El método de mínimos cuadrados ha sido utilizado para formular soluciones del elemento finito, pero éste no es popular como el método de Galerkin y la aproximación variacional.

3. METODOLOGÍA

3.1. Planteamiento del problema

En esta sección se presentan el problema a resolver, el cual es un problema de flujo en suelos no saturados en función de la succión. A partir de la *Ecuación de Richards* Li propuso la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{f(x, y, z, t)}{K} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.1)$$

De esta ecuación se toma su forma en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{f(x, y, t)}{K} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.2)$$

con condiciones iniciales y de contorno,

$$\begin{aligned} u_x(0, y, t) &= 0, & u_x(H, y, t) &= 0, \\ u(x, 0, t) &= Cl(t), & u_y(x, W, t) &= 0, \\ u(x, y, 0) &= G(y). \end{aligned}$$

donde la función $Cl(t)$ es determinada a partir de las variaciones de succión en la superficie del suelo, el procedimiento se muestra más adelante en este capítulo.

Obtención de parámetros

Para encontrar la solución de esta ecuación se requiere obtener parámetros del suelo como son: coeficiente de permeabilidad no saturada, capacidad específica y coeficiente de difusión. Además de permitir proponer las funciones fuentes de humedad a partir de datos experimentales. Para esto se hizo un búsqueda de datos de suelos de la región en trabajos de diversos investigadores (Pérez-Rea, López-Lara, entre otros), específicamente los datos encontrados fueron de la localidad de Jurica

en el estado de Querétaro. Con los datos de contenido de agua y succión, se calculó los coeficientes de permeabilidad para diversos contenidos de agua en función de la succión, esto con la ecuación de Fredlund para el coeficiente de permeabilidad no saturada.

3.2. Variaciones de succión

3.2.1 Distribución inicial de succiones

Para poder dar solución al problema de flujo de humedad en suelos, se tiene que conocer primeramente la distribución inicial, en nuestro caso la distribución de la succión en el tiempo cero. Por lo que se buscó aproximar mediante una función de la profundidad, los datos de trabajos previos en la localidad de (Pérez-Rea, 1993; López-Lara, 1995).

Al mirar detenidamente el comportamiento de los datos, se pudo determinar que seguían una tendencia exponencial por lo que se buscó aproximarlos mediante una función exponencial al utilizar mínimos cuadrados.

Si se quiere que la función para aproximar sea:

$$u = \beta e^{\alpha y}, \quad (3.3)$$

donde α y β son los coeficientes que se calculan mediante,

$$\alpha = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i \ln u_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \ln u_i}{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}, \quad (3.4)$$

y

$$\ln \beta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{i=1}^n \ln u_i - \sum_{i=1}^n y_i \ln u_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}. \quad (3.5)$$

donde y_i son las profundidades a las que las mediciones experimentales u_i fueron tomadas y n es el número de mediciones con las que se cuenta.

3.2.2 Variaciones de succión debido al clima

Con los datos de succión en los trabajos de Flores-Castro (1992), Pérez-Rea (1993) y López-Lara (1995), tomados en distintos tiempos y profundidades,

es posible aproximar las variaciones de la succión debido al clima. Para esto se ajustaron los datos a una función sinusoidal debido al comportamiento cíclico del clima.

El ajuste se hizo con mínimos cuadrados, para funciones sinusoidales mediante la ecuación (3.6) la cual es la función a minimizar,

$$Sr = \sum_{i=1}^N \{u_i - [A_0 + A_1 \cos(w_0 t_i) + A_2 \sin(w_0 t_i)]\}^2, \quad (3.6)$$

donde Sr es error cuadrático que se busca minimizar, u_i las medidas experimentales en la superficie que se tienen en los tiempos t_i , N el número de observaciones y w_0 frecuencia angular. A_0 , A_1 y A_2 se calcularon al dar solución al sistema dado por

$$\begin{pmatrix} N & \sum \cos(w_0 t_i) & \sum \sin(w_0 t_i) \\ \sum \cos(w_0 t_i) & \sum \cos^2(w_0 t_i) & \sum \cos(w_0 t_i) \sin(w_0 t_i) \\ \sum \sin(w_0 t_i) & \sum \cos(w_0 t_i) \sin(w_0 t_i) & \sum \sin^2(w_0 t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum y \cos(w_0 t_i) \\ \sum y \sin(w_0 t_i) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la función impuesta en la condición de contorno superior es definida como

$$Cl(t) = A_0 + A_1 \cos(w_0 t) + A_2 \sin(w_0 t). \quad (3.7)$$

3.2.3 Variaciones de succión debido a una fuente-sumidero puntual

Otro aspecto importante en el estudio del fenómeno de flujo es la inclusión de sumideros o fuentes de succión que representen la entrada y salida de humedad en el sistema. Por tanto es importante caracterizar tales fuentes mediante funciones que describan el efecto que tienen dentro del sistema. Para esto en primer lugar se necesita conocer el origen del término fuente en la ecuación que se está estudiando, en nuestro caso:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{f(x, y, t)}{K} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.8)$$

tomando el término fuente

$$\frac{f(x, y, t)}{K},$$

donde $f(x, y, t)$ es una fuente de humedad en el suelo y K es la permeabilidad no saturada del suelo.

Se puede observar que el término $f(x, y, t)$ es una variación de humedad en el tiempo, es decir es un incremento o decremento de humedad por cada unidad de tiempo. Además se debe considerar el tiempo en que la fuente-sumidero se aplica al sistema, ya que si es continua, el sistema terminara estabilizándose, es decir, el suelo se saturará o secará.

Tomando en cuenta lo anterior, la forma de la función fuente es propuesta a partir de un producto de funciones, cada una de ellas determina una parte del comportamiento de una fuente puntual en el suelo,

$$f(x, y, t) = R(t)Q_M(t)G(x, y), \quad (3.9)$$

donde $R(t)$ es una función impulso rectangular la cual delimita la activación de la fuente a un determinado intervalo de tiempo, $Q_M(t)$ es la función que determina la magnitud de la función la cual puede ser constante y $G(x, y)$ es la función que determina la región en donde se aplica la fuente.

La forma de estas funciones se define a continuación:

$$R(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_a \\ 1, & t_a \leq t \leq t_d, \\ 0, & t > t_d \end{cases}, \quad (3.10)$$

donde t_a es el tiempo de activación de la fuente y t_d tiempo de desactivación de la fuente,

$$Q_M(t) = Q_M, \quad (3.11)$$

donde Q_M es una constante que se relaciona con un gasto constante de entrada, sin embargo puede ser una función dependiente del tiempo como $\tanh(t)$ o alguna similar,

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \\ 0, & \text{si } (x, y) \notin [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \end{cases}, \quad (3.12)$$

aquí x_1, x_2, y_1 y y_2 delimitan la región donde actúa la fuente. Si la región es lo suficientemente pequeña en comparación con el dominio del sistema entonces la fuente se puede considerar como una fuente puntual.

3.3. Desarrollo de la solución numérica

3.3.1 Método de Galerkin

El planteamiento del modelo numérico se desarrolló mediante elemento finito, en este se aproxima la solución con:

$$u \approx [N]\{U_i\}, \quad (3.13)$$

donde u es una función continua, U_i son valores discretos de una función y N son las funciones de forma.

En el caso del método de residuos se trata de minimizar el error

$$\int w_i(x) \cdot R(x) dx = 0, \quad (3.14)$$

aquí $R(x)$ es el residual y $w_i(x)$ son funciones de peso.

Un caso del método de residuos es Galerkin en donde las funciones de peso son iguales a las funciones de forma usadas en la solución. Entonces la ecuación de residuos queda:

$$R^{(e)} = - \int_A [N]^T \left(D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q(x, y, t) - \lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right) dA. \quad (3.15)$$

El primer término de la ecuación (3.15)

$$- \int_A D_x [N]^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dA, \quad (3.16)$$

se puede transformar si se considera que

$$\frac{d}{dx} \left([N]^T \frac{du}{dx} \right) = [N]^T \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d[N]^T}{dx} \frac{du}{dx}, \quad (3.17)$$

por tanto

$$[N]^T \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left([N]^T \frac{du}{dx} \right) - \frac{d[N]^T}{dx} \frac{du}{dx}. \quad (3.18)$$

Si se substituye la ecuación (3.18) en la ecuación (3.15)

$$- \int_A D_x [N]^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dA = - \int_A D_x \frac{d}{dx} \left([N]^T \frac{du}{dx} \right) dA + \int_A D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{du}{dx} dA. \quad (3.19)$$

El primer miembro de la ecuación (3.19) del lado derecho lo se puede cambiar por una integral en la frontera utilizando el teorema de Green,

$$\int_a \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dA = \int_{\Gamma} [N]^T \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta_a d\Gamma, \quad (3.20)$$

donde θ_a es el ángulo al vector normal exterior y Γ es la frontera del elemento. Sustituyendo el resultado de la ecuación (3.20) en la ecuación (3.19) se obtiene

$$- \int_A D_x [N]^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dA = - \int_{\Gamma} D_x [N]^T \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta_a d\Gamma + \int_A D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{du}{dx} dA. \quad (3.21)$$

De manera similar para

$$\frac{d}{dy} \left([N]^T \frac{du}{dy} \right), \quad (3.22)$$

el resultado de seguir el mismo procedimiento anterior es

$$- \int_A D_y [N]^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA = - \int_{\Gamma} D_y [N]^T \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta_a d\Gamma + \int_A D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{du}{dy} dA. \quad (3.23)$$

Al sustituir en las ecuaciones (3.21) y (3.23) en la ecuación (3.15)

$$\begin{aligned} R^{(e)} = & - \int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_a + D_y \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta_a \right) d\Gamma \\ & + \int_A \left(D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{du}{dx} + D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{du}{dy} \right) dA \\ & - \int_A Q(x, y, t) [N]^T dA + \int_A [N]^T \lambda \frac{\partial u}{\partial t} dA. \end{aligned} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) puede transformarse al sustituir la ecuación (3.13) en ella,

$$\begin{aligned}
R^{(e)} = & - \int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_a + D_y \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta_a \right) d\Gamma \\
& + \left(\int_A \left(D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{d[N]}{dx} + D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{d[N]}{dy} \right) dA \right) U^{(e)} \\
& - \int_A Q(x, y, t) [N]^T dA + \int_A [N]^T \lambda \frac{\partial u}{\partial t} dA.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

El último término de la ecuación (3.25) puede ser modificado al sustituir el término

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [N] \{ \dot{U}^{(e)} \}, \tag{3.26}$$

en la ecuación (3.25)

$$\begin{aligned}
R^{(e)} = & - \int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_a + D_y \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta_a \right) d\Gamma \\
& + \left(\int_A \left(D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{d[N]}{dx} + D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{d[N]}{dy} \right) dA \right) U^{(e)} \\
& - \int_A Q(x, y, t) [N]^T dA + \int_A \lambda [N]^T [N] dA \{ \dot{U}^{(e)} \}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A la ecuación (3.27) se le conoce como la forma discreta de la ecuación (3.24), la cual tiene la forma general

$$\{R^{(e)}\} = 0 = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} + [C^{(e)}] \{\dot{U}^{(e)}\}, \tag{3.28}$$

donde

$$\{I^{(e)}\} = - \int_{\Gamma} [N]^T \left(D_x \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta_a + D_y \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta_a \right) d\Gamma, \tag{3.29}$$

$$[K^{(e)}] = \int_A \left(D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{d[N]}{dx} + D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{d[N]}{dy} \right) dA, \tag{3.30}$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_A Q(x, y, t) [N]^T dA, \tag{3.31}$$

y

$$[C^{(e)}] = \int_A \lambda [N]^T [N] dA. \quad (3.32)$$

La ecuación (3.29) no se toma en cuenta en el procedimiento usual de solución pues se genera el sistema de ecuaciones sin ella. La ecuación (3.29) se toma en cuenta si las condiciones de contorno son derivadas y estas son distintas de cero, sin embargo, este trabajo no se profundizará en ello.

También la ecuación (3.30) puede ser reescrita de forma más compacta si se define

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

y el vector gradiente

$$\{\nabla v\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{U^{(e)}\} = [B] \{U^{(e)}\}, \quad (3.34)$$

además de

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} & \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Si se usa las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.35) es fácil ver que

$$\int_A [B]^T [D] [B] dA = \int_A \left(D_x \frac{d[N]^T}{dx} \frac{d[N]}{dx} + D_y \frac{d[N]^T}{dy} \frac{d[N]}{dy} \right) dA, \quad (3.36)$$

y por lo tanto nuestra matriz de rigidez queda definida de la siguiente manera

$$[k^{(e)}] = \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (3.37)$$

$$[K^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} = \{R_D^{(e)}\} = 0, \quad (3.38)$$

$$\{R^{(e)}\} = \{R_D^{(e)}\} + \{R_\lambda^{(e)}\}. \quad (3.39)$$

3.3.2 Elemento triangular lineal

Para desarrollar este trabajo se propuso que el tipo de elemento utilizado sea un elemento triangular, el cual se define a continuación en esta sección.

Dado un triángulo con un nodo en cada uno de sus vértices, estos nodos

son identificados por los subíndices i, j y k asignados en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En los nodos el valor de u toma los valores U_i, U_j y U_k , mientras que las coordenadas de los nodos son $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ y (X_k, Y_k) . El polinomio de interpolación esta dado por:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y, \quad (3.40)$$

con las condiciones en los nodos

$$\begin{aligned} u &= U_i & \text{en} & & x &= X_i, & y &= Y_i, \\ u &= U_j & \text{en} & & x &= X_j, & y &= Y_j, \\ u &= U_k & \text{en} & & x &= X_k, & y &= Y_k, \end{aligned}$$

al sustituir estas condiciones en la ecuación (3.40) da el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} U_i &= \alpha_1 + \alpha_2X_i + \alpha_3Y_i, \\ U_j &= \alpha_1 + \alpha_2X_j + \alpha_3Y_j, \\ U_k &= \alpha_1 + \alpha_2X_k + \alpha_3Y_k, \end{aligned} \quad (3.41)$$

del cual se obtiene los coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(X_jY_k - X_kY_j)U_i + (X_kY_i - X_iY_k)U_j + (X_iY_j - X_jY_i)U_k] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k)U_i + (Y_k - Y_i)U_j + (Y_i - Y_j)U_k] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(X_k - X_j)U_i + (X_i - X_k)U_j + (X_j - X_i)U_k] \end{aligned}$$

y también tiene determinante igual a

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A, \quad (3.42)$$

donde A es el área del triángulo. Si se sustituye α_1 , α_2 y α_3 en la ecuación (3.40) y reacomodando se obtiene una ecuación de u en términos de las funciones discretas U_i , U_j y U_k . La cual es

$$u = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k, \quad (3.43)$$

aquí

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (3.44)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad (3.45)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad (3.46)$$

y

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i$$

3.3.3 Forma de las matrices

En esta parte se muestra la forma de las matrices necesarias, usando los elementos mencionados anteriormente. El valor de u se define

$$u^{(e)} = [N_i N_j N_k] U^{(e)}, \quad (3.47)$$

donde N_i , N_j y N_k se definieron en la subsección 3.3.2. El gradiente se define como

$$\{gv\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N_i]}{\partial x} & \frac{\partial [N_j]}{\partial x} & \frac{\partial [N_k]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N_i]}{\partial y} & \frac{\partial [N_j]}{\partial y} & \frac{\partial [N_k]}{\partial y} \end{bmatrix} \{U^{(e)}\}, \quad (3.48)$$

$$\{gv\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{U^{(e)}\} = [B] \{U^{(e)}\}, \quad (3.49)$$

con esta definición de la matriz $[B]$ y la de la matriz $[D]$ dada en la ecuación (3.33), es fácil ver que todos los elementos que las componen son constantes. Por tanto la

integral de la ecuación (3.37) se convierte

$$[K^{(e)}] = \int_A [B]^T [D] [B] dA = [B]^T [D] [B] \int_A dA = [B]^T [D] [B] A, \quad (3.50)$$

en forma de matrices

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

y el producto de matrices es

$$[K^{(e)}] = \frac{D_x}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Para la definición de $[C^{(e)}]$ se tiene que

$$[C^{(e)}] = \int_A \lambda [N]^T [N] dA = \lambda \int_A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \{ N_i \quad N_j \quad N_k \} dA \quad (3.53)$$

$$= \lambda \int_A \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix} dA \quad (3.54)$$

$$= \lambda \int_A \begin{bmatrix} L_i^2 & L_i L_j & L_i L_k \\ L_i L_j & L_j^2 & L_j L_k \\ L_i L_k & L_j L_k & L_k^2 \end{bmatrix} dA \quad (3.55)$$

y con la ecuación de Eisenberg y Malvern (1973)

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A, \quad (3.56)$$

donde los coeficientes a , b y c son los exponentes de las funciones de forma en la integral de área; y por tanto la integral de un producto de funciones de forma puede

expresarse como

$$\int_A N_i N_j = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}. \quad (3.57)$$

Al aplicar la ecuación (3.56), finalmente $[C^{(e)}]$ queda de la forma

$$[C^{(e)}] = \frac{\lambda A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Además el vector de fuerzas externas F es definido a partir de una fuente en el sistema

$$F^{(e)} \int_A Q[N]^T dA = Q \int_A \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dA = Q \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dA, \quad (3.59)$$

y entonces $F^{(e)}$ con el uso de la ecuación (3.56) es de la forma

$$F^{(e)} = \frac{QA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.60)$$

Para simplificar la aplicación del método numérico. Si la fuente queda en un nodo entonces se puede reescribir

$$F^{(e)} = Q \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.61)$$

haciendo cero los valores en los nodos donde no es aplicada la fuente. Y cuando la fuente está en el interior de un elemento el vector se simplifica a

$$F^{(e)} = \frac{Q}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (3.62)$$

3.3.4 Diferencias finitas para el tiempo

Por último como parte de la solución numérica, se muestra la metodología para la parte temporal de la ecuación. Partiendo de una función $u(t)$ y el intervalo $[a, b]$, se puede utilizar *el Teorema del valor medio* y entonces se tiene

$$u(b) - u(a) = (b - a) \frac{du}{dt}(m), \quad (3.63)$$

o

$$\frac{du}{dt}(m) = \frac{u(b) - u(a)}{\Delta t}, \quad (3.64)$$

aquí $\Delta t = b - a$. El valor de u en $t = a$, es decir, $u(a)$ se puede aproximar mediante

$$u(a) = u(m) - (m - a) \frac{du}{dt}(m), \quad (3.65)$$

reordenando

$$u(m) = u(a) + (m - a) \frac{du}{dt}(m). \quad (3.66)$$

Al sustituir la ecuación (3.64) en (3.66)

$$u(m) = u(a) + \frac{u(b) - u(a)}{\Delta t} (m - a), \quad (3.67)$$

y se puede definir θ_f como

$$\theta_f = \frac{(m - a)}{\Delta t}, \quad (3.68)$$

con esto se puede reescribir la ecuación (3.67)

$$u(m) = (1 - \theta_f)u(a) + \theta_f u(b). \quad (3.69)$$

Ahora bien para poner la ecuación (3.69) en términos de los valores en los nodos en los tiempos a y b ; se tiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U_b - U_a}{\Delta t} \quad (3.70)$$

y

$$U = (1 - \theta_f)U_a + \theta_f U_b \quad (3.71)$$

en el punto $t = m$. De igual forma se puede obtener F

$$F = (1 - \theta_f)F_a + \theta_f F_b, \quad (3.72)$$

por lo que la ecuación

$$[C]\dot{U} + [K]U - F = 0, \quad (3.73)$$

puede ser escrita con U_a , U_b , F_a y F_b

$$([C] + \theta_f \Delta t [K])U_b = ([C] - (1 - \theta_f) \Delta t [K])U_a + \Delta t ((1 - \theta_f)F_a + \theta_f F_b) \quad (3.74)$$

La localización de m no es conocida, por lo que para resolver este problema se especifica el valor θ_f lo cual es equivalente a conocer la localización de m . Para el método Galerkin el valor de θ_f es igual a $\frac{2}{3}$.

Por simplicidad la forma compacta de la ecuación (3.74) queda como

$$[A]U_b = [P]U_a + F \quad (3.75)$$

donde $[A]$ y $[P]$ son combinaciones de $[C]$ y $[K]$. Finalmente el vector de fuerzas F_i , cambia dependiendo del nodo temporal en el que se encuentre, de esta manera se puede insertar la variación de la fuente de humedad en el tiempo.

Oscilaciones numéricas

Para evitar oscilaciones numéricas se requiere de la condición

$$\Delta t \leq \frac{\alpha}{1 - \theta_f}, \quad (3.76)$$

donde α es el valor mas pequeño que satisface la ecuación

$$\det([C^{(e)}] - \alpha[K^{(e)}]) = 0, \quad (3.77)$$

para el tipo de elemento seleccionado el valor α es de la forma

$$\alpha = \frac{2\lambda A}{9D}, \quad (3.78)$$

y entonces la condición para un elemento triangular queda de la forma

$$\Delta t \leq \frac{2\lambda A}{9D(1 - \theta_f)}, \quad (3.79)$$

aquí A es el área del elemento, λ , D y θ_f se definieron anteriormente en esta sección.

3.4. Métodos analíticos

3.4.1 Método de desarrollo en autofunciones

El método de desarrollo en autofunciones es un método para resolver ecuaciones diferenciales que tienen condiciones de contorno homogéneas, para aquellos problemas que no cumplen con esto, se puede utilizar la técnica de desplazamiento de la variable dependiente para convertir el problema con condiciones de contorno no homogéneas a uno con condiciones de contorno homogéneas. Los principales pasos del método de desarrollo en autofunciones son; resolver la ecuación diferencial parcial del problema homogéneo asociado utilizando separación de variables con la finalidad de encontrar la autofunción para la parte espacial, después se propone una solución que consta de un producto de autofunciones y se sustituye en la ecuación diferencial parcial, lo cual genera una ecuación diferencial ordinaria en función del tiempo, cuya solución determinará la autofunción de la parte temporal y así tener las autofunciones que componen la solución de la ecuación diferencial parcial.

El método de desplazamiento de la variable dependiente es un método generalmente usado para problemas relacionados a la ecuación de calor, sin embargo, también puede ser aplicado a problemas difusivos como lo es el flujo de humedad a través de un medio determinado. Se considera el problema en una dimensión:

$$D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{f(y, t)}{K} \right] = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.80)$$

y sustituyendo $Q(y, t) = -D \frac{f(y, t)}{K}$ se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Q(y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.81)$$

con condiciones en los extremos

$$\begin{aligned} u(0, t) &= Cl(t), \\ u_y(W, t) &= 0, \end{aligned}$$

y una condición inicial dada por:

$$u(y, 0) = G(y).$$

Como se mencionó anteriormente en el método de desplazamiento de variable dependiente se busca pasar el problema con condiciones de contorno no homogéneas a uno con condiciones de contorno homogéneas en la variable $v(y, t)$. Para esto se define

$$v(y, t) = u(y, t) - r(y, t), \quad (3.82)$$

aquí la función $r(y, t)$ es la función utilizada para el desplazamiento de la variable dependiente y se define como

$$r(y, t) = Cl(t), \quad (3.83)$$

con condiciones de contorno

$$r(0, t) = Cl(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t), \quad (3.84)$$

$$r_y(W, t) = 0, \quad (3.85)$$

para de esta forma generar

$$\begin{aligned} v(0, t) &= u(0, t) - r(0, t) = Cl(t) - Cl(t) = 0, \\ v_y(W, t) &= u_y(W, t) - r_y(W, t) = 0 - 0 = 0, \\ v(y, 0) &= u(y, 0) - r(y, 0) = G(y) - Cl(0) = \bar{g}(y). \end{aligned}$$

Además, también se pueden determinar las derivadas parciales de la función $v(y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

al despejar los términos con u y sustituirlos en la ecuación (3.81) se llega a:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right] + Q(y, t), \quad (3.86)$$

se puede observar de la ecuación (3.83) que $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$ es igual a cero ya que solo es función de la variable temporal y junto a la sustitución $\bar{Q}(y, t) = Q(y, t) - \frac{\partial r}{\partial t}$ resulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \bar{Q}(y, t), \quad (3.87)$$

la cual tiene condiciones de contorno homogéneas, es decir,

$$v(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad v_y(W, t) = 0,$$

y condición inicial

$$v(y, 0) = \bar{g}(y). \quad (3.88)$$

Ahora bien, siguiendo el método de desarrollo en autofunciones, se propone una solución que consiste en un producto de autofunciones, por tanto

$$v(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(y), \quad (3.89)$$

y entonces la función $v(y, t)$ en el tiempo cero está dada por

$$v(y, 0) = \bar{g}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \phi_n(y). \quad (3.90)$$

La función $\phi_n(y)$ es la autofunción en y del problema homogéneo asociado

$$\phi''(y) + \lambda \phi(y) = 0, \quad (3.91)$$

la solución a la ecuación es de la forma

$$\phi(y) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}y) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}y), \quad (3.92)$$

además a partir de las condiciones de contorno se determinan los coeficiente C_1 y

C_2 :

$$\begin{aligned}\phi(0) &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda}0) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}0) = 0 \\ \phi(0) &= C_1 = 0 \\ \phi'(W) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}W) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}W) = 0 \\ &= C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}W) = 0.\end{aligned}$$

El valor de λ se obtiene al igualar el argumento de la derivada de la autofunción con aquellos valores que la hacen cero, lo que da como resultado

$$\lambda = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2W} \right]^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.93)$$

por lo tanto la autofunción al final queda definida como

$$\phi_n(y) = \sin \left[\left(\frac{(2n-1)\pi}{2W} \right) y \right]. \quad (3.94)$$

Una propiedad que se utiliza en el método de desarrollo en autofunciones es la propiedad de ortogonalidad, esta se define como

$$\int_{-W}^W \phi_n(y) \phi_m(y) dy = \begin{cases} W & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (3.95)$$

En las propiedades de ortogonalidad solo cuando m y n son iguales los términos aportan a la integral.

Retomando la ecuación (3.90) y multiplicandola por la autofunción $\phi_m(y)$ junto con el uso de las propiedades de ortogonalidad explicadas anteriormente, se llega a la ecuación

$$a_n(0) = \frac{\int_0^W \bar{g}(y) \phi_n(y) dy}{\int_0^W \phi_n^2(y) dy}. \quad (3.96)$$

al reescribir $a_n(0)$ con la autofunción en y nos queda

$$a_n(0) = \frac{\int_0^W \bar{g}(y) \sin \left[\left(\frac{(2n-1)\pi}{2W} \right) y \right] dy}{\int_0^W \sin^2 \left[\left(\frac{(2n-1)\pi}{2W} \right) y \right] dy}. \quad (3.97)$$

Una vez definido el término $a_n(0)$ se puede encontrar $a_n(t)$, comenzando con el cálculo de las derivadas parciales en términos de la función propuesta

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(t)}{dt} \phi_n(y), \quad (3.98)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{d^2 \phi_n(y)}{dy^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) [-\lambda \phi_n(y)] \\ &= -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(y). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.98) y (3.99) en la ecuación (3.87)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(t)}{dt} \phi_n(y) = -D\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(y) + \bar{Q}(y, t), \quad (3.100)$$

al despejar la fuente y factorizando la autofunción $\phi_n(y)$ se obtiene

$$\bar{Q}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{da_n(t)}{dt} + \lambda D a_n(t) \right] \phi_n(y), \quad (3.101)$$

si se multiplica por la autofunción $\phi_m(y)$ e integra respecto a la variable y se tiene

$$\int_0^W \bar{Q}(y, t) \phi_m(y) dy = \int_0^W \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{da_n(t)}{dt} + \lambda a_n(t) \right] \phi_n(y) \phi_m(y) dy \quad (3.102)$$

$$= \left[\frac{da_n(t)}{dt} + \lambda a_n(t) \right] \int_0^W \phi_n(y) \phi_m(y) dy, \quad (3.103)$$

usando nuevamente las propiedades de ortogonalidad y despejando los términos con $a_n(t)$ se consigue llegar a la siguiente ecuación diferencial

$$\left[\frac{da_n(t)}{dt} + \lambda D a_n(t) \right] = \frac{\int_0^W \bar{Q}(y, t) \phi_n(y) dy}{\int_0^W \phi_n^2(y) dy} = \bar{q}_n(t), \quad (3.104)$$

y la función $\bar{Q}(y, t)$ puede escribirse como un producto de las funciones $\bar{q}_n(t)$ y $\phi_n(y)$

$$\bar{Q}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \phi_n(y). \quad (3.105)$$

Debido a que la definición de la fuente dada en la subsección 3.2.3 tiene tres intervalos, se propone dividir la ecuación diferencial de a_n en tres ecuaciones diferenciales las cuales tengan cada una un componente no homogéneo y condición temporal distintas. El término $\bar{q}_{n1}(t)$ para el intervalo de tiempo de 0 a t_1 queda como

$$\bar{q}_{n1}(t) = \frac{-\frac{\partial r}{\partial t} \int_0^W \phi_n(y) dy}{\int_0^W \phi_n^2(y) dy}, \quad (3.106)$$

la condición inicial $a_{n1}(0)$ se calcula a partir de la ecuación (3.96) y la ecuación diferencial está dada por

$$\left[\frac{da_{n1}(t)}{dt} + \lambda D a_{n1}(t) \right] = \bar{q}_{n1}(t). \quad (3.107)$$

una vez que se tiene la solución de la ecuación (3.107). Para los tiempos entre t_1 y t_2 se utiliza la solución de la ecuación (3.107) y el término no homogéneo $\bar{q}_{n2}(t)$ para resolver

$$\left[\frac{da_{n2}(t)}{dt} + \lambda D a_{n2}(t) \right] = \bar{q}_{n2}(t), \quad (3.108)$$

con condición

$$a_{n2}(t_1) = a_{n1}(t_1) \quad (3.109)$$

además el término $\bar{q}_{n2}(t)$ debido a la definición de $f(y, t)$, se determina con

$$\bar{q}_{n2}(t) = \frac{-\frac{\partial r}{\partial t} \int_0^W \phi_n(y) dy + \int_{W_1}^{W_2} Q(y, t) \phi_n(y) dy}{\int_0^W \phi_n^2(y) dy}. \quad (3.110)$$

Para el segmento de t_2 a t_f se requiere de la solución de la ecuación (3.108) para resolver

$$\left[\frac{da_{n3}(t)}{dt} + \lambda D a_{n3}(t) \right] = \bar{q}_{n3}(t), \quad (3.111)$$

la condición en el tiempo para la ecuación (3.111) está en función de la solución de la ecuación (3.108)

$$a_{n3}(t_2) = a_{n2}(t_2) \quad (3.112)$$

y la parte no homogénea en el tercer intervalo es determinada a partir de

$$\bar{q}_{n3}(t) = \frac{-\frac{\partial r}{\partial t} \int_0^W \phi_n(y) dy}{\int_0^W \phi_n^2(y) dy}. \quad (3.113)$$

Por último la solución $v(y, t)$ en cada intervalo se escribe como

$$v(y, t) = \begin{cases} v_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1}(t) \phi_n(y) & \text{para } 0 \leq t < t_1 \\ v_2(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2}(t) \phi_n(y) & \text{para } t_1 \leq t \leq t_2 \\ v_3(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n3}(t) \phi_n(y) & \text{para } t > t_2 \end{cases} \quad (3.114)$$

tomando la ecuación (3.82) se encuentran las soluciones a la ecuación (3.81)

$$u(y, t) = \begin{cases} u_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1}(t) \phi_n(y) - r(t) & \text{para } 0 \leq t < t_1 \\ u_2(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2}(t) \phi_n(y) - r(t) & \text{para } t_1 \leq t \leq t_2 \\ u_3(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n3}(t) \phi_n(y) - r(t) & \text{para } t > t_2 \end{cases} \quad (3.115)$$

4. RESULTADOS

En este capítulo se muestran las soluciones obtenidas tanto numéricas como analíticas del problema de difusión de la succión en suelos. Así como los resultados de la aproximación de las funciones que representen la distribución inicial del suelo y las variaciones de succión en la superficie del suelo.

4.1. Aproximación de funciones

La Figura 4.1 muestra los datos experimentales de la localidad de Jurica encontrados en la literatura (Flores-Castro, 1992).

Parte de los resultados que aproximan el comportamiento de la succión en el momento inicial, se observa en la Figura 4.2 y 4.3, en éstas se muestra las distribuciones para el mes de enero y agosto respectivamente, así como una función que se ajusta a los datos experimentales.

Para la condición en la frontera superior la Figura 4.4 muestra la función aproximada. La ecuación obtenida por el método de mínimos cuadrados fue:

$$Cl(t) = 2696 - 829\cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + 1718\sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right). \quad (4.1)$$

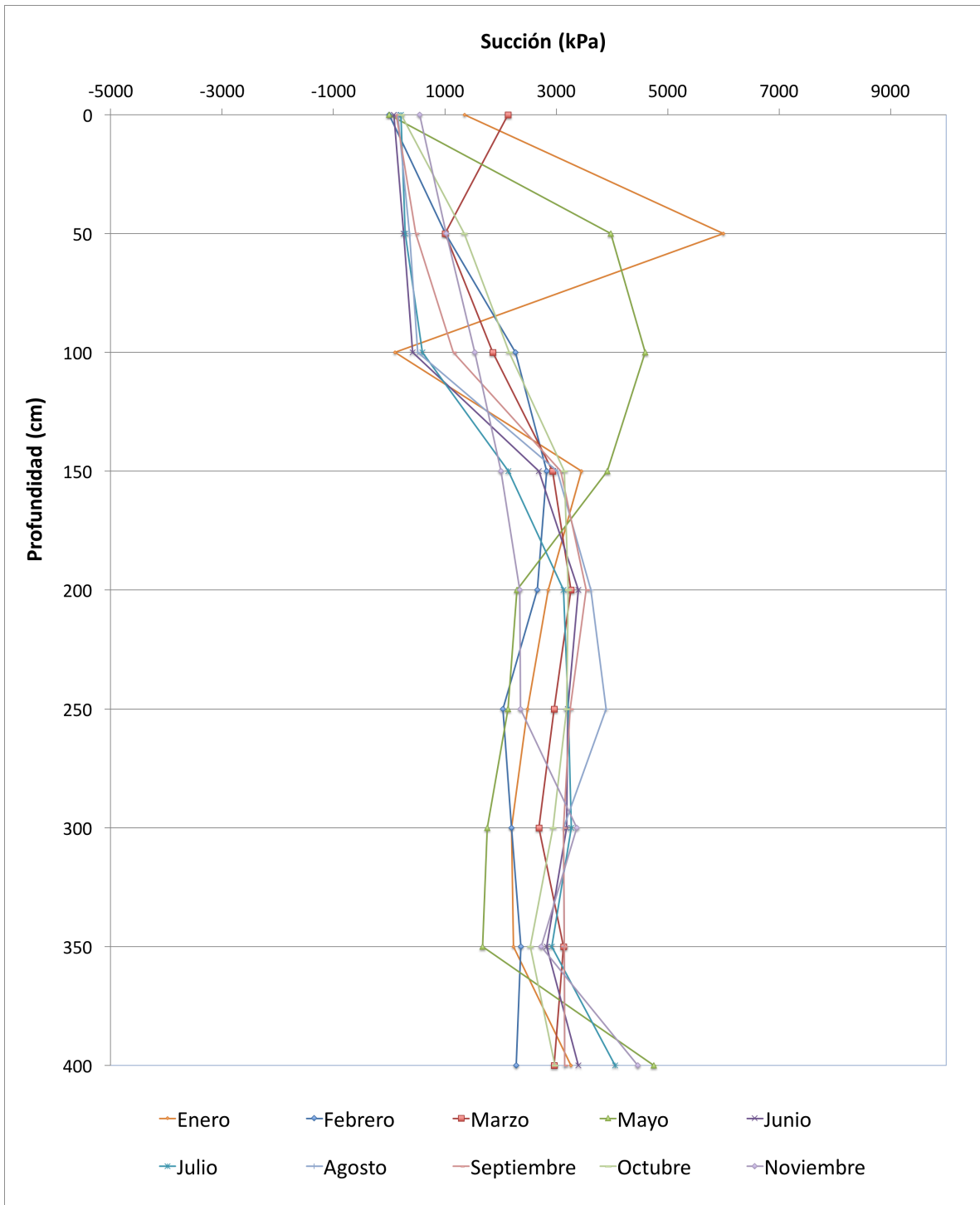


Figura 4.1. Datos experimentales de variación de succión respecto a la profundidad encontrados en la literatura para distintos meses (Flores-Castro, 1992).

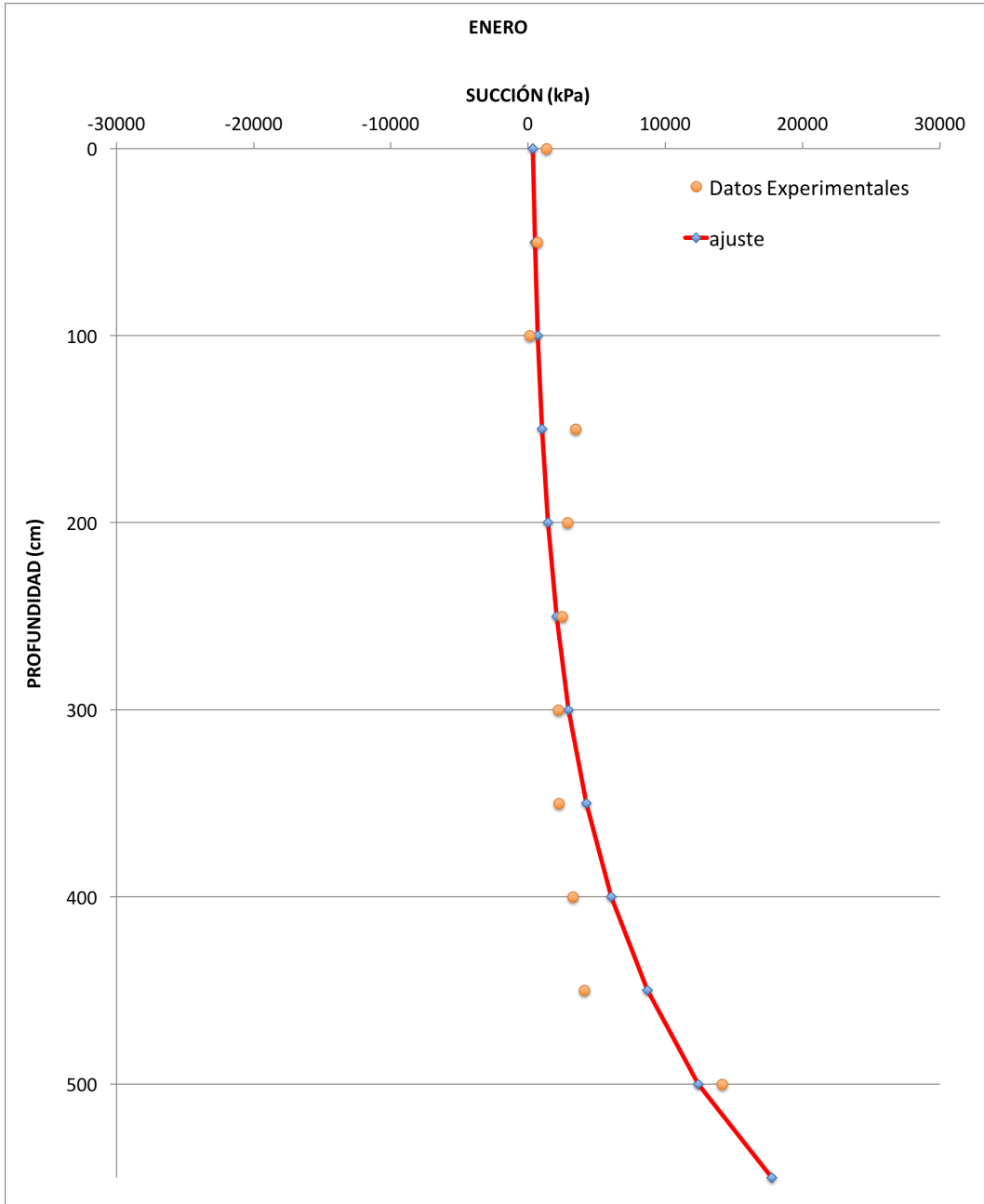


Figura 4.2. Aproximación a la distribución inicial de succión en el mes de enero. Se utilizaron datos experimentales encontrados en la literatura.

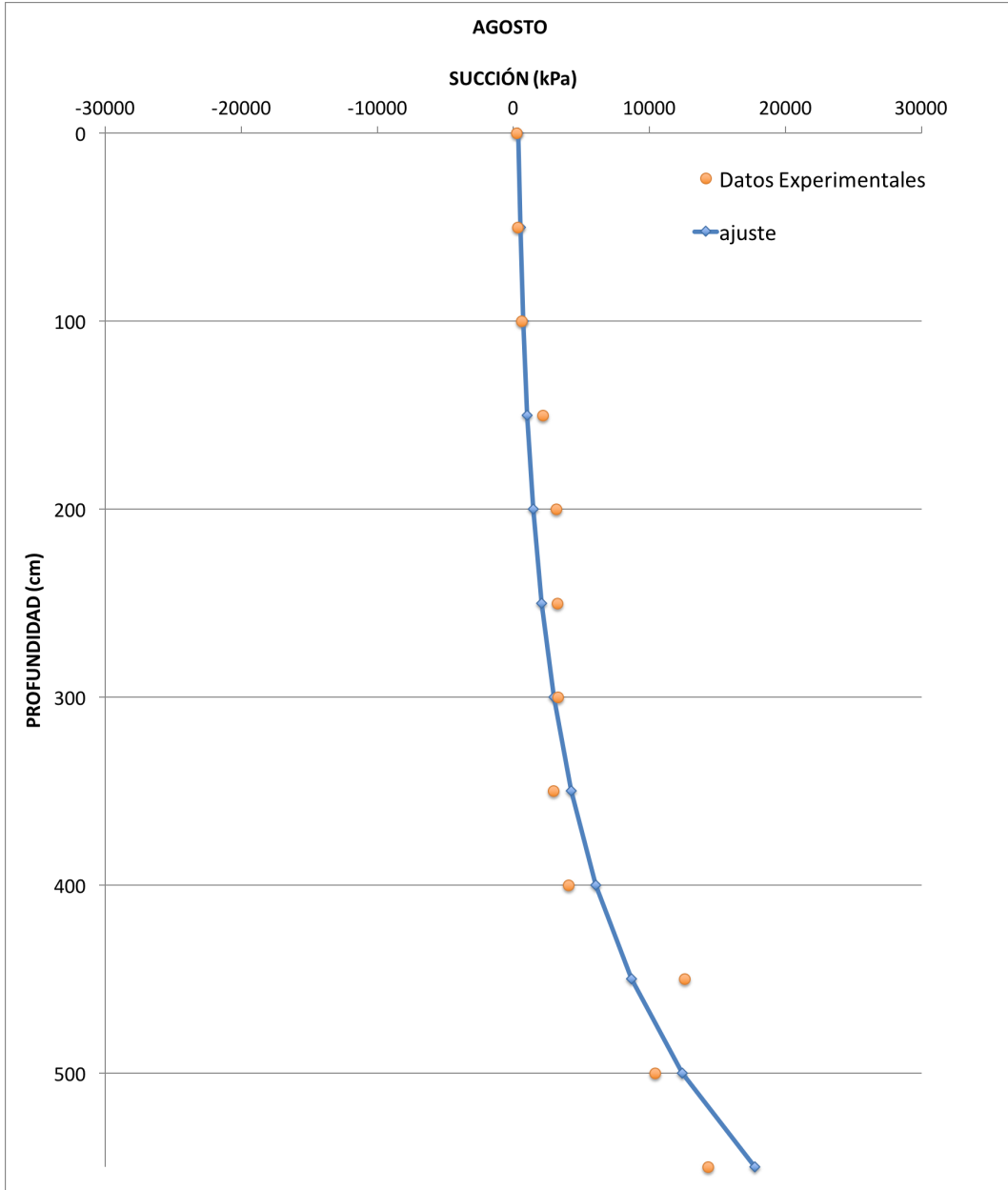


Figura 4.3. Aproximación a la distribución inicial de succión en el mes de agosto. Se utilizaron datos experimentales encontrados en la literatura .

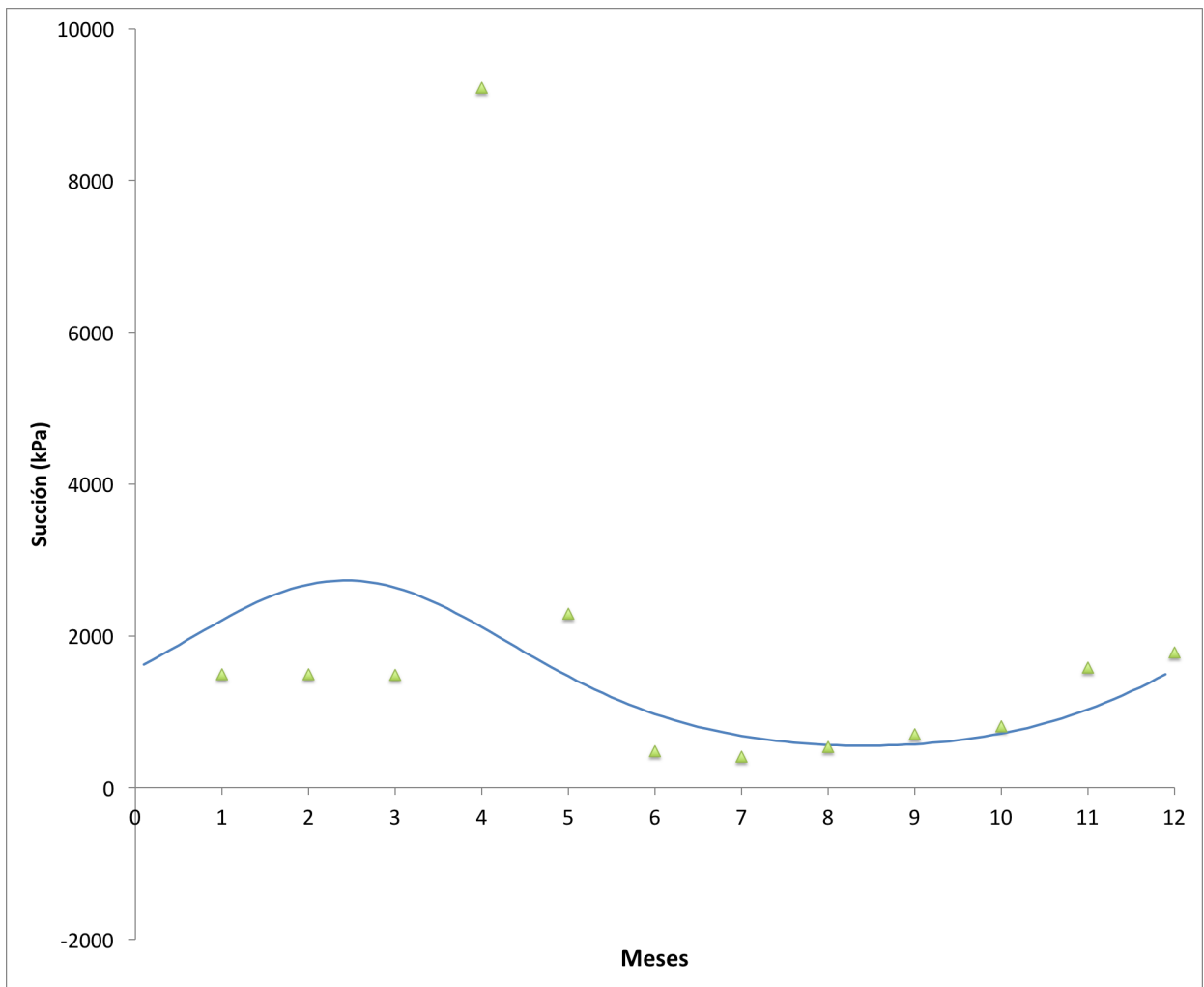


Figura 4.4. Función que aproxima las variaciones de succión en la superficie del suelo a partir de los datos experimentales.

Parámetros del suelo

La permeabilidad no saturada K se obtuvo a partir del método de Fredlund mostrado en la sección 2.1.3 con una permeabilidad saturada $K_s = 1,6521 \times 10^{-9} \text{ cm/s}$ de trabajos realizados en la localidad de Jurica (Pérez-Rea, 1993). Los resultados de permeabilidades no saturadas pueden verse como una gráfica de la permeabilidad contra la succión en la Figura 4.5.

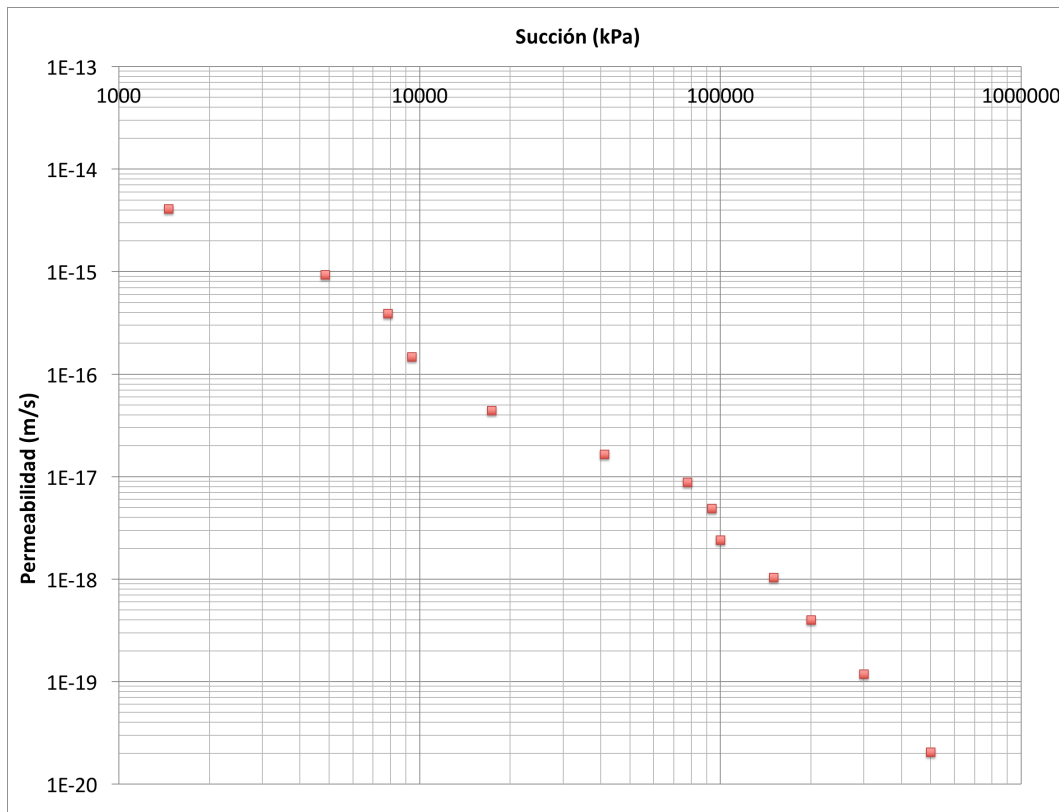


Figura 4.5. Gráfico de permeabilidad no saturada a partir del método de Fredlund.

Una vez calculados estos datos, se realizó un promedio de las permeabilidades no saturadas, el resultado se exhibe en la Tabla 4.1; así como los valores de C y D calculados mediante las expresiones vistas en la sección 2.1.4.

K	$1,18048 \times 10^{-10} \text{ cm/s}$
C	,000294
D	$4,01454 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$

Tabla 4.1. Tabla de parámetros obtenidos

4.2. Solución numérica

Para la solución numérica se desarrolló un programa en la aplicación de MATLAB versión 2013, en el cual se utiliza la teoría de elemento finito para calcular la solución. El programa requiere de los parámetros como el coeficiente de permeabilidad, coeficiente de difusión, dimensiones del dominio, capacidad específica, densidad del suelo seco, magnitud de la fuente, tiempo inicial y final, así como las funciones que determinan tanto la condición en la frontera superior como la distribución inicial. Las condiciones de frontera utilizadas en los laterales y en la parte inferior fueron que no existe variación de la succión; y en la parte superior se utilizó una condición dada por la función que aproxima las variaciones de succión en la superficie del suelo calculada en la sección 4.1.

Para la parte numérica se tomaron en cuenta tres casos:

- Caso 1: En este caso no se incluye una fuente o sumidero de humedad sobre el dominio de dimensiones 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo, solamente se colocan las condiciones de frontera.
- Caso 2: Se incluye una fuente de succión, es decir, un sumidero de humedad sobre el dominio de dimensiones 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo. Esta fuente de succión es aplicada sólo durante el mes de abril.
- Caso 3: Se incluye un sumidero de succión, es decir, una fuente de humedad sobre el dominio de dimensiones 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo. Esta fuente de succión es aplicada sólo durante el mes de abril.

En las Figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 se observa la distribución de succión a distintos tiempo para el caso 1, donde no se incluye fuente-sumidero de humedad sobre una región de 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo.

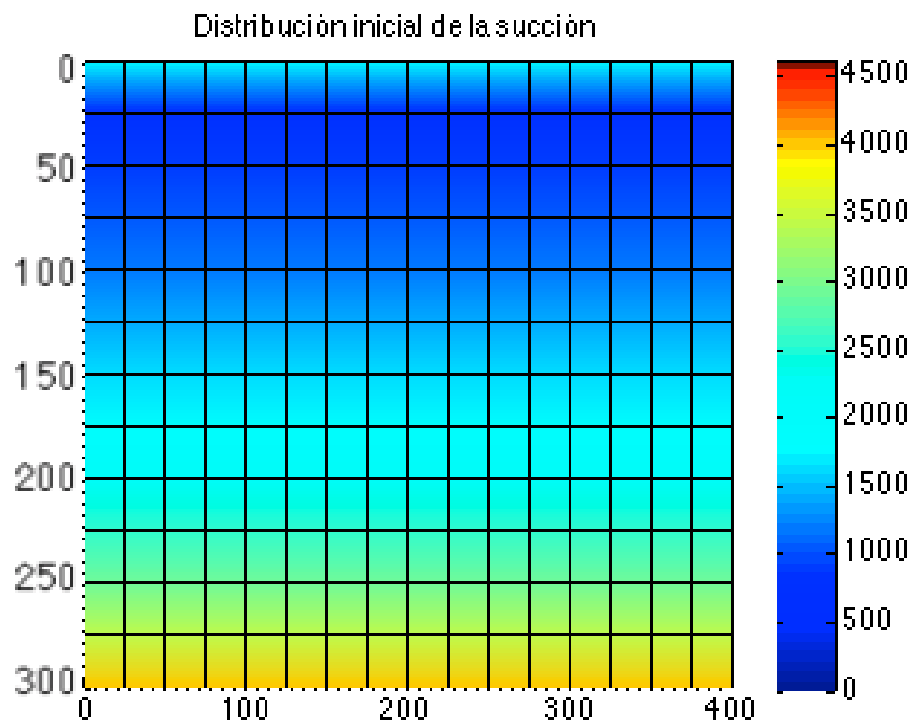
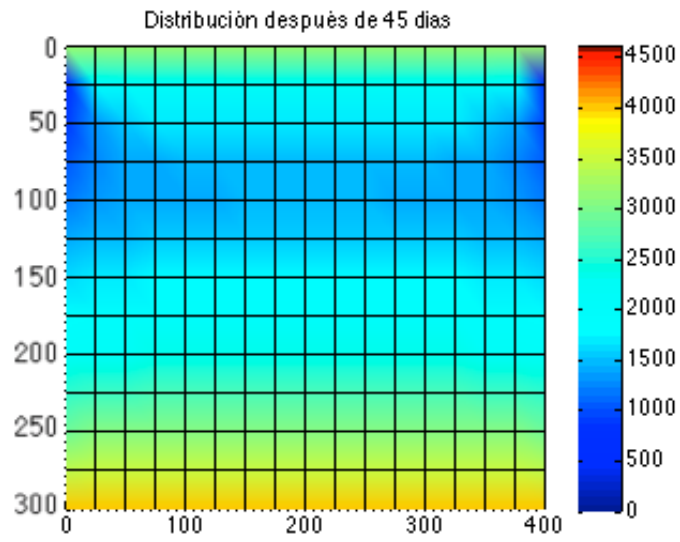
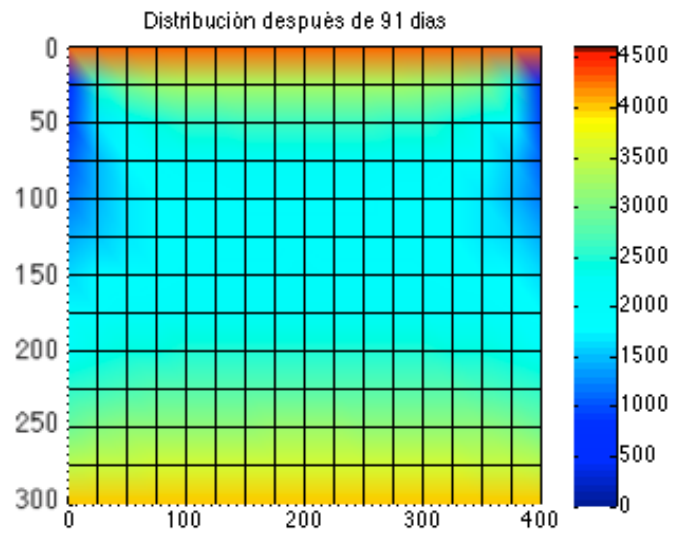


Figura 4.6. Distribución de succión inicial para el caso 1.

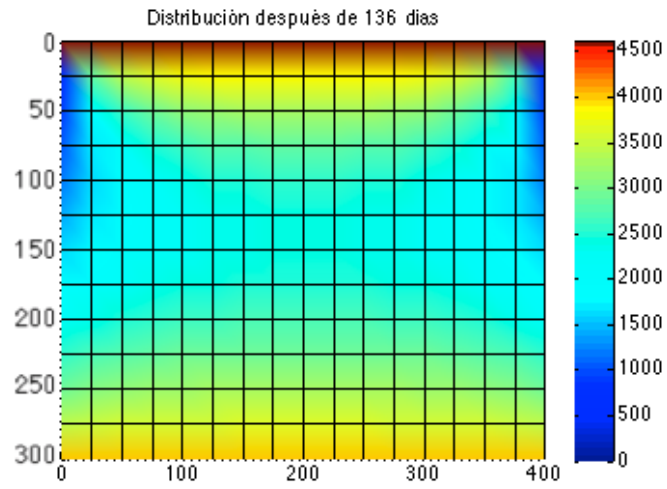


(a)

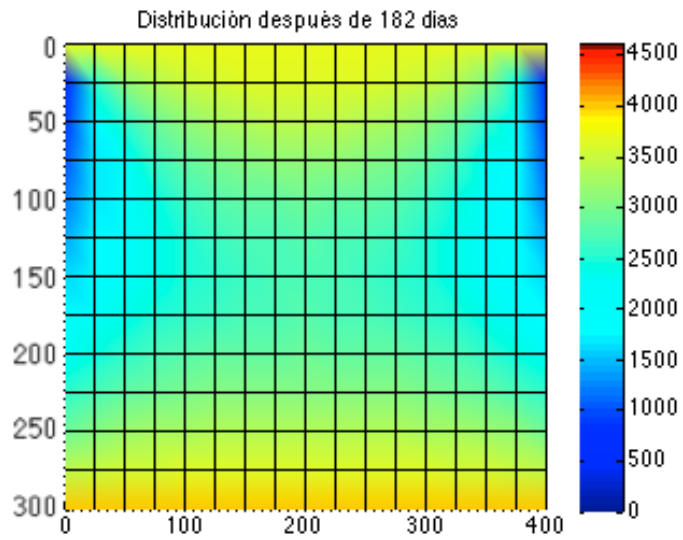


(b)

Figura 4.7. Distribuciones de succión a 45 y 91 días para el caso 1.

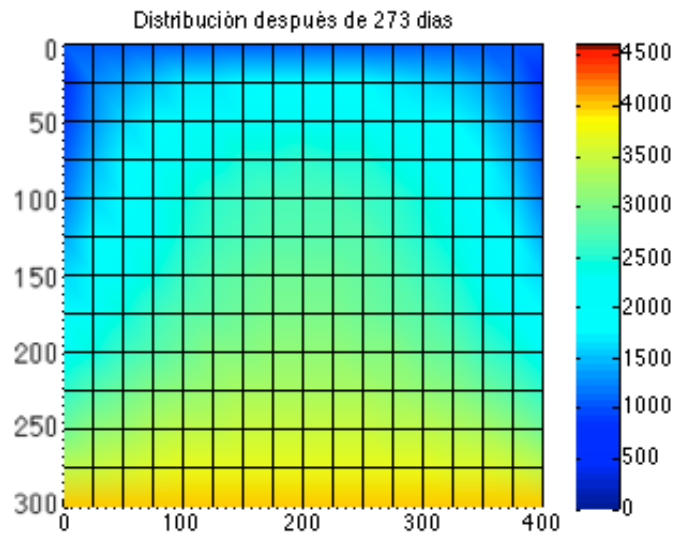


(a)

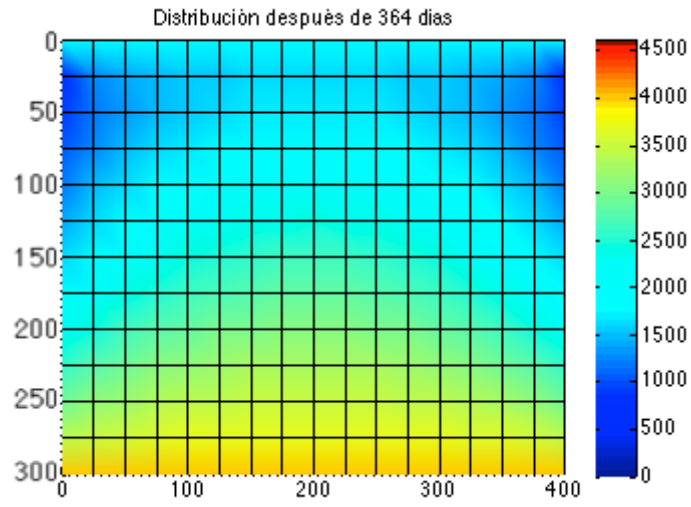


(b)

Figura 4.8. Distribuciones de succión a 136 y 182 días para el caso 1.



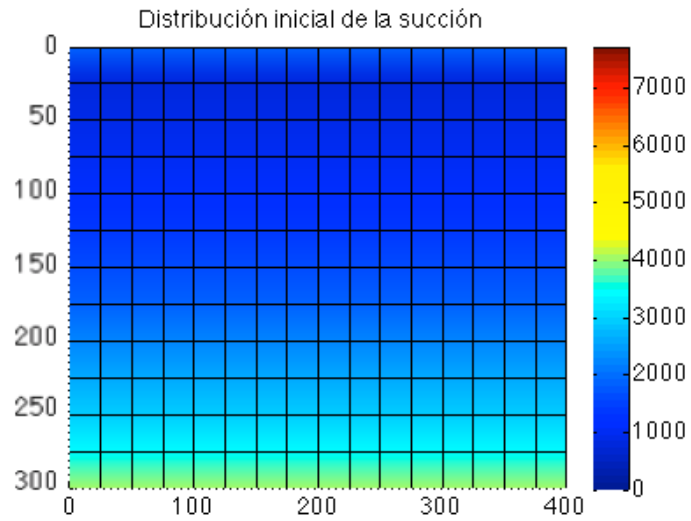
(a)



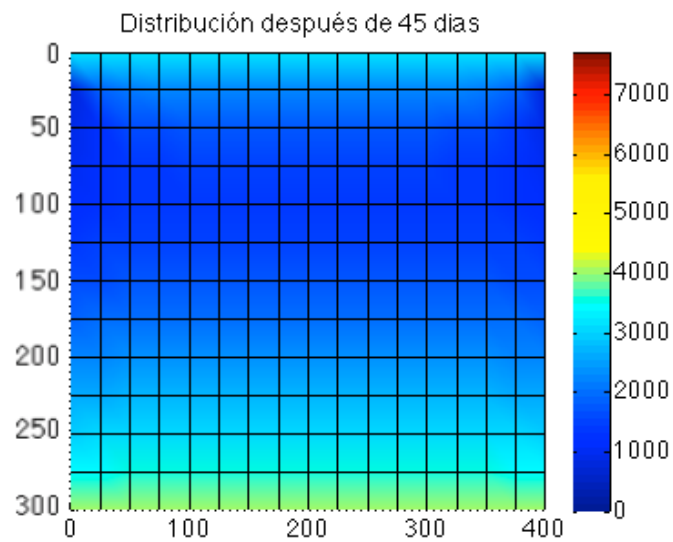
(b)

Figura 4.9. Distribuciones de succión a 273 y 364 días para el caso 1.

En las Figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 se muestra el resultado numérico para el caso 2 donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente en el mes de abril sobre un dominio de 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo.

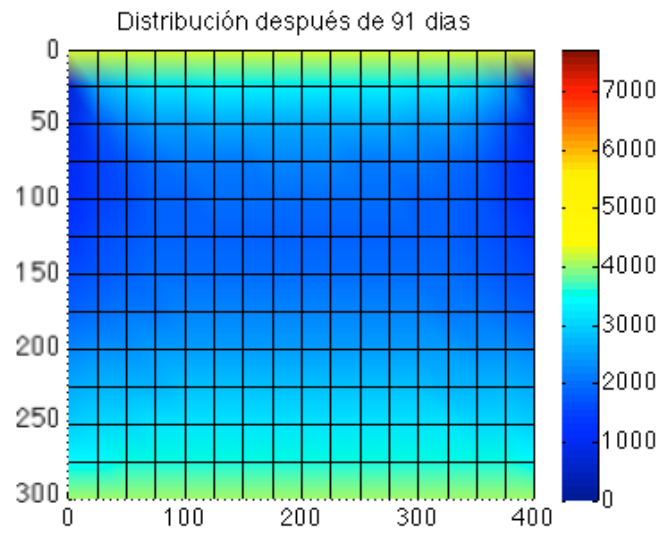


(a)

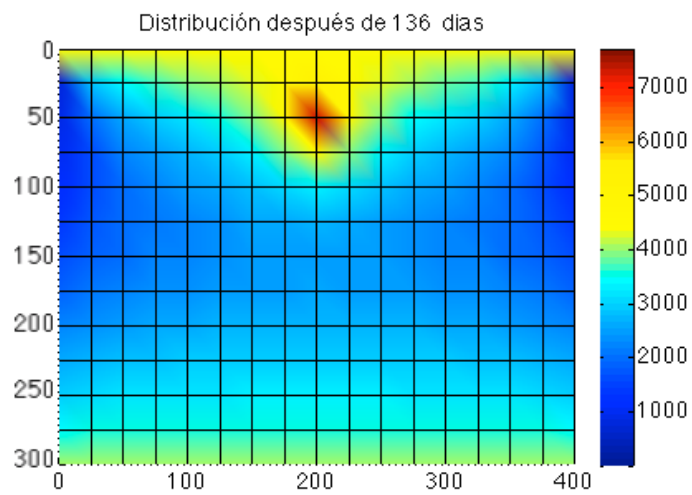


(b)

Figura 4.10. Distribución de succión inicial y a los 45 días para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente durante el mes de abril.

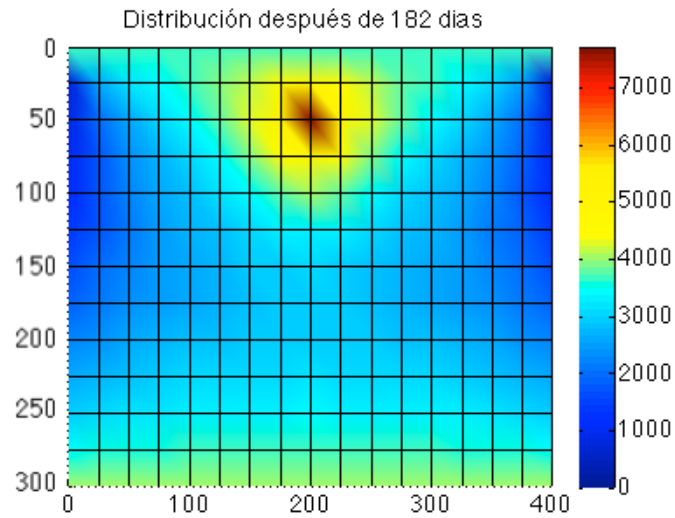


(a)

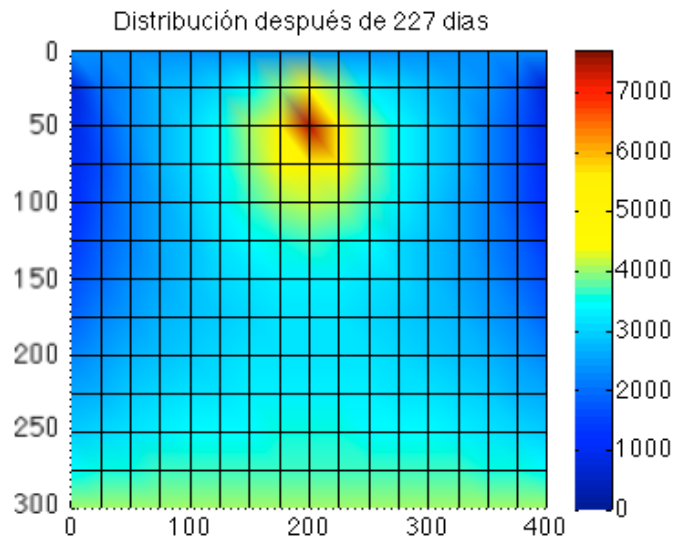


(b)

Figura 4.11. Distribuciones de succión a 91 y 136 días para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente durante el mes de abril.

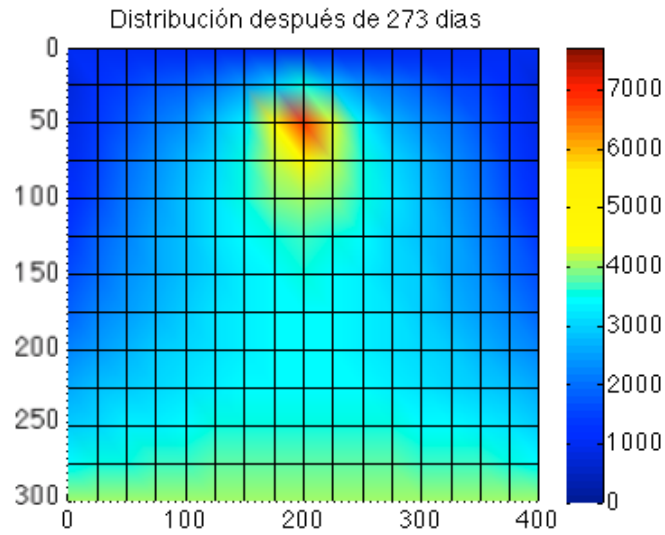


(a)

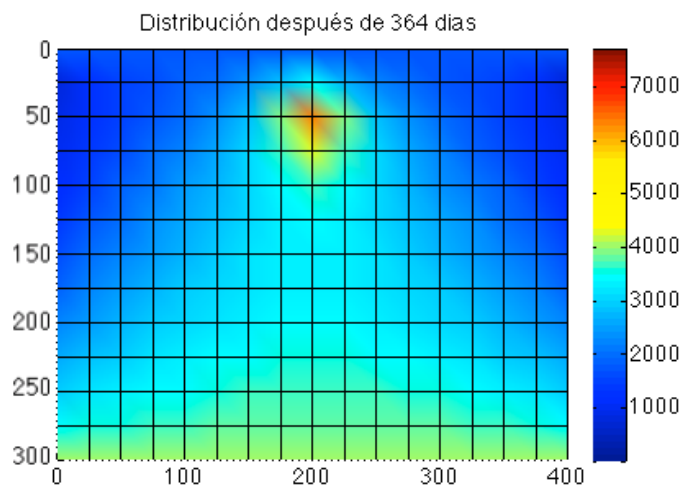


(b)

Figura 4.12. Distribuciones de succión a 182 y 227 días para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente durante el mes de abril.



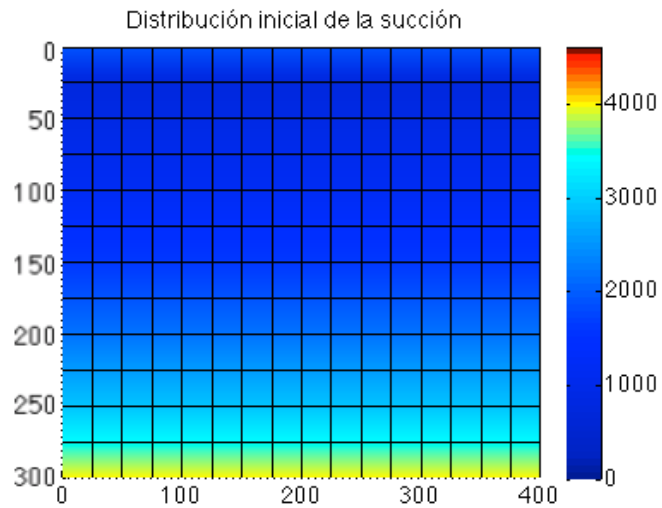
(a)



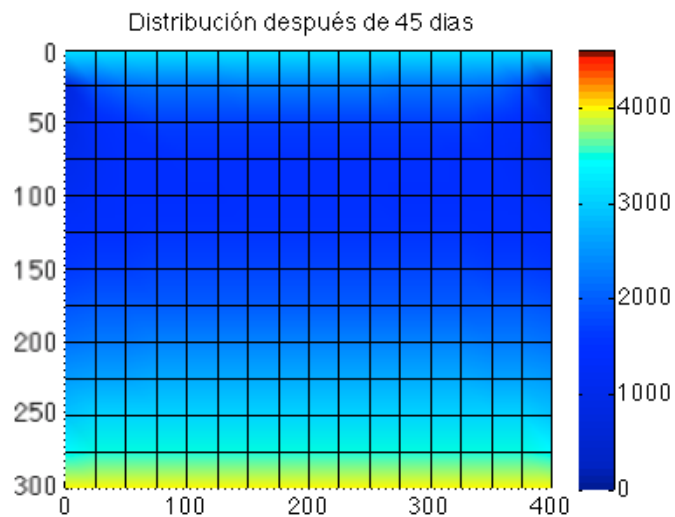
(b)

Figura 4.13. Distribuciones de succión a 273 y 364 días para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente durante el mes de abril.

En las Figuras 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17 se exhiben las distribuciones para el caso 3 donde una fuente de humedad es aplicada solamente en el mes de abril sobre un dominio de 300 *cm* de profundidad y 400 *cm* de largo.

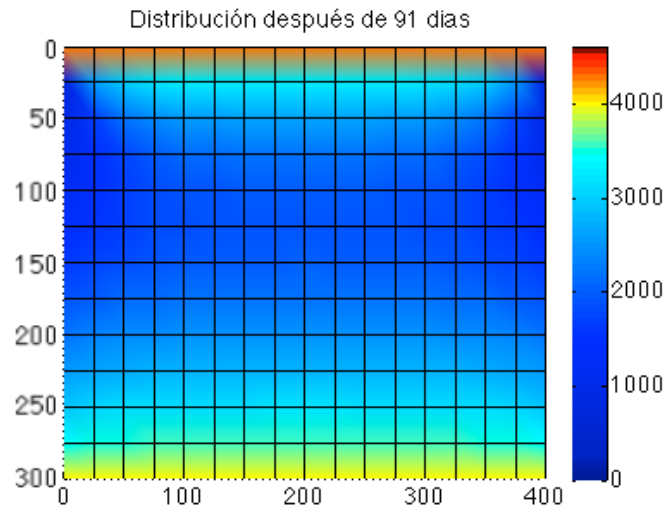


(a)

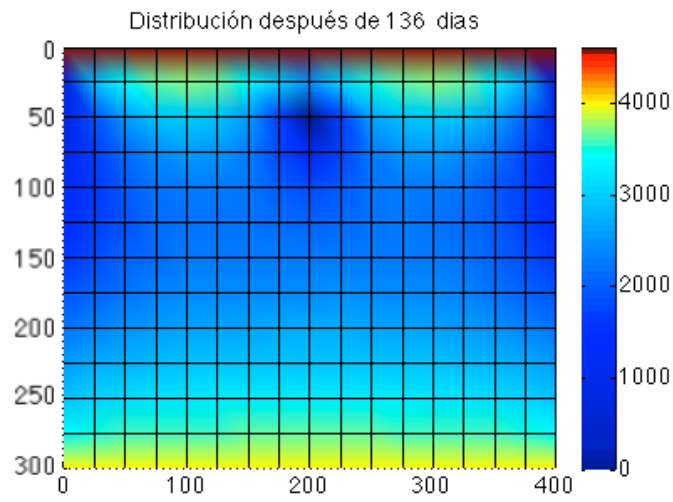


(b)

Figura 4.14. Distribución de succión inicial y a los 45 días para el caso donde una fuente de humedad es aplicada solamente en el mes de abril.

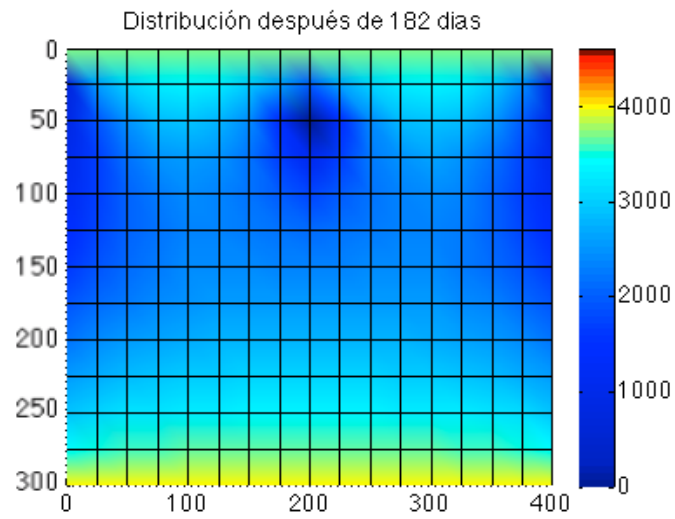


(a)

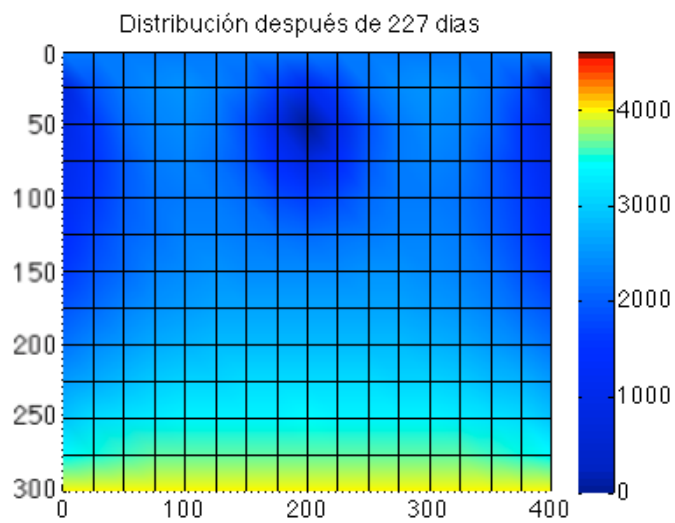


(b)

Figura 4.15. Distribuciones de succión a 91 y 136 días para el caso donde una fuente de humedad es aplicada solamente en el mes de abril.

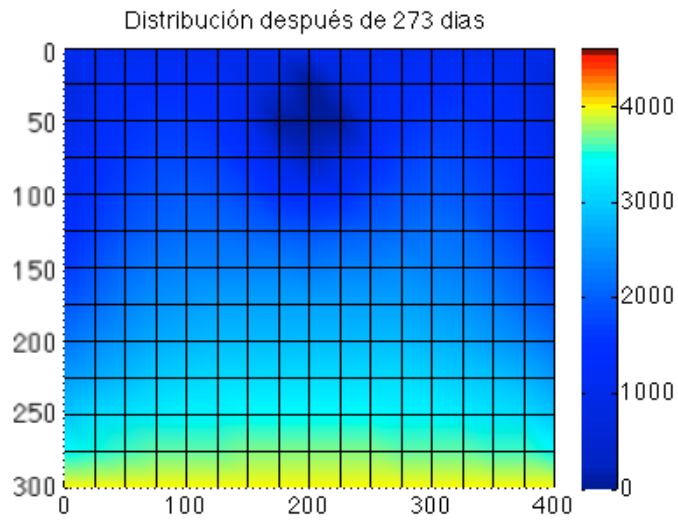


(a)

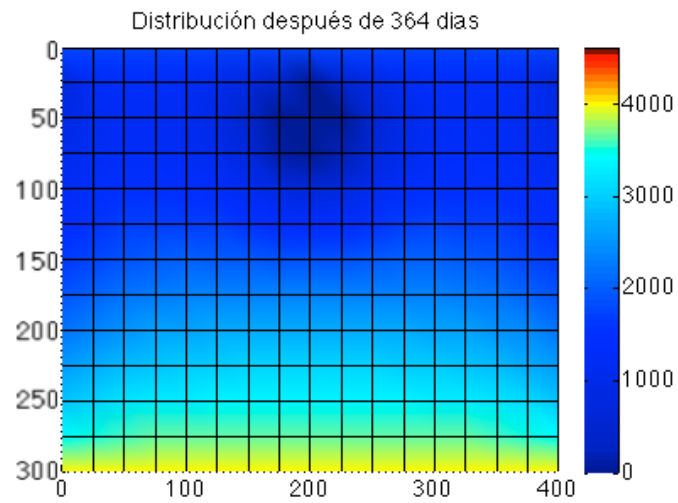


(b)

Figura 4.16. Diistribuciones de succión a 182 y 227 días para el caso donde una fuente de humedad es aplicada solamente en el mes de abril.



(a)



(b)

Figura 4.17. Distribuciones de succión a 273 y 364 días para el caso donde una fuente de humedad es aplicada solamente en el mes de abril.

4.3. Solución analítica

A continuación se representan graficamente los resultados obtenidos a partir del método de desarrollo en autofunciones para el caso 2, el mismo caso desarrollado de forma numérica pero únicamente en una dimensión. Para observar con más detalle el comportamiento de la succión, se realizó la gráfica de la distribución de succión a los meses de enero, abril, julio y noviembre; las cuales se pueden ver en las Figuras 4.18, 4.19, 4.20 y 4.21. Estos resultados pueden verse como perfiles los cuales muestran las variaciones de succión respecto a la profundidad y el tiempo.

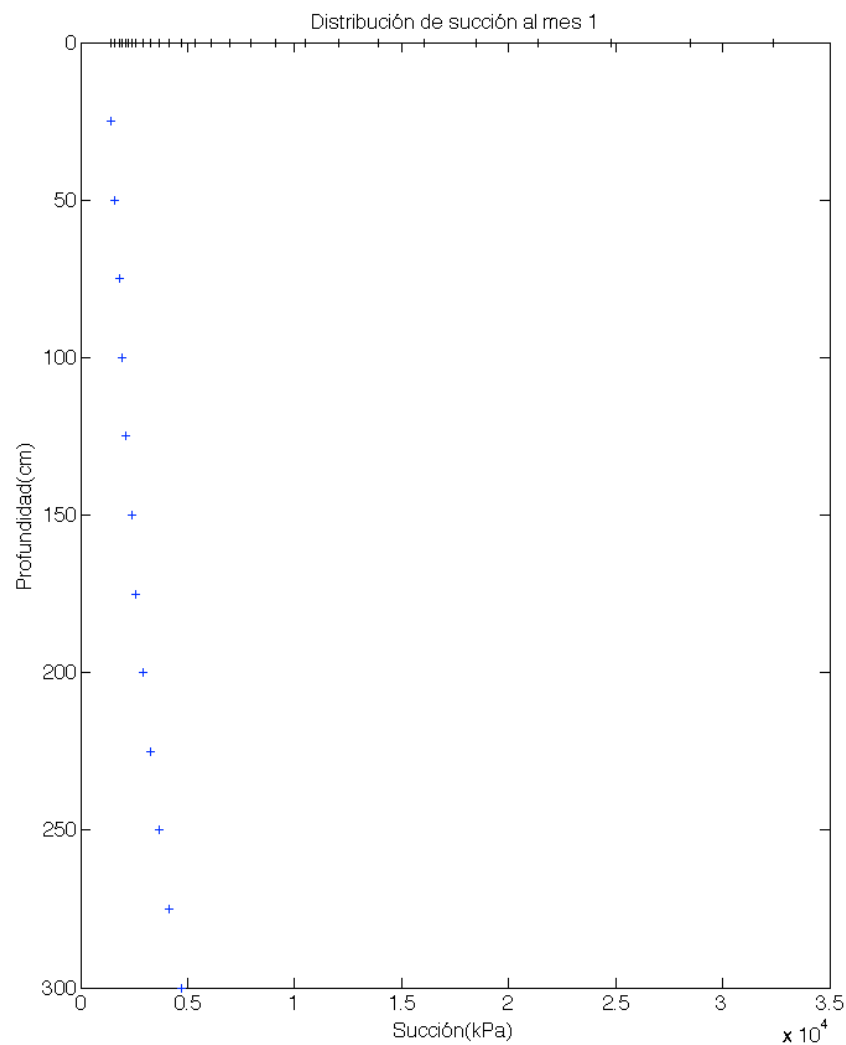


Figura 4.18. Distribución de succión en el mes de enero, para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente en el mes de abril.

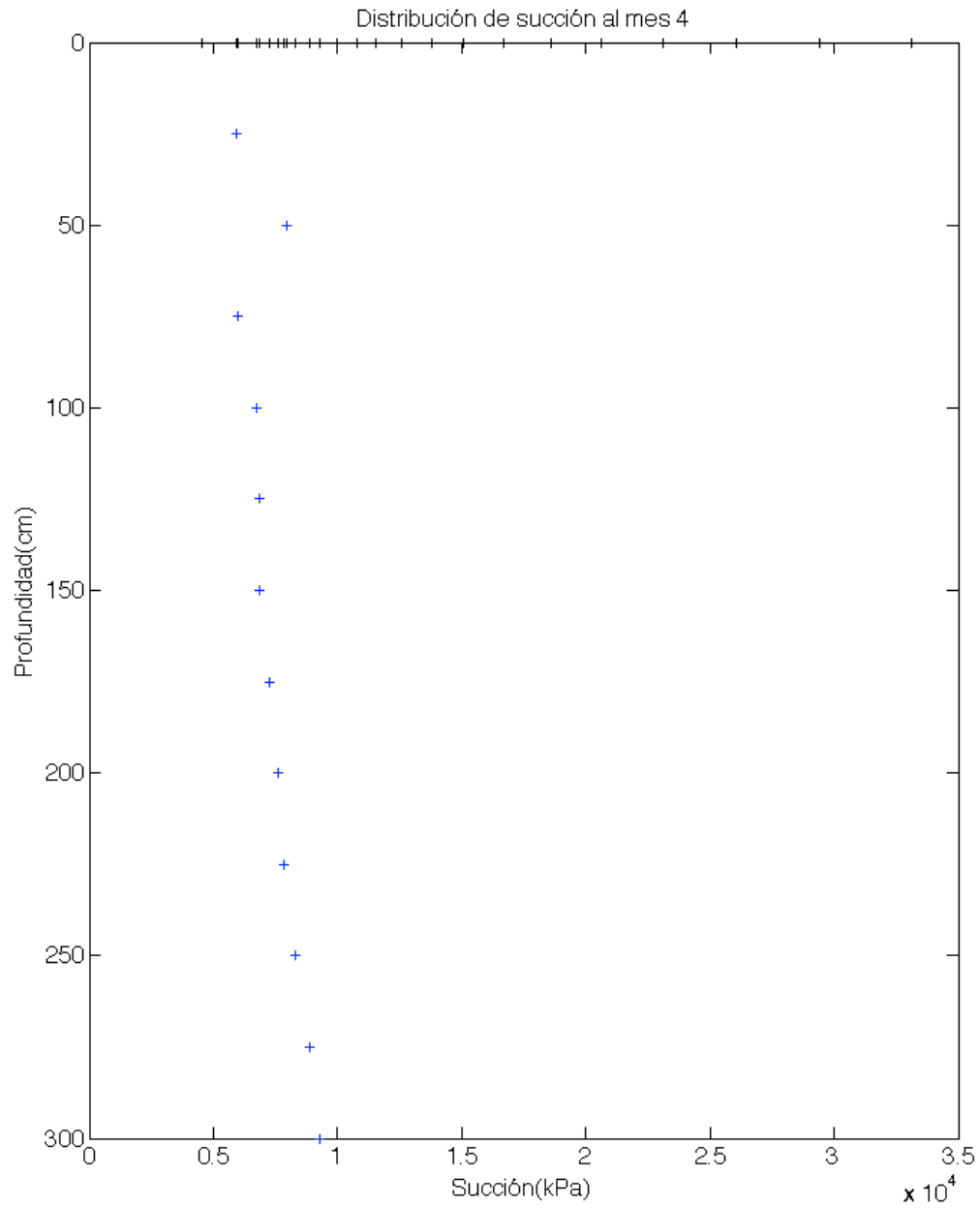


Figura 4.19. Distribución de succión en el mes de abril, para el caso donde un su-
midero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente en el mes de
abril.

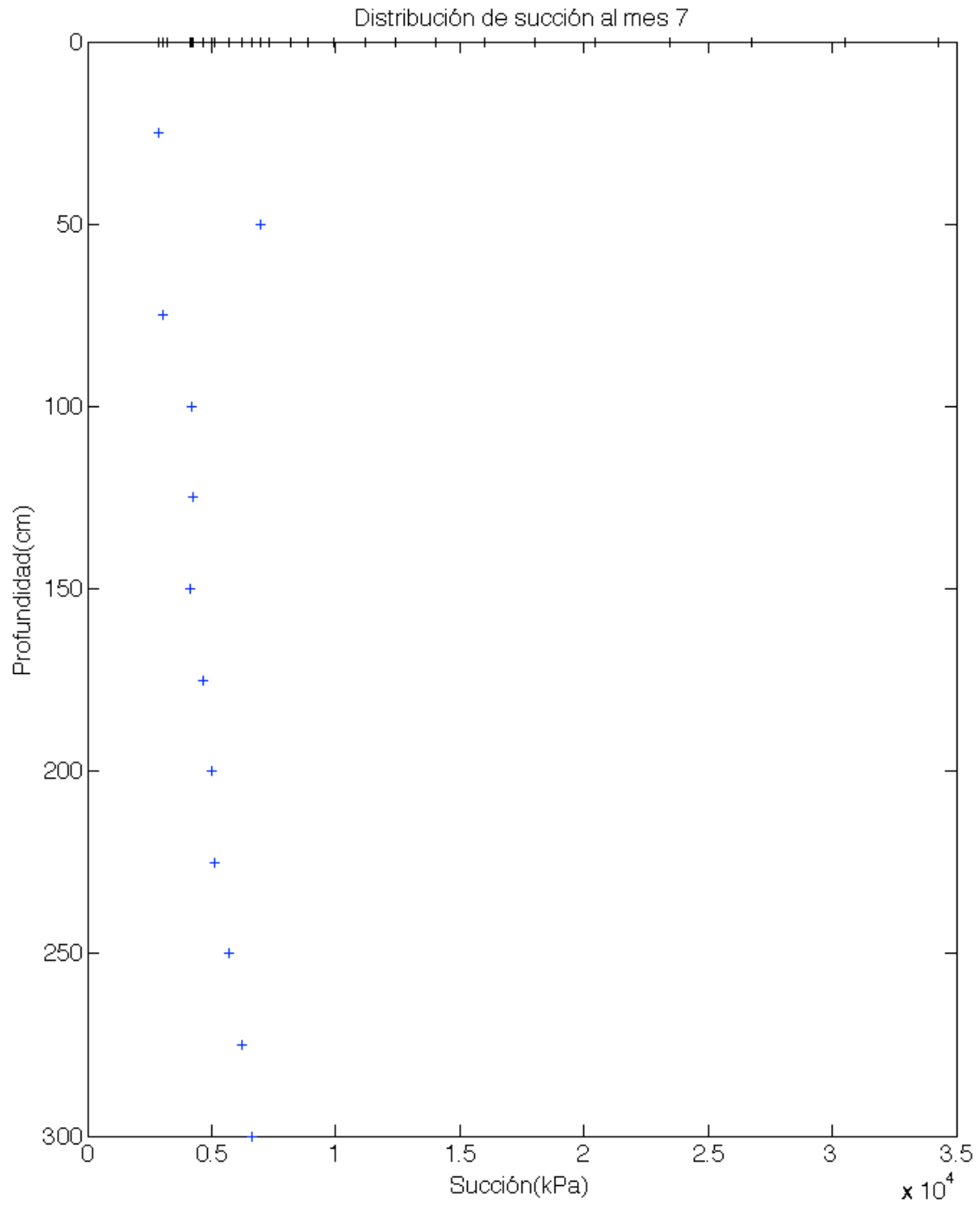


Figura 4.20. Distribución de succión en el mes de julio, para el caso donde un sumidero de humedad (o una fuente de succión) es aplicado solamente en el mes de abril.

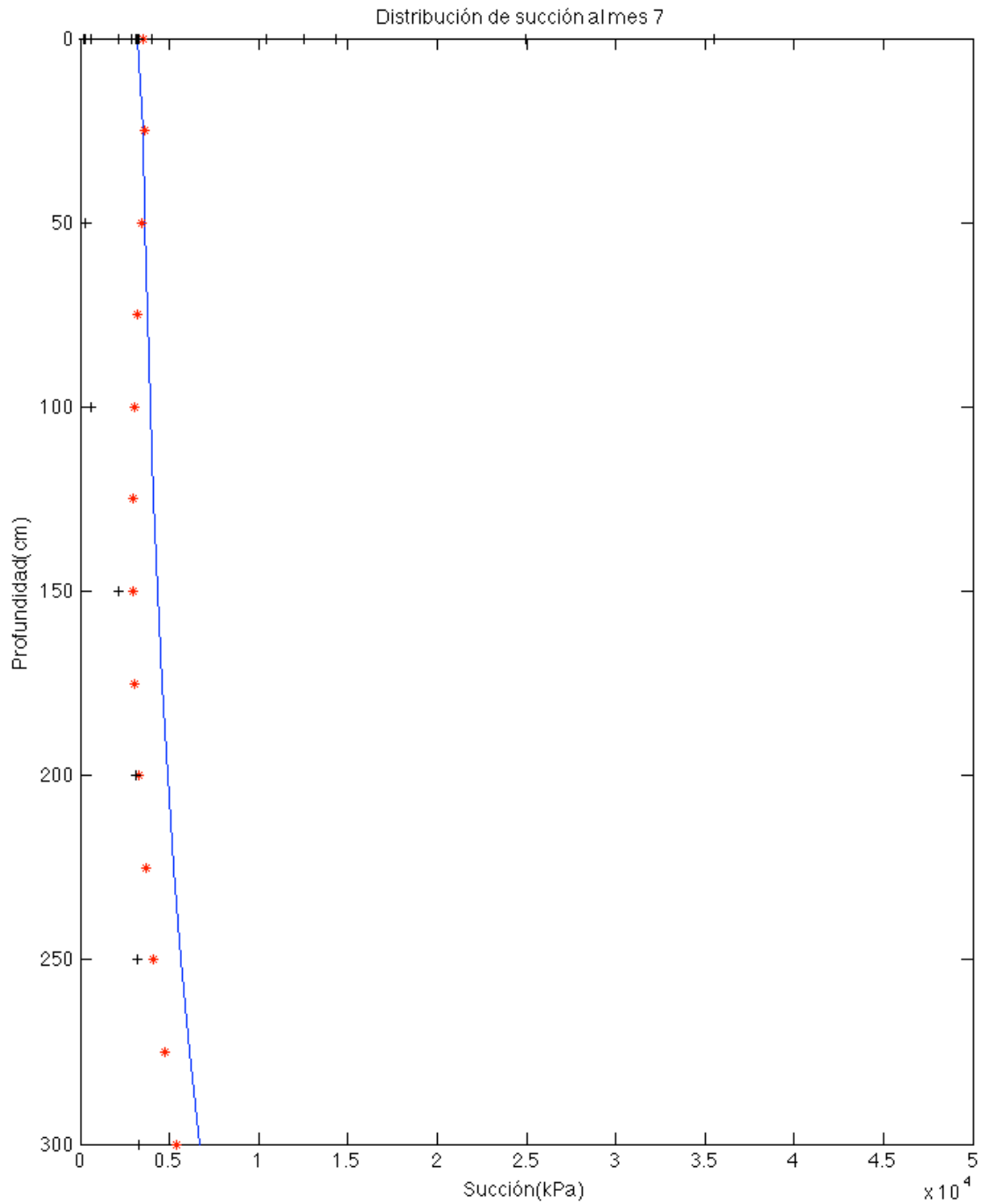


Figura 4.24. Comparación de resultados analíticos (-), numéricos (*) y datos experimentales (+); para el mes de julio.

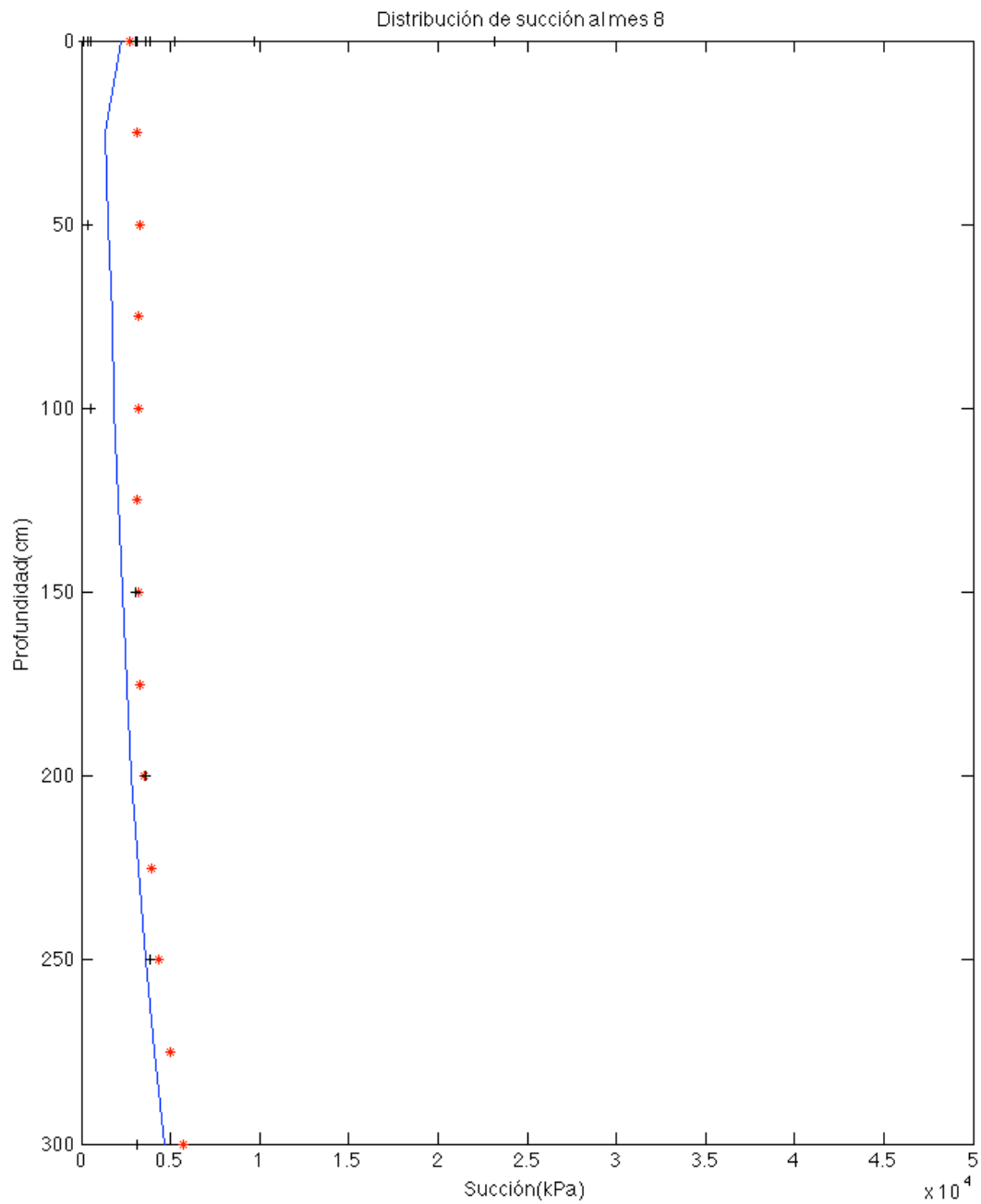


Figura 4.25. Comparación de resultados analíticos (-), numéricos (*) y datos experimentales (+); para el mes de agosto.

También se desarrolló una serie de comparaciones entre el método numérico y analítico para el caso 2 en los meses de enero, febrero, julio y agosto , las cuales se pueden observar en las Figuras 4.26, 4.27, 4.28 y 4.29.

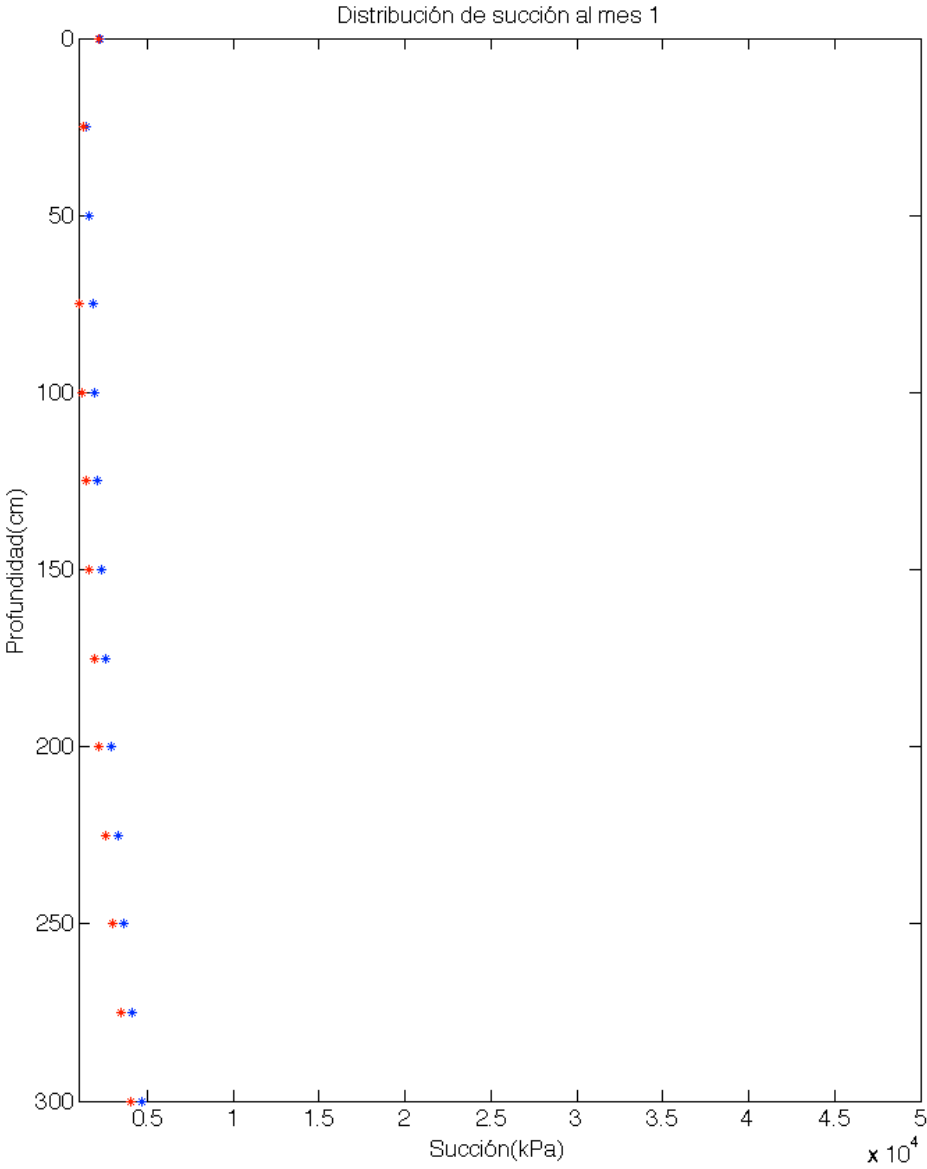


Figura 4.26. Comparación de resultados analíticos (azul) y numéricos (rojo) en el mes de enero.

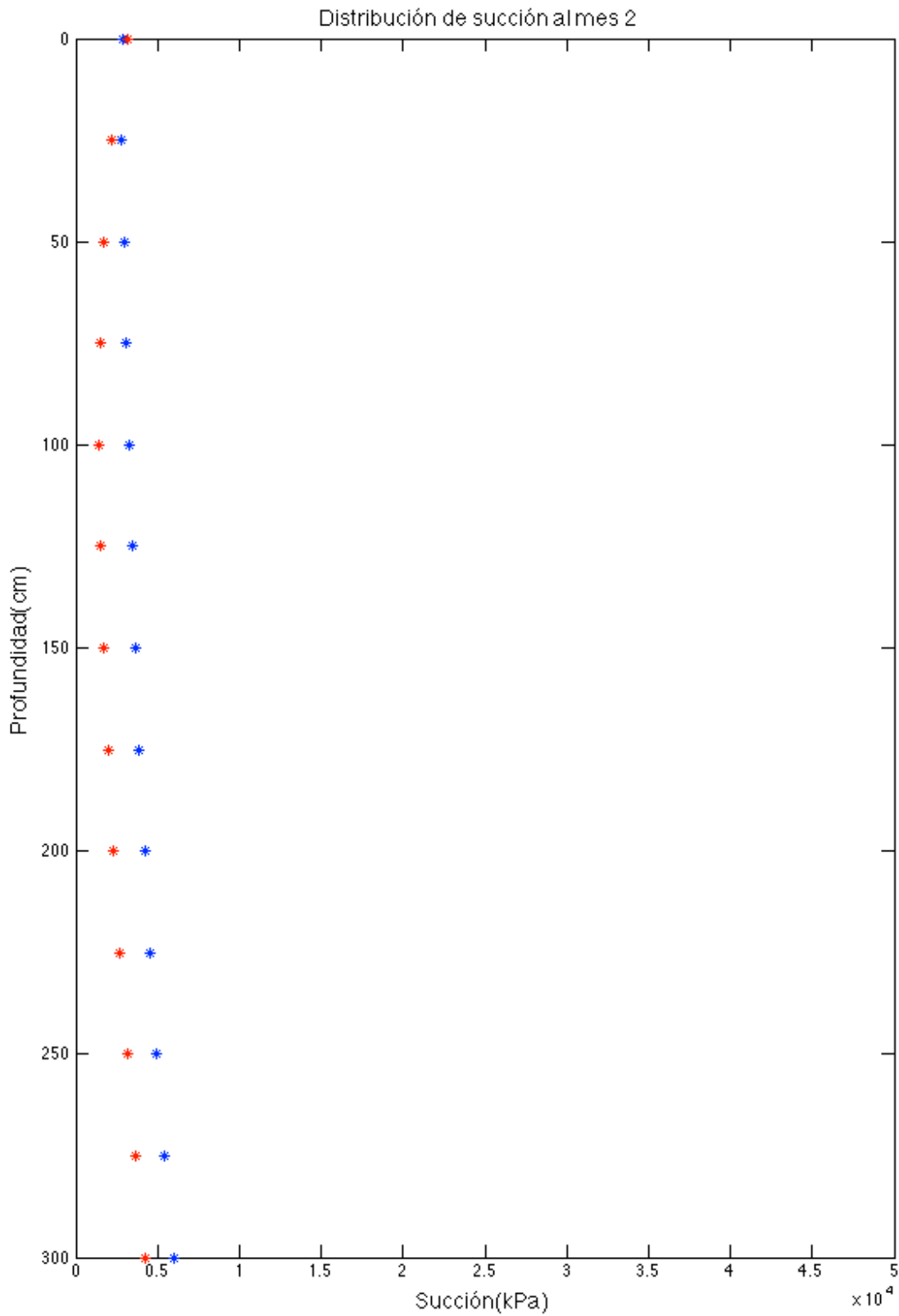


Figura 4.27. Comparación de resultados analíticos (azul) y numéricos (rojo) en el mes de febrero.

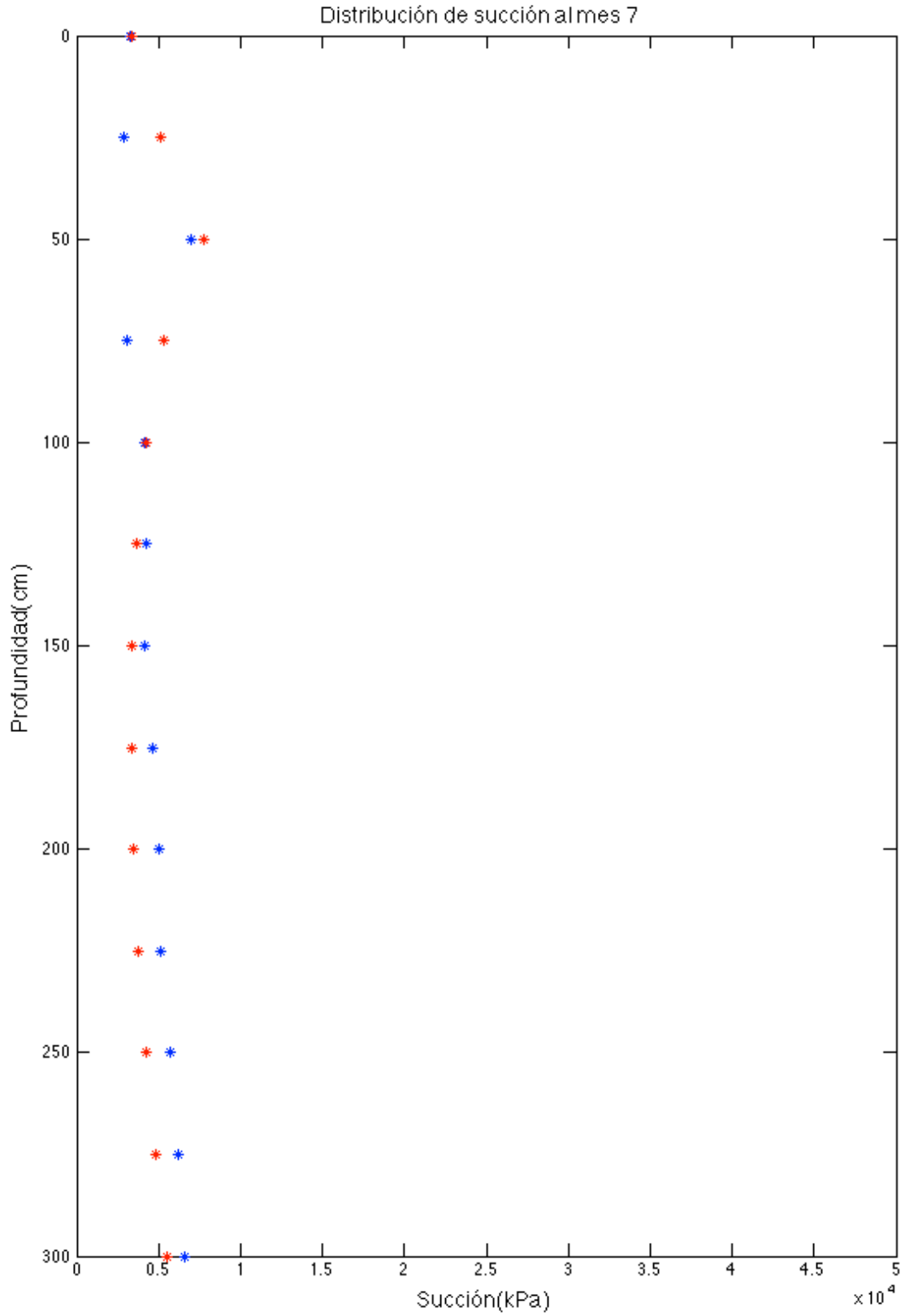


Figura 4.28. Comparación de resultados analíticos (azul) y numéricos (rojo) en el mes de julio.

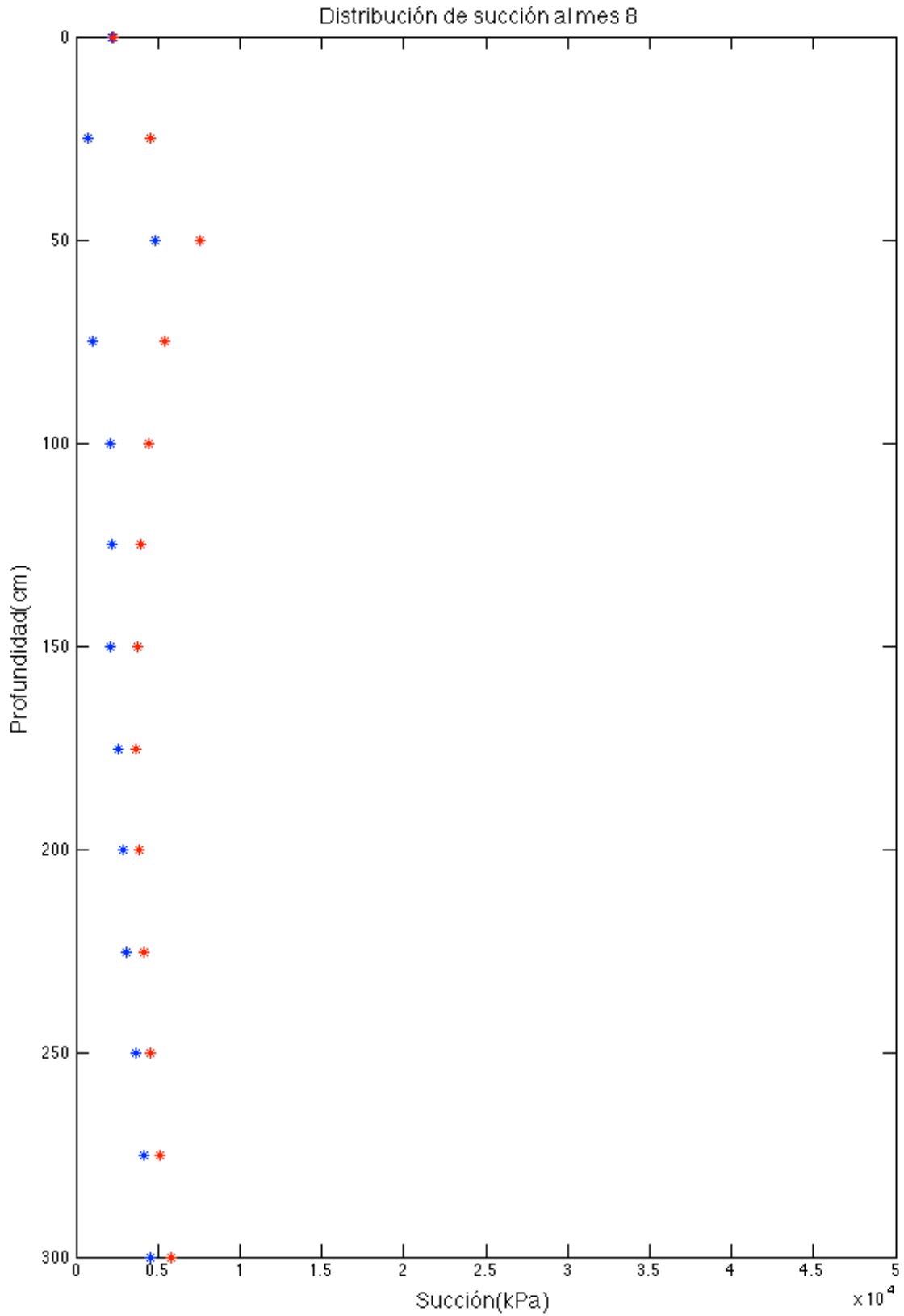


Figura 4.29. Comparación de resultados analíticos (azul) y numéricos (rojo) en el mes de agosto.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Al proponer las funciones necesarias para la solución de la ecuación de Richards en términos de la succión del suelo, se encontró que la variación de los datos de succión tiene un comportamiento exponencial respecto a la profundidad, al menos hasta los $6,50 \text{ m}$ que es la profundidad hasta la cual se cuenta con datos experimentales. Además la variación de la succión en la superficie del suelo respecto al tiempo tiene una tendencia sinusoidal como ya muchos autores habían planteado anteriormente. Sin embargo la aproximación realizada en este trabajo mostró un mejor ajuste a los datos que la función utilizada por Li .

Se puede observar en los resultados numéricos que existe una menor succión en las zonas de color azul y por lo tanto existe una mayor presencia de humedad, mientras que en las zonas de colores rojo y amarillo hay mas succión, es decir, el suelo tiene mayor aridez o escasez de humedad en estas áreas.

Las principales observaciones que se pueden hacer respecto a los resultados numéricos obtenidos de los distintos casos son:

- caso 1: En este caso sin una fuente-sumidero de humedad se observa los cambios de succión a causa de la condición en la frontera superior la cual representa el efecto de las variaciones debido al clima, en estos resultados se puede percibir que existe una época del año en la cual la succión en la superficie es mayor lo que indicaría un periodo de clima seco (meses de febrero a julio), mientras que otra temporada del año muestra succiones menores lo que representaría un periodo con mayor humedad en el ambiente (meses de agosto a enero). También es evidente el comportamiento cíclico del fenómeno en la superficie.

- caso 2: Una fuente de succión puede entenderse como una extracción de humedad, como lo puede ser una raíz de un árbol o algún otro fenómeno que retire humedad del suelo. La influencia de una fuente de succión dentro del suelo depende de su magnitud y localización, debido a que si está próximo a la superficie, no tendrá gran impacto a mayores profundidades donde la succión es afectada únicamente por las condiciones de frontera impuestas. Además se puede ob-

servar que la condición superior definida en base a las variaciones de succión en la superficie, influye en el comportamiento de fuentes de succión que estén próximos a la superficie. Es conveniente mencionar que si la fuente de succión se ubica cerca de la superficie puede ocasionar daños significativos en las estructuras soportadas sobre este suelo.

caso 3: En este caso un sumidero de succión o una fuente de humedad representa fenómenos como una fuga de una tubería o una manguera de riego la cual se ha dejado abierta. De forma similar al caso 2 la influencia de un sumidero dentro del suelo depende de su magnitud y localización, puesto que si se encuentra cerca de la superficie, no tendrá gran impacto a mayores profundidades donde la succión es afectada únicamente por las condiciones de frontera impuestas. Y también se puede apreciar que la condición superior definida en base a las variaciones de succión en la superficie, influye en el comportamiento de sumideros que estén próximos a la superficie. Al igual que con una fuente, el sumidero de succión ubicado cerca de la superficie puede ocasionar daños significativos en las estructuras, por lo que es importante considerarlo.

En la solución obtenida a partir del método de desarrollo en autofunciones en una dimensión se aprecia la evolución de la distribución de succión en el tiempo, puede verse que para el caso 2, la disipación del efecto de una extracción de humedad es muy lenta. También es observable el comportamiento sinusoidal debido a la condición de contorno en la superficie.

Al contrastar los métodos utilizados con datos experimentales encontrados en la literatura se puede observar que para el mes de enero las soluciones analítica y numérica tienen la misma tendencia, la cual se ajusta en buena medida a los datos experimentales de Jurica. De manera similar para los meses febrero, julio y agosto mostrados en los resultados, se visualiza que siguen la misma tendencia, excepto en pequeñas diferencias cerca de los 200 cm para los meses de febrero y julio; y alrededor de los 500 cm para el mes de agosto. En los demás meses se tiene variaciones similares, y siempre manteniendo una tendencia semejante. Esto muestra que ambos métodos dan una buena aproximación a los datos de arcillas de Jurica, en el estado de Querétaro. Esto da sustento para decir que los resultados al ingresar una fuente-sumidero pueden ser una aproximación al fenómeno de una fuente-sumidero dentro del suelo bajo las condiciones de contorno establecidas en este trabajo.

En la comparación de la solución numérica y analítica, se puede observar que existe una tendencia similar, las diferencias en la comparación sean probablemente debido al tamaño del elemento finito definido en el método numérico y al número de términos de la serie solución del método analítico. Además es importante mencionar que ambas soluciones se complementan al proporcionar valiosa información sobre el fenómeno de difusión en suelos, lo que da como resultado un estudio más completo y un mayor entendimiento del objeto de estudio.

Respecto al modelo planteado por Li (2006), se pueden apreciar que al utilizar funciones para aproximar la distribución de succión y variaciones de succión en la superficie a partir de datos experimentales de la región, permite obtener un resultado con mayor semejanza al fenómeno de flujo en suelos locales. Y además el definir una función fuente la cual tome en cuenta el tiempo de aplicación, la magnitud y la localización de la fuente da la posibilidad de poder proponer distintos tipos de fuentes o sumideros los cuales simulen el efecto de un evento específico dentro del suelo.

Como trabajo pendiente, faltaría estudiar el proceso de acoplamiento del fenómeno de flujo en el suelo con los efectos provocados por una edificación en la superficie del mismo. Además de tomar en cuenta el módulo de elasticidad del suelo como una función de la succión. Y desarrollar pruebas experimentales en campo con el fin de observar el comportamiento del suelo al inducir una fuente o sumidero.

Con base en los resultados obtenidos se puede decir que el modelo puede predecir los efectos de fuentes o sumideros al interior del suelo con características similares a las arcillas de Jurica en el estado de Querétaro, lo cual valida la hipótesis planteada inicialmente. Esto es de utilidad en casos de estudio en los que edificaciones están sobre un suelo en donde existen fuentes de humedad como fugas en tuberías, o sumideros como raíces de árboles. Para de esta forma medir desplazamientos y esfuerzos producidos en el suelo causados por este tipo de fenómenos. Finalmente se puede decir que los resultados son satisfactorios, que los objetivos planteados fueron alcanzados y que este trabajo puede servir para futuras investigaciones sobre el flujo de humedad en suelos no saturados en el país.

BIBLIOGRAFÍA

- An, H., Ichikawa, Y., Tachikawa, Y., y Shiba, M. (2012). Comparison between iteration schemes for three-dimensional coordinate-transformed saturated–unsaturated flow model. *Journal of hydrology*,470-71:212–226.
- Arroyo, H., Rojas, E., de la Luz Pérez-Rea, M., Horta, J., y Arroyo, J. (2013). Simulation of the shear strength for unsaturated soils. *Comptes Rendus Mécanique*,341(11):727–742.
- Arroyo, H., Rojas, E., de la Luz Pérez-Rea, M., Horta, J., y Arroyo, J. (2015). A porous model to simulate the evolution of the soil–water characteristic curve with volumetric strains. *Comptes Rendus Mécanique*,343(4):264–274.
- Barari, A., Omidvar, M., Ghotbi, A. R., y Ganji, D. D. (2009). Numerical analysis of Richards' problem for water penetration in unsaturated soils. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*,6(5):6359–6385.
- Cao, H. y Yue, X. (2014). Homogenization of Richards' equation of van Genuchten - Mualem model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,412(1):391–400.
- Cornelissen, T., Diekkrüger, B., y Bogena, H. (2013). Using hydrogeosphere in a forested catchment: How does spatial resolution influence the simulation of spatio-temporal soil moisture variability? *Four Decades of Progress in Monitoring and Modeling of Processes in the Soil-Plant-Atmosphere System: Applications and Challenges*,19(0):198–207.
- Eisenberg, M. A. y Malvern, L. E. (1973). On finite element integration in natural coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,7(4):574–575.
- El-Hames, A. y Richards, K. (1995). Testing the numerical difficulty applying Richards equation to sandy and clayey soils. *Journal of Hydrology*,167(1–4):381–391.

- Fahs, M., Younes, A., y Lehmann, F. (2009). An easy and efficient combination of the mixed finite element method and the method of lines for the resolution of Richards' equation. *Environmental Modelling & Software*,24(9):1122–1126.
- Fityus, S. G. y Smith, D. W. (2001). Solution of the unsaturated soil moisture equation using repeated transforms. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*,25(15):1501–1524.
- Flores-Castro, J. L. (1992). Datos de succión del suelo de la localidad de Jurica 1991-1992. Technical report,Universidad Autónoma de Querétaro,México.
- Fredlund, D. G. y Rahardjo, H. (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils*. Wiley,New York.
- Fredlund, D. G., Xing, A., y Huang, S. (1994). Predicting the permeability function for unsaturated soils using the soil-water characteristic curve. *Canadian Geotechnical Journal*,31(4):533–546.
- Fuentes, C. y Rendón, L., editors (2012). *Riego por gravedad*. Universidad Autónoma de Querétaro,primera edición edition.
- Horta, J., Rojas, E., Pérez-Rea, M. L., López, T., y Zaragoza, J. B. (2013). A random solid-porous model to simulate the retention curves of soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*,37(8):932–944.
- Li, J. (1996). *Analysis and modelling of performance of footing on expansive soils*. PhD Thesis,University of South Australia.
- Li, J. (2006). Two dimensional simulation of a stiffened slab on expansive soil subject to a leaking underground water pipe. In *Unsaturated Soils 2006*,pages 2098–2109. American Society of Civil Engineers.
- Lopez-Lara, T., Zepeda-Garrido, J., y Castario, V. (1999). A comparative study of the effectiveness of different additives on the expansion behavior of clays. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*,4(5).
- López-Lara, T. (1995). *Resistencia al esfuerzo cortante en arcillas expansivas de Jurica, Querétaro*. Tesis Doctoral,Universidad Autónoma de Querétaro,Querétaro, México.

- Marzan, H. L. (2013). *Soluciones numéricas y aproximaciones para la ecuación de Richards*. Tesis Doctoral, Instituto Tecnológico de Santo Domingo, República Dominicana.
- Menziani, M., Pugnaghi, S., y Vincenzi, S. (2007). Analytical solution of the linearized richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 332(1–2):214–225.
- Merz, W. y Rybka, P. (2010). Strong solutions to the richards equation in the unsaturated zone. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2):741–749.
- Pachepsky, Y., Timlin, D., y Rawls, W. (2003). Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils. *Soil Hydrological Properties and Processes and their Variability in Space and Time*, 272(1–4):3–13.
- Paulus, R., Dewals, B. J., Erpicum, S., Piroton, M., y Archambeau, P. (2013). Innovative modelling of 3d unsaturated flow in porous media by coupling independent models for vertical and lateral flows. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 246(0):38–51.
- Pérez-Rea, M. L., Rojas, F., y Castano, V. M. (2003). Nitrogen adsorption method for determining the mesopore slit-like size distribution of expansive soils. *Materials Research Innovations*, 7(6):341–352.
- Prasad, K., Kumar, M., y Sekhar, M. (2001). Modelling flow through unsaturated zones: Sensitivity to unsaturated soil properties. *Sadhana*, 26(6):517–528.
- Pérez-Rea, M. L. (1993). *Succión y comportamiento esfuerzo-deformación en suelos expansivos*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México.
- Radu, F. A. y Wang, W. (2014). Convergence analysis for a mixed finite element scheme for flow in strictly unsaturated porous media. *Special Section: Multiscale Problems in Science and Technology. Challenges to Mathematical Analysis and Perspectives III*, 15(0):266–275.
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, 1(5):318.
- Rojas, E., Zepeda, A., Pérez-Rea, M., Leal, J., y Gallegos, G. (2011). A four elements porous model to estimate the strength of unsaturated soils. *Geotechnical and Geological Engineering*, 29(2):193–202.

- Sun, H., Meerschaert, M. M., Zhang, Y., Zhu, J., y Chen, W. (2013). A fractal richards equation to capture the non-boltzmann scaling of water transport in unsaturated media. *Advances in Water Resources*,52(0):292–295.
- Van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*,44(5):892–898.
- Weill, S., Mouche, E., y Patin, J. (2009). A generalized Richards equation for surface/subsurface flow modelling. *Journal of Hydrology*,366(1–4):9–20.
- Zhou, J., Liu, F., y He, J.-H. (2013). On Richards' equation for water transport in unsaturated soils and porous fabrics. *Computers and Geotechnics*,54(0):69–71.

APÉNDICE A

```
1 function [] = MEFsuccion1()
2 %funcion para el calcular el flujo de humedad en terminos de la ...
   succion del suelo.
3
4 %Datos generales del modelo
5 G = Datos_entrada();
6
7 %Datos de la fuente de humedad en el suelo
8 Ft = Datos_fuente();
9
10 %Discretizacion del dominio
11 T = Triangulacion(G.n_x,G.n_y,G.l_x,G.l_y);
12
13 %Incremento del tiempo para evitar oscilaciones
14 I = Inc_tiempo(T,G.D,G.Rho_d,G.c);
15
16 %Condicion debido al clima en la frontera superior
17 Cl = Clima(G.d0,G.m0,G.df,G.mf,I);
18
19 %Recervacion de espacio de las matrices  solucion y fuerzas externas
20 U = zeros(T.Nv,Cl.n + 1);
21 F = zeros(T.Nv,Cl.n + 1);
22
23 %Generar la matriz de Rigidez y Capacitancia
24 K = rigidez(T,G.D);
25 C = Capacitancia(T,G.Rho_d,G.c);
26
27 %Distribucion inicial de succion
28 U(:,1) = Distribucion_inicial(T,G.m0);
29
30 %condiciones de frontera
31 %U(T.gradosfijos,1) = Aux_inicio(T.gradosfijos,1);% revisar si esta ...
   condicion de frontera es necesaria
32
```

```

33 %condicion debido al clima sin membrana
34 U(T.fronterasuperior,1) = Cl.clima_kpa(1);
35
36
37 %Funcion para determinar activacion/desativacion de la fuente
38 fl = Fuente_fecha(Ft,Cl);
39
40 %Funcion para localizar nodos donde se aplica la fuente
41 F1 = Fuente_coord(Ft,T,F);
42
43 %incremento de tiempo en segundos
44 d_t = I.inc_dias_rd*(3600*24);
45 t = 0;
46 j = 0;
47
48 for i = 1:Cl.n
49
50     Auxf = Cl.dia_inicial + i*I.inc_dias_rd;
51
52     if Auxf ≤ fl.dia_inicial && Auxf ≥ fl.dia_final
53         t_fuente = j*I.inc_dias_rd;
54         F = F1*subs(Ft.M,t_fuente);
55         j = j + 1;
56     end
57
58     A = C + (2/3)*d_t*K;
59     P = C - (1/3)*d_t*K;
60
61     U(:,i+1) = (inv(A))*P*U(:,i) + (inv(A))*(1/3)*d_t*(F(:, i) + ...
62         2*F(:,i+1));
63     t = t + d_t;
64
65     %condiciones de frontera
66     U(T.gradosfijos,i + 1) = U(T.gradosfijos,1);
67
68     %condicion de frontera superior
69     U(T.fronterasuperior,i + 1) = Cl.clima_kpa(i+1);
70
71 end
72
73 R = graficar1(U,T,Cl.n+1,I);
74
75 end

```



```

76
77 function G = Datos_entrada()
78 %Entrada de datos
79 Preguntas={
80     'Longitud del terreno(cm): '
81     'Particiones a lo largo del terreno: '
82     'Profundidad del terreno(cm): '
83     'Particiones en la profundidad del terreno'
84     'Densidad S.(g/cm^3) '
85     'Capacidad especifica: '
86     'Coeficiente de permeabilidad (cm/s): '
87     'Mes inicial/mm: '
88     'Dia inicial/dd: '
89     'Mes final/mm: '
90     'Dia final/dd: '
91     'Fecha inicial y final, mismo ciclo anual (1), diferente ciclo ...
        anual (2) : '
92 };
93 Titulo = 'Entrada de Datos Generales del Suelo ';
94 Defecto = ...
        {'400','16','300','12','2.6','.00029','.0000101993','1','1', ...
        '12','30','1'};
95 datos=inputdlg(Preguntas, Titulo, 1, Defecto);
96 G.l_x = str2double(datos{1});
97 G.n_x = str2double(datos{2});
98 G.l_y = str2double(datos{3});
99 G.n_y = str2double(datos{4});
100 G.Rho_d = str2double(datos{5});
101 G.c = str2double(datos{6});
102 G.k = str2double(datos{7});
103 G.m0 = str2double(datos{8});
104 G.d0 = str2double(datos{9});
105 G.mf = str2double(datos{10});
106 G.df = str2double(datos{11});
107 G.Af = str2double(datos{12});
108 G.D = G.k/G.c;
109
110 end
111
112 function Ft = Datos_fuente()
113 Preguntas={
114     'Funcion para la magnitud de la fuente(pendiente): '
115     'localizacion de la fuente de entrada, eje x (cm): '
116     'localizacion de la fuente de entrada, profundidad, eje y(cm): '

```

```

117     'Mes de activacion: '
118     'Dia de activacion: '
119     'Mes de desactivacion: '
120     'Dia de desactivacion: '
121     'Fecha inicial y final, en primer ciclo anual (1), segundo(3) y ...
        diferente ciclo anual (2) : '
122 };
123 Titulo = 'Entrada de Datos de la Fuente de Humedad en el Suelo ';
124 Defecto = {'-1000', '200', '50', '1', '1', '12', '30', '1'};
125 datos=inputdlg(Preguntas, Titulo, 1, Defecto);
126 Ft.M = datos(1);
127 Ft.x_f = str2double(datos{2});
128 Ft.y_f = str2double(datos{3});
129 Ft.ma0 = str2double(datos{4});
130 Ft.da0 = str2double(datos{5});
131 Ft.maf = str2double(datos{6});
132 Ft.daf = str2double(datos{7});
133 Ft.Af = str2double(datos{7});
134
135 end
136
137 function T = Triangulacion(n_x,n_y,l_x,l_y)
138 % Funcion para mallar en triangulos regulares
139
140 T.n_y = n_y;
141 T.n_x = n_x;
142
143 T.l_x = l_x;
144 T.l_y = l_y;
145
146 % Calculo del numero de nodos y asignacion del espacio para los Nodos
147
148 T.Nv=(n_x+1)*(n_y+1);
149 T.Nodos=zeros(T.Nv,2);
150 T.NodoPtrs=zeros(T.Nv,1);
151 T.gradosAux=zeros(T.Nv,1);
152 for t = 1:T.Nv
153     T.gradosAux(t,1) = t;
154 end
155
156 % Calculo del numero de nodos libres y asignacion de espacio para
157 % FNodoPtrs:
158 T.Nf=(n_x-1)*(n_y);
159 T.FNodoPtrs=zeros(T.Nf,1);

```

```

160
161 % Calculo del numero de nodos restringidos y asignacion de espacio para
162 % CNodePtrs:
163 T.Nc=T.Nv-T.Nf;
164 T.CNodePtrs=zeros(T.Nc,1);
165
166 % Calculo del numero de triangulos y reservar el espacio para ...
    Elementos:
167 T.Nt=2*n_x*n_y;
168 T.Elementos=zeros(T.Nt,3);
169
170 %Ciclo a traves de las filas y columnas de la malla, definiendo nodos
171
172 k=0; %numero de nodo
173
174 T.dx=l_x/n_x;
175 T.dy=l_y/n_y;
176
177 for j=0:n_y
178
179     y=j*T.dy;
180     % Ciclo sobre las columnas
181
182     for i=0:n_x
183         x=i*T.dx;
184         k=k+1;
185         % Colocando coordenadas de los nodos
186         T.Nodos(k,:)=[x,y];
187     end
188 end
189
190 r = 0;
191 ke = 1;
192 %Ciclo de elementos
193 for j=1:n_y
194 e = 1;
195     for i=1:n_x
196         %asignacion de nodos a los elementos correspondientes
197         T.Elementos(ke,:) = [r + e, r + n_x + 1 + e, r + n_x + e + 2];
198         T.Elementos(ke + 1,:) = [r + e, r + n_x + e + 2, r + e + 1];
199         e = e + 1;
200         ke = ke + 2;
201
202     end

```

```

203     r = r + n_x + 1;
204 end
205
206 %Creacion de grados de libertad
207 gl = 1; %numero de grados de libertad por nodo
208 T.grados = zeros(T.Nv,gl);
209 T.gradosfijos = zeros(2*(n_x + n_y),1);
210
211 p = 1;
212 q = 1;
213 a = 1;
214 for i = 1:n_y + 1
215     r = 0;
216     for j = 1:n_x + 1
217
218         if mod(i,2) ≠ 0
219             T.grados(q,1) = T.gradosAux(q,1);
220         else
221             T.grados(q,1) = T.gradosAux(i*(n_x + 1) - r,1);
222         end
223
224         if ((j == 1) || (j == n_x + 1) || (i == n_y + 1) || (i == 1))
225             T.gradosfijos(p,1) = T.grados(q,1);
226             p = p + 1;
227         end
228
229         if i == 1
230             T.fronterasuperior(a,1) = T.grados(q,1);
231             a = a + 1;
232         end
233         q = q + 1;
234         r = r + 1;
235     end
236 end
237
238 T.Nodosactivos = setdiff(T.grados,T.grados(T.gradosfijos));
239
240 end
241
242 function I = Inc_tiempo(T,D,Rho_d,c)
243 %Funcion que calcula el incremento del tiempo
244
245 Lamda = c*Rho_d;
246 %puede cambiar si es otro tipo de elemento

```

```

247 I.inc_dias = ((Lamda)*(T.dx*T.dy))/(3*D);
248     if I.inc_dias < 1
249         I.inc_dias_rd = 1;
250     else
251         I.inc_dias_rd = floor(I.inc_dias);
252     end
253 end
254
255 function Cl = Clima(d0,m0,df,mf,I,Af)
256
257 %funcion de clima que afecta la frontera superior
258 % G.d0 = dia inicial, m0 = mes inicial
259 % G.df = dia final, mf = mes final, Af = ciclo anual 1 o 2
260 if nargin < 6
261     Af = 1;
262 end
263
264 %Guardar parametro Af
265 Cl.Af = Af;
266
267 %Creacion de vector fecha
268 Cl.fecha = zeros(365*2,2);
269
270 da = 0;
271 for n = 1:2
272     for i = 1:12
273         if ((i == 1) || (i == 3) || (i == 5) || (i == 7) || (i ...
274             == 8) || (i == 10) || (i == 12))
275             for j = 1:31
276                 da = da + 1;
277                 Cl.fecha(da,1) = i;
278                 Cl.fecha(da,2) = j;
279             end
280         else
281             if i == 2
282                 for k = 1: 28
283                     da = da + 1;
284                     Cl.fecha(da,1) = i;
285                     Cl.fecha(da,2) = k;
286                 end
287             else
288                 for l = 1: 30
289                     da = da + 1;
290                     Cl.fecha(da,1) = i;

```

```

290             Cl.fecha(da,2) = 1;
291         end
292     end
293 end
294 end
295 end
296
297 for d_an = 1 : 730
298
299     if Cl.fecha(d_an,1) == m0 && Cl.fecha(d_an,2) == d0 && d_an < 366
300         Cl.dia_inicial = d_an;
301     end
302
303     if m0 ≥ mf
304         if d_an > 365 && Cl.fecha(d_an,1) == mf && Cl.fecha(d_an,2) ...
305             == df
306             Cl.dia_final = d_an;
307         end
308     else
309         if Af == 2
310             if Cl.fecha(d_an,1) == mf && Cl.fecha(d_an,2) == df && ...
311                 d_an > 365
312                 Cl.dia_final = d_an;
313             end
314         else
315             if Cl.fecha(d_an,1) == mf && Cl.fecha(d_an,2) == df && ...
316                 d_an ≤ 365
317                 Cl.dia_final = d_an;
318             end
319         end
320     end
321 end
322
323 Cl.lapso = Cl.dia_final - Cl.dia_inicial;
324
325 if I.inc_dias_rd < 10
326     T = I.inc_dias_rd;
327     Cl.n = floor(Cl.lapso/T);
328 else
329     T = 10;
330     Cl.n = floor(Cl.lapso/T);
331 end

```

```

331
332 Cl.tiempos = zeros(Cl.n + 1);
333 Cl.dmm = [ 31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31 ];
334
335 for q = 0:Cl.n
336     Cl.tiempos(q+1) = Cl.dia_inicial + q*T;
337 end
338
339 Cl.clima_kpa = zeros(Cl.n + 1);
340
341 for i = 1:Cl.n + 1
342     Cl.clima_kpa(i) = 2696 - 829.7*cos((2*pi/365)*Cl.tiempos(i)) + ...
        1718.8*sin((2*pi/365)*Cl.tiempos(i));
343 end
344
345 end
346
347 function K = rigidez(T,D_x,D_y)
348 %funcion para crear la matriz de rigidez
349 %valores predeterminados
350 if nargin == 2
351     D_y = D_x;
352 elseif nargin<2
353     D_x = .001;%cm2/s
354     D_y = .001;%cm2/s
355 end
356
357 %creacion de la matriz K
358 K = zeros(length(T.grados),length(T.grados));
359 D = [D_x 0; 0 D_y];
360
361 for e = 1:T.Nt
362
363     %para el nodo i
364     Xi = T.Nodos(T.Elementos(e,1),1);
365     Yi = T.Nodos(T.Elementos(e,1),2);
366
367     %para el nodo j
368     Xj = T.Nodos(T.Elementos(e,2),1);
369     Yj = T.Nodos(T.Elementos(e,2),2);
370
371     %para el nodo k
372     Xk = T.Nodos(T.Elementos(e,3),1);
373     Yk = T.Nodos(T.Elementos(e,3),2);

```

```

374
375     %elementos de la matriz
376     bi = Yj - Yk;
377     bj = Yk - Yi;
378     bk = Yi - Yj;
379
380     ci = -(Xj - Xk);
381     cj = -(Xk - Xi);
382     ck = -(Xi - Xj);
383
384     %area del elemento
385     Area = AreaT(Xi,Yi,Xj,Yj,Xk,Yk);
386
387     %matriz B
388     B = [bi bj bk; ci cj ck]*(1/(2*Area));
389
390     %matriz local de rigidez
391     kl = (B')*D*(B)*Area;
392
393     %armado de la matriz de rigidez global
394     for n = 1:3
395         for m = 1:3
396             K(T.grados(T.Elementos(e,n)),T.grados(T.Elementos(e,m))) = ...
                 K(T.grados(T.Elementos(e,n)),T.grados(T.Elementos(e,m))) ...
                 + kl(n,m);
397         end
398     end
399
400 end
401 end
402
403 function A = AreaT(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
404 %funcion para el area de un triangulo
405 A = (1/2)*abs((x1*y2+x2*y3+x3*y1-x1*y3-x2*y1-x3*y2));
406
407 end
408 %funcion utilizada en rigidez
409
410 function C = Capacitancia(T,Rho_d,c)
411 %funcion para crear la matriz de capacitancia
412
413 %creacion de la matriz C
414 C = zeros(length(T.grados),length(T.grados));
415

```



```

416 for e = 1:T.Nt
417
418     %para el nodo i
419     Xi = T.Nodos(T.Elementos(e,1),1);
420     Yi = T.Nodos(T.Elementos(e,1),2);
421
422     %para el nodo j
423     Xj = T.Nodos(T.Elementos(e,2),1);
424     Yj = T.Nodos(T.Elementos(e,2),2);
425
426     %para el nodo k
427     Xk = T.Nodos(T.Elementos(e,3),1);
428     Yk = T.Nodos(T.Elementos(e,3),2);
429
430     %area del elemento
431     Area = AreaT(Xi,Yi,Xj,Yj,Xk,Yk);
432
433     %lamda (donde c es la humedad caracteristica, pendiente de la curva
434     %caracteristica).
435     R = (Area*c*Rho_d)/12;
436
437     %matriz B
438     B = [2 1 1;1 2 1; 1 1 2]*R;
439
440     %armado de la matriz de capacitancia global
441     for n = 1:3
442         for m = 1:3
443             C(T.grados(T.Elementos(e,n)),T.grados(T.Elementos(e,m))) ...
444                 = ...
445                 C(T.grados(T.Elementos(e,n)),T.grados(T.Elementos(e,m))) ...
446                 + B(n,m);
447         end
448     end
449
450 function Dist_inicio = Distribucion_inicial(T,m0)
451
452 B = Ajuste_dist_en_m0(m0);
453
454 y = 0:T.dy:T.l_y;
455
456 Dist_inicio = zeros(T.Nv,1);

```

```

457
458 Dist1 = B.B*exp(B.a*y);
459
460 q1 = 1;
461 q2 = 1;
462
463 for w = 1:T.n_y + 1
464     for a = 1:T.n_x + 1
465         Dist_inicio(q1,1) = Dist1(q2);
466         q1 = q1 + 1;
467     end
468     q2 = q2 + 1;
469 end
470
471 end
472
473 function B = Ajuste_dist_en_m0(m0)
474
475 %Esta es la base de datos experimentales
476 Datos_experimentales = [1352 6001 105 3451 2853 2484 2193 2231 3263 ...
477     4082 14147 45065 48508 49736;
478 150 1010 2269 2825 2657 2040 2196 2363 2281 2228 14731 14331 11125 ...
479     25146;
480 2133 1002 1858 2935 3266 2964 2687 3127 2964 4564 7788 23535 30150 ...
481     18988;
482 229 3978 4597 3914 2297 2135 1759 1675 4750 14554 10683 19491 33778 ...
483     48947;
484 229 3978 4597 3914 2297 2135 1759 1675 4750 14554 10683 19491 33778 ...
485     48947;
486 83 257 423 2688 3396 3208 3184 2825 3396 4411 9097 25631 34655 32579;
487 211 289 594 2140 3133 3216 3268 2917 4057 12564 10417 14289 24960 ...
488     35498;
489 153 365 511 3020 3623 3892 3131 3143 3148 5252 9724 23191 23191 50739;
490 125 479 1153 3078 3536 3252 3131 3143 3152 3439 7204 32739 39482 24218;
491 218 1347 2155 3145 3216 3188 2943 2530 2977 4049 44002 53690 54195 ...
492     42687;
493 550 1024 1538 2007 2342 2360 3369 2728 4466 4407 30641 37284 28595 ...
494     55801;
495 550 1024 1538 2007 2342 2360 3369 2728 4466 4407 30641 37284 28595 ...
496     55801];
497
498
499 %Profundidades a las que se tomaron las distintas medidas en campo
500 x = [0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650];
501 %Datos seleccionados segun el mes inicial

```

```

492 y = Datos_experimentales(m0,:);
493 n = length(y);
494
495 %Ajuste de minimos cuadrados para una funcion exponencial, si se ...
    tienen datos con una distinta
496 %tendencia es necesario cambiar el tipo de ajuste.
497 X2 = x.^2;
498 lnY = log(y);
499 XlnY = x.*lnY;
500
501 B.a = (n*sum(XlnY) - sum(x)*sum(lnY))/(n*sum(X2)-(sum(x))^2);
502
503 B.lnB = (sum(X2)*sum(lnY) - sum(XlnY)*sum(x))/(n*sum(X2) - (sum(x))^2);
504
505 B.B = exp(B.lnB);
506
507
508 end
509
510 function fl = Fuente_fecha(Ft,Cl)
511 %Funcion para identificar tiempo de activacion y desactivacion de ...
    la fuente
512 for d_an = 1 : 730
513     if Ft.Af == 3
514         if Cl.fecha(d_an,1) == Ft.ma0 && Cl.fecha(d_an,2) == Ft.da0 ...
            && d_an > 365
515             fl.dia_inicial = d_an;
516         end
517     else
518         if Cl.fecha(d_an,1) == Ft.ma0 && Cl.fecha(d_an,2) == Ft.da0 ...
            && d_an < 366
519             fl.dia_inicial = d_an;
520         end
521     end
522     if Ft.ma0 >= Ft.maf
523         if d_an > 365 && Cl.fecha(d_an,1) == Ft.maf && ...
            Cl.fecha(d_an,2) == Ft.daf
524             fl.dia_final = d_an;
525         end
526     else
527         if Ft.Af == 2 || Ft.Af == 3
528             if Cl.fecha(d_an,1) == Ft.maf && Cl.fecha(d_an,2) == ...
                Ft.daf && d_an > 365
529                 fl.dia_final = d_an;

```

```

530         end
531     else
532         if Cl.fecha(d_an,1) == Ft.maf && Cl.fecha(d_an,2) == ...
            Ft.daf && d_an ≤ 365
533             fl.dia_final = d_an;
534         end
535     end
536 end
537
538 end
539
540 end
541
542 function F = Fuente_coord(Ft,T,F)
543 %Funcion para identificar punto de activacion y desactivacion de la ...
    fuente
544
545 N = T.Nodos;
546 Ax = T.l_x/T.n_x;
547 Ay = T.l_y/T.n_y;
548
549 %Caso en el que la fuente esta ubicada en un nodo
550 if mod(Ft.x_f,Ax) == 0 && mod(Ft.y_f,Ay) == 0
551     for i = 1:T.Nv
552         if N(i,1) == Ft.x_f && N(i,2) == Ft.y_f
553             F(T.grados(i,1), :) = 1;
554         end
555     end
556 else
557     %Caso en el que la fuente esta ubicada en un eje sin ser nodo
558     if mod(Ft.x_f,Ax) == 0 || mod(Ft.y_f,Ay) == 0
559         if mod(Ft.x_f,Ax) == 0
560
561             for i = 1:T.Nv
562                 if N(i,1) == Ft.x_f && N(i,2) < Ft.y_f && N(i + ...
                    T.n_x + 1,2) > Ft.y_f
563                     F(T.grados(i,1), :) = 1;
564                     F(T.grados(i + T.n_x + 1,1), :) = 1;
565                 end
566             end
567
568         else
569             for i = 1:T.Nv

```

```

570         if N(i,1) < Ft.x_f && N(i + 1,1) > Ft.x_f && N(i,2) ...
           == Ft.y_f
571             F(T.grados(i,1), :) = 1;
572             F(T.grados(i + 1,1), :) = 1;
573         end
574     end
575 end
576 %Caso en el que la fuente esta ubicada dentro de un elemento ...
    triangular
577 else
578     for i = 1:T.Nv
579         if N(i,1) < Ft.x_f && N(i + 1,1) > Ft.x_f && N(i,2) < ...
           Ft.y_f && N(i + T.n_x + 1,2) > Ft.y_f
580
581             At0 = AreaT(N(i,1),N(i,2),N(i + 1,1),N(i + 1,2),N(i ...
                + T.n_x + 2,1),N(i + T.n_x + 2,2));
582             At1 = AreaT(N(i,1),N(i,2),N(i + 1,1),N(i + ...
                1,2),Ft.x_f,Ft.y_f);
583             At2 = AreaT(N(i + 1,1),N(i + 1,2),N(i + T.n_x + ...
                2,1),N(i + T.n_x + 2,2),Ft.x_f,Ft.y_f);
584             At3 = AreaT(N(i,1),N(i,2),N(i + T.n_x + 2,1),N(i + ...
                T.n_x + 2,2),Ft.x_f,Ft.y_f);
585             At = At1 + At2 + At3;
586
587             if At0 == At
588                 %La fuente esta dentro del elemento ...
                    i,i+1,i+T.n_x + 2
589                 F(T.grados(i,1), :) = 1;
590                 F(T.grados(i + 1,1), :) = 1;
591                 F(T.grados(i + T.n_x + 2, :), 1) = 1;
592             else
593                 %La fuente esta dentro del elemento i,i+T.n_x + ...
                    1,i+T.n_x + 2
594                 F(T.grados(i,1), :) = 1;
595                 F(T.grados(i + T.n_x + 1,1), :) = 1;
596                 F(T.grados(i + T.n_x + 2,1), :) = 1;
597
598             end
599         end
600     end
601
602 end
603 end
604

```

```

605 end
606
607 function AR = graficar1(U,T,nt,I)
608 % Grafica y arregla los resultados de succion (U)
609
610 %Arreglo
611 AR = zeros(T.n_y + 1, T.n_x + 1,nt);
612 [X,Y] = meshgrid(0:T.dx:T.l_x,T.l_y:-T.dy:0);
613
614 for j = 1:nt
615     Q = reshape(U(:,j),T.n_x + 1,T.n_y + 1);
616     Aux_Q = Q';
617     R = Q';
618
619     for e =1:T.n_y + 1
620         if mod(e,2) == 0
621             R(e,:) = Aux_Q(e,T.n_x +1:-1:1);
622         end
623     end
624
625     AR(:, :, j) = R;
626
627 end
628
629
630 figure(1)
631 subplot(2,4,1)
632 surf(X,Y,AR(:, :, 1), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
633 colormap
634 view(2);
635 drawnow;
636 colorbar
637 caxis([0 max(max(U))]);
638 title('Distribucion inicial de la succion');
639
640 subplot(2,4,2)
641 C1 = floor((nt)/8);
642 Cx1 = floor((I.inc_dias_rd*nt)/8);
643 surf(X,Y,AR(:, :, C1), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
644 view(2);
645 drawnow;
646 colorbar
647 caxis([0 max(max(U))]);
648 title(['Distribucion despues de ', num2str(Cx1), ' dias']);

```

```

649
650 subplot(2,4,3)
651 C2 = floor(2*nt/8);
652 Cx2 = floor(2*(I.inc_dias_rd*nt)/8);
653 surf(X,Y,AR(:, :, C2), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
654 view(2);
655 drawnow;
656 colorbar
657 caxis([0 max(max(U))]);
658 title(['Distribucion despues de ', num2str(Cx2), ' dias']);
659
660 subplot(2,4,4)
661 C3 = floor(3*nt/8);
662 Cx3 = floor(3*(I.inc_dias_rd*nt)/8);
663 surf(X,Y,AR(:, :, C3), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
664 view(2);
665 drawnow;
666 colorbar
667 caxis([0 max(max(U))]);
668 title(['Distribucion despues de ', num2str(Cx3), ' dias']);
669
670 subplot(2,4,5)
671 C4 = floor(4*nt/8);
672 Cx4 = floor(4*(I.inc_dias_rd*nt)/8);
673 surf(X,Y,AR(:, :, C4), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
674 view(2);
675 drawnow;
676 colorbar
677 caxis([0 max(max(U))]);
678 title(['Distribucion despues de ', num2str(Cx4), ' dias']);
679
680 subplot(2,4,6)
681 C5 = floor(5*nt/8);
682 Cx5 = floor(5*(I.inc_dias_rd*nt)/8);
683 surf(X,Y,AR(:, :, C5), 'FaceColor', 'interp', 'FaceLighting', 'gouraud')
684 view(2);
685 drawnow;
686 colorbar
687 caxis([0 max(max(U))]);
688 title(['Distribucion despues de ', num2str(Cx5), ' dias']);
689
690 subplot(2,4,7)
691 C6 = floor(6*nt/8);
692 Cx6 = floor(6*(I.inc_dias_rd*nt)/8);

```

```
693 surf(X,Y,AR(:,:,C6),'FaceColor','interp','FaceLighting','gouraud')
694 view(2);
695 drawnow;
696 colorbar
697 caxis([0 max(max(U))]);
698 title(['Distribucion despues de ',num2str(Cx6),' dias']);
699
700 subplot(2,4,8)
701 surf(X,Y,AR(:,:,nt),'FaceColor','interp','FaceLighting','gouraud')
702 view(2);
703 drawnow;
704 colorbar
705 caxis([0 max(max(U))]);
706 title(['Distribucion despues de ',num2str(I.inc_dias_rd*nt),' dias']);
707
708 end
```