Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

"Algunos libros de texto de Álgebra en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1869 y 1897"

Opción de titulación
Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Stephanie Christell Hernández Muñoz

Dirigido por:
M. en C. Roberto Torres Hernández

M. en C. Roberto Torres Hernández
Presidente

M.D.M. Carmen Sosa Garza
Secretario

M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán
Vocal

M. en C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez
Suplente

Centro Universitario
Querétaro, Qro., Junio 2016

A mi familia y a mi esposo

Índice general

Algunos libros de texto de Álgebra en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1869 y 1897

Introducción

En este trabajo de tesis abordaremos el análisis de algunos libros de texto de Álgebra utilizados en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) durante el periodo comprendido entre los años 1869 y 1897. Este análisis tiene un enfoque matemático con el objetivo de iniciar un estudio para intentar conocer la evolución de la enseñanza del Álgebra en México.

Con base en lo hasta ahora investigado, hemos encontrado que no existen muchos trabajos que estén dedicados a la realización de este tipo de análisis, sino que hay trabajos destinados a la exploración de la educación matemática en años pasados, en distintas ramas de ésta. Uno de ellos es *“La investigación en historia de la educación matemática”*, de María Teresa González Astudillo, publicado en España en 2009. Éste, en particular, habla sobre el concepto de límite en los libros de texto de secundaria en España, de 1934 hasta el año 2000.

Por otro lado, para el caso de las obras de texto, de este tipo, utilizados en México, tenemos *“La enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: los primeros años (1868-1896)”*, de Miguel Núñez, teniendo su primera edición publicada en México en 2004. Éste contiene la investigación que el autor realizó sobre la enseñanza de las Matemáticas, de una manera general, en aquella época. Se encuentra, en el capítulo 8: Matemáticas y Física: programas y textos (1868-1896), amplia información de los libros de texto que los estudiantes de la ENP utilizaban. Claramente se hace un énfasis a cuáles eran elegidos para usarse en las cátedras de Matemáticas.

Con ánimo de continuar con el trabajo que Miguel Núñez realizó, se propone esta tesis como complemento a su estudio histórico, ya que él no profundiza en cada una de las obras de texto que menciona, y aunque aborda de manera general sus contenidos, surge la necesidad de explorarlos desde el punto de vista matemático.

Ahora bien, el realizar este análisis tiene como aporte el apreciar la evolución de dichos libros en esta rama de las Matemáticas, y con ello resaltar el papel tan importante que tienen en la historia de éstas. Además, es útil en el ámbito educativo, ya que se tendrá una concepción de lo que en esos años aprendía un alumno preparatoriano y lo que ahora aprende, así como lo que se consideraba esencial para su formación.

Antes de exponer el contenido principal de este trabajo, comenzaremos por explorar el entorno social en esos años, así como la presentación de la ENP. Esto con el objetivo de saber qué impacto tenía la situación en el país, en los métodos de estudio dentro de las Matemáticas.

Después del triunfo de los liberales sobre los conservadores concluyendo así con la guerra de independencia, se vivió un ambiente de inestabilidad en el sistema político, ya que se pasaba del sistema conservador al liberal sin obtener una estabilidad ni poder impulsar el desarrollo en México, así por tanto, se notó este problema de estancamiento en el tema de la educación, debido a que estaba en manos de la religión católica y se tenía muy contralado el aprendizaje.

La educación se dividía en dos etapas: enseñanza elemental y secundaria. En esta última se ubicaban los estudios preparatorios. Las principales escuelas de ésta eran los colegios de San Idelfonso y de Minería, y la Escuela de Medicina. Resaltemos que en los estudios preparatorios ya existían algunos contenidos de Matemáticas.

En el Colegio de Minería, el cual se estableció en la ciudad de México en 1792, las carreras escolares eran de 3 años en los estudios preparatorios y desde los primeros se impartían cátedras de Matemáticas. Por ejemplo, en el segundo año se impartía la materia de Aritmética. Los estudios preparatorios no tenían un buen control sobre el sistema que se llevaba con ellos, pues en el plan de estudios de 1858 no se reflejaba el tiempo que duraban.

En 1864, cuando cambio de nombre a la Escuela Imperial de Minas, no se establecieron estudios preparatorios en el plan de estudios, pero se sabe que éste tenía una duración de siete años. Durante sus primeros tres se contaba con asignaturas de Matemáticas. A pesar de que en el Colegio de Minería se estudiaban Ciencias Naturales, Física y Matemáticas, la religión no dejó de tener influencia, pues parte del tiempo que pasaban los alumnos en el ámbito escolar tenían que dedicarlo a una clase de religión como cualquier otra asignatura. Posteriormente, estas asignaturas fueron eliminadas del plan de estudios y se señaló en 1867 que serían estudiadas dentro de los estudios de la ENP, dejando así carreras más cortas, en referencia al tiempo de duración. Curiosamente, las materias removidas correspondían a lo que anteriormente se señalaba como estudios preparatorios.

Dar cátedra se complicaba mucho con referencia a las asignaturas de las Matemáticas debido a que la mayoría de los autores eran extranjeros y en su mayoría franceses, a causa de su alto conocimiento sobre los temas en la materia en esos tiempos. Con lo anterior, intentar estudiar alguna de dicas asignaturas contenía un rango mayor de dificultad con referencia a las demás puesto que se debía que tener un conocimiento previo de la lengua francesa. Por consiguiente, era aún más complicado para los maestros, ya que debían preparar sus respectivas clases y dictados ya traducidos y comprendidos para realizar una exposición del tema adecuada.

En el Colegio de Minería las clases de Matemáticas contenían más temas y se presentaban con mayor profundidad, en comparación de las impartidas en San Idelfonso y en la Escuela de Medicina. Era común que en las clases los profesores recurrieran al dictado de apuntes y, de manera posterior, a la explicación de éstos. La lectura y explicación de los libros correspondientes tuvo que haber sido otra técnica empleada por los maestros de la época.

En junio de 1867, en la historia de nuestro país, se ratifica el triunfo de los liberales, con Benito Juárez al frente, sobre los conservadores que apoyaban al emperador Maximiliano de Habsburgo. Con el fusilamiento de Maximiliano y el triunfo del general Porfirio Díaz sobre las fuerzas conservadoras que se encontraban en la Ciudad de México, el movimiento Liberal inició la restauración de la República. Los liberales tenían la posibilidad de implementar sus propuestas hacia el progreso y modernización del país, pondrían en vigor las Leyes de Reforma, con sus efectos políticos y económicos, además de la laicización de la educación pública, con el cambio por consecuencia del desarrollo cultural de gran parte de la población.

Entre esas propuestas de cambio se encontraban los comentarios ya realizados por Gabino Barreda, discípulo del importante positivista Augusto Comte, sobre la educación escolástica en el país. Consideraba que ante la diversidad de creencias políticas y religiosas que había en el país, que reinaba una completa anarquía en los espíritus e ideas, se debían aplicar las doctrinas y principios de la filosofía positivista.

Debido a sus ideas y entusiasmo por el cambio, fue invitado por Benito Juárez a colaborar en la reforma educativa que pretendía el recién establecido gobierno liberal, en el año de 1867. Gabino Barreda, junto con una comisión seleccionada para realizar dicha reforma, logró como resultado la “Ley Orgánica de la Instrucción Pública en el Distrito Federal” en el año de 1867. Esta ley estaba centrada en la enseñanza Secundaria y Superior, aunque su validez estaba limitada sólo al territorio del Distrito Federal y a los establecimientos educativos nacionales, y cabe señalar que cuando la Ley hacía referencia a estudios preparatorios se refería a la ENP. Lo que volvía atractiva y novedosa a esta Ley era la uniformidad en los estudios preparatorios y en la filosofía que guió a su plan de estudio. Esto trajo como consecuencia que, en el año de 1868, los estudios preparatorios fueran iguales, enseñados en una misma escuela, que eran para todos los estudiantes que luego estudiarían una carrera profesional, y la filosofía que guió al nuevo plan de estudios preparatorios fue el positivismo de Augusto Comte, impulsado por Gabino Barreda en la comisión del presidente Juárez.

No se abundará en la filosofía del positivismo de Comte, sólo se resalta que, para él, las Matemáticas constituían el instrumento más poderoso que puede emplear el espíritu humano en la investigación de las leyes de los fenómenos naturales, y que había que mirarlas como la base fundamental de la filosofía natural. De manera concreta, consideraba base fundamental a las Matemáticas para toda educación científica racional.

Esto nos da un primer acercamiento de cómo surgió la ideología y el plan de estudios de la ENP. En referencia a los recursos materiales y económicos, se le otorgó como sede las instalaciones que ocupaba el colegio de San Idelfonso, así mismo de su patrimonio que comprendía fincas y capitales. Para el financiamiento de sus actividades contaba en esencia de dos fuentes, la Tesorería General, que pertenecía al gobierno federal, y la Administración del Fondo de la Instrucción Pública, ésta creada por la ley de 1867.

El 17 de Diciembre de 1867, Gabino Barreda recibió el título de director provisional de la ENP, y como resultado de la acertada decisión de su nombramiento, quedaron habilitadas las antiguas instalaciones de San Idelfonso, recibiendo así cerca de 800 alumnos, de los cuales una fracción serían alumnos internos, aunque con improvisaciones. Todo lo anterior quedó preparado para la apertura en los primeros días del mes de febrero de 1868.

Es importante indicar que el reclutamiento de profesores no fue discriminatorio con los docentes que tenían ideologías diferentes al positivismo y al partido en el gobierno, pues el requisito primordial que Barreda buscó en los docentes fue que tuvieran fama de honorables y capacitados en las disciplinas que iban a impartir, y sobre todo, el afecto a la institución y a la juventud que tendría que quedar en sus manos. Además de la selección de profesores, también se encargó de las adecuaciones del edificio y del buen funcionamiento de los trámites de inscripción de los alumnos.

Durante sus primeros años, se llevó acabo un largo proceso de adaptación de las instalaciones, ya que las estructuras de San Idelfonso contaban con decoraciones eclesiásticas, además de que estaban muy deterioradas y se tuvieron que realizar diversas modificaciones y remodelaciones, también debido al incremento en las inscripciones anuales. Para Gabino Barreda no fue sencillo lograr todo esto, porque hubo momentos en los que los fondos destinados a la Escuela no eran liberados de manera oportuna provocando el retraso en el mantenimiento de las instalaciones, aunque a pesar de ello, él continuó con el desarrollo de la ENP, siendo un gran ejemplo para sus sucesores.

Con referencia al plan de estudios, el primero señalado por el reglamento de la ley orgánica de la instrucción pública de 1867, sólo duro dos años. En éste los estudios preparatorios se repartían en cinco años escolares, con excepción a los futuros ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales, que solo cursarían cuatro. Existían cuatro listados de cátedras a cursar, cuatro carreras, para los futuros abogados, para los futuros médicos y farmacéuticos, otra para los futuros agricultores y veterinarios, y una más para los futuros ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales. Existían diferencias mínimas dependiendo de la línea de formación, pero siempre se continuó con el enfoque positivista que se le quiso dar al inicio. Un ejemplo de esto son las cátedras de Física y Matemáticas que fueron obligatorias para todos los alumnos. Debido a falta de recursos, algunas materias no se abordaron desde el inicio de las actividades de la ENP, sino que tardaron hasta el siguiente año para impartirse. Después de este plan de estudio se realizaron diversas modificaciones y adecuaciones pero nunca se dejó de lado el enfoque positivista en la presentación de las cátedras, era uniforme para todos los alumnos, independientemente de la carrera que siguieran de manera posterior.

Dentro del primer año de preparatoria se impartían: el primer curso de Matemáticas, compuesto de Aritmética, Álgebra y Geometría plana y entre otras materias. En el segundo año, se impartía el segundo curso de Matemáticas; Geometría de los Volúmenes, y ambas Trigonometrías y entre otras. En tercer año de preparatoria el tercer curso de Matemáticas, compuesto de Geometría analítica y nociones de Cálculo trascendente (infinitesimal), Física y otras materias.

A continuación, se muestran los planes de estudios que establecidos de 1868 a 1896.

Plan de estudios de la ENP
(1868-1869)

Cuadro 1. Plan de estudio de la ENP. 1867

AÑO	ABOGADOS	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS	AGRICULTORES Y VETERINARIOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES Y BENEFICIADORES DE METALES
Primero	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía
Segundo	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Geografía Inglés I
Tercero	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Cronología e Historia Literatura Teneduría de libros Inglés II Alemán I
Cuarto	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia natural Lógica Ideología Moral Alemán II Gramática general
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Historia de la metafísica Literatura	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	

Además, Dibujo en sus diversas ramas: figura, paisaje y lineal. Di...

Plan de estudios de la ENP
(1870-1896)

Cuadro 2. Plan de estudio de la ENP. 1869

AÑO	ABOGADOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES YBENEFICIADORES DE METALES	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS, AGRICULTORES Y VETERINARIOS
Primero	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés
Segundo	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés
Tercero	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés
Cuarto	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I	Química Geografía Historia general y del país Cronología Alemán Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Alemán Literatura Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura

En este trabajo de tesis se analizarán algunos de los libros usados para la materia de Álgebra, los cuales son *Curso elemental de Matemáticas* de Joaquín de Mier y Terán y Francisco M. de Chavero, el *Tratado de Álgebra elemental* de Manuel María Contreras y el *Tratado elemental de Álgebra* de José Joaqu*ín Terrazas.* Además de que se abordará un poco acerca de dos que se usaron en los Colegios previos a la ENP, y que pudieron ser la base de la formación de los libros antes mencionados. Éstos son *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando* de Benito Bails y *Tratado elemental de matemáticas* de José Mariano Vallejo.

Debido a que en cada capítulo se hacen diversas citas de los libros, se pide al lector no juzgar por la gramática y ortografía, ya que se procuró respetarlas según la de cada uno de los libros a analizar y otros recursos usados en esta tesis. Las letras cursivas indican todo aquello que fue copiado, de manera literal, de las fuentes históricas primarias. Además, debido a que gran parte del material usado para la realización de esta tesis no se encontraba en excelentes condiciones físicas, se pide no juzgar por las fotografías que se muestran en este trabajo, ya que muchas de ellas no tienen una buena calidad.

CAPÍTULO I

Antecedentes de los libros de texto de Álgebra de la ENP

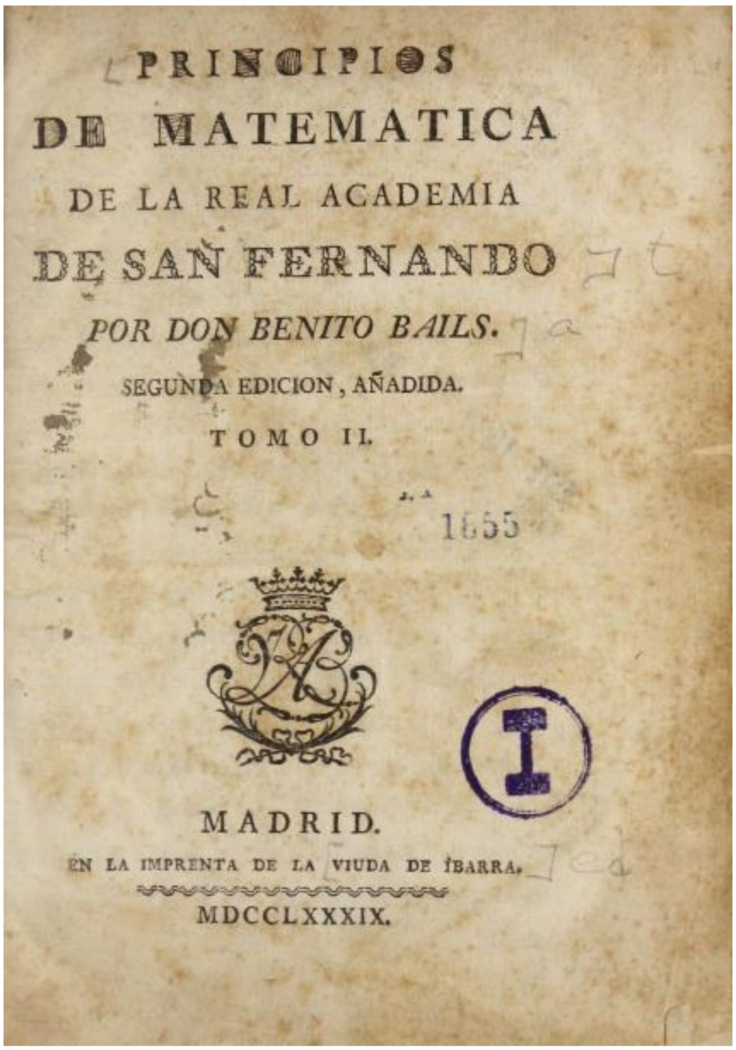
Antecedentes de los libros de texto de Álgebra de la ENP

Como ya se mencionó, gran parte de los libros usados en los distintos Colegios previos a la ENP eran de autores extranjeros. Entre ellos encontramos las siguientes dos obras: *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando* de Benito Bails y *Tratado elemental de matemáticas* de José Mariano Vallejo. Se decidió abordar información sobre éstos para tratar de contrastar similitudes y diferencias entre ellos y los posteriormente usados en la ENP. Esto con el fin de comprender los contenidos que se consideraban esenciales en las cátedras de Álgebra.

A continuación se describe el contenido de cada una de las estas obras, así como otras cuestiones a resaltar.

Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando

Autor: Benito Bails
Edición: Segunda
Tomo: II
Lugar y año de publicación: Madrid, 1789



PRINCIPIOS
DE MATEMATICA
DE LA REAL ACADEMIA
DE SAN FERNANDO
POR DON BENITO BAILS.
SEGUNDA EDICION, AÑADIDA.
TOMO II.

1655

MADRID.
EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.
MDCCLXXXIX.

Figura 1.1. Portada del libro *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando*

Biografía del autor

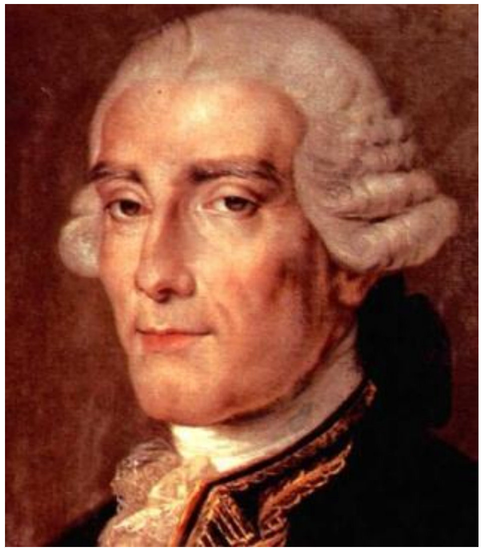


Figura 1.2. Benito Bails

Benito Bails nació en Barcelona en 1731, perteneciendo a una familia de pequeña burguesía. En Perpiñan, comenzó estudiando Gramática y Filosofía. Posteriormente se formó con los jesuitas en la Universidad de Toulouse, donde estudió Matemáticas y Teología. En París, trabajó como secretario del embajador español, Jaime Masones de Lima, lo que le ayudó a perfeccionar sus conocimientos de italiano, inglés, alemán, castellano y francés.

Cuando regresó a Madrid, en 1765 entró como supernumerario en la Real Academia de la Historia y después, en 1771, accedió como numerario a la Real Academia Española. También fue miembro de la Academia de Ciencias y Artes de la ciudad de Barcelona, aunque la Academia más ligada a la actividad de Bails fue la de Bellas Artes de San Fernando. En 1768 esta institución decidió crear la cátedra de Matemáticas, dirigida a los arquitectos, y Benito Bails fue nombrado catedrático de esta última, convirtiéndose, en 1768, el Director de esta clase. Durante casi treinta años desempeñó su magisterio docente en esta institución.

Su dedicación a la docencia lo llevó a realizar diversas obras en favor de los alumnos de diversas instituciones como los de la Real Academia de San Fernando. Una de ellas es la titulada Los Elementos de Las Matemáticas, la cual comprendía un total de once volúmenes. Esta obra se comenzó a publicar en 1779 y da a conocer el estado en que se encuentran las ciencias Matemáticas modernas dentro de España, además de que sirvió como una manera de introducir al país, las materias de Analítica y Calculo Infinitesimal. Este texto enciclopédico fue de gran importancia pues con él se formaron los matemáticos del siglo XVIII.

Aunque su primordial conocimiento lo reflejaba con las matemáticas, dedicó su atención a otras disciplinas, como la Música y la Arquitectura. En referencia a tales disciplinas, también realizó publicaciones, como por ejemplo “Lecciones de Clave” y “Diccionario de Arquitectura”.

Algo muy interesante es que, independientemente de su formación, se ocupó de otras cosas muy diferentes a lo que era su línea de formación, como por ejemplo, entró en el tema de los enterramientos de personas y de la opción de desterrarlas de las iglesias. Esto debido a que era adepto a construir cementerios extramuros de las ciudades y, no quedándose tranquilo, también elaboró una recopilación de textos encaminados entorno a este tema, lo que demostró sus capacidades y la versatilidad de su conocimiento.

Se podría decir que el Señor Bails fue una persona demasiado activa, pero tenía la peculiaridad de no gozar con una perfecta salud física, ya que desde 1772 tuvo problemas de salud, pues sufrió una parálisis que le afectó a la mano derecha y a las piernas. La enfermedad avanzó, paralizando sus extremidades inferiores y obligándole a guardar cama durante más de tres años. A pesar de ello, aprovechó para trabajar intensamente en su tratado de Matemáticas. También tuvo problemas con la Inquisición. En los años sesenta había sido acusado, sin consecuencias, de tener libros prohibidos.

En 1791, dentro del clima de represión vivido a consecuencia de la Revolución Francesa, Bails fue acusado de ateísmo y materialismo. Después de unos meses en las cárceles de la Inquisición, siendo condenado a la pena de destierro de la corte, fue recluido en un convento y liberado en consideración a su mal estado de salud, por intercesión del propio inquisidor general, Agustín Rubín de Ceballos, aunque sí fue desterrado de la ciudad de Granada. Después de un tiempo, en 1793 fue indultado, tras varias solicitudes de la Real Academia de San Fernando. Posteriormente regresó a Madrid pero ya con su salud mermada. En el año 1796 sufrió un nuevo avance de su enfermedad y lo dejó privado de razón. Murió el 12 de julio de 1797, a los 66 años de edad.

Contenido del libro

La obra *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando* está conformada por, aproximadamente, 464 páginas. Abarca temas de Álgebra, Geometría Euclidiana y Analítica, Trigonometría y Cálculo Diferencial e Integral. Se presenta a continuación el temario del contenido referente a la parte de Álgebra, que es lo que nos interesa. Éste se extiende desde la página 1 a la 197.

Principios de Algebra
Signos de que usa el Algebra
Adicion de las cantidades algebráicas
Sustraccion de las cantidades algebráicas
Multiplicacion de las cantidades algebráicas
Division de las cantidades algebráicas
De los quebrados literales
De las potencias y raices de las cantidades literales
De las potencias y raices de los monomios
De las cantidades imaginarias
De las potencias de los polinomios
De las equaciones
De las equaciones de primer grado
Equaciones determinadas de primer grado
Advertencias acerca de la resolucion de las cuestiones
Resolución de algunas cuestiones determinadas de primer grado
Cuestiones indeterminadas de primer grado
Método para determinar por medio de dos equaciones tres ó mas incógnitas
De las equaciones de segundo grado
Equaciones determinadas de segundo grado
Cuestiones determinadas de segundo grado
Equaciones indeterminadas de segundo grado
Cuestiones indeterminadas de segundo grado
Principios de la aplicación de Álgebra a la Geometría

Para esta obra se explican más adelante algunas observaciones sobre su contenido, pero antes de presentar la obra *Tratado elemental de Matemáticas (José Mariano Vallejo)*, es importante ver lo que Benito Bails dice sobre el Álgebra en el Prólogo de su libro:

"Por ser el objeto de la Matemática averiguar las propiedades y relaciones de las cantidades, las considera de un modo indeterminado ó general, á fin de cifrar en la expresion de un caso solo una infinidad de casos particulares. El medio mas adequado para lograr su intento es el Algebra, en la qual concurren todas las indeterminaciones conocidas, es á saber, la específica y la numérica; es por consiguiente el Algebra la lengua mas general que conocemos… "

Bails concibe al Álgebra como hasta ahora se hace, la rama de las Matemáticas que estudia los números y sus propiedades de forma general.

Tratado elemental de matemáticas

Autor: José Mariano Vallejo.
Edición: Tercera
Tomo: I
Lugar y fecha de publicación: Barcelona, 1821

TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS
ESCRITO DE ÓRDEN DE S.M.
PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS
DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID
Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO
POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,
CATEDRÁTICO que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario; y en la actualidad, oficial Gefe de Seccion de la Secretaría de la Gobernacion de la Península, é individuo de varios establecimientos científicos.
TERCERA EDICION
corregida y considerablemente aumentada.
TOMO I. PARTE PRIMERA
Que contiene la Aritmética y Álgebra.
BARCELONA.
Imprenta del Gobierno político superior
AÑO DE 1821.

Figura 1.3. Portada del libro *Tratado elemental de Matemáticas*

Biografía del autor

Figura 1.4. José Mariano Vallejo
y Ortega

José Mariano Vallejo y Ortega nació en Granada, España el 30 de mayo de 1779 y se podría decir que es uno de los escasos matemáticos españoles de carrera notoria durante las primeras décadas del siglo XIX. Estudió en la Universidad de Granada. En 1801, Vallejo fue profesor sustituto de geometría práctica en la Real Academia de San Fernando y colaboró en diversos trabajos técnicos por encargo de dicha institución. Al año siguiente ganó por oposición la cátedra de Matemática y fortificación del Real Seminario de Nobles de Madrid, puesto en el que desarrolló la mayor parte de su obra científica. En 1806, sin tener una extensa formación hacia los grandes matemáticos de aquel entonces, desarrolló algunos aspectos de la misma calidad que éstos, publicando la obra *Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails*, y en 1807, público *Memoria sobre la curvatura de las líneas*.

Durante la guerra de independencia trabajó en los laboratorios del cuerpo de artillería, en la realización, por Orden Real, de un *Tratado elemental de Matemáticas, para uso de los alumnos del Real Seminario de Nobles* publicado en 1813. Consta de cinco volúmenes en los que se expone desde la Aritmética hasta el Cálculo Diferencial e Integral. En este trabajo de tesis se hablará sobre el primer volumen.

En 1819 publicó un libro de título *Compendio de Matemáticas*, cuando ya ocupaba altos cargos en el Ministerio de Gobernación, del que dependía entonces la

enseñanza. Era un texto mucho más breve en el que recopila toda su producción anterior. Este compendio fue usado en el Colegio de Minería en años posteriores.
Cabe resaltar que dentro de la enseñanza de la Matemática vemos otra faceta de Vallejo dedicada a la didáctica infantil que se inicia ya en 1806, cuando publica por primera vez su libro *Aritmética para niños, escrita para uso de las escuelas del Reyno*. Enfocado a este sector de estudiantes, realizó las siguientes publicaciones: *Compendio de mecánica práctica para uso de los niños, artistas, artesanos, con el modo de construir la curva que trazaban las granadas arrojadas por los franceses en el sitio de Cádiz*; *Geometría de niños: para uso de las escuelas normales establecidas en esta Corte con el fin de generalizar el método de leer*, contenido en la teoría de la lectura; *Complemento de la Aritmética de niños: escrita para uso de las escuelas del Reyno*.

Existieron circunstancias históricas que hicieron interrumpir las tareas de Vallejo como catedrático en el Real Seminario de Nobles de Madrid, las cuales le llevaron a participar en los acontecimientos políticos que, frente a la monarquía impuesta por Napoleón, promovían una monarquía nacional y constitucional. Como consecuencia de dichas actividades, Vallejo fue diputado en las Cortes de Cádiz, miembro de la Comisión de Agricultura, también participó en diversas ocasiones en temas económicos. Al revocar Fernando VII la Constitución en mayo de 1814, Vallejo continúo sus actividades científicas, logró el patrocinio del rey para que su Tratado se declarara libro de texto de los centros docentes nacionales y de los territorios de Ultramar. Lamentablemente el 30 de septiembre de 1823, cae el régimen constitucional y comenzó un periodo de represión con afectaciones dirigidas especialmente a los altos cargos del periodo constitucional. Esto trajo como resultado la cesión de los cargos, destierro, prisión, y en algunos casos hasta la muerte, y víctima de aquellas medidas se vio afectado Vallejo, aplicándosele el decreto represivo, quitándole todos los cargos y condenándolo con la pena de destierro de Madrid. Con esto inicia su viaje en busca de un lugar donde asentarse, primero al norte de España y después al exilio por diversos países europeos, terminando asentándose en París, donde enseñó Matemáticas.

En 1832 Vallejo regresó a España, continuó esforzándose en divulgar las nuevas corrientes pedagógicas europeas, promovió la creación de escuelas normales, intervino en la fundación de la Academia de Ciencias y en la del Ateneo de Madrid, de cuya sección de Matemáticas y Física fue presidente. Fue nombrado en 1834 vocal de la Dirección General de Estudios, y cuatro años después se casó con María Giménez Vincent. Debido a su quebrantada salud, solicitó permiso para dejar su puesto para tratarse. Lamentablemente no volvió al servicio del Estado dado, ya que no fue posible conseguir la cura para su mal, muriendo el 4 de marzo de 1846 en Madrid, España.

Contenido del libro

Como ya se mencionó, la obra de Vallejo que fue usada en el Colegio de Minería fue su *Compendio de Matemáticas,* versión que contenía una recopilación de su *Tratado elemental de matemáticas,* y que fue menos extensa para facilitar a los alumnos su manejo. Aquí se presenta este último para apreciar todo su contenido.

El *Tratado elemental de matemáticas* está conformado por, aproximadamente, 458 páginas. Su contenido incluye temas de Aritmética y Álgebra. Se presenta a continuación el temario del contenido referente a la parte de Álgebra. Éste se extiende desde la página 168 a la 399.

En su obra, en la parte introductoria, Vallejo considera al Álgebra no como una rama de la Matemática, si no como una subdivisión de una que sí lo es:

"…se puede decir que las Matemáticas puras no contienen sino dos tratados, á saber, el que tiene por objeto la discreta que se puede llamar Aritmética universal, y se divide en Aritmética propiamente dicha, que trata de la cantidad en cuanto está representada por números, y en Álgebra que trata de las cantidades en general."

Se concluye que, a pesar de que Vallejo tenía una consideración curiosa en cuanto al Álgebra, él coincide con lo que hasta ahora se atribuye en cuanto al objeto de estudio de ésta.

Similitudes y diferencias entre los libros

De acuerdo al contenido de los libros anteriores, podemos ver que el más extenso es el Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo. Esto puede deberse a que la obra de Benito Bails es más antigua que la de Vallejo, y por lo tanto, con el paso del tiempo se amplió dicho contenido.

Algo muy notorio es que tanto una obra como la otra contienen lo esencial del Álgebra, desde su definición y operaciones básicas, así como lo referente a ecuaciones de primer y segundo grado.

A diferencia de *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando (Benito Bails)*, el *Tratado elemental de matemáticas (José Mariano Vallejo)* abarca temas de progresiones aritméticas y geométricas, permutaciones, combinaciones y logaritmos.

Ahora bien, ya se había mencionado que estos libros eran usados en Colegios previos a la ENP. Se podría decir que éstos sirvieron como base para los libros de texto de esta última. En el siguiente capítulo se hablará de éstos y se hará una comparación con la obra de Bails y la de Vallejo para verificar qué tanto contenido abarcan en común las obras de texto de la ENP y las analizadas anteriormente.

CAPÍTULO II

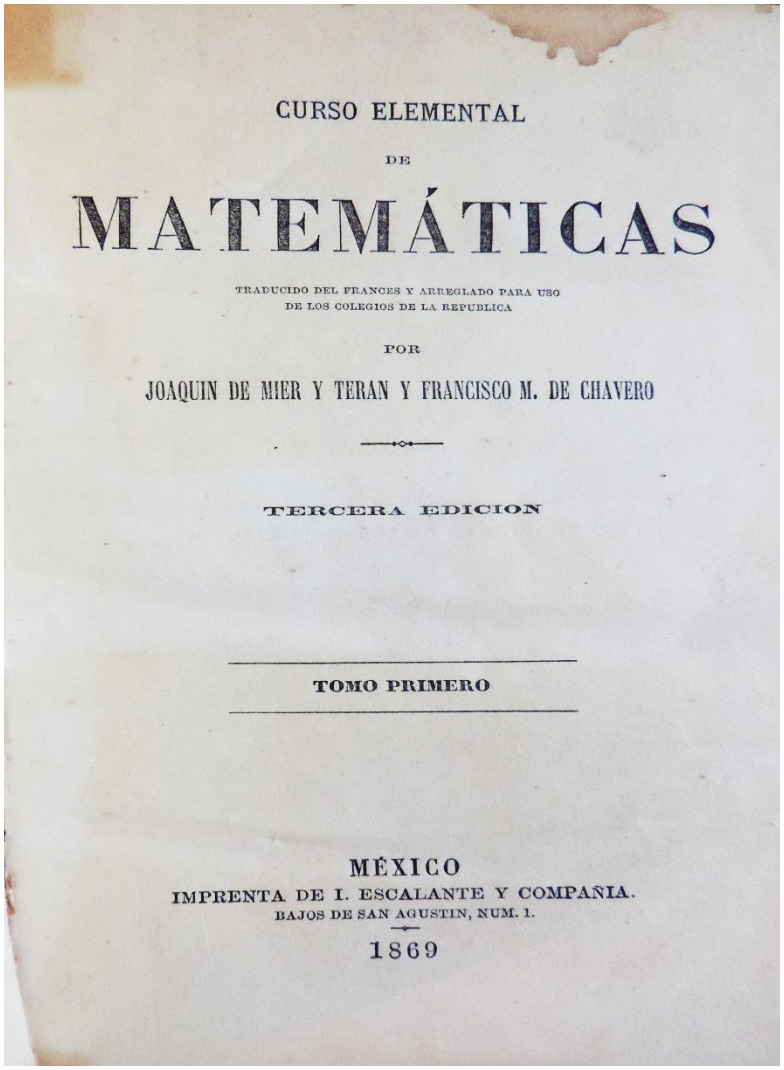
Los libros de texto de Álgebra de la ENP

Los libros de texto de Álgebra de la ENP

Entre los libros de texto de la ENP, durante el periodo comprendido entre 1869 y 1897, se encuentran el *Curso elemental de Matemáticas* de Joaquín de Mier y Terán y Francisco M. de Chavero, el *Tratado de Álgebra elemental* de Manuel María Contreras y el *Tratado elemental de Álgebra* de José Joaqu*ín Terrazas.* En este capítulo estudiaremos de manera más profunda cada uno de éstos, ya que por su relevancia en la ENP, se intenta comprender por qué fueron elegidos para formar parte de las obras de texto en ésta.

Curso elemental de Matemáticas

Autores: Joaquín de Mier y Terán
Francisco M. de Chavero
Edición: Tercera
Tomo: Primero
Lugar y año de publicación: México, 1869



CURSO ELEMENTAL

DE

MATEMÁTICAS

TRADUCIDO DEL FRANCES Y ARREGLADO PARA USO
DE LOS COLEGIOS DE LA REPUBLICA

POR

JOAQUIN DE MIER Y TERAN Y FRANCISCO M. DE CHAVERO

TERCERA EDICION

TOMO PRIMERO

MÉXICO
IMPRENTA DE I. ESCALANTE Y COMPAÑIA.
BAJOS DE SAN AGUSTIN, NUM. 1.
1869

Figura 2.1. Hoja 1 del libro *Curso elemental de Matemáticas*

Biografías de los autores

JOAQUIN DE MIER Y TERAN

Nació en la ciudad de México el día 21 de marzo de 1829, hijo del señor D. Juan de Mier y Terán y de la señora Da. Josefa Joaquina Pimentel.

Al terminar sus estudios primarios pasó al Colegio Nacional de Minas. En 1846 obtuvo el primer premio de Química, el primero de Cosmografía y Uranografía, y el segundo en alemán. El 19 de septiembre de 1848, por unanimidad de votos, obtuvo el título de Ensayador de metales, y el 22 de octubre del mismo año el de Agrimensor de tierras y aguas, también por unanimidad. En esa época, el reglamento del colegio, conforme al plan de estudios vigente, establecía que los seis primeros meses del año siguiente al de mineralogía, los alumnos, antes de salir a su práctica, debían cursar los ramos de laboreo de minas y Mecánica aplicada, después de lo cual saldrían a determinado mineral, pues aún no se establecía la Escuela práctica de Minas y Metalurgia que fue creada por decreto de 30 de junio de 1853. Mier y Terán cursó estos ramos y, en Agosto de 1848, se trasladó a Mineral del Oro, donde estaban en plena actividad la explotación y beneficio de los minerales de oro y plata, para poner en práctica sus conocimientos.

Terminando lo anterior, regresó a México a preparar su examen de Ingeniero de Minas, pues anteriormente sólo había obtenido los títulos de Ensayador y de Ingeniero topógrafo.

Fue nombrado sustituto de cátedras, a petición de la Junta del Colegio, apenas en cuanto recibió su título profesional debido a su gran desempeño en los cursos, y el 14 de enero de 1853, fue nombrado catedrático de Geografía. Un año después comenzó a impartir el Primer curso de Matemáticas; en 1858, Geometría descriptiva y sus aplicaciones; en 1863, Cálculo diferencial e integral y Geometría descriptiva. Su obra *Curso elemental de Matemáticas* ya era usada en esta institución, desde 1859.

Mier y Terán fue miembro de la Junta de Notables en 1861, de la comisión científico-literaria y artística de México, por la sección de Matemáticas y Mecánica, en 1864; presidente de la misma Sección; Caballero de la Orden de Guadalupe en junio de 1865, y Comendador de la misma en abril de 1866. Se le otorgaron aquellos honores por sus servicios a la enseñanza y no por participación en las intrigas políticas, aunque se le vio, cuando menos lo esperaba, afrontando los peligros de la quebradiza situación del imperio de Maximiliano.

El 14 de septiembre de 1866, el infortunado príncipe nombró a Mier y Terán Ministro de Fomento. Esto, con motivos de darle al Ministerio de Obras Publicas aquel auge que en días tranquilos y de abundantes recursos le habría conducido. Esta es una de las causas probables de que este personaje no formara parte de la planta docente en la ENP.

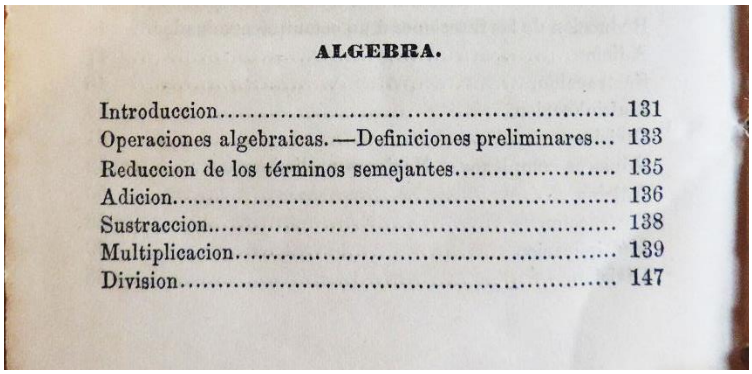
Posteriormente, cayó el imperio con la expiación de los errores de Maximiliano en el Cerro de las Campanas, y tras la desastrosa ruina de aquel vástago de reyes, vino la persecución de los que le habían servido. Mier y Terán terminó involucrado, aun cuando no manifestaba intereses políticos, y fue identificado dentro de aquellos que le habían servido. Después de sufrir algunos meses de prisión, salió desterrado. Tiempo después, falleció en la Habana, el día 28 de Enero de 1868, poco antes de cumplir treinta y nueve años de edad.

FRANCISCO M. DE CHAVERO

Con referencia al maestro Francisco M. de Chavero, se tiene el conocimiento de que, entre los años 1867 y 1877, impartió cátedras tanto en la Escuela de Ingenieros como en la Escuela de Agricultura y Veterinaria. En la escuela de ingenieros era profesor en los cursos de Estereotomía y Carpintería de edificios y Teoría mecánica de las construcciones; en la escuela de Agricultura y Veterinaria impartió el curso de Topografía y Geometría. Es curioso observar que en algunas fuentes lo señalan como profesor pero con el nombre de Francisco Chavero. En general, se sabe poco sobre éste.

Contenido del libro

Esta obra fue traducida del francés por los dos “autores” anteriormente mencionados. Contiene 424 páginas en las que se encuentra el contenido de la parte de Aritmética y la parte de Álgebra, los cuales son expuestos en ese orden. En la parte final del libro se encuentra un Apéndice que trata sobre “Pesos y medidas”, y “Fe de erratas”. En este libro, el índice se localiza en las últimas páginas. A continuación se muestran los temas de Álgebra presentes en dicho índice.



ALGEBRA.

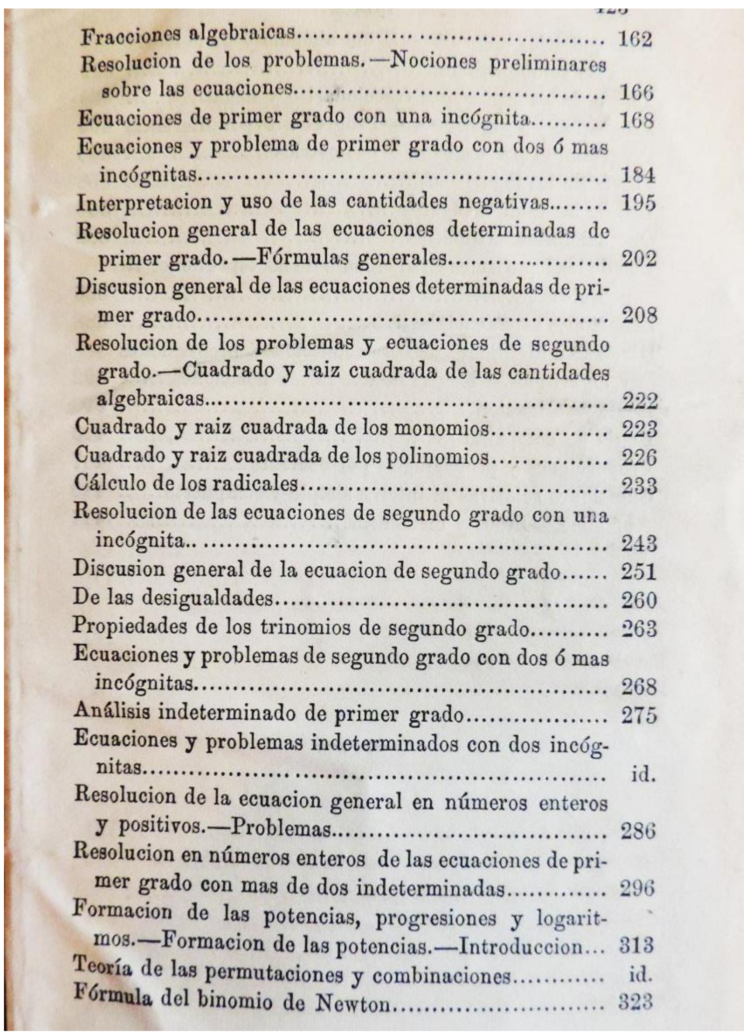


Figura 2.2. Índice del libro *Curso elemental de Matemáticas. Parte I*

Figura 2.3. Índice del libro *Curso elemental de Matemáticas. Parte II*

El contenido de la parte de Álgebra está distribuido de la página 131 a la página 416. Comienza con el título “ÁLGEBRA” y termina con la leyenda “FIN DE LA ALGEBRA”. Está separado en tres partes, llamadas cada una “LIBRO PRIMERO”, “LIBRO SEGUNDO” y “LIBRO TERCERO.” Debido a que en el índice no se puede apreciar el contenido de cada apartado, surgió la tarea de elaborar la siguiente tabla donde se muestra la distribución de los temas que se mencionan en aquél, localizados en cada uno de los tres apartados junto con los capítulos donde están incluidos.

LIBRO PRIMERO OPERACIONES FUNDAMENTALES	**LIBRO SEGUNDO** RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS	**LIBRO TERCERO** FORMACION DE POTENCIAS, PROGRESIONES Y LOGARITMOS
Introducción	Nociones preliminares sobre las ecuaciones	Capítulo I. Formación de potencias *Introducción* *Teoría de las permutaciones y combinaciones.* *Fórmula del binomio de Newton.* *Consecuencia de la fórmula del binomio y de la teoría de las combinaciones.* *Teoría de los esponentes fraccionarios y negativos.*
Capítulo I. De las operaciones algebraicas *Definiciones preliminares.* *Reducción de los términos semejantes.* *Adición.* *Sustracción.* *Multiplicación.* *División.*	Capítulo I. Ecuaciones de primer grado *Ecuaciones de primer grado con una incógnita.* *Ecuaciones y problema de primer grado con dos o más incógnitas.* *Interpretación y uso de las cantidades negativas.*	Capítulo II. Progresiones y Logaritmos *Progresiones por diferencia.* *Progresiones por cociente o geométricas.* *Teoría de los logaritmos.* *Uso de las tablas vulgares.* *Operaciones de aritmética.* *Uso de los logaritmos en el cálculo de las espresiones algebraicas.* *Ecuaciones esponenciales.*
Capítulo II. De las fracciones algebraicas *Operaciones que se ejecutan con las fracciones*	Capítulo II. Resolucion general de las ecuaciones determinadas de primer grado *Fórmulas generales.* *Discusión general de las ecuaciones determinadas de primer grado* *Reglas de dos falsas posiciones.* *Regla de aligación.* *Regla de compañía.* *Proporciones y progresiones por cociente.* *Cuestiones relativas al interés simple y compuesto.*	Capítulo III. Diversas aplicaciones de las proporciones, progresiones y teoría de los logaritmos
	Capítulo III. Resolución de los problemas y ecuaciones de segundo grado *Cuadrado y raíz cuadrada de*	

	las cantidades algebraicas. *Cuadrado y raíz cuadrada de los monomios.* *Cuadrado y raíz cuadrada de los polinomios.* *Cálculo de los radicales.* *Resolución de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita.* *Discusión general de la ecuación de segundo grado.* *De las desigualdades.* *Propiedades de los trinomios de segundo grado.* *Ecuaciones y problemas de segundo grado con dos o más incógnitas.*	
	Capítulo IV. Análisis indeterminado de primer grado *Ecuaciones y problemas indeterminados con dos incógnitas.* *Resolución de la ecuación general con números enteros y positivos. – Problemas.* *Resolución en números enteros de las ecuaciones de primer grado con más de dos indeterminadas.*	

Se puede ver que cada “Libro” contiene una parte introductoria y enseguida sus respectivos capítulos, aunque en el último libro se enuncia el primer capítulo y se prosigue con su introducción.

Explorando el contenido de cada tema, a continuación se presenta, a grandes rasgos, lo primero que se expone en la parte de Álgebra, que abarca precisamente conceptos que se usan en ésta.

La definición de Álgebra:

“*El álgebra es la parte de las matemáticas que trata de las propiedades generales de las cantidades numéricas.”*

Además, se resalta que en el Álgebra se distinguen dos especies principales de cuestiones, que son el teorema y el problema. Del primero se indica que su objeto es demostrar la existencia de algunas propiedades que gozan ciertos números conocidos y dados; y del segundo se indica que sirve para determinar ciertos números por el conocimiento de otros que tienen con las primeras relaciones indicadas por el enunciado. Luego, se explica que con el objeto de generalizar los razonamientos, el Álgebra utiliza ciertos elementos que son los siguientes:

- **Las letras del alfabeto:** que designan los números sobre los cuales se debe razonar. Las cantidades representadas por estas letras se les llama cantidades literales o algebraicas.
- **Los signos +,-,x, o ., ÷,:,=,$\sqrt{\ }$, etc.:** que indican las operaciones que deben ejecutarse con las cantidades.
- **El exponente:** que indica las veces que una cantidad entra como factor de un producto.
- **El coeficiente:** que indica la adición de muchos números iguales.
- **Un () o una $\overline{\ \ }$:** que indican que deben ejecutarse todas las operaciones indicadas en las cantidades puestas dentro y después las demás.

Enseguida se define la palabra término y dice: *Se llama término toda cantidad separada de las demás por signo + o -.* En esta parte resulta interesante la forma en que se diferencia a términos positivos y términos negativos, pues dice que los primeros son aquellos precedidos del signo + y los otros son aquellos precedidos del signo -. Además, se resalta que se les puede llamar términos aditivos y términos sustractivos, respectivamente. También, otras cuestiones en relación a los términos son las siguientes:

"*Se llama dimensión de un término a cada uno de los factores literales que lo componen, y grado al número de factores o dimensiones… el grado o dimensión es de un término, se estima por la suma de los exponentes de las letras que entran en él".* En la actualidad simplemente lo llamamos el grado de un término y no "dimensión".

Se hace saber que un polinomio es homogéneo cuando todos sus términos son del mismo grado, y heterogéneo en caso contrario.

Dando las anteriores definiciones, el demás contenido involucra todas las operaciones algebraicas y demás. Al hacer el análisis de este libro se encontraron distintas situaciones que, por la manera en que son expuestas, es necesario presentarlas en este trabajo para su mayor apreciación.

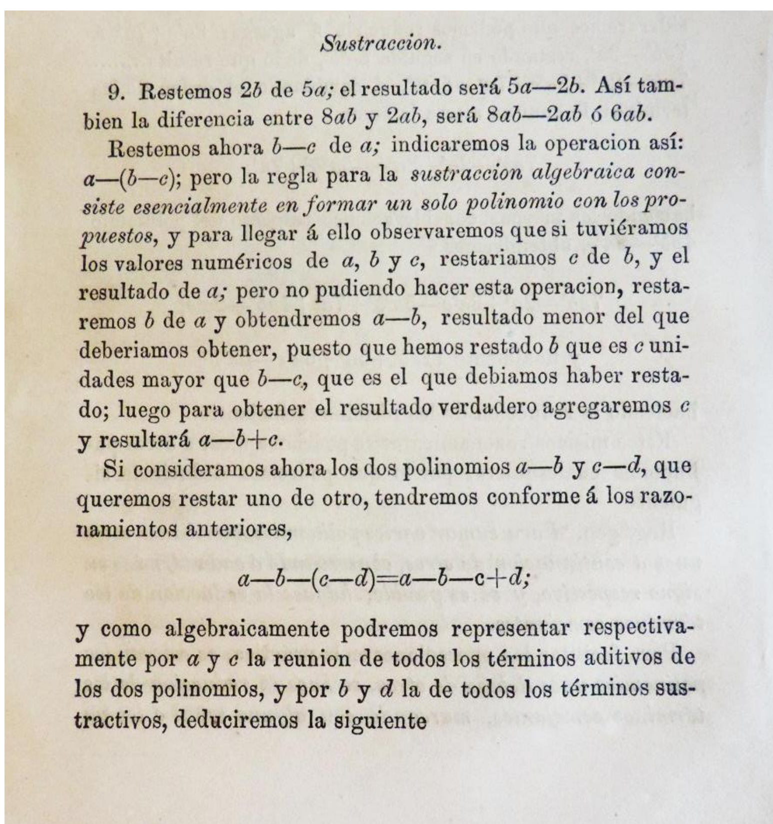
Notas interesantes

1. **Deducción de la regla general de sustracción**

Localización: Libro primero
Capítulo I
Sustracción
Páginas 138 y 139

En este apartado se explica cómo hacer la sustracción algebraica con polinomios. En particular, se indica al alumno que se debe restar $b-c$ de a. Esto se expone mediante el siguiente razonamiento: se explica que, si se tuvieran los valores numéricos de las tres literales, a b se le restaría c, y el resultado se le restaría a a. Luego, como no se pueden hacer estas operaciones directas, se resta primero b de a, y ya que el resultado es menor de lo que se debe obtener se le tiene que sumar c, tomando en cuenta que lo que se le resta a a es $b-c$, cantidad menor que b. Se concluye que $a-(b-c)=a-b+c$.

Enseguida se indica la realización de la sustracción de $a-b$ y $c-d$, siguiendo el razonamiento ya hecho en el caso anterior. Se concluye que $a-b-(c-d)=a-b-c+d$. Los autores terminan diciendo que como a y c pueden representar algebraicamente la unión de todos los términos positivos de dos polinomios, y b y d los términos negativos, se puede deducir la regla general que aparece al final de la imagen siguiente.



Sustraccion.

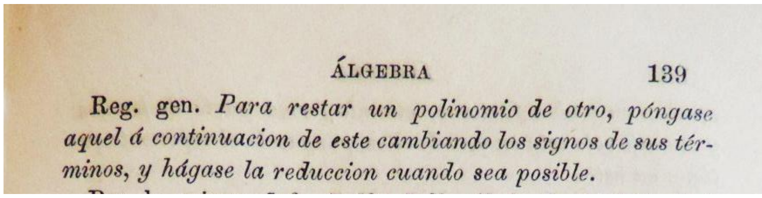
9. Restemos $2b$ de $5a$; el resultado será $5a—2b$. Así tambien la diferencia entre $8ab$ y $2ab$, será $8ab—2ab$ ó $6ab$.

Restemos ahora $b—c$ de a; indicaremos la operacion así: $a—(b—c)$; pero la regla para la *sustraccion algebraica consiste esencialmente en formar un solo polinomio con los propuestos*, y para llegar á ello observaremos que si tuviéramos los valores numéricos de a, b y c, restariamos c de b, y el resultado de a; pero no pudiendo hacer esta operacion, restaremos b de a y obtendremos $a—b$, resultado menor del que deberiamos obtener, puesto que hemos restado b que es c unidades mayor que $b—c$, que es el que debiamos haber restado; luego para obtener el resultado verdadero agregaremos c y resultará $a—b+c$.

Si consideramos ahora los dos polinomios $a—b$ y $c—d$, que queremos restar uno de otro, tendremos conforme á los razonamientos anteriores,

$$a—b—(c—d)=a—b—c+d;$$

y como algebraicamente podremos representar respectivamente por a y c la reunion de todos los términos aditivos de los dos polinomios, y por b y d la de todos los términos sustractivos, deduciremos la siguiente



ÁLGEBRA 139

Reg. gen. *Para restar un polinomio de otro, póngase aquel á continuacion de este cambiando los signos de sus términos, y hágase la reduccion cuando sea posible.*

Figura 2.4. Deducción de la regla general de Sustracción

En este caso es importante resaltar que los dos ejemplos que expone el libro pudieron haberse resuelto usando la propiedad de distributividad en los números reales, así como las leyes de los signos para el producto, como sigue:

$a-(b-c)=a+(-1)(b-c)=a+(-1)(b)+(-1)(-c)=a+(-b)+(c)=a+b-c.$

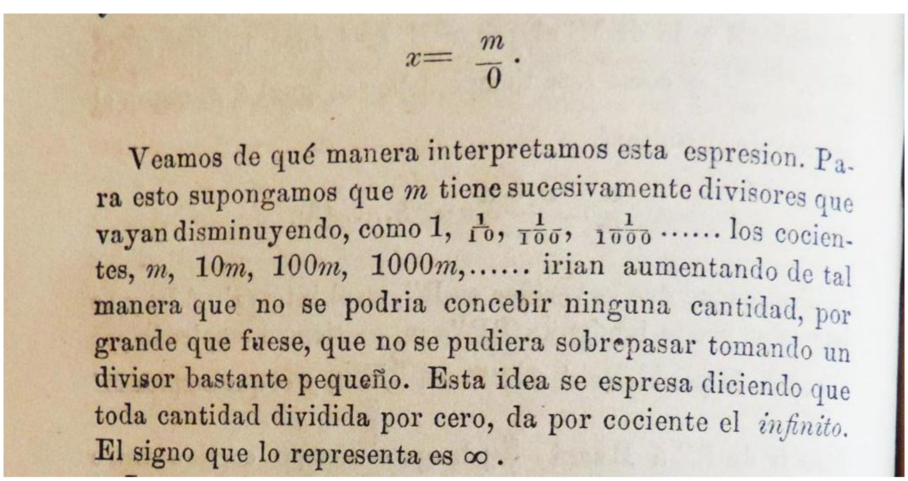
Y de manera similar para $a-b-(c-d)=a-b-c+d$. No se juzga a los autores por haber resuelto aquellas sustracciones de aquella manera en particular, sólo se expone otra para complementar el contenido.

2. División por cero

Localización: Libro segundo
Capítulo II
Discusión general de las ecuaciones determinadas de primer grado
Páginas 208-212

En este apartado se encuentra la ecuación $x=\frac{b(d-ah)}{a-b}$. Se discuten distintas situaciones respecto a los valores que podrían tomar a, b, d y h. En una de éstas se supone que $a=b$ y por lo tanto, se obtiene la ecuación $x=\frac{a(d-ah)}{0}$. Se denota $m=a(d-ah)$, para así tener que $x=\frac{m}{0}$.

Se sabe que está expresión es considerada una indefinición. Enseguida se muestra cómo la interpretan en el libro.



$$x=\frac{m}{0}.$$

Veamos de qué manera interpretamos esta espresion. Para esto supongamos que m tiene sucesivamente divisores que vayan disminuyendo, como 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ...... los cocientes, m, $10m$, $100m$, $1000m$,...... irian aumentando de tal manera que no se podria concebir ninguna cantidad, por grande que fuese, que no se pudiera sobrepasar tomando un divisor bastante pequeño. Esta idea se espresa diciendo que toda cantidad dividida por cero, da por cociente el *infinito*. El signo que lo representa es ∞.

Figura 2.5. División por cero

Es preciso ver que la manera en que se interpreta la expresión es muy concreta y da al alumno una excelente concepción del significado de aquella expresión. Actualmente, muchos alumnos en preparatoria no tienen la noción de lo que significa, simplemente discuten que al ingresar cualquier número en la calculadora dividido por cero da un “ERROR”, a lo que concluyen que efectivamente es una indefinición pero no saben el porqué. Esta interpretación justifica de manera clara por qué lo es.

También se puede apreciar que aquella interpretación se aproxima al uso de límites. En este caso podría referirse al límite $\lim_{x \to 0} \frac{m}{x}$.

3. Expresión cero entre cero

Localización: Libro segundo
Capítulo II
Discusión general de las ecuaciones determinadas de primer grado
Páginas 208-213

Continuando con lo anterior, se discute otro caso donde se supone que $b = a$ y $d = ah$, para llegar a la expresión $x = \frac{0}{0}$. Esto es interpretado de la siguiente manera:

4º Si suponemos al mismo tiempo $b=a$ y $d=ah$, resulta $x=\frac{0}{0}$.

Para interpretar esta espresion, consideremos que en toda division el producto del cociente por el divisor debe reproducir el dividendo, por lo que el cociente debe ser tal que multiplicado por cero dé cero por producto. Así, se puede tomar para este cociente el número que se quiera, lo que se

espresa en otros términos diciendo que $\frac{0}{0}$ representa una magnitud *indeterminada*.

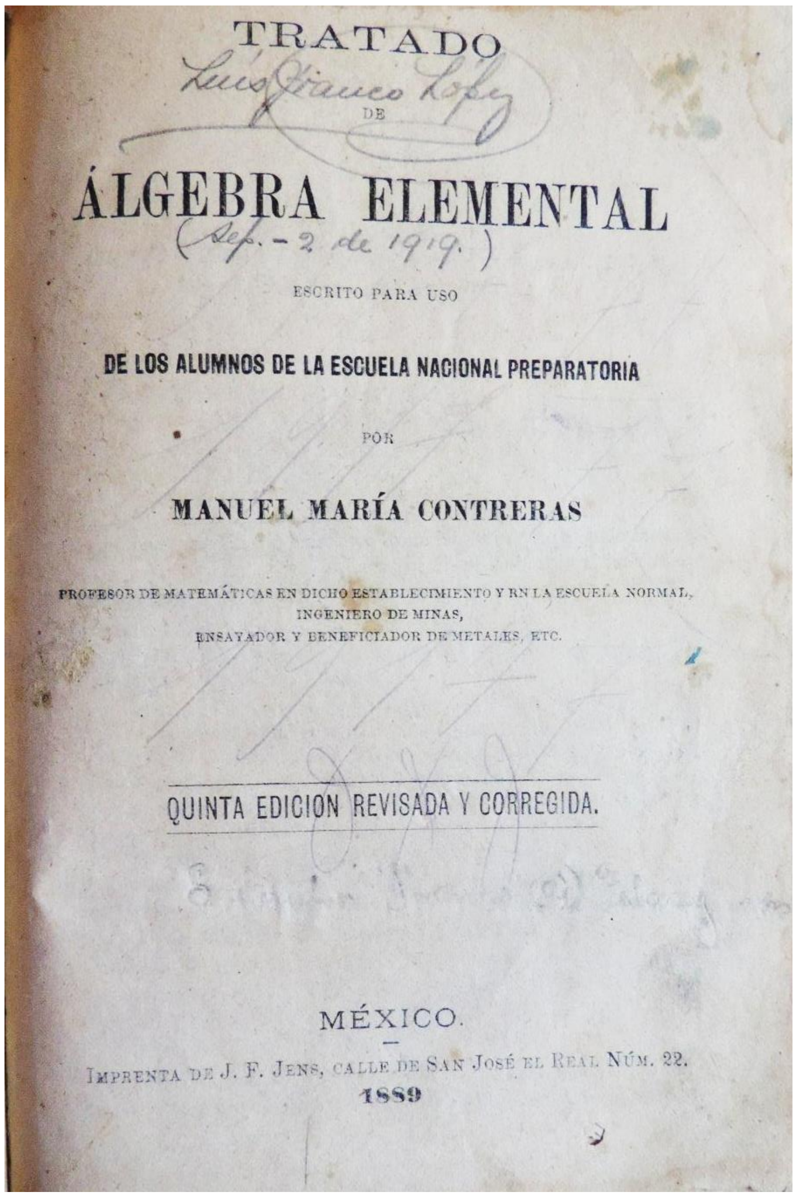
Figura 2.6. Expresión cero entre cero

Al igual que la interpretación que se mencionó acerca de la división por cero, ésta es concreta y da al alumno un claro significado de aquella expresión. Y muy precisamente, recuerda al alumno las partes de una división indicando lo que cada una de ellas expresan y cómo se relacionan.

Como ya se mencionó, era necesario mostrar las tres situaciones anteriores con el objetivo de que el lector aprecie un poco de ciertas cuestiones presentadas en el libro que resultaron interesantes debido a su contenido tan minucioso. Esto no quiere decir que sean las únicas de este tipo, ya que en todo el desarrollo de la obra se presentan gran diversidad de ellas, pero se eligió tomar estas por el agrado personal que surgió al leerlas. Enseguida se presenta la segunda obra de texto de las usadas en la ENP.

Tratado de Álgebra elemental

Autor: Manuel María Contreras
Edición: Quinta
Lugar y año de publicación: México, 1889



TRATADO

Luis Franco López

DE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

(Sep. - 2 de 1919.)

ESCRITO PARA USO

DE LOS ALUMNOS DE LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

POR

MANUEL MARÍA CONTRERAS

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN DICHO ESTABLECIMIENTO Y EN LA ESCUELA NORMAL,
INGENIERO DE MINAS,
ENSAYADOR Y BENEFICIADOR DE METALES, ETC.

QUINTA EDICION REVISADA Y CORREGIDA.

MÉXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, CALLE DE SAN JOSÉ EL REAL NÚM. 22.

1889

Figura 2.7. Hoja 1 del libro
Tratado de Álgebra elemental

Biografía del autor

Figura 2.8. Manuel María Contreras

Originario de la ciudad de México, nació en el año de 1833. Como participante de la guerra contra los invasores norteamericanos, interrumpió sus estudios a los 14 años. Fue ingeniero en minas en 1856, inventor, inspector y diputado de minería en el estado de Hidalgo y en Guanajuato hasta 1868, fue ensayador de la Casa de Moneda, consultor de varias obras en el valle de México, regidor y presidente municipal de la capital de la República, diputado y senador. Su actividad principal la centró en la enseñanza de Matemáticas a partir de 1868, de Física experimental a partir de 1874 en la Escuela Nacional Preparatoria, y de Mecánica desde 1877, en la de Ingenieros. Posteriormente dirigió la Escuela Normal. Es autor de los siguientes libros: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría.

El Ingeniero de Minas Manuel María Contreras fue plenamente porfiriano. Despuntó en tres ámbitos muy propios del régimen: la función pública, el proyecto educativo encabezado por Barreda y, como ingeniero, en las filas de los "artífices de la modernidad" porfiriana en la minería y las obras públicas.

La educación primaria de Manuel María Contreras estuvo a cargo del Colegio Científico Hispano-Mexicano. Fue un brillante joven, y debido a eso, recibió diversos premios de manos del Excelentísimo R. Gral. Don José María Tornel, en ese entonces Presidente de la Compañía Lancasteriana.

En los años de práctica de Metalurgia, Explotación de Minas y Mecánica, su desempeño en este periodo le valió, no solamente ser aprobado por unanimidad como Ingeniero de Minas y Metalurgista en 1856, a sus 23 años, sino también para recibir ofertas de trabajo tanto en la iniciativa privada como en el ámbito público. Ese mismo año se convirtió en Interventor de la Compañía de Real del Monte, a la cual seguiría asesorando hasta su muerte, y poco después Inspector de las minas de Santa Inés, Director de la Mina de Negrilla, la de Guadalupe y la Hacienda de Beneficio "La Purísima grande". Fue Diputado de Minería en Pachuca.

La experiencia de su siguiente periodo, de 1862 a 1864, como director de la Negociación de los herederos de Don Juan de Dios Pérez Gálvez en Guanajuato, donde también fue Diputado de Minería, es testimonio de la insuficiente inversión en minería antes de la década de 1880: Contreras terminó aconsejando paralizar las obras por ese motivo, pues consideró imposible seguir explotando unas minas arruinadas sin mayores inversiones. Después, ya establecido en Loreto como Ingeniero Metalurgista de la Compañía de Real del Monte, siguiendo la línea aprendida en su Colegio, se dio a la tarea de sustituir "las reglas empíricas de los azogueros, para marcar el avance y término conveniente de la amalgamación, por los procedimientos científicos de los ensayes de pella y de residuos que dan bases precisas para juzgar esos fenómenos". A través de los años, Contreras sufrió al intentar cuidar los intereses de la Compañía de Real del Monte, que a menudo desperdiciaba sus recursos porque sus dueños solían guiarse por la avaricia.

Contreras participó en las obras del Desagüe del Valle de México, las impulsó y tuteló hasta su culminación en 1900, ya cerca del final de su vida, técnica, política y presupuestalmente siendo Regidor de Obras Públicas del Distrito Federal, y después Presidente del Ayuntamiento.

La legislación de 1867, todavía con Juárez en poder, fue representativa para el periodo de educación positivista a cargo de Barreda, como emblemático fue el inicio de operaciones de la Escuela Nacional Preparatoria en 1868. Contreras estuvo presente en ese inicio: desde un principio enseñó Matemáticas, "eligiéndose por una junta de los profesores científicos de esta Escuela a aquel que de entre ellos debe desempeñar este encargo" según lo estipulaba el reglamento interno. El acta de su designación detalla: "Se procedió inmediatamente a la votación por medio de cédula, y resultaron cuatro votos en favor del C. Chavero y cuatro por el Señor Contreras, por cuya razón se repitió la votación, y obtuvo tres votos el C. Chavero y cinco el C. Contreras, quien quedó nombrado como profesor de 1er curso de Matemáticas…"

Pareciera que había empezado una rivalidad entre Chavero y Contreras reflejada en las recurrentes discusiones sobre la conveniencia del libro de texto de uno o de otro autor, que constan en actas y folletos de la Escuela Nacional Preparatoria, incluso tras haber dejado Contreras el plantel. Tal vez era solo suposiciones pero si, en efecto algo se jugaba entre Chavero y Contreras, el destino de sus respectivos textos, parece claro que Contreras llevaría la victoria: sus tratados de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría fueron “declarados como libros de texto en casi todos los Estados de la República, y el gran consumo que tienen ha hecho que los dos primeros alcancen ya la novena edición, y el tercero la séptima y el cuarto la sexta. Sus condiciones como obras didácticas han sido juzgadas favorablemente por personas peritas, tanto en nuestro país como en el extranjero”. Contreras también fungió como profesor de Física Experimental en la ENP a partir de 1874, y además daba conferencias dominicales de divulgación sobre este tema.

Manuel María Contreras murió de enfermedad el 29 de marzo de 1902, a la edad de 69 años, siendo Senador segundo propietario por el Estado de Tlaxcala. La edad promedio de ministros, senadores y gobernadores era, justamente, de 70 años: Contreras perteneció a una clase gobernante añejamente porfirista, y murió antes de que empezara a cuestionarse el régimen. Murió, entonces, tras una vida plenamente realizada y brillante en el marco de las instituciones y los proyectos porfirianos, por lo cual mereció el reconocimiento y la estima de cuantos los compartieron con él.

Contenido del libro

El *Tratado de Álgebra elemental* contiene 244 páginas. El índice se localiza en la última parte del libro. Lo que se presenta enseguida son los temas listados en dicho índice.

INTRODUCCION Y PRIMERAS OPERACIONES CON LAS EXPRESIONES ENTERAS.
Introducción.
Definición y signos usados.
Sustitución y reducción.
Adicion y sustraccion.
Multiplicación.
Teoremas de la multiplicación.
División
Teoremas de la división
Sacar una cantidad como factor común.
Fracciones algebráicas.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO
Definiciones y principios fundamentales.
Resolución de las ecuaciones.
Plantear el problema.
Problemas de primer grado y una sola incógnita.

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.
Formas diversas de los valores de la incógnita.
Cantidades negativas.
Discusión de la ecuación general de primer grado con una incógnita.

ECUACIONES DETERMINADAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.
Eliminación.
Método de igualación o de comparación.
Ídem de sustitución.
Ídem de reducción o por adicion y sustracción.
Problemas.

DESIGUALDADES
Transformación de las desigualdades.
Valores limites.
Cantidades negativas.
Problemas.

ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO.
Consideraciones generales.
Regla para resolver las ecuaciones indeterminadas de 1er grado.
Observaciones sobre los problemas indeterminados.
Abreviaciones.
Comprobaciones.
Problemas.
Ecuaciones indeterminadas con más de dos incógnitas.
Problemas indeterminados con una incógnita más que el número de ecuaciones.

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA.
Cuadrado y raíz cuadrada de los monomios.

Ídem de un monomio.
Ídem de los polinomios.
Ejemplos.
Observaciones sobre la raíz cuadrada de polinomios y binomios.

CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES RADICALES Y DE LAS CANTIDADDES AFECTADAS DE EXPONENTES FRACCIONARIOS Y NEGATIVOS.
Elevación de los monomios a una potencia cualquiera.
Extraccion de raíces de los monomios
Teoremas relativos á los radicales
Transformaciones de los radicales
Operaciones con las expresiones radicales
Expresiones con exponentes negativos
Ídem con exponentes fraccionarios
Cálculos con las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios y negativos

FÓRMULA DE NEWTON PARA ELEVAR UN BINOMIO A UNA POTENCIA
Elevacion de un binomio á potencias sucesivas y observaciones
Fórmula de Newton.
Regla para formar un término aislado de la serie.
Aplicaciones de la fórmula del binomio de Newton.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
Ecuaciones incompletas de segundo grado.
Ecuaciones completas de segundo grado.
Problemas de segundo grado.
Ecuaciones de segundo grado con varias incógnitas.

DISCUSIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.
Raíces de estas ecuaciones y propiedades de estas raíces.
Condiciones para que el valor de x sea real ó imaginario, positivo ó negativo, exacto ó aproximado.
Discusión de algunos casos particulares.
Discusión de la ecuación $ax^2 + bx = c$.
Propiedades de los trinomios de segundo grado.

PROPORCIONES Y PROGRESIONES.
Propiedades de las proporciones.
Progresion aritmética, sus fórmulas y problemas.
Progresión geométrica, sus fórmulas y problemas.

LOGARITMOS.
Teoría de los logaritmos.
Propiedades y usos de los logaritmos en los cálculos.
Formación de las tablas de logaritmos.
Determinación del logaritmo de un número en otro sistemas.
Característica de los logaritmos.
Mantiza de los logaritmos.
Disposicion de las tablas de logaritmos de Callet.
Determinar el logaritmo de un número, casos y ejemplos.
Determinar el número a que corresponde un logaritmo, casos y ejemplos.
Observaciones sobre el cálculo de logaritmos.
Operaciones y problemas resueltos por logaritmos.
Aplicación de los logaritmos en las expresiones algebraicas.
Ecuaciones exponenciales.

REGLAS DE ALIGACION, INTERÉS Y ANUALIDADES.

Casos y fórmulas de las reglas de aligacion.
Problemas de la regla de aligacion.
Fórmulas relativas al interés simple y problemas.
Fórmulas relativas al interés compuesto y problemas.
Anualidades, fórmula y problemas.
Regla de dos falsas suposiciones y problemas.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.
Definiciones.
Ordenaciones.
Permutaciones.
Combinaciones.
Deducción de los coeficientes de la fórmula de binomio de Newton.

EL índice de este libro se encuentra mucho más organizado que el del libro anteriormente presentado. En esta obra se distribuye el contenido a lo largo de 15 capítulos. Explorando éste, lo primero que aparece es una página titulada *OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras.* Antes de comenzar a presentar el contenido matemático, considero interesante mostrar dos de las opiniones:

1° Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su tratado de Matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.
2° Que el original de su aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Diaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zárate; que el de su álgebra lo fué por los profesores Manuel Fernandez Leal y Luis del Castillo, y que los de su geometría y trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramirez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

Lo anterior refiere a que, sin duda, la obra de Contreras fue elegida como de texto con argumentos suficientes para considerarla adecuada. Por lo que ya sabemos de Contreras sobre su vida y por lo anterior, hay evidencias para decir que era un profesor sobresaliente gracias a sus conocimientos, y por ello sus obras fueron declaradas de texto en la ENP.

Para comenzar con el contenido matemático, Contreras explica en la parte introductoria la diferencia entre la Aritmética y el Álgebra. Posteriormente da ciertas definiciones, empezando por el Álgebra:

Se llama Algebra la parte de las Matemáticas que se ocupa del estudio de las relaciones de las cantidades. Su objeto es determinar el modo de formación de una cantidad desconocida por medio de ciertas relaciones que existen entre las cantidades conocidas.

Enseguida indica que al considerar las cantidades de modo abstracto y al expresar la formación de cantidades desconocidas por medio de las conocidas se establecen reglas para resolver cuestiones semejantes a la que se propone. Por esto surge definir lo que es una ecuación:

Ecuacion es la expresion de la igualdad del valor de dos cantidades cuyo modo de formacion generalmente es diferente.

Luego, se expresa que los modos de formación surgen de operaciones efectuadas con cantidades que se consideran, y entonces *Plantear un problema es formar una ó varias ecuaciones con las cantidades conocidas y las desconocidas.* Y *Resolver un problema es encontrar el valor de cada incógnita expresado en función de cantidades conocidas.*

Se indican los signos que son usados en Álgebra, o lenguaje algebraico. De ellos se expresa que son señales utilizadas para representar cantidades y operaciones hechas ya o por hacer. En los signos incluye a

1. **Las literales:** son las letras del alfabeto común y griego, y que indican cantidades con cualquier valor.
   Aquí el autor explica que, regularmente, las cantidades conocidas se expresan con las primeras letras del alfabeto, y las desconocidas con las últimas, como x, y, z. También indica que para expresar alguna de las anteriores con una misma letra se usan el apóstrofe y los subíndices.

2. **Los signos:** indican las operaciones que se conocen y la relación de cantidades, y son $+, -, \times, \div, :, \sqrt{\ }, =, >, <$. También se indica el uso de los paréntesis y cuando se tiene una expresión del tipo $\frac{a}{b}$.

3. **Los números comunes:** esencialmente tienen cuatro usos:
   - Para representar el valor efectivo de las cantidades que entran en los cálculos.
   - Para expresar las veces que una cantidad ingresa como sumando.
   - Para indicar la potencia de una cantidad o número de veces que ésta ingresa como factor.
   - Para señalar el índice de raíces.

Se procede con la definición de coeficiente, exponente, término, monomio, binomio, trinomio, polinomio, términos semejantes, grado o dimensiones de un términos y términos homogéneos. Se añaden otras definiciones que, a diferencia del libro anterior, el autor considera importante mencionar junto con los conceptos anteriores. Expresa que a todo valor algebraico se le llama *expresión* y puede ser:

- Racional: no contiene un radical.
- Irracional: contiene un radical.
- Entero: no contiene el signo de la división.
- Fraccionario: contiene el signo de la división.

Para concluir esta parte de definiciones, se indica que en una cantidad se distingue su valor:

- Absoluto: es el que tiene sin atender a su signo.
- Relativo o algebraico: el que tiene considerando el signo de la cantidad.
- Numérico: el que se obtiene reemplazando cada literal por su valor.

En general, esta obra comienza a diferenciarse de la anterior desde que incluye más definiciones esenciales al inicio de ella, además de la mención de ciertos axiomas que enseguida se mostrarán. También, algo diferente a la otra obra es que en esta, a pesar de su organizado índice, no se identifica la separación de un tema a otro de cada capítulo. No sucede esto con todos, pero sí en algunos.

Es muy importante mencionar que Contreras da reglas generales en cada tema añadiendo su respectiva demostración, indicando su contenido a partir de enunciar tal palabra. Esto no se presentó tan frecuentemente en el *Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)*.

Como en la obra anterior, en esta se encuentran situaciones que, por su atrayente contenido, es necesario presentarlas.

Notas interesantes

1. **Axiomas**

Localización: Introducción y primeras operaciones con las expresiones enteras
Definición y signos usados
Página 15

En particular, Contreras enuncia una serie de *AXIOMAS* antes de desarrollar todos los temas de su obra. Éstos son:

cuestión.

242.—Axiomas.—Los axiomas usados con más frecuencia en Algebra, son los siguientes:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí:

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

Figura 2.9. Axiomas usados en Álgebra

Consideramos que un axioma es una proposición evidente que no requiere demostración. Entonces, Contreras tiene una buena concepción de lo que son y, por lo tanto, sus enunciados están perfectamente clasificados como axiomas. Ahora bien, el autor hace uso de ellos en diversas demostraciones. Esto ayuda a apreciar el razonamiento tan abstracto y adecuado para la realización de cada una de ellas.

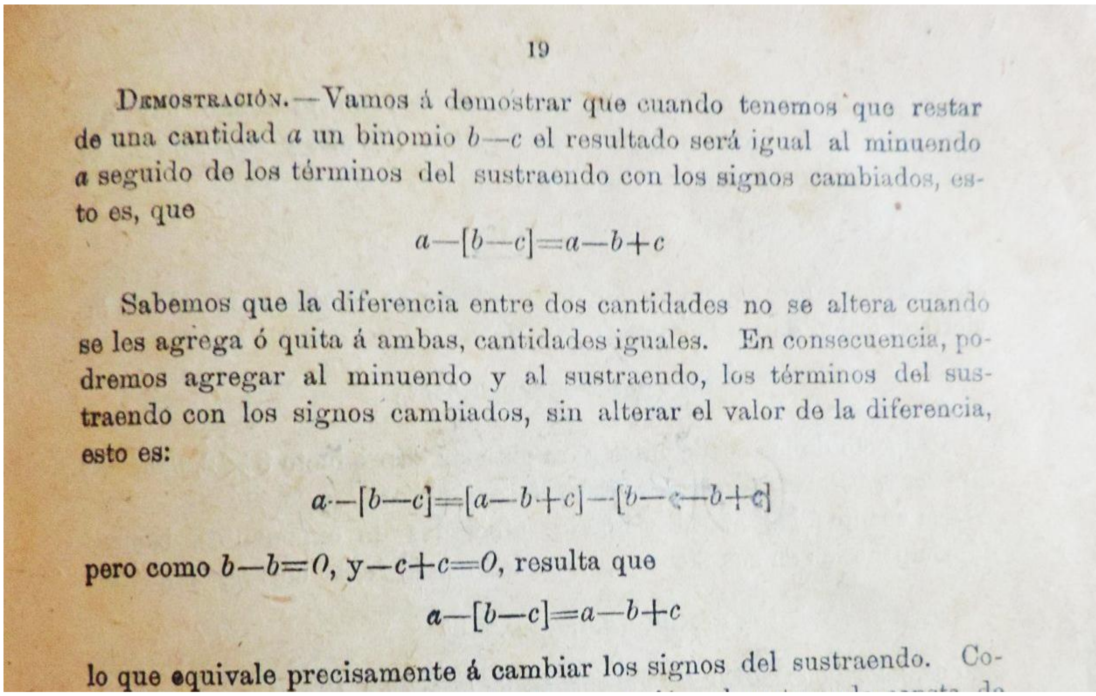
2. **Demostración de la regla de Sustracción**

Localización: Introducción y primeras operaciones con las expresiones enteras
Sustracción
Páginas 18 y 19

En este apartado se da la regla para realizar la sustracción de dos cantidades en el Álgebra. Ésta dice así:

REGLA.- Para restar las cantidades en Algebra se cambian los signos á todos los términos del sustraendo, y en seguida, se hace la reducción de los términos que resulten semejantes á los del minuendo.

Con la regla se indica que si se desea restar $b-c$ de $a+b$, entonces se tendría que $[a+b]-[b-c]=a+b-b-c=a+c$. Para esto último se da la siguiente demostración.



19

Demostración.—Vamos á demostrar que cuando tenemos que restar de una cantidad a un binomio $b-c$ el resultado será igual al minuendo a seguido de los términos del sustraendo con los signos cambiados, esto es, que

$$a-[b-c]=a-b+c$$

Sabemos que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega ó quita á ambas, cantidades iguales. En consecuencia, podremos agregar al minuendo y al sustraendo, los términos del sustraendo con los signos cambiados, sin alterar el valor de la diferencia, esto es:

$$a-[b-c]=[a-b+c]-[b-c-b+c]$$

pero como $b-b=0$, y $-c+c=0$, resulta que

$$a-[b-c]=a-b+c$$

lo que equivale precisamente á cambiar los signos del sustraendo. Co-

Figura 2.10. Demostración de la
regla de Sustracción

Notemos que en la demostración se menciona que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega o quita a ambas, cantidades iguales. Esto es: si a, b y z son números reales, entonces
$a-b=(a\pm z)-(b\pm z)$.

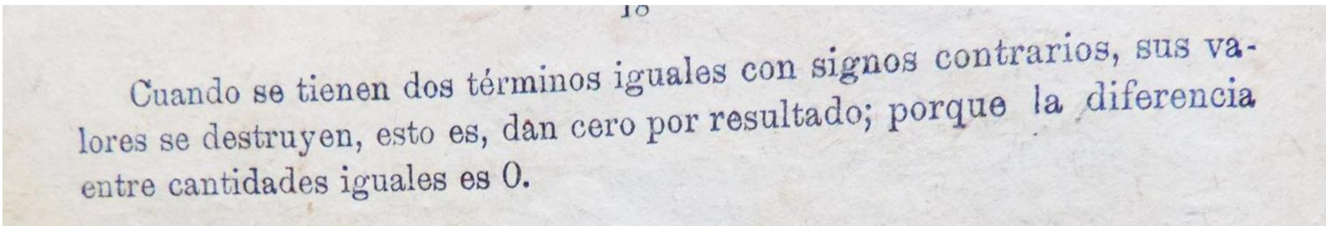
En este caso, $a-b=(a+z)-(b+z)$, donde $z=-b+c$. Posteriormente son meras igualdades conmutando las cantidades para obtener que $b-b=0$ y que $-c+c=0$. Y así terminar con la demostración.

Se debe mencionar que tal demostración pudo haber sido resuelta usando la propiedad de distributividad en los números reales y las leyes de los signos para el producto. En cambio, Contreras usó otros razonamientos donde, además, incluye el uso de uno de sus axiomas.

3. **Una frase interesante**

Localización: Introducción y primeras operaciones con las expresiones enteras
Reducción
Página 18

No todo el contenido a resaltar refiere a aspectos matemáticos. En la obra de Contreras encontramos frases o palabras que, por su significado en distintos contextos, resulta llamativo mencionarlos. Uno de estos es la siguiente frase:



18

Cuando se tienen dos términos iguales con signos contrarios, sus valores se destruyen, esto es, dan cero por resultado; porque la diferencia entre cantidades iguales es 0.

Figura 2.11. Una frase
interesante

La palabra "destruir" la utilizamos para expresar que algo aniquilamos o exterminamos. Entonces, se "aniquilan" las cantidades. Esto me pareció gracioso.

4. **Teoremas de la división**

Localización: Introducción y primeras operaciones con las expresiones enteras
Teoremas de la división
Página 32

Después de presentar el tema de la división de expresiones algebraicas, se presentan cuatro teoremas de ésta. En particular, se presentar los primeros dos:

podrá obtenerse un cociente de la forma entera.

256.—Teoremas de la división.—Nos serviremos de la división para demostrar algunos teoremas.

I. *Toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.* Si dividimos, por ejemplo, a^m por a^m como toda cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad, tendremos $\frac{a^m}{a^m}=1$. Por otra parte se ha visto que para dividir literales iguales deben restarse sus exponentes, por lo cual, $\frac{a^m}{a^m}=a^0$; luego $a^0=1$. Se ve, pues, que a^0 es el símbolo de la unidad, por ser tanto a^0 como 1 resultados que proceden de dividir a^m entre a^m.

II. *Toda cantidad cuyo exponente es negativo es igual á un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador es la misma cantidad tomada con exponente positivo.*

Figura 2.12. Teorema I y II de la división

En los dos teoremas falta indicar que no toda cantidad cumple con lo que se indica, ya que si $a = 0$, el resultado en ambos se encuentra indefinido.

5. Multiplicación de una cantidad negativa a una desigualdad

Localización: Desigualdades
Transformación de las desigualdades
Página 82

En este apartado se indica que toda desigualdad $a > b$ debe concebirse como un símbolo de la ecuación $a = b + x$, donde x es la diferencia entre a y b. Para $a < b$ se tiene $b = a - x$, de manera similar. Posteriormente se dan ciertas propiedades de las desigualdades. Entre éstas se encuentra la siguiente:

4° *Si se multiplican por una cantidad negativa los dos miembros de una desigualdad, ésta resultará en sentido inverso.*

Sea $\quad A>a \quad$ equivalente á $\quad A=a+d$

multiplicando por $-m$ la ecuación, se tiene: $-Am=-am-dm$, como hacer desaparecer $-dm$ en el segundo miembro de esta ecuación equivale á agregar $+dm$, lo haremos *mayor*, y por tanto

$$-Am<-am$$

Se ve que la desigualdad resulta en sentido contrario de la primera.

Figura 2.13. Una propiedad de las desigualdades

La manera en que se prueba tal propiedad implica las ecuaciones primeramente mencionadas. Considero muy adecuada la forma en que se demuestra esa propiedad, ya que resulta muy preciso y fácil para el alumno, si entendió cómo concebir el sentido de cada desigualdad.

Para concluir, téngase presente que la obra de Contreras cuenta con cuestiones más abstractas, incluyendo entre éstas muchas de sus demostraciones. Lo anterior para diferenciar la manera en que se desarrolla el Álgebra en este libro y el anterior. Enseguida se presenta la tercera obra de texto de las usadas en la ENP.

Tratado elemental de Álgebra

Autor: José Joaquín Terrazas
Edición: Quinta
Lugar y año de publicación: México, 1897

La obtención de esta obra no fue sencilla. El único lugar donde se localizó es el Fondo Reservado de la Biblioteca Nacional de México, a quien se agradece el préstamo de ésta.

Desafortunadamente no se cuenta con imágenes de este libro, ya que para realizar la toma de fotografías o fotocopiado de éste se necesitan recurso económico y tiempo para una serie de trámites con el objetivo de obtener el permiso de ello. En este caso, las causas de no tener dichas imágenes se deben a variables de tiempo. Sin embargo, se trató de rescatar el mayor contenido posible para ser presentado en esta tesis.

Biografía del autor

Figura 2.15. José Joaquín Terrazas

Nació en la ciudad de México el 21 de agosto de 1851, matemático, periodista y poeta. Se casó en 1873 y procreó 6 hijos. Su trayectoria en la vida pública comenzó con su trabajo encaminado a la enseñanza de las Matemáticas, convirtiéndose en maestro de Aritmética y Álgebra en varias escuelas particulares, entre ellas en la Escuela Preparatoria de Sociedad Católica de México, colaborando con la cátedra de las materias de Aritmética y Sistema métrico decimal. Su trabajo en el área de las Matemáticas se destacó por dos de sus obras, las cuales son “Tratado elemental de Aritmética” y el “Tratado elemental de Álgebra”, el primero fue escrito en 1869 siendo publicado hasta el 1875 y del segundo tenemos el conocimiento de la publicación realizada en 1897 pero existieron más. De manera paulatina, empezó a ser reconocido debido a los elogios que obtuvieron sus libros por parte de dos matemáticos de la época, José María Rego y Manuel Gargallo y Parra. En especial, hizo notar su admiración Rego por Terrazas señalando que admiraba la visión que tenía para la enseñanza de las Matemáticas.

Se le dio mucho reconocimiento a su trabajo tratando de hacer de sus obras libros oficiales para el estudio, una de las postulaciones que se hizo fue en la Escuela Nacional Preparatoria en octubre de 1878. Tuvo la intención de que su libro de “Álgebra” se aprobara como texto. Desde las columnas de “La Voz de México”, peleó sin mucho éxito en defensa de su libro, pero la comisión no la aceptó. El texto de Álgebra había sido encargado por Gabino Barreda a Manuel María Contreras, que fue el que finalmente se aprobó. Sin embargo, sí se reconoció su importancia y se le dio una mención honorífica que fue publicada en “El Diario Oficial”. Por el contrario, tres años antes, en noviembre de 1875, la Academia de Bellas Artes aprobó La Aritmética de Terrazas declarando que tenía bastante mérito por la forma en que su autor planeó su estructura y, sobre todo, porque desarrolla nuevos métodos para la práctica de algunas operaciones algebraicas. Posteriormente, dicho establecimiento hizo moción para que dicha obra se declarase como libro de texto en las Escuelas Nacionales.

Progresivamente su trabajo en el tema de la enseñanza fue sustituido por su labor dentro del área periodística, esto debido a su nombramiento como redactor en jefe de “La Voz de México” en el año de 1875 en donde destacó por su postura antiliberal. “La voz de México” era un diario político, religioso, científico y literario.

Lamentablemente de este autor se desconocen muchos detalles de su vida y de su trayectoria académica por lo cual no se habló más a detalle de ello.

Contenido del libro

El *Tratado elemental de Álgebra* contiene 168 páginas. En su índice se enlistan los siguientes temas.

Capitulo I. – Preliminares.- Objeto del algebra.
De las cantidades negativas.
Operaciones con las literales. - Suma y resta.
Multiplicación
División
Descomposición en factores.

Capítulo II. Elevación a potencias y extracción de raíces. – Potencias y raíces de los monomios.
Calculo de los radicales.
Cuadrado y raíz cuadrada de los polinomios.

Capítulo III. De las ecuaciones de primer grado con una incognita y de las desigualdades. – Resolución de las ecuaciones.
De las desigualdades.
Sistemas determinados de ecuaciones de primer grado.
Discusión de las ecuaciones de primer grado.

Capítulo IV. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. – Su resolución general.
Discusión de las ecuaciones de segundo grado.
Trinomio de segundo grado.
Ecuaciones de segundo grado con varias incognitas.

Capítulo V. Análisis indeterminado de primer grado. – método de resolución en números enteros de las ecuaciones indeterminadas.
Expresión general del valor de las indeterminadas. – soluciones positivas.
Resolución de un sistema indeterminado de ecuaciones. –problemas

Capítulo VI. Potencias. –Permutaciones y combinaciones.
Binomio de Newton.

Capítulo VII. Progresiones y logaritmos. – progresiones aritméticas.
Progresiones geométricas.
Logaritmos.
Explicación de las tablas de Callet.
Modo de manejar las tablas de Callet.
Aplicaciones numéricas.

Capítulo VIII. Aplicación de las progresiones y logaritmos a la resolución de ciertos problemas. – Regla general de dos falsas posiciones.
Cuestiones relativas a los intereses simple y compuesto.
Apéndice.

El contenido del libro se encuentra distribuido a lo largo de 8 capítulos. Notemos que el índice también se encuentra organizado. Explorando todo su contenido, en las primeras hojas hay una titulada *Al Público inteligente.* En este apartado Terrazas explica que su obra seguiría teniendo el mismo precio, pues no lo cambiaría por haber sido declarada de texto en la ENP. Hace otros comentarios en cuanto a ir mejorando su obra, e incluso otras de ellas, en cada edición.

Ahora bien, comencemos con el contenido matemático.

Se define al Álgebra como *la ciencia que auxilia al entendimiento para sacar de las relaciones actuales de los datos las que los ligan en el momento en que producen el resultado.* Indica que resuelve las cuestiones en general, ya que busca las relaciones finales de los datos.

Posteriormente se da la definición de término o monomio, refiriéndose a que es la expresión en que no están indicadas las operaciones de suma y resta. Se expone que dos términos forman un binomio, tres, un trinomio, designándose con la palabra polinomio al conjunto de más de tres términos.

Se resalta que a toda letra sola, se le considera el exponente 1. Además, se indica que el coeficiente es un factor, en lo general numérico, de una o más letras de un término.

Enseguida se dan los conceptos de dimensión y grado, incluyendo lo que es un polinomio homogéneo: *cada letra factor se llama dimensión de un término; y grado de éste, al número de dimensiones. Si los términos de un polinomio tienen igual grado se llama homogéneo.*

Se concluye señalando que antes de todo polinomio que principie sin signo, se supone el +.

Posteriormente se da una tabla acerca del lenguaje usual y el algebraico:

LENGUAJE USUAL	***LENGUAJE ALGEBRAICO***
Una cantidad más otra	*a+b*
La suma de dos cantidades	*a+b*
El triple de una cantidad más cinco veces otra	*3a+5c*
La suma de dos cantidades multiplicada por una cantidad igual al primer sumando	*(a+b)a*
El cuadrado de una cantidad, mas el doble producto de esta por otra, más el cuadrado de la ultima	*a2 + 2ab+ b2*
Una cantidad que sea par	*2ª*
Una cantidad que cuyo triple es igual a otra	*3ª=b*

A continuación de esto, Terrazas expone las operaciones algebraicas y los demás temas.

Claramente en esta obra se mencionan menos definiciones, comparando esto con los dos libros anteriores. Considero que el libro contiene los temas expuestos de una manera menos extensa y, con lo anterior, el lector puede percatarse de ello.

Como en las obras anteriores, en esta se encuentran situaciones que, por su contenido tan llamativo, deben presentarse.

Notas interesantes

1. La suma y la resta algebraica

Localización: Capítulo I
Operaciones con literales – Suma y resta
Página 15

En esta parte del libro, Terrazas indica cómo resolver la suma y resta algebraica de polinomios. En particular, da el siguiente ejemplo:

Sumemos $4a^2b + 6c^3 - d$, *con* $p^5 - 8 + 4c^2d$, *con* $-63n^3d^5 - 912$. *La suma será:* $4a^2b + 6c^3 - d + p^5 - 8 + 4c^2d - 63n^3d^5 - 912$.

Concluye que: *La suma algebraica, es pues, suma y resta al mismo tiempo.*

Se resalta esta cuestión debido a que de las tres obras que hemos tratado, sólo en esta se menciona a la suma algebraica como resta.

2. Ley de los signos en el producto

Localización: Capítulo I
Multiplicación
Página 24

En este apartado Terrazas señala que en la multiplicación algebraica los signos son tomados en cuenta, y para ello concluye que todos los casos posibles en la multiplicación se reducen a los siguientes generales:

$$+\boldsymbol{a} \times +\boldsymbol{b}$$
$$+\boldsymbol{a} \times -\boldsymbol{b}$$
$$-\boldsymbol{a} \times +\boldsymbol{b}$$
$$-\boldsymbol{a} \times -\boldsymbol{b}$$

Para lo anterior da las siguientes justificaciones:

En el primer caso hay que sumar a *las veces que indica* b; $+a + a + a \ldots etc.$, *dará* $+ab$. *Luego* $+ \times += +$.

En el segundo, la repetición que constituye la multiplicación aritmética, está indicada por el signo x; y tal repetición ha de ser restando el signo - de b. Se tiene pues: $-(+a)-(+a)-(+a)\ldots etc.$, *o* $-ab$. *Luego* $+\times-=-$.

En el tercero se ha de repetir sumando $(-a)+(-a)+(-a)\ldots etc.$, *o* $-a-a-a\ldots etc.$, *o bien,* $-ab$. *Luego* $-\times+=-$.

En el caso último debe repetirse restando $-(-a)-(-a)-(-a)\ldots etc.$, *o* $+a+a+a\ldots etc.$, *o* $+ab$. *Luego* $-\times-=+$.

De igual manera, de las tres obras que hemos tratado, sólo en esta se intenta hacer un razonamiento más abstracto para demostrar la Ley de los signos.

3. Una comparación precisa

Localización: Capítulo II
Resolución de las ecuaciones
Página 57

En este apartado se explica al alumno cómo resolver una ecuación de primer grado. A esto se le añade la siguiente frase:

Una ecuación es comparable a una balanza en equilibrio, en la cual, para que subsista, es preciso agregar o quitar peso igual en ambos platillos.

En algunos libros de Matemáticas de la educación secundaria, cuando a un alumno se le quiere enseñar cómo solucionar una ecuación de primer grado, se hace uso de ejemplos con balanzas para que puedan concebir la resolución de ésta.

4. División por cero

Localización: Capítulo III
Discusión de las ecuaciones de primer grado
Página 77

En la exposición acerca de las ecuaciones de primer grado se intenta dar una explicación de lo que significa la cantidad $\frac{96}{0}$. Esto dice así:

Es una ley cierta que permaneciendo uno mismo el dividendo, en tanto que decrece el divisor, el cociente aumenta. Así pues, considerando por un esfuerzo de abstracción que cero es una cantidad infinitamente pequeña, se comprende que el cociente que origine debe ser una cantidad mayor que toda magnitud imaginable, es decir el infinito matemático.

Advertimos de paso que el infinito se representa en la escritura algebraica por este signo ∞.

Esta interpretación es parecida a la que ya se había presentado en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)*. Igual que en aquella, también se aproxima al uso de los límites.

5. Expresión cero entre cero

Localización: Capítulo III
Discusión de las ecuaciones de primer grado
Página 85

Siguiendo en lo anterior presentado, se llega a la expresión $\frac{0}{0}$. Se da la siguiente explicación:

Para esto nos colocamos en terreno de tanta abstracción como el que acabamos de atravesar. Cualquier cantidad multiplicada por cero, divisor, da cero, dividiendo; luego $\frac{0}{0}$ es lo que se quiera suponer, en otros términos, cantidad indeterminada.

De igual manera, esta interpretación es parecida a la que ya se había presentado en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)*. Notemos que Terrazas ya habla de que, para entender esto y lo anterior, se requiere de razonamiento muy abstracto.

Por último, nótese que la obra de Terrazas, al igual que la de Contreras, contiene la exposición de sus temas de manera más abstracta. Con esto también incluye demostraciones, haciendo énfasis en la importancia de usarlas cuando se enlistan teoremas y demás.

Similitudes y diferencias entre los libros

A lo largo del capítulo se mencionaron diversas semejanzas y diferencias entre estos tres libros. Para concluir diremos cuestiones referentes a los temas de las obras que sirvieron de antecedentes a estas tres de texto de la ENP.

Recuérdese que primero se presentaron la obra *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando (Benito Bails)* y el *Tratado elemental de matemáticas (José Mariano Vallejo*). En cuanto a sus temas, se presentan gran diversidad de ellos en las tres obras presentadas en este capítulo. Por la mayor variedad de temas que tiene, el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* se extiende tanto como las obras de Bails y Vallejo.

En referencia a similitudes y diferencias entre los tres libros presentados en este capítulo, las obras más extensas son el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* y el *Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)*.

No se juzga a los autores en cuanto a la manera de exponer tan minuciosamente cada uno de los temas del Álgebra, ya que con todo lo ya expuesto en el capítulo, se aprecia la dedicación y buen desarrollo en varios temas de cada una de las obras.

CAPÍTULO III

Cuestionarios para los exámenes de Álgebra

Cuestionarios para los exámenes de Álgebra

La ENP seguía a la Ley de Instrucción Pública y su Reglamento. Ésta incluía todo lo relativo a la aplicación de exámenes en las escuelas nacionales. Entre los lineamientos de tal ley se incluían que los exámenes debían ser realizados por tres profesores de la misma escuela, sin considerar al profesor del ramo, aunque posteriormente se aceptaba que de estos profesores podría haber alguien que no perteneciera a la misma escuela. Además, se indicaba que la calificación tenía que expresar el grado de instrucción del alumno, por lo que se debía calificar con las letras M, B, MB y PB, que significan: contestó Medianamente, Bien, Muy Bien y Perfectamente Bien, respectivamente. Todo esto se tenía que anotar en libros a los que llamaron "Libros de actas" (Figuras 3.1. y 3.2.).

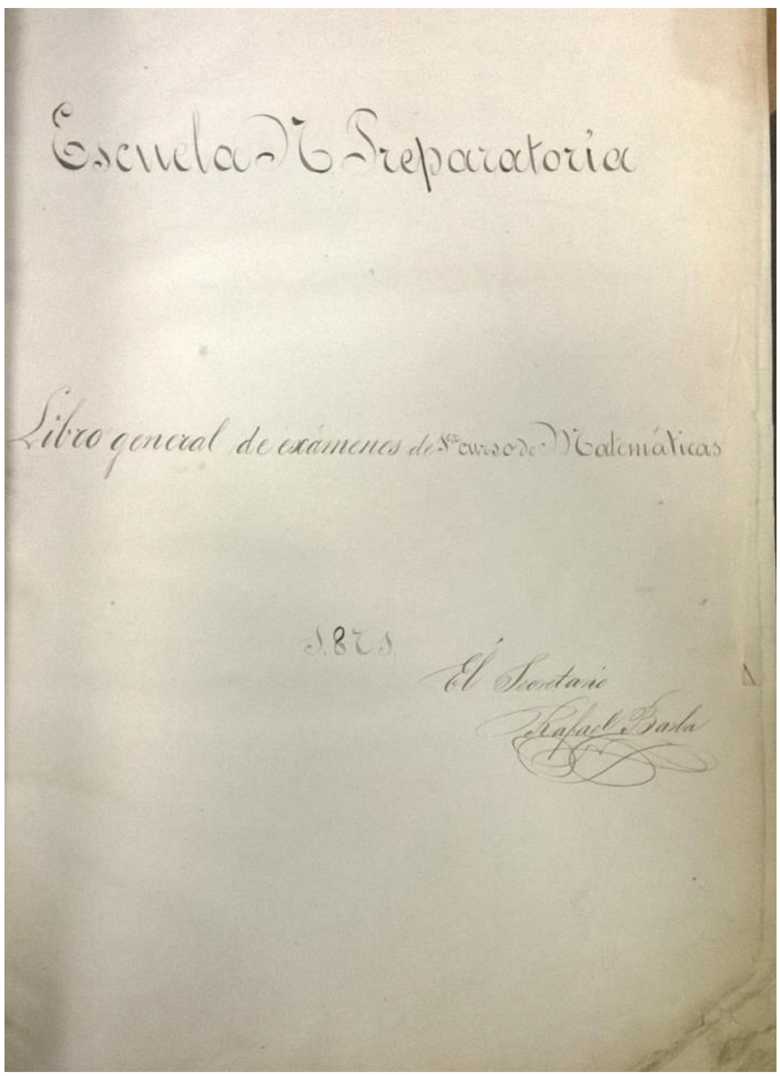
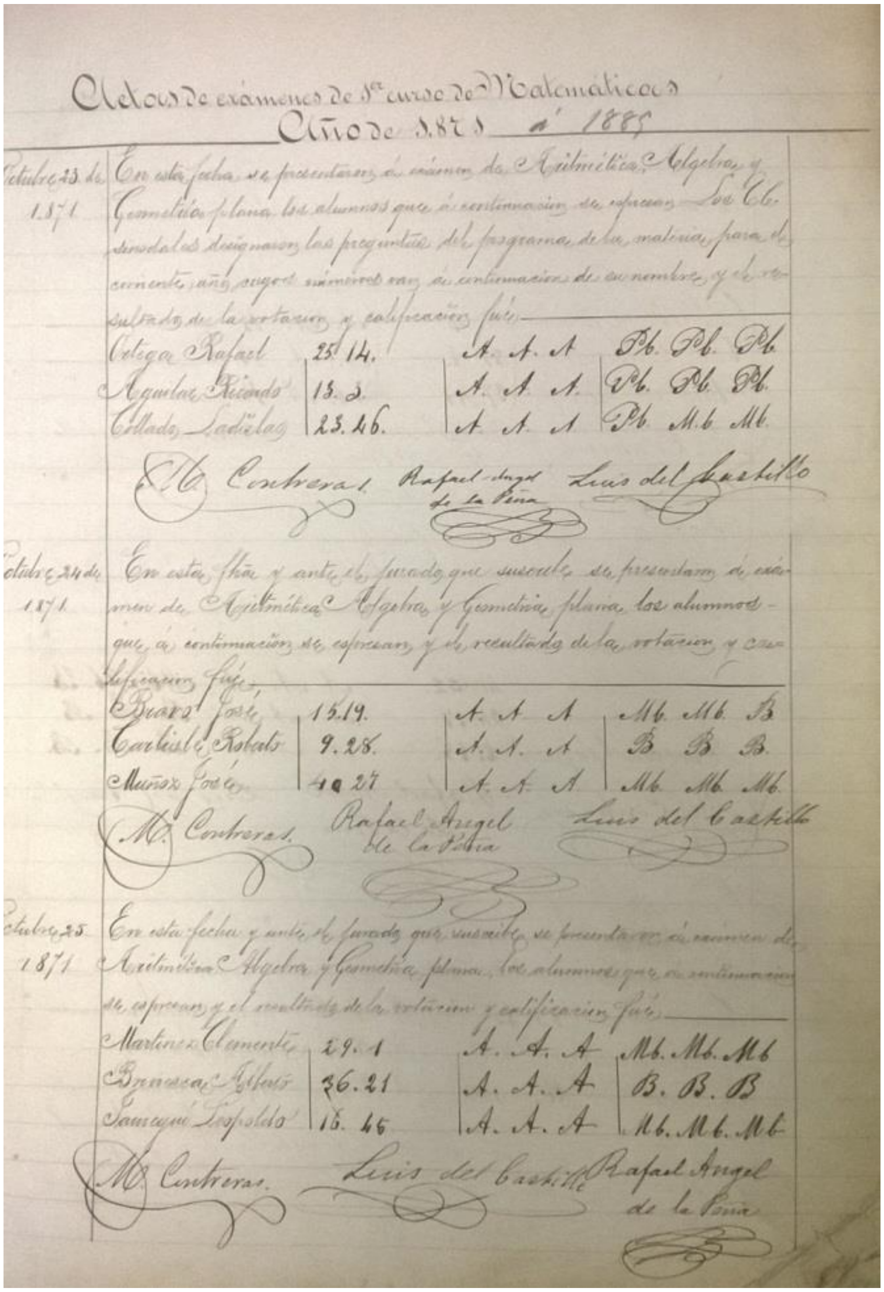


Figura 3.1. Hoja 1 del libro de actas número 3 (1871)



Actas de exámenes de 1er curso de Matemáticas
Año de 1871 á 1885

Octubre 23 de 1871

En esta fecha se presentaron á exámen de Aritmética, Algebra y Geometría plana los alumnos que á continuación se expresan. Los Cs. sinodales designaron las preguntas del programa de la materia para el corriente año, cuyos números van á continuación de su nombre, y el resultado de la votación y calificación fue:

Ortega Rafael	25. 14.	A. A. A	Pb. Pb. Pb
Aguilar Ricardo	13. 3.	A. A. A.	Pb. Pb. Pb.
Collado Ladislao	23. 26.	A. A. A	Pb. Mb. Mb.

M. Contreras. Rafael Angel de la Peña. Luis del Castillo

Octubre 24 de 1871

En esta fecha y ante el jurado que suscribe se presentaron á exámen de Aritmética, Algebra y Geometría plana los alumnos que á continuación se expresan, y el resultado de la votación y calificación fue:

Ibarra José	15. 19.	A. A. A	Mb. Mb. B
Carlisle Roberto	9. 28.	A. A. A	B. B. B.
Muñoz José	10. 27	A. A. A.	Mb. Mb. Mb.

M. Contreras. Rafael Angel de la Peña. Luis del Castillo

Octubre 25 1871

En esta fecha y ante el jurado que suscribe se presentaron á exámen de Aritmética, Algebra y Geometría plana los alumnos que á continuación se expresan y el resultado de la votación y calificación fue:

Martínez Clemente	29. 1	A. A. A	Mb. Mb. Mb
Barraca Alberto	36. 21	A. A. A	B. B. B
[illegible] Leopoldo	16. 45	A. A. A	Mb. Mb. Mb

M. Contreras. Luis del Castillo. Rafael Angel de la Peña

Figura 3.2. Hoja 2 del registro de calificaciones del libro de actas número 3 (1871)

En esta hoja, se aprecia la firma del profesor Manuel María Contreras.

Para la realización de los exámenes se contaban con fichas que contenían grupos de preguntas o actividades a realizar por el alumno a examinar. Quienes eran alumnos regulares, es decir, de asistencia regular, al presentar su examen tenían que contestar tres fichas; quienes no lo eran, contestaban más de tres de acuerdo al número de faltas que habían acumulado a lo largo del ciclo escolar.

Para la construcción de aquellas fichas se hacía un análisis de las obras que servían de texto para cada curso, en este caso para los cursos de Matemáticas. Con ello, se formulaban cuestiones relativas a cada uno de ellos, donde se indicaban el párrafo o la página del autor respectivo que contestaba o trataba dicha cuestión. Posteriormente, se formaba un índice de todas las materias tratadas en cada curso, y del lugar donde se podía hacer el estudio de ellas. Este índice se repartía a los alumnos, o se publicaba en cartelones para que todos tuvieran conocimiento de él y así poder preparar sus respectivos exámenes conforme a las preguntas contenidas en aquéllos.

Con las preguntas se formaban grupos de cuatro o más, según la importancia o variedad de las materias de cada curso a tratar. Se procuraba que en cada grupo hubiera cuestiones relativas a diversos temas y algunos que tuvieran aplicaciones prácticas. A cada grupo se le asignaba un número, y así se formaban los "catálogos de preguntas" que, posteriormente, se repartían a los profesores que calificaban los exámenes. En el momento en que estos profesores evaluaban, cada alumno, según su regularidad de asistencia, escogía tres números o más al azar, que generalmente era determinado por las bolas enumeradas que sacaban de alguna urna.

Los catálogos de preguntas eran llamados "Cuestionarios". En éstos, los profesores examinadores debían hacer anotaciones si notaban cuestiones que les parecieran defectuosas, entendiendo esto como preguntas que abarcaran demasiada o muy poca materia para evaluar o que les parecieran "oscuras", donde tal vez se refería a que fueran muy difíciles para los alumnos. Con esto se hacían correcciones para los cuestionarios posteriores.

Gracias al Archivo Histórico de la Universidad Nacional Autónoma de México se logró obtener las fuentes históricas primarias de algunos Cuestionarios para el primer curso de Matemáticas, que era donde se impartía la materia de Álgebra. Así mismo, diversos libros de actas de los exámenes que se realizaban. Se reconoce el apoyo brindado para la toma de fotografías de dicho material, indispensable para la realización de este capítulo.

Los cuestionarios que se presentarán son: Cuestionario de primer curso de matemáticas, del año 1899 y Cuestionario para los exámenes del Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria, en las versiones de los años 1902, 1903 y 1904.

Cuestionario de primer curso de matemáticas (1899)

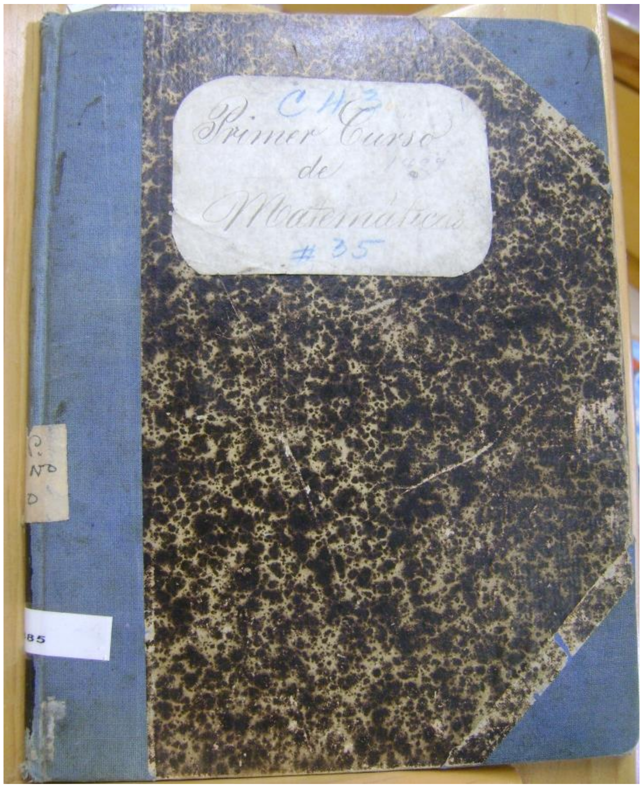


Figura 3.3. Portada del cuestionario

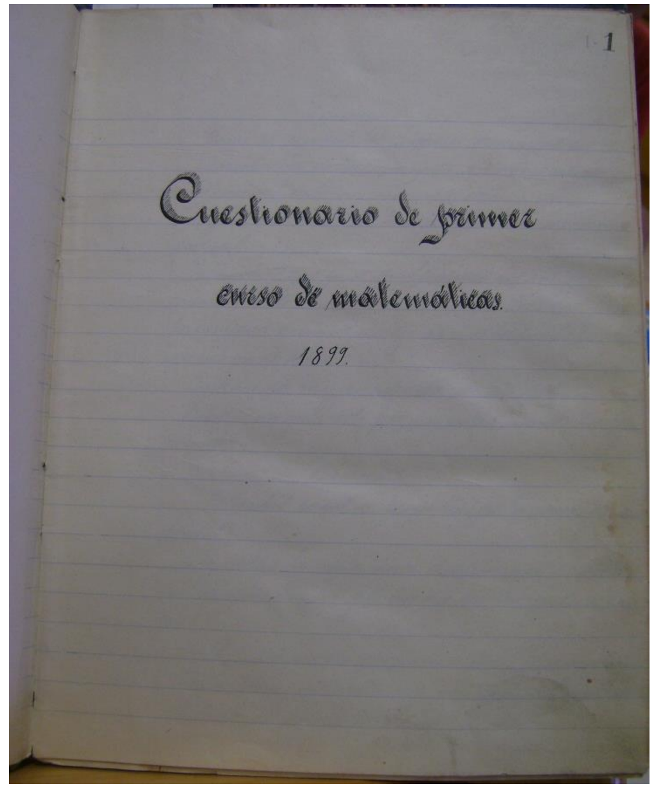
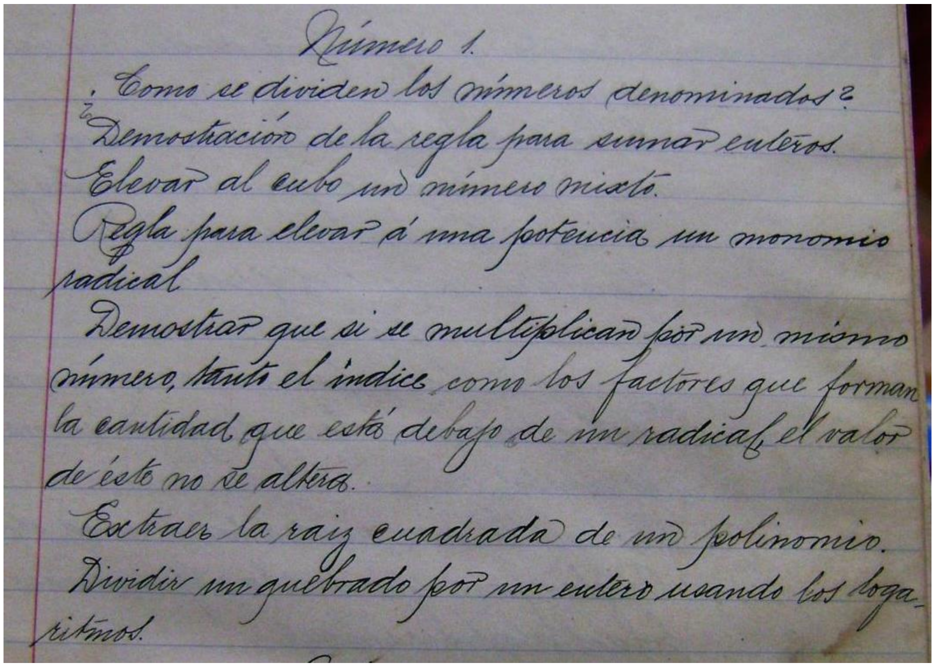


Figura 3.4. Hoja 1 del cuestionario

Como puede apreciarse en las figuras 3.3. y 3.4., el "Cuestionario de primer curso de Matemáticas" es un libro manuscrito, lo que dificultó su lectura. Se indica que el año de elaboración fue en 1899. Contiene 19 páginas, en donde se localizan 50 fichas, con 7 preguntas cada una. La mayoría se conforma de 3 de Aritmética y 4 de Álgebra, siguiendo este mismo orden. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 3.5.



Número 1.

¿Como se dividen los números denominados?

Demostración de la regla para sumar enteros.

Elevar al cubo un número mixto.

Regla para elevar á una potencia un monomio radical

Demostrar que si se multiplican por un mismo número, tanto el índice como los factores que forman la cantidad que está debajo de un radical, el valor de ésto no se altera.

Extraer la raiz cuadrada de un polinomio.

Dividir un quebrado por un entero usando los logaritmos.

Figura 3.5. Ficha 1, en hoja 2
del cuestionario

A continuación se presenta el contenido de la parte de Álgebra de las 50 fichas. Se conservó la gramática y ortografía original.

- *Número 1*

Regla para elevar á una potencia un monomio radical.
Demostrar que si se multiplican por un mismo número, tanto el índice como los factores que forman la cantidad que está debajo de un radical el valor de ésta no se altera.
Extraer la raíz cuadrada de un polinomio.
Dividir un quebrado por un entero usando los logaritmos.

- *Número 2*

Regla para introducir á un radical una cantidad que está fuera como factor.
Demostrar la regla para dividir por medio de los logaritmos.
Encontrar el último término de una progresión geométrica, dados el primero, la razón y la suma.
Ejecutar una multiplicación de monomios cuyos coeficientes sean enteros y positivos.

- *Número 3*

Reglas para ejecutar las operaciones de quebrados algebraicamente.
Demostrar que en una ecuación pura de 2° grado la incógnita tiene dos valores que sólo difieren por el signo.
Determinar la fórmula para la suma de los términos en una progresión geométrica decreciente al infinito.
Ejecutar una división de enteros por medio de los logaritmos.

- *Número 4*

Regla para extraer la raíz cuadrada de un trinomio que sea cuadrado perfecto.
Demostrar á lo que es igual un logaritmo defectivo.
Resolver un problema del primer caso de interés simple, en el que no se conoce el tanto por ciento.
Multiplicar quebrados algebraicos.

- *Número 5*

Definición de logaritmos.
Demostrar la regla para extraer una raíz á un monomio radical.
Despejar la incógnita en una ecuación mixta de segundo grado, siguiendo toda la secuela del cálculo.
Elevar á una potencia impar una cantidad negativa, usando los logaritmos.

- *Número 6*

¿Cómo se ejecuta la reducción de términos semejantes?
Demostrar que no se puede determinar el sentido de la desigualdad resta, cuando las desigualdades que se restaron tienen el mismo sentido.
Dadas las dos fórmulas de la suma y del último término, para la progresión aritmética, deducir de ellas las otras tres.
Buscar el logaritmo correspondiente á un número compuesto de enteros y decimales.

- *Número 7*

Demostrar que, en la progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes de los estremos es igual á la suma de éstos.
Despejar una incógnita en una ecuación mixta de segundo grado, sin seguir toda la secuela del cálculo.
Reducir radicales á un mismo índice.

- *Número 8*

Hacer la clasificación de los términos cuando se compraran entre sí.

Demostrar la regla para multiplicar por medio de los logaritmos.
Elevar al cuadrado la diferencia de dos cantidades.
Buscar el logaritmo de un número mayor que ciento ocho mil.

- *Número 9*

Regla para extraer la raiz cuadrada á un monomio.
Desarrollar la potencia de un binomio, siendo el exponente de la potencia entero y positivo.
Demostrar á que es igual una cantidad elevada á cero.
Extraer una raiz á un quebrado por medio de los logaritmos.

- *Número 10*

Regla para despejar una incógnita en una ecuación mixta de segundo grado.
Indicar de cuántas maneras se pueden presentar los límites para el valor de una incógnita cuando esta se halla en varias desigualdades.
Sacar una cantidad como factor común en un polinomio.,
Ejecutar la división de dos monomios, cuyos exponentes sean negativos.

- *Número 11*

Regla para multiplicar radicales.
Demostrar que $\sqrt[mx]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[x]{a}}$.
Reconstruir una ecuación mixta de segundo grado por medio de sus raices.
Buscar el logaritmo de una decimal.

- *Número 12*

Regla para restar cantidades algebraicas.
Discutir la ecuación $ax + b = cx + d$.
Buscar por medio de los logaritmos un medio geométrico entre dos números.

- *Número 13*

Demostrar á lo que es igual el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia.
Convertir un monomio, cuyos exponentes sean negativos ó fracciones, en otro cuyos exponentes sean positivos.
Multiplicar un entero por una decimal haciendo uso de los logaritmos.

- *Número 14*

Reglas para ejecutar las operaciones con las cantidades afectadas de exponentes negativos fraccionarios.
Demostrar la regla para restar en algebra.

Simplificar un quebrado en que el factor común no esté manifiesto.
Elevar una decimal á una potencia por medio de los logaritmos valiéndose de la característica complementaria.

- *Número 15*

Sacar la fórmula del descuento á interés compuesto.
Indicar como serán las raices de una ecuación numérica y mixta de segundo grado.
Elevar un monomio radical á una potencia cuyo exponente sea submúltiplo del índice.

- *Número 16*

Regla para sumar dos polinomios.
Sacar la fórmula del descuento comercial.
Sacar la fórmula del segundo caso de aligación.
Elevar un binomio á una potencia cuyo exponente sea negativo.

- *Número 17*

Regla para elevar un monomio radical á una potencia.
Demostrar á lo que es igual una cantidad cuyo exponente es negativo.
Resolver un problema de segundo grado con dos incognitas.
Determinar los logaritmos de algunos números décuplos.

- *Número 18*

Regla para extraer la raíz cuadrada á un binomio.
Despejar una incógnita en una ecuación exponencial.
Elevar un binomio á una potencia cuyo exponente sea fracción.
Ejecutar una suma de cantidades radicales.

- *Número 19*

¿Que cosa es discutir una ecuación?
Demostrar que si se dividen por un mismo número, el índice de un radical y los exponentes de todos los factores que forman la cantidad que está debajo del signo, el valor del radical no se altera.
Resolver un problema del segundo caso de interés simple.
Elevar un quebrado á una potencia por medio de los logaritmos.

- *Número 20*

Indicar cuál será el valor de la incógnita en una regla de tres simple sin plantear el problema.

¿A que son iguales la suma de las raices y el producto de ellas en una ecuación mixta de segundo grado?
Demostrar que la potencia de una raiz es igual a la raiz de la potencia de la cantidad que está debajo del radical.
Eliminar una incógnita por el método de adición y sustracción.
Elevar á una potencia un monomio cuyos exponentes sean fracciones.

- *Número 21*

Indicar de cuantas maneras pueden ser los valores límites de la incógnita en los problemas de desigualdades.
Demostrar las reglas para pasar las cantidades de un miembro á otro de una ecuación.
Sacar la fórmula del segundo caso de interés compuesto.
Elevar al cuadrado un polinomio.

- *Número 22*

Reglas para elevar al cuadrado y extraer la raiz cuadrada de un monomio.
Demostrar que en una ecuación mixta de segundo grado la única incógnita solo tiene dos valores y que conocido uno de ellos se puede deducir el otro.
Dividir monomios cuyos exponentes sean quebrados.
Multiplicar decimales por medio de los logaritmos.

- *Número 23*

Indicar en que se convierten las operaciones de multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raices, cuando se ejecutan por logaritmos.
Demostrar que si en una desigualdad se multiplican sus dos miembros por una cantidad negativa, cambia de sentido.
Sacar la fórmula para determinar el último término de una progresión aritmética conociendo el primer término, la razón y el número de términos.
Dividir quebrados por medio de los logaritmos.

- *Número 24*

¿Qué términos no se reducen en el producto de dos polinomios?
Demostrar que una desigualdad subsiste en el mismo sentido si se quita á sus dos miembros la misma cantidad.
Resolver una ecuación pura de segundo grado.
Extraer la raiz á un monomio cuyos exponentes sean fracciones negativas.

- *Número 25*

Regla para dividir polinomios.

Discutir la ecuación $ax^2 + bx = c$.
Simplificar un monomio radical cuando el índice y los exponentes de los factores que componen la cantidad que está debajo del signo pueden dividirse por el mismo número.
Multiplicar decimales por logaritmos.

- *Número 26*

Indicar las diversas maneras de reconstruir una ecuación mixta de segundo grado.
Demostrar la regla para elevar por logaritmos á una potencia una cantidad.
Multiplicar dos binomios compuestos de un entero y un quebrado.
Conocida la suma de un capital con sus intereses, á interés simple, el tiempo que estuvo impuesto, y el rédito, determinar el capital.

- *Número 27*

Regla para despejar una incógnita en una desigualdad.
Demostrar que los logaritmos son números puestos en progresión aritmética, etc.
Elevar á una potencia un monomio por potencias sucesivas.
Resolver el primer caso de aligación, cuando se quiere ganar un tanto por ciento.

- *Número 28*

Expresar el uso de los números en álgebra.
Discutir la ecuación $x^2 \pm px + q = 0$.
Ejecutar una resta de polinomios con semejantes radicales.
Extraer la raíz á un trinomio cuadrado perfecto.

- *Número 29*

Definición de ecuación y distinción de sus clases.
Demostrar como puede pasar una cantidad del numerador al denominador de un quebrado ó viceversa.
Resolver un problema de desigualdades.
Elevar al cuadrado un polinomio.

- *Número 30*

¿Como se extrae una raiz á un monomio y en que casos la tienen exacta?
Demostrar la regla para extraer una raiz á un radical.
Demostrar el tiempo que debe estar impuesto un capital, á interés compuesto, para que se duplique.
Extraer la raiz cúbica de un entero por medio de logaritmos.

- *Número 31*

Definir lo que es eliminar una incógnita indicando los métodos para hacerlo.
Demostrar la regla para reducir radicales al mismo índice.
Formar un término aislado del desarrollo de una potencia de un binomio.
Dividir dos polinomios.

- *Número 32*

Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto.
Demostrar que la desigualdad cociente resulta en el mismo sentido que tiene la desigualdad dividendo, cuando las desigualdades que se dividen están en sentido inverso.
Multiplicar un entero por una decimal por medio de los logaritmos.
Indicar como serán las raices de la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$.

- *Número 33*

Definir lo que es sustitución y lo que es reducción.
Demostrar la regla para extraer una raiz por logaritmos.
Resolver el segundo caso de aligación, cuando la mezcla no puede pasar de una cantidad fija.
Buscar el logaritmo de un número que conste de enteros y decimales.

- *Número 34*

Definir, tanto la progresión en general, como sus clases.
Demostrar la regla para elevar á una potencia un radical.
Descomponer en factores la diferencia de dos cuadrados.
Buscar el logaritmo de un número menor que 1200.

- *Número 35*

Cuantas partes se deben considerar en la resolución de un problema.
Demostrar que la diferencia entre los logaritmos de los números consecutivos disminuye á medida que crecen estos números.
Ejecutar una división de monomios con exponentes fraccionarios.
Resolver una regla de aligación, en que no se tenga sino determinada cantidad de uno de los efectos que deben mezclarse.

- *Número 36*

¿Qué variación debe hacerse en la ecuación que sirvió de planteo para un problema, á fin de que el valor negativo obtenido para la incógnita se cambia en positivo y el enunciado sea el verdadero?

Demostrar á lo que es igual una cantidad cuyo exponente sea una fracción negativa.
Determinar el número de términos de una progresión geométrica, cuando se conocen la suma, la razón y el último término.
Ejecutar una división de dos binomios que tengan un entero y un quebrado.

- *Número 37*

Indicar las diversas formas que puede presentar un término y determinar como se aprecia en ellas su grado.
Demostrar que una desigualdad cambia de sentido, si se dividen sus dos miembros por una cantidad negativa.
Resolver un problema de segundo grado con una incógnita.
Encontrar el número á que corresponde un logaritmo cuya característica es negativa.

- *Número 38*

Regla para quitar los denominadores en una desigualdad.
Demostrar que el producto de las raices de dos factores es igual á la raiz del producto de estos factores.
Dadas las fórmulas para determinar la suma y el último término, en una progresión geométrica deducir las otras tres.
Resolver un problema del primer caso de aligación.

- *Número 39*

¿Que resultado se obtiene, si se multiplica la suma por la diferencia de dos cantidades?
Demostrar la regla para elevar al cuadrado un polinomio.
Determinar el tiempo que debe estar impuesto un capital, á interés simple, para que se duplique.
Encontrar el número á que corresponde un logaritmo con características complementarias.

- *Número 40*

Indicar las operaciones, que en una ecuación pueden hacerse, sin que se altere la igualdad.
Demostrar que una desigualdad subsiste en el mismo sentido si se les agrega a sus dos miembros la misma cantidad.
Interpolar varios términos aritméticos entre dos números.
Ejecutar una reducción de términos semejantes.

- *Número 41*

Regla para quitar los denominadores en una ecuación.
Discutir la ecuación $x^2 \pm px - q = 0$.
Extraer la raiz á un monomio en la forma de fracción.
Presentar las diferentes formas que puede tomar el logaritmo de un quebrado propio.

- *Número 42*

Demostrar la regla para dividir monomios.
Elevar al cubo una decimal por medio de los logaritmos.
Elevar á una potencia, cuyo exponente sea entero y positivo, un polinomio.

- *Número 43*

¿Cuántos valores tiene una incógnita en una ecuación de primer grado y bajo cuales formas?
Demostrar que si se multiplican dos desigualdades, que estén en el mismo sentido, la desigualdad producto resultará también en ese sentido.
Deducir la fórmula para interpolar términos geométricos.
Elevar al cuadrado un quebrado por medio de los logaritmos.

- *Número 44*

Regla para multiplicar polinomios.
Demostrar el resultado de elevar al cuadrado la diferencia de dos cantidades.
Resolver una ecuación de primer grado.
Reducir radicales al mismo índice.

- *Número 45*

Manifestar la diferencia que hay entre las ecuaciones puras y las mixtas de segundo grado expresando sus formas generales.
Demostrar la regla para multiplicar monomios.
Sacar la fórmula del segundo caso de interés simple.
Elevar al cubo un polinomio.

- *Número 46*

Regla para extraer la raiz cuadrada de un polinomio.
Demostrar la regla para extraer una raiz por medio de los logaritmos.
Sacar la fórmula del primer caso de aligación.
Dadas la suma, la razón y el número de términos, en una progresión geométrica, determinar el primer término.

- *Número 47*

Explicar lo que representan los símbolos $a^0, a^{-\beta}, a^{\frac{m}{n}}, a^{-\frac{m}{n}}$.
Demostrar que no se altera una ecuación si se cambian signos á todos sus términos.
Sacar la fórmula del primer caso de interés compuesto.
Sumar cantidades mixtas algebraicas.

- *Número 48*

Explicar lo que se entiende por cantidades negativas y de que modo se puede considerar su valor.
Demostrar que los números décuplos tienen la misma mantiza para sus logaritmos.
Aplicación del método de sustitución en la eliminación de una incógnita.
Conocida la suma del capital y los intereses del capital y el tanto por ciento, á interés simple, determinar el tiempo que estuvo impuesto dicho capital.

- *Número 49*

¿Cómo se transforma un monomio radical en otro de igual valor cuyo índice sea múltiplo ó submúltiplo del primero?
Demostrar que la raiz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raices de dichas cantidades.
Hallar un medio geométrico entre dos cantidades por medio de los logaritmos.

- *Número 50*

Indicar lo que se llama término y los nombres que toman las expresiones algebraicas según el número de términos que las forman.
Demostrar que en una ecuación mixta de segundo grado la suma de las raices es igual al coeficiente de la incógnita en su primera potencia, con signo contrario, y el producto de ellas, á las cantidades dadas conocidas con su mismo signo.
Interpolar varios términos geométricos entre dos números.
Determinar la fórmula del descuento á interés simple.

Observaciones

En este cuestionario podemos apreciar gran rigurosidad en cada una de las fichas, ya que muchas de las preguntas están enfocadas a la demostración de propiedades o reglas que deben usarse en el Álgebra, como es el caso de la ficha número 2, donde se encuentra el siguiente enunciado: *Demostrar la regla para dividir por medio de los logaritmos.* También, hay problemas que implican la deducción de reglas, como en la ficha número 6, donde, entre las preguntas se encuentra la siguiente: *Dadas las dos fórmulas de la suma y del último término, para la progresión aritmética, deducir de ellas las otras tres.* Y otros casos, donde se indica la resolución de un ejercicio, como en la ficha 42, que contiene la siguiente pregunta: *Elevar á una potencia, cuyo exponente sea entero y positivo, un polinomio.* En éste último, no se indica si se tenía que generalizar tal cuestión o escoger un problema específico.

En general, cada ficha contiene cualquiera o las 3 cuestiones anteriormente resaltadas, usando diversos temas del Álgebra. En relación a esto, podemos ver que entre los temas incluidos en la fichas están, principalmente, multiplicación de expresiones algebraicas, como monomios y polinomios, operaciones con radicales, ecuaciones de primer y segundo grado y logaritmos.

Más adelante se comparará este cuestionario con los posteriores a él.

Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria (1902)

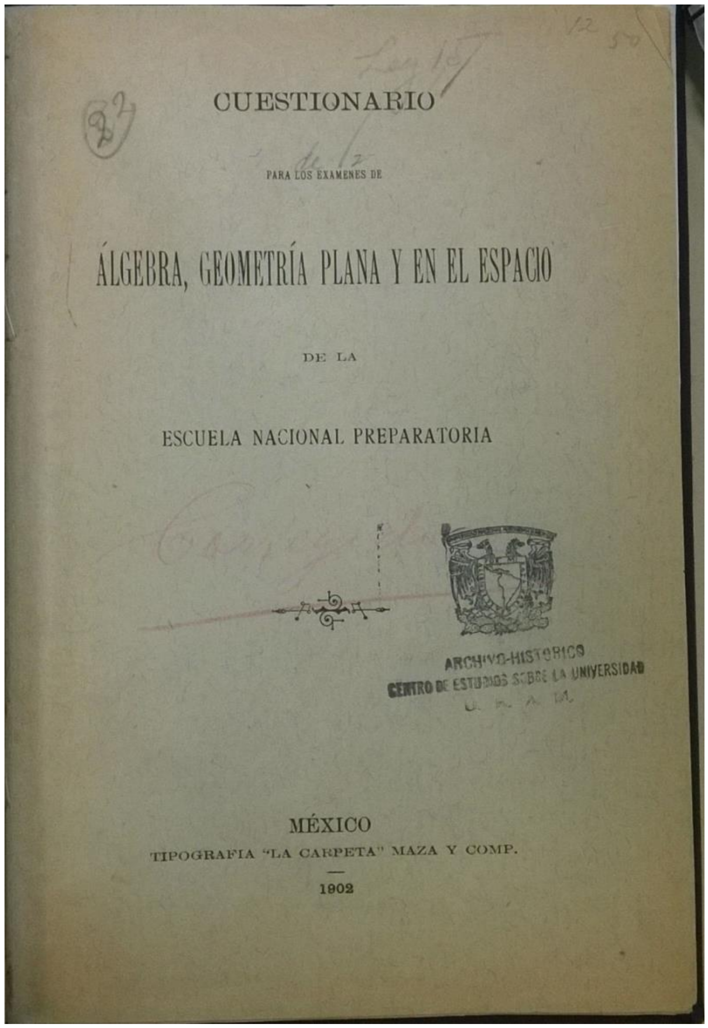


Figura 3.6. Hoja 1 del cuestionario

El "Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria" es un libro impreso. El año de elaboración de éste es en 1902. Contiene 41 páginas con 66 fichas. Cada una de las fichas se conforma, en promedio, de 6 preguntas, de las cuales son 3 de Álgebra y el resto de Geometría plana y en el espacio, siguiendo ese orden.

A continuación se presenta el contenido de la parte de Álgebra de las 66 fichas. Nuevamente, se conservó la gramática y ortografía original.

1

Ley de la formación del cociente y de las restas sucesivas, en la división de la diferencia de las potencias de grado m de dos cantidades, por la diferencia de estas últimas.

Demostrar que una ecuación subsiste si se cambia signo á cada uno de sus términos.

Resolver la ecuación $4x^4 - 99x^2 = 25$.

2

Reconocer a priori en las ecuaciones $25x^2 - 20x + 7 = 0$, $6\left(x - {}^1\!/_2\right)\left(x + {}^1\!/_3\right) = 0$, $\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{x+2b}{a+b} = 2$, si las raíces son reales y desiguales, reales é iguales, ó imaginarias, y cuáles son los signos de las raíces.

Elevar al cuadrado el polinomio $3x^4 - 2x^{1/2} + \frac{1}{x^{-2}} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{x}{2}$.

Demostrar la regla de la substracción algebraica.

3

Demostrar la regla para elevar al cuadrado un polinomio.

Establecer la fórmula que da el valor del último término de una progresión aritmética, en función del primero, de la razón y del número de términos.

4

Establecer la fórmula del segundo caso de interés compuesto.

Demostrar que la raíz del cociente de dos cantidades, es igual al cociente de las raíces de las mismas cantidades.

Encontrar la ecuación cuyas raíces son $x = 0$, $x = \pm(a+b)$, $x = \pm(a-b)$.

5

¿Qué operaciones pueden hacerse en una ecuación, subsistiendo la igualdad, y por qué?

Encontrar la condición necesaria para que las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, estén en la relación de $\frac{m}{n}$.

Simplificar la expresión $\frac{a+b}{(b-c)(a-c)} + \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+c}{(a-b)(c-b)}$.

6

Exponer las reglas relativas á la multiplicación de los polinomios.

¿Cuál sería la base del sistema de numeración en el que el número 602 estuviese representado por el 738?

Demostrar que la raíz del producto es igual al producto de las raíces.

7

De las fórmulas que dan la suma de los términos de una progresión aritmética, y el último término, deducir las otras tres.

Condiciones que debe tener una ecuación de cuarto grado para que pueda reducirse su resolución a la de una de segundo grado.

Encontrar dos números conociendo la suma de sus cuadrados a^2, y la de sus cuartas potencias b^4.

8

Extensión, por convención, de la regla de la adición, á las cantidades negativas.
Demostrar la regla para reducir radicales al mismo índice.
Resolver las ecuaciones: $x + y = 94$, $log\, x + log\, y = 2\ 64836$.

9

Demostrar las principales propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas, y deducir de ellas la teoría de los logaritmos.
Demostrar que si se multiplican ordenadamente dos desigualdades establecidas en el mismo sentido, la desigualdad producto resulta en igual sentido.
Resolver el sistema de ecuaciones: $15\frac{x}{2} - 40 + 6\frac{y}{6} = 0$, $4\frac{5}{21}y = 112\frac{4}{5}x - 95\frac{11}{53}$.

10

¿En qué caso $x^m + a^m$, es divisible por $x + a$?
Dadas las fórmulas para determinar la suma y el último término de una progresión geométrica, deducir las otras tres.
Un capitalista pide prestados $48,000, á un interés determinado, con el objeto de prestar $150,000 a un interés más elevado, y gana en la operación $5,715; ¿con qué interés le han prestado y con cuál ha prestado?

11

¿Cómo se concibe que las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, sean símbolos de indeterminación?
Regla para reducir radicales á un mismo índice, exponiendo su fundamento.
Demostrar que la suma de los n primeros números impares, es igual á n^2.

12

Observaciones relativas á la multiplicación de polinomios, origen del primero y del último término del producto; máximo y mínimo del número de términos del producto, grado de los mismos, etc.
Ejecutar, sirviéndose de los logaritmos, la multiplicación de 375428 por 0 000873.
Demostrar que una desigualdad subsiste, si se quita á sus dos miembros, la misma cantidad.

13

Exponer las tres formas generales á que puede reducirse una ecuación de segundo grado de una incógnita.
Exponer las reglas para ejecutar las operaciones con quebrados y mixtos algebraicos.
Las dos agujas de un reloj señalan las doce; ¿a qué hora se encuentran de nuevo y cuántas veces se encuentran en doce horas?

14

¿A qué es igual la suma y á qué el producto de las raíces en una ecuación mixta de segundo grado?
Probarlo.
Elevar el número 0'0008471 a la 7ª potencia, sirviéndose de los logaritmos.
Demostrar la regla para extraer una raíz por medio de los logaritmos.

15

Exponer la teoría de la división de polinomios.
Resolver la ecuación, $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b}$.
Dar y demostrar la regla para elevar un monomio radical á una potencia.

16

Caracteres de imposibilidad de la división de los monomios y simplificación del cociente fraccionario.
Exponer las reglas para la reducción de los términos semejantes.
Calcular en forma de fracción decimal y sirviéndose de los logaritmos, $x=\sqrt[3]{\frac{23}{72385}}$.

17

Diferencia entre la fracción aritmética y la algebraica y modificación consiguiente en los razonamientos.
Explicar la concepción de las cantidades negativas.
La suma de dos números es 16; la diferencia de sus cuadrados es 32; ¿cuáles son estos números?

18

Resolver la ecuación $\frac{5x}{6}+2=\frac{x}{2}+7+\frac{x}{3}$, *e interpretar el resultado.*
Resolver las ecuaciones $3x^2-2y^2=19$, $x^2+5y^2=38$.
Exponer y demostrar la regla para transformar un monomio radical en otro de igual valor, cuyo índice sea múltiplo o submúltiplo del primero.

19

Demostrar que un trinomio de segundo grado puede descomponerse en dos factores de primero.
Presentar las diferentes formas que puede afectar el logaritmo de un quebrado propio.
Resolver la ecuación $x^2-x+1=0$.

20

Resolver la ecuación $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$, *comprobando el resultado.*
Establecer la fórmula del segundo caso de aligación.
Indicar de cuántas maneras pueden presentarse los límites para el valor de una incógnita, cuando ésta se halla en varias desigualdades.

21

Ley de la formación de los términos del cociente en la división de un polinomio entero y racional en x por $x - a$. Condición necesaria y suficiente para que la división sea exacta. Ley de la resta cuando la división no es exacta.

Encontrar dos números conociendo su diferencia a y la diferencia de sus cubos b^3, expresando en qué casos habrá valores reales y positivos para las incógnitas.

Regla para formar un término aislado del desarrollo de la potencia de un binomio.

22

Resolver la ecuación $x - 1 = -\sqrt{3x - 5}$, comprobando los valores, y en caso de que no verifiquen la ecuación explicar por qué.

Simplificar la expresión:

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Definir lo que es eliminar una incógnita y exponer los métodos que hay para ejecutarlo.

23

Demostrar que el polinomio $x^3 + px^2 + qx + r$, es divisible por $x - a$ y que, en consecuencia, puede descomponerse en tres factores de primer grado.

Dar y demostrar la regla de la sustracción.

Multiplicar $(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \cdots - b^{m-1})$, por $(a + b)$.

24

Resolver las ecuaciones $a^2 + ay + x = 0$, $b^2 + by + x = 0$.

Discutir la ecuación $x^2 \pm px - q = 0$.

Indicar las diversas maneras de reconstruir una ecuación mixta de segundo grado.

25

Multiplicar $(x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Discutir la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostrar cómo puede pasar una cantidad del numerador al denominador o viceversa.

26

Encontrar dos números conociendo su diferencia a y la diferencia de sus cuadrados b^2.

Expresar en qué se convierten las operaciones de elevación á potencias y extracción de raíces, cuando se ejecutan sirviéndose de los logaritmos, y demostrarlo.

Demostrar la regla para extraer raíz á un radical.

27

Encontrar la condición para que la diferencia de las potencias pares y semejantes de dos cantidades, sea divisible por la suma de éstas.

Exponer la regla de la adición.

Resolver la ecuación $\frac{x}{7}+39=\frac{3x}{4}-12$*.*

28

Resolver las ecuaciones $2x+5y+3z=17$, $3x-2y-z=12$, $5x+3y-2z=18$*.*

Demostrar que una desigualdad cambia de sentido si se multiplican sus dos miembros por una cantidad negativa.

Demostrar á qué es igual el producto de dos cantidades por su diferencia.

29

Exponer y demostrar las reglas de la multiplicación de los monomios.

Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto.

Verificar la igualdad, $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=(aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-ba'-cd'-dc')^2+(ac'-ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2$.

30

Caracteres de imposibilidad de la división de los polinomios.

Exponer y demostrar la regla para quitar los denominadores en una ecuación.

Encontrar dos números conociendo su relación $\frac{m}{n}$ *y la diferencia de sus cuadrados* b^2*.*

31

Discutir los valores de x *é* y *deducidos del sistema de ecuaciones* $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$.

Definir la progresión, en general, y sus clases.

Encontrar dos números conociendo su producto a *y su cociente* b*.*

32

Demostrar que la suma de las potencias semejantes de dos cantidades, no es divisible por la diferencia de éstas.

Exponer y demostrar la regla para introducir en un radical una cantidad que está fuera como factor.

Calcular los cuatro términos de una proporción geométrica, sabiendo que el primero es 4 unidades mayores que el segundo, que el tercero es 3 unidades mayor que el cuarto y que la suma de los cuadrados de los 4 términos es 62'5.

33

Teoría de la división de monomios. Significación del exponente 0, y de los exponentes negativos.
Demostrar que los logaritmos de los números décuplos, tienen la misma mantiza.
Interpolar tres medios geométricos entre 1 y 10, y tres medios aritméticos entre 0 y 1, con la aproximación de 0 01, sin servirse de los logaritmos.

34

Establecer las relaciones que existen entre los coeficientes y las raíces de una ecuación de segundo grado.
Establecer la fórmula de descuento á interés simple.
Resolver la ecuación $(0'06971)^x = 0'00856$.

35

Discutir la ecuación $ax + b = cx + d$.
Demostrar que la diferencia entre los logaritmos de los números consecutivos disminuye á medida que crecen estos números.
Dividir por medio de los logaritmos los quebrados $\frac{1}{0.0069725}$, $\frac{0'03485}{8739246}$.

36

Establecer la fórmula del primer caso de aligación.
¿Cómo se extrae raíz á un monomio, y en qué casos la tiene exacta?
Una persona ha colocado en un Banco una suma de $\$160{,}000$ *al* 5% *anual, después de 4 años, 7 meses y 23 días, pide que se le reembolse; ¿cuánto le debe el Banco por capital y réditos?*

37

¿Cuál es la regla práctica para extraer la raíz de un trinomio cuadrado perfecto, y cuál es su fundamento?
Demostrar que en la progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es igual á la suma de éstos.
Resolver las ecuaciones $ax + by = c, x^2 + y^2 = 1$, *estableciendo las condiciones de realidad de las raíces.*

38

Exponer y demostrar las reglas para la reducción de los términos semejantes.
Demostrar que no se alteran las soluciones de una ecuación agregando ó quitando una misma cantidad a sus dos miembros.
Dividir el número 590 en dos partes cuyo producto sea 80464.

39

Exponer y demostrar la regla para extraer raíz á un monomio cuyos exponentes son fracciones negativas.

Establecer las condiciones que debe tener una ecuación de 6° grado, para que su resolución se reduzca a la de una de 2°.

Resolver las ecuaciones $2x^2 + 3y^2 = 37$, $3xy = 5$.

40

Exponer y demostrar las reglas para pasar una cantidad de un miembro á otro de una ecuación.

Indicar cómo serán las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Demostrar que todo número positivo tiene un logaritmo.

41

Exponer y demostrar la regla para dividir monomios. Caracteres de imposibilidad de la división.

Demostrar que en una ecuación pura de segundo grado, la incógnita tienen dos valores iguales, pero de signos contrarios.

Calcular la base del sistema de logaritmos en el que el número 10 es el logaritmo de 9.

42

Precisar las diferencias que hay entre la suma o adición aritmética y la adición algebraica.

¿Cuándo pueden dividirse dos desigualdades, obteniéndose un resultado determinado, y por qué?

Resolver las ecuaciones $y + z = 19$, $z + x = 15$ y $x + y = 10$.

43

Resolver el sistema de ecuaciones $4x - 5y = 24$ y $52x - 65y = 192$, comprobando el resultado y explicando las anomalías que pudiere haber en él.

Resolver las ecuaciones á que dan lugar los siguientes problemas, exponiendo las consecuencias que se deducen de los resultados. Encontrar un numero tal, que sumado sucesivamente con 5 y con 7, las sumas obtenidas sean proporcionales a 1 y 2; ¿en qué sistema de numeración el numero 5 puede estar representado por 29?

Encontrar la suma de los cuadrados de las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + px + q = 0$, sin resolver la ecuación.

44

Establecer la fórmula del segundo caso de interés simple.

Simplificar la expresión $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} - \frac{ac}{(a-b)(b-c)} - \frac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

Demostrar que en un ecuación de primer grado la incógnita tiene un solo valor.

45

¿A que es igual un logaritmo defectivo, y por qué?

Demostrar que una desigualdad cambia de sentido si se multiplican ó dividen sus dos miembros por una cantidad negativa.

Resolver la ecuación $\frac{5x}{6} + 2 = \frac{x}{2} + 7 + \frac{x}{3} - 5$, *explicando el resultado.*

46

Demostrar que no se alteran las soluciones de una ecuación, multiplicando o dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad; é indicar los casos de excepción.

Discutir la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, *deduciendo sus raíces de las de la ecuación* $x^2 + px + q = 0$.

Encontrar el tiempo en que se duplica un capital colocado al 5% de interés compuesto.

47

Establecer la fórmula del primer caso de interés compuesto.

Exponer las diferencias que hay entre las ecuaciones puras y las mixtas de segundo grado, expresando sus formas generales.

Encontrar los diversos términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los n primeros términos es igual á (n+1) veces la mitad del término de n° orden.

48

Explicar la teoría de la resolución de las ecuaciones de segundo grado con el ejemplo siguiente. $x^2 - 12x + 35 = 0$.

Exponer y demostrar la regla para quitar los denominadores en una desigualdad.

49

¿A qué se llama grado ó dimensiones de un término? ¿cómo se aprecia el grado según la forma del término? Significación del grado cero.

Regla para extraer la raíz cuadrada a un polinomio.

¿Cuántos términos deben tomarse en la progresión 2, 5, 8, … para que su suma sea 876?

50

Demostrar que un radical no se altera si se multiplican por el mismo número, el índice del radical y los exponentes de las cantidades subradicales.

Demostrar que la diferencia de las potencias semejantes de dos cantidades, es siempre divisible por la diferencia de éstas.

Dividir el número 195 en tres partes que formen una progresión geométrica, y siendo la parte tercera 120 unidades mayor que la primera.

51

Exponer la teoría de los logaritmos y el uso de las tablas logarítmicas.

Demostrar que el producto de los términos de una progresión geométrica, es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos, elevado á una potencia indicada por el número de términos.

¿Cuál es el valor de la fracción $\frac{x^3-ax^2+ax-a^2}{x^2-a^2}$*, para x=a?*

52

Establecer la fórmula que da la suma de los términos de una progresión geométrica creciente, y la que da la de los de una decreciente.

Exponer y demostrar las condiciones para que dos desigualdades puedan sumarse o restarse, obteniéndose un resultado determinado.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $x+y=11$*, y* $xy=24$*, se obtienen* $x=8$*,* $y=3$*; pero también los valores* $x=3$*, y* $y=8$ *las verifican; ¿es esto una casualidad?*

53

Demostrar que en una progresión geométrica el producto de dos términos cualesquiera, equidistantes de los extremos, es igual al producto de éstos; y considerar el caso en que sea impar el número de términos de la progresión.

Exponer la regla práctica para despejar una incógnita de una ecuación mixta de segundo grado y las condiciones de su aplicación.

Calcular el logaritmo del número 729 en el sistema cuya base es 3.

54

Indicar cuáles son las características de los logaritmos correspondientes á las diversas clases de números, exponiendo la razón.

Fórmula de Newton para elevar un binomio á una potencia, aplicándola al ejemplo siguiente: $\frac{1}{\sqrt{2x-3y}}$*.*

Interpolar cinco medios geométricos entre los números 1 y 4 826809.

55

Exponer y demostrar las reglas para ejecutar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces, con las fracciones algebraicas.

Exponer y demostrar la regla para sacar como factor una cantidad en un polinomio.

Calcular la base del sistema de logaritmos en el que el número 3 tiene por logaritmo 1000.

56

Exponer y demostrar las reglas para ejecutar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces, con las cantidades afectadas de exponentes negativos, fraccionarios, ó fraccionarios negativos.

Resolver los problemas siguientes, exponiendo las consecuencias de los resultados: una persona tiene 34 años y otra 10, ¿cuándo será la edad de la primera cuádruple de la segunda?- Dos trenes caminan en el mismo sentido con velocidades uniformes, hacia una estación que dista 200 kilómetros del punto de partida del primer tren y 90 kilómetros del segundo; la velocidad del primer tren es de 25 kilómetros por hora, la del segundo 14, determinar la distancia entre el punto en que se encuentran y la estación hacia la cual caminan.

Se tiene la expresión $\frac{m}{x^2}[(log\,a + log\,b) - log(c - d)] = -\frac{1}{2}(log\,p + log\,q - log\,r - log\,s)$*; ¿cuál es la expresión de que proviene?*

57

¿Qué aplicaciones tiene el conocimiento de las relaciones que existen entre los coeficientes y las raíces de una ecuación completa de segundo grado?

Demostrar que una ecuación incompleta de segundo grado, tiene siempre una raíz nula.

Se tiene como suma de capital y réditos, al 25% mensual, la cantidad de $32,528; el tiempo que duró la imposición pasa de 3 años y 27 días; ¿cuál es el capital que se impuso?

58

Exponer y demostrar las reglas para despejar una incógnita de una desigualdad de primero ó de segundo grado.

Regla para extraer raíz cuadrada á un polinomio y condiciones para que la raíz sea exacta.

Encontrar la suma de los n *primeros números enteros.*

59

Aplicar la fórmula de Newton á la elevación á potencias y extracción de raíces de los polinomios.

¿Qué clase de logaritmos tienen las cantidades negativas, y por qué?

Reconstruir la ecuación cuyas raíces son, $x' = x'' = \frac{8}{9}$.

60

Demostrar que la raíz de un monomio elevado á una potencia, es el mismo monomio con exponente fraccionario.

Exponer y demostrar la regla para reducir radicales al mismo índice.

Encontrar el número á que corresponde el logaritmo (3) 7'542728.

61

Exponer y demostrar la regla para elevar un radical á una potencia.

Demostrar que si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética, se interpola el mismo número de medios aritméticos, los términos obtenidos forman una sola progresión.

Resolver el sistema de desigualdades siguiente: $x^2 + y^2 > 34$, $x^2y^2 > 225$.

62

Demostrar á qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos cantidades, y la recíproca.

Demostrar que si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica, se interpola el mismo número de medios, los términos obtenidos forman una sola progresión.

Establecer las formulas relativas á los problemas de aligación ó mezcla y resolver un ejemplo numérico cualquiera, de cada uno de ellos.

63

Discutir la fórmula:

$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

¿Cuáles son las propiedades de un trinomio de segundo grado, según que las raíces sean reales y desiguales, reales e iguales, o imaginarias?

Resolver el sistema de ecuaciones: $2x + y = 1$, $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{5}{z} = 0'5$.

64

Demostrar que los términos de una progresión aritmética creciente, aumentan indefinidamente, de manera de ser mayores que una cantidad cualquiera A.

En una progresión aritmética se conoce $r = \frac{1}{3}$, $e = 2\frac{5}{6}$, $S = 13\frac{1}{2}$, ¿cuántas soluciones admite el problema consistente en determinar a y n, y por qué?
Resolver la ecuación $\sqrt{x+58} + \sqrt{x+3} = 5$, comprobando el resultado.

65

Demostrar que los términos de una progresión geométrica decreciente disminuyen indefinidamente, de manera de ser menores que una cantidad cualquiera.
Demostrar que si se suman término á término dos ó más fracciones equivalentes, el resultado es una fracción equivalente a cualquiera de las propuestas.
Conociendo $Log.nep.x = \bar{2}278447$, determinar x.

66

¿Cuáles son las diferentes formas que pueden darse á un trinomio de segundo grado, según que las raíces de la variable son reales y desiguales, reales é iguales, ó imaginarias?
Transformar la expresión $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en una suma de radicales simples $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, siendo x é y números racionales.
Resolver la ecuación: $\sqrt[x]{0'00345} = \frac{1}{28^3}$.

Observaciones

En este cuestionario podemos notar que cada una de las fichas cuenta con preguntas enfocadas a demostraciones, deducción de reglas y ejercicios prácticos, de manera similar que el cuestionario anterior a éste, aunque en este cuestionario hay más cuestiones prácticas que en el de 1899.

Adentrándonos al contenido específico de este cuestionario, se debe resaltar que entre las fichas se localizó una cuestión donde se pide demostrar una propiedad errónea:

Ficha *9*

Demostrar que si se multiplican ordenadamente dos desigualdades establecidas en el mismo sentido, la desigualdad producto resulta en igual sentido.

Es decir, si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$.

Como se considera que tales números son números reales, no se cumple para todos estos.

Contraejemplos		
$a = -3,\ \ b = -1,$ $c = -5, d = -2$ Se cumple que $a < b$ y $c < d$, pero $ac = 15$ y $bd = 2$. Por lo tanto, la desigualdad $ac < bd$ no se cumple.	$a = -1,\ \ b = 0,$ $c = -1, d - 0$ Se cumple que $a < b$ y $c < d$, pero $ac = 1$ y $bd = 0$. Por lo tanto, la desigualdad $ac < bd$ no se cumple.	$a = -3,\ \ b = -1,$ $c = -\frac{1}{2}, d = 1$ Se cumple que $a < b$ y $c < d$, pero $ac = \frac{3}{2}$ y $bd = -1$. Por lo tanto, la desigualdad $ac < bd$ no se cumple.

En este caso habría que restringir el conjunto de números a los cuales se refiere la cuestión.

Se esperaría que esta cuestión fuera corregida pero, en las versiones de 1903 y 1904, está presente sin ninguna corrección.

A pesar de lo anterior, también debemos resaltar cuestiones muy interesantes, como en las siguientes fichas:

Ficha *39*
Resolver las ecuaciones $\boldsymbol{2x^2+3y^2=37}$***,*** $\boldsymbol{3xy=5}$***.***

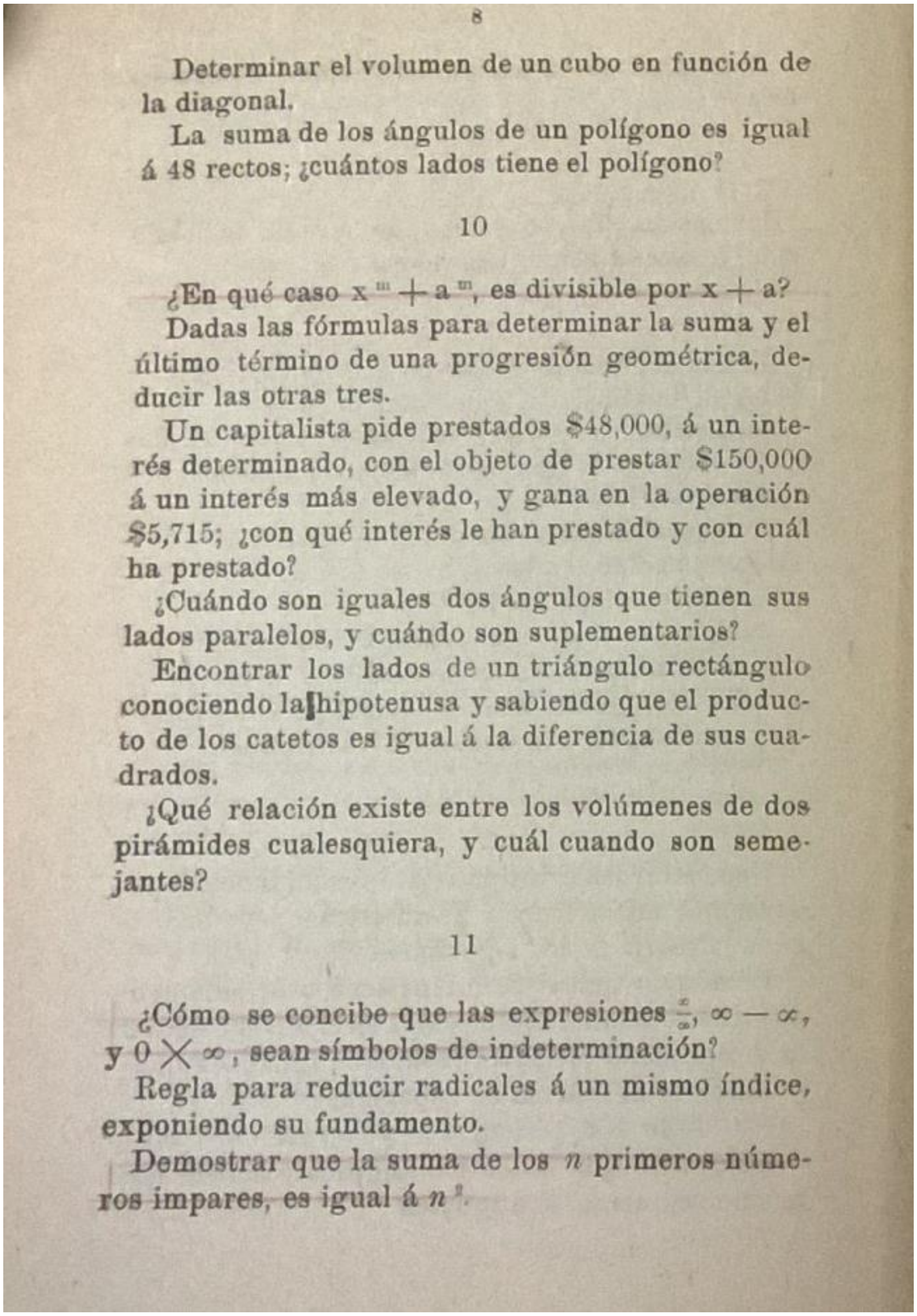
Ficha *42*
Resolver las ecuaciones $\boldsymbol{y+z=19}$***,*** $\boldsymbol{z+x=15}$ ***y*** $\boldsymbol{x+y=10}$***.***

En el primer caso se localiza un ejercicio práctico donde el alumno examinado debe resolver un sistema de ecuaciones no lineales, con dos incógnitas. En la actualidad es poco común que en la Educación Media Superior se trate este tema.

En el segundo caso se localiza un ejercicio práctico sobre un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Esto es uno de los temas más clásicos en la actualidad, a diferencia del de la ficha anteriormente mencionada.

En general, siguen siendo temas clásicos a evaluar la multiplicación de expresiones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado y logaritmos.

Para concluir con los aspectos más sobresalientes de este cuestionario, a lo largo de éste se muestran preguntas que son rayadas con lápiz para eliminarlas o, posteriormente, ser cambiadas por otras. En las fichas 10, 11, 64 y 65 se distingue un ejemplo de ello (figuras 3.7 y 3.8).



8

Determinar el volumen de un cubo en función de la diagonal.

La suma de los ángulos de un polígono es igual á 48 rectos; ¿cuántos lados tiene el polígono?

10

~~¿En qué caso $x^m + a^m$, es divisible por $x + a$?~~

Dadas las fórmulas para determinar la suma y el último término de una progresión geométrica, deducir las otras tres.

Un capitalista pide prestados \$48,000, á un interés determinado, con el objeto de prestar \$150,000 á un interés más elevado, y gana en la operación \$5,715; ¿con qué interés le han prestado y con cuál ha prestado?

¿Cuándo son iguales dos ángulos que tienen sus lados paralelos, y cuándo son suplementarios?

Encontrar los lados de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y sabiendo que el producto de los catetos es igual á la diferencia de sus cuadrados.

¿Qué relación existe entre los volúmenes de dos pirámides cualesquiera, y cuál cuando son semejantes?

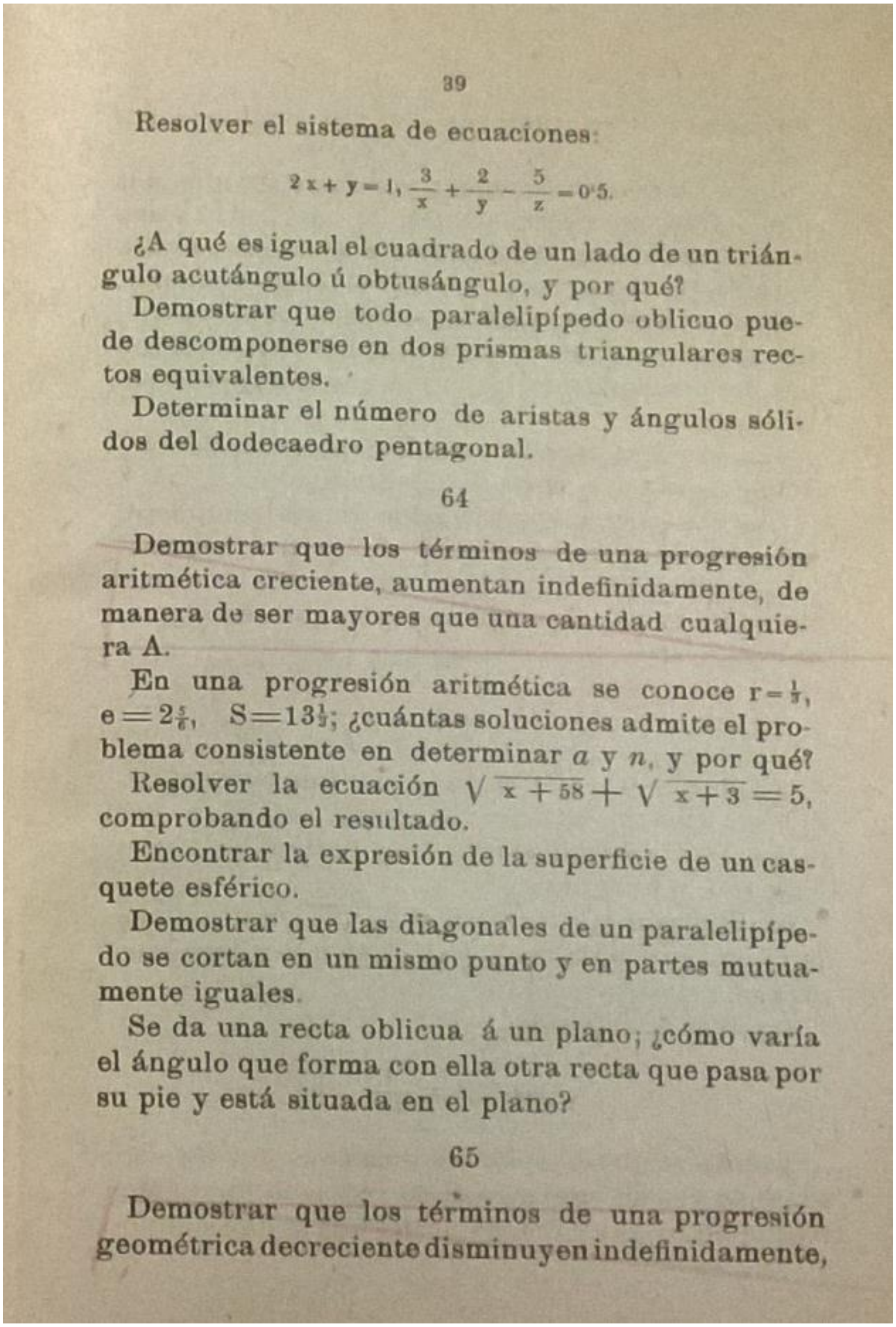
11

~~¿Cómo se concibe que las expresiones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, y $0 \times \infty$, sean símbolos de indeterminación?~~

Regla para reducir radicales á un mismo índice, exponiendo su fundamento.

Demostrar que la suma de los n primeros números impares, es igual á n^2.

Figura 3.7. Hoja 8 del cuestionario. Se rayan las primeras cuestiones de las fichas 10 y 11.



39

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$2x+y=1,\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{5}{z}=0'5.$$

¿A qué es igual el cuadrado de un lado de un triángulo acutángulo ú obtusángulo, y por qué?

Demostrar que todo paralelipípedo oblicuo puede descomponerse en dos prismas triangulares rectos equivalentes.

Determinar el número de aristas y ángulos sólidos del dodecaedro pentagonal.

64

~~Demostrar que los términos de una progresión aritmética creciente, aumentan indefinidamente, de manera de ser mayores que una cantidad cualquiera A.~~

En una progresión aritmética se conoce $r=\frac{1}{3}$, $e=2\frac{5}{6}$, $S=13\frac{1}{3}$; ¿cuántas soluciones admite el problema consistente en determinar *a* y *n*, y por qué?

Resolver la ecuación $\sqrt{x+58}+\sqrt{x+3}=5$, comprobando el resultado.

Encontrar la expresión de la superficie de un casquete esférico.

Demostrar que las diagonales de un paralelipípedo se cortan en un mismo punto y en partes mutuamente iguales.

Se da una recta oblicua á un plano; ¿cómo varía el ángulo que forma con ella otra recta que pasa por su pie y está situada en el plano?

65

Demostrar que los términos de una progresión geométrica decreciente disminuyen indefinidamente,

Figura 3.8. Hoja 39 del cuestionario. Se rayan las primeras cuestiones de las fichas 64 y 65.

Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria (1903)

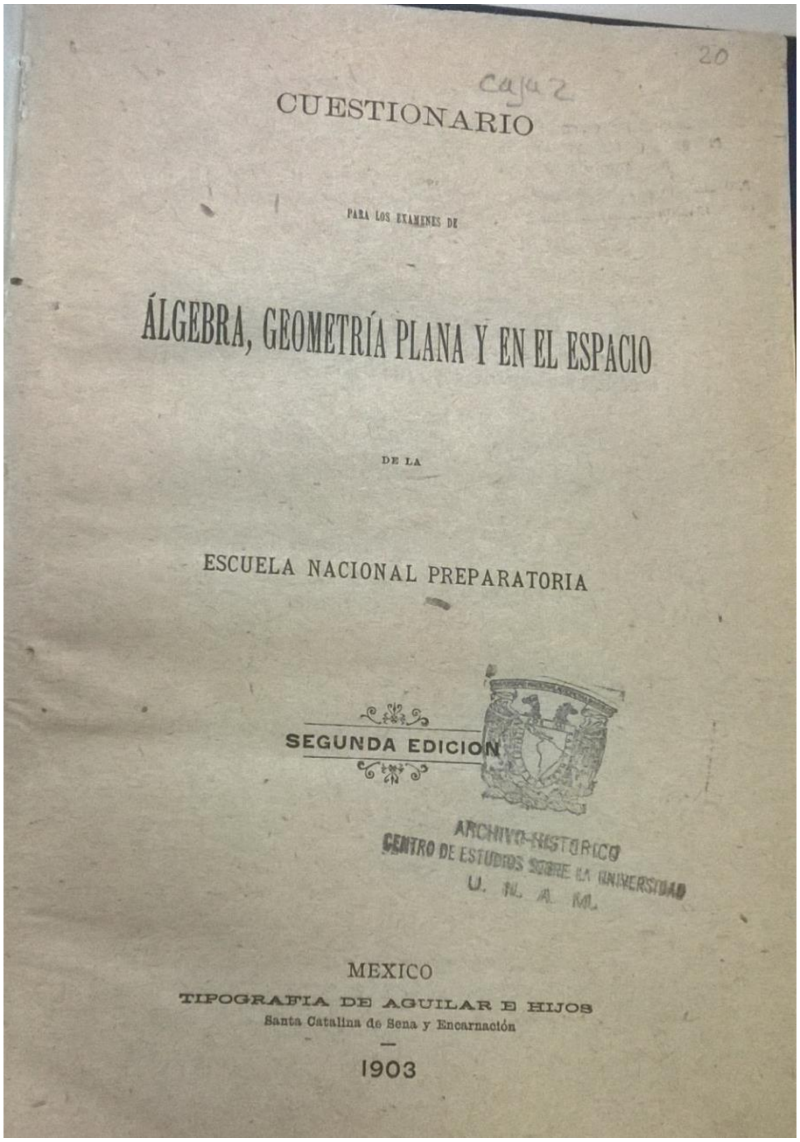


Figura 3.9. Hoja 1 del cuestionario

El "Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria" también es un libro impreso. El año de elaboración de éste es en 1903. Contiene 40 páginas con 66 fichas. Este cuestionario es muy similar al del año 1902. Por esta razón, sólo se presentan las fichas que difieren de este último, y se indican los cambios que se hicieron.

1

Ley de la formación del cociente y de las restas sucesivas, en la división de la diferencia de las potencias de grado m de dos cantidades, por la diferencia de estas últimas.
Demostrar que una ecuación subsiste si se cambia signo á cada uno de sus términos.
Se eliminó la última cuestión.

3

Demostrar la regla para elevar al cuadrado un polinomio.
Establecer la fórmula que da el valor del último término de una progresión aritmética, en función del primero, de la razón y del número de términos.
*¿De qué expresión numérica proviene la siguiente: *$x = \frac{n}{m}(loga + logb - \frac{log\,n}{n} + logn)$? *Expresión poco legible.*
Se añadió la última cuestión.

4

Establecer la fórmula del segundo caso de interés compuesto.
Demostrar que la raíz del cociente de dos cantidades, es igual al cociente de las raíces de las mismas cantidades.
Se eliminó la última cuestión.

6

Exponer las reglas relativas á la multiplicación de los polinomios.
Demostrar que la raíz del producto es igual al producto de las raíces.
Se eliminó la segunda cuestión.

7

De las fórmulas que dan la suma de los términos de una progresión aritmética, y el último término, deducir las otras tres.
Regla de dos falsos supuestos y determinación de la fórmula correspondiente.
Una persona divide su capital entre sus hijos ordenando que el primero reciba una suma a y la n^a parte del capital restante, el segundo una suma $2a$ y la n^a parte del capital que ahora queda restante, el tercero una suma $3a$ y la n^a parte del nuevo restante y así sucesivamente. Todos los hijos reciben partes iguales. Se presenta cuál es el capital del padre, la parte de cada hijo y el número de hijos.
Las últimas dos cuestiones fueron cambiadas.

10

Dadas las fórmulas para determinar la suma y el último término de una progresión geométrica, deducir las otras tres.
Ley del cociente y de las restas en la división de $\frac{a}{1-x}$ y aplicación de los resultados á la fracción periódica 0'(p).
Un capitalista pide prestados $48,000, a un interés determinado, con el objeto de prestar $150,000 a un interés más elevado, y gana en la operación $5,715; ¿con qué interés le han prestado y con cuál ha prestado?

Se cambió la primera cuestión por la segunda de este cuestionario.

11

Regla para simplificar radicales, exponiendo su fundamento.
¿A qué es igual la raíz de una potencia, y la raíz de la raíz de una cantidad? Demostrarlo.
Resolver el sistema de ecuaciones. $x^2 + y^2 = 34$, $x^2y^2 = 225$.
Se eliminó la primera y la tercera cuestión. Se añadieron las últimas dos de este cuestionario.

13

Exponer las tres formas generales á que puede reducirse una ecuación de segundo grado de una incógnita.
Reglas para resolver los problemas indeterminados de primer grado y observaciones sobre esta clase de problemas.
Las dos agujas de un reloj señalan las doce, ¿á qué hora se encuentran de nuevo y cuántas veces se encuentran en doce horas?
Se cambió la segunda cuestión.

14

¿A qué es igual la suma y á qué el producto de las raíces en una ecuación mixta de segundo grado? Probarlo.
Elevar el número 0’0008471 a la 7ª potencia, sirviéndose de los logaritmos.
Exponer las aplicaciones principales del teorema que dice que la raíz de producto es igual al producto de las raíces.
Se cambió la última cuestión.

17

Explicar la concepción de las cantidades negativas.
Exponer la manera de formar unas tablas de logaritmos.
La suma de dos números es 16; la diferencia de sus cuadrados es 32; ¿cuáles son estos números?
Se cambió la primera cuestión por la segunda de este cuestionario.

21

Ley de la formación de los términos del cociente en la división de un polinomio entero y racional en x *por* $x - a$*. Condición necesaria y suficiente para que la división sea exacta.*
Regla para formar un término aislado del desarrollo de la potencia de un binomio.
Se eliminó una parte de la primera cuestión y se eliminó la segunda.

23

Exponer y demostrar las reglas para la elevación á potencias y extracción de raíces de los monomios.
Establecer la fórmula de los problemas de anualidades.
Multiplicar $(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \cdots - b^{m-1})$, *por* $(a + b)$.
Se cambiaron las primeras dos cuestiones.

27

Exponer la regla de la adición.
¿Qué son ecuaciones exponenciales y cuál es la regla para resolverlas?
Resolver la ecuación $\frac{x}{7}+39=\frac{3x}{4}-12$.
Se cambió la primera cuestión por la segunda de este cuestionario.

28

Resolver las ecuaciones $2x+5y+3z=17$, $3x-2y-z=12$, $5x+3y-2z=18$.
Demostrar que una desigualdad cambia de sentido si se multiplican sus dos miembros por una cantidad negativa.
Se eliminó la última cuestión.

31

Definir la progresión, en general, y sus clases.
Encontrar dos números conociendo su producto a *y su cociente* b.
Se eliminó la primera cuestión.

32

Exponer y demostrar la regla para introducir en un radical una cantidad que está fuera como factor.
Calcular los cuatro términos de una proporción geométrica, sabiendo que el primero es 4 unidades mayores que el segundo, que el tercero es 3 unidades mayor que el cuarto y que la suma de los cuadrados de los 4 términos es 62'5.
Se eliminó la primera cuestión.

38

¿Cómo pasa un factor de un miembro á otro de una ecuación? Demostrarlo.
Demostrar que no se alteran las soluciones de una ecuación agregando ó quitando una misma cantidad a sus dos miembros.
Dividir el número 590 en dos partes cuyo producto sea 80464.
Se cambió la primera cuestión.

39

Exponer y demostrar la regla para extraer raíz á un monomio cuyos exponentes son fracciones negativas.
Resolver las ecuaciones $2x^2+3y^2=37$, $3xy=5$.
Se eliminó la segunda cuestión.

43

Resolver el sistema de ecuaciones $4x - 5y = 24$ y $52x - 65y = 192$, comprobando el resultado y explicando las anomalías que pudiere haber en él.

Demostrar á qué es igual el valor de un término cualquiera de una progresión geométrica.

Resolver las ecuaciones á que dan lugar los siguientes problemas, exponiendo las consecuencias que se deducen de los resultados. Encontrar un numero tal, que sumado sucesivamente con 5 y con 7, las sumas obtenidas sean proporcionales a 1 y 2.

Se cambió la tercera cuestión por la segunda de este cuestionario.

47

Establecer la fórmula del primer caso de interés.

Demostrar que se tiene $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^n(1-x)}$.

Plantear y resolver el siguiente problema: extraer la raíz cuadrada de a con un n° de aproximación.

Se cambiaron las dos últimas cuestiones.

49

¿A qué se llama grado ó dimensiones de un término? ¿cómo se aprecia el grado según la forma del término? Significación del grado cero.

¿Cuántos términos deben tomarse en la progresión 2, 5, 8, … para que su suma sea 876?

Se eliminó la segunda cuestión.

50

Demostrar que un radical no se altera si se multiplican por el mismo número, el índice del radical y los exponentes de las cantidades subradicales.

Exponer la diferencia que hay entre identidad, igualdad, ecuación y fórmula.

Dividir el número 195 en tres partes que formen una progresión geométrica, y siendo la parte tercera 120 unidades mayor que la primera.

Se cambió la segunda cuestión.

51

Exponer y demostrar qué operaciones pueden ejecutarse con una desigualdad subsistiendo ésta en el sentido en que está establecida.

Exponer la teoría de los logaritmos y el uso de las tablas logarítmicas.

¿Cuál es el valor de la fracción $\frac{x^3 - ax^2 + ax - a^2}{x^2 - a^2}$, para x=a?

Se cambió la segunda cuestión por la primera de este cuestionario.

53

Exponer la regla práctica para despejar una incógnita de una ecuación mixta de segundo grado y las condiciones de su aplicación.

Exponer los elementos del lenguaje algebraico y el cuadro de las funciones algebraicas.

Calcular el logaritmo del número 729 en el sistema cuya base es 3.

Se cambió la primera cuestión.

56

Exponer y demostrar las reglas para ejecutar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces, con las cantidades afectadas de exponentes negativos, fraccionarios, ó fraccionarios negativos.

Resolver los problemas siguientes, exponiendo las consecuencias de los resultados: una persona tiene 34 años y otra 10, ¿cuándo será la edad de la primera cuádruple de la segunda?- Dos trenes caminan en el mismo sentido con velocidades uniformes, hacia una estación que dista 200 kilómetros del punto de partida del primer tren y 90 kilómetros del segundo; la velocidad del primer tren es de 25 kilómetros por hora, la del segundo 14, determinar la distancia entre el punto en que se encuentran y la estación hacia la cual caminan.

Tomar logaritmos en su expresión $\left(\frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a^x}}{b^y}\right)^s (\frac{a+b}{c+d})^{\frac{t}{s}} = (\frac{pqr}{a-t})^x$. **Expresión poco legible.*

Se cambió la última cuestión.

57

¿Qué aplicaciones tiene el conocimiento de las relaciones que existen entre los coeficientes y las raíces de una ecuación completa de segundo grado?

Demostrar que una ecuación incompleta de segundo grado, tiene siempre una raíz nula.

Se eliminó la última cuestión.

61

Exponer y demostrar la regla para elevar un radical á una potencia.

Demostrar que si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética, se interpola el mismo número de medios aritméticos, los términos obtenidos forman una sola progresión.

Resolver la ecuación: $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x+a} = \frac{a-b}{x+b}$ *comprobando el resultado.*

Se cambia la última cuestión.

62

Demostrar á qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos cantidades, y la recíproca.
Demostrar que si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica, se interpola el mismo número de medios, los términos obtenidos forman una sola progresión.
Establecer la fórmula para el primer caso de interés siempre y aplicarla á un ejemplo.
Se cambió la última cuestión.

64

En una progresión aritmética se conoce $r=\frac{1}{3}$, $e=2\frac{5}{6}$, $S=13\frac{1}{2}$, *¿cuántas soluciones admite el problema consistente en determinar* a *y* n, *y por qué?*
Resolver la ecuación $\sqrt{x+58}+\sqrt{x+3}=5$, *comprobando el resultado.*
Se eliminó la primera cuestión.

65

Demostrar que si se suman término á término dos ó más fracciones equivalentes, el resultado es una fracción equivalente a cualquiera de las propuestas.
¿Qué es el módulo y qué aplicaciones tiene?
Conociendo $Log.nep.x=\bar{2}278447$, *determinar* x.
Se cambió la segunda cuestión.

66

¿Cuáles son las diferentes formas que pueden darse á un trinomio de segundo grado, según que las raíces de la variable son reales y desiguales, reales é iguales, ó imaginarias?
Exponer las reglas para plantear y resolver un problema de primer grado.
Resolver la ecuación: $\sqrt[x]{0'00345}=\frac{1}{28^3}$.
Se cambió la segunda cuestión.

Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria (1904)

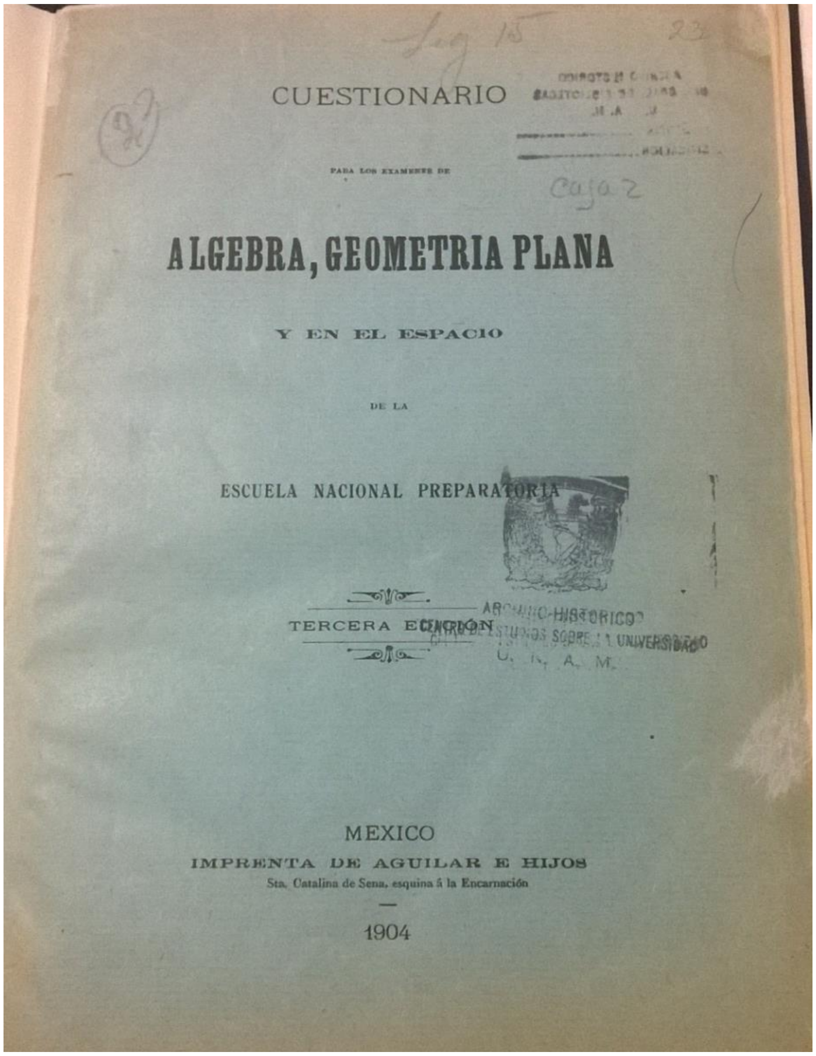


Figura 3.10. Hoja 1 del cuestionario

El "Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria" también es un libro impreso. El año de elaboración de éste es en 1904. Contiene 40 páginas con 66 fichas. Este cuestionario es muy parecido al del año 1903. Por esto, no se considera necesario mostrar su contenido.

Observaciones generales

Ya se habló de diferencias y similitudes entre los cuestionarios anteriormente presentados. A esto añadimos que las diferencias más notables en los cuestionarios se distinguen entre el cuestionario de 1899 y el de 1902, que podría ser consecuencia de los tres años transcurridos entre la elaboración de éstos.

En relación a su contenido, todas las cuestiones abarcan la mayor parte de los temas que se enlistaron en los libros de texto mencionados en el capítulo anterior. Nos indica que los alumnos contaban con el material necesario para que pudieran prepararse para la presentación de sus exámenes.

Por último, se debe destacar que la rigurosidad en estos cuestionarios es muy evidente. Es muy preciso decir que la preparación de los alumnos, en aquellos años, era excepcional.

CAPÍTULO IV

Temas clásicos y más

Temas clásicos y más

En el capítulo anterior se mencionó que en las fichas se encuentran evaluados diversos temas del Álgebra. Entre los más sobresalientes encontramos la multiplicación algebraica y ecuaciones de primer y segundo grado, además de logaritmos y radicales. Los primeros temas mencionados son clásicos en la enseñanza del Álgebra. Los últimos, en virtud de los capítulos anteriores, eran temas importantes en aquellos años. En este capítulo se resalta cada uno de éstos, mostrando cómo son expuestos en los libros de texto de la ENP mencionados en el Capítulo III. Recordemos que tales libros son: *Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán y Francisco M. de Chavero), Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* y *Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas).*

Multiplicación algebraica

• Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)

En esta obra, el tema de la multiplicación algebraica se encuentra en el LIBRO PRIMERO, en la parte de Operaciones algebraicas. Primero se indica cómo multiplicar un monomio por otro, comenzando con un ejemplo:

$8a^2b^2 \times 6ab^2c$.

Los autores explican al alumno que, ya que cuando se varía el orden de los factores no se altera el producto, entonces el producto de los coeficientes será 48, y con respecto a las literales, aaa es lo mismo que a^3 y $bbbb$ es lo mismo que b^4. Por consiguiente, el resultado del producto es $48a^3b^4c$.

Con lo anterior y un ejemplo más deducen la siguiente Regla general:

Para multiplicar uno por otro dos monomios, multiplíquense sus dos coeficientes, y al lado de este producto escríbanse las letras que forman los dos factores, afectando cada letra de un exponente igual á la suma de los que la afectan en ambos factores, cuando forma parte de los dos; y cuando solo está en uno de ellos, póngasele el esponente que tiene en este.

Posteriormente, los autores enfrentan el caso de la multiplicación de los polinomios. Consideran los dos factores $a + b$ y $c + d$.

Primeramente, multiplican a y b por c, indicando que sus productos serán ac y bc. Enseguida multiplican a y b por d, resultando sus productos ad y bd. Para concluir, indican al alumno que, como los términos que componen cada factor están enlazados por los signos de la adición, entonces el producto resultante es la suma de todos los productos anteriores. Por lo tanto, concluyen con que tal resultado es $ac + bc + ad + bd$.

Continúan con el caso de multiplicar $a - b$ por c. Mencionan que los productos parciales son ac y bc. Luego, para obtener el producto total, indican que se debe reflexionar acerca de que para a no se tiene todo su valor al multiplicar por c, ya que está siendo disminuido por b. Entonces, se tiene una parte de a que es representada por b que no debió haber sido multiplicada por c. Por lo tanto, concluyen que ac es tantas unidades mayor de lo que debía ser, y estas unidades resultan de bc. Enseguida, instruyen a que se deben restar tales productos, y con esto el resultado es $ac - bc$.

El siguiente caso que explican al alumno es la multiplicación de $a - b$ y $c - d$. Comentan que, siguiendo el razonamiento del caso anterior, el producto será $ac - bc - ad + bd$.

Para concluir con la multiplicación de polinomios, los autores argumentan que como a, b, c y d pueden representar algebraicamente la suma de todos los términos aditivos o sustractivos del multiplicando y multiplicador, el razonamiento que ellos dan en los casos anteriores se aplica a cualquier polinomio. Con esto deducen lo siguiente:

Si en una multiplicacion se consideran todos los términos aditivos del multiplicador se deben multiplicar por ellos cada uno de los términos del multiplicando, tanto aditivos como sustractivos, y afectar los productos parciales de signos semejantes á los de los términos del multiplicando; y cuando se consideran los términos sustractivos del multiplicador, deben multiplicarse igualmente por cada uno de los términos del multiplicando, peor dando á los productos parciales signos contrarios á los que lleven los términos respectivos del multiplicando; siguiendo para la multiplicación de cada término del multiplicando por otro del multiplicador, las reglas que hemos establecido para los monomios.

Después de un ejemplo de multiplicación de polinomios, los autores resaltan que se debe atender a cuatro aspectos: *signos, coeficientes, letras y esponentes.* Enseguida, mencionan que la regla de los signos es una de las más importantes que hay que retener en el tema expuesto. La enuncian como sigue:

Siempre que los dos términos por multiplicar estén afectados de signos semejantes, el producto lo estará del signo +, y cuando los dos términos estén afectados de signos contarios, el producto lo estará del sino -.

Posteriormente, indican que se harán algunas observaciones importantes sobre la multiplicación:

1. *Cuando son homogéneos los polinomios que se han de multiplicar entre sí, el producto de éstos es también homogéneo.*
   El grado de cada monomio del producto debe ser igual á la suma de los grados de dos términos cualesquiera del multiplicando y multiplicador.

2. *El número total de los términos del producto es igual al producto del número de términos del multiplicando multiplicado por el número de términos del multiplicador.*

3. *Si el producto contiene términos semejantes, estos se reducirán, pero debe observarse que entre dichos términos hay algunos que no pueden reducirse con ningún otro, y son: 1° el término que proviene de la multiplicación del término del multiplicando en el que una cualquiera de las letras está afectada del mayor esponente, por el término del multiplicador en que la misma letra está también afectada del mayor esponente; 2° el término que proviene de multiplicar aquellos en que una misma letra está afectada del menor esponente.*

Para finalizar el tema, se realizan varios ejemplos. Entre estos se encuentran tres clásicos:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}=\boldsymbol{a}^{2}+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}$
2. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}=\boldsymbol{a}^{2}-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}$
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}$

Para cada uno de los tres se enuncian sus resultados como sigue:

1. *El cuadrado de la suma de dos términos se compone del cuadrado del primer término, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*
2. *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*
3. *La suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia, da por producto la diferencia de sus cuadrados.*

El tema termina dando dos observaciones más:

1. *La manera con que se forma un producto algebraico por medio de sus factores, se llama ley de este producto, y permanece siempre la misma cualesquiera que sean los valores atribuidos á las letras que entran en los factores.*
2. *Los resultados obtenidos pueden también servir para descomponer un polinomio en factores.*

Observaciones

En este libro el tema contiene buena información con respecto a éste. Incluye lo esencial, desde una multiplicación de monomios, de polinomios, hasta lo más útil con respecto a qué hacer en el producto de términos con diferente o igual signo.

En el tema se presentan muy pocos ejemplos, pero al menos se dan los ejemplos clásicos ya mencionados anteriormente.

Por último, observemos que los autores instruyen cada una de sus reglas con lenguaje común. Considero que esto ayuda al alumno a entender un poco más el tema, aunque es necesario introducir el lenguaje algebraico.

• Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)

En esta obra, el tema de la Multiplicación se encuentra a partir de la página 20. En este caso, se tratan por temas separados la multiplicación de los monomios y la de los polinomios. Comienza con la primera mencionada.

El autor indica que en un monomio se deben tomar en cuenta cuatro aspectos: *coeficientes, literales* y *exponentes.* Empieza con un ejemplo: $3a^2bc \times 2a^3b^2$. Explica que el valor del producto no se altera cuando se cambia el orden de los factores, y entonces: $3a^2bc \times 2a^3b^2 = 3 \times 2a^2a^3bb^2c$. Luego, para las literales indica que se deben descomponer en factores, o bien, sumar los exponentes. Por lo tanto, $3a^2bc \times 2a^3b^2 = 6a^5b^3c$.

Enseguida se expresa que cuando los factores tengan signos iguales, el producto deberá tener el signo $+$ y, en caso contrario, el producto deberá tener el signo $-$.

Para finalizar da la siguiente regla:

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes (por las reglas de la aritmética), las literales diferentes se ponen unas á continuación de otras, y en las iguales se suman sus exponentes, afectando el producto del signo más cuando los monomios tienen signos iguales, y del signo menos cuando los factores tienen signos desiguales.

Después, se expone el tema de multiplicación de polinomios. Éste comienza considerando que se tienen cuatro casos:

1. Multiplicar la suma de dos cantidades $a + b$ por una cantidad c.
2. Multiplicar la suma de $a + b$ por la suma de otras dos cantidades $c + d$.
3. Multiplicar la diferencia de dos cantidades $a - b$ por una cantidad c.
4. Multiplicar la diferencia de dos cantidades $a - b$ por la diferencia de otras dos $c - d$.

A continuación de lo anterior se da la explicación de cómo realizar cada caso.

1. Se indica que bajo el supuesto de que el producto de la suma es igual a la suma de los dos productos, se forman los productos de a y de b por c, y se suman los resultados, es decir, $(a+b)\times c = ac+bc$.
   Para concluir, el autor da la observación de que los términos del producto que resultan son positivos.

2. Primero, el autor instruye a que se determinen el producto de $a+b$ por c, y el producto de $a+b$ por d, siguiendo lo anterior. Concluye que se suman tales productos para obtener que $(a+b)\times +(c+d) = ac+bc+ac+ad$.
   Se da la observación de que los términos del producto resultaron todos positivos.

3. Se indica que tomando el producto de a por c, es decir, ac, se supone haber sumado a, c veces, pero como lo que se quiere multiplicar es $a-b$, que es b unidades menor que a y además, cada unidad que disminuye el multiplicando el producto disminuye una vez el multiplicador, entonces al producto ac se le debe restar bc. Con esto $(a-b)\times c = ab-bc$.
   Se da la observación de que el producto de los términos de signos desiguales es negativo.

4. Primero, el autor indica que la operación se divide en dos partes: la primera es multiplicar $a-b$ por c, que siguiendo lo anterior es $ab-bc$, a lo que se debe considerar que el problema es, más bien, multiplicar $a-b$ por $c-d$, que es d unidades menor que c. Por lo tanto, al producto obtenido se le debe restar el resultado de multiplicar $a-b$ por d. Entonces se obtiene $(a-b)\times(c-d) = (ab-bc)-(ad-bd)$.
   En segunda instancia, se deben cambiar los signos del sustraendo. Finalmente se obtiene $(a-b)\times(c-d) = ab-bc-ad+bd$.

Contreras menciona que la multiplicación de dos polinomios cualesquiera está comprendida en el último caso, ya que a y c pueden representar la suma de todos los términos positivos de los factores y b y c los términos negativos.

Bajo los razonamientos anteriores se da la siguiente regla:

El producto de dos polinomios se encuentra multiplicando todos los términos de uno de los factores por cada uno de los términos del otro: cada monomio del producto se afecta del signo más cuando los que lo han producido tienen signos iguales, y del signo menos, cuando los términos multiplicados tienen signos *desiguales; los coeficientes se multiplican por las reglas de aritmética; las literales diferentes se ponen en el producto unas á continuación de las otras, y las que son comunes á los términos que se multiplican no se escriben mas que una vez en el producto, afectando cada literal con un exponente igual á la suma de los dos exponentes que dicha literal tenga en el multiplicando y multiplicador.*

Se hace mención acerca de los signos, ya que Contreras indica que respecto a éstos se dice que

$$+\times+=+,\ +\times-=-,\ -\times+=-\ \text{y}\ -\times-=+.$$

Concluye que no es que los signos se multipliquen aisladamente, ya que indican las operaciones que deben efectuarse con las cantidades que acompañan.

Posteriormente, se dan las siguientes observaciones sobre el tema:

1. *El número de términos que resultan de la multiplicación, antes de hacer ninguna reducción, es igual al producto del número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador.*

2. *Cuando hay términos semejantes, el número de los del producto puede limitarse mucho, pero debe observarse que no se puede reducir el término que proviene del producto de los términos del multiplicando y multiplicador que contiene una misma literal elevada á la mayor potencia.*

3. *Cuando todos los términos del multiplicando son homogéneos lo mismo que los del multiplicador, el producto está compuesto de términos homogéneos, y el grado de estos es igual á la suma de las dimensiones de un término del multiplicando con las de uno del multiplicador.*

Para concluir el tema, se enuncian y se demuestran los siguientes tres teoremas:

1. *El cuadrado de la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

2. *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

3. *La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia de sus cuadrados.*

Además, se dejan diversos ejercicios al alumno, incluyendo su respuesta.

Observaciones

En esta obra considero que es más precisa la forma en que se expone todo el tema. Obsérvese que también se incluye lo esencial con respecto a éste.

Por último, el autor trata de usar mucho más el lenguaje algebraico, lo cual es muy conveniente. Además, él se interesa por dejar al alumno ciertos ejercicios para que practique lo que aprende, lo que no se apreció en la obra de la que se habló anteriormente.

• Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)

El tema de la Multiplicación se localiza en la página 24 de esta obra. El autor comienza explicando cómo multiplicar monomios. Esto lo indica diciendo que para multiplicar monomios hay que multiplicar sus coeficientes reuniendo todas las letras y poniéndoles exponentes iguales a la suma de los que en cada factor tengan. Aclarando que no se debe olvidar atender a los signos, pues deben considerarse. Con esto introduce a lo que sería la Ley de los signos.

Primero, menciona que en la multiplicación los signos son tomados en cuenta, así como se hace en la suma y la resta. Por consiguiente, concluye que todos los casos posibles en la multiplicación se reducen a los siguientes generales:

1. $+\boldsymbol{a} \times +\boldsymbol{b}$
2. $+\boldsymbol{a} \times -\boldsymbol{b}$
3. $-\boldsymbol{a} \times +\boldsymbol{b}$
4. $-\boldsymbol{a} \times -\boldsymbol{b}$

Para el primer caso, el autor dice que hay que sumar a las veces que indica b. Por lo que se obtendrá $+a + a + a \dots ó + ab$. Concluye que $+ \times += +$.

Para el segundo caso, indica que la repetición que constituye la multiplicación aritmética está indicada por el signo x; y que tal repetición es restando, debido al signo de b. Por lo tanto, dice que se tiene $-(+a) - (+a) - (+a) \dots ó\ - ab$. Concluye que $+ \times -= -$.

Para el tercer caso dice que se repite sumando de la siguiente manera: $(-a) + (-a) + (-a) \dots ó\ - a - a - a \dots ó - ab$. Concluye que $- \times += -$.

Para el último caso indica que debe repetirse restando: $-(-a)-(-a)-(-a)\ldots$ ó $+a+a+a\ldots$ ó $+ab$. Concluye que $-\times-=+$.

Observemos que el autor, en esta parte de su obra, hace una gran aportación al deducir la Ley de los signos con este interesante análisis.

Por otro lado, continúa con la multiplicación de polinomios. Para ésta, explica que se hace multiplicando término a término los del multiplicador y multiplicando, afectados todos de su signo propio.

Menciona que en los infinitos casos de multiplicación hay, entre otros, tres interesantes por sus aplicaciones, y son los siguientes:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
2. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

Terrazas hace hincapié de que el alumno debe comprobar que sus productos resultan así:

1. $\boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$
2. $\boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$
3. $\boldsymbol{a^2-b^2}$

Por consiguiente, enuncia, según él, en *lenguaje vulgar* que los resultados son:

1. *El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, mas el doble producto de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda.*

2. *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera menos el doble producto de la primea por la segunda, mas el cuadrado de la segunda.*

3. *La suma de dos cantidades multiplicadas por la diferencia de ellas, produce la diferencia de sus cuadrados.*

Para terminar, hace una conclusión que debe resaltarse, pues dice así:

Expresiones como las anteriores que encierran una verdad general importante se llaman formulas.

Observaciones

En este libro, a mi criterio, es más precisa la forma en que se expone el tema. Además, considero que fue muy adecuado que el autor dedujera algo tan importante en las Matemáticas, como lo es la Ley de los signos en multiplicaciones.

Por otro lado, a pesar de que el autor no da, como tal, sus explicaciones en lenguaje algebraico, es muy preciso al deducir cada una de las reglas para realizar cada operación.

Observaciones generales

Las tres obras instruyen la multiplicación algebraica desde lo más simple hasta lo más complejo, en este caso, desde multiplicación de monomios hasta los polinomios. En las tres se hace mención de todo lo que se debe atender al momento de hacer cada multiplicación: coeficientes, literales, exponentes y signos.

En el caso de los polinomios, se hace la deducción de su regla como casos iguales, excepto por la obra de Contreras, el *Tratado de Álgebra elemental,* incluye un caso más y muy útil.

Las tres obras mencionan lo que llamamos productos notables, y los enuncian de manera adecuada. Aunque, se debe resaltar que en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)* se mencionan como ejemplos, en el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* como teoremas y en el *Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)* como fórmulas. Sin olvidar mencionar que los teoremas efectivamente deducen fórmulas, pero no viceversa.

En general, se considera bien expuesto el tema en cada una de las tres obras.

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

• Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)

En esta obra, el tema de ecuaciones de primer grado se localiza a partir de la página 168, en el Capítulo I del LIBRO SEGUNDO.

Lo primero que enuncian los autores es un axioma que dice así:

Si á cantidades iguales se agregan o quitan cantidades iguales, los resultados serán también iguales.

Se concluye que entonces se puede agregar una misma cantidad á dos miembros de una ecuación sin que se altere la igualdad. Se indica que de esto se basan ciertas transformaciones que son de uso continuo en la resolución de las ecuaciones. Para esto se dan los siguientes casos:

1. $ax - b = cx + d$

Se dice que para despejar la incógnita es necesario aislarla en el primer miembro, y con este fin se resta cx en los dos miembros y se obtiene

$ax - b - cx = cx + d - cx = d$. Luego, agregando b a los dos miembros resulta

$ax - b - cx + b = b + d$, es decir, $ax - cx = d + b$.

Por último, se da la siguiente observación: *Un término puede pasar de un miembro á otro cambiando el signo.*

2. $ax = b$

Para este caso, se instruye a dividir por a ambos miembros. Así, resulta $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, es decir, $x = ab$. Con esto se deduce que: *Las cantidades que son multiplicadoras en un miembro, pasan al otro como divisores.*

3. $\frac{x}{b} = a$

En este caso, se procede a multiplicar los dos miembros por b. Así, se obtiene $\frac{bx}{b} = ab$, es decir, $x = ab$. Luego, se deduce que: *Cuando una cantidad se encuentra en un miembro como divisor, puede pasar al otro como factor.*

Posteriormente, los autores indican que podría surgir que después de esas transformaciones la incógnita resultara con el signo $-$, para lo cual se procede a cambiar los signos a todos los términos de la ecuación.

Después de lo anterior, los autores resuelven diversos ejemplos de ecuaciones, aplicando lo que ya se había enlistado. Finalizan con problemas que necesitan ser resueltos al plantear una ecuación de primer grado con una incógnita.

Observaciones

Considero que los autores exponen lo esencial para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita. Se expone cada cuestión de manera adecuada. Además, obsérvese que se incluyen los tres fundamentos básicos para despejar una incógnita.

• Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)

El tema de ecuaciones de primer grado se encuentra a partir de la página 41 en el Capítulo II. Comienza con varias definiciones:

Se llama igualdad la expresión algebraica que indica que dos cantidades tienen el mismo valor.

A esto, el autor señala que la parte izquierda de la igualdad se llama *primer miembro* y la parte derecha *segundo miembro.* Posteriormente nos dice qué es una ecuación:

Ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, cuyo modo de formación generalmente es diferente.

Enseguida se da una definición más:

Se llama identidad, la igualdad que se verifica por sí misma.

A lo anterior, se añade que toda ecuación debe convertirse en identidad cuando se reemplazan las incógnitas por sus valores, es decir, cuando se hace la verificación de la ecuación.

Luego, se indica que una ecuación es numérica si las únicas literales en ella son las que representan las incógnitas. Además, cuando el resultado tenga otras letras, a eso se le llamará *fórmula.*

Posteriormente, se expone que si los valores de dos cantidades están ligados entre sí de manera que la alteración de una produce una variación en la otra, entonces una cantidad está en *función* de la otra. Por consiguiente, se explica que las funciones son algebraicas, pues se expresan por operaciones cuyos signos son $+, -, \times, \div$ y exponentes y radicales. Y si se deben usar otras operaciones se llaman *funciones trascendentes.*

Además, se expone que las ecuaciones se clasifican por su grado, que es el del grado mayor de la incógnita de la ecuación.

Después, se encuentra un apartado que se titula *ECUACIONES. FUNDAMENTOS PARA SU RESOLUCIÓN.*

En esta parte se indica que el objetivo es despejar la incógnita. Y para la resolución de un problema se deben distinguir tres cosas:

1. *Plantear el problema.*
2. *Resolver la ecuación.*
3. *Verificar el valor obtenido para la incógnita.*

Se enuncia que *El Algebra solo se ocupa de los problemas que dan lugar á ecuaciones formadas con operaciones conocidas.*

Para la resolución de una ecuación se mencionan los siguientes principios:

1. *Una ecuación no se altera cuando se agrega, ó cuando se quita, una misma cantidad á sus dos miembros.*

2. *Una ecuación no se altera cuando con sus dos miembros se ejecutan operaciones iguales.*

3. *Una ecuación no se altea haciendo sufrir uno de sus términos ó á uno de sus miembros transformaciones que no cambien su valor.*

Con lo anterior, se hace mención de que en una ecuación de primer grado la incógnita está ligada con las cantidades conocidas por adición, sustracción, multiplicación y división. Enseguida se dan cuatro propiedades para resolver una ecuación, con sus demostraciones. Éstas son:

1. ***Toda cantidad puede pasar de uno á otro miembro de una ecuación con signo contrario.***

2. ***Toda cantidad que está como factor en un miembro puede pasar al otro como divisor.***

3. ***Toda cantidad que está como divisor en un miembro de una ecuación puede pasar al otro como factor.***

4. ***Para hacer desaparecer los denominadores de algunos términos de una ecuación, se formará el menor múltiplo común de los denominadores, en seguida se multiplicarán los términos enteros por el múltiplo común, y los numeradores de los términos de la forma fraccionaria se multiplicarán por el cociente que resulte de dividir el múltiplo común por el denominador de cada término.***

5. ***Cuando la incógnita tiene el signo menos, y conviene obtener su valor considerándola como positiva, se cambiarán los signos á todos los términos de la ecuación.***

Para concluir, se añade que despejar una incógnita es dejarla sola en un miembro de la ecuación y sus valores en el otro.

Finalmente, se da una regla general para resolver una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

1° Se quitan los denominadores. 2° Se ejecutan las operaciones y reducciones indicadas. 3° Se pasan á un miembro de la ecuación todas las cantidades que contienen la incógnita, y al otro las que no la contienen. 4° Se saca la incógnita como factor común. 5° Se divide el segundo miembro de la ecuación por el factor, ó por el coeficiente de la incógnita. 6° Cuando la incógnita resulta precedida del signo menos, se cambian signos á todos los términos de la última ecuación.

Observaciones

Este tema se extiende más en este libro, ya que involucra diversas definiciones de las que se hace uso del tema, además de más deducciones y reglas que en la obra anterior.

Todo el contenido es de gran importancia para instruir al alumno, de una manera muy adecuada, a que aprenda a resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

- ## Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)

En este libro, el tema se encuentra en el Capítulo III. Comienza con una definición:

Ecuaciones.- la expresión escrita de la igualdad de dos formas algebraicas.

Para ello da dos ejemplos:

$4a + 3b = 8d^2 - 3a$ $\qquad\qquad$ $3x^2 + 2y = \frac{2}{5}\,5(a + b)$

Enseguida, se indica que el primero y segundo miembro son, en las ecuaciones, la expresión que antecede y la que sigue del signo = (igual), respectivamente.

A la incógnita se le define como cantidad que tiene un valor no conocido. Y según el exponente de ésta, reciben el nombre de ecuaciones de 1º, 2º, 3º grado, etcétera.

Se añade que si, fuera de la incógnita, hay solo números en ella, se tiene una ecuación numérica, y literal en caso contrario.

Posteriormente se indica que para resolver una ecuación se deben deducir las relaciones determinadas en ella y uno de los términos de dicha relación debe ser la incógnita, ligada con una cantidad, a lo que se refiere técnicamente a despejarla.

Enseguida se enuncian ciertos principios que rigen en la resolución de una ecuación. Para cada uno de ellos, el autor explica la razón por la cual se cumplen.

1. *Un término puede quitarse de un miembro con tal que aparezca en el otro con signo inverso.*

2. *Una cantidad que multiplica a un miembro puede desaparecer de éste más la condición de entrar en el otro dividiéndolo; al contrario, si divide.*

3. *Una cantidad que divide a un miembro puede desaparecer de éste más la condición de entrar en el otro multiplicandolo; al contrario, si multiplica.*

Posteriormente, se hace una observación acerca de ecuaciones con denominadores.

Para hacer desaparecer los denominadores, se reducen a un mismo denominador los términos quebrados, y los enteros se convierten en quebrados homogéneos a los otros. Hecho esto, se suprimen todos los denominadores quedando solos los numeradores.

Para finalizar el tema, se da la siguiente regla:

1º. Quítense los denominadores. 2º. Redúzcanse los miembros a polinomios cuyos términos sólo por vía de suma y resta están entre sí ligados; 3º. Cambiar de miembro los términos, de tal manera dejar en el primero nada más las incógnitas, 4º. Con esto hágase uno solo. 5º. Divídase en seguida ambos miembros por el coeficiente de la incógnita; y esta quedará despejada.

Concluye con el siguiente ejemplo y con una serie de ejercicios para el alumno.

$$x - \frac{3(x-5)}{7} = \frac{x}{14} + 23$$

$$14x - 6(x-5) = x + 322$$

$$14x - 6x + 30 = x + 322$$

$$14x - 6x - x = 322 - 30$$

$$7x = 322 - 30$$

$$7x = 292$$

$$x = \frac{292}{7}$$

Observaciones

En este libro se expone lo esencial para la resolución de ecuaciones de primer grado de manera adecuada, aunque es menos extenso el tema. En particular, en esta obra se presentan más ejercicios prácticos utilizados para ir deduciendo cada uno de los pasos para resolver una ecuación. Además, este autor menciona la existencia de ecuaciones de otros grados.

Observaciones generales

El primer axioma que presenta el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)* es igual a uno de los que presenta Contreras al inicio de toda su obra. Aunque este último vuelve a mencionar sus axiomas en este tema, pero adecuados al uso de ecuaciones. Claramente, Contreras es el autor que expone más definiciones respecto al tema, por lo que su desarrollo es más extenso que el de los otros dos.

Obsérvese que las propiedades para resolver una ecuación, en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)* se deducen, y en el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* y el *Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)* se enuncian y después se demuestran.

En general, las tres obras abarcan lo necesario para que el alumno aprenda a resolver una ecuación de primer grado con una incógnita. Considero muy completa la manera en cada autor expone el tema.

Cálculo de radicales

• Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)

En este libro, el tema se localiza en el Capítulo III del LIBRO SEGUNDO, a partir de la página 233. Comienza con un ejemplo:

$$(2a^3b^2)^5 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2$$

Lo primero que se menciona es que el coeficiente debe ser 5 veces factor y que cada exponente debe repetirse 5 veces, o multiplicarse por 5. Por lo tanto, $(2a^3b^2)^5 = 2^5a^{3\times5}b^{2\times5}$=32$a^{15}b^{10}$.

Se deduce la siguiente regla:

Para elevar un monomio á una potencia cualquiera, se eleva á esta potencia su coeficiente y se multiplica el esponente de cada letra por el grado de la potencia.

Y entonces, se concluye que:

Para estraer la raiz de un grado cualquiera á un monomio, se estrae la raiz del coeficiente y se divide cada esponente por el índice de la raiz.

Acerca del signo del monomio, se dice que como el cuadrado de un monomio siempre es una cantidad positiva, cualquiera que sea su signo, y toda potencia de grado par puede expresarse como $(a)^{2n} = (a^2)^n$, de lo que se deduce que *toda potencia de grado par de una cantidad, ya sea positiva ó negativa es esencialmente positiva.*

Se añade que una potencia de grado impar $(2n+1)$ es el producto de una potencia de grado par por la primera potencia, por lo que el monomio resultante tendrá el mismo signo del primer monomio. Luego, se deduce que *toda potencia de grado impar de un monomio, está afectada del mismo signo que el monomio.*

Por consiguiente, se dan tres deducciones a lo anterior:

1. *Toda raiz de grado impar de una cantidad monomia debe estar afectada del mismo signo que la cantidad.*

2. *Toda raiz de grado par de un monomio positivo, está afectada del signo de ambigüedad* $\pm$.

3. *Cualquier raiz de grado par de una cantidad negativa es imposible, porque ninguna cantidad elevada á una potencia de grado par puede dar un resultado negativo. Así,* $\sqrt[4]{-a}$. $\sqrt[8]{-b}$ *son espresiones imaginarias.*

Posteriormente, los autores consideran que en el caso en que un monomio, cuya raíz se quiere extraer, y que no sea una potencia *perfecta del grado indicado por el índice de dicha raiz*, sólo se indica la operación, aunque se pueden hacer algunas simplificaciones regidas por las siguientes propiedades.

- $\sqrt[n]{abcd\ldots} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d} \ldots$
- $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Enseguida, se habla de la adición y sustracción con el uso de radicales. Para esto se indica que si dos radicales tienen el mismo índice y la misma cantidad debajo del radical, entonces son semejantes.

Se enuncia lo siguiente:

Para sumar ó restar dos radicales semejantes, se ejecuta la operacion solo con sus coeficientes, y la suma ó diferencia se pone como coeficiente delante del signo radical común.

$$m\sqrt[n]{a} + p\sqrt[n]{a} = (m+p)\sqrt[n]{a}$$

$$m\sqrt[n]{a} - p\sqrt[n]{a} = (m-p)\sqrt[n]{a}$$

Se da la observación de que veces pareciera no haber términos semejantes, pero en algunos pueden hacer simplificaciones para obtener los que sí sean semejantes.

Con respecto a la multiplicación y a la división se menciona que puede darse el caso en que los radicales tengan el mismo índice o que no lo tengan. Para ello se da la siguiente regla:

Para multiplicar ó dividir uno por otro dos radicales de un mismo índice, multiplíquese ó divídanse una por otra las dos cantidades que están bajo el signo, y póngase al resultado el signo radical comun. Cuando haya coeficientes, ejecútese antes la operacion separadamente con ellos.

Para concluir el tema, hay un apartado donde se dice qué hacer al elevar un radical a una potencia. Se da la siguiente regla:

Para elevar una cantidad radical á una potencia dada, es necesario elevar á esta potencia la cantidad que está bajo el signo, y poner al resultado el signo radical con su índice primitivo. Cuando hay coeficientes, se eleva este separadamente á la potencia dada.

Observaciones

Los autores dan diversos ejercicios prácticos para explicar todo lo que exponen en el tema. Éste lo considero muy completo, ya que incluye todas las operaciones que se pueden hacer con los radicales.

- # Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)

El tema se localiza en el Capítulo VIII, a partir de la página 112. Comienza explicando cómo elevar un monomio a una potencia cualquiera. Se expone un ejemplo y se concluye que los coeficientes se elevan a la potencia usando las reglas de Aritmética; respecto a las literales se suman sus exponentes cuando tienen la misma base.

Se hace una observación acerca de los signos y se indican que hay dos casos: cuando el exponente de la potencia es par y cuando es impar. A ello se añade que una potencia par puede ser representada como $2n$, y por lo tanto,

$$(+a)^{2n} = +a^n \times +a^n = +a^{2n}$$

$$(-a)^{2n} = -a^n \times -a^n = -a^{2n}$$

Se concluye diciendo que la potencia de una cantidad positiva o negativa siempre es positiva.

En el caso en que la potencia es impar, se indica que

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n} \times +a = +a^{2n+1}$$

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a = +a^{2n} \times -a = a^{2n+1}$$

Con lo anterior, la potencia impar de un monomio es afectada por el signo del mismo monomio.

A aquello procede la regla:

Para elevar un monomio á una potencia, se elevará á ésta su coeficiente por las reglas de la aritmética, se multiplicarán los exponentes de las literales por el exponente de la potencia, y el resultado se afectará del signo más cuando el grado de la potencia sea par, y cuando sea impar se le pondrá el signo del monomio.

Con respecto a la extracción de raíces de un monomio se indica que se deben realizar operaciones inversas a las anteriores mencionadas. En referencia a los signos, se deduce lo siguiente:

- $\sqrt[2n]{+A} = \pm x$
- $\sqrt[2n+1]{+A} = +x$
- $\sqrt[2n+1]{-A} = -x$

Para la expresión $\sqrt[2n]{-a}$ se dice que es *símbolo de un absurdo, de una operación impracticable,* y que además, se llama expresión imaginaria.

Enseguida se da una regla que fundamentada de todo lo ya expuesto.

Para elevar la raíz de un monomio, se extrae la raíz de su coeficiente, y se dividen los exponentes de las literales por el índice de la raíz; poniendo el signo $\pm$ al resultado cuando el monomio es positivo y el índice del radical es par; ó el signo del monomio cuando el índice del radical es impar. Si el monomio es negativo y el índice de la raíz es par, la expresión es imaginaria y la operación solo puede quedar indicada.

Con respecto a los monomios que no tienen raíces exactas, el autor proporciona una serie de *Teoremas relativos a los radicales.*

1. *La raíz del producto de varias cantidades es igual al producto de las raíces de sus factores.*

2. *La raíz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raíces de estas cantidades.*

3. *La raíz de la potencia de una cantidad, es igual á la potencia de la raíz de la misma cantidad.*

4. *La raíz, de grado m, de una expresión radical n, es igual á la raíz, del grado mn indicado por el producto de los índices.*

5. *El valor de una expresión radical no se altera cuando se multiplican ó se dividen por una misma cantidad el índice del radical y el exponente de la cantidad colocada bajo el radical.*

Para todos los teoremas se hace su respectiva demostración, aunque hay que mencionar que varios de ellos hacen uso, en su demostración, de los teoremas anteriores a ellos.

Posteriormente, se localiza un apartado de transformaciones de los radicales. En él se dan ciertas reglas para su realización
:

1. *Sacar fuera del radical uno ó varios factores.*

   Con ayuda de la regla enunciada así: *Los coeficientes numéricos que están dentro del signo radical se descompondrán en sus factores primos, después de lo cual se dejarán sin variación los números y las literales cuyos exponentes sean menores ó iguales al índice del radical; y los factores numéricos ó literales cuyos exponentes sean mayores que el índice, se descompondrán en dos factores: uno de los cuales tendrá por exponente el índice del radical ó un múltiplo del índice, y el otro el exceso ó resta que quede al dividir cada exponente por el índice del radical.*

2. *Poner dentro del radical uno ó varios factores.*

3. *Simplificar un radical.*

4. *Reducir los radicales al mismo índice.*

   Con ayuda de lo siguiente: *para reducir cualquier número de radicales al mismo índice, se multiplican el índice de cada radical y el exponente de cada uno de los factores numéricos ó literales que están dentro del signo radical por el producto de los índices de todos los demás.*

Con respecto a las operaciones que se pueden realizar con los radicales, se menciona que en la suma y resta, se deben sumar o restar, según el caso, los coeficientes de los términos semejantes. Para la multiplicación y división se reducen con lo que ya se explicó a lo largo del tema en referencia a la reducción al mismo índice, y luego se multiplican o dividen las cantidades que están fuera y las que están dentro del radical.

El tema concluye con diversos ejercicios que resuelve el autor, apoyándose de todo lo anterior.

Observaciones

Claramente, el autor expone el tema de manera mucho más extensa. En éste incluye todo lo esencial para que el alumno aprenda lo referente al cálculo de radicales.

Con los temas antes explicados, sobre este libro, era de esperarse la información tan completa en el desarrollo de éste.

- **Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)**

El tema se localiza en el Capítulo II. El tema comienza explicando cómo obtener la raíz cuadrada de un monomio. Para ello índice que se extrae sacándola del coeficiente y tomando la mitad de los exponentes. Usando esto, se resuelve el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{49a^4b^2c^6} = 7a^2bc^3$$

Se índice que la raíz es doble por que $7a^2bc^3$ y -$7a^2bc^3$ elevados al cuadrado, dan $49a^4b^2c^6$. Por lo tanto,

$$\sqrt{49a^4b^2c^6} = \pm 7a^2bc^3$$

El autor procede a demostrar la siguiente proposición: *es lo mismo sacar la raíz a un producto ya formado que extraerla a cada factor, multiplicando enseguida los resultados.*

Indica que cierto producto que llama P está compuesto de los factores a, b y c; es decir que $P = a \times b \times c$, las raíces de cada factor son, respectivamente $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$; la raíz del promedio $\sqrt{P}$.

Enseguida expone que multiplicando las primeras cantidades y elevando al cuadrado una cantidad, es dejarla en su ser. Por lo tanto, $(\sqrt{a})^2$ x $(\sqrt{b})^2$ x $(\sqrt{c})^2$ = abc. Y como *abc* no es otra cosa que P y el cuadrado de $\sqrt{P}$, es el mismo P, se infiere que $\sqrt{P} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$.

Por otro lado, Terrazas menciona que es un absurdo pretender hallar la raíz de una cantidad negativa, pues tanto positivo por positivo como negativo por negativo, dan como resultado positivo. El autor indica que una cantidad de esta especie se llama imaginaria y que toda cantidad imaginaria $\sqrt{-a}$, es equivalente a $\sqrt{a \times (-1)}$, que podrá descomponerse en $\sqrt{a} \times \sqrt{(-1)}$, es decir en el producto del radical primitivo, salvo el signo interior y raíz de menos uno. A esto procede con un ejemplo:

$$\sqrt[4]{-a^8} = \sqrt[4]{a^8 \times -1} = a^2 \sqrt{-1}$$

Enuncia que: *todo radical imaginario es igual a la raíz de -1 multiplicado por un radical que solo difiera del anterior en el signo antepuesto a la cantidad interior.*

En cuanto a las operaciones a realizar con radicales se dan como ejemplos dos términos semejantes: $\sqrt[5]{a^2b}$ y $-4\sqrt[5]{a^2b}$. Se indica que pueden sumarse o restarse, haciendo esto únicamente con los coeficientes que acompañan a los radicales.

Enseguida, se expone que resulta lo mismo extraer una cierta raíz y sacar primero la que marque uno de los factores de índice de la misma, y luego a esta señalada por el otro factor, es decir, $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Su demostración es la siguiente:

Extraer una raíz de un grado cualquiera no es más que descomponer la cantidad dada en tantos factores iguales entre sí como unidades que tiene el índice del radical; cuando pues, se descompone un número primero en quince factores; y por otro lado en cinco, y luego cada uno de ellos en tres; es claro que siempre se tendrán los mismos 15 primitivos y del mismo tamaño; luego:

$$\sqrt[15]{a} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$$

Realmente, la demostración que da no es del todo correcta, porque no se aprecia la generalización para radicales con índices m y n cualesquiera.

Posteriormente, se dan las siguientes propiedades:

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

El tema concluye con diversos ejemplos resueltos.

Observaciones

En este libro, el tema se presenta menos extenso. Se menciona lo esencial acerca del tema del cálculo de radicales y se considera adecuada la exposición del tema. Aunque, no se olvide resaltar que la demostración “mal realizada” que se mencionó no puede ser ignorada, debido a la rigurosidad matemática de la que carece.

Observaciones generales

En las tres obras hay buenos fundamentos en relación al tema. A pesar de que en el último el tema es más breve, contiene argumentos similares a los de las otras obras. En particular, el *Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)* se acerca a la definición y construcción de un número imaginario, ya que su autor es el único que menciona que la cantidad imaginaria va acompañada de la expresión $\sqrt{-1}$.

En general, el tema es mucho más extenso en el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)*, pero sin olvidar mencionar que en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)* también se presenta extenso.

Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

• Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)

El tema se encuentra en el Capítulo III del LIBRO SEGUNDO, a partir de la página 243. Los autores comienzan diciendo que hay ecuaciones de segundo grado llamadas de *dos términos, incompletas o puras,* para las cuales se tiene la forma $\mathrm{x}^2 = \mathrm{A}$ y el valor de x es $\mathrm{x} = \pm\sqrt{\mathrm{A}}$. Además, se tienen las llamadas *completas* que son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Para estas últimas, se divide por a y pasan todos los términos al primer miembro para obtener
$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$, definiendo $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$. Y así tener la ecuación

$$x^2 + px + q = 0.$$

A lo anterior, proceden a hacer el siguiente procedimiento:
Si $x^2 + px + q = 0$, entonces $x^2 + px = -q$. Luego, $x^2 + px + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 = -q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2$. Por lo tanto, $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$, y entonces $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$.

Entonces, los autores resumen diciendo que si se tiene la ecuación
$x^2 + px + q = 0$ su solución es $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.
Enseguida enuncian lo siguiente:

El primer miembro es el producto de dos factores en los que x está elevada al primer grado y es su parte común, siendo la no común cada uno de los valores de x con el signo cambiado

Luego, indican que lo anterior se refiere a que $x^2 + px + q = (x - x')(x - x'')$, donde x' y x'' son las raíces de la ecuación, donde $x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ y $x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Deducen que $x' + x'' = -p$ y $x' \times x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} + q\right) = -q$

Para concluir el tema, los autores dan tres observaciones:

- Si $q < \frac{p^2}{4}$ se tienen dos raíces diferentes.
- Si $q = \frac{p^2}{4}$ se tiene dos raíces iguales.
- Si $q > \frac{p^2}{4}$ se tienen raíces imaginarias.

Observaciones

Los autores exponen de manera adecuada el tema. Incluyen cómo resolver una ecuación de segundo grado si es completa o incompleta. Además, se dan las distintas formas de las soluciones de una ecuación del tipo completa. En general, también se resuelven ejercicios usando todo el tema, para que el alumno lo comprenda mejor. Notemos que este tema presenta contenido más abstracto al realizar cada una de sus deducciones.

- # **Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)**

Este tema se localiza en el Capítulo IX, a partir de la página 141. El autor inicia exponiendo varias definiciones y otros comentarios sobre éstas.

Se dice que una ecuación es de 2° grado cuando contiene la incógnita elevada a la 2ª potencia, como x^2 ó cuando contiene un producto de dos incógnitas como xy.

Cuando una ecuación contiene el cuadrado de la incógnita en uno ó varios términos sin contener la incógnita elevada a la primera potencia, se llama *pura, incompleta* ó de *dos términos.*

A lo anterior se añade que se les dice de *dos términos* porque se reduce a una ecuación de la forma $ax^2 = b$, que precisamente consta de dos términos.

Posteriormente, se indica que cuando una ecuación de segundo grado contiene también la incógnita elevada a la primera potencia, se le llama *mixta, completa* o de *tres términos.* Lo anterior porque la ecuación se reduce a la forma $ax^2 \pm bx = \pm c$, que contiene tres términos.

En el caso de las ecuaciones incompletas, se da la regla para su resolución:

Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se saca como factor común á x^2: se divide el segundo miembro de la ecuación por el factor x^2: y el valor de x será igual á la raíz cuadrada del segundo miembro, tomando el resultado con el signo de ambigüedad $\pm$.

El autor realiza un ejemplo para que el alumno observe cómo se aplica lo anterior, haciendo hincapié que su resolución se rige de las operaciones que se usan para resolver una ecuación de primer grado. Además, concluye que toda ecuación incompleta de segundo grado se reduce a la forma $ax^2 = b$ y con esto su solución será $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Es decir, x tendrá dos valores: uno positivo y uno negativo. Aunque si lo que está dentro del radical es negativo, el resultado es un valor imaginario.

De lo anterior, se expone al resolver una ecuación *pura* de grado superior se debe tener:

- Si $\mathrm{x}^{2\mathrm{n}} = \mathrm{c}$ se tendrá $\mathrm{x} = \pm\sqrt[2\mathrm{n}]{\mathrm{c}}$.
- Si $\mathrm{x}^{2\mathrm{n}} = -\mathrm{c}$ el valor es imaginario.
- Si $\mathrm{x}^{2\mathrm{n}+1} = \pm\mathrm{c}$ se tendrá $\mathrm{x} = \sqrt[2\mathrm{n}+1]{\pm\mathrm{c}}$.

Respecto a las ecuaciones completas de segundo grado, menciona que se reducen a la forma $ax^2 \pm bx = \pm c$. A esto se indica dividir por a para obtener $x^2 \pm \frac{b}{a}x = \pm\frac{c}{a}$. Simplificando, el autor define $\frac{b}{a} = p$ y $\frac{c}{a} = q$. Y así, la ecuación se transforma en $x^2 \pm px = \pm q$.

El autor expone que para su resolución lo ideal es transformarla en una ecuación de primer grado, para lo cual se debe ingresar un término que haga que el primer miembro sea un cuadrado perfecto. Entonces, define a éste como y^2. Luego, obtiene $x^2 \pm px + y^2 = (x \pm y)^2$.

Desarrollando el cuadrado anterior y simplificando, se concluye que $x^2 \pm px = \pm 2xy$. Por lo tanto, al despejar y se tiene $y = \frac{p}{2}$. Se procede a sumar a la ecuación $x^2 \pm px = \pm q$ el valor de y al cuadrado, es decir, $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \pm q$.

Con lo anterior, como el primer medio es un trinomio cuadrado perfecto, se puede extraer su raíz exacta, a lo que se concluye que $x \pm \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$. Trasladando al segundo miembro $\pm\frac{p}{2}$, se tiene $x = \mp\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \pm q}$.

Por consiguiente se da la *regla para la resolución de las ecuaciones de segundo grado:*

Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se sacan x^2 y x como factores comunes, se hace que el cuadrado de la incógnita no tenga coeficiente y que sea positivo. Enseguida se completa el cuadrado agregando á los dos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del factor de x: se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros y se despeja x.

El autor resuelve un ejercicio y da una regla más:

El valor de x en una ecuación de segundo grado reducida á la forma $x^2 \pm px = \pm q$ es igual á la mitad del factor de x tomado con signo contrario, más ó menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad y de las cantidades conocidas, tomadas con los signos que lleven en el segundo miembro de la ecuación.

Con aquello, se concluye que si $x^2 + px = q$, entonces $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$; y si $x^2 - px = -q$, entonces $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Observaciones

El autor define las dos ecuaciones de segundo grado que puede haber, puras o impuras, y para ambas expone su resolución. Además, enlista ejercicios al alumno para que practique lo aprendido en el tema. Considero que se expone adecuadamente.

- ## Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)

En este libro, el tema se encuentra en el Capítulo IV, a partir de la página 243. El autor comienza diciendo que las ecuaciones de segundo grado se reducen a las siguientes formas:

- $ax^2 = b$, llamadas *puras* o *incompletas.* Para esta se indica que despejada x^2 se extrae la raíz a ambos miembros.

- $ax^2 + bx = c$, llamadas *mixtas* o *completas*. Para esta se indica el siguiente procedimiento para su resolución:

  Primero se divide la ecuación por a, es decir, $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$.
  Luego, se traslada $\frac{c}{a}$ al primer miembro, es decir, $x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0$.
  A continuación, se definen $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$. Y así se tiene
  $$x^2 + px + q = 0.$$
  Posteriormente, se traslada q al segundo miembro, como sigue:
  $$x^2 + px = -q$$
  Y se suma $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ a ambos miembros de la ecuación, esto es
  $$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 .$$
  Se indica que como la ecuación anterior es comparable con $a^2 + 2ab + b^2$, se obtiene $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

  Se procede a extraer la raíz y así tener $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Por último, despejando x se concluye que
  $$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Enseguida, el autor resuelve la ecuación: $5x^2 + 8x = 112$ de la siguiente manera:

$$x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{112}{5} = 0$$
$$p = \frac{8}{5} \quad q = -\frac{112}{5}$$

$$x=-\frac{8}{10}\pm\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2+\frac{112}{5}}$$

$$x=-\frac{8}{10}\pm\sqrt{\frac{64}{100}+\frac{112}{5}}$$

$$x=-\frac{8}{10}\pm\sqrt{\frac{64}{100}+\frac{2240}{100}}$$

$$x=-\frac{8}{10}\pm\sqrt{\frac{2304}{100}}$$

$$x=-\frac{8}{10}\pm\frac{48}{10}$$

$x=-\frac{8}{10}+\frac{48}{10}=4$ y $x=-\frac{8}{10}-\frac{48}{10}=-\frac{56}{10}$.

Posteriormente, el autor hace mención de que al valor de la incógnita se da también el nombre de raíz de la ecuación.

Enseguida, da las siguientes observaciones:

- *El primer miembro de la ecuación general de segundo grado es igual al producto de dos binomios cuyo primer término es x, siendo el segundo cada raíz con el signo inverso.*

- *La suma de las raíces es igual a la suma del coeficiente de x simple en la ecuación, tomado con signo inverso.*

- *Las raíces multiplicadas, producen el término conocido de la ecuación.*

Regresando a la ecuación $x^2+px+q=0$. El autor menciona que las ecuaciones
$x^2+px+q=0$
$x^2-px+q=0$
$x^2+px-q=0$
$x^2-px-q=0$
conducen a un resultado imaginario, que se da cuando $\frac{p^2}{4}<q$. Luego, si $(x-x')(x-x'')=0$, x' y x'' son las raíces de la ecuación se tienen tres casos:

1. x y x'' cantidades reales y desiguales.
2. x y x'' cantidades iguales y reales.
3. x y x'' cantidades Imaginarias.

Observaciones

En esta obra se procede a desarrollar el tema de manera similar a los de las otras dos. Aunque el tema es menos extenso, pero a pesar de ello se tiene lo fundamental, principalmente para determinar cómo serán las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Observaciones generales

El tema es expuesto de manera muy similar en las tres obras. Lo principal es notar que todos los autores deducen la resolución de una ecuación de segundo grado completa lo siguiente:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Donde $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$. Si sustituimos estos valores en lo anterior se tiene

$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b}{4a^2}^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} =$$
$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Lo que llamamos *Fórmula general* para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Para concluir, los autores acertaron en una fórmula adecuada para resolver este tipo de ecuaciones, aunque hubiera sido mucho más completo el tema si se concluyera la deducción que aquí se menciona. Sin olvidar resaltar que los tres deducen cómo podrían ser las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Logaritmos

Para este tema sólo se expone cómo es que se deducen los logaritmos, es decir, qué son y sus elementos que los conforman.

- ## Curso elemental de Matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)

En este libro, el tema se localiza en el Capítulo III del LIBRO TERCERO, a partir de la página 349. Los autores comienzan suponiendo que para la ecuación $y = a^x$, a es una cantidad positiva y constante.

Entonces, se toma primero que $a > 1$, para lo cual, si $x = 0,1,2,3,4,5, \ldots$ resultará $y = 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$

A lo anterior exponen que *todos los valores de y mayores que la unidad son producidos por potencias de a cuyos esponentes son números positivos, enteros o fraccionarios; y los valores de x son tanto mayores cuando mayores sean también los de y .*

Si se toma $a > 1$, para lo cual, si $x = 0, -1 - ,2, -3, -4, -5, \ldots$ resultará

$y = 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}, \ldots$

Se deduce que *pueden formarse todos los valores de y menores que la unidad con potencias de a cuyos esponentes sean negativos; y los valores de x serán numéricamente, tanto mayores, cuanto mas se aproximen los de y á su límite inferior que es CERO.*

Para el caso donde se toma $a < 1$, se deduce que *todos los números son engendrados por las diversas potencias de a, en un órden inverso al que resulta de la hipótesis $a > 1$.*

Dado todo lo anterior, se define lo que es un logaritmo:

Se llama LOGARITMO de un número al esponente de la potencia á que seria preciso elevar un cierto número invariable para producir el primero.

Enseguida exponen que el número invariable puede elegirse arbitrariamente con tal de que sea mayor o menor que 1. A éste, se le llama base del sistema de logaritmos.

Observaciones

En este tema, los autores llegan a ciertas deducciones para después definir lo que es un logaritmo. En esta parte no se menciona nada acerca de la mantiza ni su característica. En particular, el tema es un poco complejo pero se trata de exponer tan minuciosamente como sea posible para que el alumno lo comprenda.

- # Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)

El tema se encuentra en el Capítulo XIII, a partir de la página 180. El autor comienza indicando que si se toma una cantidad *constante,* como 10, base de nuestro sistema de numeración, y se eleva a diversas potencias obtendremos:

$1=10^0$
$10=10^1$
$100=10^2$
$1000=10^3$

Y en este caso los diferentes exponentes de la cantidad fija 10 son los logaritmos de los números que respectivamente se han producido.

Generalizando lo anterior, se considera la ecuación:

$$y = a^x$$

En ella, y representa un número cuyo valor depende del que se dé al exponente variable x; y siendo una cantidad constante, que se llama base y que satisface las condiciones de ser positiva y diferente de la unidad se demuestra que dando a x valores convenientes en la ecuación $y = a^x$ se pueden obtener para y todos los valores numéricos positivos que se quiera. Entonces se tiene lo siguiente:

1. Si $a > 1$, haciendo en la ecuación $y = a^x$ primero $x = 0$, y enseguida $x = 1$, $x = 2$, etc., para $x = 0, 1, 2,\ 3, \ldots$ logaritmos positivos se tendrá $y = 1\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$, números mayores que 1.

2. Si $a < 1$, la base será un quebrado y se tendrá $a = \frac{1}{b}$ siendo $b > 1$. En este caso, la ecuación $y = a^x$ se cambia a $y = \frac{1}{b^x}$ y para $x = 0, 1, 2,\ 3, \ldots$ logaritmos negativos, se tendrá $y = 1, \frac{1}{b}, \frac{1}{b^3}$, números menores que 1.

3. Si se toma $a > 1$ o $a < 1$, pasando x por toda la serie de valores posibles, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, los valores que resultan para y son todos positivos desde cero hasta $+\infty$. Se concluye que los números negativos no tienen logaritmos reales
.
4. Si se supone $a = 1$, cualquiera que sea el valor de x en la ecuación $y = a^x$ se obtiene $y = 1$, y por esta razón la base a de los logaritmos debe ser diferente de la unidad.

Con lo anterior expuesto, Contreras da la definición de logaritmo, como sigue:

Logaritmos son los números que indican las diversas potencias a que se ha de elevar una cantidad constante para producir números dados.

Se concluye exponiendo las siguientes observaciones:

1. *La base de los logaritmos no puede ser cero ni la unidad y es conveniente que no sea negativa.*

2. *En todos los sistemas de logaritmos el de la unidad es cero, y el de la base es 1.*

3. *Cuando la base es mayor que 1, los logaritmos de los números mayores de la unidad, son positivos, y los de las fracciones son negativos. Cuando* $a < 1$ *tiene lugar lo contrario.*

4. *Los números negativos no tienen logaritmos reales.*

5. *Fijado el valor de la base se constituirá un sistema de logaritmos en el que cada número no tiene más que un logaritmo, y cada logaritmo, y cada logaritmo no corresponde más que a un solo número.*

6. *La formación de una tabla de logaritmos consiste en determinar los valores de* x *que en la ecuación* $y = a^x$ *dan* $y = 1, = 2, = 3 \ldots etc$.

Observaciones

El autor da una explicación muy similar a la que se da en el libro anterior. En esta parte tampoco se define la característica y mantiza en los logaritmos, pero se dan las observaciones pertinentes para conocer, de manera general, el comportamiento de los logaritmos.

- ## Tratado elemental de Álgebra (José Joaquín Terrazas)

En este libro, el tema de logaritmos se localiza en el Capítulo VII. El autor comienza diciendo que los logaritmos son exponentes que indican la potencia a que debe elevarse un número fijo para producir todos los demás. Así, indica que exponente y logaritmo *es la propia cosa*, con solo la diferencia de ser fija la cantidad afectada por el logaritmo.

Continúa exponiendo que cuando los logaritmos contienen enteros, estos forman lo que se llama su *característica*, y *mantiza* se denomina la parte decimal. A lo que se llama base del sistema de los logaritmos.

Enseguida, indica que se llama *complemento aritmético de un logaritmo* a el que le falta a este logaritmo para igualar a 10 y cuando se introducen complementos logarítmicos en un cálculo, se debe rebajar tantas veces 10 como son ellos.

Se dan las siguientes observaciones:

- *De las decenas en adelante cada cifra de un número corresponde a una unidad en la característica.*

- *Cuando una cantidad se multiplica por 10, 100, 1000… aumenta la característica de su logaritmo 1, 2, 3… unidades.*

- *En el logaritmo de una fracción decimal la característica es -1, -2, -3…según que haya cifra significativa inmediatamente a la coma, o este uno, o dos lugares a la derecha.*

- *Las mantizas de los números en que todo es igual menos la colocación de la coma decimal, son iguales.*

- *Tomando los logaritmos que estén en progresión aritmética corresponden en número en progresión geométrica.*

El tema termina con la explicación de las tablas de Callet y el modo de manejarlas.

Observaciones

La información aquí presentada es muy útil, ya que se da la definición de logaritmo, característica y mantiza, además de las propiedades mencionadas al final. En particular, este autor hace mención de las tablas de Callet, que en las obras anteriores no se incluyen.

Observaciones generales

Ya se mencionó que en el *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero)* y en el *Tratado de Álgebra elemental (Manuel María Contreras)* el tema se expone de manera muy similar, ya que se hacen ciertas deducciones para después continuar definiendo los logaritmos.

A diferencia del *Curso elemental de matemáticas (Joaquín de Mier y Terán, Francisco M. de Chavero),* las otras dos obras exponen ciertas observaciones muy útiles para entender el comportamiento de los logaritmos. Aunque sólo en la última obra se mencionan otras definiciones respecto al tema.

A decir verdad, el tema es mucho más complejo, pero en las tres obras se trata de exponer lo más explícito posible para su mejor comprensión.

CAPÍTULO V

El Álgebra en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro

El Álgebra en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro

Este último capítulo es breve, ya que se analizarán ciertas cuestiones en cuanto al Álgebra que se imparte en la Escuela de Bachilleres Salvador Allende de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ). Se pretende dar el principio de lo que indicará el trabajo que aún queda por realizar con respecto a la enseñanza del Álgebra en esta institución.

Plan de estudios

Primeramente, se presenta el mapa curricular de la Escuela de Bachilleres de la UAQ, del 2009.

Mapa Curricular

Eje	Primer semestre	Segundo semestre	Tercer semestre	Cuarto semestre	Quinto semestre	Sexto semestre
Matemático y de razonamiento 30 horas	Matemáticas I 5 h – 8 c	Matemáticas II 5 h – 8 c	Matemáticas III 5 h – 8 c	Matemáticas IV 5 h - 8 c	Matemáticas V 5 h - 8 c	Matemáticas VI 5 h - 8 c
Lenguaje y comunicación. 41 horas	Lectura y Redacción I 5 h – 5 c	Lectura y Redacción II 5 h – 5 c	Etimologías Grecolatinas del Español 5 h – 5 c			
	Informática I 5 h – 7 c	Informática II 5 h – 7 c	Ingles I 5 h – 10 c	Ingles II 5 h – 10 c	Laboratorio de Ingles I 3 h – 7 c	Laboratorio de Inglés II 3 h – 7 c
Humanístico y social 60 horas	Historia I 5 h – 10 c	Historia II 5 h – 10 c	Historia III 5 h – 10 c	Sociología 5 h – 10 c	Derecho 5 h – 10 c	Economía 5 h – 10 c
	Lógica I 5 h – 8 c	Lógica II 5 h – 8 c	Filosofía I 5 h – 9 c	Filosofía II 5 h – 9 c	Arte y Estética 5 h – 8 c	Formación Cívica y Ética 5 h – 10 c
Ciencias naturales y experimentales 50 horas	Química I 5 h – 10 c	Química II 5 h – 10 c	Laboratorio de Química 5 h – 5 c	Física I 5 h – 10 c	Física II 5 h – 10 c	Laboratorio de Física 5 h – 5 c
			Biología I 5 h – 10 c	Biología II 5 h – 10 c	Laboratorio de Biología 5 h – 5 c	Formación Ambiental 5 h – 6 c
Formación personal 18 horas	Orientación Educativa 5 h – 7 c	Cultura Física 3 h – 3 c		Orientación Vocacional y Profesional 5 h – 7 c	Psicología 5 h – 8 c	
Horas /semestre: 199	35 horas	33 horas	35 horas	35 horas	33 horas	28 horas
Total de créditos:	55 créditos	51 créditos	57 créditos	64 créditos	56 créditos	46 créditos

Además de las asignaturas extracurriculares de:

1. Actividades Deportivas
2. Actividades Artísticas

La duración del bachillerato es de 6 semestres, es decir, 3 años. Notemos que en cada uno de ellos se imparte la materia de Matemáticas. En particular, los temas de Álgebra son presentados durante los cursos de Matemáticas I y II, durante primer y segundo semestre, respectivamente. Para visualizar sus contenidos, se presentan enseguida los programas de cada uno de esos dos cursos.

Contenido programático de Matemáticas I y II

Matemáticas I: Álgebra	***Matemáticas II: Álgebra***
Unidad I. Historia de la matemática Historia de la matemática. **Unidad II. El campo ordenado de los números reales** Conjuntos y subconjuntos (unión, intersección y complementos). Conjuntos numéricos (**N, Z, Q, I, R**). Operaciones con números (suma, resta, producto y cociente). Postulados de campo de los números reales. Orden y distancia. **Unidad III. Introducción al álgebra** Terminología y nomenclatura Algebraica. Valor numérico de expresiones algebraicas. Exponentes enteros positivos y sus leyes. Suma, resta, multiplicación y división de polinomios. Productos notables. Factorización. Reducción de fracciones algebraicas simples y complejas. **Unidad IV. Ecuaciones de primer grado con una incógnita** Propiedades de la igualdad. Resolución de ecuaciones de primer grado. Problemas que involucren ecuaciones de primer grado. Despejes de fórmulas	**Unidad I. Sistemas de ecuaciones lineales** Plano cartesiano (repaso), Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas Sistema de Ecuaciones lineales con dos incógnitas Sistema de Ecuaciones lineales con tres incógnitas Problemas de planteamiento **Unidad II. Ecuación de segundo grado y grado superior** Clasificación de las ecuaciones de segundo grado. Discriminante de una ecuación de segundo grado. Resolución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita Resolución por despeje (Incompletas puras) Resolución por factorización (incompletas y completas) Resolución completando el TCP Resolución por formula general Sistemas mixtos Problemas de planteamiento Ecuaciones de grado superior Problemas de planteamiento que involucren ecuaciones de grado superior. **Unidad III. Valor absoluto y desigualdades** Conceptos básicos Intervalos Valor absoluto y propiedades. Resolución de ecuaciones con valor absoluto Desigualdades de primer grado Desigualdades de segundo grado y grado superior. Desigualdades de cociente. Resolución de desigualdades con valor absoluto

	Unidad IV. Funciones Introducción al concepto de función (relación y función) Dominio, rango, prueba de la vertical geométricamente Funciones polinomiales y sus gráficas **Unidad V. Exponentes** Exponentes enteros negativos Exponentes racionales **Unidad VI. Radicales** Radicalizacion Simplificación con radicales Solución de ecuaciones con radicales **Unidad VII. Números complejos** Definición Operaciones con número complejos Suma, resta, producto y cociente Ecuaciones de segundo grado que tenga como solución a números complejos

Observe que las unidades I y II de Matemáticas I, y las unidades IV y VII de Matemáticas II son añadidas, comparando a los contenidos de Álgebra en la ENP. Sin embargo, en estos dos cursos no se habla de logaritmos ni problemas de interés simple, compuesto, etc. Mucho menos se menciona acerca de progresiones y demás.

A pesar de lo anterior, en la Escuela de Bachilleres de la UAQ se siguen impartiendo los temas más esenciales del Álgebra, incluidos en la ENP.

Libros de referencia

De acuerdo a lo investigado, los docentes de Matemáticas de la Escuela de Bachilleres de la UAQ hacen uso principalmente del libro *Álgebra Contemporánea* de Rees Sparks y de *Álgebra* de A. Baldor. En éstos se encuentra el desarrollo de los diversos temas presentados en los programas de Matemáticas I y II. A diferencia de la ENP, actualmente los alumnos pueden consultar los libros que ellos prefieran, y no necesariamente los dos mencionados.

Banco de reactivos de Álgebra

Así como en la ENP, la Escuela de Bachilleres cuenta con un banco de reactivos para los cursos de Matemáticas I y II. En este caso se asemejaría a lo que son los *Cuestionarios* del Capítulo III. Este banco contiene material seleccionado por los docentes Rita Ochoa Cruz, Gerardo Tapia Martínez y Sandra López de la Fuente. Consiste en un conjunto de ejercicios sobre todos los temas que se imparten en los cursos. Para Matemáticas I se cuenta con 100 reactivos, y para Matemáticas II con 120. Se consideró no mostrar todos los reactivos, ya que se cree suficiente decir que éstos son meramente ejercicios prácticos. Aunque sí se muestran, a continuación, algunos especiales, que por su contenido resultan atrayentes.

88. Al resolver la ecuación $\frac{2}{5} + \frac{4}{10x+5} = \frac{7}{2x+1}$ la solución es

a) 7 b) $\frac{4}{41}$ c) $\frac{41}{4}$ d) $\frac{29}{4}$

Figura 5.1. Ecuación. Banco de reactivos de Matemáticas I

12. Resuelva el sistema $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$

a) $x = \frac{8}{3},\ y = \frac{13}{15},\ z = \frac{6}{5}$ b) $x = \frac{13}{3},\ y = \frac{8}{15},\ z = \frac{6}{5}$

c) $x = -\frac{8}{3},\ y = \frac{13}{15},\ z = -\frac{6}{5}$ d) $x = \frac{13}{15},\ y = \frac{8}{3},\ z = \frac{6}{5}$

Figura 5.2. Sistema de ecuaciones con tres incógnitas Banco de reactivos de Matemáticas II

3 Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

1. La ecuación $ax^2 + bx = 0$ es

   a) incompleta pura. c) completa
   b) incompleta mixta d) .de primer grado

2. La ecuación $ax^2 + bx = 0$ tiene

   a) dos soluciones iguales. c) una solución igual a cero y otra distinta de cero
   b) dos soluciones distintas en signo d) una única solución.

3. Para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (con a, b y c reales, a diferente de cero) tenga dos soluciones iguales el discriminante deberá de ser

   a) mayor que cero.. c) un cuadrado perfecto.
   b) igual a cero. d) menor que cero.

4. Para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (con a, b y c reales, a diferente de cero) tenga dos soluciones complejas el discriminante deberá de ser

   a) mayor que cero.. c) un cuadrado perfecto.
   b) igual a cero. d) menor que cero.

Figura 5.3. Diversas cuestiones acerca de las ecuaciones cuadráticas. Banco de reactivos de Matemáticas II

5 Desigualdades y valor absoluto

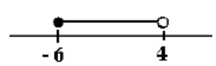
1. Una desigualdad representa

   a) una igualdad entre dos cantidades. c) una comparación entre dos cantidades
   b) una dependencia entre dos variables d) una función

2. Una desigualdad de primer grado

   a) tiene una infinidad de soluciones. c) tiene sólo un conjunto finito de soluciones
   b) tiene una solución d) puede no tener soluciones reales

3. ¿Qué intervalo que representa a la siguiente figura?



   a) $[-6, 4]$ b) $(-6, 4)$ c) $[6, 4)$ d) $(6, 4]$

Figura 5.4. Diversas cuestiones acerca de desigualdades. Banco de reactivos de Matemáticas II

En particular, se localizó una serie de reactivos sobre logaritmos y exponenciales. Se debe recordar que esto no está incluido dentro de alguno de los programas de Matemáticas I y II.

8 Logaritmos y exponenciales

1. Efectúe las conversiones necesarias utilizando las propiedades de los logaritmos y simplifique su respuesta. Relacione correctamente las columnas.

a) $\frac{1}{2}\log 36 - \frac{1}{3}\log 27 + \frac{2}{3}\log 64$	( )	$\frac{5}{7}\log x$
b) $\log \sqrt[7]{x^5}$	( )	$\log 14$
c) $2\log x + 3\log y - \frac{1}{2}\log z$	( )	$\log x + \log y - \log z$
d) $\log 7 + \log 4 - \log 2$	( )	$\log 32$
e) $\log \frac{xy}{z}$	( )	$\log\left(\frac{x^2y^3}{\sqrt{z}}\right)$

Figura 5.5. Reactivos de logaritmos y exponenciales. Banco de reactivos de Matemáticas II

2. Resuelve la ecuación $\log_2\left(\sqrt{x-6}\right) = 3$

   a) $x = 70$ b) $x = 72$ c) $x = 12$ d) $x = 42$

3. Resuelve la ecuación $\log_2 5 + \log_2(2x+3) = 5$

   a) $x = 2.1$ b) $x = 1.7$ c) $x = 1.95$ d) $x = 2.8$

4. Resuelva la ecuación $(46)\,3^x = 12480$

   a) $x = 7$ b) $x = 5.6$ c) $x = 5.1$ d) $x = 3.9$

5. El número de bácterias presentes en un cultivo está dado por la ecuación $y = 500\,(1.9)^x$ donde x representa el número de horas de proliferación. ¿Después de cuántas horas habrá $23,523$ bacterias?

   A) 4.9 horas B) 6 horas C) 6.5 horas D) 7 horas

Figura 5.6. Reactivos de logaritmos y exponenciales. Banco de reactivos de Matemáticas II

Para concluir el capítulo, se debe mencionar que la rigidez en cuanto a lo que se evalúa en la ENP y la Escuela de Bachilleres es diferente. Aunque, esto pasa en general para todas las escuelas de nivel medio superior. Se podrá ver que en ENP se evaluaba a los alumnos con ejercicios mucho más complejos que los de ahora.

CONCLUSIONES

Con la realización de este trabajo de tesis se tienen diversas cuestiones a resaltar. En primera instancia, no es un trabajo que consiste en una análisis meramente exhaustivo, ya que si a así lo fuera se debería abordar el contenido de cada una de las obras de las que se habla.

En segundo lugar, ya que se trata de una investigación con vertientes históricas, el objetivo primordial fue hacer un análisis matemático y no histórico, por razones obvias.

Por último, es evidente que quedan diversas cuestiones pendientes a realizar para completar este trabajo, principalmente tratándose de hacer mayor hincapié en una comparación más extensa en referencia a la enseñanza del Álgebra en la ENP y en la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro. Esto es con el propósito de concluir qué se considera esencial para la formación de los estudiantes con respecto a esta rama de las Matemáticas. Además, esto sería de vital importancia para realizar y proponer un libro que pueda ser obra de texto en la Escuela de Bachilleres. Aunque no sólo en esta institución, también podría generalizarse para los contenidos de Álgebra en la Educación Media Superior.

En relación al contenido de esta tesis, lo primordial es resaltar que la enseñanza del Álgebra en la ENP involucraba diversos aspectos diferentes a los de ahora, comenzando con el plan de estudios, la duración de las materias impartidas, así como la manera en que se evaluaba a los alumnos, pues no realizaban exámenes escritos como ahora, sino que eran de manera oral bajo el criterio de tres profesores.

No olvidemos mencionar que una de las características más significativas en cuanto al tema es que los contenidos de Álgebra eran, en su mayoría, extensos y con ello, lo que se evaluaba en un alumno involucraba gran cantidad de conocimiento, además de que éste incluía cuestiones mucho más abstractas que las de ahora. En esto último está la clara evidencia de que a un alumno de la ENP se le pedía hacer demostraciones y deducciones de reglas. Actualmente eso no se presenta tan a menudo en la Educación Media Superior.

Para terminar, se hace la atenta invitación para que alguno de los lectores se proponga complementar este trabajo de tesis, insistiendo que lo más importante a rescatar sería la elaboración de una obra de texto que generalice los contenidos esenciales para la enseñanza del Álgebra.

BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES

[1] Bails, Benito. *Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando.* Madrid, 1789.

[2] Contreras, Manuel María. *Tratado de álgebra elemental de Manuel María Contreras.* México, 1889.

[3] Cristóbal, P. Pezzi; et al. *Los extranjeros en la España Moderna.* Málaga, 2003.

[4] De Mier y Terán, Joaquín; et al. *Curso elemental de Matemáticas.* México, 1869.

[5] García Camarero, Ernesto. *Ateneistas Ilustres II.* Madrid, 2007.

[6] González Astudillo, María Teresa. *La investigación en historia de la educación matemática.* España, 2009.

[7] Núñez, Miguel. *La enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: los primeros años (1868-1896).* México, 2004.

[8] Sosa, Francisco. *Biografías de mexicanos distinguidos.* México, 1884.

[9] Terrazas, José Joaquín. *Tratado elemental de álgebra de José Joaquín Terrazas.* México, 1897.

[10] Vallejo, José Mariano. *Tratado elemental de matemáticas.* Barcelona, 1821.

[11] Velasco Robledo, Dinorah. *El apostolado seglar se agita: el caso José Joaquín Terrazas – Pelagio Antonio de Labastida, 1877 – 1895.* México, 2011