Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

"Algunos libros de texto de Geometría Euclidiana en la Escuela Nacional Preparatoria entre 1878 y 1899"

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Presenta:
Mariana Mejía Llamas

Dirigido por:
M. en C. Roberto Torres Hernández

Centro Universitario
Querétaro, Qro, Junio 2016

Índice

Introducción

El objetivo de este trabajo es acercarnos a la enseñanza de la Geometría Euclidiana durante los primeros años de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), 1878-1899, mediante la exposición y el análisis de definiciones, teoremas y conceptos que se consideraron significativos desde el punto de vista matemático, y que se encuentran en libros de texto utilizados en dicha escuela.

Existen ya trabajos que tratan la enseñanza de las matemáticas en la ENP, pero la mayoría de ellos están únicamente enfocados al estudio histórico, dejando la parte matemática de lado. Hay que recordar que cuando se habla de enseñanza en general, no sólo se hace referencia a la forma en que se enseña, sino también al qué se enseña. Es ahí donde se hace necesario un análisis matemático de los textos, pues eran estos los que fijaban el contiendo de los programas a seguir en esta institución.

Sumado a este análisis de textos se presentarán los exámenes de geometría euclidiana que se aplicaban en aquella época en la ENP, específicamente los correspondientes al año de 1897. Esto nos ayudará a complementar nuestro acercamiento a la enseñanza de esta cátedra.

Los tres libros con los que se realizará el análisis matemático son: *Tratado de Geometría Elemental* escrito por Manuel María Contreras, 4ta Edición, Año 1884; *Elementos de Geometría Plana y en el Espacio* de Francisco Echeagaray y Allen, Año 1899; y *Tratado elemental de Geometría* por J. Joaquín Terrazas, Año 1878. Como se verá más adelante, los primeros dos libros se utilizaron como libros de texto en la Escuela Nacional Preparatoria. Y aunque el libro de Terrazas muy seguramente no se haya usado en esta institución, su contenido bien nos puede hablar, de alguna manera, acerca del conocimiento sobre Geometría que se difundía en esa época.

Cabe también señalar que el libro de Echeagaray nos los proporcionó una biblioteca particular, el de Contreras se encontró en la Biblioteca digital de la Universidad Autónoma de Nuevo León y el de Terrazas nos lo facilitó el Fondo Reservado de la Biblioteca Nacional de México.

A lo largo del análisis de los textos se irán haciendo, en ciertos temas, comparaciones con los libros *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, del Dr. J. A. Baldor, Año 2004; y *Fundamentals of college geometry*, de Edwin M. Hemmerling, 2da Edición, Año 1970, tomados como representantes de los libros de texto que se utilizan en la actualidad en la cátedra de geometría euclidiana, con el fin de realzar las ideas de nuestros autores antiguos y, de cierta forma, observar cómo han cambiado a través de los años las concepciones que se tenían de ciertos conceptos.

Este trabajo se compone de 3 capítulos. En el primero, **Antecedentes**, se da una pequeña reseña histórica sobre la Escuela Nacional Preparatoria. Se hablará sobre sus planes de estudio, los profesores que impartían clases, la edad de los alumnos al ingresar a dicho instituto, en fin, se darán datos que nos ayudarán a contextualizar los libros que se estudiarán, haciendo especial énfasis en los que traten la cátedra de geometría euclidiana. Se darán también las biografías de nuestros tres autores: Manuel María Contreras, Francisco Echeagaray y Allen y J. Joaquín Terrazas; y una breve descripción de sus libros, junto con las imágenes de los índices de los mismos, así como de sus portadas.

En el segundo capítulo, **Análisis de los textos desde un punto de vista matemático**, se realizará propiamente el análisis matemático de los tres textos. Este capítulo se divide en dos partes. En la primera se estudiarán temas concretos, escogidos por el importante papel que, en mi opinión, juegan dentro de la geometría euclidiana. En la segunda parte se expondrán algunas curiosidades matemáticas encontradas en dichos textos. Ambas partes pretenden ilustrar el contenido de los textos y acercarnos a la enseñanza de la geometría euclidiana en la ENP, mediante dicho contenido.

En el tercer y último capítulo, **Los exámenes**, se explicará brevemente cómo se evaluaba a los alumnos en la ENP. También se presentarán los exámenes de geometría euclidiana que se aplicaron en el año de 1897, con lo que nos daremos una idea sobre el alto nivel de conocimientos que se les exigía a los muchachos preparatorianos. Terminando el capítulo, con el análisis de dos (de entre varias) preguntas interesantes de dicho cuestionario.

Al final del trabajo se darán algunas **Conclusiones**, donde se presentarán algunos comentarios sobre los libros estudiados, así como las semejanzas y diferencias que se pudieron percibir en la enseñanza de la geometría euclidiana en la actualidad y la de aquella época, esto en cuanto a contenido. Se esperaría que estas observaciones ayuden a decir si la enseñanza de esta cátedra va por buen camino o si necesita adecuaciones y cuáles podrían ser éstas.

Capítulo 1. Antecedentes

1.1 Sobre la Escuela Nacional Preparatoria

El objetivo de este apartado es dar una idea muy general del surgimiento de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), de sus planes de estudios referentes a las cátedras de Matemáticas, en donde obviamente la Geometría formaba parte de ellas; de los maestros que impartían dicha materia, de los textos que utilizaban para esta clase, etc. Expondremos información que nos ayudará a contextualizar los libros que se estudiarán, es decir, sabremos, entre otras cosas: para niños de qué edad estaban dirigidos y el peso que se le daba a la asignatura de geometría en los planes de estudio, con lo cual complementaremos sin dudas nuestro análisis matemático.

La siguiente información se extrajo, en su mayoría, del texto *La enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: los primeros años (1868-1896)* de Miguel Núñez, cuyo trabajo le valió el *Premio Dr. Enrique Beltrán de Historia de la Ciencia en México, 2002*.

Breve origen de la ENP

Desde el inicio de la vida independiente del país (1821), se había tratado el tema educativo y se habían planteado proyectos referentes a la educación (concernientes sobre todo a la educación elemental), pero es claro que, después de once años de lucha armada, se carecían de recursos económicos suficientes para apoyarlos. Pero no sólo fue la crisis económica que México estaba pasando en esos momentos lo que impidió el desarrollo de la educación; entre el término de la Guerra de la Independencia y el triunfo definitivo de los liberales la situación del país fue de caos, inestabilidad, intervenciones extranjeras, guerras, etc. Había una total anarquía en el poder puesto que los gobiernos conservadores y liberales se lo alternaban entre guerra y guerra, lo que impedía definir políticas educativas y darles seguimiento (ambos grupos tenían profundas diferencias ideológicas). Por ello, de 1821 a 1867 hubo pocos avances en el terreno educativo, y la educación escolarizada estuvo, mayoritariamente, en manos del clero; y, en menor porción, en manos de particulares (como la Compañía Lancasteriana: una asociación filantrópica fundada con el fin de promover la educación primaria entre las clases pobres) y de ayuntamientos.

En particular, en la ciudad de México existían escuelas de enseñanza elemental y escuelas de enseñanza secundaria, éstas últimas comprendían los Seminarios, los Colegios y las Escuelas de estudios profesionales, incluida la Universidad. Una vez terminada la educación elemental, los alumnos que quisieran continuar con estudios profesionales, tenían que cursar estudios secundarios que los prepararan para esa empresa. Dichos estudios preparatorios se podían cursar en el Colegio de San Ildefonso, en el Colegio de Minería y en la Escuela de Medicina, principalmente; aunque también era posible cursarlos en otros colegios y seminarios. Por decirlo de alguna manera, cada Escuela tenía su propia "preparatoria" interna. La duración de estos estudios preparatorios variaba según la Escuela, por ejemplo, en el Colegio de San Ildefonso eran de 5 años y en la Escuela de Medicina de 2 años. Es importante mencionar que la cátedra de Matemáticas formaba parte de los estudios preparatorios y que los textos que eran empleados para impartirla eran importados de Europa, básicamente de Francia, y unos pocos de España. También hay que señalar que la religión y los métodos escolásticos de enseñanza (que priorizaban la memorización) estaban presentes en los establecimientos de enseñanza secundaria de la ciudad de México.

A partir de 1867, luego de que se consolida el triunfo de los liberales, encabezado por Benito Juárez, sobre las fuerzas conservadoras, se inicia la restauración de la República y con ella una reestructuración de la educación pública en el Distrito Federal. Ahora, los estudios preparatorios serían iguales, enseñados es una misma escuela (la ENP), para todos los estudiantes que luego estudiarían una carrera profesional; y estaban imbuidos en las ideas del positivismo de Augusto Comte, impulsadas por la Comisión del gobierno del presidente Juárez la cual diseñó la *Ley de Instrucción Pública en el Distrito Federal*, del 2 de diciembre de 1867; comisión a cuyo frente estaban notables positivistas mexicanos, como don Gabino Barreda y los hermanos Francisco y José María Díaz Covarrubias. En esta institución preparatoria, la instrucción tenía como base las ciencias exactas y naturales, con lo que se pretendía desterrar la educación dogmática con tintes escolásticos que se había venido impartiendo en los establecimientos educativos del país. Hay que señalar que la validez de esta Ley estaba limitada al Distrito Federal y sólo en los establecimientos educativos sostenidos por el gobierno.

La Geometría en los planes de estudio (1868-1896)

La ENP inició sus actividades en febrero de 1868, su plan de estudios era el establecido en el Reglamento de la *Ley Orgánica de Instrucción Pública* del 2 de diciembre de 1867. De acuerdo con este plan, los estudios preparatorios se repartían en cinco años escolares, con excepción de los futuros ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales, que los concluirían en sólo cuatro años. El plan especificaba también las cátedras que en cada año escolar habrían de cursar los alumnos, de acuerdo a la carrera profesional que luego seguirían; así, se daban cuatro listados de cátedras a cursar: una para los futuros abogados, otra para los futuros médicos y farmacéuticos, otra para los futuros agricultores y veterinarios, y una más, para los futuros ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales. Pero aunque sí había diferencias en las cátedras a cursar, en función de la futura profesión, éstas eran mínimas. En lo que refiere a las cátedras de

Matemáticas el plan de estudios era igual para todos los alumnos; todos ellos cursarían en el primer año de preparatoria Aritmética, Álgebra y **Geometría**; y en el segundo, Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal. Así pues, según lo preveía el enfoque positivista que los liberales imprimieron a la educación, las cátedras de Matemáticas ocuparon un lugar básico en el plan de estudios y eran obligatorias para todos los alumnos. Este plan de estudio estuvo vigente sólo en los primeros dos años de vida de la ENP. Seguramente se debió a lo demandante que resultaban ser los cursos, pues en particular, en relación al primer curso de Matemáticas (Aritmética, Álgebra y Geometría), desde el primer año de estudios (1868) "se evidenciaron los tropiezos de los alumnos que por primera vez se ocupaban en estudios serios y difíciles" (Núñez, p. 54).

Cuadro 1. Plan de estudio de la ENP. 1867

AÑO	ABOGADOS	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS	AGRICULTORES Y VETERINARIOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES Y BENEFICIADORES DE METALES
Primero	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía	Aritmética Álgebra y Geometría Gramática española Francés Taquigrafía
Segundo	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Latín I Inglés I	Trigonometría y nociones de Cálculo infinitesimal Cosmografía y Mecánica racional Raíces griegas Geografía Inglés I
Tercero	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Geografía Latín II Inglés II	Física Cronología e Historia Literatura Teneduría de libros Inglés II Alemán I
Cuarto	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia Cronología Latín III Teneduría de libros Alemán I	Química Historia natural Lógica Ideología Moral Alemán II Gramática general
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Historia de la metafísica Literatura	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	Historia natural Lógica Ideología Moral Gramática general Literatura Alemán II	

Fig. 2.1: Plan de estudios de la ENP, 1867

El 15 de mayo de 1869 se estableció la nueva *Ley Orgánica de la Instrucción Pública en el Distrito Federal*. En el plan de estudio, extraído de su reglamento, se aprecian algunos cambios con respecto al plan anterior: la duración de los estudios preparatorios es de cinco años escolares, pero ahora para todos los alumnos. Y en cuanto a las cátedras de Matemáticas, en el primer curso se estudiarían ahora Aritmética, Álgebra y **Geometría plana**; en tanto que en el segundo curso se estudiarían **Geometría en el espacio y general**, junto con Trigonometría para concluir con nociones de Cálculo infinitesimal. Con esto, el primer año de estudios preparatorios se aliviaba un poco dejando en él, de Geometría, sólo la plana; y pasando a formar parte del curso de segundo año lo referente a la Geometría en el espacio y general, que requería de mayor esfuerzo intelectual de parte de los jóvenes alumnos. Este plan de estudio entró en vigor en 1870, y estuvo vigente hasta el año escolar de 1896. Con todo, en esos veintisiete años fue sometido a diversas adecuaciones.

Cuadro 2. Plan de estudio de la ENP. 1869

AÑO	ABOGADOS	INGENIEROS, ARQUITECTOS, ENSAYADORES Y BENEFICIADORES DE METALES	MÉDICOS Y FARMACÉUTICOS, AGRICULTORES Y VETERINARIOS
Primero	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés	Aritmética Álgebra Geometría plana Francés
Segundo	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés	Geometría en el espacio y general Trigonometría, concluyendo con nociones de Cálculo infinitesimal Inglés Francés
Tercero	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés	Física, precedida por nociones de Mecánica Cosmografía Gramática española Raíces griegas Inglés
Cuarto	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I	Química Geografía Historia general y del país Cronología Alemán Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Química Geografía Historia general y del país Cronología Latín I
Quinto	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Alemán Literatura Dibujo de órdenes clásicos y copia de monumentos Academia de matemáticas	Historia natural Lógica Ideología Gramática general Moral Latín II Literatura

Fig. 2.2: Plan de estudio de la ENP, 1869

Atendiendo a un reglamento que se expidió en octubre de 1873, a partir del año escolar de 1874, del segundo curso de Matemáticas, los futuros abogados, médicos y farmacéuticos sólo tendrían que estudiar la trigonometría plana, es decir, ya no cursarían Geometría en el espacio y general, Trigonometría esférica ni nociones de Cálculo infinitesimal. Y el segundo curso de Matemáticas quedaría sólo para los ingenieros, arquitectos, ensayadores y beneficiadores de metales; pues los agricultores y veterinarios ya tenían, por esos años, sus propios estudios preparatorios en su escuela de estudios profesionales. Esto se mantuvo durante los siguientes cinco años (1874-1878), pues esta situación pronto evidenció algunos inconvenientes, como que los alumnos presentaban dificultades en el estudio de la Física (impartida, para todos los alumnos, en el tercer año) por no tener los conocimientos más indispensables de Geometría de los volúmenes.

En enero de 1877 se dictaron nuevas disposiciones para los estudios de esta escuela, entre ellas estaba la siguiente: los estudiantes que quisieran seguir las carreras de abogado, médico y farmacéutico, habrían de cursar, necesariamente, los elementos de Geometría y Trigonometría.

En septiembre de 1878, la Junta Directiva de Instrucción Pública envió el *Reglamento para el estudio de los cursos de matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria* (que entraría en vigor el año escolar de 1879). Los artículos más importantes de este reglamento son los siguientes:

Artículo 1. Se suprime del 1er curso de Matemáticas para todas las carreras el estudio de la ***Geometría Plana****, y pasa ésta a formar parte del 2° curso.*

Artículo 2. En el 2° curso, también para todas las carreras, se estudiará ***Geometría plana y en el espacio****, y Trigonometría Rectilínea.*

Artículo 3. El 3er curso, obligatorio únicamente para los que se dediquen a la carrera de Ingeniería, comprenderá: la aplicación del Álgebra a la Geometría, Trigonometría esférica y Geometría analítica.

Artículo 4. En el 4° curso, igualmente obligatorio para los que se dediquen a la carrera antes mencionada, se enseñará el Cálculo Infinitesimal.

Así, a partir del año escolar de 1879, las Matemáticas en la ENP se impartirían en los primeros cuatro años. Los dos primeros, iguales para todos los alumnos y el Tercero y Cuarto años de Matemáticas serían obligatorios sólo para los futuros ingenieros. En cuanto a las ventajas que esta reforma traía a los cursos de Matemáticas, el director de la ENP, don Alfonso Herrera, comentó:

Varias e importantes son en mi concepto las ventajas que con esas reformas se consiguen: la mayor parte de los alumnos que cursan el primer año de estudios preparatorios son demasiado jóvenes y en muchos la inteligencia no se halla todavía bastante desarrollada para poder comprender las abstracciones de las Matemáticas; además, necesitan aprender a estudiar, cosa no tan fácil como a primera vista parece. De aquí la necesidad de poner el primer curso de Matemáticas lo más corto posible, dando esto por resultado que aumente el número de alumnos que aprovechen el año…

Con la reforma mencionada se consiguen además las ventajas siguientes:

1ª. Uniformar más los estudios preparatorios.

2ª. Facilitar el estudio del 2° curso a los alumnos que estudian para Ingenieros, aumentando de esta manera el número de jóvenes que se dediquen a esa carrera, pues lo difícil de las materias que en este curso debían aprender, obligaba a muchos a prescindir de ella.

3ª. Como en todos los años de estudios preparatorios, los alumnos no dejan de cursar las Matemáticas, no hay lugar de que las olviden como antes sucedía y pasan por lo mismo mejor preparados para hacer sus estudios profesionales.

Por último, en 1897 entró en vigor el nuevo plan de estudio de la ENP, propuesto por una comisión de profesores que laboraban en dicha institución. En este plan era igual para todos los alumnos, independientemente de qué carrera siguieran después, y se cubría en ocho semestres; en él se volvió a incluir al Cálculo infinitesimal y se dejó fuera la Trigonometría esférica (que se incorporó a los estudios profesionales). Las cátedras de Matemáticas quedaron distribuidas de la siguiente manera.

- Primer año de Preparatoria: Primer curso de Matemáticas, compuesto de Aritmética, Álgebra y **Geometría plana** y otras materias.
- Segundo año de Preparatoria: Segundo curso de Matemáticas, compuesto de **Geometría de los volúmenes** y ambas trigonometrías y otras materias.
- Tercer año de Preparatoria: Tercer curso de Matemáticas, compuesto de (geometría) analítica y nociones de Cálculo trascendente (infinitesimal), Física y otras materias.

Hay que decir que, por diversas razones, los establecimientos educativos de estudios preparatorios, tanto de la ciudad de México como del interior del país, fueron adoptando el plan de estudios de la ENP, desde los primeros años de actividades de ésta.

RESUMIENDO:

Desde el inicio de labores de la ENP (1868) hasta 1869, la Geometría (plana y del espacio) se impartía en el primer año de estudios preparatorios, y era obligatoria para todos los alumnos. De 1870 a 1873, los alumnos cursaban en el primero año de estudios Geometría plana y en el segundo año, Geometría en el espacio y general. De 1874 a 1876 la Geometría en el espacio y general no era obligatoria para los alumnos que estuvieran estudiando las carreras de abogado, médico y farmacéutico. De 1877 a 1878 los estudiantes que estuvieran siguiendo las carreras antes mencionadas nuevamente tendrían que cursar los elementos de Geometría. De 1879 hasta 1896 la Geometría plana pasó a cursarse junto con Geometría en el espacio en el segundo año de estudios preparatorios. Y en el último plan de estudio que entró en vigor en los años bajo análisis (1897), aparece que en el primer año de preparatoria se cursaba Geometría plana, y en el segundo, Geometría de los volúmenes.

Esta asignatura, con excepción del intervalo de 1874 a 1876, fue siempre obligatoria para todos los alumnos de estudios preparatorios.

La Geometría en los programas y textos (1868-1896)

En los primeros años de actividades de la ENP, los programas de las cátedras eran los contenidos de los textos a usar en ellas; así, más que de programas, se hablaba de textos a seguir. En el año escolar de 1869, y seguramente en el de 1868, para el primer y segundo curso de Matemáticas se usó la obra de Terán y Chavero. Este texto era ya conocido y se usaba en México años antes del establecimiento de la ENP, pues se utilizaba en las cátedras de Matemáticas del Colegio de Minería. (Uno de los autores, don Joaquín de Mier y Terán, fue profesor de estos cursos en dicho Colegio).

Un hecho que tuvo gran trascendencia en lo relativo a los textos usados en las cátedras de Matemáticas de la ENP y otras escuelas nacionales en la segunda mitad del siglo XIX fue el nombramiento dado al profesor Manuel Ma. Contreras, como profesor titular del Primer curso de Matemáticas en la ENP. Pues como resultado de ello, el profesor Contreras recibió de parte del director de esta institución, don Gabino Barrera, el encargo de:

Formar un texto para la enseñanza del Primer curso de Matemáticas… que lo escribiese conforme al programa de dicho plantel, en forma accesible a los jóvenes de tierna edad, que sin más conocimientos que las primeras operaciones de Aritmética, se dedican a hacer los cursos preparatorios de instrucción profesional.

Sus obras para la enseñanza de las Matemáticas en la ENP incluyeron los temas de Aritmética, Álgebra, Geometría plana y en el espacio, Trigonometría plana y esférica. Durante la década de los años setenta del siglo XIX, se fueron publicando y adoptando como textos de las cátedras de Matemáticas de nivel preparatorio.

Es importante decir que la selección de los textos a usar en las clases de Matemáticas se hacía en una junta de profesores de la ENP, cuatro meses antes de iniciar el año escolar. Así, para el año de 1871, se acordó que nuevamente se usaría el Terán y Chavero en el segundo curso de Matemáticas (complementando con lecciones orales los temas de Cálculo infinitesimal, no incluidos en esta obra); y para el primer curso, se usaría el Terán y Chavero para el estudio del Álgebra y la Geometría, dejando pendiente la elección entre la obra de Terán y Chavero y la *Aritmética* escrita por Manuel. Ma. Contreras para el curso de Aritmética.

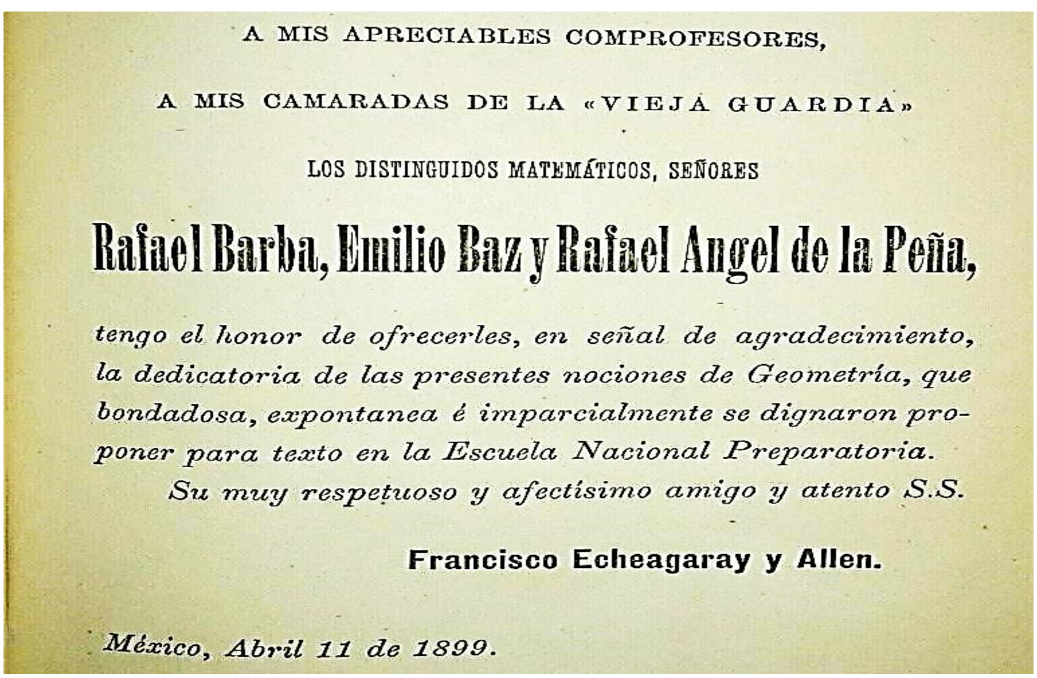
Para el año escolar de 1872, se eligieron los mismos textos que los del año anterior, sólo que esta vez, en cuanto al texto de Aritmética, se eligió directamente la del profesor Contreras.

En los años siguientes, fue dándose en la ENP un proceso de adopción de textos de Matemáticas, cuya elaboración estuvo a cargo de profesores de esta escuela. Este fue el caso del profesor Manuel Ma. Contreras. Para el año escolar de 1875, a su libro de Aritmética se le agregó el de Álgebra, sobreviviendo en el primer curso de Matemáticas la obra de Terán y Chavero, sólo para cubrir la Geometría plana. Luego, en 1876, se adoptó el libro de Geometría plana de Contreras, quedando, a partir de ese año escolar, cubierto el primer año de Matemáticas con la obra de este profesor. El Terán y Chavero se siguió ocupando para los temas de Geometría en el espacio y Trigonometría rectilínea, del segundo año de Matemáticas, sólo por unos años más, pues a partir del año escolar de 1879 se adoptó, para estudiar estos temas, la obra escrita por el profesor Contreras.

Hay que decir que para el año escolar de 1895 los profesores de las cátedras de Matemáticas ya estaban entregando sus programas a cubrir. Eran éstos unos listados de los temas a estudiar extraído de los índices de los textos asignados, con aclaraciones sobre qué temas de tal o cual libro no se verían en el curso y dando las razones para ello.

Es de destacar que los textos de Matemáticas elaborados por los profesores de la ENP, entre ellos Contreras, para su uso por parte de los alumnos de la misma, acompañaron a muchas generaciones de estudiantes, tanto de la Nacional Preparatoria como de otros colegios nacionales y, muy probablemente, también los usaron estudiantes de otras escuelas preparatorias del interior del país. En particular, los textos del profesor Contreras se usaban, en 1887, en el Colegio Militar, y en la Escuela de Agricultura y Veterinaria. A partir del año escolar de 1897, los cursos en la Preparatoria, como ya se había dicho, fueron semestrales; y los textos del profesor Contreras siguieron siendo usados para las cátedras de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría rectilínea, al menos así ocurría todavía en el año de 1899.

Podemos entonces concluir que en los de 1868 a 1899, en la ENP, para el curso de Geometría (plana y del espacio) se utilizaron los texto de **Terán y Chavero** y de **Contreras**. Desgraciadamente Núñez no nos dice qué textos se usaron después de 1899, pues ya se sale de su intervalo bajo estudio. Pero podemos aventurarnos a decir, que lo más probable es que para los años siguientes a 1899, se utilizó el texto escrito por Francisco Echeagaray y Allen, *Geometría Plana y en el Espacio.* Pues es de mencionar que Echeagaray fue también profesor de Geometría General en la ENP, y el ejemplar con el que contamos tiene fecha de publicación el año 1899. Además, lo deducimos también por el agradecimiento que aparece en la cuarta página de su libro:


A MIS APRECIABLES COMPROFESORES,

A MIS CAMARADAS DE LA «VIEJA GUARDIA»

LOS DISTINGUIDOS MATEMÁTICOS, SEÑORES

Rafael Barba, Emilio Baz y Rafael Angel de la Peña,

tengo el honor de ofrecerles, en señal de agradecimiento, la dedicatoria de las presentes nociones de Geometría, que bondadosa, expontanea é imparcialmente se dignaron proponer para texto en la Escuela Nacional Preparatoria.

Su muy respetuoso y afectísimo amigo y atento S.S.

Francisco Echeagaray y Allen.

México, Abril 11 de 1899.

Regresando a los textos utilizados para la enseñanza de la Geometría en los años de 1868 a 1899, es pertinente anotar que la biblioteca de la ENP contó, en esos años, con ejemplares de estos textos para su consulta; y contó además con otros textos, básicamente extranjeros, para complementar la información y la formación de los alumnos en esa asignatura. Así por ejemplo, en el año de 1893, se podía consultar el texto: *Geometría,* de Cartesii.

RESUMIENDO:

Sobre la ENP más que hablar de programas, se hablaba de los textos en uso en cada cátedra; los contenidos de los textos cumplían los programas planteados. Las cátedras de Matemáticas, y con ellas la de Geometría, para el año escolar de 1887 ya estaban cubiertas completamente por textos elaborados por profesores de la misma escuela; los cuales habían escrito sus obras teniendo presentes las características y necesidades de sus alumnos.

Específicamente para la cátedra de Geometría se utilizaron el texto de Terán y Chavero y el de Contreras, en los años de 1869-1899; y a partir de este último año muy posiblemente se utilizó el de Echeagaray.

Profesores de Matemáticas (1868-1896)

La planta docente para las cátedras de Matemáticas de la ENP estuvo integrada, desde el inicio de sus actividades, por destacados hombres de ciencia; la mayoría de ellos egresados del Colegio de Minería.

Los profesores de Matemáticas que formaron parte del cuerpo académico en el primer año de actividades de la ENP (1868) fueron: para el primer curso de Matemáticas los señores Isidoro Chavero, José Bustamante, Eduardo Garay, Manuel Tinoco y Francisco Bulnes; y para el segundo curso, los señores Francisco Díaz Covarrubias y Manuel Fernández Leal.

En cuanto al Primer año de Matemáticas, en septiembre de 1868 entró en lugar del profesor Tinoco, el profesor Manuel Ma. Contreras, quien fuera sin duda el más destacado de los profesores de Matemáticas de la ENP en ese último tercio del siglo XIX. A partir del año escolar de 1869 y hasta 1873, Contreras desempeñó el puesto de profesor titular del primer curso de Matemáticas. Él no daría clases, sino que su responsabilidad era coordinar y supervisar la labor de los profesores ayudantes de esa materia, que sí estarían frente a grupo. En cuanto a estos últimos, considerando las bajas y los relevos ocurridos en esos años, fueron los siguientes: Isidoro Chavero, Francisco Bulnes, Rafael Ángel de la Peña, Mariano Villamil, Francisco Prieto, Luis del Castillo, Ignacio Ortiz de Zárate, Manuel Ramírez, Agustín Barroso y Rafael Herrera y R.

En 1874, deja don Manuel Ma. Contreras de ser el profesor titular de esa cátedra para pasar a serlo de la de Física, ocupando la titularidad del Primer año de Matemáticas don Manuel Fernández Leal, y haciéndolo durante los siguientes cinco años escolares. En este periodo entraron algunos profesores ayudantes nuevos: Roberto Esteva, Manuel Calderón, Rafael Barba (que en 1875 entró en sustitución de Rafael Ángel de la Peña quien pasó a Segundo curso de Matemáticas), Juan Vallarino y Emilio Baz.

A partir del año escolar de 1879, Agustín Barroso entra como profesor de Primer año de Matemáticas en lugar de Leal. Ejerció su cargo hasta su muerte, ocurrida en 1887. En este periodo se incorporaron, para este curso, los profesores: Carlos Tamborrel, Demián Flores, Francisco León de la Barra y Gabriel Alcocer.

A la muerte de Agustín Barroso volvió el profesor Manuel Ma. Contreras a ocupar el puesto de profesor de Primer año de Matemáticas. Contreras permaneció varios años con ese cargo, pero en 1895 ese puesto ya lo ocupaba el profesor Ignacio Ortiz de Zárate. En este segundo período del profesor Contreras como docente del Primer curso de Matemáticas se incorporó como profesor ayudante el profesor Samuel Contreras; luego, ya estando como profesor propietario Zárate, se unió el profesor Luis Troconis Alcalá.

Pasaremos ahora a una breve revisión del profesorado del Segundo curso de Matemáticas, en el lapso 1868-1896. Como se mencionó al inicio, los primeros profesores del Segundo año de Matemáticas fueron Francisco Díaz Covarrubias y Manuel Fernández Leal; ellos se encargaron de las cátedras de este curso durante los primero tres años de actividades de la ENP. En 1871 los sustituyen los profesores Mariano Villamil, Eduardo Garay y José Ma. Bustamante. Para 1872 continuaron los mismos profesores, y en 1873 Rafael Barba sustituyó a Bustamante quien falleció. De ese año al de 1878 se incorporaron a estas cátedras los profesores Francisco Echeagaray y Manuel Ramírez.

RESUMIENDO:

Con lo anterior expuesto, se pretendió dar una especie de listado de los profesores que impartían las cátedras de Matemáticas, entre ellas la de Geometría, en la ENP en los años de 1868-1896. Como podemos ver, dos los autores de los textos bajo estudio, Contreras y Echeagaray, figuran entre ellos.

Con respecto a los profesores que impartieron las clases de Geometría, nada podemos decir de ellos más que deben aparecer en el listado anterior. "¿Quiénes, de los anteriores mencionados, tenían asignada esta catedra?" es una pregunta que se escapa de los objetivos de este trabajo. Corresponde entonces al lector interesado hacer dicha labor de investigación.

Para terminar, algo importante que hay que notar es que, según Núñez, el autor de uno de nuestros textos bajo estudio, J. Joaquín Terrazas, no formó parte del profesorado de la ENP en los años de 1868-1896.

Los alumnos

A la ENP se podía ingresar inmediatamente después de concluida la enseñanza elemental o primaria. Para matricularse en el Primer año de estudios preparatorios, en el primer año de actividades de la ENP (1868), se debía presentar un certificado de un profesor público de primeras letras de las escuelas nacionales o particulares en el que se constara que el alumno tenía aptitudes en los ramos de: Lectura, Escritura, Elementos de Gramática Castellana, Estilo epistolar, Aritmética, Sistema métrico decimal, Moral, Urbanidad, nociones de Derecho Constitucional, rudimentos de Historia y de Geografía; o bien, podía someterse a un examen de esas materias. Para el segundo año de actividades de la ENP, 1869, los requisitos eran los mismos que pidieron un año atrás salvo una cosa; en el Diario Oficial de noviembre de 1868 se enlistaban los siguientes:

1ª. ***Tener, por lo menos, doce años de edad****; 2ª, justificar buena conducta y moralidad; 3ª, saber leer y escribir; Aritmética y Gramática española.*

Así pues, se estaba agregando la condición de que el joven aspirante habría de tener, por lo menos, doce años de edad. Estos requisitos fueron los necesarios para ingresar al Primer año de estudios en la ENP, desde 1869 hasta el año de 1896.

A la ENP ingresaban alumnos procedentes de diversos estratos sociales; los había hijos de familias acomodadas y también de familias de pocos recursos económicos, pero la mayoría –es de suponer— procedía de familias pertenecientes a una clase media en crecimiento. En las inscripciones que se realizaron entre diciembre de 1884 y enero de 1885 y en relación a los jóvenes que se inscribieron al Primer año de estudios preparatorios, se extrajo la siguiente información: 367 alumnos, entre primer ingreso y recursadores. La edad promedio de ellos era de 14.7, con mediana y moda de 14 años. Doscientos diez de ellos (el 57%) dijeron ser originarios de la Ciudad de México o de poblaciones del D.F.; ciento cincuenta y cuatro (el 42%) procedían de ciudades del interior del país; y tres (el 1%) procedían de otros países, dos veían de La Habana, Cuba y uno de España. En cuanto a la carrera que manifestaron cursarían luego de los estudios preparatorios, la distribución fue: Ingeniero, 171 alumnos (47%); Médico, 105 (29%); Abogado 71 alumnos (19%) y, entre Farmacéutico y Notario, veinte alumnos (5%). De estos 367 alumnos, todos eran varones. Con lo anterior podemos darnos una idea de las características de los jóvenes que ingresaban en la Preparatoria en el lapso de 1868-1896.

RESUMIENDO:

Aunque la edad mínima permitida para ingresar a la ENP era a los 12 años, la edad de los niños que se inscribían en el Primer curso de Matemáticas (donde la Geometría plana formó parte de él la mayor parte del tiempo) figuraba entre los 14 años. Y los conocimientos que debían traer esos niños eran, efectivamente, los que se adquieren en la primaria.

Tiempo efectivo de clases

En cada año escolar, las clases iniciaban en los primeros días de enero (a excepción del primer año de actividades —1868— en el que las clases iniciaron el 3 de febrero), y concluían alrededor del 15 de octubre, para dar paso a la temporada de exámenes. Se impartían clases de lunes a sábado de cada semana, de manera que se tenían poco más de 200 días efectivos de clases al año.

En cuanto a las clases de Matemáticas, eran de clase diaria —de lunes a sábado— los cursos obligatorios para todos los alumnos, esto es, el Primero y el Segundo año; y tenía una duración de hora y media cada clase; con lo que cada uno de estos cursos contaba con poco más de 300 horas al año.

1.2 Biografía de los autores.

En este apartado se darán las biografías de nuestros tres autores. Se mencionarán sólo las cosas más esenciales para tratar de dar una idea general de su persona.

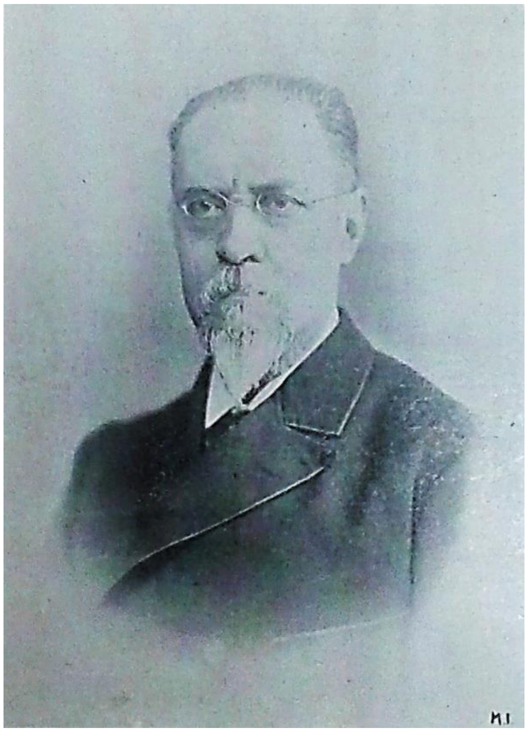
Manuel Ma. Contreras

Fue un destacado intelectual mexicano de la segunda mitad del siglo XIX. Nació en 1833 y murió en 1902.

Fue profesor de Física y Matemáticas en la ENP durante varios años; también fue docente en la Escuela de Ingenieros y en la Normal para profesores, aunque sólo de tiempo parcial. Antes de ingresar a la ENP había desempeñado diversos cargos y misiones en su calidad de Ingeniero de Minas; y durante su labor académica también ejerció varios cargos públicos, pues fue diputado del Congreso de la Unión y Senador de la República; también fue Regidor varias veces y presidente del Ayuntamiento de la Capital.

Uno de los destacados aportes del profesor Contreras a la ENP, fue la elaboración de los libros de texto para las cátedras de Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría.

(Núñez, [4], p. 94 y 111).



Retrato de Manuel Ma. Contreras

Retrato de Francisco Echeagaray y Allen

Francisco Echeagaray y Allen

Fue profesor de Geometría General y Cálculo Trascendente en la Escuela Nacional Preparatoria; y de Aritmética, Álgebra y Geometría en la Escuela Normal para Profesores.

Nació en Xalapa, Veracruz, en 1844 y murió en la Ciudad de México en 1929. Hizo sus primeros estudios en el Colegio Carolino de Puebla. Continuó sus estudios en la Escuela Nacional de Medicina y en la Escuela de Minería de donde obtuvo el título de Ingeniero civil. Por corto periodo de tiempo fue empleado en la Secretaría de Fomento.

Ingresó como profesor de matemáticas en la ENP (durante 40 años); de la escuela Normal y de la Nacional de Comercio. Fue director de la ENP de 1911 a 1912. Fue profesor también en los planteles privados siguientes: Instituto Kattain, Colegio Francés, Escuela de Mascarones, Monasterio Bas, Soriano Fournier, Villagrán, etc.

Escribió varias obras de Matemáticas que en una época estuvieron de texto en las escuelas de gobierno.

(Peredo, [5]; *Anales del Museo Nacional de Arqueología, Historia y Etnografía*. Época 4ª, tomo VI, N°2, Tomo 23 de la colección)

J. Joaquín Terrazas

Grabado de J. Joaquín Terrazas

Muy, pero muy poco sabemos sobre la vida de este católico individuo. Se sabe que fue escritor, profesor de matemáticas y periodista. Nació en la ciudad de México el 21 de agosto de 1851. Tuvo, entre hombres y mujeres, siete hermanos. Se desconoce sobre su trayectoria académica, especialmente sobre en qué institución estudió la carrera de ingeniería. Contrajo matrimonio en 1873 con María de la Luz Nájera Huerta, con quien tuvo seis hijos.

Su vida pública empieza por su trabajo y contribución a la enseñanza de las matemáticas. Fue un ingeniero que se convirtió en maestro de aritmética y álgebra en varias escuelas particulares, resaltando la Escuela Preparatoria de la Sociedad Católica de México. Su trabajo como matemático fue ampliamente reconocido por dos de sus obras en este campo: *Tratado Elemental de Aritmética* (escrito a los "17 años") y *Tratado Elemental de Álgebra*; a tal grado de proponerse [por terceros: la prensa (*La Época*) y notables ingenieros y matemáticos (José María Rego y Manuel Gargollo y Parra)] dichos libros como textos oficiales en las diferentes escuelas. A este respecto, se abrió un proceso de dictaminación en varias escuelas públicas; una de ellas la ENP, pero su comisión no la aceptó.

(Velasco, [6])

Algo curioso sobre Terrazas es que fue tío político del poeta, escritor y cirujano Manuel Gutiérrez Nájera. En el libro *Un enigma de los ceros: Vicente Riva Palacio o Juan de Dios Peza* de Clementina Díaz y de Ovando, se escribe sobre Nájera:

En la Escuela Católica a la que asistió dio muestras de su talento, ganó tres premios en cada una de las diez materias que cursó, y tuvo la mala suerte de ser "discípulo del santo Terrazas". Maestros de Gutiérrez Nájera fueron don Próspero María Alarcón que le enseñó latín, y José Joaquín Terrazas que contra toda su voluntad de su pariente y discípulo trató de interesarlo en las matemáticas.

"José Joaquín Terrazas, tío político de Manuel Gutiérrez Nájera, fue un furibundo reaccionario cuya agresividad se volcó entre otros periódicos, en La Voz de México y en La Voz de España. Según sus contemporáneos, Terrazas se juzgaba como el más "eminente" matemático del país. Sin embargo, toda su ciencia falló con su sobrino, jamás entendió las matemáticas. Terrazas también se consideraba "eximio poeta" [...]. Como crítico literario de la "Sociedad católica", Terrazas criticó duramente a Acuña, Justo Sierra y, sobre todo, a Altamirano por su poesía El Atoyac. El punto de vista de Terrazas es el del buen conservador que se reduce a salvaguardar la religión y la pureza del idioma".

(Ovando, [7])

Una curiosidad más es el "cero" fuera de escena (no publicado en la revista *La República*), escrito por Vicente Riva Palacio, en el cuál, haciendo clara referencia a Manuel Gutiérrez Nájera, escribe:

Discípulo del Santo de Terrazas, le bebió los alientos en todo lo relativo a creerse el más notable literato mexicano, y así como Terrazas dio en la manía de ser eminente matemático, llegando a inventar hasta un número nuevo, nuestro niñuelo cayó en la de declararse por sí y ante sí, crítico, periodista y poeta.

(Riva, [8])

Acerca de la imagen que se consiguió de Terrazas hay que decir que se encontró en la página Web de la Fundación Joaquín Díaz, que alberga diversas colecciones de archivos orales, escritos y gráficos. La imagen forma parte de la colección *La ilustración Española y Americana*, que fue una revista quincenal fundada en 1869 y fue, sin género de dudas, la publicación más importante de la segunda mitad del siglo XIX español.

La información de la imagen es la siguiente:

Título: *D. José Joaquín Terrazas, matemático y poeta mejicano.*

Tema: Grabado.

Autor: Félix Badillo (dibujante, litógrafo y pintor español).

Fecha: 22/07/1878.

1.3 Breve descripción de los libros.

Elementos de Geometría Plana y en el Espacio **de Francisco Echeagaray y Allen.**

Publicado en el año de 1899, este libro cuenta con 151 páginas. El primer apartado que aparece es una *Advertencia del Autor* (consta de 3 páginas) en donde se señalan algunas consideraciones que deben tenerse en cuenta acerca del libro, por ejemplo que *"En el cuerpo de la obra, se encontrarán cambiados los enunciados de varios teoremas, que comúnmente se expresan en otras obras, en el lenguaje antiguo de las proporciones"*.

A este apartado le sigue otro llamado *Geometría Experimental*, del cual hablaremos con mayor detalle más adelante, por ahora sólo diremos brevemente que en él bellamente expone Echeagaray formas para ir adentrando al alumno en el estudio de la Geometría.

Aparece después una *Introducción*; entre otras cosas, indica en ella cuál es el objetivo de la Geometría, y los métodos de demostración que se utilizan para establecer sus verdades.

Y luego de todo lo anterior se encuentra ya el "tuétano" de la obra. Consta de tres partes. La primera es *Geometría de las líneas,* en donde se expone todo lo relativo a Geometría Euclidiana (sin contar las nociones de área). La segunda parte es *Superficies,* en ella se aborda prácticamente todo lo concerniente a áreas. Y en la tercera parte, *Geometría de los volúmenes*, se tratan figuras en las tres dimensiones así como sus respectivos volúmenes y áreas superficiales.

A continuación se muestra el índice del libro, se observan ahí todos los temas y teoremas que abarcan cada una de las tres partes del libro:

ÍNDICE.

DIVERSOS CASOS DE IGUALDAD DE TRIANGULOS

CUADRILATEROS

POLIGONOS CONVEXOS

CIRCUNFERENCIAS

Lineas proporcionales en el circulo

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES

VALUACIÓN DE LAS ÁREAS Ó CUADRATURA.

COMPARACIÓN DE ÁREAS

TERCERA PARTE.

GEOMETRÍA DE LOS VOLÚMENES

LÍNEAS Y PLANOS PARALELOS

LÍNEAS Y PLANOS PERPENDICULARES

ÁNGULOS DIEDROS.

TRIEDROS.

IGUALDAD DE TRIEDROS.

IGUALDAD DE ÁNGULOS POLIEDROS

Págs.

TEORÍA DE LA SEMEJANZA

POLIEDROS REGULARES

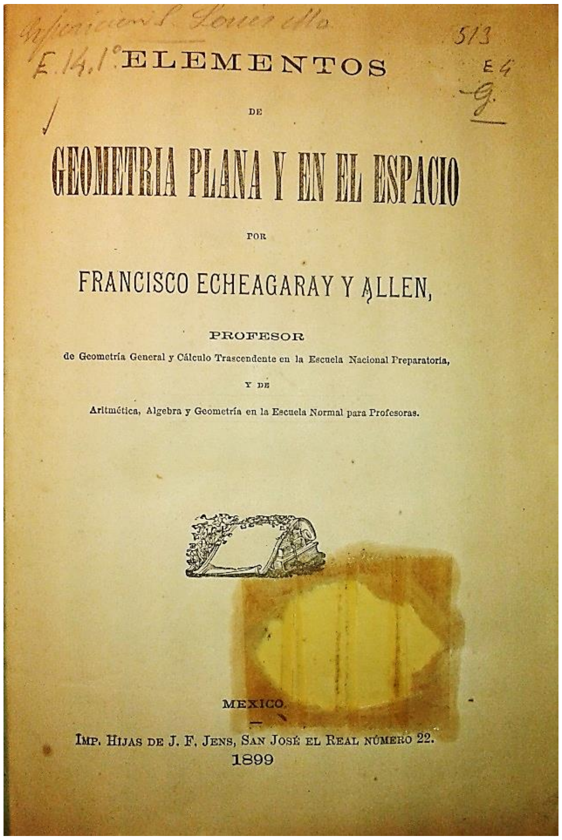
PRISMAS

SUPERFICIE DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

Págs.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.—CONSIDERACIONES GENERALES

COMPARACION DE AREAS



ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA PLANA Y EN EL ESPACIO

POR

FRANCISCO ECHEAGARAY Y ALLEN,

PROFESOR

de Geometría General y Cálculo Trascendente en la Escuela Nacional Preparatoria,

Y DE

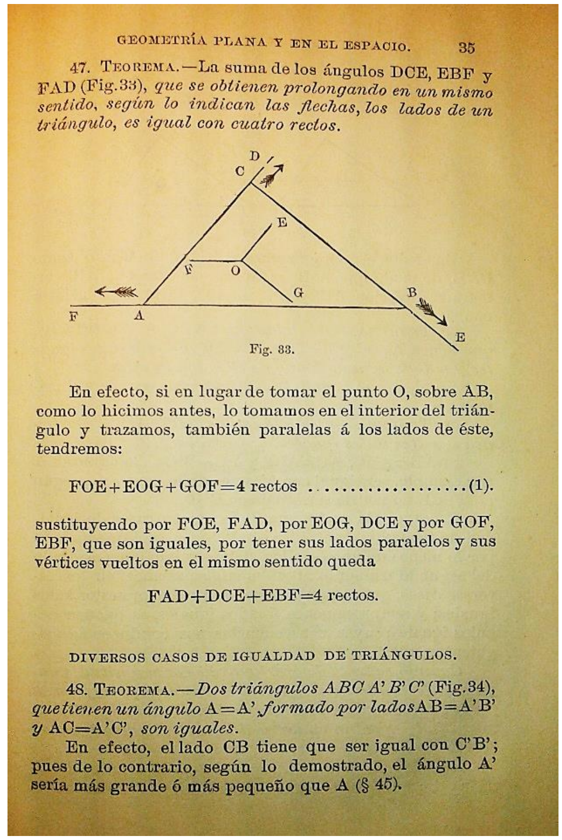
Aritmética, Algebra y Geometría en la Escuela Normal para Profesoras.

MEXICO.

IMP. HIJAS DE J. F. JENS, SAN JOSÉ EL REAL NÚMERO 22.

1899

Portada del libro de Echeagaray



GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO. 35

47. TEOREMA.—La suma de los ángulos DCE, EBF y FAD (Fig.33), *que se obtienen prolongando en un mismo sentido, según lo indican las flechas, los lados de un triángulo, es igual con cuatro rectos.*

Fig. 33.

En efecto, si en lugar de tomar el punto O, sobre AB, como lo hicimos antes, lo tomamos en el interior del triángulo y trazamos, también paralelas á los lados de éste, tendremos:

FOE+EOG+GOF=4 rectos ....(1).

sustituyendo por FOE, FAD, por EOG, DCE y por GOF, EBF, que son iguales, por tener sus lados paralelos y sus vértices vueltos en el mismo sentido queda

FAD+DCE+EBF=4 rectos.

DIVERSOS CASOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS.

48. TEOREMA.—*Dos triángulos ABC A' B' C'* (Fig.34), *que tienen un ángulo* A=A' *formado por lados*AB=A'B' *y* AC=A'C', *son iguales.*

En efecto, el lado CB tiene que ser igual con C'B'; pues de lo contrario, según lo demostrado, el ángulo A' sería más grande ó más pequeño que A (§ 45).

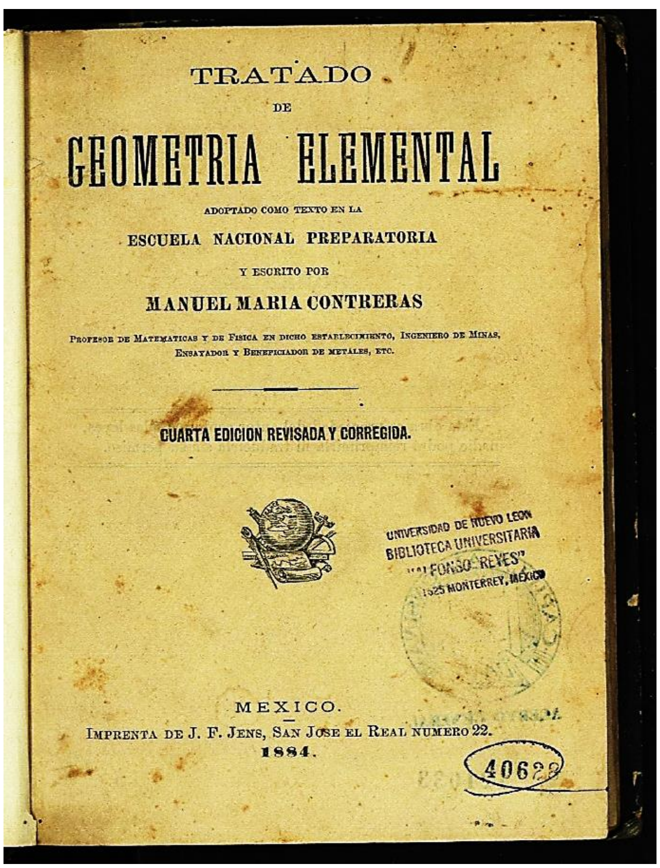
Página 35 del libro de Echeagaray

***Tratado de Geometría Elemental* de Manuel Ma. Contreras**

El libro con el que contamos es la Cuarta edición del año 1884. Se encontró en la Biblioteca Digital de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Consta de 227 páginas. Comienza con unas *OPINIONES publicadas sobre las Matemáticas del Ingeniero Manuel María Contreras*, que muestra los favorables comentarios hechos por profesores de diferentes planteles acerca de los libros de Contreras, y que aparecieron publicados en los periódicos *Diario Oficial* y *La libertad*. Entre otras cosas mencionan los buenos resultados en la instrucción y el aprovechamiento de los alumnos al adoptar como textos para la enseñanza de matemáticas sus tratados de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.

A este apartado le sigue una *Introducción*, donde se expone el modo en que se abordará el estudio de la Geometría y la forma en que se demostrarán ciertos teoremas.

Al igual que el libro de Echeagaray, este también se divide en tres partes y abarcan prácticamente los mismos temas y teoremas. A groso modo, la primera parte, *Longitudes,* corresponde a todo lo de Geometría Euclidiana; la segunda, *Superficies,* trata sobre áreas; y la tercera, *Volúmenes,* es todo lo visto en la primera y segunda parte pero llevado a tres dimensiones, se trata también el área superficial y los volúmenes de los cuerpos.



TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

ADOPTADO COMO TEXTO EN LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Y ESCRITO POR

MANUEL MARIA CONTRERAS

PROFESOR DE MATEMATICAS Y DE FISICA EN DICHO ESTABLECIMIENTO, INGENIERO DE MINAS, ENSAYADOR Y BENEFICIADOR DE METALES, ETC.

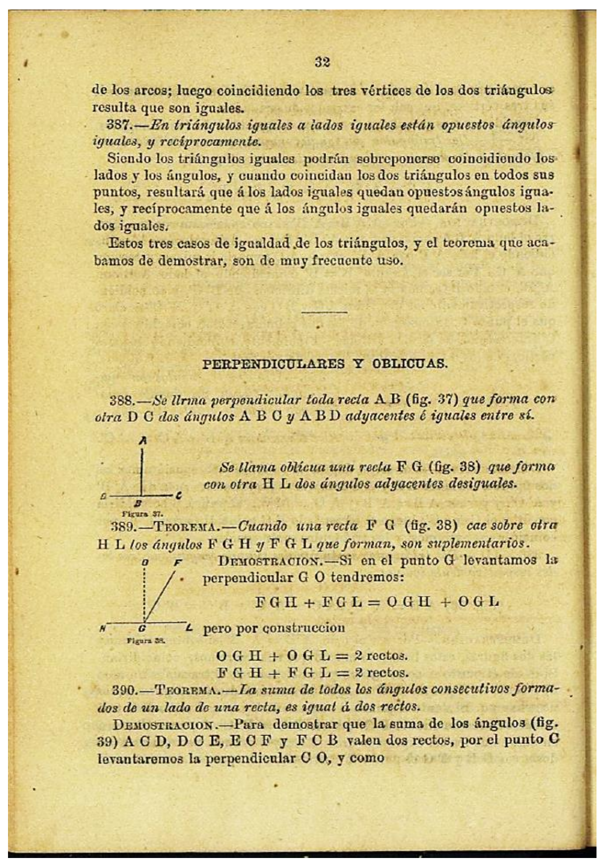
CUARTA EDICION REVISADA Y CORREGIDA.

MEXICO.

IMPRENTA DE J. F. JENS, SAN JOSE EL REAL NUMERO 22.

1884.

Portada del libro de Contreras



32

de los arcos; luego coincidiendo los tres vértices de los dos triángulos resulta que son iguales.

387.—*En triángulos iguales a lados iguales están opuestos ángulos iguales, y recíprocamente.*

Siendo los triángulos iguales podrán sobreponerse coincidiendo los lados y los ángulos, y cuando coincidan los dos triángulos en todos sus puntos, resultará que á los lados iguales quedan opuestos ángulos iguales, y recíprocamente que á los ángulos iguales quedarán opuestos lados iguales.

Estos tres casos de igualdad de los triángulos, y el teorema que acabamos de demostrar, son de muy frecuente uso.

PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

388.—*Se llama perpendicular toda recta* A B (fig. 37) *que forma con otra* D C *dos ángulos* A B C *y* A B D *adyacentes é iguales entre sí.*

Figura 37.

Se llama oblícua una recta F G (fig. 38) *que forma con otra* H L *dos ángulos adyacentes desiguales.*

389.—TEOREMA.—*Cuando una recta* F G (fig. 38) *cae sobre otra* H L *los ángulos* F G H *y* F G L *que forman, son suplementarios.*

DEMOSTRACION.—Si en el punto G levantamos la perpendicular G O tendremos:

$$FGH + FGL = OGH + OGL$$

pero por construccion

$$OGH + OGL = 2 \text{ rectos.}$$
$$FGH + FGL = 2 \text{ rectos.}$$

Figura 38.

390.—TEOREMA.—*La suma de todos los ángulos consecutivos formados de un lado de una recta, es igual á dos rectos.*

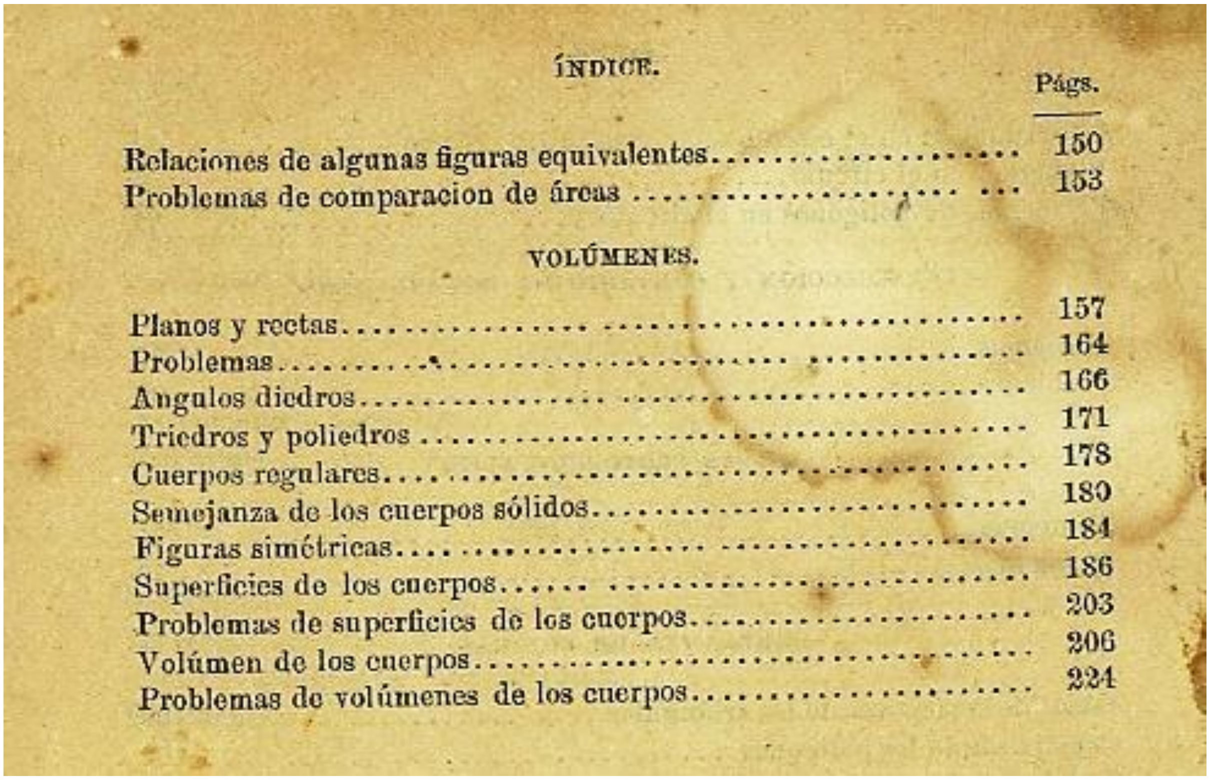
DEMOSTRACION.—Para demostrar que la suma de los ángulos (fig. 39) A C D, D C E, E C F y F C B valen dos rectos, por el punto C levantaremos la perpendicular C O, y como

Página 32 del libro de Contreras

A continuación se muestra el índice del libro, donde se observan todos los temas que comprende:

ÍNDICE.

GEOMETRIA.



ÍNDICE.

***Tratado elemental de Geometría* de J. Joaquín Terrazas**

Este libro fue publicado en 1878; como ya se mencionó anteriormente, nos lo proporcionaba el Fondo Reservado de la Biblioteca Nacional, por lo que no se cuentan con imágenes del libro, pues todo lo que obtuvimos de él fue transcrito a mano. Hay que decir que no se transcribió todo su contenido sino sólo algunos temas, así que no se tiene cuenta exacta de las páginas que lo componen.

A diferencia del libro de Echeagaray y el de Contreras, las figuras que acompañaban a las definiciones o teoremas no se encontraban en el texto mismo, sino que al final del libro habían tres laminas que las contenían.

El índice del libro es el siguiente:

ÍNDICE

- *Del triángulo en especial*
- *De los triángulos*
- *De los cuadriláteros*
- *De las líneas en el círculo*
- *Ángulos en la circunferencia*
- *De los polígonos solos y en relación con la circunferencia*
- *Líneas proporcionales*
- *Semejanza de figuras*
- *De las áreas en las figuras rectilíneas*
- *Área del círculo y de algunas figuras consideradas en él*
- *Problemas*
- *Advertencias preliminares*
- *Líneas y planos perpendiculares*
- *Líneas y planos oblicuos*
- *De los poliedros convexos*
- *De la esfera*
- *Áreas y volúmenes de los poliedros*
- *Superficie y volumen de la esfera*

Una de las primeras observaciones que podemos hacer acerca de los libros es que la forma en la que se exponen los teoremas de cada sección es la usual en matemáticas: se dan primeramente las definiciones, luego se enuncian los teoremas correspondientes con su respectiva demostración, apoyándose para ello de alguna figura; tal como podemos apreciar en las imágenes, para el caso de Contreras y Echeagaray.

En el capítulo tres, donde se realizará el análisis matemático de los libros, se expondrán explícitamente teoremas y sus respectivas demostraciones por parte de los autores, lo cual nos brindará una idea más precisa del contenido de estos libros.

Otra observación más, es la que a continuación se presenta.

1.3.1 Ejercicios en los libros

Algo importante que comentar sobre estos libros es que casi no contiene ejercicios para que el alumno realice, como sucede con el Echeagaray, o definitivamente no contienen ninguno solo como es el caso del libro de Contreras y el de Terrazas. Si echamos nuevamente un vistazo a los índices de los libros de Echeagaray y Contreras, notamos que al final de casi cada sección aparecen *Problemas;* bien podríamos pensar que dichos "problemas" son los ejercicios dejados al alumno para que practique la lección. Pero no es así. Estos *Problemas* son en su mayoría problemas de construcción y vienen ya resueltos por los autores.

Veamos por ejemplo los primeros Problemas del apartado de *Circunferencia* (los cuales abarcan las p. 52 y 53) del libro de Echegaray:

ángulos M, E, F y N son ...

73. PROBLEMAS.—*Determinar la relación que existe entre dos arcos de círculo, trazados con el mismo radio.*

Se procederá de un modo análogo á lo que hicimos, tratándose de dos rectas; tomando por los arcos sus cuerdas, puesto que si las cuerdas son iguales, *subtenden arcos iguales y recíprocamente.*

Dividir un arco en dos partes iguales. Desde el centro del círculo trácese una perpendicular á la subtensa del arco, prolongada hasta que encuentre el arco (§ 66).

Encontrar el centro de un círculo. Al medio de una cuerda trácese una perpendicular, en seguida hágase lo mismo con otra cuerda, y el punto de intersección de ambas perpendiculares es el centro.

El método de los lugares geométricos es el que hemos aplicado al resolver el problema anterior. (§ 3)

A continuación se muestran los primeros dos, de los cinco Problemas del apartado *Perpendiculares y oblicuas* (que abarcan las p. 39 y 40) del libro de Contreras:

407.—PROBLEMAS DE OBLÍCUAS Y PERPENDICULARES.—I.—*Levantar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 55) *desde un punto* C *de la misma recta.*

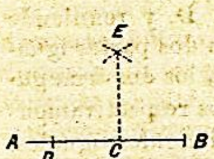


Figura 55.

Resolucion.—Tómense dos puntos B y D equidistantes de C, y haciendo centro primero en B y luego en D con un radio arbitrario pero mayor que C B, trácense dos arcos de círculo, y reuniendo el punto E de interseccion de estos dos arcos con el punto C, la recta C E será la perpendicular; por tener conforme á la construccion dos puntos C y E equidistantes de otros dos D y B de la línea dada (404).

El rádio arbitrario B E debe ser mayor $\frac{BD}{2}$ para que los arcos del círculo puedan cortarse.

II.—*Bajar una perpendicular á una recta,* A B (fig. 56) *desde un punto* C *tomado fuera de ella.*

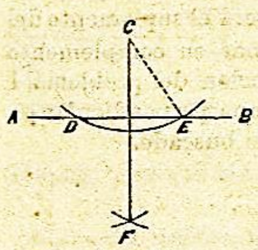


Figura 56.

Haciendo centro en el punto C y con un rádio C D trácese el arco D E que corte la recta dada en dos puntos; hágase centro en cada uno de estos puntos D y E y con un mismo radio descríbanse dos arcos que se cortarán en el punto F; reuniendo los puntos C y F con una recta C F, esta será la pedida por tener dos puntos C y F, equidistantes de los D y E de la recta dada. (404).

Los ejercicios que propone Echeagaray para el alumno o lector, vienen enunciados como *Ejercicios* y no se encuentran en todas las secciones, como bien podemos notar en el índice. A continuación se muestran todos los ejercicios correspondientes a la Primera parte del libro y la sección a la que pertenecen:

PRIMERA PARTE: Geometría de las líneas

- Medida de los ángulos por los arcos

  I. *Reducir 25°–15’– 12’’ á la división centesimal.*
  II. *Convertir 37°,3509 á la división sexagesimal.*

  (Ejercicios p. 20)

- Líneas paralelas

  I. *Demuéstrese que los ángulos correspondientes son iguales.*
  II. *Demostrar que los ángulos alternos externos son iguales.*

  (Ejercicios p. 23)

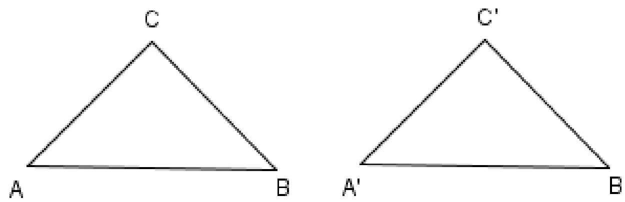
- Diversos casos de igualdad de triángulos

  I. *Demostrar que el ángulo exterior de un triángulo; formado por uno de sus lados y la prolongación de otro, es igual á la suma de los interiores no adyacentes*
  II. *Demostrar que si en un triángulo se toma un punto interior y se une con dos vértices, al ángulo así formado, es mayor que el del triángulo que le queda opuesto.*
  III. *Probar que si desde un punto tomado sobre uno de los lados de un ángulo, se baja una perpendicular, ésta caerá dentro del ángulo, si éste es agudo y fuera si es obtuso.*

  Antes de continuar con el listado, Echeagaray menciona que se tenga presente en los ejercicios anteriores el teorema: *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.* Y agrega:

  “Por la sencillez de las demostraciones, y por la ventaja que resulta al alumno, de ejercitar su inteligencia en cuestiones geométricas, proponemos aún los siguientes ejercicios:”

  IV. *Demostrar que dos triángulos isósceles son iguales, cuando tienen AB=A’B’ y C=C’.*



V. *Cuando tienen A=A' y AC=A'C'*

VI. *Probar que dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales la hipotenusa, lado apuesto al ángulo recto, y un cateto, lado del ángulo recto.*

VII. *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales un cateto, y un ángulo agudo.*

(Ejercicios p. 37)

- Líneas proporcionales

I. *Demostrar que la recta que une los medios de los lados de un trapecio es igual á la semisuma de las bases.*

II. *Demostrar que la recta que une los medios de los lados de las diagonales de un trapecio, es igual á la semidiferencia de las bases.*

(Ejercicios p.65)

- Semejanza de triángulos

I. *¿Qué clase de triángulo es el que tiene 3m, 4m y 5m, por lados?*

II. *¿Qué triángulo es el que tiene por lados 5, 7 y 9?*

(Ejercicios p. 76)

- Líneas proporcionales en el circulo

I. *Determinar la fórmula* $P = \frac{2pR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$ *que dá el perímetro de un polígono regular circunscrito, cuando se conoce el inscrito.*

II. *Determinar por la fórmula anterior el perímetro del cuadro circunscrito, conociendo el del inscrito y recíprocamente.*

(Ejercicios p. 85)

Se encontraron además los siguientes ejercicios, los cuales no aparecen en el índice ni bajo el título de *Ejercicios*:

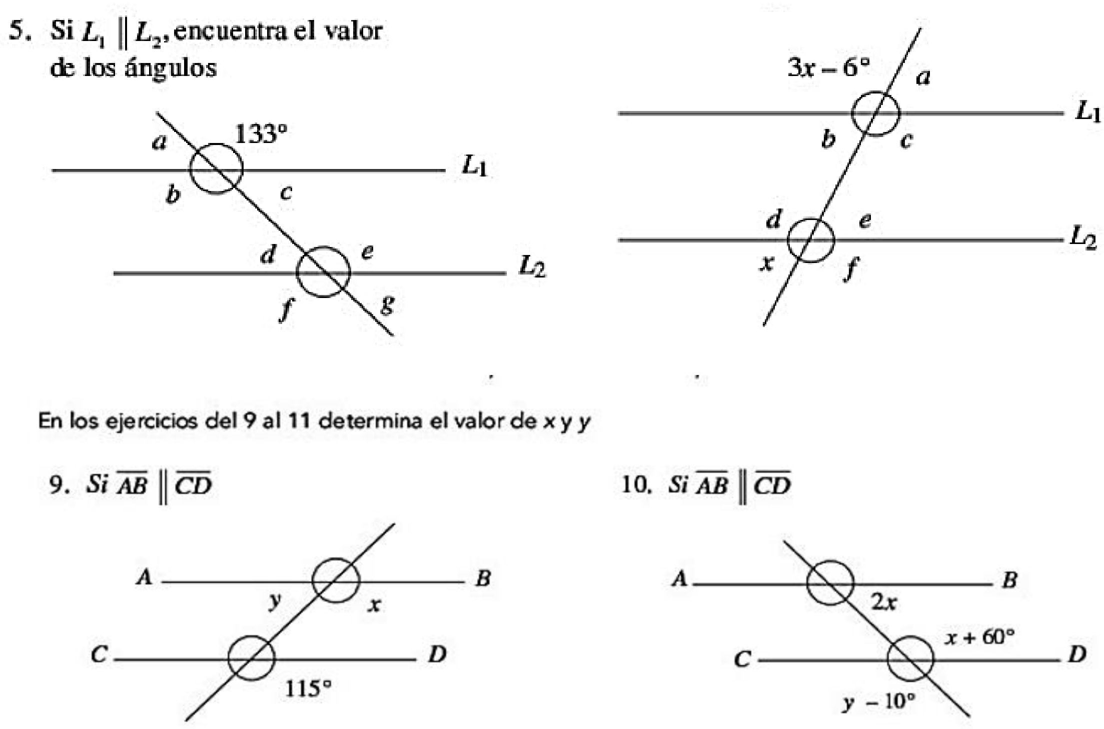
- Diversos casos de igualdad de triángulos

  I. *Constrúyase un triángulo, conociendo los tres lados.*
  II. *Constrúyase un triángulo isósceles, conociendo el ángulo formado por dos lados iguales y el lado opuesto ó desigual.*
  III. *Dada la hipotenusa y un ángulo agudo, formar el triángulo.*
  IV. *Dado un cateto y la hipotenusa, construir el triángulo*

- Cuadriláteros

  I. *Demostrar los diversos casos de igualdad de paralelogramos, rombos y rectángulos.*
  II. *Conociendo la diagonal y un lado de un rectángulo, construir éste.*

Para hacer una pequeña comparación con los textos de uso actual, veamos algunos ejercicios que figuran en el libro de Baldor y en el *Geometría y Trigonometría* del CONAMAT (CONAMAT, [9]) para la sección de “Perpendicularidad y Paralelismo” donde se estudian las relaciones de los ángulos que forman dos paralelas cortadas por una secante, y que vendría siendo la sección equivalente a *Líneas paralelas* de Echeagray.



Ejercicios del CONAMAT

Ejercicios como el 5 también aparecen en el libro de Baldor

(7) Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$,

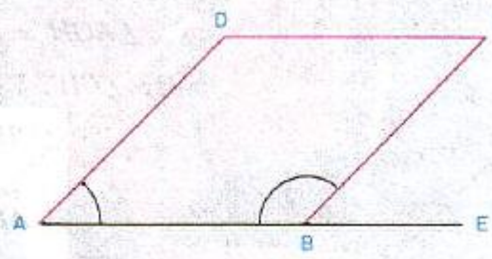
$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$,

$\angle BAD = 2x$

y $\angle ABC = 6x$;

hallar: $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle CDA$; $\angle DAB$.

R.: $\angle ABC = \angle CDA = 135°$; $\angle BCD = \angle DAB = 45°$.



Ejer. 7

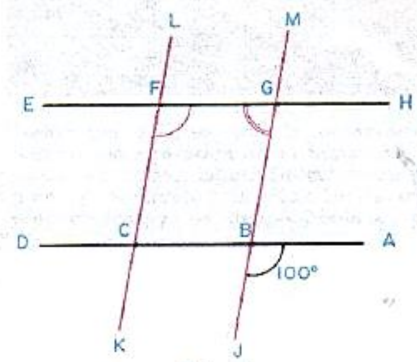
(9) Si $\overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{DA}$;

$\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{MJ}$

y $\angle ABJ = 100°$;

hallar: $\angle FGB$ y $\angle CFG$.

R.: $\angle FGB = 80°$; $\angle CFG = 100°$.

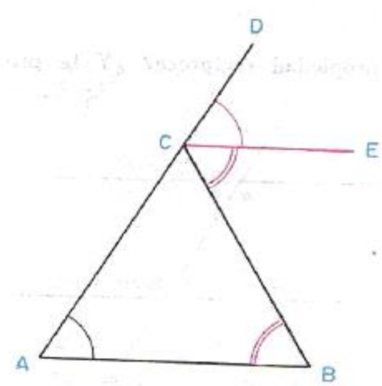


Ejer. 9

(6) La recta $\overleftrightarrow{CE}$ es bisectriz del $\angle BCD$ y $\angle A = \angle B$.

Demostrar que:

$\overleftrightarrow{EC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



Ejer. 6

Ejercicios del Baldor

Notamos que en el libro de Baldor también figuran algunas demostraciones, tal como el ejercicio 6. Y que los ejercicios numéricos vienen con respuesta.

Veamos ahora algunos de los ejercicios de estos libros destinados para el tema de Ángulos, donde se estudia su medida, y se dan las definiciones de ángulo complementario, adyacente, etc. (estas nociones se abarcan en las secciones de *Ángulos* y *Medida de los ángulos por los arcos* del libro de Echeagaray).

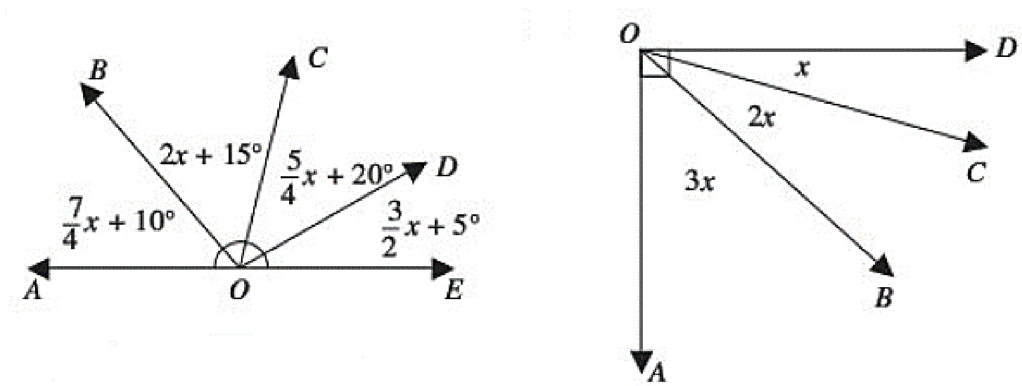
Convierte los siguientes ángulos a grados:

1. 40° 10′15″ 3. 1° 2′ 3″

Convierte los siguientes ángulos a su equivalente en grados, minutos y segundos:

7. 40.32° 9. 18.255° 11. 19.99°

19. Determina el valor de los ángulos que se muestran en las siguientes figuras:



Ejercicios del CONAMAT

(6) Hallar los suplementos de los siguientes ángulos:

a) 78°. *R.*: 102°.
b) 92°15′. 87°45′.
c) 123°9′16″. 56°50′44″.

Ejercicio del Baldor

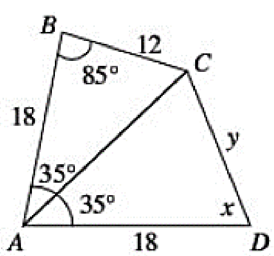
Observamos que los ejercicios que aparecen en el libro del CONAMAT y del Baldor son ejercicios muy repetitivos y numéricos, sin o con escasas demostraciones. Por ejemplo, en el libro del CONAMAT aparecen alrededor de 15 ejercicios iguales al ejercicio 5 para el tema de “Perpendicularidad y paralelismo”, y casi 10 iguales al ejercicio 19 para el tema de “Ángulos”.

Hay que comentar también que este tipo de ejercicios son como los que se encuentran en la compilación de ejercicios para el curso de Geometría y Trigonometría de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, diseñado en base a su programa oficial por la M. en C. Rita Ochoa Cruz.

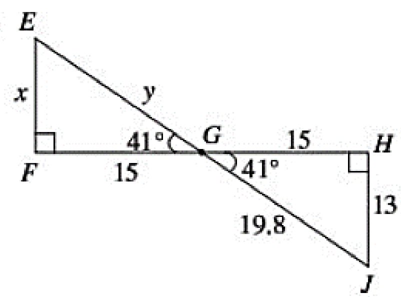
A pesar de lo anterior, no podemos ser tan injustos con los libros de actualidad en cuanto a los ejercicios propuestos para el alumno, deplorándolos por no mostrar un grado mayor de complejidad y abstracción. Pues los ejercicios del tipo “repetitivo y numérico” figuran generalmente en temas que podríamos considerar “sencillos”, por ejemplo el de Ángulos; en donde la prioridad debería ser que el alumno se aprenda las definiciones. Además, para el tema de Igualdad (o congruencia) de triángulos ya figuran más demostraciones en los ejercicios. A continuación se muestran algunos de ellos. [Este tema correspondería a la sección de Echeagaray, *Diversos casos de igualdad de triángulos*. Obviamente, en esta sección se exponen los tres criterios para tener triángulos iguales].

En cada uno de los siguientes casos indica por qué son congruentes los triángulos y determina los valores de x y y.

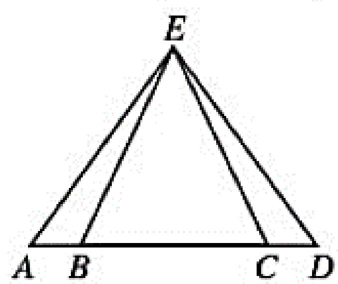
1.



2.

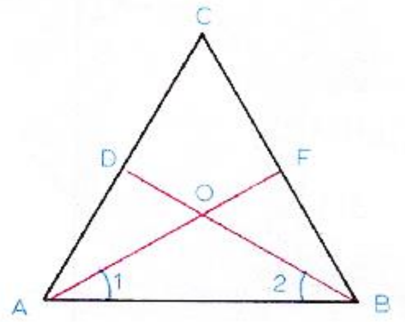


2. En la figura ΔAED, con $\overline{AE} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demuestra que $\angle CBE \cong \angle BCE$



Ejercicios del CONAMAT

(9) $\triangle ABC$ es isósceles; D y F son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Demostrar que $\overline{AF} = \overline{BD}$ y $\angle 1 = \angle 2$.



Ejer. 9

Ejercicio del Baldor

RESUMIENDO:

Los libros de Contreras y Terrazas no contienen ejercicios para el alumno, y en el de Echeagaray aparecen muy pocos, no los hay para todos los temas, y éstos son en su mayoría demostraciones. En cambio, en los libros de actualidad, como el de CONAMAT y el de Baldor, aparecen ejercicios al término de cada tema y en mayor cantidad, aunque éstos son principalmente ejercicios repetitivos y numéricos; y casi no contienen demostraciones más que en uno u otro tema.

Hablando concretamente de los ejercicios del libro de Echeagaray, por la forma en que son expuestos y por ser tan escasos, pareciera que no fueron ejercicios para trabajar en casa, o de tarea, si no que fueron ejercicios para realizar en clase, con supervisión o ayuda del maestro. Así que por lo anterior y tomando en cuenta que en el libro de Contreras no hay ejercicios para el alumno, podríamos suponer dos cosas en cuanto a tarea en la ENP: el maestro tenía que elaborar su propia compilación de ejercicios hechos por él mismo o sacados de otros libros; o no se dejaba tarea, en vista de que los exámenes en aquellos tiempos eran sumamente teóricos, como se mostrará más adelante.

Capítulo 2. Análisis de los textos desde un punto de vista matemático

2.1 Temas específicos

En este apartado se analizarán ciertos temas que aparecen en los tres textos bajo estudio, los cuales se escogieron porque a mi parecer juegan un papel importante dentro de la geometría euclidiana y su análisis nos ayudará a ilustrar el contenido de los libros, acercándonos con ello a la enseñanza de esta cátedra en la ENP.

Conviene recordar que en algunas ocasiones se mencionarán o se harán comparaciones con los libros: *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, del Dr. J. A. Baldor, Año 2004; y *Fundamentals of college geometry*, de Edwin M. Hemmerling, 2da Edición, Año 1970, para ejemplificar mejor algún concepto o teorema. Así, cuando se diga simplemente Hemmerling o Baldor, son a sus libros (los anteriormente nombrados) a los que me referiré.

2.1.1 De la necesidad de términos indefinidos.

Todos los autores bajo estudio concuerdan en que la geometría es *"una ciencia eminentemente deductiva"* (Contreras) y que toma por base de sus deducciones las definiciones y los axiomas. Entonces, cuando se nos habla de "términos indefinidos" nos resulta esto algo chocante, pues si las definiciones sirven de base a la geometría, ¿cómo va a ser posible que existan términos (esenciales en geometría) sin definir?

Como menciona Hemmerling, una buena definición en geometría tiene la propiedad de que las palabras en la definición son más simples que la palabra definida y que ésta debe quedar claramente comprendida. Por ello, cuando se hace uso de un término indefinido, se asume que la palabra es tan elemental que su significado es conocido del todo y que no hay palabras más sencillas para describir el término. Hemmerling señala también el intento de Euclides por definir, por ejemplo, punto como "aquello que tiene posición pero no dimensión", pero su intento lo considera fallido pues dice que las palabras "posición" y "dimensión" son también conceptos básicos y pueden solamente ser descritos usando definiciones en círculo. Así que por su parte, Hemmerling acepta cabalmente 3 términos geométricos indefinidos: punto, línea recta y plano.

A excepción de Terrazas, nuestros autores hacen igual mención de dichos "términos indefinidos":

"En geometría, así como en las demás ciencias, hay ciertos principios fundamentales que no pueden ser adquiridos sino por la observación ó la experiencia. Así es como sabemos lo que es la longitud, la dirección, la línea recta, etc., y no por una explicación verbal; siendo difícil

definir éstas y otras voces semejantes por la simplicidad misma de los hechos observados, que no pueden descomponerse en otros más sencillos." (Contreras)

"La ciencia geométrica es una ciencia natural, las primeras nociones nos vienen del exterior, por medio de los sentidos. El punto, la línea, la línea recta, el ángulo, la superficie, etc., son nociones que á pesar de ser indefinibles, por carecer de antecedentes más simples á que referirnos, son claras y precisas y sólo una susceptibilidad escolástica puede embrollarlas." (Echeagaray).

Para estos autores dichos términos nacen por el mismo carácter de la geometría que, como bien dice Echeagaray, es una ciencia natural y por ello habrá nociones básicas que sólo pueden ser adquiridas y comprendidas por medio de la experiencia, tales como el punto, la línea, etc.

Con todo, más adelante expondremos cómo pretendieron definir estos conceptos Echeagaray, Contreras y Terrazas; probablemente esto lo hicieron con el objeto de dar una especie de sinónimos y descripciones al estudiante que lo ayuden a entenderlos.

Y así como se considera necesario no definir algunos términos, también consideran algunos autores no demostrar ciertas proposiciones que, a su parecer, son evidentes. Uno de ellos es Echeagaray, el cual expone sus razones de una manera muy bella: *"**13**. […] conviene recordar: que el principio fundamental de la enseñanza moderna es la intuición inmediata ó conocimiento de las cosas por los sentidos, como lo propone Pestalozzi.*

Conforme al principio anterior, que se le puede dar asiento en la geometría, no insistiremos en demostrar lo que es de evidencia notoria, lo que nos conduciría á nimiedades; tal sería, por ejemplo, demostrar que los ángulos opuestos al vértice son iguales, lo mismo que los rectos, etc., aun cuando estas proposiciones pudieran obtenerse como consecuencias ó corolarios de otras. Tal proceder no menoscaba, en nuestro concepto, el rigor de la ciencia; la ciencia no debe embrollar al espíritu; nos valemos del teorema para los casos en que el espíritu no vea clara la relación entre las premisas y las consecuencias. Pasma ver el empeño con que ciertos matemáticos demuestran proposiciones evidentes, clarísimas."

El otro autor es Terrazas, quien justifica su proceder de una forma menos elegante*: "Algunos autores han creído necesario demostrar que la línea recta es la más corta que entre dos puntos puede tirarse; pero nosotros no lo juzgamos así, como quiera que no hay un solo hombre, aun el más rudo, que dude tal principio. Nos parece peligroso á la misma noción de la certeza en general, empeñarse en derramar claridad en lo que ya la tiene y meridiana, y esto nos parece tanto más extraño en algunos autores cuanto que sin ningún género de escrúpulo admiten postulados, ó sea proposiciones claras pero nunca incontrovertibles como los axiomas."*

2.1.2 Del objetivo de la Geometría, de la abstracción de los cuerpos físicos y de cómo surge la concepción de superficie, línea y punto.

En los libros más actuales se omite o se menciona de manera superficial cuál es el objeto de la geometría. A este respecto, Hemmerling indica simplemente que "La Geometría es un estudio de las propiedades y medidas de las figuras compuestas por puntos y líneas". Nuestros autores bajo estudio concuerdan con que la geometría *"considera la forma y posición de las figuras, así como la magnitud de éstas, y su objeto definitivo es: <u>la medida más o menos indirecta ó científica de la extensión</u>. Y con el objeto de estudiar no sólo las figuras que en la naturaleza observamos, sino todas las imaginables, considera la extensión no en los cuerpos mismos si no en la huella que dejan en el espacio. <u>La extensión es pues, el lugar ó huella que deja un cuerpo en el espacio indefinido</u>"*. (Echeagaray)

Gracias a eso que llaman "extensión" nace la idea de superficie y línea:

"Todo cuerpo tiene tres dimensiones: longitud, latitud y altura, que comúnmente se les llama largo, ancho y grueso. […] Cuando consideramos el espacio con tres dimensiones, se le llama volumen; si hacemos abstracción del espesor ó grueso, la extensión que consideramos lleva el nombre de superficie; y si prescindimos del grueso y de la anchura, resultará una extensión en longitud solamente, que se llama línea, y aunque aisladamente no hay superficies ni líneas materiales, estas concepciones son de grande utilidad para estudiar sucesivamente las propiedades de las diversas figuras y poder medir la extensión. […] Los límites que determinan la extensión de un cuerpo, son las superficies, las cuales vienen á quedar limitadas por líneas y los extremos de estas son puntos. Los diversos límites de los cuerpos nos sirven para reconocer la figura y determinar su extensión." (Contreras)

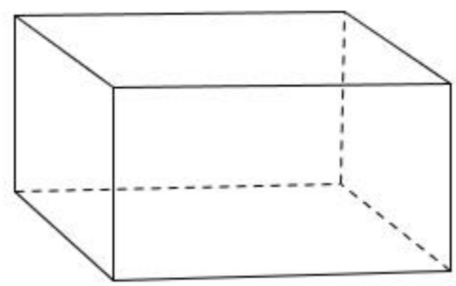
Siguiendo esta misma idea, Contreras nos dice también cómo podríamos concebir la noción de punto: *"Acabamos de ver que prescindiendo de una de las dimensiones de un volumen resulta una superficie, y que prescindiendo de otra de las dimensiones de la superficie, se obtiene una línea; del mismo modo, si en una línea hacemos abstracción de la longitud, se concebirá lo que se llama <u>punto</u>, destinado únicamente á determinar el lugar ó la posición."*

Al hablar sobre la "extensión", Contreras comparte la opinión de Echeagaray de considerarla *"no en los cuerpos mismos si no en la huella que dejan en el espacio"*:

"La extensión es una propiedad inherente á cualquier cuerpo, pero en geometría no la consideramos en los cuerpos mismos, sino en el espacio que éstos ocupan. […] Cuando comparamos, por ejemplo, el color de dos cosas, prescindimos de la sustancia de que están formadas y de sus demás propiedades para no complicar el estudio relativo á la cualidad de que tratamos; pues bien, en geometría, para hacer completa abstracción de las demás propiedades de los cuerpos y facilitar nuestras investigaciones sobre la extensión, suponemos ésta en el espacio ocupado por los cuerpos, como si desapareciendo éstos hubiesen dejado en él una impresión ó molde de su forma." (Contreras)

Dicho de otra manera: *"Todo cuerpo ocupa en el espacio un lugar, y con el objeto de no considerar en el estudio de la geometría sino la extensión, prescindiendo de las demás propiedades de los cuerpos, consideraremos el lugar y la forma del espacio que ocupan, haciendo abstracción de la materia que los constituye."* (Contreras)

Esta "huella" o "molde" que dejan los cuerpos en el espacio, es lo que Baldor nombra como cuerpos geométricos o sólidos, que no son más que esquemas ideales de ciertos cuerpos físicos (los cuerpos físicos son todas las cosas que nos rodean: libros, lápices, mesas; tienen forma, color, están hechos de una sustancia determinada y ocupan un lugar en el espacio) y de los cuales sólo se considera su forma y su tamaño.



Una imagen hubiera valido más que mil palabras, como lo muestra Baldor, considerando que la idea de esta abstracción es intuitivamente muy clara. Quizá por ello resulta curioso escuchar palabras como "huella", "impresión" o "molde" para nombrar a lo que ahora conocemos simplemente como prismas, conos, esferas, etc.; que, como se dijo anteriormente, son las representaciones de los cuerpos sin la materia que los componen.

Todas estas nociones (superficie, línea, punto, esquematización los cuerpos físicos) las expone Terrazas de una manera tan vetusta que más que curiosa, nos parece encantadora. He aquí lo que dice (y con lo que da empiezo a su libro):

"PRELIMINARES

1. Si echamos una mirada en torno nuestro, advertimos diversidad de objetos que nos rodean, separados entre sí por ciertas distancias, en cuyo intermedio vacío concebimos que otros cuerpos pudieran colocarse, así como imaginamos que si los primitivos variasen de lugar dejarían unos a manera de huecos. De modo que hacemos cabal separación entre lo que apellidamos tamaño de los cuerpos y el lugar donde residen, cuyo lugar, indeterminado y sin límites, es lo que se llama espacio.

2. Si una vez fijados en un cuerpo, v.gr. un dado de metal pulido, prescindimos, usando de la abstracción, de la sustancia suya, como si se vaciara de ella; pero quedando en el espacio el hueco, tendremos idea de lo que se entiende por un volumen, el cual no es otra cosa que aquella porción del espacio limitada por cuanto de más exterior tienen los cuerpos.

3. En la hipótesis anterior, nos resultaría un volumen de paredes cuadradas, en que podríamos imaginar, tomando un punto de comparación, distancias hácia arriba y hácia abajo; á la derecha y á la izquierda; para adelante y para atrás: todo lo cual, tanto vale para decir que el volumen de los cuerpos, en tres sentidos diversos puede considerarse, que se llaman dimensiones, distinguiéndose cada una de estas con nombres particulares. La que va de derecha á izquierda, y por consecuencia, de izquierda a derecha, se llama <u>longitud</u>, si es más larga que la de adelante á atrás, que toma entonces el nombre de <u>latitud</u>, cambiándolos las dos sólo con atención á su magnitud; en tanto que la dimensión de arriba á abajo es y se llama constantemente <u>profundidad</u>.

4. Hemos hablado del límite de los cuerpos, que en el ejemplo antes propuesto se compone de seis caras cuadradas. Este límite es lo que se entiende por <u>superficie</u>, la cual, por ser un verdadero límite, no <u>debe tener grueso ninguno</u>, siendo tan sólo una abstracción del entendimiento y por lo mismo incapaz de reducirse a nada material. Esta idea choca de pronto; pero reflexiónese que la noción de límite trae forzosamente la de que él es <u>un perfecto intermedio entre dos cosas</u>; y dejaría de ser intermedio perfecto desde el momento en que teniendo un grueso cualquiera se pudieran tomar en el límite mismo puntos centrales y que no tocasen al cuerpo.

5. De la misma manera que de la consideración del límite de los cuerpos se llega a lo que se entiende por superficie, imaginando el límite de ésta se obtiene la idea de lo que se llama línea, la cual, por estar en la superficie (4), no tiene alto, y por ser límite, carece de ancho.

6. La línea, á su vez, tiene dos límites que son sus ambos extremos; estos límites no tienen alto ni ancho, porque de los tales carece la línea, ni largo, pues si alguno tuvieran, por pequeño que fuese, habría puntos intermedios en el límite mismo, lo que es contra la noción que de él debemos tener.

7. <u>La diversa situación que guardan los puntos, las líneas, las superficies y los volúmenes, da origen á diferentes propiedades, estudiadas por la ciencia que se llama GEOMETRÍA, la cual por el conocimiento de estas mismas propiedades llega á determinar la medida de la extensión que limita los cuerpos</u>.”

2.1.3 De la línea recta.

Por lo anterior expuesto, sabemos ya lo que entienden nuestros autores por línea, aun así resulta conveniente mencionar la definición que da Contreras:

"Se llama línea toda extensión en longitud sin ninguna latitud ni profundidad. Puede concebirse una línea como engendrada por la intersección de dos superficies, ó como el trazo ó huella que dejaría un punto en su movimiento.

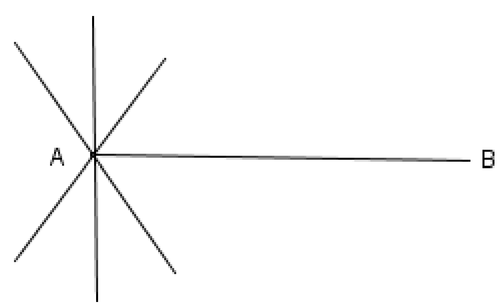
Las líneas pueden ser rectas, quebradas, curvas y mixtas."

A pesar de mencionar la existencia de términos indefinibles y de incluso considerar la línea recta como uno de estos términos, nuestros autores hicieron el esfuerzo de dar una definición más o menos precisa de ella:

Contreras:

"Línea recta es aquella cuyos puntos todos están en la misma dirección. De esto resulta que es el camino más corto entre dos puntos.

Por un punto A pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una dirección, queda fijada la posición de la recta.



Así pues, dos puntos fijan la posición de una recta, y si son éstos los extremos determinarán su magnitud."

Terrazas:

"La línea recta es una línea tal que puede imaginarse el ojo colocado en cierta situación de manera que el extremo de ella oculta todos sus puntos. Puntos colocados así se dice que tienen una misma dirección."

Ambos autores concuerdan en definir línea recta como aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección. Incluso Hemmerling mencionó un intento de definición muy parecido a éste: "Línea recta es lo que se extiende sin cambios de dirección", pero objetó que para que esta definición resulte útil, la palabra dirección debería ser definida también.

Ahora bien, ¿qué pasaría si recurrimos al Cálculo vectorial para poder definir aquello que llaman dirección?

Sabemos que las ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ están dadas por

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad t \in \mathbb{R}$$

[Parecería que Contreras estaba pensando en esto precisamente cuando dice:

"*Por un punto A pueden pasar una infinidad de líneas rectas; pero desde el momento en que se da otro punto B, determinando estos dos puntos una dirección, queda fijada la posición de la recta.*"

Pues es de nuestro conocimiento que si tenemos dos puntos A y B, podemos calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ (paralelo a la recta L que pasa por A y B), el cual nos daría la "dirección" que estos puntos determinan. Y por ende podríamos ya calcular las ecuaciones paramétricas de la recta L y obtener así su ecuación vectorial, logrando con ello que la recta L quede completamente descrita.]

Consideremos las siguientes ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos A(2,4) y B(3,-1),

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Entonces, la ecuación vectorial de dicha recta será $\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t,\ 4 - 5t\rangle$.

Si recordamos nuestro curso de cálculo vectorial, existía un vector llamado vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ que estaba dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

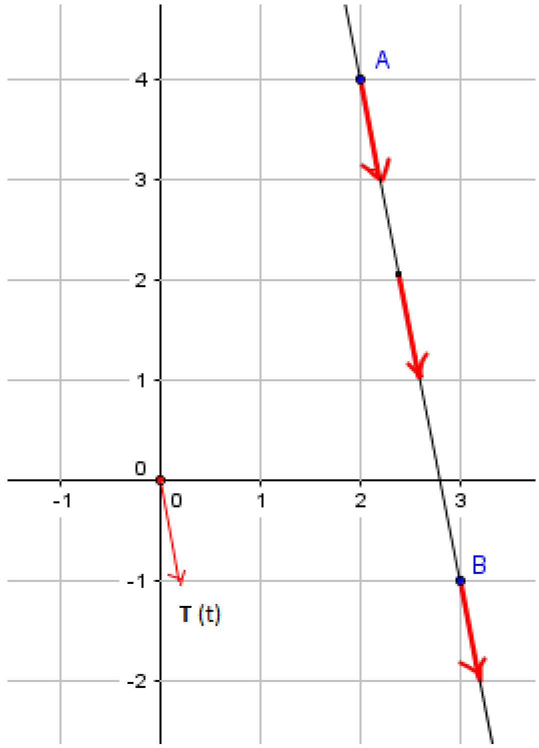
y que indicaba la dirección de la curva en cada punto o valor de t.

Si calculamos el vector tangente unitario para la ecuación vectorial anterior tendremos que

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{\langle 1, -5\rangle}{\sqrt{26}} = \langle \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}}\rangle$$

Luego, la dirección de la curva en cada punto de la recta siempre será el mismo, o en otras palabras, todos los puntos de la recta se encuentran en la misma dirección.

Sé que resulta complejo este análisis y más cuando se hace para definiciones básicas como lo es el de línea recta, pero con todo, lo único que se desea mostrar es que no estaban tan equivocadas las definiciones que dieron estos autores, pues incluso otras ramas de la matemática de cierta manera las confirman.



La misma idea podríamos poner en práctica para las líneas curvas. Pues Terrazas y contreras definen a una línea curva como *"aquella cuyos puntos constantemente varían de dirección"* (Terrazas). Más aún, Contreras agrega que *"puede concebirse como descrita por un punto que se mueve cambiando por grados insensibles á cada instante de dirección"* y que *"para fijar la forma de una curva, es necesario conocer la posición de todos sus puntos, ó la ley del movimiento del punto que la engendró"*.

Contreras nuevamente parece que nos habla de funciones vectoriales, al señalarnos que se puede describir una curva como la trayectoria que deja un punto en movimiento.

Supongamos ahora que la curva que tenemos es una circunferencia de radio 2. Sabemos que sus ecuaciones paramétricas son

$$x = 2cost \quad y = 2sent$$

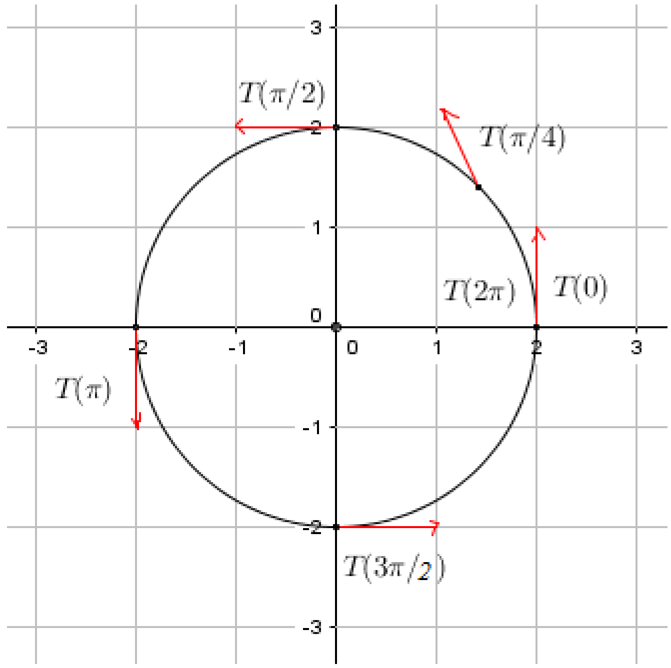
Por lo tanto, su ecuación vectorial sería $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \langle 2cost, 2sent\rangle, \ \ t \in [0,2\pi]$

Calculando se vector tangente unitario obtenemos que

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{\langle -2sent, 2cost\rangle}{2} = \langle -sent, cost\rangle$$

Y éste será diferente para cada punto, o para cada valor de t. Para ilustrar lo anterior, calculemos $\mathbf{T}(t)$ para algunos puntos:

t	$\langle -sent, cost \rangle$
0	$\langle 0, 1 \rangle$
$\pi/4$	$\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$
$\pi/2$	$\langle -1, 0 \rangle$
π	$\langle 0, -1 \rangle$
$3\pi/2$	$\langle 1, 0 \rangle$
2π	$\langle 0, 1 \rangle$



Así, definiendo a $\mathbf{T}(t)$ como la dirección de una línea en cada punto (o valor de t), para el caso de la circunferencia podríamos afirmar que es una línea curva, pues efectivamente sus puntos constantemente varían de dirección.

En cuanto a Echeagaray, él mantiene su postura de que existen términos indefinibles inherentes a la geometría, y uno de ellos es el de línea recta:

Queda dicho [...] que si de las tres dimensiones de un cuerpo, prescindimos de una de ellas, obtenemos la extensión en dos dimensiones, ó sea la superficie, y si de las dos dimensiones de la superficie, prescindimos de una de ellas, obtendremos la longitud ó línea.

De las diversas líneas que podemos considerar, la más sencilla es la recta, de la cual poseemos una idea completa, adquirida no científica sino naturalmente, aun cuando la podamos suponer originada por la intersección de dos superficies planas, ó como el límite de una superficie plana.

2.1.4 De los métodos de demostración.

Antes de empezar el estudio formal de la Geometría, Echeagaray y Contreras indican, de manera muy puntual, qué métodos usarán para la demostración de los teoremas. Esto en contraste con libros más recientes en donde sólo se menciona rápidamente que la Geometría hace uso del método deductivo, el cual consiste en obtener nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores.

<u>Echeagaray</u>

"Aunque ligeramente, expondremos algunas nociones acerca de algunos de los procedimientos de que se vale la Geometría para establecer sus verdades.

2. MÉTODO DE SUSTITUCIONES SUCESIVAS.— Supóngase que queremos demostrar que una proposición A es verdadera, pero que inmediatamente no lo podemos conseguir, y sí mediatamente<u>: haciendo ver que, la proposición A se reduce á la proposición B, B á la C y ésta es evidente por sí misma, ineductible, axiomática, ó bien es un teorema</u>. [...] Cuando se quiere determinar el valor numérico de un elemento de figura, se hace depender la incógnita, de otra, cuyo valor sea posible ó fácil de determinar por los elementos conocidos, lo cual equivale evidentemente á una serie de sustituciones.

3. MÉTODO DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS.— [...] consiste: <u>en satisfacer sucesivamente las condiciones A y B que deben llenar un punto por determinar y del cual depende la solución del problema</u>; punto que pertenece á la vez á dos líneas dadas, caracterizadas ó definidas como lugares geométricos, por propiedades comunes á sus diversos puntos ó elementos subjetivos.

4. REDUCCIÓN AL ABSURDO.— [...] se emplea para demostrar directamente una proposición, y consiste: <u>en hacer ver que de no ser cierta la proposición A, resultaría la proposición B en desacuerdo con otra C, ya demostrada</u>.

[...]

6. SOBREPOSICIÓN.— Para hacer ver que dos figuras son iguales, se emplea el medio de sobreponer parte de una sobre la otra; y ya sea directa o indirectamente se infiere que el resto de ambas figuras deberá coincidir.

7. ANÁLISIS.— Se soluciona un problema, empleando el método analítico, suponiéndolo resuelto, construyendo una figura en que se suponen realizadas las condiciones geométricas pedidas, y por la dependencia de líneas conocidas y desconocidas, se llega á un resultado ó construcción definitiva, que satisface al enunciado del problema.

8. SINTESIS.— Cuando se emplea la síntesis para resolver un problema, se prescriben las operaciones ó construcciones que se tienen que efectuar para obtener el resultado, teniendo en seguida que explicar ó dar la razón del procedimiento.

El método analítico es de invención, el sintético de demostración; uno y otro pueden también emplearse para los teoremas; el análisis para descubrirlos y la síntesis para demostrarlos".

Contreras

"MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN.— En geometría se emplea lo mismo que en aritmética y en álgebra, la demostración positiva y la negativa; pero como la igualdad ó desigualdad de dos figuras puede hacerse muy perceptible á nuestros sentidos colocando una sobre otra; á menudo usamos este método llamado de sobreposición para demostrar por medio de un raciocinio directo ó indirecto la igualdad ó desigualdad de dos figuras.

Repetiremos que la demostración positiva es aquella en la que el teorema por demostrar resulta como consecuencia inmediata de otros principios ciertos.

Demostración negativa es la que nos hace ver, que de no ser cierto el principio que trata de demostrarse, resultaría cierto otro principio incompatible con los que hemos demostrado.

En la demostración por sobreposición, sabiendo que una parte de una figura puede coincidir con parte de otra figura, y fundándose en teoremas demostrados, se deduce que el resto de las dos figuras deben coincidir".

Claramente la *demostración positiva* hace referencia a la *demostración directa*, y la *demostración negativa* a la *demostración por contradicción* o *reducción al absurdo*.

Resulta sumamente agradable que al terminar de enunciar los métodos de demostración, Contreras alerte al alumno sobre los errores más comunes que se suelen cometer cuando se trata de realizar una demostración. Errores que si bien ahora parecen obvios, no lo fueron tanto en los primeros semestres de la universidad.

"[…] Hay dos vicios de raciocinio que los estudiantes deben evitar en geometría. El uno llamado petición de principio, consiste en pretender tomar como fundamento de la demostración el teorema que debe demostrarse. Para excusarlo, no hay más que tener presente que el teorema por demostrar debe resultar como consecuencia de otras verdades ya conocidas. El otro vicio se llama círculo vicioso, y consiste en tomar como fundamento de la demostración un teorema que todavía no se ha demostrado, y que para hacerlo sería necesario apoyarse en el teorema que trata de demostrarse".

Conviene señalar que el método de sobreposición ya no es usado en las demostraciones formales de hoy en día, claramente por su falta de rigurosidad. Sin embargo, era muy socorrido en las demostraciones que aparecen en libros posteriores a 1900.

2.1.5 De la perpendicularidad.

En los libros que se utilizan en la actualidad y que son parte de nuestro análisis, me refiero al de Baldor y al de Hemmerling, se define la perpendicularidad de dos líneas en función de la noción de ángulo; para comprender qué quiero decir, observemos la definición que da Hemmerling:

"Dos líneas son perpendiculares si se intersectan de tal manera que formen un ángulo recto".

Otro tanto pasa con Baldor, su definición es la siguiente:

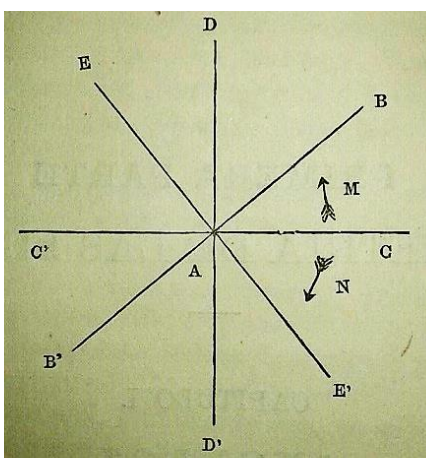
"Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales. Cada uno es un ángulo recto".

Ambos previamente asentaron la definición de un ángulo en general (la unión de dos rayos con el mismo punto inicial) y la de ángulo recto, aquel que mide 90°.

Estos autores para poder definir perpendicularidad entre dos rectas primero establecieron la noción de ángulo y la medida de ellos. En nuestros libros antiguos bajo estudio (el de Contreras, Echeagaray y Terrazas) pasa algo un tanto distinto. La definición de rectas perpendiculares nace junto con la noción de ángulo, donde esta última resulta mucho más natural y comprensible, tanto didáctica como visualmente, que la dada por los otros autores. Veamos cómo expone la noción de ángulo Echeagaray y cómo es que surge inmediatamente la de rectas perpendiculares:

"La posición de una recta AB móvil respecto de otra fija AC, ó sea el ángulo BAC, puede ser variada; el ángulo será nulo cuando coincida la línea móvil con AC, á medida que se separe de AC, irá en aumento el ángulo, ocupando sucesivamente la línea móvil las posiciones AB, AD, AC' AB' AD', volviendo á su primitiva posición AC y pudiendo volver á girar varias veces alrededor del punto A.

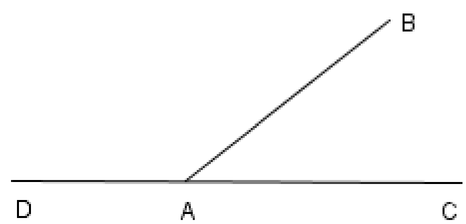
Si la recta móvil partiendo de la posición AC, gira en sentido contrario de como lo hizo antes, ó sea en el sentido de la flecha N; los ángulos, al contrario de los formados en el primer caso, que supondremos positivos, ahora son negativos".



Entre las diversas posiciones de AB, podemos suponer una AD, en que no se incline ú oblícue más á un lado que á otro de la recta CC', en cuyo caso decimos que los ángulos iguales DAC, DAC' son rectos, y la recta DA es perpendicular á CC' y evidentemente única de las que se pueden levantar del punto A á la recta CC' perpendicularmente".

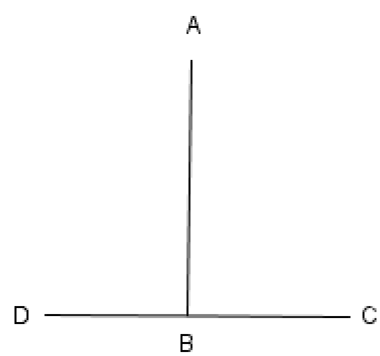
Terrazas expone exactamente la misma idea, pero lo hace con su habitual modo anticuado que me encanta que por ello lo citaré también:

"Si concebimos que con movimiento igual una recta AB, se va moviendo alrededor de un punto A de la AC, habiendo comenzado el movimiento cuando formaban una sola, tendremos idea del ángulo el cual no es sino la abertura, ó más bien, el grado de movimiento de una línea respecto de otra á que toca por un punto.



Cuando una recta AB llega á la mitad del movimiento que necesita para aplicarse de nuevo sobre la DC; hácia la parte AD, se dice que forma dos ángulos rectos con la otra, ó que le es perpendicular".

Si quisiéramos dar una definición precisa de rectas perpendiculares, parecida a la de Baldor y Hemmerling, tendríamos que hacerlo tal como lo hace Contreras: *"Se llama perpendicular a toda recta AB que forma con otra DC dos ángulos ABC y ABD adyacentes e iguales entre sí".*

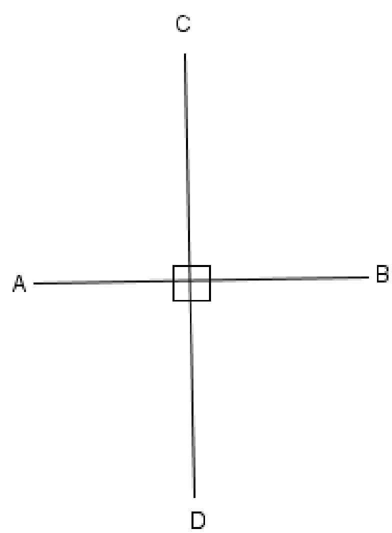


Resumiendo un poco, para la definición de perpendicularidad los autores modernos establecieron primero qué se entiende por ángulo y la forma en que se obtiene su medida. En cambio, para nuestros autores vetustos las ideas de "ángulo recto" y "recta perpendicular" surgen conjuntamente y con relación al movimiento de una recta con respecto a otra.

Con estas definiciones se hace indispensable demostrar teoremas que resultarían obvios con las dadas por los autores modernos. Por ejemplo, el siguiente teorema:

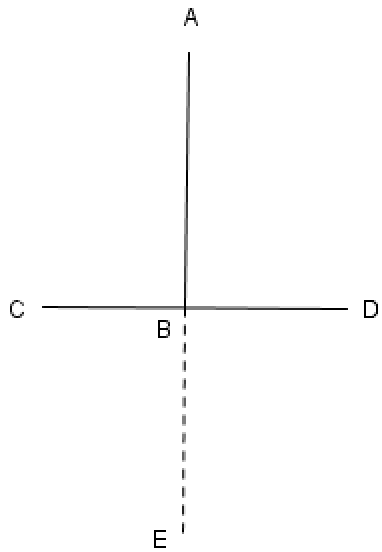
Teorema 1: Cuando una recta AB, es perpendicular á otra CD, ésta también es perpendicular á la primera AB.

Resulta importante demostrarlo debido a que al explicar la noción de perpendicularidad, Contreras, Terrazas y Echeagaray hablan de que **una recta** es perpendicular a otra, y no que dos rectas son perpendiculares, como lo hacen Baldor y Hemmerling. En el segundo caso, el teorema anterior no tendría ningún sentido (o mejor dicho, sería ridículamente obvio), a causa de la misma definición de perpendicularidad. Si consideramos, por ejemplo, la definición de Baldor *"Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales. Cada uno es un ángulo recto"*, el teorema anterior, más que un teorema se consideraría como una mera observación, pues la demostración está implícitamente en la definición. Gráficamente resulta claro



Si $AB \perp CD \;\; \Rightarrow CD \perp AB$

No ocurriendo lo mismo con las definiciones adoptadas por nuestros autores antiguos, pues ellos no hablan de <u>dos rectas perpendiculares</u> sino de <u>una recta siendo perpendicular a otra</u>, en este caso el teorema anterior ya no resulta tan trivial. Veamos la demostración que efectúa Contreras:



Prolonguemos la recta AB hasta E, y demostraremos que siendo ABC=ABD, los ángulos ABC y CBE que forma la recta CD con AE, también serán iguales, y en consecuencia la recta CD será perpendicular á AE.

Por lo supuesto del teorema

ABC=ABD;

Por opuestos al vértice

ABD=CBE

Luego

ABC=CBE.

(Cabe señalar que Terrazas y Echeagaray no hacen mención de dicho teorema).

Observamos que nuevamente todo se reduce a las definiciones. Por las definiciones surgen o se "ahorran" teoremas. Como ocurre con el siguiente: *"Líneas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos"*. Hemmerling se vio en la necesidad de demostrarlo, mientras que Baldor no, pues viene incluido en su definición de rectas perpendiculares.

Algo parecido sucedió con Terrazas, quien tuvo que demostrar que *"Todos los ángulos rectos son iguales"* por no formar parte este hecho de su definición. El argumento, más que demostración, que dio es el siguiente:

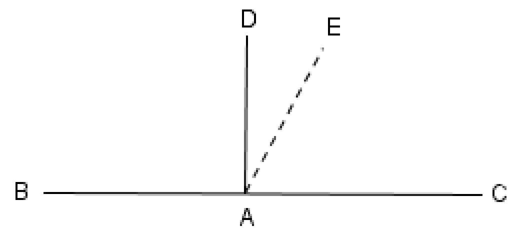
"Porque el espacio de toda región y en todo plano se concibe siempre igual y el ángulo recto no es sino la mitad del movimiento de una recta alrededor de un punto de otra".

Regresando al Teorema 1, notamos que con las definiciones de perpendicularidad que proponen Baldor y Hemmerling podemos ahorrarnos la demostración de este teorema, pero a un alto precio, pues se pierde la idea de cómo surgieron dichas definiciones.

A continuación vamos a enunciar algunos teoremas relacionados con perpendicularidad y la demostración que dan nuestros autores antiguos que, a pesar de tener los tres en esencia la misma idea de rectas perpendiculares, resultaron ser un tanto variadas.

Teorema 1*: Desde un punto A de una recta BC, no se puede levantar mas de una sola perpendicular.*

- Contreras:



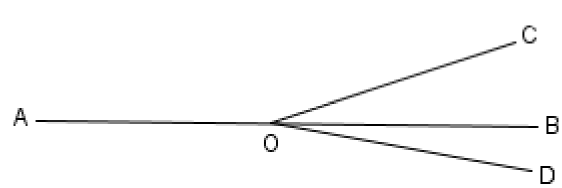
"Si supusiéramos que se pudiera levantar otra perpendicular AE, tendríamos:
Por el teorema
DAC = 1 recto
Por el supuesto
EAC = 1 recto
Luego
DAC = EAC
Pero siendo ésto inadmisible, se infiere que AE no es perpendicular á BC, y que solo podrá serlo en el caso de confundirse con AD".

- Terrazas: *"Porque una región, sólo de un modo puede dividirse en dos mitades".*

(Echeagaray hace mención de este teorema en su definición de recta perpendicular).

Teorema 2*: Si dos ángulos suman dos rectos y tienen un mismo vértice y un lado común, los otros lados están en línea recta.*

- Echeagaray:
  "Tenemos:



AOC + COB = 2 rectos

Si OB no es prolongación de AO, lo será OD, por ejemplo, y tendremos:

$$AOC + COD = 2 \text{ rectos}$$

Luego $$COB = COD$$

Lo que no puede ser, al menos que OD coincida con OB".

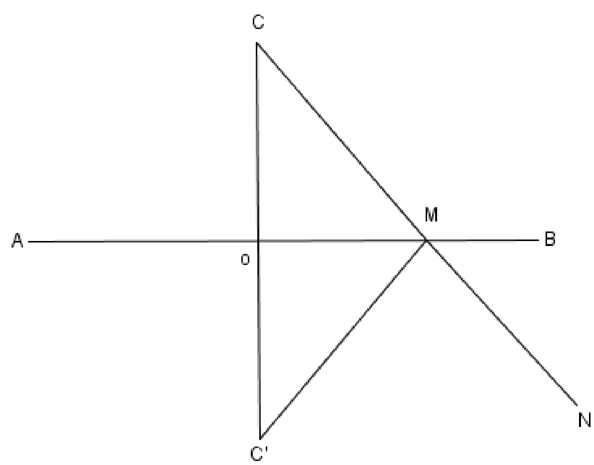
(La demostración de Contreras es similar a la de Echeagaray).

- Terrazas: *"Porque si OB no estuviese en línea recta con OA estaría en la región superior ó en la inferior, lo cual es imposible pues entonces no podrían valer dos rectos por no abarcar una región y sólo ella".*

Teorema 3: *Desde un punto tomado fuera de una recta, no se puede bajar más de una perpendicular.*

- Echeagaray:

"Sea Co la perpendicular á la recta AB, y supongamos que CM sea también perpendicular á AB, hagamos girar la figura CoM, alrededor de AB, que le llamaremos eje, hasta que se coloque en C'oM, en el plano de la figura.



El punto C caerá en C' quedando C'o en prolongación de Co [Teorema 2.1.2] *y CM tomará la posición C'M, teniéndose CMo = C'Mo y CMo + C'Mo ó 2CMo < 2 rectos; supuesto que*

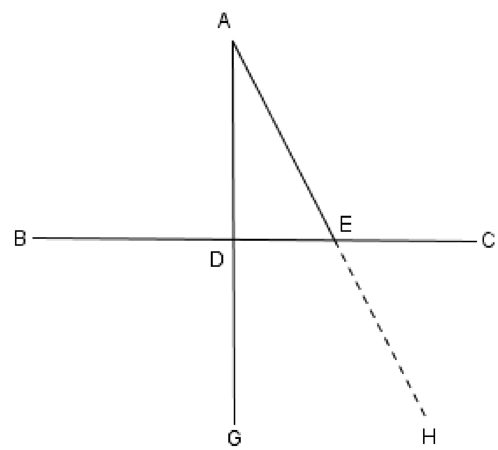
$$CMo + C'Mo + C'MN = 2 \text{ rectos.}$$

Luego: CMo < 1 recto; en consecuencia: CM, no es perpendicular á la línea AB".

- Contreras:

  Sea A un punto situado fuera de la recta BC, y AD perpendicular a BC.

  “Si fuera posible bajar otra perpendicular AE, tendríamos prolongando AD y AE que BC sería perpendicular á AG y á AH.



  Si dobláramos la figura por la recta BC, por ser el ángulo ADB = BDG, la recta AD tomaría la dirección de DG y el punto A caería en alguno de la recta DG; y por suponerse el ángulo AEB = BEH, la recta AE debería tomar la dirección EH y el punto A caería en alguno de la recta EH. En consecuencia, si las dos rectas AD y AE pudieran ser perpendiculares á BC, al doblar la figura, el punto A debería caer al mismo tiempo sobre DG y EH, y no siendo esto posible, á menos que AD coincida con AE, inferiremos que no se puede bajar desde el punto A mas de una sola perpendicular”.

(Para la demostración de este teorema Terrazas usa nociones de paralelismo, así que expondremos su demostración más adelante, en el apartado *2.2.3 Un teorema sobre paralelas, Terrazas*).

Cabe mencionar que los teoremas anteriores aparecen en el apartado de perpendicularidad de los libros de nuestros tres autores, con excepción del **Teorema 3**, el cual se encuentra en la sección de “rectas paralelas” en el libro de Terrazas.

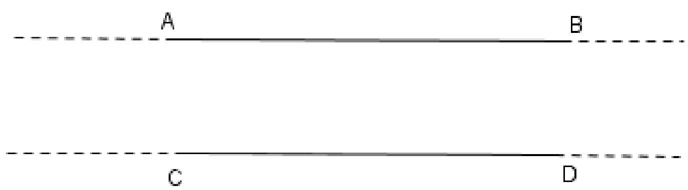
2.1.6 De las paralelas.

En el apartado anterior encontramos que la definición de rectas perpendiculares se abordó en dos perspectivas: la de los autores modernos contra la de los antiguos. Podríamos, con razón, pensar que lo mismo sucederá al hablar de paralelismo. Sorprendentemente no es así. Pues a pesar de ser "contemporáneo" de Terrazas y Echeagaray, Contreras adopta otra de las definiciones que se llegó a usar por los griegos de rectas paralelas; mientras que Terrazas y Echeagaray siguen aquella que dio Euclides:

"Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos."

(Euclides, [10], definición 23)

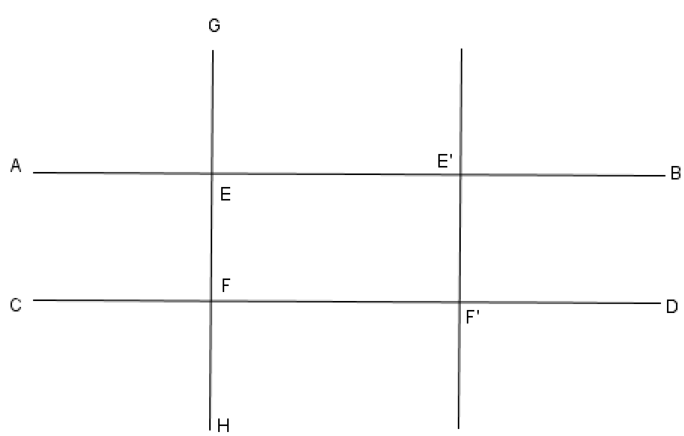
Dicho lo anterior en palabras del propio **Terrazas**:



"Cuando una recta, AB, que se supone prolongada al infinito, no corta á otra CD situada en su propio plano y también infinitamente prolongada ó lo que es igual, cuando una recta siendo distinta de otra, no tiene grado alguno de movimiento angular respecto de ella se llama paralela á esta".

Entendemos como grado de movimiento angular el ángulo que forman dos rectas.

Veamos ahora la definición que propone **Echeagaray**:



"Si dos rectas AB y CD colocadas en un plano son perpendiculares á GH, y las suponemos prolongadas indefinidamente hácia la derecha ó hácia la izquierda de GH, no podrán jamás encontrarse; pues de lo contrario, resultaría que desde un punto podríamos trazar á una

recta dos perpendiculares; contrario á lo demostrado. A las líneas AB y CD se les llaman líneas paralelas ó simplemente paralelas, cuyo origen o existencia matemática es la indicada.

Las rectas paralelas son rectas situadas en un plano, que no se encuentran, aún cuando indefinidamente se prolonguen".

El valor que posee la definición de Echeagaray es que expone una forma en la que se pudo haber concebido la idea de rectas paralelas. Luego de la definición, este autor hace las siguientes observaciones:

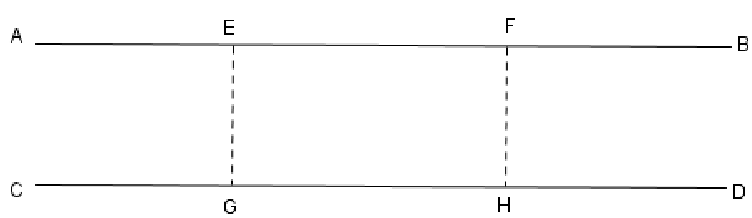
"Las rectas AB y CD evidentemente no forman entre sí ningún ángulo, y conservan constantemente la misma distancia entre sus puntos. Esta distancia se aprecia por una perpendicular E'F' á CD, perpendicular, que también lo es á la línea AB; puesto que esta última línea, se encuentra en condiciones geométricas con CD, lo mismo que CD lo está con AB. (Téngase presente el ξ13.)"

El *ξ13* que menciona Echeagaray, es el párrafo donde justifica por qué no es necesario demostrar proposiciones que resultan evidentes (véase la sección *2.1.1 De la necesidad de términos indefinidos*). Observamos entonces que Echeagaray no demuestra formalmente que la distancia entre dos rectas paralelas se mantiene constante, es decir, que la paralela EF es igual a la E'F', sino que simplemente apela al sentido común.

Por último, observemos la definición que adopta **Contreras**:

"Se llaman paralelas las rectas que estando en un plano tienen todos sus puntos equidistantes.

Como la distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada sobre ella, para que dos rectas AB y CD sean paralelas es necesario que las perpendiculares bajadas de dos puntos cualesquiera E y F sobre CD sean iguales".



Cabe recordar que para Contreras dos rectas (segmentos) son iguales si sus puntos extremos coinciden.

(*) Es claro que al decir que las rectas paralelas son aquellas que *tienen todos sus puntos equidistantes*, Contreras se refiere más bien a que las rectas son equidistantes. Parafraseando su definición:

Dos rectas son paralelas si son equidistantes [1]

Es decir, que las perpendiculares bajadas de cada uno de los puntos de una de las rectas a la segunda, son siempre iguales. ¿Cómo demostraríamos entonces que dos rectas AB, CD son paralelas? Contreras lo explica: tendríamos que elegir dos puntos cualesquiera, arbitrarios, E y F, que estén sobre la recta AB, bajar las perpendiculares de dichos puntos a la recta CD y ver que éstas son iguales. En lenguaje matematizado sería:

$$Sean\ los\ puntos\ E, F \in \overline{AB}.$$

$$Sean\ \overline{EG}, \overline{FH}\ las\ perpendiculares\ bajadas\ de\ E\ y\ F, respectivamente, a\ la\ recta\ CD.$$

$$P.D.\ \overline{EG} = \overline{FH}$$

(**) A simple vista podríamos pensar que la definición que sigue Contreras no tiene nada de curioso ni peculiar, pues parece casi natural creer que si dos rectas infinitamente prolongadas no se intersectan, entonces guardan siempre la misma distancia (entendiendo por distancia la que describe Contreras); e inversamente, si dos rectas tienen todos sus puntos equidistantes, entonces ambas rectas jamás se intersectan. Podríamos considerar, en cuanto a las dos definiciones de rectas paralelas, que una lleva a la otra e inversamente; es decir, que ambas definiciones son equivalentes. E impulsivamente podríamos incluso pensar que partiendo de cualquiera de las dos definiciones, con los teoremas derivados de ésta debería ser posible llegar a la otra. Pero no es así. Si se tienen dos rectas paralelas, llegar al hecho de que son equidistantes, partiendo de que infinitamente prolongadas no se intersectan y haciendo uso de todos los teoremas desarrollados previamente, es imposible. Para ello es indispensable el *quinto postulado de Euclides*, que al ser un postulado, no admite demostración (no es posible demostrar).

Lo que Contreras toma como definición podemos obtenerlo entonces como una consecuencia del *quinto postulado de Euclides*, el cual dice:

"Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos , las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos".

(Euclides, [10])

Una de las más populares proposiciones lógicamente equivalentes a este postulado es la que sigue:

[1] Esta es a la que nos referiremos cuando se diga "la definición de Contreras" o "la definición que sigue Contreras", etc.

Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela…(1)

Se llega a la necesidad de este postulado para obtener nuevas proposiciones referentes a rectas paralelas al definirse éstas como: *aquellas cuyos lados infinitamente prolongados no se intersectan*.

Tratando de hallar una relación de la definición adoptada por Contreras con la definición "tradicional" podríamos pensar que si aceptamos que la primera resulta ser consecuencia de un postulado inherente a la definición "euclidiana" de recta paralela, entonces implícitamente la definición de Contreras es equivalente al postulado de Euclides junto con la definición "euclidiana".

$$Definición \text{ "}euclidiana\text{" } + Postulado\ de\ Euclides \cong Definición\ de\ Contreras$$

Y esto es efectivamente así, pues al igual que (1), la definición adoptada por Contreras se considera también una formulación equivalente al postulado de Euclides. Entonces, aunque no resulten estrictamente equivalentes la definición "euclidiana" y la de Contreras, si no que a la primera debemos agregar el postulado de Euclides, ¿cuál es el problema de elegir la definición de Contreras?

Es claro que si la definición de Contreras es equivalente a la definición "euclidiana", dada una de ellas se puede llegar a la otra y viceversa. Esto es precisamente lo que hace Contreras, demuestra el quinto postulado de Euclides. Y eso es perfectamente válido, pues la definición que usa no es la "euclidiana". Entonces, de nuevo va la pregunta ¿cuál es el problema de elegir la definición de Contreras?

El problema está cuando Contreras trata de dar una justificación de la existencia de rectas paralelas. A este respecto se escribe en la nota 17 del traductor de los Elementos (Euclides, [10]):

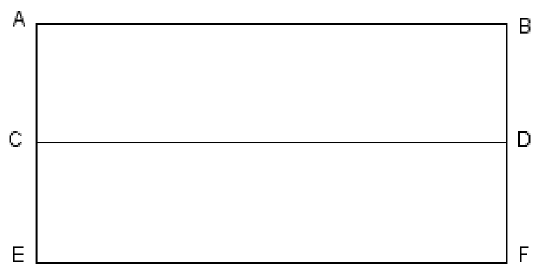
Euclides […] opta por la característica de no intersección o no encuentro como criterio determinante de las rectas coplanarias paralelas. No era la única opción conocida por los griegos ni, al parecer, fue la más frecuente. A primera vista resulta más natural el criterio de equidistancia, preferido por Posidonio o Gémino, entre otros. Conforme a este criterio, son paralelas las rectas coplanarias que no convergen no divergen y, así, todas las perpendiculares trazadas de una a otra son iguales. En cualquier caso la opción de Euclides por este criterio de no intersección y la asunción complementaria del postulado 5, con ser menos intuitivas, son más adecuadas y evitan la falacia de probar la existencia de rectas paralelas sobre la base de algún supuesto derivado justamente de esa misma existencia.

***Para mayor profundidad del tema véase el apartado *2.2.2 El quinto postulado de Euclides*.

Cuando se toma la definición que sigue Contreras para las demostraciones relacionadas a rectas paralelas, están resultan ser muy sencillas y más gráficas que las que se obtienen con la definición "tradicional" (*Dos rectas de un plano son paralelas cuando al prolongarlas no tienen ningún punto común).* Como ejemplo de esto consideremos el siguiente teorema:

Teorema 1: Si cada una de las rectas AB y CD es paralela á una tercera recta EF; serán paralelas entre sí.

La demostración que da **Contreras** es la siguiente:



"Por ser AB paralela á EF se tiene

$$AE = BF$$

Por ser CD paralela á EF

$$CE = DF$$

Restando esta ecuación de la anterior, resulta

$$AC = BD$$

Luego AB será paralela á CD".

Con la otra definición "euclidiana", la demostración sería:

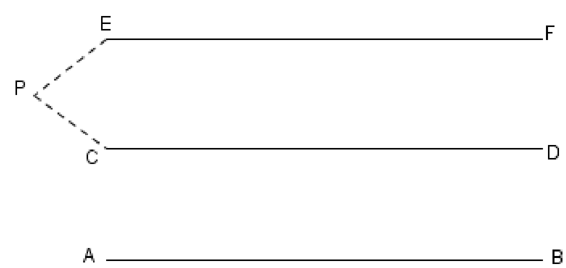
Tenemos que CD || AB y que EF || AB

P.d. EF || CD

Si EF y CD no fueran paralelas, se cortarían en un punto P.

Entonces por el punto P pasarían dos paralelas a AB, lo cual es contradictorio al postulado de Euclides.

Por lo tanto EF || CD. (Baldor)



[Recuérdese el postulado de Euclides: *Por un punto exterior a una recta, pasa una sola paralela a dicha recta.*]

Aunque esta demostración no resulte complicada de entender, es claro que la de Contreras se obtiene de una forma inmediata y más visual.

Observamos también que para la segunda demostración se usó el postulado de Euclides, lo que nos haría preguntarnos “¿qué dicen el resto de nuestros autores vetustos acerca de él?” De eso nos encargaremos más adelante.

Y ya para terminar me gustaría mencionar el argumento que da **Terrazas** para comprobar el Teorema 1, pues él utiliza la definición para dar su “demostración”; al contrario de Baldor y Hemmerling quienes utilizan el postulado de Euclides:

[…]*“Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí. Porque si son paralelas á la tercera no tienen respecto de ella movimiento angular alguno, luego tampoco entre sí”.*

2.2 Curiosidades matemáticas halladas en los textos

2.2.1 Geometría experimental

Al principio del libro de Echeagaray viene un pequeño apartado, de 4 hojas, que se llama *Geometría Experimental.* Este apartadito inicia con la siguiente frase:

"Una buena enseñanza, consiste en estimular al discípulo, en desarrollar el sentimiento, en crear la ilusión, si se quiere, de que descubre lo que se le enseña, de que la paternidad le corresponde."

Esta sección es una exhortación a que se realice un ensayo empírico antes de emprender un estudio formal o estricto de la Geometría. ¿Y cómo? Bueno, por ejemplo:

"[…] Aprovechando los conocimientos inmediatos que tomamos de la Naturaleza, por medio de los sentidos, podemos […] trazar a pulso una línea recta, sujeta á pasar por dos puntos, fijando la vista en el punto de llegada y dejando el puño libre que trace por medio de un lápiz la recta".

"[…] Valiéndose del transportador compruébese que la suma de los tres ángulos de un triángulo, vale dos rectos. Es un ensayo empírico, una manera de adquirir experiencia, para más tarde reflexionar y emprender un trabajo en forma científica".

La observación de *"[…] la rectificación de la circunferencia, ó sea su valor en diámetros, podrá hacerse extendiendo un aro y aplicando el diámetro sobre la línea que corresponde á dicho aro; así se tendrá un valor aproximado de la circunferencia al diámetro".*

Para el estudio experimental de las áreas se podría: "*[…] Colocar en un rectángulo un cuadrado que esté contenido exactamente, con el fin de comprobar que multiplicando la base por la altura se obtiene el área de dicho rectángulo; haciendo ver que se toman para esta apreciación la base y la altura del rectángulo en sus unidades respectivas referidas estas á una misma unidad lineal."*

Como principio del estudio práctico de los volúmenes *"[…] se construirán las figuras en perspectiva, pudiéndose recurrir al medio muy sencillo, de construirlos con popotes y obtener su sombra, si sus diversas líneas se quisieran obtener".*

Y propone que a lo largo de este ensayo se vaya: *"[…] dando motivo al discípulo para que verifique alguna propiedad, como la de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en partes mutuamente iguales, […] procurando que el mismo alumno busque por sí algo que más tarde pueda saber el porqué".*

La idea es que el alumno compruebe por sí mismo algunas propiedades, teoremas, etc., que posteriormente verá en clase; que verifique que son ciertas, que realmente se cumplen, y que por ello se le están enseñando.

Luego de la serie de mini actividades que propone realizar da la siguiente nota:

"Nota.— Lo indicado en las líneas anteriores bastará para comprender que no conviene dar á los trabajos de esta índole, puramente preparatorios, la forma dogmática de los teoremas, y sí dejar al lector cierto trabajo individual de iniciación, dejándolo en campo abierto, desarrollándole, excitándole sus facultades, sus fuerzas propias, su actividad en una palabra".

Y esto debiera tomarse aún más en consideración al abordar una ciencia como lo es la Geometría. Pues como el mismo Echeagaray lo dice en líneas posteriores: *"La Geometría es una ciencia NATURAL, pues las primeras nociones que tenemos de ella nos vienen del exterior, por medio de los sentidos, gracias a la observación y la experiencia".*

Entonces por ello conviene que el alumno primeramente observe y experimente, para que vea que aquello que se le enseñará en clase es lo mismo que él ha estado observando sólo que en un lenguaje más formal, más perfeccionado. A este respecto, Echegaray declara:

"*Por algo se dice: "que la experiencia es madre de la ciencia". Hay que buscar primeramente en el mundo exterior lo que desde luego, á la mano se halla, hechos más o menos tangibles, que más tarde se les de una organización conforme á su modo de ser actual.*

Sin ser una ciencia, "un lenguaje perfeccionado", conviene proceder naturalmente para adquirirla, como lo hacemos cuando aprendemos á hablar nuestro idioma; idioma que más tarde lo elevamos á la categoría de lenguaje escrito, gramatical, forense, poético, científico, etc."

Y aunque a lo largo de todo el apartado, manifiesta que es preciso *"[...] anteponer á la ciencia, la experiencia, con el fin de tener materia prima con que trabajar"*, también deja muy en claro que *"[...] la sola experiencia, sin ninguna conexión entre los hechos adquiridos, no basta para servir de base, científica; esta resultaría desdeñable."*

Para terminar me gustaría comentar que este apartado lo considero hermoso pues no he encontrado nada parecido en ningún otro libro de geometría, me refiero al hecho de que se invitara a acercarse a la Geometría de una manera un tanto más práctica (por lo menos al inicio del curso).

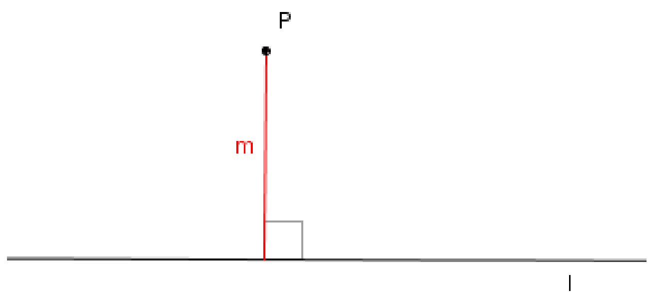
2.2.2 El quinto postulado de Euclides

Si recordamos un poco, en el apartado *2.1.5 De la perpendicularidad* se expuso la demostración de dos teoremas importantes, a saber:

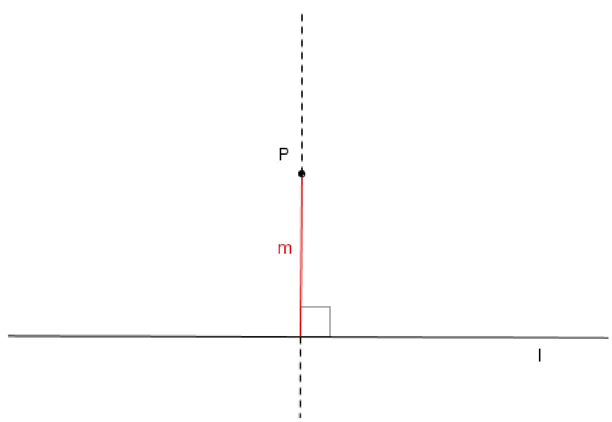
Teorema 1*: Desde un punto perteneciente a una recta no se puede levantar mas de una sola perpendicular.*

Teorema 2: *Desde un punto tomado fuera de una recta, no se puede bajar más de una perpendicular a dicha recta.*

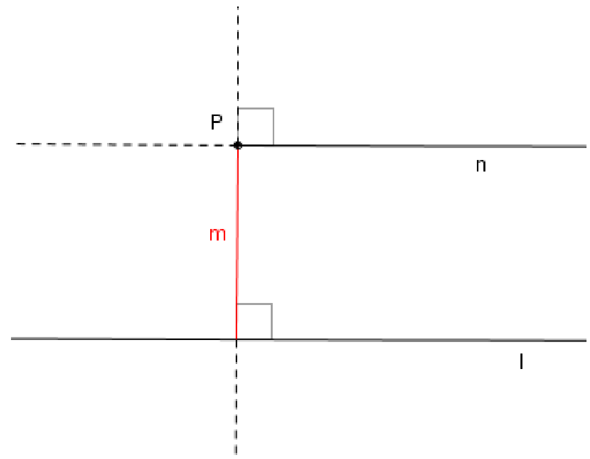
Supongamos ahora que tenemos una recta en el plano y un punto que no pertenece a la recta, resulta entonces que con ambos teoremas nos es posible construir una recta que pase por dicho punto y que sea paralela a la recta dada. ¿Cómo? Pues de la siguiente manera:



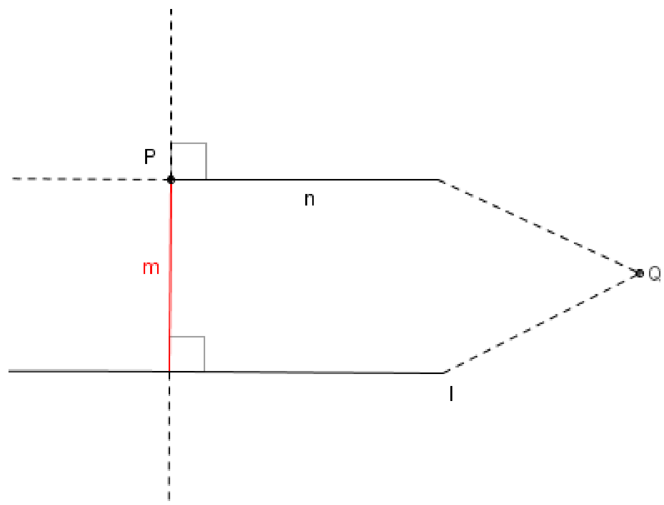
Sabemos que desde el punto *P* a la recta *l* se puede bajar una única perpendicular *m* a dicha recta, esto por el Teorema 2. Prolonguemos *m*.



El punto *P* está sobre la recta *m*, entonces en virtud del Teorema 2 se puede levantar una *única* recta *n* perpendicular a *m*.



Ambas rectas *n* y *l* resultan que son paralelas, pues si no lo fueran entonces se intersectarían en algún punto Q, entrando en contradicción con el Teorema 2, pues por el punto exterior *Q* bajarían dos perpendiculares a la recta *m*.



Por lo tanto $n \parallel l$.

Con lo anterior hemos expuesto cómo construir una recta que pasa por un punto exterior *P* y paralela a otra recta *l* dada. Pero ¿podría haber otra manera de construir una recta paralela a *l* y que pase por *P*, o la que acabamos de dar es la única?

Sorprendentemente esa pregunta no es posible de responder haciendo uso exclusivo de los teoremas desarrollados previamente a la noción de rectas paralelas. Por lo que su afirmación se asume como un postulado, el famoso **quinto postulado de Euclides**:

"A través de un punto dado que no esté sobre una línea sólo pasa una recta paralela a la línea dada"

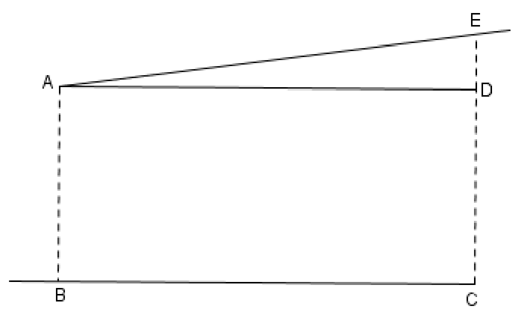
Hemmerling nos dice que este postulado: "… fue asumido por Euclides. Desde entonces muchos matemáticos han tratado de probar o negar este postulado por medio de otros postulados o axiomas. Cada esfuerzo ha terminado en fracaso. Como consecuencia los matemáticos han considerado qué tipo de geometría podría resultar si está propiedad no fuera asumida como cierta, y un gran número de geometrías diferentes a la que estamos estudiando han sido desarrolladas. Tales geometrías son conocidas como *geometrías no euclidianas*.”

Curiosamente, nuestros autores Contreras, Terrazas y Echeagaray dieron demostraciones para este postulado. Vamos a verlas y a analizar dónde se encuentra el fallo en sus argumentos. Pero antes de comenzar, conviene que el lector revise las definiciones que dieron estos autores para rectas paralelas y la forma en que las expusieron, las cuales se encuentran en el apartado *2.1.6 De las paralelas*.

- Contreras

El quinto postulado de Euclides citado por Contreras es el siguiente:

“Por un punto A no se puede tirar más de una sola paralela á otra recta BC”



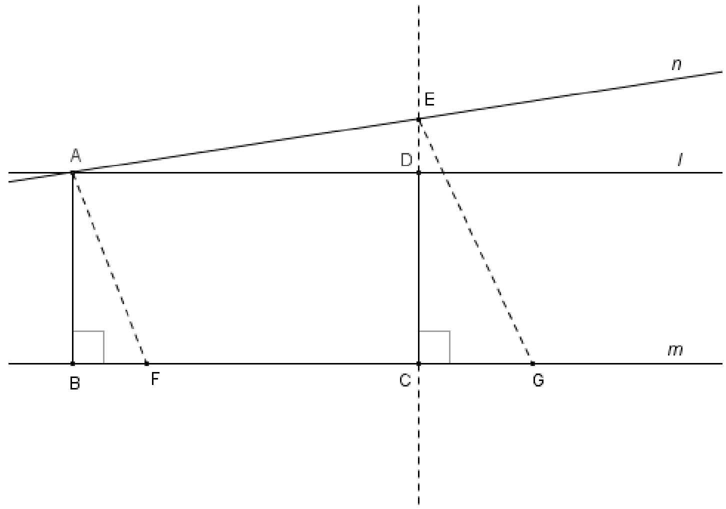
DEMOSTRACIÓN

Siendo AD paralela á BC, tendremos AB=CD. Si suponemos que pudiera tirarse otra paralela desde A, como AE, tendríamos AB=CE, de lo que resultaría CD=EC lo que es imposible, á ménos que AE coincida con AD.

Para mayor claridad vamos a explicarlo paso a paso:

Tenemos dos rectas *l* y *m* paralelas. Sean *A* y *D* dos puntos sobre la recta *l*. Por definición sabemos que las perpendiculares que bajan desde los puntos *A* y *D* a la recta *m* son iguales, es decir *AB=DC (1)*, donde *B* y *C* son las intersecciones de dichas perpendiculares con la recta *m*. Supongamos ahora que por *A* puede pasar otra recta *n* paralela *m*. Prolonguemos la perpendicular que baja desde *D* y sea *E* el punto donde ésta y *n* se intersectan. Como *n* es paralela a *m*, entonces desde *A* y *E* deben bajar rectas *AF* y *EG* perpendiculares a *m* y con *AF=EG*. Pero ya que por un punto fuera de una recta sólo baja una única perpendicular a dicha recta (Teorema 2), entonces *AF=AB* y *EG=EC* (*E* pertenece a la prolongación de la perpendicular bajada desde D). Así la igualdad *AF=EG,* se convierte en *AB=EC (2).*

Luego, por *(1)* y *(2)* tenemos que *EC=DC*, lo que resulta imposible a menos que *E=D* (un segmento es igual a otro cuando sus puntos extremos coinciden), implicando que las rectas *m* y *n* son la misma.



Siguiendo la demostración a detalle, nos parece que es correcta, y efectivamente lo es. La demostración no tiene errores. Entonces ¿por qué no saltamos de felicidad al descubrir una demostración del supuestamente indemostrable postulado de Euclides? La "falla", si podría llamarse así, no está en la demostración sino en la definición que propone Contreras de recta paralela. Si recuerda (**) del apartado *2.1.6 De las paralelas*, se dijo que la definición que toma Contreras es equivalente al postulado de Euclides sumado con la definición "euclidiana" de rectas paralelas:

$$Definición\ "euclidiana" + Postulado\ de\ Euclides \cong Definición\ de\ Contreras$$

No es que Contreras demuestre el quinto postulado de Euclides, más bien la definición adoptada por Contreras es en parte dicho postulado. Es claro que de una, se debe poder llegar a la otra y viceversa (al ser ambas equivalentes). Y el hecho de que Contreras haya optado por una definición de rectas paralelas equivalente al quinto postulado no está mal, Contreras puede escoger la definición que deseé, pues incluso varios griegos lo hicieron, como señala (**). Pero insisto, Contreras no está demostrando el quinto postulado de Euclides, no como nosotros consideraríamos una demostración de éste, es decir, usando la definición "euclidiana" de rectas paralelas.

Algo que resultaría más interesante, sería preguntarnos ¿cómo justifica Contreras la existencia de rectas paralelas con su definición? Pues si hacemos memoria, la construcción de una recta paralela a otra que se hizo al inicio de este apartado utiliza la definición "tradicional" de rectas paralelas.

En los PROBLEMAS de su apartado *Paralelas*, muestra la forma de construir una recta paralela a otra:

PROBLEMAS DE PARALELAS.—I.—Por un punto C dado fuera de una recta AB, tirarle una paralela.

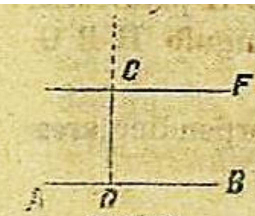


Figura 73.

2ª *Construccion.* (Fig. 73).—Desde el punto dado C bájese la perpendicular C D, y en seguida prolongando D C levántese en C la recta C F perpendicular á C D. La línea C F será la paralela pedida en razon de ser por construccion F C D=C D A y ser estos ángulos alternos internos.

Observamos que es la misma construcción que habíamos obtenido usando como definición de rectas paralelas, la "euclidiana". Lo que cambia es su justificación. A este respecto, Contreras anteriormente enuncia el siguiente teorema:

TEOREMA.—*Siempre que los ángulos* C A B y D B A (fig. 64) *que tienen la posicion de alternos internos, sean iguales, las dos rectas* C E *y* F D *serán paralelas*.

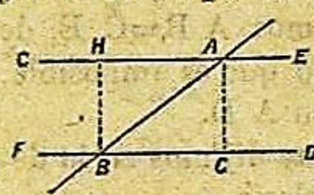


Figura 64.

Conforme á la hipótesis del teorema, C A B =D B A y vamos á demostrar que las rectas C E y F D tienen sus puntos equidistantes. Por el punto A levántese A G perpendicular á C E; y por B levántese B H perpendicular á F D. El ángulo B A G será complemento de C A B, y el ángulo H B A será complemento de D B A; pero siendo

C A B=D B A

se infiere que tambien lo serán sus complementos, luego

B A G=H B A.

Los dos triángulos A B G y A B H serán iguales (384) por tener el lado A B comun adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; y como en triángulos iguales á ángulos iguales están opuestos lados iguales, tendremos:

A G=B H

por opuestos á los ángulos

A B G=B A H

y como A G y B H miden las distancias de dos puntos de las rectas C E y F D, se infiere que serán paralelas por estar equidistantes.

La demostración es ingeniosa, pero no parece muy convincente. El primer “pero” que le podemos poner es que para demostrar que CE y FD tienen sus puntos equidistantes, se deben tomar dos puntos arbitrarios en CE y bajar las perpendiculares desde dichos puntos sobre FD, y demostar que estas perpendiculares son iguales; o bien, tomar los dos puntos arbitrarios en FD y “subir” las perpendiculares desde dichos puntos a CE, y demostar que éstas son iguales. Todo esto atendiendo a la definición que dio Contreras de rectas paralelas, véase (*) de la sección *2.1.6 De las Paralelas.*

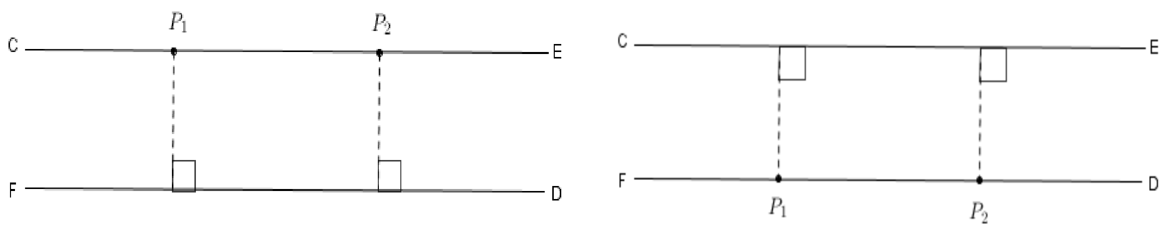
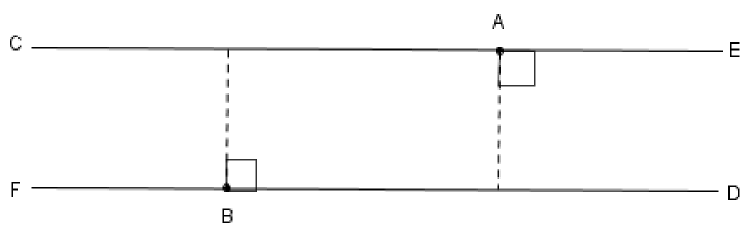
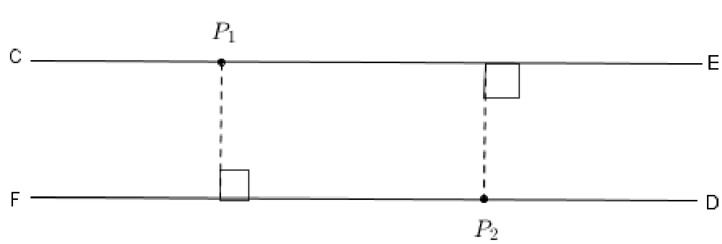


Figura 1

Pero lo que observamos fue que él tomó un punto en CE, A; otro en FD, B; por el punto A levantó la perpendicular a CE y por el B levantó la perpendicular a FD, y posteriormente demostró que dichas perpendiculares son iguales.



Al diriguir su demostración por ese camino, Contreras no está siguiendo formalmente el procedimiento que mencionó se utilizaría para demostrar la equidistancia entre dos rectas. Para que su demostración fuera admisible, Contreras debió haber mostrado algún argumento que justifique porqué este nuevo procedimiento es equivalente al anterior, es decir, justificar porqué para demostrar que dos rectas son equidistantes es lo mismo o demostrar que las perpendiculares bajadas (o “subidas”) desde dos puntos arbitrarios pertenecientes a una de las rectas a la otra, son iguales (**Figura 1**); o bien, demostrar que la perpendicular bajada desde un punto arbitrario de una de las rectas a la otra es igual a la perpendicular “subida” desde un punto arbitrario de esta última recta, a la primera:



El segundo “pero” que podemos hacerle a la demostración de Contreras, es que los puntos A y B, no son puntos arbitrarios de las rectas CE y FD, respectivamente. Son puntos muy específicos: las intersecciones de la recta secante con las las rectas CE y FD. Así, aunque el nuevo procedimiento seguido por Contreras sea válido, aun reulta indispensable que los puntos desde los cuales se levantan las perpendiculares, sean arbitrarios; pues esta equidistancia debe mantenerse en todos los puntos de las rectas.

A este respecto, probablemente el argumento que utiliza indirectamente para justificar porqué sólo basta que se demuestre la igualdad de dos perpendicuales (cualesquiera que estas sean) y no de todas es que al definir “línea recta” menciona:

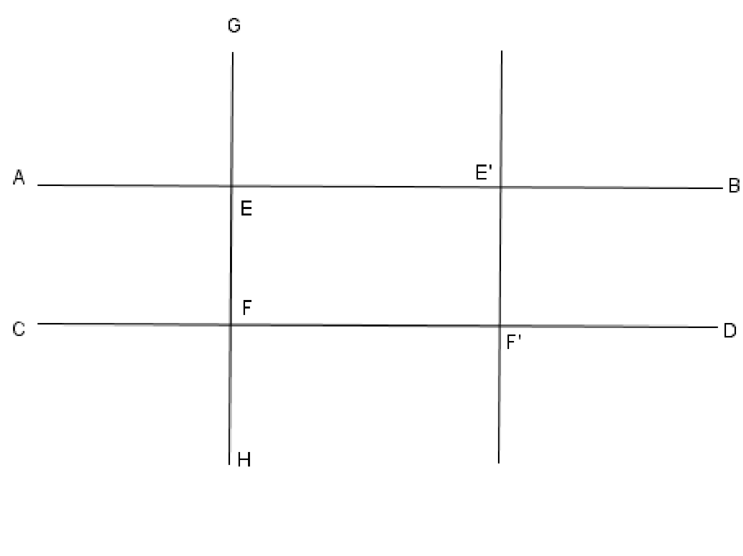
Dos puntos fijan la posición de una recta.

Véase el aparatado *2.1.3 De la línea recta.*

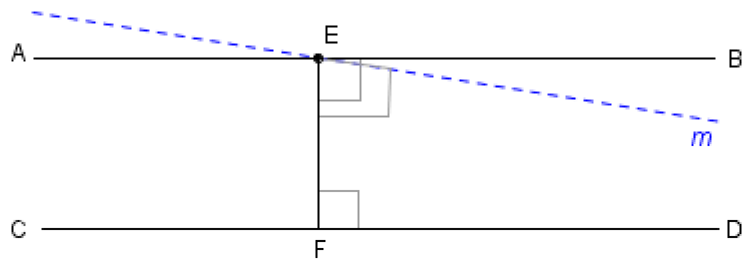
- Echeagaray

Este autor enuncia el quino postulado de Euclides inmediatamente después de dar la definición de rectas paralelas:

“Según la manera como hemos considerado las paralelas, podremos inferir sencillamente el siguiente
TEOREMA.— Por un punto no se puede trazar á una recta más de una paralela; pues si por el punto E, pudiéramos trazar á CD, además de AB otra paralela, resultaría, que por dicho punto E, pasarían dos perpendiculares á EF, lo que es imposible”.



Analicemos la demostración paso por paso:



Tenemos la recta CD, y un punto E que no se encuentra sobre la recta CD. Tracemos la recta AB que pasa por E y es paralela a CD (ésta recta existe, la construcción de ella se dio al inicio del apartado). Bajemos la perpendicular EF a la recta CD. Supongamos que existe otra recta *m* que pase por E y sea paralela a CD. Esto no puede ser porque por el punto E pasarían dos perpendiculares a EF, en contradicción con el Teorema 1.

Pero ¿por qué supone que *m* debería ser también perpendicular a EF? Si recordamos el apartado *2.1.6 De las paralelas*, Echeagaray agrega a su definición de paralelas:

"[…] una perpendicular […] á CD, […] también lo es á la línea AB; puesto que esta última línea, se encuentra en condiciones geométricas con CD, lo mismo que CD lo está con AB. (Téngase presente el ξ13.)"

Así que por esa razón, como *m* es paralela a CD entonces también lo es a AB. Pero la justificación del hecho de que una <u>recta perpendicular a una de dos paralelas es también perpendicular a la otra</u> los libros modernos la obtienen de manera "formal" utilizando el quinto postulado de Euclides. Y el argumento que brinda Echeagaray es *ξ13*:

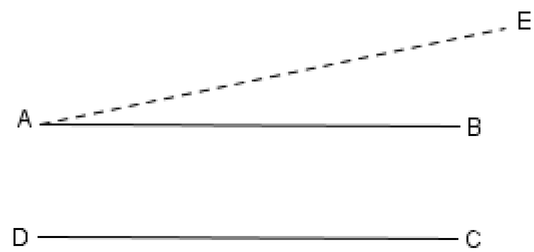
13. Dadas las anteriores definiciones, conviene recordar: *que el principio fundamental de la enseñanza moderna: es la intuición inmediata ó conocimiento de las cosas por los sentidos*, como lo propone Pestalozzi.

Conforme al principio anterior, que se le puede dar asiento en la geometría, no insistiremos en demostrar lo que es de evidencia notoria, lo que nos conduciría á nimiedades; tal sería, por ejemplo, demostrar que los ángulos opuestos al vértice son iguales, lo mismo que los rectos, etc., aun cuando estas proposiciones pudieran obtenerse como consecuencias ó corolarios de otras. Tal proceder no menoscaba, en nuestro concepto, el rigor de la ciencia; la ciencia no debe embrollar al espíritu; nos valemos del teorema para los casos en que el espíritu no vea clara la relación entre las premisas y las consecuencias. Pasma ver el empeño con que ciertos matemáticos demuestran proposiciones evidentes, clarísimas.

Es decir, para esa justificación Echeagaray apela al sentido común, con lo cual no proporciona una demostración formal del teorema-postulado. De cualquier forma, Echeagaray cae en el error de utilizar inconscientemente aquello que desea demostrar.

- Terrazas

El enunciado y "demostración" de Terrazas del quinto Postulado es:



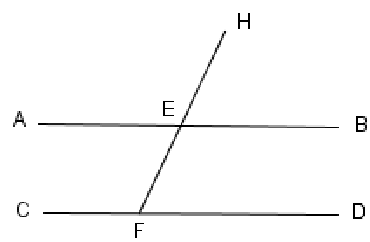
"Por un punto dado A no se puede tirar más de una paralela á la recta DC. Porque cualquiera otra recta, por ejemplo AE, tendrá respecto de la AB un movimiento angular; y en consecuencia respecto de la DC (25)."

Donde *"(25)"* alude a la definición que dio de rectas paralelas. De Terrazas no tenemos nada que comentar más que la poca formalidad de sus argumentos. Además de que no utiliza precisamente la definición de rectas paralelas (aquellas que infinitamente no se intersectan) sino la noción de "movimiento angular".

2.2.3 Un teorema sobre paralelas, Terrazas

El siguiente teorema no tiene nada de peculiar, es el teorema que dice “por un punto fuera de una recta sólo se puede bajar una perpendicular a dicha recta” (2). Éste teorema aparece en los libros modernos en el tema de “perpendicularidad”, el cual se presenta antes del de “paralelismo”, pues es uno de los dos teoremas esenciales que utilizan para desarrollar la teoría de rectas paralelas [el otro es “por un punto sobre una recta sólo se puede levantar una perpendicular a dicha recta” (1)]. Incluso Contreras y Echeagaray lo exponen en ese orden. Resulta entonces interesante que Terrazas del tema de “perpendicularidad” sólo obtenga el (1), y el (2) aparece en su apartado de “paralelismo”, obviamente utilizando nociones de rectas paralelas para su demostración.

Para la demostración Terrazas utiliza los siguientes teoremas:



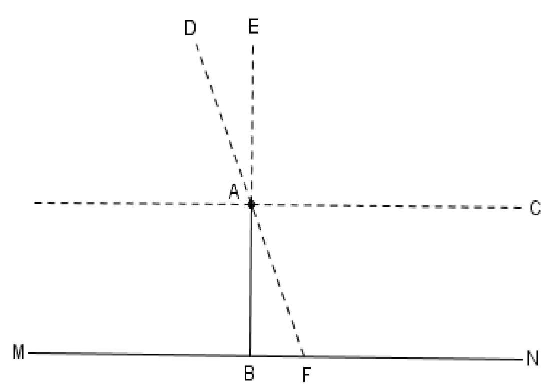
26. Teor. Los ángulos correspondientes HEB, HFD son iguales. Porque supuesto que las paralelas no tienen entre sí ningún grado de movimiento angular, es claro que el que tenga la recta HF respecto de la FD, debe ser el mismo que guarda respecto de la EB.

27. Teor. Cuando una línea es perpendicular á una de dos paralelas lo es también á la otra. Porque este es caso particular del teorema anterior en que uno de los ángulos correspondientes es recto y por consecuencia el otro.

No podríamos considerar el argumento que da Terrazas para probar el Teorema 26 como una demostración formal, ni como demostración de ningún tipo, pues prácticamente la justificación es que es “claro”.

El enunciado del teorema (1) y la demostración que propone Terrazas son los siguientes:

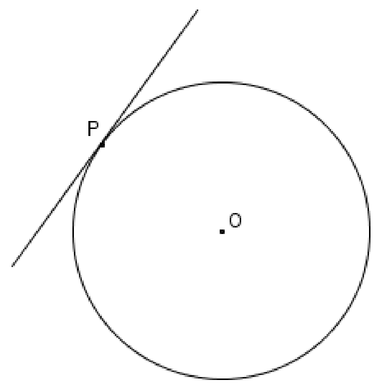
“Teor. Por un punto A no se puede bajar más de una perpendicular AB á una recta MN. Supongamos que hubiese otra perpendicular, DAF. Esta debería serlo también á la línea AC, paralela á la MN, (27); pero como por la misma razón la AB prolongada debe ser perpendicular á AC, se inferiría que esta línea tenía, levantadas en un punto, las dos perpendiculares AE, AD, lo cual es absurdo; luego no hay más perpendicular que la AB.”



2.2.4 Tangente a una circunferencia

En la mayoría de los libros, cuando se trata el tema del círculo o circunferencia, se exponen al inicio del capítulo las definiciones básicas concernientes a las rectas o trazos notables en la circunferencia, tales como la secante, el arco, la cuerda, etc. y entre ellas se menciona que:

Una recta que tiene un solo punto P común con la circunferencia se dice ***tangente*** *y al punto P se le llama punto de tangencia o punto de contacto.* (Baldor)



Lo que a continuación se mostrará es una especie de "justificación" por parte de Terrazas, de el por qué es posible hablar de una recta que sólo toque a la circunferencia en un solo punto. En otras palabras, justifica la existencia de la recta tangente.

Inicia primeramente con el siguiente teorema:

Teor. Tres puntos consecutivos de una circunferencia no pueden estar en línea recta.

Llamemos a b y c los tres puntos consecutivos y los que les siguen, también consecutivamente, d, e, f, g, h, &. Como es de evidencia que la circunferencia es una línea perfectamente regular, se infiere que lo que pase con tres puntos consecutivos, en un lugar, pasará en todos. Así pues, si a b c estuviesen en línea recta lo estarían b c d, c d f, d f h, &, es decir todos los de la circunferencia, lo cual es absurdo.

Y al finalizar agrega:

De lo anterior resulta que á tres puntos consecutivos debemos imaginarlos formando uno á manera de ángulo, siendo el de en medio más saliente, de lo cual, á su vez se deduce que, es posible trazar una recta que solo en un punto toque á una circunferencia. Esta línea se llama <u>tangente</u>.

2.1.5 De las perpendiculares y la recta tangente

Consideremos los siguientes dos teoremas:

Teorema 5: La perpendicular es la menor distancia de un punto a una recta.

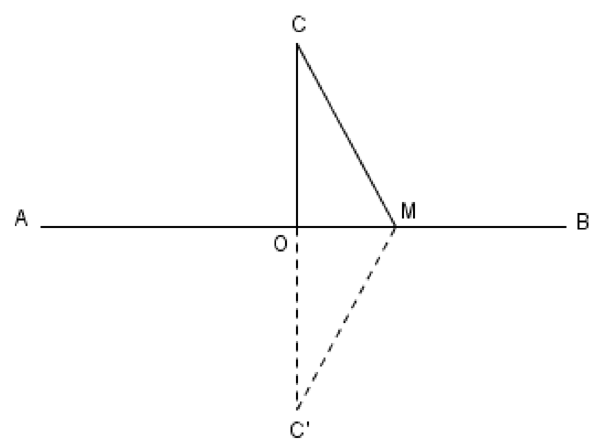
Teorema 6: El radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.

Para llegar a demostrar el Teorema 6, Contreras y Echeagaray demuestran primero el Teorema 5. Incluso Baldor sigue este orden. Y los tres demuestran dichos teoremas usando las mismas ideas. Lo interesante es que Terrazas sigue un orden inverso, logrando con ello demostraciones muy bonitas por lo visual que resultan, aunque eso sí, mucho menos rigurosas.

Para mayor contraste veamos primero la secuencia y las demostraciones que dieron

Echeagaray y Contreras:

Teorema 5.



Para demostrar que la menor distancia de un punto C a una recta AB, es la perpendicular CO bajada desde dicho punto, se demostrará que la perpendicular CO es más corta que cualquiera otra oblicua CM. Si reflejamos la figura COM con respecto a AB, tendremos que el punto C caerá en C' quedando C'O en prolongación de CO y CM tomará la posición C'M.

Con ello obtenemos que $CO + OC' < CM + MC'$ ………………….. (1)

Asumiendo como evidente que la línea recta es menor que la quebrada que termina en los mismos puntos. Si tomamos la mitad de la igualdad (1), resulta:

$$CO < CM$$

[En la demostración únicamente se hace uso del **Teorema 2** de la sección *2.1.5 De la perpendicularidad*, esto para justificar que C'O es prolongación de CO]. Al término de la demostración, ambos autores hacen la siguiente observación; citando a Echeagaray: *"En* *virtud de la propiedad demostrada, se toma para medir la distancia de un punto á una recta la perpendicular bajada del punto á la recta".*

Teorema 6.

La siguiente demostración fue la que dio Contreras, pero las propuestas por Echeagaray y Baldor siguen la misma idea.

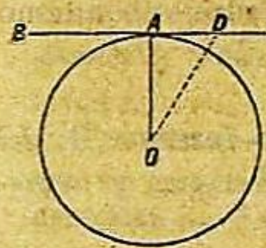


Figura 138.

Siendo B C tangente al círculo, no lo tocará más que en un solo punto A; luego si desde el centro tiramos varias rectas á la línea B C, cualquiera otra, como O D, que no sea el radio O A, deberá tener parte dentro y parte fuera de la circunferencia, por lo que A O < O D; y como (398) la perpendicular es la menor distancia de un punto á una recta, se infiere que el radio O A será perpendicular á la tangente.

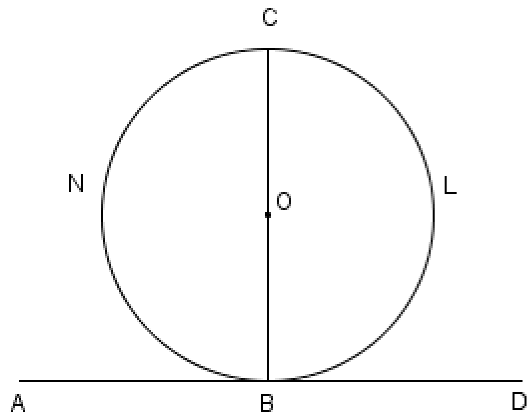
Veamos ahora la secuencia que siguió

Terrazas

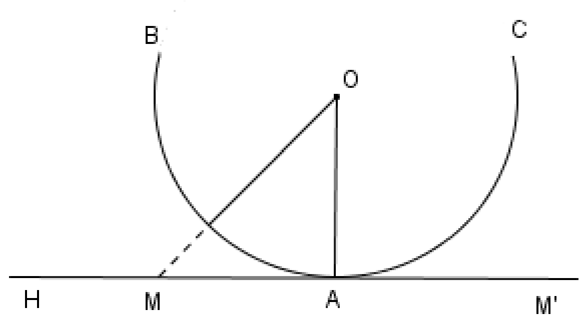
El Teorema 6 enunciado y demostrado por Terrazas es el siguiente:

"Teor. La tangente forma con el radio, ó si se quiere con el diámetro llevado al punto de contacto, dos ángulos rectos.

Sea B el punto que en la circunferencia CNBL debe ser el único que toque la tangente. Como los dos puntos de la circunferencia que por abstracción consideramos como consecutivos debemos imaginarlos infinitamente próximos, resulta que una vez dada la tangente no es posible sufra esta ningún movimiento hacia la izquierda sin dejar de tocar únicamente el punto B; y lo mismo si el movimiento lo sufre á la derecha; luego la tangente está colocada en situación simétrica respecto del diámetro CD que lo divide en dos partes iguales, de cuya simetría resultan ser rectos los ángulos en B."



Así, la demostración y el enunciado del Teorema 5 son los siguientes:



"La perpendicular OA bajada de un punto O, á una recta HM', es menor que cualquiera oblícua OM. Consideremos una circunferencia trazada con el radio OA. La recta HM' debe serle tangente en A; luego todos los otros puntos de la línea tales como M estarán fuera de la circunferencia BAC y por consecuencia á mayor distancia de O que A, que solo dista un radio".

Al final agrega:

"Dedúcese de lo anterior que la perpendicular, por ser la más corta línea que se puede trazar de un punto á una recta, es la <u>medida</u> de la distancia de ambas."

En principio podríamos pensar que Terrazas debió entonces necesitar implícitamente el Teorema 5, o teoremas que se derivaron de él, pero al analizar su demostración observamos que únicamente hizo uso de la definición de recta perpendicular (ver apartado *2.1.5 De la perpendicularidad*) y de la propiedad de que el diámetro divide en dos a la circunferencia (ver la segunda de *3.3 Algunas preguntas interesantes del cuestionario de 1867*), en la cual no utiliza ningún teorema para verificarla, sino que da como "demostración" un argumento intuitivo. Con todo, observamos que la demostración de Terrazas no es lo bastante rigurosa para convencernos de su validez. Aun así, dicho teorema podemos demostrarlo utilizando 3 teoremas de Echeagaray, que no involucran al Teorema 5 (no se derivan de éste):

Los teoremas que ocupamos son los siguientes:

Teorema 2*: Si dos ángulos suman dos rectos y tienen un mismo vértice y un lado común, los otros lados están en línea recta.* (Este para justificar el Teorema 3, ver el apartado *2.1.5 De la perpendicularidad*).

Teorema 3: *Desde un punto tomado fuera de una recta, no se puede bajar más de una perpendicular.* (Ver el apartado *2.1.5 De la perpendicularidad*).

Y al que llamaremos ***Teorema 4***, el cual nos da una de las condiciones de igualdad de triángulos (LAL). El enunciando y demostración de Echeagaray es la siguiente:

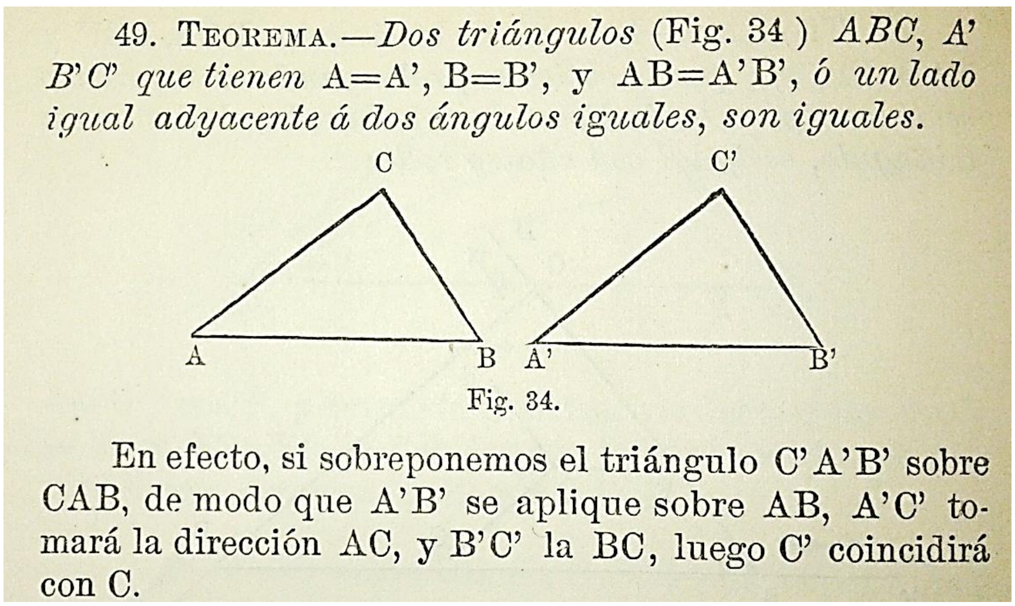
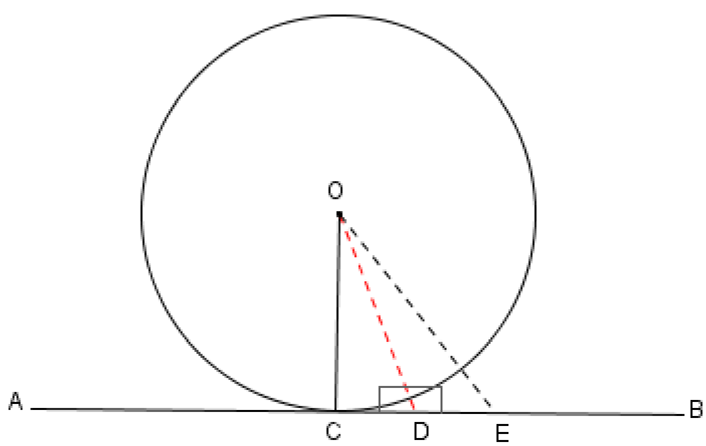

49. TEOREMA.—*Dos triángulos* (Fig. 34) *ABC, A' B'C' que tienen* A=A', B=B', y AB=A'B', *ó un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, son iguales.*

Fig. 34.

En efecto, si sobreponemos el triángulo C'A'B' sobre CAB, de modo que A'B' se aplique sobre AB, A'C' tomará la dirección AC, y B'C' la BC, luego C' coincidirá con C.

Ahora bien, con lo anterior, la demostración del Teorema 6 sería la siguiente:

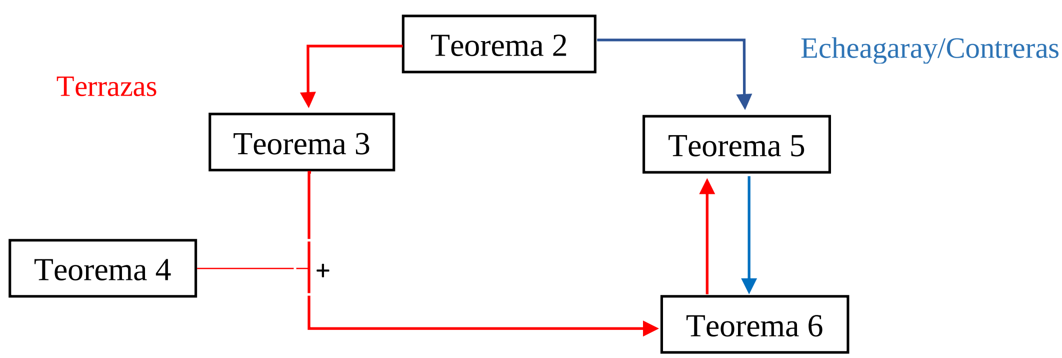


Sea AB tangente a la circunferencia con centro en O, en el punto C. Vamos a demostrar que $AB \perp OC$

Supongamos que AB no es perpendicular a OC. En virtud del Teorema 3, sea entonces OD la perpendicular bajada desde O hasta AB. Y sea E un punto en AB al otro lado de OD, opuesto a C, tal que CD=DE. Tenemos que $\measuredangle CDO$, $\measuredangle EDO$ son rectos y por tanto iguales. Y como OD es común, entonces por el Teorema 4 se tiene que $\triangle CDO \equiv \triangle EDO$. Por lo tanto OC=OE, y como OC es un radio de la circunferencia, entonces OE también lo es y E está sobre la circunferencia. Luego AB intersecta a la circunferencia dos veces, lo cual es imposible, pues AB es tangente a la circunferencia.

$$\therefore AB \perp OC$$

Para explicar mejor lo que se ha hecho se muestra el siguiente esquema:

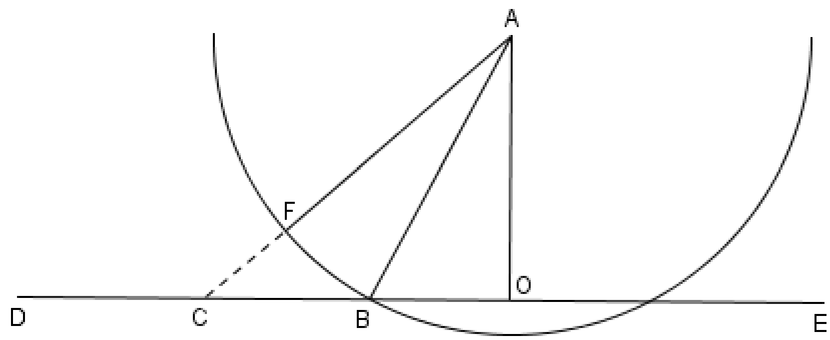


Con lo anterior se da una muestra más de que en las matemáticas, las demostraciones a teoremas o proposiciones no son únicas, puede haber diversos caminos para llegar a ellas. Este ejemplo resulta interesante porque Terrazas se salió del camino convencional para demostrar ciertos teoremas, y aunque sus argumentos no podrían considerarse estrictamente rigurosos, se pudo llegar a demostrarlos de una manera más formal (siguiendo la teoría desarrollada por Echeagaray), haciendo válido el camino que siguió Terrazas (si consideramos válido el que sigue Echeagaray y Contreras).

Seguramente basándose en el hecho de que el radio tirado al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente, Terrazas usa entonces circunferencias para demostrar algunos teoremas relacionados con perpendicularidad, por ejemplo el siguiente:

Teorema: Si desde un punto A se bajan a la recta DE varias oblicuas AB, AC, etc., la que se separe más del pie de la perpendicular AO, será la mayor.

Supongamos que la AC está más separada que AB. Trazamos la circunferencia con centro en A y radio AB. […] *"los puntos de ésta van subiendo mientras los de la línea OC van bajando, luego la circunferencia la cortará en un cierto punto F, y la OC será mayor que el radio OF y en consecuencia mayor que su igual OB."*



Para su demostración Contreras y Echegaray hacen uso del hecho, que ambos asumen como evidente, de que la <u>línea recta es menor que la quebrada que termina en los mismos puntos</u>. La idea de su demostración propuesta es la siguiente:

Reflejando la figura AOC con respecto a la recta DE, el punto A irá a dar a A', resultando la línea recta AA' y AO=OA', AB=BA' y AC=C'A. Prolonguemos el segmento AB hasta que intersecte al CA'. Sea F este punto de intersección.

Tenemos entonces que

$$AB + BF < AC + CF \text{ y}$$

$$A'B < A'F + BF$$

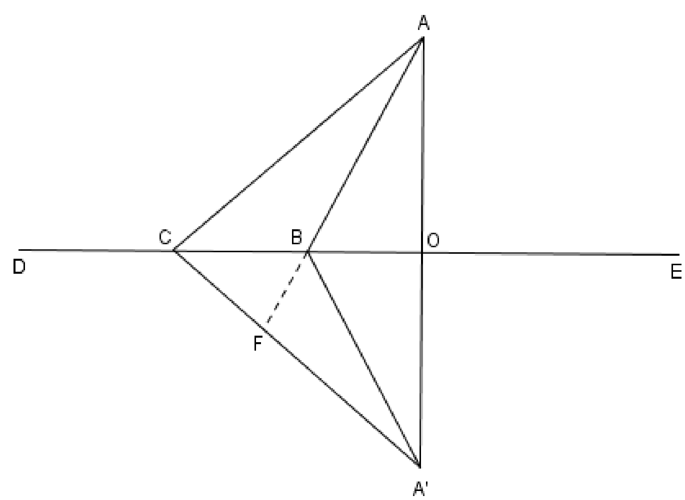
Sumando ambas igualdades tenemos

$$AB + BF + A'B < AC + CF + A'F + BF$$

$$AB + A'B < AC + CF + A'F$$

$$AB + BA' < AC + (CF + FA')$$
$$= AC + CA'$$

$$\therefore AB + BA' < AC + CA'$$



Observamos que aunque la demostración de Terrazas sea más visual y agradable es mucho menos rigurosa que la de Contreras y Echeagaray.

2.2.6 La poca formalidad en las demostraciones de Terrazas o los ángulos internos de un triángulo.

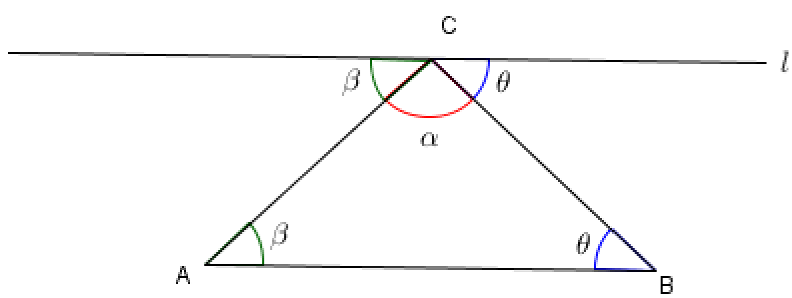
La poca rigurosidad en las demostraciones de Terrazas, en donde se apoya más del sentido común que de teoremas previos, hace que muchas de éstas sean bastante peculiares. Como muestra de ello, mostramos las siguientes dos demostraciones.

La primera es la que dio al conocido

Teorema: Los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

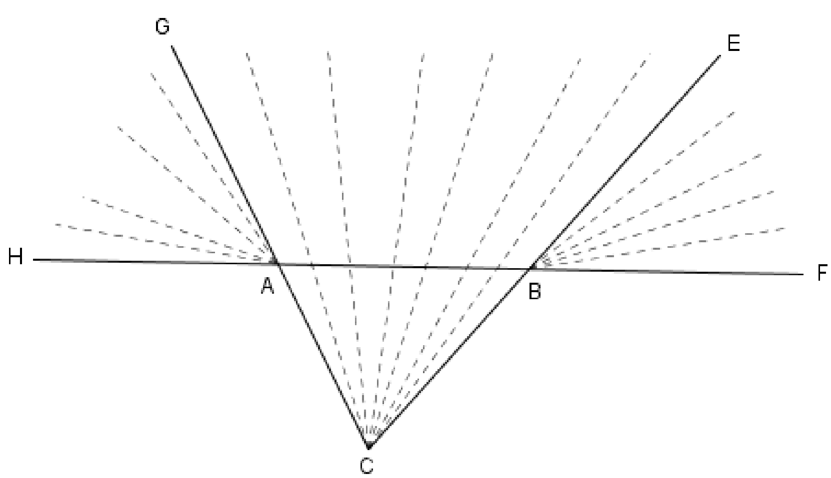
La demostración más moderna hace uso de los ángulos alternos internos, y es bastante simple:

Sea el triángulo ABC, y sea $l \parallel AB$. Se tiene entonces que:



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

La demostración que da Terrazas es la siguiente:



"Concibamos prolongados según BF, BE, AG y AH los lados del triángulo y que la línea BF emprende un movimiento alrededor de B tomando las posiciones sucesivas que con puntos están marcadas; al llegar á confundirse con la BE, forman un ángulo *__igual__* *al ABC del triángulo* [ángulos opuestos al vértice]. *Ahora, supongamos que en esta situación de la línea,*

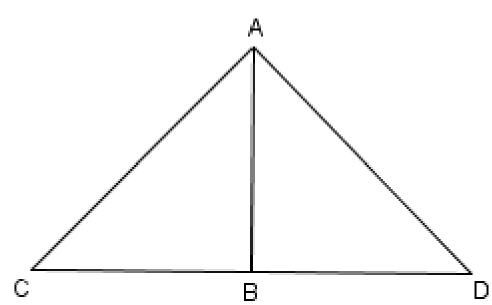
cambia á C el centro de movimiento, y que la CE toma varias direcciones hasta llegar á aplicarse á la CG; entonces ha recorrido un ángulo igual al en C del triángulo. Que cambie á A el centro de movimiento y que la recta lo prosiga, al juntarse con la AH ha recorrido un espacio angular igual al ángulo BAC del triángulo. Pero en todo este movimiento la recta no ha hecho mas que dar una media vuelta completa; luego ha recorrido el espacio angular de dos rectos."

En el apartado *2.1.5 De la perpendicularidad* se menciona la definición de ángulo que dio Terrazas, a saber: "*el grado de movimiento de una línea respecto de otra á que toca por un punto*". Terrazas concluye que la recta BF "*no ha hecho mas que dar una media vuelta completa"*, es decir, que ha formado un ángulo de 180° (dos ángulos rectos) con respecto a la HF a quien toca en el punto B. Así que estrictamente esta conclusión es incorrecta pues se cambió en dos ocasiones el centro de movimiento B, se cambió al punto A y C, y más aún, cuando se cambia al punto C, ya ni siquiera se está hablando de un ángulo con respecto a la recta HF.

Para muchos teoremas, las demostraciones que propone Terrazas son bastante intuitivas, tanto que no podrían considerarse demostraciones bajo ningún concepto. Como ejemplo de ello está el siguiente teorema, enunciado y demostrado por Terrazas; queda ya para el lector interesado buscar la demostración formal de éste:

"Teor. Dos oblícuas AC, AD que se separan igualmente del pié de la perpendicular AB, son iguales.

Porque si suponemos dos espectadores de la figura, uno delante y otro detrás, este la ve lo mismo y en la misma situación que el otro, luego es simétrica; luego AC=AD".

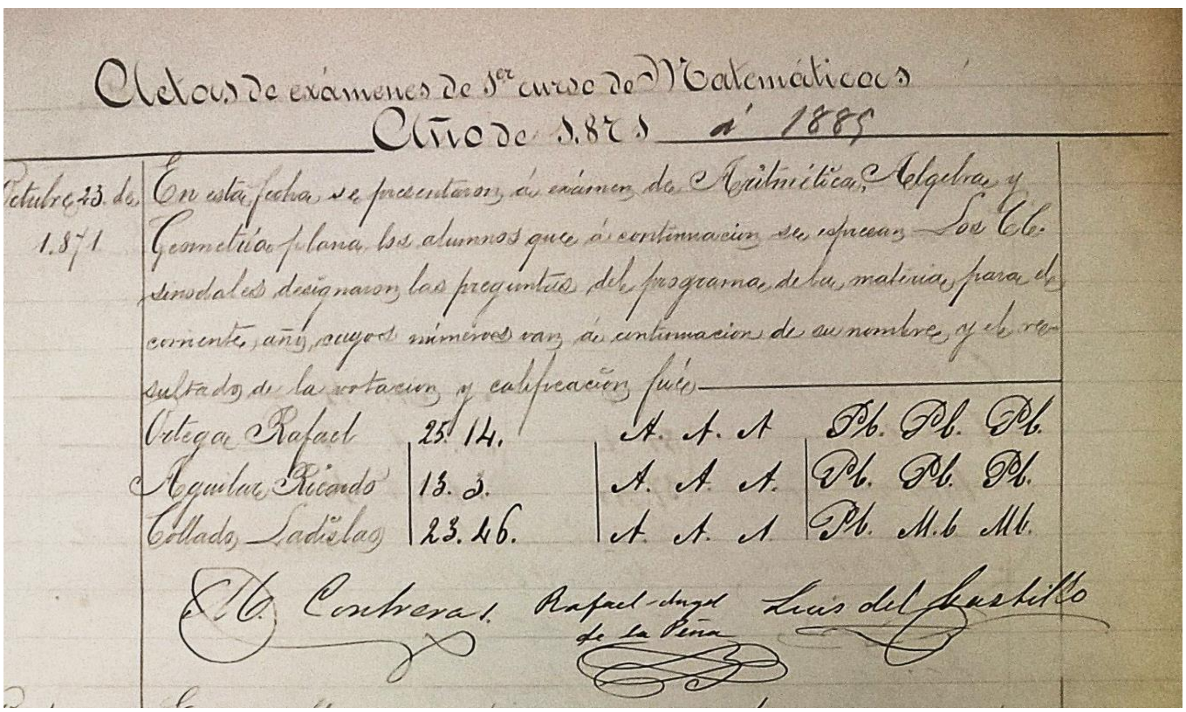


Capítulo 3. Los exámenes

3.1 Introducción

En la ENP, al fin de cada año, los alumnos presentaban examen público sobre las materias correspondientes a sus respectivos cursos y si no eran aprobados no podían inscribirse en el curso siguiente. Los exámenes comenzaban el 15 de octubre y se hacían por un jurado compuesto por tres profesores nacionales (no necesariamente de la misma escuela) que tuvieran aptitud en el ramo a evaluar; no se incluía al profesor de la materia. La calificación expresaba el grado de instrucción del alumno; y se señalaba con las letras M, B, MB y PB, que significaba: *contestó Medianamente*, *Bien*, *Muy Bien* y *Perfectamente Bien* (las calificaciones supremas no debían darse a la ligera).

A continuación se muestra parte de la primera página *del Libro de exámenes de 1er año de Matemáticas, 1871*, de la ENP. En éste libros se registraban las calificaciones de los alumnos obtenidas en sus exámenes.


Actas de exámenes de 1er curso de Matemáticas
Año de 1871 á 1885

Octubre 23 de 1871

En esta fecha se presentaron á exámen de Aritmética, Algebra y Geometría plana los alumnos que á continuacion se expresan. Los CC. sinodales designaron las preguntas del programa de la materia para el corriente año, cuyos números van á continuacion de su nombre, y el resultado de la votacion y calificacion fué:

Ortega Rafael	25. 14.	A. A. A	Pb. Pb. Pb.
Aguilar Ricardo	13. 3.	A. A. A.	Pb. Pb. Pb.
Collado Ladislao	23. 46.	A. A. A	Pb. M.b Mb.

J. M. Contreras. Rafael Ángel de la Peña Luis del Castillo

Se observa la firma de Contreras, declarándonos que fue sinodal en los exámenes de matemáticas del 23 de octubre de 1871.

Octubre 23 de 1871	*En esta fecha se presentaron á exámen de Aritmética, Álgebra y Geometría plana los alumnos que a continuación se expresan. Los sinodales designaron las preguntas del programa de la materia para el corriente año, cuyos números van a continuación de su nombre y el resultado de la votación y calificación fué*			
	Ortega Rafael			
	Aguilar Ricardo			
	Collado Ladislao			

Antes del período de exámenes, los profesores de las diversas asignaturas hacían un análisis de las obras que servían de texto para cada curso, procurando no dejar pasar ningún punto importante de la doctrina, y formulaban cuestiones relativas a cada uno de ellos, indicaban también el párrafo o la página del autor respectivo en que se contesta y trata dicha cuestión. Así, formaban una especia de “guía” de todas las materias tratadas en cada curso y del lugar donde el alumno podía hacer el estudio de ellas. Esta guía se repartía impresa a los alumnos o se publicaba en cartelones fijados en el establecimiento, para que todos tuvieran conocimiento de ella y pudieran preparar sus respectivos exámenes conforme a las preguntas contenidas en aquellas.

De estas guías de preguntas se formaban después grupos de cuatro o más preguntas. A cada uno de estos grupos se ponían un número de orden, formando con todos ellos otro catálogo para uso de los sinodales en el momento de los exámenes. Cuando el examen debería presentarse, el alumno sacaba por suerte un número, y a las preguntas reunidas bajo dicho número eran las que tenía que responder. Los alumnos de asistencia regular sacaban y daban respuesta a tres fichas de la asignatura correspondiente; mientras que aquellos que habían dejado de asistir a más de la tercera parte de las clases, sacaban seis cuestiones; y los jóvenes no inscritos o que habían dejado de asistir a más de la mitad de las clases, sacaban nueve.

Las cuestiones se iban perfeccionando, tanto en la redacción como en las materias que abarcaban; para ese fin se recomendaba a los jurados del examen que fueran anotando, en el acto de verificarlo, las cuestiones que les parecieran defectuosas, por ser oscuras o por abarcar demasiada o muy poca materia, con objeto de hacer las correcciones necesarias en ellas.

De esta forma se aplicaban los exámenes en la ENP en el último tercio del siglo XIX.

Aplicaciones y resultados de los exámenes de Matemáticas

Hay que señalar que la asistencia media a las cátedras era siempre menor al número de inscritos en cada curso, y de los alumnos que asistían con regularidad a clases, no todos se presentaban a examen. Como al inicio se señaló, los actos de examen eran públicos, es decir que cualquier persona podía entrar a presenciarlos, aunque usualmente sólo asistían a ellos los alumnos quienes serían examinados y algunos de sus compañeros. El escenario de estos exámenes era el siguiente: al frente se encontraba el jurado de tres profesores tras una mesa; cerca de ella se hallaba un pizarrón con su superficie visible para el jurado y el público; sobre la mesa había gises, etc (instrumentos que pudiera ocupar el alumno); y el alumno en turno se encontraba en un banquillo ante el jurado. Con tal imagen es de suponer que los alumnos que no se animaban a presentar examen eran aquellos que se sentían inseguros en el dominio de los temas vistos en el curso, y los alumnos que pertenecían al Primer año de Matemáticas, al no estar acostumbrados a ser examinados por un jurado.

Pasaremos ahora a hablar sobre los resultados que se obtuvieron en los exámenes correspondientes a los cursos de Matemáticas en ciertos años escolares. Pero antes conviene tener en mente que a partir de 1870 hasta 1897, al Primer curso de Matemáticas lo acompañaba un primer curso de Francés; en tanto que el Segundo curso de Matemáticas se estudiaba junto con el segundo curso de Francés y el primero de Inglés. Y que de estos cursos de Matemáticas, usualmente se abrían seis grupos de primer año y dos o tres del segundo año.

En el año escolar de 1872, la asistencia mensual media en los grupos de Primer año de Matemáticas fue de 174 y en los de Segundo año de Matemáticas, 99. De Primero se examinaron 105, de los cuales aprobaron 69 y reprobaron 36 (34%); y se Segundo se examinaron 65, aprobaron 52 y reprobaron 39 (42%).

Recordemos que en los años de 1870 a 1878, en el Primer año de Matemáticas se cursaba Geometría plana, y en el Segundo año, Geometría en el espacio y general. Observamos que el 40% de los que asistían regularmente a clases de Primer año de Matemáticas no se presentó a examen; y que en el Segundo año se dio un alto índice de reprobación (esto podría deberse a que el curso incluía también Cálculo infinitesimal, cuyo estudio seguramente resultaba muy complicado para los alumnos).

En el año escolar de 1877, la asistencia media en los grupos de primer curso de Matemáticas fue de 209 y en el de Segundo año de Matemáticas, 32. [Téngase presente que en los años 1874-1876 los futuros abogados, médicos y farmacéuticos no estaban obligados a tomar este curso]. De Primero de Matemáticas se examinaron 145 alumnos; de los cuales aprobaron 109 y reprobaron 36 (24.8%); y se Segundo se examinaron 24, de los cuales aprobaron 22 y reprobaron 2 (8.3%). Observamos que ahora el Segundo curso de Matemáticas tuvo un bajo índice de reprobación, quizá debido a que ahora al curso asistían relativamente pocos alumnos, causando que el aprovechamiento de ellos y la eficiencia del profesor fuera mayor.

Para el año escolar de 1878, la asistencia media en los grupos de Primer año de Matemáticas fue de 178 y en los de Segundo año, 24. De Primero de Matemáticas se examinaron 179, de los cuales aprobaron 144 y reprobaron 35 (19.6%); de Segundo, se examinaron 17; aprobaron 15 y reprobaron 2 (11.8%).

Recordemos que a partir del año escolar de 1879, Geometría plana y Geometría en el espacio se estudiaban ambas en el Segundo año de Matemáticas.

En año escolar de 1879, de Segundo de Matemáticas se examinaron 67, aprobaron 62 y reprobaron 5 (7.5%).

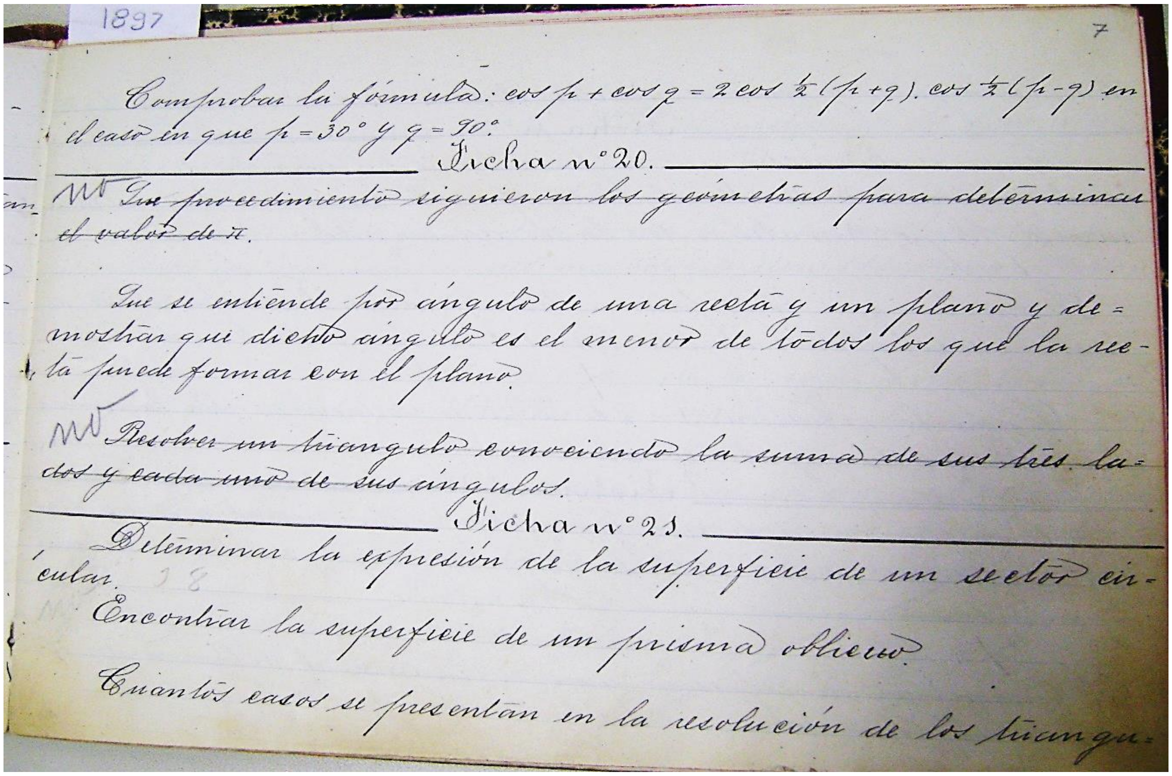
Y ya para terminar, en el año escolar de 1889, la asistencia media en el Segundo año de Matemáticas fue de 118, se examinaron 107, aprobaron 90 y reprobaron 17 (15.9%).

Con todo lo anterior, podemos comentar que los porcentajes de reprobación estuvieron dentro de los intervalos "normales". Que los grupos eran de 30 alumnos, aproximadamente. Y que las materias que conformaban el primer y segundo año, eran relativamente pocas, considerando que en la los planes actuales de estudio de las preparatorias, por ejemplo la Escuela de Bachilleres (Plantel Sur), UAQ, se cursan 7 materias al semestre, en total 14 materias al año, mientras que al año en la ENP se cursaban la mitad o menos de ese número. (Ver planes de estudio, Capítulo 1).

3.2 Exámenes de Geometría

El librillo de preguntas para el examen de las asignaturas de Matemáticas más antiguo que pudimos encontrar en el Fondo Reservado de la Biblioteca Nacional, fue precisamente aquél que menciona Núñez, el *Cuestionario para los exámenes de Segundo curso de Matemáticas, 1897.* Este librillo contiene preguntas correspondientes a temas de Geometría y Trigonometría. Tiene 81 grupos de preguntas o cuestiones a resolver. Cada grupo de cuestiones es denominado ficha, y van enumeradas. Se tienen así, la ficha número 1, la número 2, etc., hasta la número 81. Las fichas cuentan con tres cuestiones, aunque algunas incluyen cuatro. Algunas de las cuestiones aparecen tachadas y con la palabra "no" anotada; lo más seguro es que los sinodales las descartaron para futuros exámenes. Las cuestiones de cada ficha incluían temas diversos de los estudiados en el curso anual; y en cada una se abordaban temas tanto de Geometría como de Trigonometría. Las cuestiones sobre temas de Geometría venían en forma de preguntas, demostraciones o problemas de construcción.

Veamos algunos ejemplos de estas fichas:



1897

7

Comprobar la fórmula: $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) . \cos \frac{1}{2}(p-q)$ en el caso en que $p = 30°$ y $q = 90°$.

Ficha nº 20.

NO ~~Que procedimiento siguieron los geómetras para determinar el valor de π.~~

Que se entiende por ángulo de una recta y un plano y demostrar que dicho ángulo es el menor de todos los que la recta puede formar con el plano.

NO ~~Resolver un triangulo conociendo la suma de sus tres lados y cada uno de sus ángulos.~~

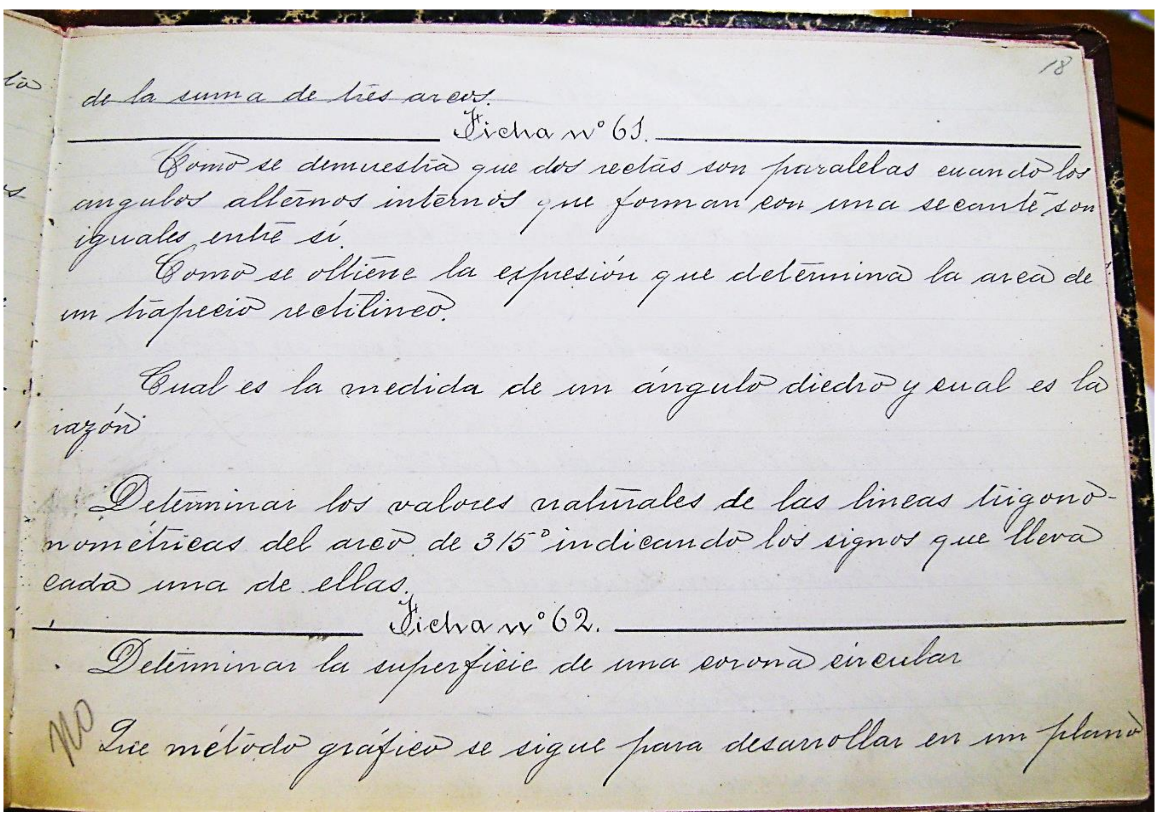
Ficha nº 21.

Determinar la expresión de la superficie de un sector circular.

Encontrar la superficie de un prisma oblicuo.

Cuantos casos se presentan en la resolución de los triangu-

Se observan en la Ficha 20 dos de sus ejercicios tachados y con la palabra NO.



18

de la suma de tres arcos.

Ficha nº 61.

Como se demuestra que dos rectas son paralelas cuando los ángulos alternos internos que forman con una secante son iguales entre sí.

Como se obtiene la expresión que determina la area de un trapecio rectilineo.

Cual es la medida de un ángulo diedro y cual es la razón

Determinar los valores naturales de las lineas trigonométricas del arco de 315° indicando los signos que lleva cada una de ellas.

Ficha nº 62.

Determinar la superficie de una corona circular

NO Que método gráfico se sigue para desarrollar en un plano

La Ficha 61 es un ejemplo de que había también fichas con 4 cuestiones.

A continuación se muestran por ficha solamente las cuestiones que abarcan los temas de Geometría, como se verá, abarcaban tanto de Geometría plana como del espacio:

CUESTIONARIO PARA LOS EXÁMENES DEL SEGUNDO CURSO DE MATEMÁTICAS

1897

Ficha 1.

1. ¿Qué se entiende por triángulos semejantes?
2. ¿Cuáles son los casos principales de semejanza y cómo se demuestra que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales?
3. ¿Qué valor tiene la suma de los ángulos diedros de un triedro y cuál es la razón?

Ficha 2.

1. Deducir la fórmula que sirve para determinar la superficie de un trapecio circular.
2. Demostrar que si una recta es perpendicular a dos en el espacio, será igualmente perpendicular al plano que pase por ellas.

Ficha 3.

1. ¿Qué son figuras equivalentes y cómo se demuestra que el área de un polígono construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de las áreas de los polígonos semejantes construidos sobre cada uno de los catetos?
2. ¿Qué cantidad de líquido llenará a una esfera de $0^m, 3$ de radio?

Ficha 4.

1. ¿Cuál es valor numérico de la proyección de uno de los lados de un triángulo acutángulo, sabiendo que $a = \sqrt{4100}, b = 40^m, c = 50^m$?
2. Encontrar la longitud de la recta, tirada a igual distancia de las bases de un trapecio.
3. ¿Qué valor se puede asignar a la suma de los ángulos planos de un triedro y cuál es la razón?

Ficha 5.

1. Determinar la superficie del cuadrado y del hexágono inscritos a un círculo cuyo radio sea $R = \sqrt{2}$.
2. Determinar la expresión de la superficie de revolución que engendra una recta girando alrededor de un eje, en el caso de que ambas líneas no tengan ningún punto común de intersección, ni sean paralelas.

Ficha 6.

1. Qué géneros de demostración más comunes se emplean en el estudio de la geometría y cuáles son los procedimientos más comunes para resolver los problemas aplicando el método analítico al de tirar una tangente común a dos círculos.
2. Encontrar la expresión de la superficie de una esfera.
3. Expresión de la superficie de un triángulo en función de sus tres lados.

Ficha 7.

1. En qué razón están las áreas de dos polígonos semejantes y porqué razón.
2. <u>Cómo se demuestra que todo prisma oblicuo puede ser equivalente a uno recto, señalando las condiciones de equivalencia.</u> (?)

Ficha 8.

1. <u>Determinar el perímetro del polígono regular de 32 lados inscrito a un círculo, descrito con un radio igual a la unidad.</u>
2. Cómo se demuestra que una de las caras de un ángulo triedro es menor que la suma de las otras dos.

Ficha 9.

1. Encontrar la expresión de la superficie del círculo aplicándola al caso en que $\mu = 1, \mu = 10, \mu = 100$.
2. Qué relación numérica existe entre las superficies y los volúmenes de dos conos semejantes.

Ficha 10.

1. Qué medida tiene el ángulo formado por dos cuerdas que cortan en un punto interior de un círculo.
2. Encontrar el volumen de un vaso cónico siendo $\mu = 8^m$ y la altura $h = 0^m,5$ expresando el resultado en litros.
3. Demostrar los principios que sirven para resolver los triángulos rectángulos.

Ficha 11.

1. Encontrar la expresión de la superficie de un sector circular.
2. Demostrar las propiedades de los ángulos triedros suplementarios.

Ficha 12.

1. Cómo se demuestra que el valor numérico del cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los valores numéricos de los cuadrados de los catetos.
2. Determinar la superficie de un prisma oblicuo derivando en seguida la del prisma recto.

Ficha 13.

1. Encontrar una cuarta proporcional a tres líneas dadas.
2. Cuál es la expresión del volumen engendrado por la revolución de un triángulo oblicuángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados.

Ficha 14.

1. Qué teoremas se verifican cuando se traza una recta paralela a la base de un triángulo por un punto situado sobre uno de sus lados, demostrando cada uno de estos teoremas.
2. Qué se entiende por sólidos regulares, cuántos existen en la naturaleza y cómo se determina el número de aristas y ángulos (?) sólidos del dodecaedro pentagonal.

Ficha 15.

1. Cuál es la superficie de un segmento circular en el supuesto que $A = 90°$ y $\pi = \frac{22}{7}$.
2. Cómo se demuestra que los volúmenes de dos paralelepípedos son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas.

Ficha 16.

1. Cómo se demuestra que las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual, son proporcionales a los productos de los lados que forman este ángulo.
2. Qué teoremas se verifican si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base (demostrando que las áreas de las secciones paralelas que se engendran son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice).

Ficha 17.

1. <u>Transformar un polígono cualquiera en otro equivalente que tenga un lado menos.</u>
2. Determinar la expresión de la superficie de un huso esférico en función del diámetro y en función del radio.

Ficha 18.

1. Mencionar los casos de igualdad de triángulos, demostrando uno de éstos.
2. Determinar la superficie de revolución que engendra una recta que gira alrededor de su eje, cuando la línea no tiene ningún punto común de intersección con el eje.

Ficha 19.

1. Cómo se demuestra que las áreas de dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.
2. Cómo se traza una perpendicular a una recta situada en un plano, por un punto tomado fuera del plano.

Ficha 20.

1. Qué procedimiento siguieron los geómetras para determinar el valor de π.
2. Qué se entiende por ángulo de una recta y un plano y demostrar que dicho ángulo es el menor de todos los que la recta puede formar con el plano.

Ficha 21.

1. Determinar la expresión de la superficie de un sector circular.
2. Encontrar la superficie de un prisma oblicuo.

Ficha 22.

1. Cómo se demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo cualquiera, divide al lado opuesto en segmentos directamente proporcionales a los lados del triángulo.
2. Demostrar que todo prisma triangular de bases paralelas se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes entre sí.

Ficha 23.

1. Construir una tercera y cuarta proporcional a dos y tres líneas dadas, marcando la diferencia que existen entre ambas líneas.
2. Encontrar la expresión que determina el volumen del segmento esférico de una base.

Ficha 24.

1. Demostrar que el diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales, usando del método de demostración llamado por reducción al absurdo.
2. Determinar el valor numérico de la superficie total de un cono con los datos siguientes: $g = \sqrt{2}$ y $r = 1$.

Ficha 25.

1. Rectificar el arco de 14°-15´ sabiendo que $r = 2$ y $\pi = \frac{22}{7}$.
2. Determinar el volumen de un sector esférico y el de una esfera.

Ficha 26.

1. Demostrar que dos polígonos semejantes se pueden siempre descomponer en un número igual de triángulos semejantes.
2. Descripción del octaedro regular, determinando el número de aristas y ángulos sólidos que le corresponden.

Ficha 27.

1. Mencionar los casos de paralelismo de dos rectas y demostrar que dos rectas son paralelas cuando los ángulos internos del mismo lado son suplementarios.
2. Qué relación existe entre las áreas de dos poliedros semejantes y cómo se determina esta relación.

Ficha 28.

1. Qué medida tiene el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan en un punto interno de un círculo y cuál es la razón. (*)
2. Encontrar las expresiones que determinan la superficie y el volumen de un cono recto.

Ficha 29.

1. Cómo se demuestra que dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.
2. Cómo se demuestra que dos paralelepípedos de igual base e igual altura son equivalentes.
3. <u>Calcular la superficie de un trapecio en función de sus cuatro lados.</u>

Ficha 30.

1. <u>Construir sobre una recta dada, un segmento de círculo capaz (?) de un ángulo dado.</u>
2. Encontrar la expresión del volumen que engendra un triángulo cuando gira alrededor de un eje, en el caso que la base del triángulo sea paralela a este eje de revolución.

Ficha 31.

1. Demostrar que las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus lados homólogos.
2. Cómo se demuestra que si un plano es perpendicular a una de dos paralelas, será igualmente perpendicular a la otra.

Ficha 32.

1. Trazar una tangente a un círculo por un punto tomado fuera de la curva (?).
2. Demostrar que los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales a los cubos de sus líneas homólogas.

Ficha 33.

1. Procedimiento gráfico para dividir una línea en 5 partes iguales.
2. Encontrar la expresión que determina el volumen de una pirámide regular.

Ficha 34.

1. Cómo se demuestra que dos rectas situadas en un plano quedan cortadas en partes proporcionales por tres paralelas.
2. Expresión del volumen de un sector esférico.

Ficha 35.

1. Cómo se demuestra que π es mayor que 3 y menor que 4.
2. Demostrar que los ángulos rectilíneos que resultan de cortar un ángulo diedro por dos planos paralelos son iguales.

Ficha 36.

1. Demostrar que la superficie del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.
2. Qué relación existe entre las áreas de dos poliedros semejantes y cómo se demuestra esta relación.

Ficha 37.

1. Demostrar que si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura será un paralelogramo.
2. Encontrar la expresión que determina el volumen de una curva esférica.

Ficha 38.

1. Cuál es la medida del ángulo formado por dos secantes, y cuál es la razón.

Ficha 39.

1. Trazar una tangente común a dos círculos haciendo uso del método sintético.
2. Cómo se demuestra que la pirámide parcial que resulta de cortar una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base es semejante a la total.

Ficha 40.

1. Cómo se demuestra que la superficie de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura, indicando el encadenamiento que se puede establecer entre las figuras, hasta llegar a deducir la superficie de un círculo.
2. Cómo se demuestra que el volumen de dos paralelepípedos son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.

Ficha 41.

1. Cuál es el procedimiento gráfico que se conoce para transformar un polígono en un triángulo que le sea equivalente.
2. Cuál sería la longitud del radio de una esfera que tuviera por volumen $v = 9\pi.$ (?)
3. Fórmulas de la superficie de los triángulos rectángulos en los distintos casos que se pueden presentar.

Ficha 42.

1. Cómo se demuestra que en un mismo círculo, al mayor arco corresponde la mayor cuerda.
2. Calcular la expresión de la superficie de revolución engendrada por una línea poligonal regular, que gira alrededor de un eje.

Ficha 43.

1. Qué valor tienen los tres ángulos de un triángulo así como uno de los ángulos exteriores.

Ficha 44.

1. Demostrar que todo punto situado fuera de la bisectriz de un ángulo, está desigualmente distante de los lados del ángulo.
2. Cómo se demuestra que todo paralelepípedo oblicuo se puede descomponer en dos prismas triangulares rectos equivalentes entre sí.
3. Determinar la superficie de un trapecio en función de sus cuatro lados, estableciendo las condiciones para que sea racional el resultado.

Ficha 45.

1. Cómo se demuestra que las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales a los cuadrados de los radios o de los diámetros.
2. Demostrar que las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus lados homólogos.

Ficha 46.

1. Cuál es la propiedad característica del rombo, y cómo se demuestra esta propiedad.
2. Construir un polígono semejante a otro dado, demostrando el fundamento de esta construcción.
3. Demostrar las propiedades reciprocas de dos ángulos triedros suplementarios.

Ficha 47.

1. Demostrar que la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.
2. Qué propiedades tienen los ángulos rectilíneos cuando sus lados son paralelos.
3. Definición y generación del cono, deduciendo la expresión de su superficie y volumen.

Ficha 48.

1. Enunciar las condiciones de semejanza de dos polígonos, demostrando que dos polígonos semejantes están compuestos de triángulos igualmente semejantes y dispuestos de la misma manera.
2. Trazar una perpendicular a una recta situada en un plano, por un punto exterior al plano.

Ficha 49.

1. Qué propiedad presenta la bisectriz de un ángulo de un triángulo y cómo se demuestra esta propiedad.
2. Definición y generación del cilindro deduciendo la expresión de su superficie y volumen.

Ficha 50.

1. Demostrar que dos rectas paralelas quedan cortadas en partes proporcionales por un sistema de líneas que cortando a las primeras concurren en un mismo punto.
2. Cómo se demuestra que dos paralelepípedos de igual altura son proporcionales a sus bases.

Ficha 51.

1. Cómo se demuestra que dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.
2. <u>Determinar la expresión del volumen de una cuña (?) esférica en función del radio y del diámetro.</u>

Ficha 52.

1. Cómo se demuestra que la suma de dos rectas trazadas desde un punto interior de un triángulo a los extremos de uno de sus lados, es siempre menor que la suma de los lados del propio triángulo que rematan en los mismos extremos.
2. En qué relación están las superficies y volúmenes de dos esferas.

Ficha 53.

1. Demostrar que si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de otra, la primera será perpendicular a la segunda.
2. Demostrar que los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales a los cubos de sus lados homólogos.

Ficha 54.

1. Dividir una recta en partes proporcionales a las de otra línea dada.
2. Cómo se demuestra que el lado del hexágono regular inscrito a un círculo, es igual al radio.
3. Cómo se determina la expresión del volumen que engendra un triángulo que gira alrededor de un eje, cuando la base del triángulo es paralela a este eje de revolución.

Ficha 55.

1. Levantar una perpendicular a una recta dada por uno de sus puntos.
2. Qué valor tienen los ángulos interiores de un polígono y cuál es la fórmula que representa este valor.
3. <u>Encontrar el volumen de la cuña (?) esférica.</u>

Ficha 56.

1. Dados dos círculos, trazar otro equivalente a su diferencia.
2. Demostrar que dos polígonos son semejantes cuando están compuestos del mismo número de triángulos semejantes dispuestos de la misma manera.

3. En qué relación están las áreas de dos secciones trazadas en una pirámide, paralelamente a la base.

Ficha 57.

1. Qué propiedad tienen las tangentes tiradas desde un mismo punto y cómo se demuestra esta propiedad.
2. Cómo se demuestra que el volumen de un paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura.
3. Dada la secante de un arco y el radio, determinar gráficamente el arco a que corresponde.

Ficha 58.

1. Tirar una tangente a un círculo por un punto tomado fuera del plano de la curva.
2. Bajar una perpendicular a una recta dada por un punto tomado fuera de ella.
3. Determinar por el cálculo el lado de un cubo conociendo la diagonal.

Ficha 59.

1. Cómo se demuestra que el lado del cuadrado circunscrito a un círculo es igual al diámetro.
2. Cómo se demuestra que los planos de dos ángulos cuyos lados son paralelos, son igualmente paralelos.

Ficha 60.

1. Demostrar que en un mismo círculo a mayor arco corresponde mayor cuerda.
2. Encontrar una línea media proporcional a dos rectas dadas.
3. Qué se entiende por paralelepípedo y cómo se demuestra que sus diagonales se cortan en partes mutuamente iguales y en un mismo punto.

Ficha 61.

1. Cómo se demuestra que dos rectas son paralelas cuando los ángulos alternos internos que forman con una secante son iguales entre sí.
2. Cómo se obtiene la expresión que determina el área de un trapecio rectilíneo.
3. Cuál es la medida de un ángulo diedro y cuál es la razón.

Ficha 62.

1. Determinar la superficie de una corona circular.
2. Qué método gráfico se sigue para desarrollar en un plano la superficie de un cilindro recto.

Ficha 63.

1. Demostrar que π es un número constante en todos los círculos.
2. Transformar un paralelepípedo oblicuo en otro recto de base rectangular.

Ficha 64.

1. Qué valor numérico tiene el cuadrado del lado opuesto al ángulo oblicuo en un triángulo obtusángulo.
2. Qué cosa es prisma y cómo se determina la expresión de su superficie y volumen.

Ficha 65.

1. Demostrar un caso de igualdad de triángulos rectángulos.
2. Casos de igualdad de los ángulos triedros, demostrando uno de estos casos.

Ficha 66.

1. Encontrar el centro de un círculo.
2. Qué valor tienen los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito a un círculo y cuál es la razón.
3. Encontrar el volumen de una cuña esférica.
4. Resolver un triángulo acutángulo conociendo a, b, c usando de los triángulos rectángulos en que se puede descomponer.

Ficha 67.

1. Dividir una recta (en recta) en partes proporcionales a las de otra línea dada.
2. En qué relación están los volúmenes de dos conos semejantes y los de dos esferas de radio igual.

Ficha 68.

1. Cómo se demuestra que si dos circunferencias se cortan, la línea de los centros es perpendicular a la cuerda común y la divide en dos partes iguales.
2. Qué relación existe entre los volúmenes de dos pirámides cualesquiera y cuál existe cuando son semejantes.
3. Deducir de la fórmula que nos da la superficie de un triángulo en función de sus tres lados, la del triángulo equilátero.

Ficha 69.

1. Demostrar que si dos rectas se cortan por paralelas, quedarán divididas en partes proporcionales.
2. Demostrar que la intersección de dos planos perpendiculares a un tercero, es igualmente perpendicular a este último.

Ficha 70.

1. Demostrar que dos rectas son paralelas cuando forman con una secante ángulos internos del mismo lado suplementarios.
2. Definición y descripción del dodecaedro pentagonal indicando el número de aristas y de ángulos sólidos que en él figuran.

Ficha 71.

1. Levantar una perpendicular a una recta por uno de sus puntos.
2. Demostrar que dos paralelogramos de la misma base y altura son equivalentes.
3. Demostrar que si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es igualmente perpendicular al plano.

Ficha 72.

1. Por qué razón toda recta trazada paralelamente a la base de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.
2. Determinar la fórmula que nos da la superficie de un casquete esférico.

Ficha 73.

1. Determinar el valor del ángulo del pentágono regular.
2. Hacer pasar una circunferencia por los vértices de un pentágono regular.
3. Demostrar que dos paralelepípedos de igual altura son proporcionales a sus bases.
4. Deducir la fórmula de la superficie de un triángulo en función de los lados y el ángulo que forman.

Ficha 74.

1. Cómo se demuestra que de todas las cuerdas que se pueden trazar por un punto interior de un círculo, la menor es la perpendicular al diámetro.
2. Determinar la expresión del volumen de una esfera.

Ficha 75.

1. Qué medida tiene el ángulo formado por tangente y cuerda y cuál es la razón.
2. Levantar un plano perpendicular a una recta dada en el espacio cuando el punto está situado fuera de la recta.
3. Resolver un triángulo conociendo A, B y C.

Ficha 76.

1. Cómo se divide una recta en partes proporcionales a dos líneas dadas.
2. Determinar el volumen de un cubo en función de la diagonal.

Ficha 77.

1. Cuál es la propiedad característica del rombo y cómo se demuestra esta propiedad.
2. Encontrar la expresión del volumen que engendra un triángulo que gira alrededor de un eje que no sea uno de sus lados.

Ficha 78.

1. Cómo se demuestra que las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus alturas.
2. Demostrar que dos paralelepípedos de igual base e igual altura, son equivalentes.

3. Determinar simultáneamente el valor de los ángulos A y B, de un triángulo conociendo $a, b\ y\ c$.

Ficha 79.

1. Qué medida tiene el ángulo formado por dos tangentes y cuál es la razón.
2. Determinar la superficie que engendra una recta al girar alrededor de un eje paralelo a ésta.

Ficha 80.

1. Cómo se demuestra que la mayor de todas las cuerdas tiradas desde un punto de la circunferencia es la que se acerca más al centro.
2. Cómo se demuestra que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados perpendiculares.

Ficha 81.

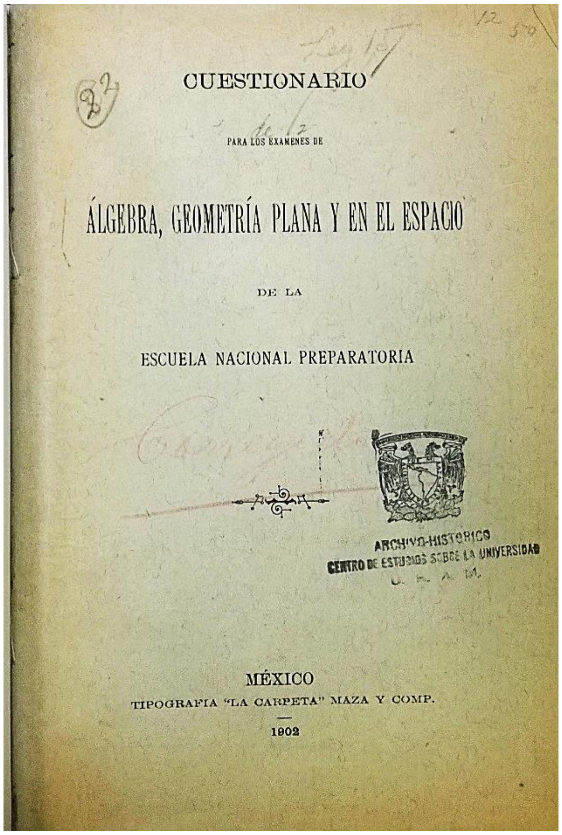
1. Qué teoremas se verifican si se baja una perpendicular del ángulo recto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

*Las preguntas que están subrayadas son las que aparecen tachadas en el cuestionario.

Cabe mencionar que también encontramos el *Cuestionario para los exámenes de Álgebra, Geometría plana y en el espacio de la Escuela Nacional Preparatoria* con fecha de 1902 y la segunda edición del mismo, con fecha de 1903. Es de suponer que dichos cuestionarios se aplicaron en los años escolares correspondientes.

Con respecto al librillo de 1902, hay que decir que contiene 66 fichas, cada una cuenta en general con 6 cuestiones, 3 concernientes a Geometría (plana y espacial) y las otras 3 a Álgebra (aunque también hay fichas que contienen sólo 5 cuestiones). Al igual que en el cuestionario de 1897, aparecen algunas preguntas tachadas; y dichas preguntas ya no figuraron en la segunda edición del cuestionario (el de 1903).

Al ser el librillo de 1903 una segunda edición del de 1902, contiene el mismo número de fichas (66). Y para compensar las preguntas que se retiraron de la primera edición, se agregaron nuevas cuestiones.


CUESTIONARIO

PARA LOS EXÁMENES DE

ÁLGEBRA, GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO

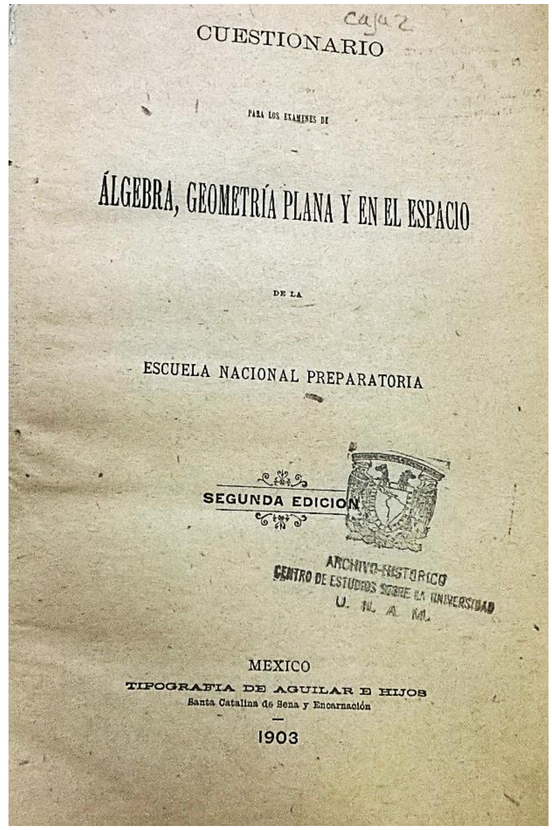
DE LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

MÉXICO

TIPOGRAFÍA "LA CARPETA" MAZA Y COMP.

1902


CUESTIONARIO

PARA LOS EXAMENES DE

ÁLGEBRA, GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO

DE LA

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

SEGUNDA EDICION

MEXICO

TIPOGRAFIA DE AGUILAR E HIJOS

Santa Catalina de Sena y Encarnación

1903

Portadas de los cuestionario para los exámenes de álgebra, geometría palana y en el espacio de la ENP, de los años 1902 (izquierda) y 1903 (derecha.)

8

Extensión, *por convención*, de la regla de la adición, á las cantidades negativas.

Demostrar la regla para reducir radicales al mismo índice.

Resolver las ecuaciones: $x + y = 94$, $\log x + \log y = 2'64836$.

Demostrar en qué caso son iguales dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares, y en cuál son suplementarios.

La superficie de un cuadrado es igual á 3873 hectáreas; calcular con la aproximación de un centésimo, el lado del cuadrado.

~~Probar que si por los vértices de un triángulo, se trazan paralelas á los lados opuestos, estas rectas forman un segundo triángulo cuádruple del primero y cuyos lados son dobles de los de aquél.~~

Ficha 8, Cuestionario 1902. La cuestión 6 aparece tachada.

8

Extensión, *por convención*, de la regla de la adición, á las cantidades negativas.

Demostrar las reglas para reducir radicales al mismo índice.

Resolver las ecuaciones $x + y = 94$, $\log x + \log y = 2'64836$.

Demostrar en qué caso son iguales dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares, y en cuál son suplementarios.

Demostrar que por un punto situado fuera de una resta, no se puede trazar sino una sola perpendicular á esa recta; y que la perpendicular es la distancia más corta entre el punto y la recta.

La superficie de un cuadrado es igual á 3873 hectáreas; calcular con la aproximación de un centésimo, el lado del cuadrado.

Ficha 8, Cuestionario 1903.

Se observan la cuestión que reemplazó a la 6 del cuestionario de 1902.

En cuanto a la forma en que se aplicaron estos exámenes es de suponer que fue la misma que se usó en los años de 1868 a 1897, cambiando quizá sólo el número de fichas a escoger (tal vez ya no se escogían tres sino dos) debido a que ahora el número de cuestiones por ficha era mayor.

A continuación se muestran sólo las cuestiones que abordan temas de Geometría de las primeras 15 fichas del cuestionario de 1902 (las que tienen "*" son las que aparecen tachadas), así mismo se presentan las preguntas que se agregaron en el de 1903.

CUESTIONARIO PARA LOS EXAMENES DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA PLANA Y EN EL ESPACIO DE LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA.

AÑO 1902.

1

-Demostrar que los volúmenes de dos paralelipípedos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.

-Demostrar que por tres puntos que no están en línea recta, se puede hacer pasar una circunferencia.

-Construir un triángulo isósceles conociendo la base y el ángulo del vértice.

2

*¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un polígono de n lados?

-Encontrar la expresión del volumen generado por un triángulo que gira al derredor de un eje, que no sea uno de sus lados.

*Dividir una recta en 2, 4, 8,…, 2^n partes iguales.

3

-Demostrar que el cuadrado tiene las propiedades del rectángulo y del rombo.

-¿Qué relación existe entre las áreas de dos poliedros semejantes y cómo se demuestra esa relación?

*Describir una circunferencia que pase por dos puntos cuya situación es conocida, y sea tangente á una recta dada.

4

*Demostrar que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados perpendiculares.

-Demostrar que dos paralelipípedos de igual altura son proporcionales á sus bases.

*Determinar el valor del lado del pentágono en función del radio, é inscribir un pentágono regular en un círculo.

5

-¿Qué valor tienen los ángulos interiores de un polígono, y cuál es la fórmula que representa este valor?

-Demostrar que si en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es de 30°, el lado opuesto es igual á la mitad de la hipotenusa.

-La altura de un cilindro es de 2m'35, se trata de calcular el radio con la aproximación de un centésimo, sabiendo que la suma de la superficie lateral y de las superficies de las bases, es igual á la superficie de un círculo que tiene 3m'24 de radio.

6

-Demostrar que el volumen de un paralelipípedo, es igual al producto de su base por su altura.

*Construir un triángulo conociendo los ángulos y el perímetro.

-Demostrar que todas las rectas perpendiculares á otra y en el mismo punto, están situadas en un plano perpendicular á esa recta.

7

*Inscribir un cuadrado en un semicírculo.

*Probar que en todo trapecio, el triángulo que tiene por base uno de los lados no-paralelos y por vértice el medio del lado opuesto, tiene una superficie igual á la mitad de la del trapecio.

-Determinar la expresión del volumen de una esfera.

8

-Demostrar en qué caso son iguales dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares, y en cuál son suplementarios.

-La superficie de un cuadrado es igual a 3873 hectáreas; calcular con la aproximación de un centésimo, el lado del cuadrado.

*Probar que si por los vértices de un triángulo, se trazan paralelas á los lados opuestos, estas rectas forman un segundo triángulo cuádruple del primero y cuyos lados son dobles de los de aquél.

9

-Demostrar que todos los ángulos inscritos en el mismo segmento, son iguales.

*Determinar el volumen de un cubo en función de la diagonal.

-La suma de los ángulos de un polígono es igual á 48 rectos; ¿cuántos lados tiene el polígono?

10

-¿Cuándo son iguales dos ángulos que tienen sus lados paralelos, y cuándo son suplementarios?

*Encontrar los lados de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y sabiendo que el producto de los catetos es igual á la diferencia de sus cuadrados.

-¿Qué relación existe entre los volúmenes de dos pirámides cualesquiera, y cuál cuando son semejantes?

11

-¿Qué medida tiene el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan en un punto interior de un círculo, y cuál es la razón?

-Demostrar que el valor numérico del cuadrado de la hipotenusa, es igual á los valores numéricos de los cuadrados de los catetos

*La fórmula que da el área de un polígono regular en función del perímetro y del apotema es, $s=P \times (a/2)$; la que da la de un polígono regular de un número par de lados, en función del radio del círculo circunscrito y del lado del polígono de un número sub-doble de lados, es, $s=m \times (R/2) \times (c/2)$; aplicar estas fórmulas á la determinación de las áreas de los polígonos regulares que pueden inscribirse en el círculo.

12

-Construir sobre una recta dada, un triángulo semejante á otro conocido.

-Demostrar que dos rectas perpendiculares á un mismo plano, son paralelas.

-Demostrar que los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.

13

*Calcular la superficie de un triángulo cuyos lados son, respectivamente, de 20, 15 y 7 metros.

-¿Cuál es, y cómo se demuestra la propiedad de la bisectriz de un ángulo de un triángulo?

-Encontrar la expresión del volumen generado por un triángulo que gira al derredor de un eje paralelo á su base.

14

-¿Por qué una recta no puede encontrar á una circunferencia en más de dos puntos?

-Demostrar que un lado de un ángulo triedro, es menor que la suma de los otros dos.

-Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un cateto.

15

*Para determinar el radio de una esfera, se ha descrito desde un punto P, como polo, un círculo cuyo radio es de 63 milímetros y la distancia rectilínea del polo á un punto de la circunferencia es de 87 milímetros; ¿cuál es el radio de la esfera?

-Demostrar que en un círculo la mayor cuerda corresponde al mayor arco.

-Demostrar que la bisectriz del ángulo de dos tangentes á una circunferencia, pasa por el centro del círculo.

PREGUNTAS QUE SE AGREGARON AL CUESTIONARIO DEL AÑO 1903

2

-Demostrar que la suma de los ángulos planos formados en el vértice de un poliedro es menor que 4 ángulos rectos.

3

-Dados un círculo y un punto exterior á él, trazar por este punto una secante tal, que la parte comprendida en el círculo sea media proporcional entre toda la secante y su parte externa.

4

-Que son sólidos regulares, cuantos puede haber y por qué. Reglas para determinar el número de aristas y de vértices.

-Construir sobre una base AB de 21 metros, un triángulo CAB, rectángulo en A, y tal que la hipotenusa CB y el lado CA, sumados, den una suma igual al doble del lado AB.

7

-Exponer los métodos de demostración usados en geometría, aplicándolos á algunos ejemplos.

-Calcular con 0’001 de aproximación al radio de un círculo, sabiendo que su superficie excede en 1 metro cuadrado a la del hexágono regular inscrito.

8

-Demostrar que por un punto situado fuera de una recta, no se puede trazar sino una sola perpendicular á esa recta; y que la perpendicular es la distancia más corta entre el punto y la recta.

9

-Demostrar que la razón de la circunferencia al diámetro es mayor que 3 y menor que 4.

11

-Calcular el valor del apotema de un polígono regular inscrito a un círculo.

13

-Se conoce el lado de un decágono regular circunscrito á un círculo, y se quiere calcular el lado del decágono regular inscrito al mismo círculo.

15

-En un trapecio se conocen las bases AB=738 metros, y CD=548 metros, y los lados no-paralelos AC=BD= 203 metros. Se quiere calcular, con 0m001 de aproximación, el valor de las diagonales.

Una de las primeras observaciones que podemos hacer acerca de estos cuestionarios es que los temas que abarcan las preguntas de cada ficha son prácticamente todos los vistos en el año escolar; es decir, en la ficha seleccionada por el alumno podían aparecer preguntas relativas a temas estudiados en las primeras semanas del curso anual, junto con otras relativas a temas estudiados meses después o casi al término del curso; y como cada alumno debía seleccionar y dar respuesta a por lo menos tres fichas, esto lo obligaba a preparase concienzudamente para su examen.

Con respecto a las preguntas del Cuestionario de 1897, observamos que éstas tienen un elevado nivel teórico, pues son en su mayoría demostraciones de teoremas o construcciones geométricas. También es de notar que casi no aparecen problemas “numéricos”, como el segundo de la ficha 24, o el primero de la ficha 25, o similares a los ejercicios que aparecen en el libro de Baldor y el CONAMAT (Ver la sección *1.3.1 Ejercicios en los libros*), me refiero a ejercicios sencillos, “mecanizables”. Suponiendo que el programa de estudios que entró en vigor en 1897 (en donde se cursaba en el primer año, Geometría plana; y en el segundo, Geometría de los volúmenes) establecía más o menos la misma cantidad de materias por año que la que se tenía en el periodo de 1867-1896, es decir, de 7 o menos materias; podemos pensar entonces que al ser relativamente pocas las materias que se cursaban al año, los alumnos disponía del tiempo necesario para dedicarse al estudio concienzudo de cada una de sus materias, en particular de la de geometría (pues tenían menos cantidad de materias que atender al contrario de los cursos actuales, en donde se llevan el doble de materias al año). Quizá esa es la razón de a pesar del nivel de complejidad de los exámenes de esa época, evidentemente mucho mayor que de los actuales (ya sea por el amplio contenido de temas que abarcaban, los tipos de cuestiones, las cuales exigían demostraciones, etc) y considerando que eran niños de 14 años (en promedio) los que las tomaban, el índice de reprobación en ese entonces en las materias de matemáticas era “normal”,

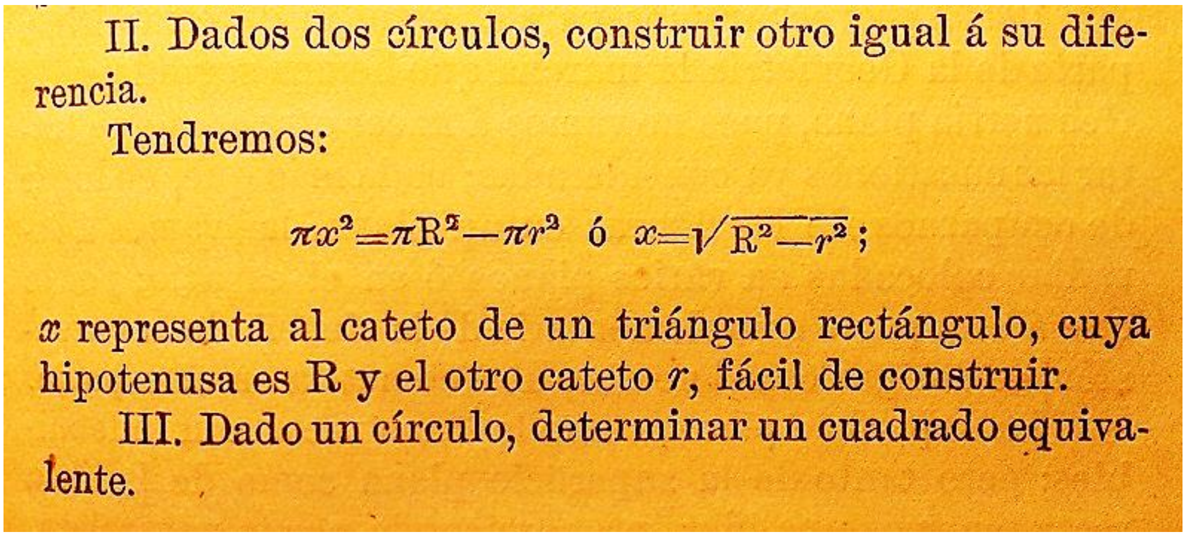
3.3 Algunas preguntas interesantes del cuestionario de 1897

Sobre la cuadratura del círculo

La siguiente pregunta aparece en la Ficha 56 del cuestionario:

Dados dos círculos, trazar otro equivalente a su diferencia.

Dicha pregunta aparece como un ejercicio resuelto en el libro de Echeagaray, y se encuentra al término de la sección *Comparación de áreas,* perteneciente a la *Segunda parte Superficies*:



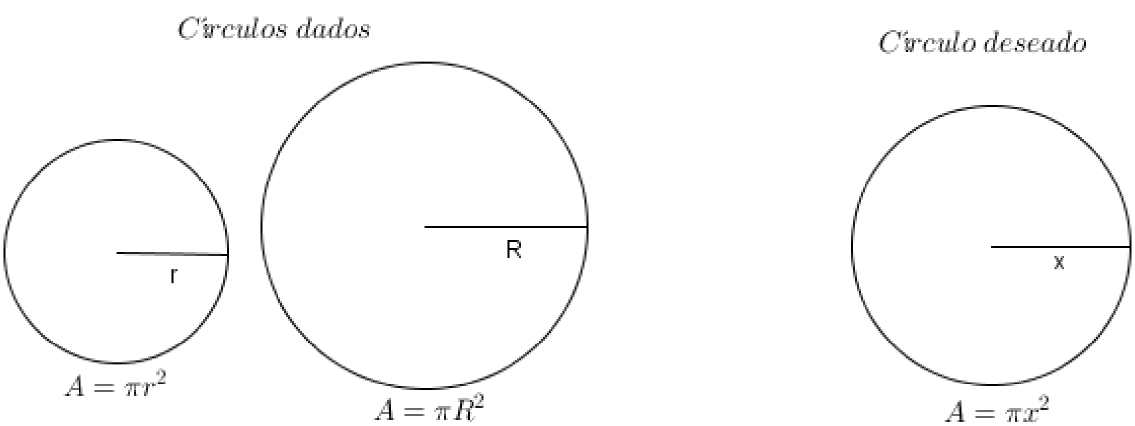
II. Dados dos círculos, construir otro igual á su diferencia.

Tendremos:

$$\pi x^2 = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{R^2 - r^2};$$

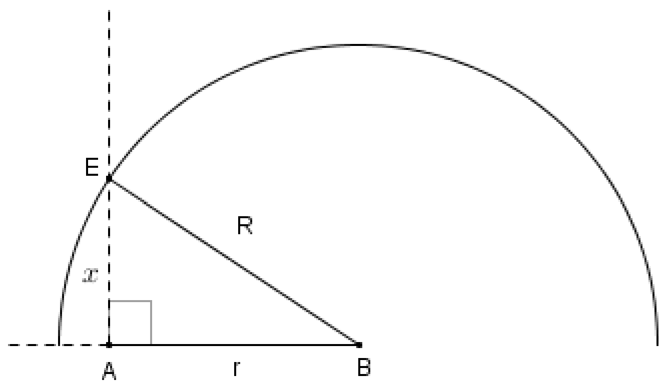
x representa al cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es R y el otro cateto r, fácil de construir.

III. Dado un círculo, determinar un cuadrado equivalente.



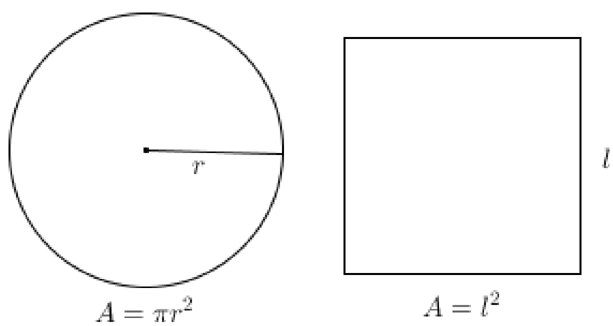
[Recuerde que figuras equivalentes son aquellas que tienen la misma área].

La resolución del problema es muy simple. La incógnita “x” es el radio del círculo deseado, y sabemos que su área debe ser igual a la diferencia de las áreas de los dos círculos dados, que tienen como radios “R” y “r”, respectivamente. Así, para encontrar el valor de “x” no hay más que efectuar un simple despeje. Hasta aquí se ha conseguido el valor de “x” numéricamente, pero Echeagaray nos muestra que éste también puede ser obtenido geométricamente, basándose para ello en el Teorema de Pitágoras: primero se traza el segmento AB de magnitud “r”, luego desde A se levanta la perpendicular a AB. Con centro en B, se traza la semicircunferencia con radio “R”. Sea E el punto donde se intersecta la perpendicular y la semicircunferencia. La magnitud del segmento AE es la magnitud de “x”.



Pero lo que resulta realmente interesante de este ejercicio es que nos lleva al ejercicio III, que no es otra cosa más que el problema de la *Cuadratura del círculo*.

Tratando de resolverlo basándonos en la idea del ejercicio II, tendríamos lo siguiente:

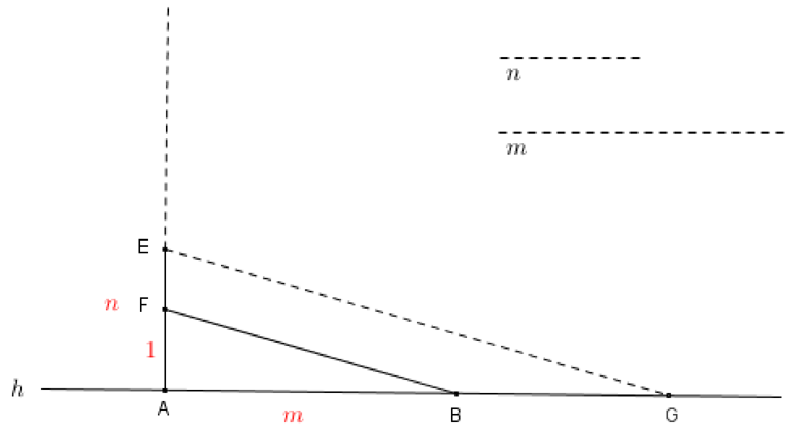


Sea *r* el radio del círculo dado. Y sea *l* el lado del cuadrado cuya área es igual a la del círculo. Tenemos entonces que:

$$l^2 = \pi r^2 \Rightarrow \; l = \sqrt{\pi r^2} = \sqrt{\pi} r$$

Numéricamente determinamos el valor de *l*, pero para hacerlo geométricamente el ejercicio II ya no nos dice nada, pues la expresión $l = \sqrt{\pi} r$ no tiene la “forma” del Teorema de Pitágoras.

Con todo, dadas dos magnitudes *m* y *n*, es posible construir el segmento que tenga magnitud $x = mn$:



Llevamos sobre una recta indefinida *h*, llevamos el segmento de magnitud *m,* sean A y B su punto inicial y final, respectivamente. Desde A levantamos la perpendicular a AB, sobre ella llevamos el segmento de magnitud *n,* con punto inicial en A y sea E su punto final; igualmente llevamos la unidad a la perpendicular, con punto inicial en A y sea F su punto final. Trazamos ahora el segmento FB, y por E el segmento paralelo a FB. Sea G el punto donde corta dicha paralela a la recta *h*. El segmento $AG = x$.

Esto porque los triángulos AEG y AFB son semejantes, y cumplen que:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AG}{AB} \Longrightarrow \frac{n}{1} = \frac{AG}{m} \Longrightarrow mn = AG = x$$

Aun así el problema sigue sin resolverse pues, aunque tenemos la magnitud *r*, ¿cómo obtendríamos un segmento que tenga magnitud $\sqrt{\pi}$?

Aquí se muestra una forma de empezar a visualizar el problema que conlleva la cuadratura del círculo.

Lo que sorprende es que dicho problema se haya dejado como ejercicio, con lo que reafirmamos nuestra suposición de que los ejercicios que aparecen en el libro de Echeagaray debieron ser para que el alumno los resolviera en clase, con ayuda del profesor. Y quizá este fue dejado a propósito como ejercicio para que el alumno se enfrentara y experimentara por sí solo el problema de la cuadratura del círculo, para luego dar paso a que el profesor explicase con mayor detalle el tema que tanto trabajo dio a los antiguos geómetras.

En el libro de Contreras también se aborda el problema de la *Cuadratura del círculo,* aparece igualmente en la Segunda parte, *Superficies*, y es el tercero de los problemas correspondientes a la sección *Valuación de las superficies*.

Previo a este problema se encuentra el siguiente, el cual nos ayudará a comprender la solución propuesta por Contreras para el III.

573.—PROBLEMAS DE VALUACIÓN DE ÁREAS.—I.—*Determinar el lado de un cuadrado equivalente á un triángulo conocido.*

Si llamamos *a* la altura y *b* la base del triángulo, su área será $\frac{ab}{2}$, y si representamos por *x* el lado del cuadrado buscado, su área será x^2; pero como debe ser

$$x^2 = \frac{ab}{2}$$

el valor de x puede determinarse sustituyendo los valores de a y de b en esta ecuacion, ó bien buscando gráficamente (544 — I) una média proporcional entre las líneas que representen la altura y la mitad de la base del triángulo, supuesto que de la ecuacion resulta:

$$a : x :: x : \frac{b}{2}$$

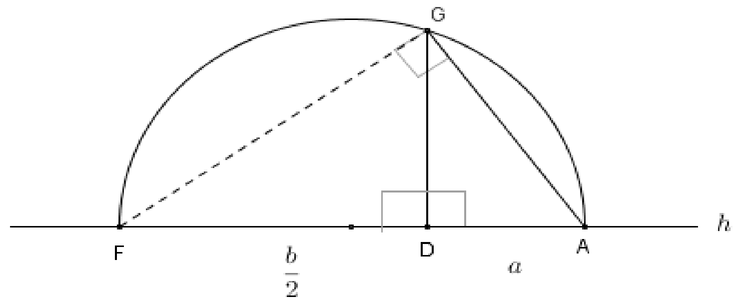
Igual que hizo Echeagaray, Contreras propone dos soluciones para el problema, una numérica y otra geométrica. Numéricamente el problema es trivial, la que resulta interesante es la solución geométrica, que es la que a continuación se analizará.

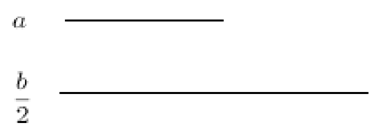
Claramente de la ecuación $x^2 = \frac{ab}{2}$, se obtiene la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{\frac{b}{2}}$, pues

$$xx = \frac{ab}{2} \Longrightarrow \frac{2x}{b} = \frac{a}{x} \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{\frac{b}{2}}$$

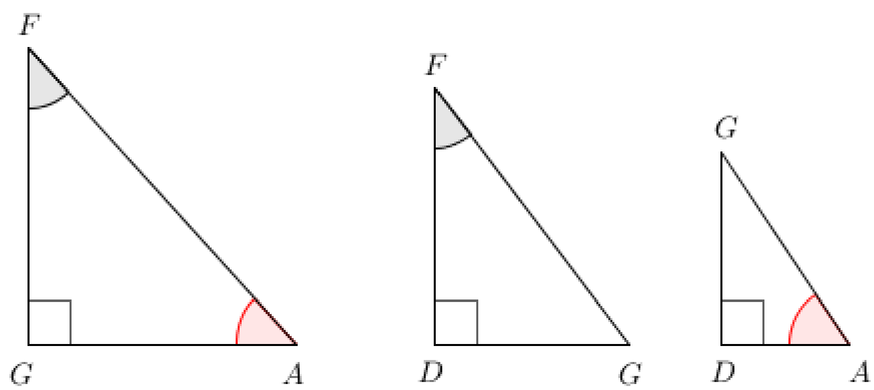
Lo que debe encontrarse ahora es el segmento *x*, que cumpla dicha proporción; o como bien dice Contreras, hay que encontrar una media proporcional entre las líneas que representen la altura a y la mitad de la base del triángulo $\frac{b}{2}$.

Contreras nos dice cómo es posible construir este segmento *x* geométricamente:





Sobre la recta indefinida h se toma $AD = a$, y continuación $DF = \frac{b}{2}$; sobre AF como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular DG. El triángulo FGA es rectángulo, pues el ángulo G abraza media circunferencia. Los triángulos FDG y GDA son semejantes al FGA, por tener dos ángulos iguales (el común y el recto). Y por lo mismo son semejantes entre sí.



Entonces como $\triangle FDG \cong \triangle GDA$, se cumple que sus lados homólogos son proporcionales, es decir:

$$\frac{DA}{DG} = \frac{DG}{DF} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{DG} = \frac{DG}{\frac{b}{2}}$$

Así, $x = DG$.

Veamos ahora el problema de la cuadratura del círculo, planteado por Contreras:

III.—*Determinar un cuadrado equivalente á un círculo.*

Dado un círculo, conocerémos su rádio, y para resolver el problema hay que buscar la magnitud del lado del cuadrado. La área del círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el rádio, y como la del cuadrado es igual á la 2ª potencia de su lado, para determinar su magnitud bastará encontrar una média proporcional entre la mitad de la circunferencia y el rádio, bien sea calculándola ó construyéndola gráficamente, supuesto que si llamamos c la circunferencia del círculo, r su rádio y x el lado del cuadrado, debe tenerse:

$$\frac{c \times r}{2} = x^2$$

de donde

$$\frac{c}{2} : x :: x : r$$

Pero la circunferencia *c* del círculo es igual a $2\pi r$, de lo que se obtiene que

$$\frac{(2\pi r) \times r}{2} = x^2 \Longrightarrow \quad \pi r^2 = x^2$$

Con lo que se llegaría a la proporción

$$\frac{\pi r}{x} = \frac{x}{r}$$

Y aunque sabemos construir una media proporcional, como en el problema I, la pregunta permanece, ¿cómo obtengo un segmento de magnitud πr? Considerando que sabemos construir un segmento que tenga por magnitud el producto de dos magnitudes dadas, y que r se nos es dado, sólo nos faltaría obtener un segmento de magnitud π, ¿cómo lo obtengo?

Contreras exhibe entonces, de otra manera, el problema que acarrea la cuadratura del círculo.

Al término del ejercicio menciona:

"Como la razón de la circunferencia al diámetro no ha podido expresarse exactamente por ningún valor numérico, tampoco se puede determinar con entera precisión, ni la circunferencia ni la superficie del círculo; así es que solo puede resolverse aproximadamente este problema, que se llama la cuadratura del círculo."

$$Circunferencia = 2\pi r \qquad Diámetro = 2r$$

$$\frac{Circunferencia}{Diámetro} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

Sobre el diámetro

La siguiente pregunta aparece en la Ficha 24 del cuestionario:

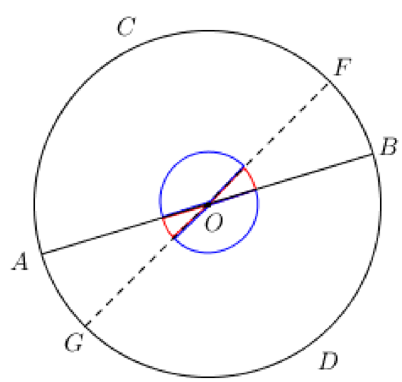
Demostrar que el diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales, usando del método de demostración llamado por reducción al absurdo.

A continuación presentaremos las peculiares demostraciones que propusieron nuestros tres autores bajo estudio para probar dicha propiedad del diámetro, que por considerarla tan evidente, podríamos creer inútil su demostración. Hay que mencionar que en los Elementos de Euclides no aparece la demostración explícita de ésta, sino que se agrega al momento de dar la definición de diámetro. Se menciona en el libro Primero, en la definición número 17:

"Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales".

(Euclides, [10])

Antes de pasar a ver las demostraciones de nuestros autores, conviene ver que una forma de demostrar que el diámetro AB divide a la circunferencia de centro O en dos partes iguales, sería demostrando que el arco $\widehat{ACB}$ es igual al arco $\widehat{ADB}$.



Para ello trazamos otro diámetro FG. Por ser ángulos opuestos al vértice tenemos que

$$\sphericalangle AOF = \sphericalangle GOB \text{ y } \sphericalangle FOB = \sphericalangle AOG$$

Pero como a ángulos centrales iguales, corresponden arcos iguales y recíprocamente, entonces $\widehat{AF} = \widehat{GB}$ y $\widehat{FB} = \widehat{AG}$

Y como $\widehat{ACB} = \widehat{AF} + \widehat{FB}$, y $\widehat{ADB} = \widehat{AG} + \widehat{GB}$, resulta entonces que

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$

$\therefore$ El diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales.

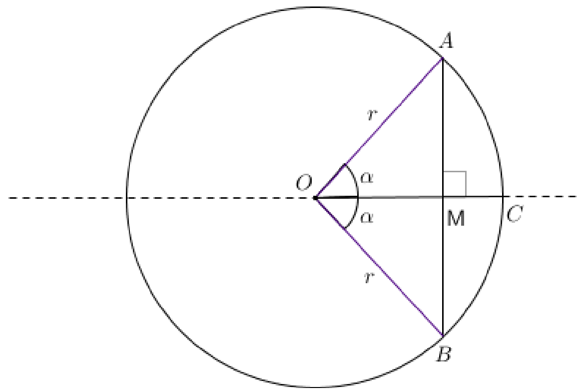
Echeagaray

La demostración que propone este autor hace uso del siguiente teorema:

Teorema: Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y al arco que la subtiende.

Demostración:

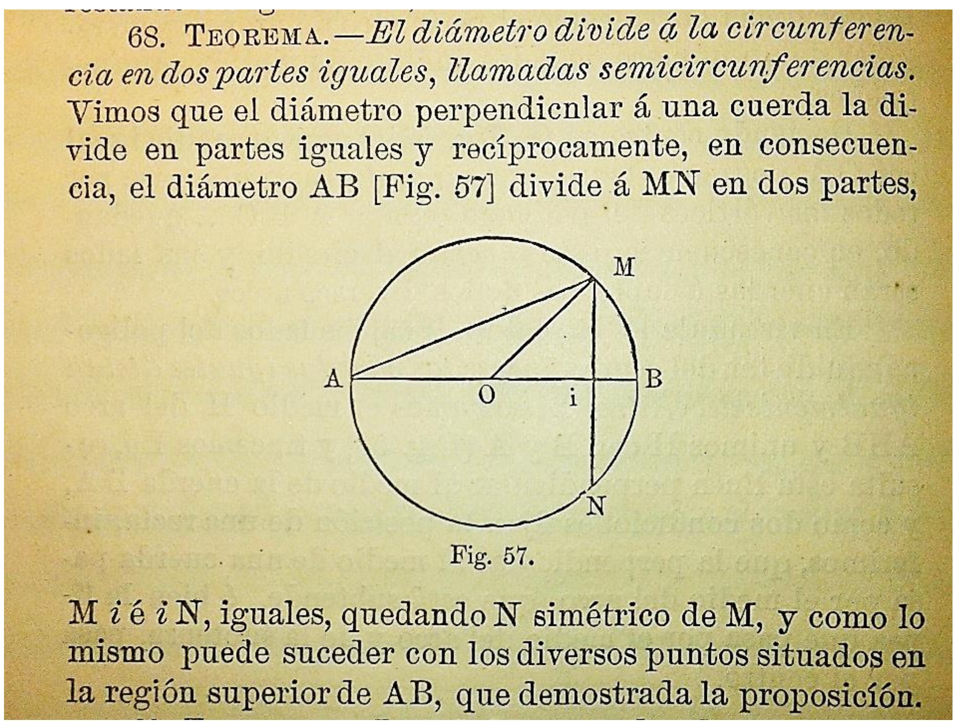
Consideremos la circunferencia con centro O, sea AB una cuerda en dicha circunferencia y sea la recta CO que pasa por O y que cumple $AB \perp CO$. Sea M el punto donde AB y CO se intersectan.



P.d. $AM = MB$ y $\widehat{AC} = \widehat{CB}$

Trazando los segmentos OA y OB, tenemos que los triángulos OMA y OMB son iguales por ser rectángulos y tener dos lados iguales, a saber: el lado común OM y los lados OA, OB iguales al radio. Entonces como $\triangle OMA \equiv \triangle OMB$, se tiene que $AM = MB$. Y por la misma razón los ángulos $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = \alpha \Longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{CB}$, puesto que a ángulos centrales iguales, corresponden arcos iguales, y recíprocamente.

La demostración que da Echeagaray entonces es la siguiente:



68. TEOREMA.—*El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales, llamadas semicircunferencias.* Vimos que el diámetro perpendicnlar á una cuerda la divide en partes iguales y recíprocamente, en consecuencia, el diámetro AB [Fig. 57] divide á MN en dos partes,

Fig. 57.

M *i* é *i* N, iguales, quedando N simétrico de M, y como lo mismo puede suceder con los diversos puntos situados en la región superior de AB, que demostrada la proposicíón.

Contreras

Contreras propone dos maneras de demostrar que el diámetro divide en dos partes iguales a la circunferencia. Ambas demostraciones aparecen como ejemplos de las diferentes clases de demostración. Quizá convenga al lector revisar la parte concerniente a Contreras del apartado *2.1.4 De los métodos de demostración*.

La primera demostración aparece como ejemplo de *demostración directa con sobreposición*.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

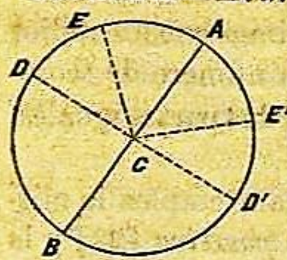


Figura 18.

Si suponemos que la figura 18 se doblara por el diámetro A B quedando fija la parte A E D B y girando al rededor de A B la parte A D' B, es claro que la recta A B es comun á las dos parte en la figura, y en virtud de que todos los radios son iguales, el extremo D' deberá coincidir con algun otro punto como D equidistante de C; el punto E' por la misma razon deberá coincidir con algun otro punto como E, y así sucesivamente debiendo coincidir todos los puntos de la circunferencia que quedan á la derecha del diámetro con los que están á su izquierda, se infiere que estas dos partes determinadas por el diámetro son iguales.

Al término de su demostración agrega:

"Como se vé en este ejemplo hay una cosa conocida: que la recta AB es común á las dos partes, cuya igualdad se va á demostrar, y de esto que sabemos y de un principio cierto, que los radios son iguales, se deduce el teorema. Así, pues, es preciso en todos los casos dar el fundamento ó la razón en virtud de la que coincidiendo una parte de dos figuras deberán coincidir todas las demás".

La segunda demostración se muestra como ejemplo de la *demostración negativa con sobreposición. [**Fig. 1**]*

Al finalizar la demostración menciona:

"Este ejemplo pone de manifiesto que es preciso completar la demostración negativa haciendo ver que en cualquiera otro supuesto que no sea el del teorema, forzosamente resulta un absurdo".

Podríamos suponer que esta era la demostración en la que estaban pensando los profesores cuando redactaron la pregunta para el cuestionario.

TEOREMA.—*El diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.*

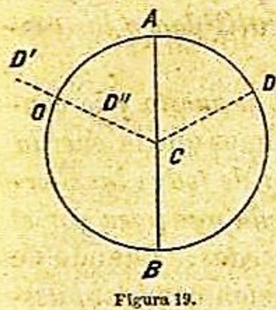


Figura 19.

Si suponemos que las dos partes determinadas por el diámetro son desiguales, al doblar la figura [fig. 19] por A B, el punto D caeria en D' fuera de la circunferencia si la parte de la derecha era la mayor. En este caso tendriamos

C D=C D'

pero C D'>C O

luego C D >C O

esto es, seria preciso que los radios fueran desiguales, lo que no es admisible.

Si suponemos que la parte de la derecha sea la menor, al doblar la figura D caeria dentro del círculo y tendriamos:

por una parte C D=C D"

por otra C D"<C O

luego C D<C O

esto es, que los radios serian desiguales, lo que es imposible.

Luego si la parte A D B no puede ser mayor, ni tampoco menor que la parte A O B, tendrá que ser igual á ella, que es lo que se queria demostrar.

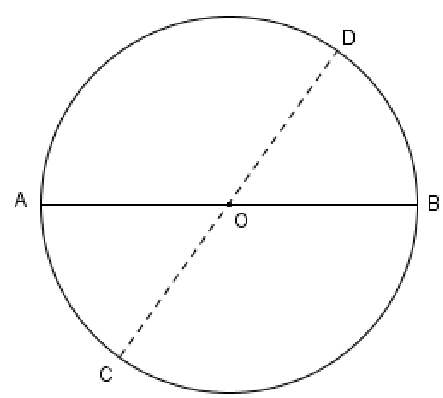
Fig. 1 *Segunda demostración de Contreras*

Y para finalizar, veamos la demostración que propuso

Terrazas

"Teor. El diámetro AB divide en dos mitades, así el círculo como la circunferencia.

Consideremos una segunda circunferencia confundida con la primera por ser igual, y que la nueva tiene por diámetro CD. Hagámosla ahora girar alrededor del centro, primero hácia la derecha, y luego al contrario: en ambos movimientos llegará el instante en que los diámetros se vuelvan uno solo, lo cual indica que las dos partes de una circunferencia son iguales á las de la otra, y ellas iguales entre sí."



Conclusiones

La geometría euclidiana siempre ha formado parte de los estudios preparatorios, o al menos desde 1867, con la creación de la ENP, en cuyos planes de estudio tuvo siempre una constante aparición y los cuales fueron siendo adoptados por diversas preparatorias de gobierno.

Al realizar el análisis matemático de los textos que se utilizaron en esta escuela, al observar la forma de evaluar y los exámenes que se aplicaban a los alumnos, nos damos cuenta del profundo nivel de conocimiento que se les exigía. Los textos eran muy teóricos, nada prácticos, pues casi no tenían ejercicios para que los alumnos practicaran las lecciones. No nos es posible saber con certeza si el maestro los obtenía de otros libros o si en verdad no se dejaban ejercicios al alumno. Pero al observar los exámenes, podemos aventurarnos a decir que efectivamente no se dejaban, pues éstos, al igual que los libros eran sumamente teóricos. Se preguntaban demostraciones, construcciones, etc., donde los temas que abordaban eran todos los vistos en el año escolar. Los alumnos debían prepararse muy bien para esta cátedra, aunque desgraciadamente muchos quizá solamente ejercitaron su memoria.

A pesar de la relativamente joven edad de los estudiantes (en promedio entraban a la preparatoria a los 14 años, en donde la geometría euclidiana figuraba en el primer año de estudios), los índices de reprobación eran “normales”. Esto podemos atribuirlo al hecho de que eran pocas las materias que los alumnos tomaban anualmente: menos de 7. En contraste con los cursos preparatorios de la actualidad, los cuales cuentan regularmente con 14 materias al año. Probablemente el tener menos materias, permitía al alumno atender con mayor diligencia cada una de ellas, en particular la de geometría euclidiana. Y quizá el hecho de que en la actualidad ya no se vean con tal profundidad los temas de esta cátedra, se debe a lo mismo: al mayor número de materias que se cursan al año.

En cuanto a la teoría expuesta en los textos que se estudiaron, notamos que en general las demostraciones se han ido sofisticando con el paso de los años. Métodos como el de Sobreposición, se dejaron de usar, así como el utilizar argumentos que apelan al sentido común (tan empleados por Terrazas).

Bibliografía

[1]. Contreras, Manuel. *Tratado de geometría elemental*. 4ta Edición. México, Imp. de J. F. Jens. Año 1884.

[2]. Echeagaray y Allen, Francisco. *Elementos de geometría plana y en el espacio*. México, Imp. Hijas de J. F. Jens. Año 1899.

[3]. Terrazas, J. Joaquín. *Tratado elemental de geometría*. México. Año 1878.

[4]. Núnez, Miguel. *La enseñanza de la Física y las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria: los primeros años (1868-1896)*. Guanajuato: Universidad Autónoma de Guanajuato, Centro de Investigaciones en Ciencias Sociales, 2004.

[5]. Peredo, Roberto. *Nuevo Diccionario Biográfico de Veracruz*. Fundación Colosio Veracruz. Xalapa, Veracruz, 2004.

[6]. Velasco Robledo, Dinorah (2011). *El apostolado seglar se agita: el caso José Joaquín Terrazas – Pelagio Antonio de Labastida, 1877 – 1895* (tesis de maestría). Universidad Autónoma Metropolitana, México.

[7]. Díaz y de Ovando, Clementina (1994). *Un enigma de los ceros, Vicente Riva Palacio o Juan de Dios Peza*. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[8]. Riva Palacio, Vicente (1996). *Los ceros: galería de contemporáneos*. (Obras escogidas, volumen 1). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

[9]. Colegio Nacional de Matemáticas, CONAMAT (2009). *Geometría y Trigonometría.* Pearson Educación, México.

Los autores pertenecieron a la planta docente de dicho Colegio, el cual imparte cursos de regularización en las áreas de Matemáticas, Física y Química.

[10]. Euclides. *Elementos, Libros I-IV*. Editorial Gredos. Madrid, 1991.