Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

# De los tres problemas clásicos al Álgebra Moderna

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

Presenta

Ana Bibiana Vargas Arvizu.

Dirigida por

MDM Norma Angélica Rodríguez Guzmán.

Querétaro, Qro. Febrero del 2013.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
**FACULTAD DE INGENIERÍA**
**SECRETARÍA ACADÉMICA**

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**C. Ana Bibiana Vargas Arvizu**
**Pasante de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas**
**Presente:**

Le comunico que una vez revisado el oficio en el que informa la terminación de Tesis Individual Titulada "**DE LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS AL ALGEBRA MODERNA**", y con base en la atribución que me confiere el articulo 51 del reglamento de titulación vigente he nombrado como sinodales a los siguientes catedráticos: **M. en C. Roberto Torres Hernández, M. en C. José Enrique Crespo Baltar, M. en C. Patricia Isabel Spindola Yáñez, MDM Carmen Sosa Garza y como Director de Tesis a la MDM. Norma Angélica Rodríguez Guzmán.**

Cabe mencionar que para continuar con los trámites de titulación, es necesario obtener el voto aprobatorio del trabajo por parte de los maestros mencionados.

Sin más por el momento, quedo de usted.

Atentamente
**"El Ingenio para crear, No para Destruir"**

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director**

SECRETARÍA ACADÉMICA

c.c.p. **MDM. Norma Angélica Rodríguez Guzmán**
**M. en C. Roberto Torres Hernández**
**MC. Patricia Isabel Spindola Yáñez**
**MC. José Enrique Crespo Baltar**
**MDM. Carmen Sosa Garza**

*ADG/lgo

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director de la Facultad de Ingeniería**
**Presente:**

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**De los tres problemas clásicos al Algebra Moderna**" de la **C. Ana Bibiana Vargas Arvizu, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

***Emito mi Voto Aprobatorio.***

Atentamente,

**MDM. Norma Ángelica Rodríguez Guzmán**
**Director de Tesis**

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director de la Facultad de Ingeniería**
**Presente:**

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**De los tres problemas clásicos al Algebra Moderna**" de la **C. Ana Bibiana Vargas Arvizu, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

***Emito mi Voto Aprobatorio.***

Atentamente,

**M. en C. José Enrique Crespo Baltar**
**Sinodal**

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director de la Facultad de Ingeniería**
**Presente:**

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada **"De los tres problemas clásicos al Algebra Moderna"** de la **C. Ana Bibiana Vargas Arvizu, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

***Emito mi Voto Aprobatorio.***

Atentamente,

**M. en C. Roberto Torres Hernández**
**Sinodal**

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director de la Facultad de Ingeniería**
**Presente:**

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**De los tres problemas clásicos al Algebra Moderna**" de la **C. Ana Bibiana Vargas Arvizu, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

***Emito mi Voto Aprobatorio.***

Atentamente,

P. I. Spíndola Y.

**M. en C. Patricia Isabel Spindola Yáñez**
**Sinodal**

Centro Universitario, 27 de noviembre de 2012

**Dr. Aurelio Domínguez González**
**Director de la Facultad de Ingeniería**
**Presente:**

Por este conducto, me permito comunicar a Usted, que una vez revisada la tesis individual titulada "**De los tres problemas clásicos al Algebra Moderna**" de la **C. Ana Bibiana Vargas Arvizu, Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,** y de acuerdo al artículo 20 del inciso h) del reglamento de Titulación vigente.

***Emito mi Voto Aprobatorio.***

Atentamente,

**MDM. Carmen Sosa Garza**
**Sinodal**

**Resumen**

Se sabe que la restricción para el sólo uso de regla y compás en la sistematización de la Geometría , tiene su origen en la Grecia Clásica donde surgen diversos problemas de construcción entre ellos el llamado problema de Apolonio (ca. 200 a.C.), el cual tardo siglos en resolverse y que consiste en construir un círculo que sea tangente a tres círculos dados arbitrariamente en el plano. Otro problema al que se enfrentó la época fue el de construir polígonos regulares de n lados, la solución para n = 3, 4, 5 y 6 se conoce desde la antigüedad, sin embargo, la construcción del heptágono llevó grandes trabas, así como la construcción de otros tres famosos problemas: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, conocidos como *los tres problemas clásicos* cuyas soluciones fueron buscadas en vano con los únicos dos instrumentos permitidos.

Estos problemas no resueltos dieron origen a notables avances y originales cuando, después de siglos de búsqueda fructífera creció la sospecha de que tales problemas pudieran ser definitivamente irresolubles, enfrentando a los matemáticos a un reto mayúsculo; demostrar que ciertos problemas no pueden ser resueltos. Tradicionalmente se le atribuye a dos jóvenes (Abel y Galois) la respuesta a los enigmas griegos, sin embargo como veremos, es el fruto de múltiples maestros que han contribuido al desarrollo de las Matemáticas.



**Palabras clave:** Regla, Compás, Geometría, Algebra Moderna.

**Abstract**

It is known that the restriction for the use of only a straightedge and a compass in the systematization of geometry has its origin in Classic Greece, where several construction problems emerged, among them, the so called Apollonius problem (200 B.C.); which took several centuries to be solved and consists in building a circle tangent to three circles given arbitrarily in a plane. Another problem of that era was to build n-sided regular polygons. The answer for n=3,4,5 and 6 was known long ago, nevertheless, the construction of the heptagon had its difficulties, as well as the following three important problems: the circle quadrature, the cube duplication and the angle trisection. These problems are well known as *the three classic problems* whose answers where searched in vain with the only two tools that were allowed.

These unsolved problems originated a remarkable and original progress, but after several centuries of research, it was believed that these problems might not have a solution. This caused the mathematicians to face a bigger challenge: to demonstrate that certains problems can not be solved. The answer to these greek enigmas are attributed to Abel and Galois, nevertheless, it will be shown that actually it was the result of multiple great masters who contributed to the development of mathematics.



**Key words:** Straightedge, Compass, Geometry, Modern Algebra.

A mis padres
hermanos y sobrinos

**Agradecimientos**

*"Preciso es encontrar lo infinitamente
grande en lo infinitamente pequeño,
para sentir la presencia de Dios.."*
Pitágoras de Samos.

- Primeramente a Dios por permitirme culminar mis estudios.
- A mi familia por el apoyo durante mis estudios en la carrera.
- A todas aquellas personas que confiaron en mi y creyeron que podía lograrlo, como lo es mi papá Sergio Vargas que me apoyo económicamente y a mi mamá Reyna Arvizu por darme su apoyo incondicional.
- A mis hermanos Reyna Esmeralda y Sergio por tenerme paciencia y entenderme cuando más se me complicaban las cosas.
- A mi novio Ernesto por su apoyo, comprensión y el asesorarme en el leguaje LaTeX en mi tesis.
- A la Maestra Norma Angélica Rodríguez, por su asesoría en la tesis, apoyo y su amistad.
- A mis maestros por compartirme sus conocimientos y guiarme en mi carrera.
- A mis compañeros de la licenciatura, por el apoyo y los buenos momentos que pasamos.
- A la Universidad Autónoma de Querétaro.

# Índice general

# Índice de figuras

# Índice de cuadros

# Índice de listados

# Capítulo 1

# Los tres problemas clásicos

*"Todas las cosas tienen una porción de todo,*
*pero la Mente es infinita,*
*autónoma y no está mezclada con ninguna,*
*sino que ella sola es por si misma"*
Anaxágoras de Clazomene

Los problemas de construcción han sido de los temas favoritos en la Geometría, empleando solamente regla y compás pueden llevarse a cabo una gran cantidad de construcciones, sin embargo, la historia también nos ha mostrado que existen otras construcciones que no pueden realizarse con estos dos instrumentos.

Se sabe que la restricción para el sólo uso de regla y compás en la sistematización de la Geometría, tiene su origen en la Grecia Clásica (ca. 500 a.C. - 300 d.C.) donde surgen diversos problemas de construcción entre ellos el llamado problema de Apolonio (ca. 200 a.C.) el cual consiste en construir un círculo que sea tangente a tres círculos dados arbitrariamente en el plano. En particular, en este problema se permite que uno o más círculos dados sean impropios, es decir, que degeneren en un punto (círculo de radio cero) o en una línea recta (círculo de radio infinito), dicho problema costó varios siglos de estudio a los matemáticos, se sabe que fue trabajado y terminado por Sir Isaac Newton (del calendario juliano,1642- 1727).

Otro problema de quizás mayor interés, fue el de construir un polígono regular de n lados, la solución para n= 3, 4, 5 y 6 se conoce desde la antigüedad, sin embargo, la construcción del heptágono no se logró, como tampoco la construcción de otros tres famosos problemas conocidos como *los tres problemas clásicos* cuyas soluciones fueron buscadas en vano con los únicos dos instrumentos permitidos. En todos estos problemas la regla se usa como un instrumento de borde recto, es decir, para trazar líneas rectas, pero no para medir o señalar distancias, así como el compás es utilizado para transferir medidas al igualar los radios de las circunferencias trazadas.

Estos problemas no resueltos dieron origen a uno de los avances más notables y originales cuando, después de siglos de búsqueda fructífera (al impulsar mucha investigación adicional), creció la sospecha de que tales problemas pudieran ser definitivamente irresolubles, enfrentando a los matemáticos a un reto mayúsculo; *demostrar que ciertos problemas no pueden ser resueltos.*

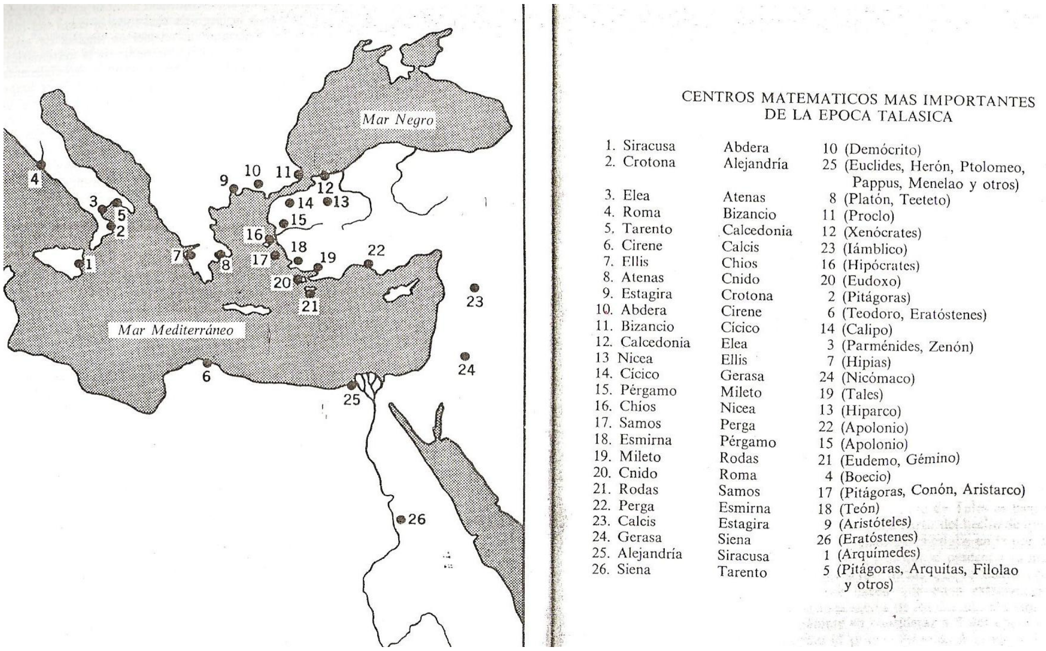
En este primer capítulo conoceremos el origen de los tres problemas clásicos, además conoceremos la curva de Hipias (ca. 460 a.C.) con la cual se logran resolver dos de los tres enigmáticos problemas pero sin restricción.

## 1.1. Antecedentes de la Grecia Clásica.

Al periodo comprendido entre el 800 a.C. al 800 d.C. se le denomina Edad Talásica, es decir, como la edad del mar. Durante parte de ésta época, los egipcios y mesopotámicos continuaron escribiendo, mientras ya se estaba preparando una nueva civilización no sólo entorno al Mediterráneo sino también sobre los mismos valles de los grandes ríos. A la primera parte de la Edad Talásica se le denomina era helénica, y así a las culturas más antiguas se les conoce como prehelénicas.

La historia de los griegos se remonta al segundo milenio a.C., cuando, procedentes del norte presionaron implacablemente como invasores desprovistos de cultura alguna, sin embargo, parecen haberse mostrado ansiosos de aprender, se apropiaron de las matemáticas de tal manera que la organizaron para dar inicios a su propia ciencia.

Los primeros Juegos Olímpicos se celebraron en el año 776 a.C. y por esa época ya se había desarrollado una maravillosa literatura griega, como ponen en evidencia las obras de Homero y Hesiodo, o por lo menos disponemos de un tradición que le atribuye ciertas obras literarias que, trasmitidas al principio de manera oral de generación en generación, finalmente fueron escritas y se han conservado para la posteridad.




CENTROS MATEMATICOS MAS IMPORTANTES DE LA EPOCA TALASICA

| | | |
|---|---|---|
| 1. Siracusa | Abdera | 10 (Demócrito) |
| 2. Crotona | Alejandría | 25 (Euclides, Herón, Ptolomeo, Pappus, Menelao y otros) |
| 3. Elea | Atenas | 8 (Platón, Teeteto) |
| 4. Roma | Bizancio | 11 (Proclo) |
| 5. Tarento | Calcedonia | 12 (Xenócrates) |
| 6. Cirene | Calcis | 23 (Iámblico) |
| 7. Ellis | Chios | 16 (Hipócrates) |
| 8. Atenas | Cnido | 20 (Eudoxo) |
| 9. Estagira | Crotona | 2 (Pitágoras) |
| 10. Abdera | Cirene | 6 (Teodoro, Eratóstenes) |
| 11. Bizancio | Cícico | 14 (Calipo) |
| 12. Calcedonia | Elea | 3 (Parménides, Zenón) |
| 13 Nicea | Ellis | 7 (Hipias) |
| 14. Cícico | Gerasa | 24 (Nicómaco) |
| 15. Pérgamo | Mileto | 19 (Tales) |
| 16. Chios | Nicea | 13 (Hiparco) |
| 17. Samos | Perga | 22 (Apolonio) |
| 18. Esmirna | Pérgamo | 15 (Apolonio) |
| 19. Mileto | Rodas | 21 (Eudemo, Gémino) |
| 20. Cnido | Roma | 4 (Boecio) |
| 21. Rodas | Samos | 17 (Pitágoras, Conón, Aristarco) |
| 22. Perga | Esmirna | 18 (Teón) |
| 23. Calcis | Estagira | 9 (Aristóteles) |
| 24. Gerasa | Siena | 26 (Eratóstenes) |
| 25. Alejandría | Siracusa | 1 (Arquímedes) |
| 26. Siena | Tarento | 5 (Pitágoras, Arquitas, Filolao y otros) |

Figura 1.1: Centros matemáticos más importantes de la época Talasica.

Durante el siglo VI a. C. aparecen dos hombres, Tales de Mileto (ca. 624-548 a. C.) y Pitágoras de Samos (ca. 580-500 a.C.), que jugaron el mismo papel que Homero y Hesiodo, pero aquellos con respecto a las matemáticas. Tales y Pitágoras son figuras un tanto indefinidas históricamente, además no nos ha quedado ninguna obra maestra de alguno de ellos, y ni siquiera está probado que los hallan escrito. Lo que pudieron haber hecho se ha reconstruido con base en una tradición no tan fidedigna, es decir, basada en una tradición ciertamente muy persistente, pero no en documentos históricos conocidos. Se dice que viajaron a territorio egipcio y caldeo y que adquirieron información de primera mano relativa a matemáticas y ciencias en general.

A Anaxágoras de Clazomene ( 500 - 428 a.C), se le atribuye ser el primero a quien se le ocurre resolver problemas utilizando únicamente regla y compás. Según Plutarco (46-120 d.C) [1], Anaxágoras fue puesto en prisión, por asegurar que el Sol no era un dios y que la Luna reflejaba la luz del Sol; durante su estancia en prisión trabajo en la cuadratura del círculo y a partir de aquí nos encontramos con la primera noción de problemas con regla y compás, y con el primero de los tres problemas Clásicos.

## 1.2. La cuadratura del círculo.

Inicialmente el problema de la cuadratura del círculo planteaba obtener un cuadrado cuya área fuera exactamente la misma que la de un círculo dado (figura 1.2). Se sabe que Anaxágoras fue el primero en intentar resolverlo, dibujando en las paredes de su celda, sin embargo, éste problema no pudo ser resuelto por los geómetras de la antigüedad, y llegó a ser el paradigma de lo imposible.

Se tienen algunos aportes sobre la cuadratura del círculo realizados en la época de la Grecia Clásica, como veremos a continuación.

**La cuadratura de las lúnulas**

Hipócrates de Chíos (470 a.C.-410 a.C) trabajó con la cuadratura del círculo,

[1] El más conocido de los biógrafos grecolatinos, autor de las vidas paralelas, escogía a sus personajes de dos en dos y los retrataba, analizando sus personalidades.

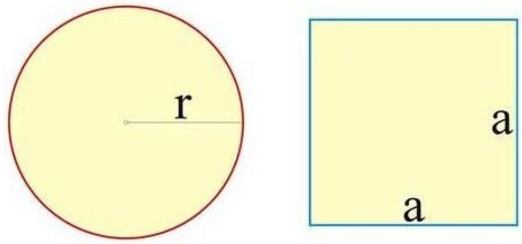



Figura 1.2: Cuadratura del círculo.

logrando la cuadratura de ciertas lúnulas. Una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios iguales o distintos (figura 1.3), semejante a la Luna en cuarto creciente.

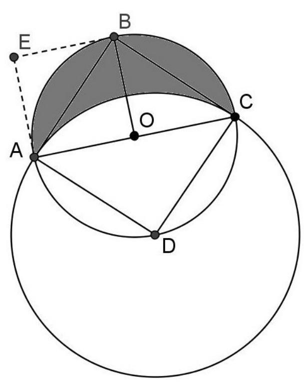



Figura 1.3: Lúnula de Hipócrates.

Hipócrates logró demostrar, que el área de la lúnula ($\widehat{ABC}$), área sombreada de la figura 1.3 es igual al área del triángulo isósceles ($\triangle ABC$).

**Justificación**

- Sea $\zeta_O$ la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ y se $\zeta_D$ la circunferencia de centro D y radio $\overline{DA}$.
- Luego, considere $\zeta_O$ y $\zeta_D$, se interceptan en A y C, siendo $\overline{AC}$ diámetro de $\zeta_O$.
- Se traza el triángulo isósceles $\triangle ABC$, con B sobre $\zeta_O$.
- Sea a(L) el área de la lúnula $a(\widehat{ABC})$ y sea $a(\triangle ABC)$ el área del triángulo.

Por la generalización del Teorema de Pitágoras aplicada al triangulo rectángulo tenemos, que los segmentos de circunferencia $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ y $\widehat{BC}$ limitados por la cuerdas $\overline{AC}$ de $\zeta_D$ y las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de $\zeta_O$ cumplen lo siguiente:

$$a(\widehat{AC}) = a(\widehat{AB}) + a(\widehat{BC}) = 2a(\widehat{AB}) \tag{1.1}$$

porque $\widehat{AB} = \widehat{BC}$. Tenemos que:

$$a(\frac{\zeta_O}{2}) - a(\widehat{AC}) = a(L) \tag{1.2}$$

sustituyendo (1.1) en (1.2) tenemos que:

$$a\left(\frac{\zeta_O}{2}\right) - 2a(\widehat{AB}) = a(L)$$

Pero

$$a\left(\frac{\zeta_O}{2}\right) - 2a(\widehat{AB}) = a(\triangle ABC)$$

Por lo tanto $a(\triangle ABC) = a(L)$.

Con esto Hipócrates logró hacer la primera cuadratura de una figura curvilínea, sin embargo, no es suficiente para lograr la cuadratura del círculo. El trabajo de Hipócrates nos parece sencillamente ingenioso, interesante y particular. Hemos querido incluir las cuadraturas de Hipócrates como uno de los intentos de la Grecia Clásica para abordar el problema de cuadraturas, más sabemos que, otros matemáticos como Alejandro de Afrodisia (fl.ca.200d.C) según Simplicio también trabajo en las cuadraturas.

## 1.3. La duplicación del cubo.

La duplicación del cubo consiste en encontrar un cubo cuyo volumen sea exactamente el doble del volumen de un cubo dado. Para ello es necesario encontrar una arista para el nuevo cubo, pero no se pudo encontrar y justificar con sólo regla y compás. Cuentan que este problema surge a partir de la siguiente leyenda.

Una terrible peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles (495 a. C.- 429 a. C.) famoso porque durante su gobierno mandó construir el Partenón, templo dedicado a la Diosa Atenea. Una embajada de la ciudad fue enviada al oráculo de Delos, consagrado al Dios Apolo, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. La respuesta tras consultar al Oráculo fue, que debían duplicar el volumen del

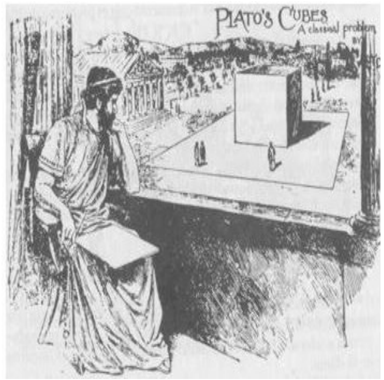



Figura 1.4: Imposibilidad de la duplicación del cubo.

altar consagrado a Apolo en la isla de Delos. El altar tenía forma cúbica y nadie encontró la manera de cómo construir el nuevo altar. De aquí el enigma de la duplicación del cubo.

Un intento totalmente original para resolver este problema, se le atribuye a Arquitas de Torento (nacido cerca del 428 a.C). Utilizando el lenguaje de la geometría analítica moderna diremos que, sea $a$ la arista del cubo a duplicar, consideremos tres circunferencias de radio $a$ con centro en el punto $(a, 0, 0)$ y situadas cada una de ellas en un plano perpendicular a uno de los ejes de coordenadas. Por la circunferencia perpendicular al eje $Ox$ se traza un cono circular con vértice en el origen $(0, 0, 0)$; por la circunferencia situada sobre el plano $Oxy$ consideramos el cilindro circular recto de eje paralelo al eje $Oz$, y hacemos girar por último la circunferencia situada en el plano $Oxz$ alrededor de eje $Oz$ para generar así un toro [2]. Las ecuaciones de estas tres superficies

[2]Superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta, es decir una dona).

son:

$$x^2 = y^2 + z^2$$

$$2ax = x^2 + y^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) = 4a^2(x^2 + y^2)$$

Las cuales se cortan en un punto cuya coordenada $x$ es igual a $a\sqrt[3]{2}$, por lo tanto este segmento es exactamente la arista buscada para el cubo.

Hemos mostrado este intento para resolver el problema de Delos, el cual nos impresiona si tenemos en cuenta que consiguió la solución sin ayuda de coordenadas y no en el plano, sino en $\mathbf{R}^3$, lo que implica que no utilizó regla y compás.

## 1.4. La trisección del ángulo.

Se sabe que es posible bisecar un ángulo, es decir, dividir un ángulo en dos partes iguales, empleando exclusivamente regla y compás, como muestra la siguiente construcción:

**Construcción 1.4.1** Bisección de un ángulo dado.

- Dado el $\angle CAB$, trazamos una circunferencia con centro en A, tal que intercepte a $\overline{AC}$ en E y a $\overline{AB}$ en D.

- Trazamos dos circunferencias de radios iguales, una con centro en E ($\zeta_E$) y otra con centro en D ($\zeta_D$), tal que nuestras circunferencias se interceptan en F y G.

- Trazamos una linea recta que pase por F y G, la llamamos £ será la bisectriz del ángulo, tal que pasa por A (figura 1.5).

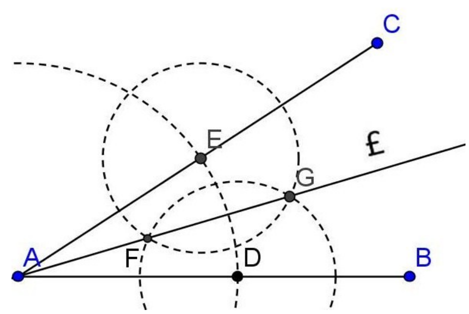



Figura 1.5: Bisectriz de un ángulo.

La justificación de esta construcción es sencilla, pues tenemos que

$$\triangle AEG \cong \triangle ADG$$

por construcción (LLL).
Por lo tanto

$$\angle EAG = \angle DAG$$

Ahora creemos que lo natural es preguntarse por la trisección del ángulo. No se conoce con certeza el origen de este problema, sin embargo, se sabe que se trató de resolver durante aproximadamente 1,500 años, hasta la aparición de la Teoría del Álgebra Moderna. Sin embargo, a lo largo de la historia, se realizaron, muchos intentos para resolverlo entre ellos la triseccion del angulo de Arquimides, pero todos ellos no se adaptaban o rompían las reglas de la Grecia Clásica. En la siguiente sección veremos uno de los trabajos más impresionantes de la época, por su ingeniosa construcción, atribuido a uno de los matemáticos griegos más destacados.

Figura 1.6: Imposibilidad de la trisección del ángulo.

## 1.5. La curva de Hipias.

En esta sección conoceremos una curva muy particular e interesante; ya que con esta se logran resolver dos de los problemas clásicos, se sabe fue planteada por **Hipias de Ellis** (Fl. c.a. 460 a.C.) quien era un sofista [3]. Se habla de él en los Diálogos de Platón, lo describe como un sofista insustancial, codicioso y vanidoso. Proclo (410 - 485) le atribuye la invención de

[3] Maestro que cobraba por enseñar a sus discípulos

la **primera curva distinta de la recta y la circunferencia**, la curva descrita por Hipias era llamada *trisectriz*, porque puede usarse para trisecar un ángulo, o bien *cuadratriz* dado que podía usarse para cuadrar el círculo, nosotros la llamaremos simplemente *curva de Hipias*. La curva de Hipias se define de la siguiente forma (figura 1.7):

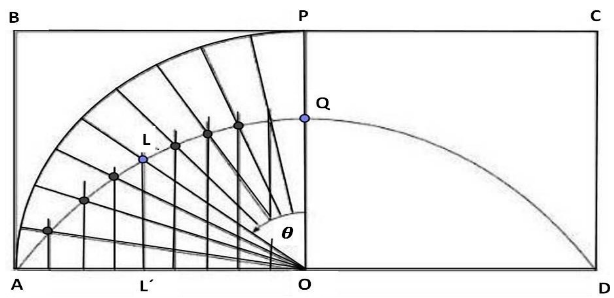



Figura 1.7: Curva de Hipias.

El segmento de recta $\overline{AB}$ se mueve uniformemente desde la posición indicada hacia la derecha hasta coincidir con $\overline{CD}$. **Al mismo tiempo**, el segmento $\overline{AO}$ rota uniformemente en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto O desde la posición $\overline{AO}$ pasando por $\overline{OP}$ hasta coincidir con $\overline{OD}$, **en el mismo tiempo** que $\overline{AB}$ tarda en llegar a $\overline{CD}$. La curva trazada está dada por la intersección de los dos segmentos a medida que se mueven, es la curva de Hipias.

La descripción anterior corresponde a sólo un segmento de la curva completa, segmento que parece fue el que conocieron los Griegos Clásicos. Si seguimos haciendo rotar el segmento $\overline{AO}$, el segmento $\overline{AB}$ se recorre a la derecha o izquierda, ambos los prolongamos y obtenemos su intersección, entonces obtendremos completa la curva de Hipias, como se muestra en la Figura 1.8.

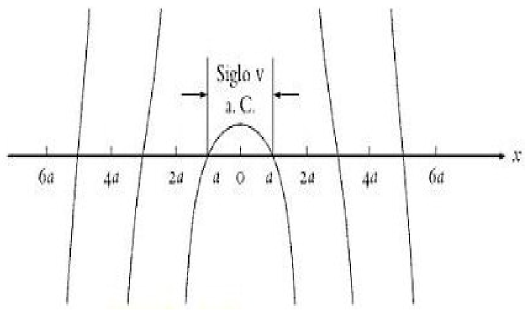



Figura 1.8: Curva de Hipias. La parte comprendida entre -a y a es lo que presuntamente se conoció en la Grecia Clásica.

No se sabe si Hipias descubrió que utilizando su curva el ángulo podía trisecarse o el círculo podía cuadrarse, quizás se dio cuenta pero no lo pudo demostrar. Se sabe que la demostración para cuadrar el círculo fue dada más tarde por Papo (fines del siglo III d.C.) quien la pudo obtener de Dinostrato (350 a.C.), pero nada es certero. La demostración por geometría elemental es por reducción al absurdo, pero el camino moderno es más corto, veámoslo:

**Demostración moderna para cuadrar el círculo con la curva de Hipias.**

Sea $\overline{OL} = \rho$ donde su valor varia según la construcción de la curva de Hipias

Sea $\overline{OA} = r$ el radio de la circunferencia ($\zeta_O$) con centro en O y radio $\overline{OA}$.

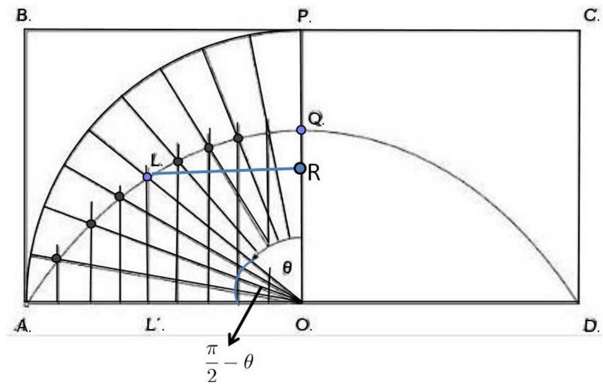



Figura 1.9: Curva de Hipias.

(1.3) define la cuadratriz

$$\frac{\overline{AL\acute{}}}{\frac{\pi}{2} - \theta} = K \tag{1.3}$$

donde K es la constante que define la cuadratriz, luego

$$\frac{2r}{\pi} = K \tag{1.4}$$

igualamos (1.3) y (1.4)

$$\frac{\overline{AL\acute{}}}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{2r}{\pi}$$

$$\overline{AL\acute{}} = \frac{2r}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\overline{AL\acute{}} = r - \frac{2r\theta}{\pi} \tag{1.5}$$

pero

$$\overline{AL'} = r - \overline{OL'} \tag{1.6}$$

además $\sin\theta = \frac{\overline{RL}}{\rho}$ entonces $\overline{RL} = \rho\sin\theta$,
pero $\overline{RL} = \overline{OL'}$ entonces $\overline{OL'} = \rho\sin\theta$,
sustituimos en (1.6)

$$\overline{AL'} = r - \rho\sin\theta \tag{1.7}$$

entonces igualamos (1.5) y (1.7) tenemos,

$$r - \rho\sin\theta = r - \frac{2r\theta}{\pi}$$

$$\rho\sin\theta = \frac{2r\theta}{\pi}$$

$$2r = \frac{\pi\rho\sin\theta}{\theta}$$

$$2r = \pi\rho\frac{\sin\theta}{\theta} \tag{1.8}$$

Pero

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

además,

$$\lim_{\theta\to 0}\rho = \overline{OQ}$$

entonces (1.8) se convierte en

$$2r = \pi\overline{OQ} \tag{1.9}$$

pero

$$2r = \overline{AD} \tag{1.10}$$

igualamos (1.9) y (1.10)

$$\overline{AD} = \pi\overline{OQ}$$

por lo tanto

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{OQ}} = \pi$$

El problema de cuadrar el círculo se reduce a encontrar el valor de $\pi$ para hallar el área del mismo y con ello encontrar un cuadrado de misma área. Entonces lo que Hipias hace es encontrar una representación geométrica para el valor de $\pi$, es decir la razón entre la circunferencia y el diámetro.

$$\frac{circunferencia}{diámetro} = \pi$$

**Demostración para trisecar el ángulo con la curva de Hipias.**

- Sea $\angle EAC$ el ángulo a trisecar. Figura 1.10.
- Trazamos la curva Hipias.
- Trazamos $\overline{QS}$ paralelo al lado $\overline{AC}$ del $\angle EAC$.
- Dividimos $\overline{SC}$ en tres partes iguales con K y N.
- Trazamos rectas paralelas a $\overline{AC}$ tal que pasen por los puntos K, N e

interceptan a Hipias en O y P. (construcción 2.1.2, del capítulo siguiente).

- Trazamos $\overline{AO}$ y $\overline{AP}$ que serán las rectas que trisecan a $\angle EAC$. Dicha trisección está dada por la construcción de Hipias, dado que O y P viven en ella. La justificación no será mostrada ya que no es nuestra intención para este trabajo.

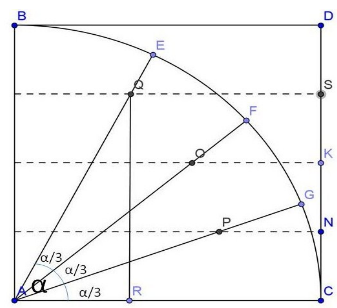



Figura 1.10: Trisección del ángulo con la curva de Hipias.

Observamos que la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo tienen solución utilizando la curva de Hipias, pero se rompen las reglas a la Geometría de la Grecia Clásica aunque propone nuevas, al construir una curva sin la ayuda de la regla y el compás. Entonces nuestros tres problemas clásicos siguen sin tener solución, hasta este momento de nuestro trabajo.

# Capítulo 2

# Construcciones de polígonos regulares.

*"Una mirada hacia atrás vale más*
*que una mirada hacia adelante."*
Arquimedes

Hasta el momento hemos visto que las rectas y circunferencias no pudieron con los tres famosos problemas, el por qué se irá descubriendo a lo largo de este trabajo, por ahora realizaremos algunos problemas que si se dejaron resolver, tal es el caso de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados. Siguiendo el orden comenzaremos construyendo el polígono regular o polígono equilátero como les decía Euclides de manera más simple.

Debe tenerse en mente que al realizar una construcción geométrica el problema no consiste en trazar las figuras con un cierto grado de precisión, sino en determinar teóricamente si es posible hallar la solución al problema usando sólo regla y compás, siempre bajo una justificación matemática formal, con el uso de teoremas o proposiciones lo cual forma parte de la sistematización de las Matemáticas.

**Construcción 2.0.1** Triángulo equilátero, dado uno de sus lados $\overline{AB}$, (figura 2.1).

- Dado el segmento $\overline{AB}$ trazamos dos circunferencias del mismo radio $(\overline{AB})$, una con centro en A y otra con centro en B.
- Las circunferencias se interceptan en dos puntos C y D.
- Sin pérdida de generalidad consideramos C y trazamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
- Luego el $\triangle ABC$ es el triángulo equilátero buscado. Dado que todas las circunferencias son del mismo radio.

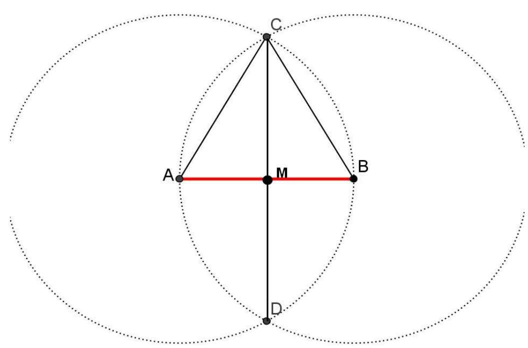



Figura 2.1: Construcción de triángulo equilátero dado uno de sus lados.

**NOTA:** La intersección de $\overline{AB}$ con $\overline{CD}$. es el punto medio de $\overline{AB}$ que llamaremos M. Dado que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (LLL), entonces $\angle ACD = \angle BCD$, y $\triangle CAM \cong \triangle CBM$ (LAL), por lo tanto $\overline{AM} = \overline{BM}$.

## 2.1. El cuadrado. Paralelas y perpendiculares

A continuación realizaremos tres construcciones, que son la base de las posteriores. Nuestra primera construcción consiste en trazar una perpendicular a una recta dada, de lo que tenemos dos casos, dada una recta y un punto sobre la recta, y el segundo caso; dada una recta y un punto que no esté sobre la recta. Nuestra segunda construcción a tratar consiste en trazar una paralela a una recta dada, que pase por un punto exterior a la recta. Y nuestra tercera construcción será para trazar un cuadrado dado uno de sus lados, donde nos serán de apoyo las dos construcciones anteriores.

**Construcción 2.1.1** Perpendicular a una recta dada que pase por un punto dado, donde el punto puede estar sobre la recta o fuera de ella.

**Caso 1:** Perpendicular a una recta que pase por un punto cualesquiera fuera de la recta dada, (figura 2.2).
Sea £ una recta y A un punto que no está en £.
Construcción:

- Trazamos una circunferencia con centro en A, de tal forma que intercepte a £ en dos puntos E y D.

- Trazamos dos circunferencias del mismo radio con centros E y D, tal que se corten en dos puntos H y F.
- Trazamos la línea £´ que une los puntos F y H, que es la perpendicular a £ y que pasa por A.

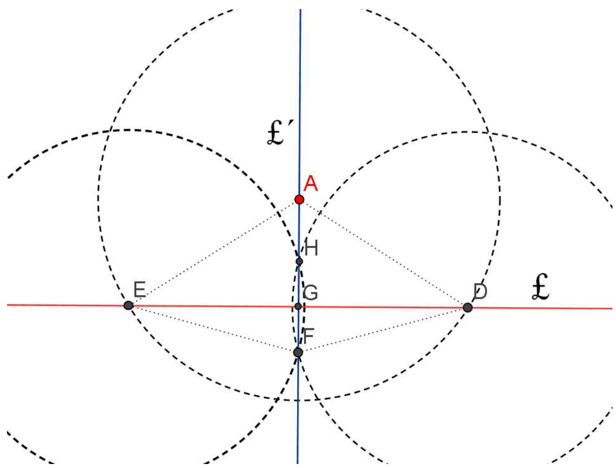



Figura 2.2: Construcción de una perpendicular a una recta y un punto fuera de la recta.

**Justificación:**

Probaremos que £ es perpendicular a £´ y que pasa por A.

Asumiremos que $\zeta_A$ es una circunferencia con centro en A y sea G la intersección de £ con £´.

Los segmentos

$$\overline{AE} = \overline{AD} \tag{2.1}$$

porque ambos son radios de $\zeta_A$ .

Decimos que las circunferencias $\zeta_E$ y $\zeta_D$ son iguales por construcción, entonces

$$\overline{EF} = \overline{FD} \tag{2.2}$$

Luego por (2.1), (2.3) y el lado en común $\overline{AF}$

$$\triangle AEF \cong \triangle ADF$$

por el criterio de congruencias LLL.

Entonces

$$\angle EAG = \angle DAG \tag{2.3}$$

Ahora por (2.1), (2.4) y el lado en común $\overline{AG}$

$$\triangle EAG \cong \triangle DAG$$

Por el criterio de LAL.

Entonces $\angle EGA = \angle AGD$ como £ es una recta que pasa por E, G y D.

$$\angle EGA + \angle AGD = 180°$$

$$2(\angle EGA) = 180°$$

$$\angle EGA = 90°$$

Por lo tanto £ es perpendicular £´.

**Caso 2:** Perpendicular a una recta que pase por un punto dado sobre la recta, (figura 2.3). Sea £ una recta y A punto contenido en £.

Construcción:

- Trazamos una circunferencia con centro en A, de tal forma que intercepte a £ en dos puntos C y D.
- Trazamos dos circunferencias del mismo radio con centro C y D, tal que se corten en dos puntos E y F.
- Trazamos la recta £´ que pase por F y E, que es la perpendicular a £ y que pasa por A.

Su demostración es análoga al Caso 1.

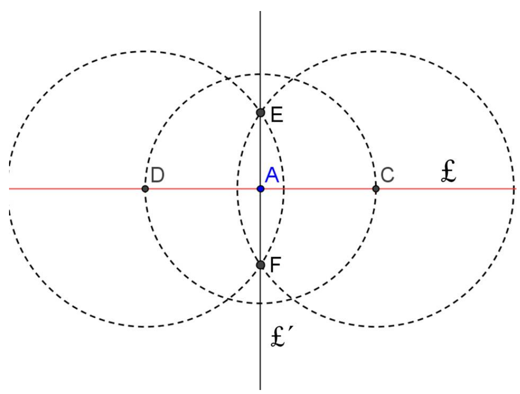



Figura 2.3: Construcción de una perpendicular a una recta y un punto en la recta.

**Construcción 2.1.2** Paralela a una recta £ y un punto dado A, (figura 2.4).

Su construcción es la unión de la construcción 2.1.1 (Caso 1 y Caso 2), como se muestra en la Figura 2.4; al igual que su demostración. Observemos que para la construcción de £´ que es perpendicular a £ es el Caso 1 y para £´´ que es perpendicular a £´ es el Caso 2. Por lo tanto £´´ es paralela a £

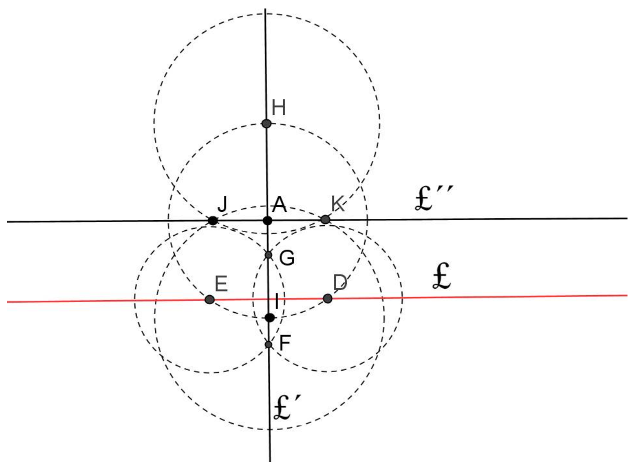



Figura 2.4: Construcción de una paralela a una recta y un punto dado.

Una vez conociendo como se trazan paralelas y perpendiculares, construiremos el cuadrado.

**Construcción 2.1.3** Cuadrado dado uno de sus lados $\overline{AB}$, (figura 2.5).

- Trazamos dos perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ (£ y £´), que pasen por A y B, usando el caso 2 de la Construcción 2.1.1.
- Trazamos dos circunferencias de radio $\overline{AB}$ una con centro en A y otra en B, que son interceptadas con £ y £´ en K y L; con K y L considerados en el mismo semiplano de la recta que pasa sobre $\overline{AB}$.

- Trazamos el segmento $\overline{KL}$, como muestra la Figura 2.5.

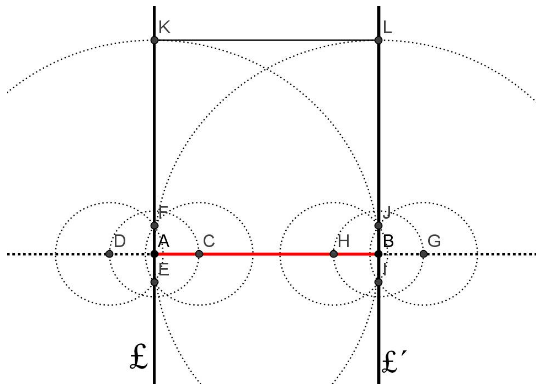



Figura 2.5: Construcción de un cuadrado dado un lado.

Luego, dado que $\zeta_A$, $\zeta_B$ tienen el mismo radio y $\overline{KA}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{LB}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, tenemos el cuadrado ABLK.

## 2.2. El pentágono. El pentagrama pitagórico

El pentágono regular ha sido una figura muy estudiada en la historia de las matemáticas, porque en ella se esconden propiedades, que según Kepler, llegaron a ser un tesoro para las Matemáticas, como lo es la sección áurea ó extrema y media razón como era conocida en la Grecia Clásica. En esta sección construiremos el pentágono regular y conoceremos algunas de sus propiedades; esto para dar a notar que ésta figura es construible con regla y compás, y adicionalmente a esto guarda propiedades que fueron justificadas con la matemática griega, según lo plasma la proposición 30 del libro VI de los *Elementos* de Euclides [5].

**Construcción. Extrema y media razón**

La divina proporción ó extrema y media razón consiste en encontrar un punto H sobre el segmento $\overline{AB}$ tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$. Como se muestra en la figura 2.6

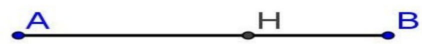



Figura 2.6: Extrema y media razón.

**Construcción 2.2.1.** Dividir un segmento en extrema y media razón.

Para encontrar el punto $H$ sobre $\overline{AB}$ nos apoyamos en la proposición 11 del libro II de los *Elementos* de Euclides, comenzamos construyendo el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB}$ como ya se ha visto.(figura 2.7), se divide el segmento $\overline{AD}$ en dos partes iguales con $E$, a continuación trazamos $\overline{EB}$, se extiende $\overline{DA}$ hasta $F$ talque $\overline{EF} = \overline{EB}$, y obtenemos $H$ sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AF} = \overline{AH}$, luego $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$.

Para probar la construcción nos apoyaremos en la proposición 6 del libro II, Euclides [5]. Consideramos $\overline{AD}$ de la figura 2.7, dividido en dos partes iguales por $E$, y prologando hasta $F$. Demostraremos que $(\overline{EF})^2 = (\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2$ según Euclides [1].Para la demostración fijémonos en la figura 2.8.

[1]Proposición 6 del libro II, muestra que $(a+b)^2 = (2a+b)(b) + a^2$.

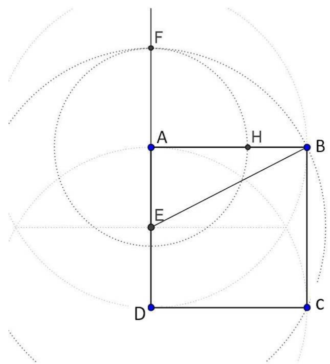



Figura 2.7: Construcción para divir un segmento en extrema y media razón.

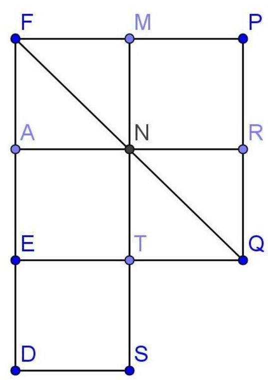



Figura 2.8: $(\overline{EF})^2 = (\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2$.

Se construye el cuadrado $EFPQ$ de lado $\overline{EF}$, trazamos $\overline{FQ}$ y por A la paralela a $\overline{FP}$ que corta a $\overline{PQ}$ en $R$, luego $\overline{FQ}$ intersecta a $\overline{AR}$ en $N$, por $N$ trazamos una recta paralela a $\overline{DF}$ que intercepta a $\overline{FP}$ en $M$ y a $\overline{EQ}$ en $T$, finalmente trazamos por $D$ la paralela a $\overline{EQ}$ que corta a $\overline{MT}$ en $S$.

Observamos que el polígono $DETS$ es congruente con $EANT$, además es congruente con el polígono $MPRN$.

Luego el $a(FMSD) = a(FPRNTE)$,
donde $a(FMSD) = (\overline{DF})(\overline{AF})$, pues $\overline{AF} = \overline{FM}$,
luego

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) = a(FPRNTE)$$

Si a ambos lados de esta igualdad sumamos $(\overline{AE})^2$ tenemos:

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2 = a(FPRNTE) + (\overline{AE})^2$$

por lo que

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2 = (\overline{EF})^2$$

lo que queríamos demostrar.

Si en la figura 2.7 construimos el cuadrado AFGH y prolongamos el $\overline{GH}$ hasta interceptar con $\overline{DC}$ en $K$, obtenemos la figura 2.9.

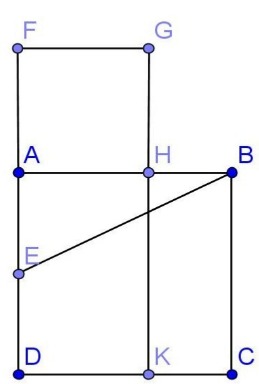



Figura 2.9: Construcción para divir un segmento en extrema y media razón.

De la demostración anterior tenemos:

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2 = (\overline{EF})^2$$

Pero $\overline{EF} = \overline{EB}$, por construcción.
Luego

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2 = (\overline{EB})^2$$

Tenemos el triángulo rectángulo $\triangle EAB$, entonces

$$(\overline{AE})^2 + (\overline{AB})^2 = (\overline{EB})^2$$

Luego

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) + (\overline{AE})^2 = (\overline{AE})^2 + (\overline{AB})^2$$

Entonces

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) = (\overline{AB})^2$$

Restamos de ambos lados $a(AHKD)$.

$$(\overline{DF})(\overline{AF}) - a(AHKD) = (\overline{AB})^2 - a(AHKD)$$

entonces

$$(\overline{AF})(\overline{FG}) = (\overline{HB})(\overline{BC})$$

donde $(\overline{AF}) = (\overline{FG})$ y $(\overline{BC})(\overline{AB})$
Por lo que

$$(\overline{AF})^2 = (\overline{AB})(\overline{HB})$$

por lo tanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

.

Esta proporción es una de las propiedades que guarda el pentagrama pitagórico, denominado así porque tradicionalmente se ha asegurado que fue el "escudo"de la Escuela Pitagórica, la cual nos servirá para la construcción del pentágono regular, que además posee otras propiedades como lo son:

- La unicursalidad, es decir, la estrella pentagonal puede ser trazada por el movimiento de un punto sin pasar dos veces por el mismo lado.
- Es obtenido a partir de tres triángulos isósceles iguales de ahí el nombre de tripletriángulo.
- Los ángulos de sus vértices son trisecados por las diagonales.
- De sus triángulos isósceles sus ángulos iguales son del doble del ángulo desigual.

**Construcción del pentágono regular.**

A continuación realicemos la construcción de este polígono.

**Construcción 2.2.2** Pentágono regular dado uno de sus lados.

- Dado el lado $\overline{AB}$, (figura 2.10), encontramos su punto medio, que llamaremos C, construcción 2.0.1.
- Trazamos una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por B ($\pounds_1$), construcción 2.1.1, caso 2.
- Trazamos una circunferencia con centro en B y radio $\overline{BA}$ ($\zeta_B$), que corta a ($\pounds_1$) en D. Para obtener el segmento $\overline{BD} = \overline{BA}$.
- Prolongando $\overline{AB}$ y encontramos E, talque $\overline{CE} = \overline{CD}$.
- Trazamos una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por C ($\pounds_2$), construcción 2.1.1, caso 2.
- Encontramos F sobre $\pounds_2$, tal que $\overline{AF} = \overline{AE}$.
- Trazamos el triángulo $\triangle AFB$ que es isósceles.
- Bisecamos los ángulos $\angle FAB$ y $\angle FBA$, construcción 1.4.1, con las rectas $\pounds_3$ y $\pounds_4$ respectivamente.
- Encontramos G sobre $\pounds_3$ tal que $\overline{AF} = \overline{AG}$ y encontramos H sobre $\pounds_4$ tal que $\overline{BF} = \overline{BH}$.
- Por último formamos el pentágono con los vértices A, B, G, F y H.

Observemos que para la construcción de nuestro pentágono regular utilizamos la extrema y media razón, ya que $\overline{AE}$ esta divido en esta proporción por B.

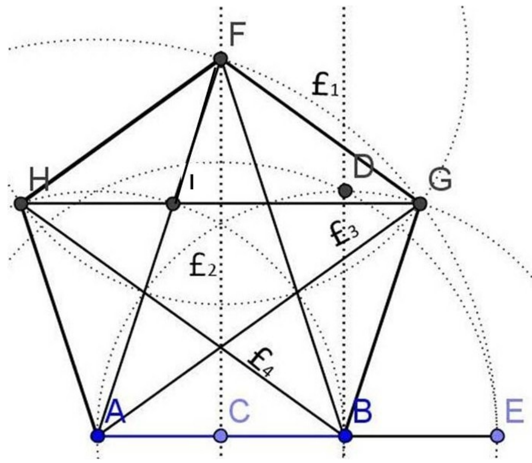



Figura 2.10: Construcción de un pentágono dado uno de sus lados.

Creemos que para la construcción del pentágono regular es indispensable la extrema y media razón, dado que buscamos formas de trazarlo sin usar la propiedad, pero siempre se llegaba a la misma conclusión. Por lo que creemos que lograr construir esta proporción en la Grecia Clásica fue un gran hallazgo para el estudio de otras figuras como la espiral logarítmica o áurea, sus rectángulos se van haciendo a partir de la proporción áurea, figura 2.11.

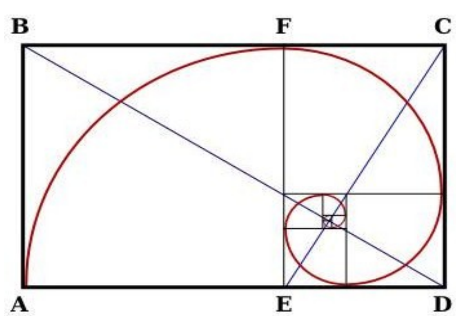



Figura 2.11: Espiral logarítmica o áurea.

## 2.3. El hexágono. Arquímedes y la búsqueda de $\pi$

Hasta el momento hemos construido polígonos regulares de 3, 4 y 5, ahora construiremos el hexágono regular que fue considerado por Arquímedes para la búsqueda del valor de $\pi$, ya que si el hexágono esta circunscrito, el radio de la circunferencia es igual a el lado del hexágono, además, a partir del hexágono regular se pueden construir polígonos regulares como los de 12, 24, 48 ó 96 lados, siendo así como Arquímedes logra un valor cercano a $\pi$.

Primeramente conozcamos la construcción de este polígono.

**Construcción 2.3.1** Hexágono dado uno de sus lados $\overline{AB}$, (figura 2.12).

- Trazamos el triángulo equilátero $\triangle ABO$ dado el lado $\overline{AB}$. Ver construcción 2.0.1.
- Trazamos una circunferencia $\zeta_O$ de radio $\overline{OA}$, que es interceptada por $\zeta_A$ de radio $\overline{AO}$ en B y G, tal que $\overline{AB} = \overline{AG}$
- Luego, trazamos $\zeta_B$ de radio $\overline{BO}$ que se intercepta con $\zeta_O$ en A y D, tal que $\overline{AB} = \overline{BD}$.
- Análogamente a lo anterior encontramos P talque $\overline{DB} = \overline{DP}$ y N tal que $\overline{GA} = \overline{GN}$.
- Finalmente, unimos los puntos A, B, D, P, N y G que son los vértices de hexágono.

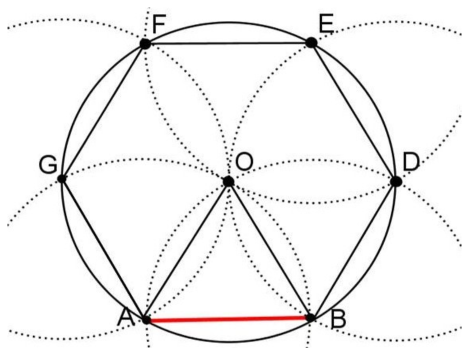



Figura 2.12: Construcción de un hexágono dado uno de sus lados.

La demostración se sigue por la igualdad de los radios de las circunferencias.

**Arquímedes y la búsqueda de $\pi$**

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) fue uno de los primeros en acercarse al valor de $\pi$, el método que utilizó consiste en circunscribir e inscribir polígonos regulares en una circunferencia y calcular el perímetro de dichos polígonos. Arquímedes empezó con un hexágono circunscrito e inscrito, fue duplicando el número de lados hasta llegar a un polígono de 96 lados y afirmar que:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Veremos que hizo Arquímedes para aproximarse al valor de $\pi$.Comenzaremos con una circunferencia de radio igual a 1, para facilitar los cálculos, trazaremos un polígono inscrito y circunscrito, y al igual que Arquímedes iremos duplicando el número de lados, lo que haremos es buscar un fórmula para determinar la longitud del lado del polígono duplicando.

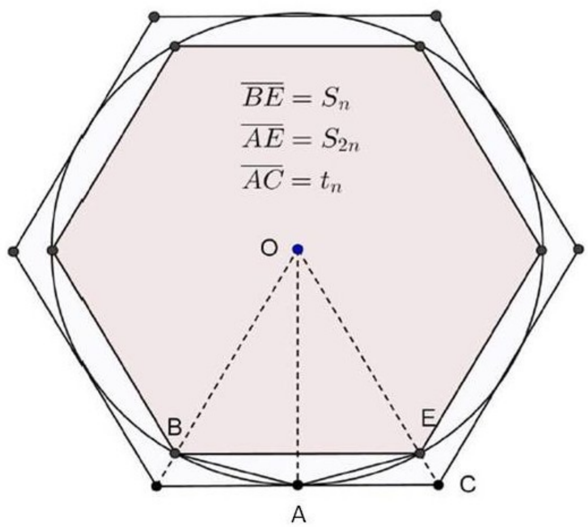



Figura 2.13:

Sea $t_n$ la mitad del lado del polígono regular circunscrito de n lados y $s_n$ el lado del polígono regular inscrito de n lados (figura 2.13). Doblando el número de lados, se establece la relación de $t_{2n}$ con $t_n$ y de $S_{2n}$ con $S_n$. Observe que $S_{2n}$ es el lado del polígono de 2n lados, no la mitad de la longitud de $S_n$.

Para el polígono exterior, observemos la figura 2.14, $\overline{OD}$ biseca $\angle AOC$, trazamos $\overline{CP}$ que es paralela a $\overline{OD}$, entonces $\angle DOC = \angle OCP$ (ángulos alternos internos) y se tiene que $\angle DOA = \angle CPO$ (ángulos correspondientes) por la igualdad de ángulos,$\overline{OC} = \overline{OP}$ y $\triangle OAD \approx \triangle PAC$.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$$

luego como $\overline{AP} = \overline{AO} + \overline{OP}$ tenemos

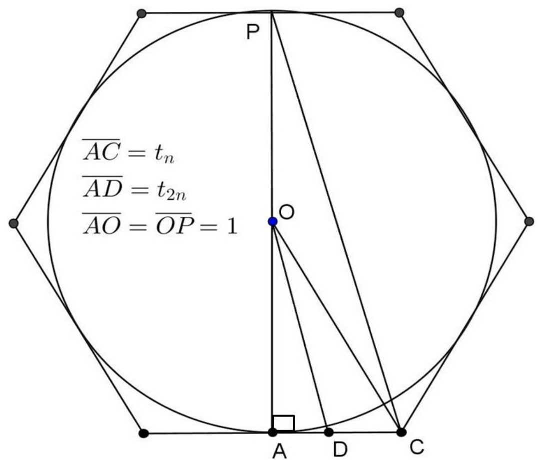



Figura 2.14: Polígono exterior

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO} + \overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO} + \overline{OC}}$$

despejamos $\overline{AD}$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO} + \overline{OC}} \tag{2.4}$$

con relación a la figura 2.14 sustituimos en (2.4)

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \overline{OC}}$$

por la generalización del Teorema de Pitágoras aplicado al triangulo rectángulo,

$$\overline{OC} = \sqrt{(\overline{AO})^2 + (\overline{AC})^2} = \sqrt{1 + t_n^2}$$

sustituimos y tenemos la relación de $t_{2n}$ en términos de $t_n$

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}} \tag{2.5}$$

Para el polígono inscrito observemos la figura 2.15, $\overline{AQ}$ biseca a $\angle EQB$, luego $\angle EQA = \angle EBA$ (mismo arco) y $\angle QEB = \angle QAB$ (abarcan un dia-

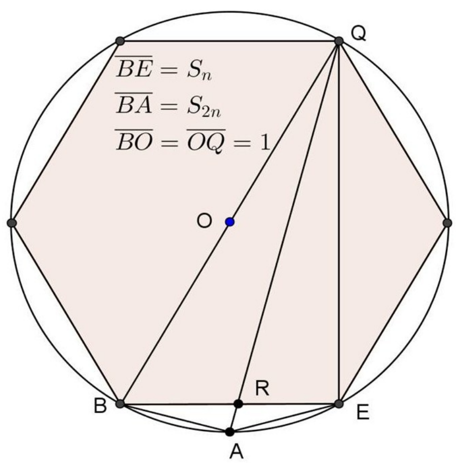



Figura 2.15: Polígono inscrito

metro). Luego por igualdad de ángulos

$$\triangle QAB \approx \triangle BAR$$

entonces,

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BA}}$$

análogamente

$$\triangle QAB \approx \triangle QER$$

entonces

$$\frac{\overline{QE}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{BA}}$$

luego, sumamos las igualdades anteriores,

$$\frac{\overline{QB} + \overline{QE}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{BR} + \overline{RE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BA}}$$

Luego con relación a la figura 2.15, $\overline{QB} = 2$, del $\triangle QEB$ que es triángulo rectángulo, tenemos $\overline{QE} = \sqrt{4 - \overline{BE}^2} = \sqrt{4 - S_n^2}$, además del $\triangle QAB$ es triángulo rectángulo, entonces $\overline{QA} = \sqrt{4 - \overline{BA}^2} = \sqrt{4 - S_{2n}^2}$ sustituimos,

$$\frac{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}{\sqrt{4 - S_{2n}^2}} = \frac{S_n}{S_{2n}}$$

elevamos al cuadrado para despejar $S_{2n}$

$$S_{2n}^2(4 + 4\sqrt{4 - S_n^2} + 4 - S_n^2) = S_n^2(4 - S_{2n}^2)$$

$$S_{2n}^2(4 + 4\sqrt{4 - S_n^2} + 4 - S_n^2 + S_n^2) = 4S_n^2$$

$$S_{2n}^2(2 + \sqrt{4 - S_n^2} = S_n^2$$

por lo tanto

$$S_{2n} = \sqrt{\frac{S_n^2}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}}} \tag{2.6}$$

Como Arquímedes empieza a partir del hexágonos regulares, entonces

$$S_6 = 1 \qquad t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para ilustrar el algoritmo de Arquímedes programamos en MATLAB 7.5.0, usamos las fórmulas (2.5) y (2.6), y obtenemos lo que se muestra en el listado 2.1

Listado 2.1: Iteraciones para la búsqueda de $\pi$, con MATLAB 7.5.0.

```
format long   %comando para tener más de 4 digítos.
n=5;%número de iteraciones que deseamos conocer.
h=6
t=1/((3)^(1/2));
s=1;
for k=1:n
     s=((s^2)/(2+((4-(s^2))^(1/2))))^(1/2);  %s2n
     R=s*h  %aproximación a pi
     h=(h)*2
     t=t/(1+(1+(t^2))^(1/2));  %t2n
     r=t*h  %aproximación a pi
end
```

Luego obtuvimos las siguientes aproximaciones al valor de $\pi$, cuadro 2.1.

| *interior* | *aproximación a* $\pi$ | *externo* |
|---|---|---|
| $S_6 = 1$ | $3 < \pi < 3{,}46410161$ | $t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $S_{12} = 0{,}51763809$ | $3{,}1058285 < \pi < 3{,}2153903$ | $t_{12} = 0{,}267949$ |
| $S_{24} = 0{,}26105238$ | $3{,}1326286 < \pi < 3{,}1596599$ | $t_{24} = 0{,}131652$ |
| $S_{48} = 0{,}13080625$ | $3{,}1393502 < \pi < 3{,}146086$ | $t_{48} = 0{,}065543$ |
| $S_{96} = 0{,}06543816$ | $3{,}1410319 < \pi < 3{,}142714$ | $t_{96} = 0{,}032736$ |

Cuadro 2.1: Aproximación a $\pi$ con el método de Arquímedes.

En el cuadro 2.1 podemos apreciar como Arquímedes se fue aproximando al círculo, hasta llegar a el polígono de 96 lados tenemos:

$$s_{96} = 0{,}065438 \qquad t_{96} = 0{,}032736$$

luego $48S_{96} < \pi < 96t_{96}$ y finalmente afirma que el valor de $\pi$ se encuentra entre dos valores

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Lo cual muestra el ingenio y la creatividad tan avanzada del ilustre Arquímedes.

Por la secuencia que hasta el momento llevamos en la construcción de nuestros polígonos regulares, deberíamos continuar con el heptágono, pero se dice que no puede ser construido haciendo uso de la regla y el compás, la construcción del heptágono se redujo a resolver el polinomio $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ sobre el campo de los racionales [2], en el siguiente capítulo estudiaremos los polinomios y sus soluciones, ya que como veremos la Geometría euclidiana no alcanzo para resolver todos los problemas de construcción, y tuvieron que echar mano del Álgebra al reducirlos a polinomios y así determinar sus raíces.

Observemos que para polígonos de mayor números de lados, los podemos construir procediendo con el método de Arquímedes, es decir, duplicando el número de lados de los polígonos que ya tenemos construidos,por ejemplo,

[2] La construcción del polinomio se encuentra en la sección 5.3

bisecando el arco comprendido por cada lado del pentágono regular y uniendo los puntos encontrados con los vértices del pentágono podemos obtener el decágono, sin embargo, habrá polígonos de los que no se tendrá una base, como por ejemplo, el polígono de 14 lados . Para resolver esta disyuntiva será necesario recurrir a otras áreas de la Matemática.

# Capítulo 3

# Solución de ecuaciones con regla y compás.

*"La matemática es la ciencia del orden y la medida,*
*de bellas cadenas de razonamientos,*
*todos sencillos y fáciles."*
René Descartes

Después de la construcción de polígonos, la construcción de ecuaciones, propone un reto más a lo matemático. La llegada del Álgebra fue inevitable, siempre poniendo en manifiesto su relación con la Geometría, misma relación que termino con su estrecha intimidad, al no poder dar ésta todo lo necesario para que aquella pudiera crecer y resolver todos sus problemas. El Álgebra no se dejo representar completamente por métodos geométricos, así damos pie en este capítulo a otros problemas que no se pueden representar con rectas y circunferencias.

La clave para una comprensión más profunda de los problemas geométricos estuvo en reducirlos al lenguaje algebraico, es decir, la construcción geométrica equivale a resolver un problema algebraico. La imposibilidad de las construcciones geométricas llevó a la Matemática a tomar este camino. La Grecia Clásica supo como construir la solución para encontrar la raíz cuadrada de un número, es decir, resolver una ecuación de segundo grado, pero no más alla de esto. Durante el siglo XVI los matemáticos habían aprendido que las ecuaciones de tercero y cuarto grado podían ser resueltas mediante un proceso similar al método usado para las ecuaciones cuadráticas. Cabe destacar que todos los métodos tienen como característica común que las soluciones o raíces son obtenidas a partir de los coeficientes de la ecuación mediante una sucesión de operaciones racionales. Se dice que las ecuaciones de hasta cuarto grado pueden resolverse "por radicales". Nada parecía más natural que extender este procedimiento a ecuaciones de quinto y mayores grados, pero las Matemáticas son caprichosas e impredecibles.

Los primeros problemas que se registran en la historia de las ecuaciones, dan lugar a ecuaciones de primer grado, que aparecen en los papiros egipcios que datan aproximadamente 2000 antes de Cristo, posteriormente las ecuaciones de segundo grado aparecen en las tablillas babilónicas cerca del 1700 a.c. No se conocía un leguaje específico para escribir y manipular las ecuaciones, solo se proporcionaban algoritmos para calcular numéricamente las soluciones a problemas específicos. Los métodos para resolver algunas ecuaciones de tercer grado aparecieron más primitivos; se construyeron tablas de los valores que toma una expresión de tercer grado y se resolvía la ecuación buscando un valor adecuado en la tabla o por falsa posición.

Resolver una ecuación algebraica mediante procesos geométricos consiste en: dado un cierto conjunto de segmentos de línea, digamos $a, b, c$,..., se busca uno o más segmentos $x, y$,... Los segmentos requeridos pueden ser lados de un triángulo que han de ser construidos o como radios de círculos, primero debemos encontrar una relación (ecuación) entre la cantidad requerida $x$ y las cantidades dadas $a, b, c$,...; luego debemos hallar la incógnita $x$ resolviendo esta ecuación y, por último, debemos determinar si la solución encontrada puede obtenerse mediante procesos algebraicos. Los fundamentos para esta teoría en su totalidad los proporciona el principio de la geometría analítica.

## 3.1. Ecuaciones cuadráticas.

Una autoridad para hablar de ecuaciones cuadráticas es, sin duda, Rene Descartes (1596-1650) en el Libro I de *La Geometría*, Descartes da una propuesta para determinar las raíces de ecuaciones cuadráticas de la forma:

$$\begin{aligned} x^2 - a &= 0 \\ x^2 - ax - b^2 &= 0 \\ x^2 + ax - b^2 &= 0 \\ x^2 - ax + b^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

con $a > 0$ y $b > 0$. Vemos que entre las ecuaciones cuadráticas que Descartes resuelve, ninguna fue de la forma:

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

las soluciones para este tipo de ecuaciones con $a > 0$ y $b > 0$ son negativas. Los métodos que propone Descartes, manejan longitudes de segmentos, en este sentido creemos que resolver geométricamente una ecuación, significará encontrar mediante procesos geométricos un segmento, cuya longitud satisfaga la ecuación propuesta, es decir, al puro estilo griego. Al tratarse de longitudes de segmentos y dada la época en la que Descartes vive, misma donde el desarrollo de los números negativos aún no era notable, solamente presentó métodos para ecuaciones que tuvieran sus raíces reales y positivas. En esta sección presentaremos dos de los métodos utilizados por él para resolver ecuaciones cuadráticas, así la figura 3.1 es la utilizada por Descartes [4] para resolver un tipo de ecuaciones cuadráticas [1] y está contenida en *la Geometría*, así como también contiene el siguiente párrafo que nos importante mencionar dado que muestra la simplificación del lenguaje geométrico al algebraico.

> A menudo es innecesario, pues, trazar las líneas sobre papel, sino que es suficiente designar a cada una mediante una sola letra. Así, para sumar las líneas BD y GH, llamo a una $a$ y a la otra $b$, y escribo $a+b$. Entonces $a-b$ indicará que $b$ se resta de $a$; $ab$ que $a$ es multiplicada por $b$; $\frac{a}{b}$ que $a$ se divide entre $b$; $aa$ o $a^2$ que $a$ se multiplica por sí misma; $a^3$ que este resultado se multiplica por $a$, etc., indefinidamente. Si quiero extraer la raíz cuadrada de $a^2+b^2$, escribo $\sqrt{a^2+b^2}$. Si se desea extraer la raíz cúbica de $a^3-b^3+ab^2$, escribo $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$; y de forma similar para las demás raíces. Aquí debe observarse que po $a^2$, $b^3$, y expresiones similares, ordinariamente me refiero sólo a líneas simples, que, sin embargo, llamo cuadradas, cúbicas, etc., de manera que hago uso de los términos empleados en álgebra.

Para la ecuación de la forma $x^2 - a = 0$, $a > 0$ Descartes propone obtener la raíz cuadrada de la longitud $a$, para la construcción usaremos la figura 3.1.

[1] página 298 del apéndice 1

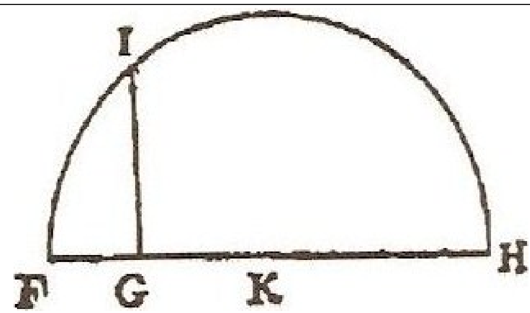



Figura 3.1: Solución para ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$, para $a > 0$.

**Construcción 3.1.1** Solución para ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$.

- Trazamos $\overline{GH} = a$.
- De manera colineal a $\overline{GH}$ trazamos el segmento $\overline{FG} = 1$.
- Encontramos el punto medio de $\overline{FH}$, al cual llamaremos K, Construcción 2.0.1.
- Trazamos la circunferencia con centro en K y radio $\overline{KH}$.
- Trazamos una perpendicular a $\overline{FH}$ y que pase por G (construcción 2.1.1, Caso 2), tal que se intercepta con la circunferencia en I.
- Entonces $\overline{IG} = \sqrt{a}$ (figura 3.1).

**Justificación**

Para la justificación nos basaremos en la figura 3.2.

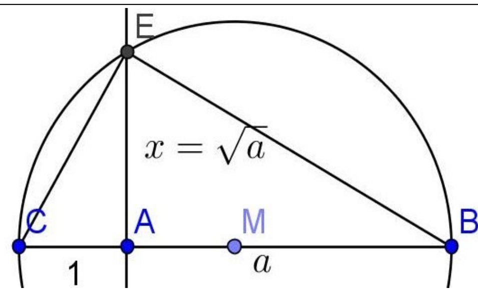



Figura 3.2: Método para encontrar una raíz cuadrada.

Los triángulos $\triangle CAE$ y $\triangle EAB$ son triángulos rectángulos, dado que $\overline{CB}$ es perpendicular a $\overline{EA}$ por construcción.

El $\triangle CEB$ es triángulo rectángulo ya que el $\angle CEB$ es recto dado que tiene su vértice sobre la circunferencia y comprende un diámetro, entonces

$$\triangle CAE \approx \triangle CEB \tag{3.2}$$

ya que son rectángulos,tiene en común el $\angle ECB$ y el lado $\overline{CE}$. Análogamente.

$$\triangle EAB \approx \triangle CEB$$

Por transitividad $\triangle CAE \approx \triangle EAB$ y sus lados son proporcionales. Esto es la Proposición 8 del Libro VI de los *Elementos*, Euclides [5], quien ya lo había demostrado. Entonces se tienen la siguiente relación de proporcionalidad.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \tag{3.3}$$

Donde tenemos que $\overline{BA} = a$; $\overline{CA} = 1$ Y $\overline{AE} = x$. Entonces (3.3) se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{x}{a} \\
x^2 &= (1)(a) \\
x^2 &= (a) \\
x^2 - a &= 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

con $a > 0$

Lo que hace Descartes es encontrar un segmento que sea proporcional a $\overline{AB} = a$ y $\overline{CA} = 1$, de aquí que $x$ sea la raíz cuadra de $a$. Para el método de Descartes, se toma en cuenta sólo la raíz positiva, dado que, ya se dijo se trata de la longitud de un segmento.

Descartes aborda el problema de encontrar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + ax - b^2 = 0$ , con $a > 0$ y $b > 0$. Aunque la forma $b^2$ del coeficiente independiente puede parecer extraño, se explica porque considerar la raíz cuadrada de él, no representa dificultad alguna, incluso podría ser calculada con lo expuesto en el método anterior. Descartes utiliza la figura 3.3 para resolver la ecuación de este tipo.

**Construcción 3.1.2** Solución de la ecuación $z^2 = az - b^2$ , con $a > 0$ y $b > 0$, según Descartes.

- Tazamos $\overline{NL} = \left(\frac{1}{2}\right) a$.

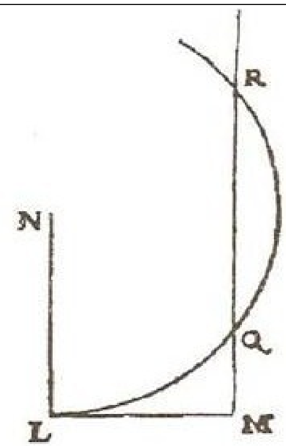



Figura 3.3: Figura utulizada por descartes para la ecuacion $x^2 - ax + b^2 = 0$ , con $a > 0$ y $b > 0$.

- Trazamos $\overline{LM} = b$, tal que sea perpendicular a $\overline{LM}$ y pase por L.
- Luego, trazamos otra perpendicular a $\overline{LM}$ que pase por M, $\overline{MR}$ .
- Trazamos una circunferencia con centro en N y radio $\overline{NL}$, tal que corta a $\overline{MR}$ en Q y R.
- Nuestra solución sería $\overline{MQ}$ o $\overline{MR}$.

Dado que en este caso puede expresarse de dos maneras, dice Descartes:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \tag{3.5}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \tag{3.6}$$

Note que Descartes utiliza la letra $z$ en vez de la $x$ para designar a la variable

Descartes [4][2]. En nuestro caso utilizaremos la variable $x$ como lo venimos haciendo.

**Justificación:**

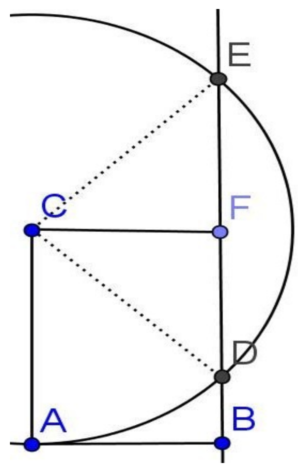



Figura 3.4: Representacion geometríca de la ecuacion $x^2 - ax + b^2 = 0$ , con $a > 0$ y $b > 0$.

Para la demostración observe la figura 3.4 donde consideremos el punto auxiliar F como punto medio de la cuerda $\overline{DE}$, entonces $\overline{CF}$ es perpendicular a $\overline{DE}$, luego los triángulos $\triangle CEF$ y $\triangle CFD$ son rectángulos y aplicamos el Teorema de Pitagoras.
Del $\triangle CFE$, tenemos:

$$(\overline{CF})^2 + (\overline{FE})^2 = (\overline{CE})^2 \tag{3.7}$$

[2]Apéndice 1, pág. 301-303

Del $\triangle CED$, tenemos:

$$(\overline{CF})^2 + (\overline{FD})^2 = (\overline{CD})^2 \tag{3.8}$$

Depejamos $\overline{CF}$ en (3.7).

$$\overline{CF} = \sqrt{(\overline{CE})^2 - (\overline{CF})^2} \tag{3.9}$$

Despejamos $\overline{FD}$ en (3.7)

$$\overline{FD} = \sqrt{(\overline{CD})^2 - (\overline{CF})^2} \tag{3.10}$$

Sabemos que $\overline{CA} = \overline{CE} = \overline{CD} = \frac{a}{2}$ porque son radios de la circunferencia, $\overline{CF} = \overline{AB}$=b por construcción.
Al sustituir $\overline{CE} = \frac{a}{2}$ y $\overline{CF} = b$ en (3.9)

$$\overline{FE} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) a^2 - (b)^2} \tag{3.11}$$

Análogamente sustituimos $\overline{CD} = \frac{a}{2}$ y $\overline{CF} = b$ en (3.10)

$$\overline{FD} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) a^2 - (b)^2} \tag{3.12}$$

De la figura 3.4 tenemos el rectángulo CFBA porque se trazo $\overline{BE}$ paralela a $\overline{AC}$ además $\overline{CF}$ es perpendicular a $\overline{BE}$ y $\overline{CF} = \overline{AB} = b$, entonces afirmamos que $\overline{BF} = \overline{AC} = \frac{a}{2}$ ya que son lados del rectángulo CFBA.

Finalmente Descartes da la longitudes $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ como el valor $x$ que se esta buscando, pues:

$$\overline{BE} = \overline{BF} + \overline{FE} \tag{3.13}$$

$$\overline{BD} = \overline{BF} - \overline{FD} \tag{3.14}$$

Sustituimos $\overline{BF} = \frac{a}{2}$ y (3.11) en (3.13)

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)a^2 - (b)^2} \tag{3.15}$$

Análogamente $\overline{BF} = \frac{a}{2}$ y (3.12) en (3.15)

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)a^2 - (b)^2} \tag{3.16}$$

Donde éstas son las igualdades que Descartes da como soluciones a $x^2 - ax + b^2 = 0$, con $a > 0$ y $b > 0$. Hemos querido incluir en el trabajo dos ejemplos como muestra de que fue posible resolver ecuaciones cuadráticas con regla y compás, sin embargo, no es todo lo que puede decirse, con un poco de Álgebra, podemos descubrir otra maravilla; la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

De la ecuación (3.15), tenemos

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2 - 4b^2}{4}}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

$$\overline{BE} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4(b)^2}}{2}$$

Análogamente para (3.16), tenemos

$$\overline{BD} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4(b)^2}}{2},$$

es decir,

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

son las soluciones de la ecuación a resolver $x^2 - ax + b^2 = 0$.

y consideremos $a_1 = 1$, $b_1 = -a$ y $c_1 = b^2$ como los coeficientes tomados de la ecuación a resolver,

Tenemos que si

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$$

entonces

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

que son las fórmulas que ofrece Descartes.

Otra observación importante es la relación entre $a$ y $b$.

## 3.2. Ecuaciones cúbicas.

En esta sección, con algunas ideas de Euclides y Apolonio, veremos un poco del Álgebra de Omar Jayyam, (Moreno [8]), particularmente expondremos cómo resuelve la ecuación de tercer grado de la forma $y^3 + by = c$, con $b > 0$ y $c > 0$, esto para mostrar que si es posible resolver algunos tipos de ecuaciones de tercer grado con regla y compás. No obstante recordemos que del problema de Delos se desprende la ecuación $x^3 - 2 = 0$, misma que, como veremos no es representable con geometría euclidiana.

Se sabe que a mediados del siglo XI en Nishapur, Corasán, actual Irán nació Omar Jayyam y que además de matemático fue un gran poeta. Jayyam escribió su libro *Álgebra* alrededor del 1074. El rastro más antiguo de esta obra es un fragmento resguardado por la Biblioteca Nacional de París de una copia de unos trece años posterior a su muerte, Jayyam, desaconseja la lectura de su libro a quien no conociera los *Elementos* y los *Datos* de Euclides, así como los dos primeros libros de las *Cónicas* de Apolonio.

Proposiciones importantes de los *Elementos* para entender el *Álgebra* son:

- Del Libro VI, proposición 2. Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina sobre los otros dos segmentos proporcionales.
- Del Libro VI, proposición 8. La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina.

Dichas proposiciones le fueron muy útiles a Jayyam, pues en ellas se basa, para trazar las soluciones de las ecuaciones. Otro libro que recomienda como conocimiento previo y que es de fundamental importancia para entender sus ideas son las *Cónicas* de Apolonio, obra compuesta por ocho libros, sólo de los primeros cuatro nos han llegado del original griego, los tres siguientes los conocemos por traducciones del árabe y del octavo se sabe perdido. Los métodos que utiliza Apolonio en las *Cónicas* son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años.

Sobre las cónicas escribieron otros matemáticos como Menecmo, Euclides y Arquímedes, pero se sabe que fue Apolonio quien las describe de un modo más sistemático y completo, y quien alrededor del siglo III a.C. publica su tratado donde recoge todo lo que se sabía sobre las cónicas y da a conocer muchos resultados más.

Anteriormente a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos según fuese el ángulo en el vértice agudo, recto u obtuso. Parece ser que Apolonio demostró por primera vez y de una manera formal que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único puede obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono.

En el primer libro de las Cónicas se habla de lo que sucede cuando cortamos un cono mediante un plano de distintas maneras. Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron un nombre específico, solo la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (u oxitoma), secciones de un cono rectángulo (u ortotoma), secciones de un cono obtuso (o amblitoma).

Los nombres de elipse, parábola y de hipérbola los da por primera vez Apolonio posiblemente por una sugerencia de Arquímedes, las cuales no eran palabras nuevas en absoluto y acuñadas por la ocasión, sino que fueron adaptas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas. *Elipsis*, que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadro (u otra figura dada). Mientras que la *Hyperbola* (avanzar más allá) se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra *Parábola* (colocar al lado o comparar) indicaba que no había ni deficiencia ni exceso. Apolonio aplicó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres para las secciones cónicas (observe figura 3.5).

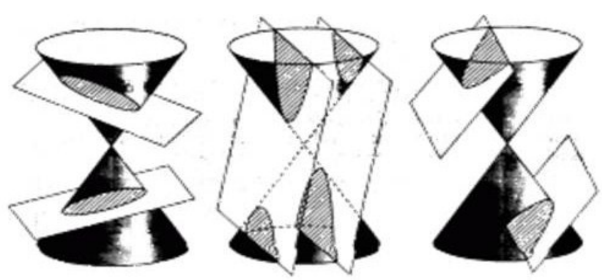



Figura 3.5: las Cónicas.

Con estas ideas de Euclides y Apolonio, veamos que realiza Jayyam con la ecuación de tercer grado de la forma $y^3 + by = c$, con $b > 0$ y $c > 0$.

De las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que tres, Jayyam reconoce veinticinco formas distintas. Seis de las cuales ya se habían estudiado por algebristas anteriores. Otras cinco son reducibles a éstas y las restantes catorce no pueden ser resueltas con regla y compás, ver cuadro [3] 3.1.

| | |
|---|---|
| $x^3 = c$ | $x^3 + bx = c$ |
| $x^3 + c = bx$ | $x^3 = bx + c$ |
| $x^3 + ax^2 = c$ | $x^3 + c = ax^2$ |
| $x^3 = ax^2 + c$ | $x^3 + ax^2 + bx = c$ |
| $x^3 + ax^2 + c = bx$ | $x^3 + bx + c = ax^2$ |
| $x^3 = ax^2 + bx + c$ | $x^3 + ax^2 = bx + c(*)$ |
| $x^3 + bx = ax^2 + c$ | $x^3 + c = ax^2 + bx$ |

Cuadro 3.1: Ecuaciones que no pueden ser resueltas con regla y compás

**Construcción 3.1.3** Solución de la ecuación $y^3 + by = c$ , con $b > 0$ y $c > 0$ , por Jayyam.

- Trazamos una parábola de lado recto $\sqrt{b} = \overline{AV}$ , es decir, que tenga ecuación $y^2 = \sqrt{b}x$
- Trazamos un segmento $\overline{VC} = \frac{c}{b}$ sobre la recta perpendicular a $\overline{AV}$ que pasa por V
- Tracemos una circunferencia de diámetro $\overline{VC}$, sea R el punto de intersección con la parábola.

[3] $(*)$ Ecuación del heptágono

- Sea S el pie de la perpendicular al diámetro desde R. Luego $\overline{VS}$, resuelve la ecuación (figura 3.6).

Es decir $\overline{VS} = y$ la solución para $y^3 + by = c$.

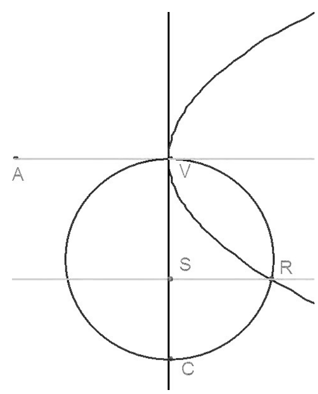



Figura 3.6: Representacion geometríca de la ecuacion $y^3 + by = c$.

A continuación demostremos el método Jayyam para las solución de las ecuación cúbicas de la forma $y^3 + by = c$ , con $b > 0$ y $c > 0$.

**Justificación**

Tenemos que $\triangle RSV \approx \triangle RSC$, Proposición 8 del Libro VI de los "Elementos", de Euclides.

Luego

$$\frac{\overline{VS}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SC}} \tag{3.17}$$

Por ser R punto de la parábola, se tiene que $\overline{SR}$ cumple que $y^2 = \sqrt{b}x$ , donde

$$\overline{VS} = y$$

$$\overline{AV} = \sqrt{b}$$

$$\overline{SR} = x$$

Sustituimos segmentos en la ecuación, entonces

$$(\overline{VS})^2 = (\overline{AV})(\overline{SR})$$

Tenemos

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{VS}} = \frac{\overline{VS}}{\overline{SR}} \tag{3.18}$$

Eleveamos al cuadrado

$$\left(\frac{\overline{AV}}{\overline{VS}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{VS}}{\overline{SR}}\right)\left(\frac{\overline{VS}}{\overline{SR}}\right) \tag{3.19}$$

Sustituimos, tenemos:

$$\frac{(\overline{AV})^2}{(\overline{VS})^2} = \left(\frac{\overline{VS}}{\overline{SR}}\right)\left(\frac{\overline{SR}}{\overline{SC}}\right) \tag{3.20}$$

Luego

$$(\overline{VS})^3 = (\overline{AV})^2(\overline{SC}) \tag{3.21}$$

tal que (3.21) queda de la forma

$$y^3 = \left(\sqrt{b}\right)^2 \left(\frac{c}{b} - y\right) \tag{3.22}$$

O bien $y^3 + by = c$ lo que demuestra que $\overline{VS} = y$ la solución para $y^3 + by = c$ para $b > 0$ y $c > 0$.

## 3.3. Abel y Galois.

Hemos mencionado que durante el siglo XVI los matemáticos habián resuelto ecuaciones de tercero y cuarto grados, incluso Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576), Ferrari (1522-1565), entre otros, dedujeron la fórmula general por radicales para dichos polinomios, lo natural fue extender los métodos para las de quinto grado o mayor pero no fue posible, incluso matemáticos distinguidos creyeron haber hallado la solución, pero no fue sino hasta principios del siglo XIX que el italiano Ruffini (1765-1822) y el genio noruego N. H. Abel (1802-1829) concibieron la revolucionaria idea de demostrar la imposibilidad de la solución de la ecuación algebraica de quinto grado por radicales.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) demuestra por primera vez en su tesis doctoral en 1799 que cualquier ecuación algebraica tiene soluciones, entonces no hay duda de la existencia de las raíces de un polinomio. El arte de resolver polinomios por métodos numéricos esta bastante detallado. Pero el problema de Abel y Ruffini era muy distinto, ellos querian saber si puede hallarse la solución por medio únicamente de operaciones racionales y de radicales, este fue el deseo que inspiró el magnífico desarrollo del Álgebra

Moderna y de la Teoría de Grupos comenzada por Ruffini, Abel y Galois (1811-1832).

Quizás, la disyuntiva comenzó al preguntarse: ¿Cómo pueden ser caracterizados los problemas construibles? Demostrar que los tres problemas clásicos y la construcción de polígos no caen en esta categoría fue el reto matemático que llevó a la gloria a Abel y Galois.

Los trabajos de Niels Henrik Abel (1802 - 1820) y Evariste Galois (1811 - 1832) fueron un parte aguas en la Historia de las Matemáticas, los problemas que se fueron arrastrando desde la Grecia Clásica comenzaron su fin. Gracias a la gran difusión del conocimiento científico en ese tiempo tuvieron acceso a muy temprana edad a las obras de los grandes matemáticos que los precedieron. La obra de ambos está estrechamente relacionada, y abrió importantes caminos en el pensamiento matemático, tal que sus nombres son mencionados frecuentemente en diversas ramas de las Matemáticas.

Abel fue el primero en demostrar rigurosamente que la fórmula general para la solución de la ecuación de quinto grado no existe. La teoría de Galois permite demostrar la imposibilidad de la resolución de las ecuaciones de quinto grado por radicales; también resuelve el problema del "caso irreducible"de la ecuación de tercer grado, que no es posible resolverse por radicales es necesario introducir los números complejos. La teoría de Galois representa el nacimiento de la teoría de grupos, a la que se le denomina la teoría moderna del álgebra. Veamos la idea principal en la que Abel y Galois demostraron que la ecuación general de quinto grado no se puede resolver por radicales.

En la sección 3.1 nos dimos cuenta que las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, René Descartes no incluye de la forma

$$x^2 + a = 0$$

la solución para este tipo de ecuaciones son simétricas, al observar está afirmación tenemos que salirnos del campo de los números reales. Esta simetría se denomina la conjugación, y transforma a cada número complejo de la forma $a + bi$ en el número complejo conjugado $a - bi$. La representación geométrica de los complejos, corresponde a la reflexión respecto del eje real, figura 3.7.

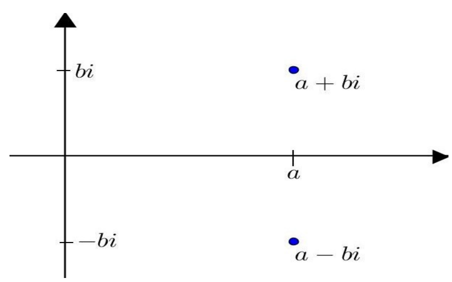



Figura 3.7: Representación de los números complejos.

Por ejemplo, para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, tendríamos que introducir el número $i = \sqrt{-1}$ donde $i$ es la solución a la ecuación anterior y su otra solución sería $-i$, trivial al ejemplo de la simetría en el campo de los números complejos.

El significado algebraico de esta simetría reside en el hecho de que conserva las operaciones. Denotamos por $\overline{z} = a - bi$ al conjugado del numero complejo $z = a + bi$, tenemos las propiedades (3.23).

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{z_2} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Para la solución de una ecuación nos aparece un radical, la ambigüedad que proviene del hecho de que hay varias raíces posibles nos genera varias simetrías de las soluciones y, en consecuencia, varias simetrías del campo de números que se obtienen agregando al campo en el que se encuentran los coeficientes, las soluciones de la ecuación. Por ejemplo para la solución de una ecuación del tipo

$$x^4 - a = 0$$

cuyos coeficientes están en el campo de los racionales, sus cuatro soluciones son: $\sqrt[4]{a}$, $-\sqrt[4]{a}$, $i\sqrt[4]{a}$ y $-i\sqrt[4]{a}$, (figura 3.8). Sus soluciones tienen las simetrías al girar 90°, 180°, 270° y 360°. Observamos así, que las simetrías de las soluciones se derivan de los radicales en la fórmula general, cuando existe, lo cual nos lleva a uno de los enigmas más sorprendentes de la Matemáticas; las ecuaciones de quinto grado.

La demostración de que no existe una formula general para la solución de ecuaciones de quinto o mayor grado, se basa en presentar una ecuación cuyas

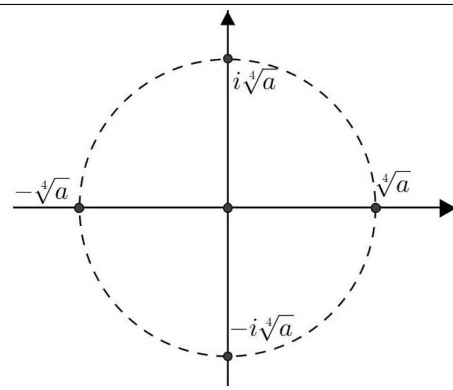



Figura 3.8: Solución de una ecuación del tipo $x^4 - a = 0$.

soluciones sean más simétricas de lo que se podría deducir de una formula con radicales. Es decir, hay ecuaciones cuyas soluciones son tan simétricas que ninguna fórmula con radicales sería capaz de poseer una riqueza de simetrías equivalentes. Lo deseado era encontrar una fórmula general, que pudiera resolver cualquier ecuación, entonces en contra positiva, basto con encontrar una ecuación para la cual ninguna fórmula sirve para así demostrar que dicha fórmula no existe.

# Capítulo 4

# Teoremas para el criterio de construcción

*"¡No llores!.Necesito todo mi coraje*
*para morir a la edad de 20 años."*
E. Galois a su hermano

Gauss a sus diecisiete años, investigando la constructibilidad de los polígonos regulares p-ágonos, donde p es un número primo, (se conocía la construcción para p=3 y 5) descubrió que el p-ágono regular es construible si y sólo si p es un "número de Fermat", donde $p = 2^{2^n} + 1$, que sea primo. Este descubrimiento le valió a Gauss para que se erigiera una estatua suya de bronce en Gotinga en un pedestal de base 17-ágono regular.

Los primeros cinco números de Fermat que son primos son: 3, 5, 17, 257, 65537. Cabe mencionar que en 1732 Euler (1707 - 1783) descubre la factorización para el 65537, por lo tanto F(5) no es primo y por lo tanto no es construible.

En el siguiente teorema nos dice si $\alpha$ [1] es construible, llamémosle a $F_0$ el campo de los números racionales, podemos incluir $\alpha$ en un campo obtenido partiendo de $F_0$ por un número finito de extensiones cuadráticas, Herstein [6].

## 4.1. Teorema: El criterio para que un número real sea construible

**Teorema 1.** *El número real $\alpha$ es construible si y sólo si podemos encontrar un número finito de números reales $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que:*
*1) $\lambda_1^2 \in F_0$.*
*2) $\lambda_i^2 \in F_0(\lambda_1, ..., \lambda_{i-1})$ para $i = 1, 2, ...n$,*
*tales que $\alpha \in F_0(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.*

($\Rightarrow$) Se F cualquier subcampo del campo de los números reales. Consideremos todos los puntos $(x, y)$ en el plano real euclidiano cuyas dos coordenadas $x$ y $y$, están en F. Llamemos al conjunto de estos puntos el plano de F.

A toda recta £ que une dos puntos A$(s, t)$ y B$(u, v)$ en F, le corresponde

[1] Un número real $\alpha$ se dice que es un número construible si únicamente usando la regla y compás podemos construir un segmento rectilíneo de longitud $\alpha$

una ecuación. Sea $(x, y)$ cualquier punto en £, entonces,

$$\frac{y-t}{x-s} = \frac{v-t}{u-s}$$

expandimos

$$(t-v)x + (u-s)y + [(v-t)s - (u-s)t] = 0$$

renombramos los coeficientes con $a, b, c$, entonces £ tiene ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

donde todos los $a, b, c$ están en F.

El conjunto de los números construibles forman un subcampo, W, del campo de los números reales, es decir, si $\alpha$ y $\beta$ son construible entonces $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ y $\frac{\alpha}{\beta}$ (cuando $\beta \neq 0$) son construibles.

$\alpha$ y $\beta$ son construibles, entonces $\alpha \pm \beta$ es construible. Sobre la recta £ trazamos $\overline{AB} = \alpha$, trazamos una circunferencia con centro en B y radio $\beta$, que es interceptada por £ en D y C, si $\beta \geq 0$ entonces $\alpha + \beta$ es construible y si $\beta \leq 0$ entonces $\alpha - \beta$ es construible, imagen 4.1

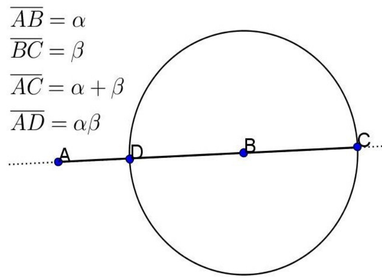



Figura 4.1: $\alpha \pm \beta$ construibles.

Si $\alpha$ y $\beta$ son construibles, entonces $\alpha\beta$ es construible. Sobre la recta £ trazamos $\overline{AC} = \beta$ y $\overline{AB} = \alpha$ sobre los lados de un ángulos A, sobre $\overline{AB}$ trazamos $\overline{AD} = 1$, trazamos una paralela a $\overline{DC}$ que pase por B, tal que corta a £ en E, luego $\overline{AE} = \alpha\beta$, fugura 4.2,

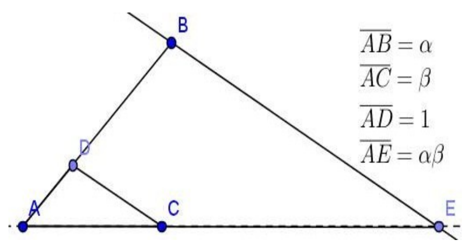



Figura 4.2: $\alpha\beta$ construible.

luego los $\triangle ADC$ y $\triangle ABE$ son semejantes, tienen en común el $\angle BAE$ y $\angle ACD$=$\angle AEB$ como $\overline{DC}$ es paralela a $\overline{BE}$, entonces $\angle ADC$=$\angle ABE$, luego

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

depejamos

$$\overline{AE} = \frac{(\overline{AB})(\overline{AC})}{\overline{AD}} = \alpha\beta$$

entonces $\alpha\beta$ es construible.

Si $\alpha$ y $\beta$ son construibles, entonces $\frac{\alpha}{\beta}$ es construible. Trazamos $\overline{AB} = \beta$ y $\overline{AC} = \alpha$ sobre los lados de un ángulos A, sobre $\overline{AB}$ trazamos $\overline{AD} = 1$, trazamos una paralela a $\overline{BC}$ que pase por D, tal que corta a $\overline{AC}$ en E, luego $\overline{AE} = \frac{\alpha}{\beta}$, fugura 4.3,

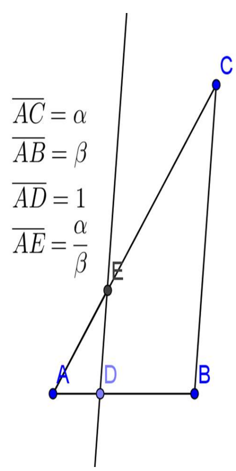



Figura 4.3: $\frac{\alpha}{\beta}$ construible.

luego los $\triangle AED$ y $\triangle ACB$ son semejantes, tienen en común el $\angle BAC$ y $\angle ADE$=$\angle ABC$ como $\overline{BC}$ es paralela a $\overline{DE}$, entonces $\angle AED$=$\angle ACB$, luego

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

despejamos

$$\overline{AE} = \frac{(\overline{AD})(\overline{AC})}{\overline{AB}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

entonces $\frac{\alpha}{\beta}$ es construible.

Entonces el conjunto de los números construibles forman el subcampo W.

Como $\zeta$ es una circunferencia construible tiene como centro un punto $P(s,t)$ en el plano de F y un radio $r > 0 \in$ F. Sea $(x,y)$ un punto arbitrario de $\zeta$ entonces del triángulo rectángulo, figura 4.4

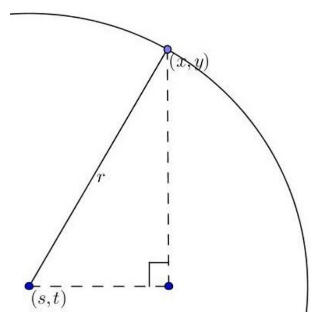



Figura 4.4: Construcción de la ecuación de la circunferencia.

Por Pitágoras tenemos $(x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$, luego

$$x^2 + y^2 - 2sx - 2ty + s^2 + t^2 - r^2 = 0$$

renombramos a nuestros coeficientes, entonces $\zeta$ tiene una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

donde $a, b, c \in$ F.

Dadas dos rectas en F que se interceptan en el plano real, entonces su punto de intersección esta en el plano de F, tenemos las ecuaciones de las rectas.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

con $a_i, b_i, c_i \in$ F.
resolvemos el sistema de nuestras ecuaciones, despejando a $x$ y $y$ e igualamos, nuestra solución será:

$$x = \frac{a_1c_2 - C_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

tal que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ de lo contrario nuestras rectas serían paralelas y no tendríamos punto de intersección, nuestros coeficientes están en F. Como F es un campo, entonces nuestros puntos de intersección esta en F.

Por otra parte la intersección de una recta en F y una circunferencia en F no necesariamente nos va dar un punto en el plano de F. Como tenemos que la ecuación de una recta en F es de la forma $ax+by+c = 0$ y la circunferencia en F que es de la forma $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, donde $a, b, c, d, e, f \in$F.

Demostremos que cuando una recta y una circunferencia de F en el plano real, entonces se interceptan en un punto en el plano de F o en el plano de F($\gamma$) para algún positivo $\gamma$ $\in$F.Si tenemos nuestro sistema de ecuaciones:

$$ax + by + c = 0 \tag{4.1}$$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \tag{4.2}$$

con $a, b, c, d, e, f$ $\in$F despejando x de (4.8)

$$x = \frac{-by - c}{a} \tag{4.3}$$

sustituimos (4.3) en (4.9), entonces

$$\left(\frac{b}{a^2 + 1}\right) y^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{db}{a} + e\right) y + \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{dc}{a} + f\right) = 0$$

llamamos a nuestros coeficientes $A, B, C$

$$Ay^2 + B + C = 0 \tag{4.4}$$

donde $A, B, C$ $\in$F, luego la solución a nuestra ecuación (4.4) es

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.5}$$

donde $\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{\gamma}$, entonces si $\sqrt{\gamma}$ $\in$F, nuestra solución estará en F, pero si

$\sqrt{\gamma}$ $\notin$F, entonces

$$\frac{-B \pm \sqrt{\gamma}}{2A} \in F(\gamma)$$

hemos encontrado nuestra solución para la intercesión de la circunferencia en F y la recta en F.

Finalmente la intersección de dos circunferencias en F puede realizarse como la de una recta en F y una circunferencia en F, si las ecuaciones de las circunferencias son:

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \tag{4.6}$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{4.7}$$

igualamos (4.6) y (4.7), su intersección, es la intersección con cualquiera de las circunferencias con la recta

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$$

también nos da un punto en el plano de F o en el plano de F($\gamma$) para algún positivo $\gamma \in$F.

Así pues las rectas y las circunferencias de F nos llevan a puntos en F o en extensiones cuadráticas de F. Si ahora en F($\gamma$) para alguna extensión cuadrática de F, entonces las rectas y las circunferencias en F($\sqrt{\gamma_1}$) se interceptan en puntos en el plano de F($\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}$) donde $\gamma_2$ es un número positivo en F($\sqrt{\gamma_1}$). Un número es construible partiendo de F si podemos encontrar números reales $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que $\lambda_1^2 \in F$, $\lambda_2^2 \in F(\lambda_1, \lambda_2)$,. . . ,$\lambda_n^2 \in F(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$, tales que los puntos están en el plano F($\lambda_1, ..., \lambda_n$).

($\Leftarrow$) Sea Z$\in F_0(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, ...\sqrt{\gamma_n})$ y Z$\notin F_0(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, ...\sqrt{\gamma_{n-1}})$ entonces

$$Z = \alpha + \beta\sqrt{\gamma}$$

con $\alpha, \beta \in F_0(\sqrt{\gamma_1}, ...\sqrt{\gamma_{n-1}}), \beta \neq 0$, como $\alpha$ y $\beta$ son construibles, solo necesitamos que $\sqrt{\gamma_n}$ sea contruible, con los mismos pasos de la construcción 3.1.1, figura 4.5. Consideremos A(0,0) entonces tendremos el centro de la

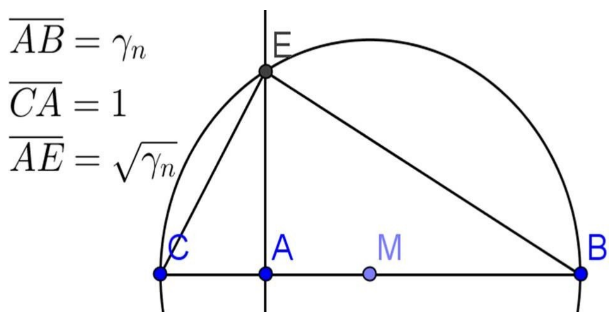



Figura 4.5: $\gamma$ es realizable como intersección de rectas y circunferencias en F.

circunferencia en $\left(\frac{\gamma_n - 1}{2}, 0\right)$ y de radio $r = \frac{\gamma_n + 1}{2}$, cuya ecuación es

$$\left(x - \frac{\gamma - 1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^2$$

expandimos

$$x^2 - (\gamma_n + 1)x + y^2 = \gamma_n \tag{4.8}$$

la recta que pasa por los puntos C(-1,0), A(0,0), intercepta a la circunferencia cuya ecuación es

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{-1 - 0}{0 - 0}$$

luego

$$1 * x + 0 * y + 0 = 0 \tag{4.9}$$

de (4.8) y (4.9), tenemos un sistema de ecuaciones, la cual en (4.9) x=0, luego la sustituimos en (4.8), tenemos

$$y = \sqrt{\gamma_n} \qquad y = -\sqrt{\gamma_n}$$

luego $\sqrt{\gamma_n}$ es construible por lo que, entonces Z es construible. Entonces podemos construir $\gamma$ como una intersección de rectas y circunferencias en F.

Así pues, un punto es construible partiendo de F si y sólo si podemos encontrar un número finito de números reales $\gamma_1, ..., \gamma_n$, tales que

1. $[f(\gamma_1) : F] = 1o2$
2. $[f(\gamma_1, ..., \gamma_i) : F(\gamma_1, ..., \gamma_{i-1})] = 1o2$ para $i = 1, 2, ..., n$, y que además, nuestros puntos se encuntran en el plano de $F(\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

*Q.E.D*

Luego de teorema 1 se tienen los siguientes corolarios:

### 4.1.1. Corolario: Las extensiones de los racionales con grado de potencia 2.

**Corolario 1.1.** *Si $\alpha$ es construible entonces $\alpha$ se encuentra en alguna extensión de los racionales de grado una potencia de 2.*

Calculamos el grado de $F_0(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sobre $F_0$, lo podemos descomponer de la forma,

$$[F_0(\lambda_1, ..., \lambda_n) : F_0] = [F_0(\lambda_1, ..., \lambda_n) : F_0(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})]...$$
$$...[F_0(\lambda_1, ..., \lambda_i) : F_0(\lambda_1, ..., \lambda_{i-1})]...[F_0(\lambda_1) : F_0]$$

Como cada término del producto es 1 o 2, por lo tanto

$$[F_0(\lambda_1, ..., \lambda_n) : F_0] = 2^r$$

*Q.E.D*

### 4.1.2. Corolario: Los polinomios irreducibles sobre el campo de los números racionales con grado de potencia 2.

**Corolario 1.2.** *Si el número real $\alpha$ satisface un polinomio irreducible sobre el campo de los números racionales de grado K, y si K no es una potencia de 2, entonces no es construible.*

Si $\alpha$ es construible, por el corolario 1.1, hay un subcampo K de los reales tal que $\alpha \in K$ y tal que $[K : F_0] = 2^r$.
Pero $F_0(\alpha) \subset K$, luego $[F_0(\alpha) : F_0][K : F_0] = 2^r$; por tanto $[F_0(\alpha) : F_0]$ es también una potencia de 2. Pero si $\alpha$ satisface un polinomio irreducible de grado K sobre $F_0$,entonces $[F_0(\alpha) : F_0] = K$. Por lo tanto es no construible.

*Q.E.D*

# Capítulo 5

# Teoremas de imposibilidad de construcciones.

*"Piensa como piensan los sabios,*
*mas habla como habla la gente sencilla."*
Aristoteles

En el capítulo 4 vimos un teorema y dos corolarios los cuales nos dieron las herramientas para la construcción de un número real $\alpha$. En este último capítulo conoserermos tres teoremas particulares de la imposibilidad de construcción, Herstein [6].

Recordemos del capítulo 1 que existen tres problemas los cuales no pudieron ser resueltos en la Grecia Clásica, en el capítulo 2 el heptágono tampoco pudo ser resulto con regla y compás, en el capítulo 3 tratamos de resolver nuestros problemas geométricos traduciéndolos al lenguaje algebraico, es decir haciendo uso de ecuaciones. En este último capítulo habiendo recorrido varios intentos atreves de la historia finalmente el Álgebra Moderna nos da teoremas para los criterios de construcción con regla y compás.

## 5.1. Teorema: La imposibilidad de la trisección del ángulo.

**Teorema 2.** *Es imposible, usando solo regla y compás, trisecar el ángulo de 60°.*

Supongamos que podemos trisecar el ángulo de $60°$ con regla y compás, entonces la longitud $\alpha = \cos 20°$ si se podria construir.

Usando identidad trigonométrica

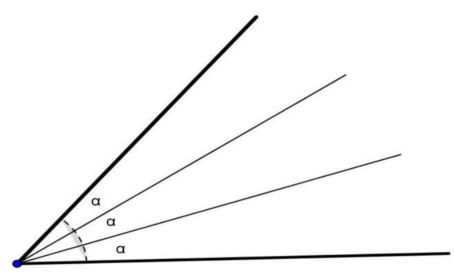



Figura 5.1: Trisección del ángulo.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

haciendo $\theta = 20°$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

obtenemos

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2}$$

de donde

$$8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$$

Luego $\alpha$ es una raíz del polinomio $8x^3 - 6x - 1 = 0$ sobre el campo racional. Este polinomio es irreducible sobre el campo racional, si este polinomio pudiera reducirse a grado 2, tendría una raíz racional, ya que su raíz debería ser 1 ó -1, pero estas no son raices. Por lo tanto, el polinomio mínimo para $\cos 20°$ es de grado 3, que no es potencia de 2, entonces por el corolario 1.2 de Teorema 1, $\alpha$ no es contruible. por tanto el ángulo de 60° no puede ser trisecado.

*Q.E.D*

## 5.2. Teorema: La imposibilidad de la duplicación del cubo.

**Teorema 3.** *Con el uso exclusivo de la regla y compás es imposible duplicar el cubo.*

Tomemos el cubo unitario de lo cual su volumen sera 1, entonces la longitud de nuestro $\alpha$ es de la forma $\alpha^3 = 2$, entonces $\alpha$ sera la raíz del polinomio $x^3 - 2$ el cual es ireducible en $Q$, ya que tiene como raíz $\sqrt[3]{2}$, dos complejas conjugadas que ninguna esta en $Q$.

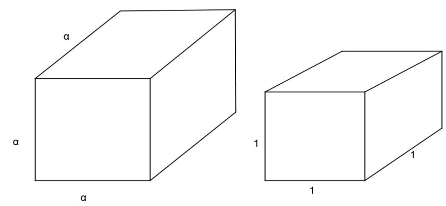



Figura 5.2: Duplicación del cubo unitario.

Entonces la forma de escribir un polinomio de grado 3, como producto de dos polinomios con un grado mayor o igual a 1, es que tenga grado 2 y otro que sea igual 1, entonces no puede ser reducido ya que el de grado 1 tendria raíz en $Q$. por el corolario 1.2 $\alpha$ no es construible.

*Q.E.D*

## 5.3. Teorema: La imposibilidad para la construcción de un heptágono regular.

**Teorema 4.** *Es imposible construir un heptágono regular con regla y compás.*

Consideraremos el problema de encontrar el lado de un heptágono regular inscrito en un círculo unitario. La mejor manera de deshacerse de este problema es utilizando los números complejos. Tomemos el heptágono regular inscrito en una circunferencia con centro en (0,0) y radio 1.

Consideremos nuestro vértice $z$ en coordenadas polares (figuar 5.3)

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = e^{i\left(\frac{2\pi}{7}\right)} \tag{5.1}$$

$$z^{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = e^{-i\left(\frac{2\pi}{7}\right)} \tag{5.2}$$

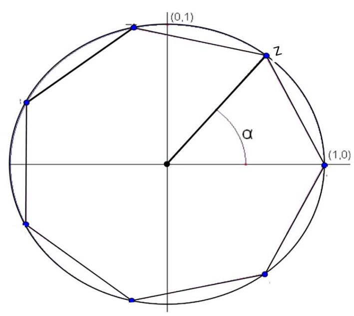



Figura 5.3: Heptágono regular.

por la fórmula De Moivre, tenemos $z^7 = 1$, donde los vértices del heptágono estarán dados por las raíces de esta ecuación. Una de las raíces de esta ecuación es evidentemente $z = 1$, las otras seis raíces estarán dadas por la ecuación:

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$
$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

como $z \neq 1$

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

dividimos nuestra ecuación entre $z^3$ y tenemos:

$$\frac{1}{z^3}(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$$z^3+z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}=0$$

factorizando tenemos

$$(z+z^{-1})^3+(z+z^{-1})^2-2(z+z^{-1})-1=0 \tag{5.3}$$

considerando que $\alpha = z+z^{-1}$ y sustituimo en (5.3) tenemos:

$$(\alpha)^3+(\alpha)^2-2(\alpha)-1=0 \tag{5.4}$$

ahora por (5.1) y (5.2) tenemos:

$$\alpha = z+z^{-1} = e^{i\left(\frac{2\pi}{7}\right)}+e^{-i\left(\frac{2\pi}{7}\right)} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \tag{5.5}$$

Este polinomio es irreducible sobre el campo racional, si este polinomio pudiera reducirse a grado 2, tendría una raíz racional, ya que su raíz debería ser 1 ó -1, pero estas no son soluciones para el polinomio. Entonces $\alpha$ es una raíz del polinomio $x^3+x^2-2x-1=0$ sobre el campo de los racionales, pero el polinomio mínimo para $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ es de grado 3, que no es potencia de 2, entonces por el corolario 1.2 de Teorema 1, $\alpha$ no es contraíble, entonces tampoco lo será $z$. y en consecuencia el heptágono no es construible con regla y compás.

*Q.E.D*

**La cuadratura del círculo**

Sea un circulo de radio $R$, entonces su área será de la forma

$$\pi R^2$$

A partir de él deseamos construir un cuadrado de misma área. Supongamos que este cuadrado tiene sus lados de longitud $L$. Por tanto

$$\pi R^2 = L^2$$

luego

$$\sqrt{\pi} R = L.$$

Entonces el problema de construir un cuadrado con área igual a la de un circulo dado cuyo radio sea igual a la unidad equivale a la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ como el lado del cuadrado requerido. Tal segmento será construible si solo si el número $\pi$ es construible, ya que Descartes dio la construcción para las raíces cuadradas.

A la Luz de la caracterización general de los números construibles, podríamos mostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo mostrando que el número $\pi$ no puede estar contenido en ningún campo $F_k$ que pueda alcanzarse mediante la adjunción sucesiva de raíces cuadradas al campo racional $F_0$; como todos los miembros de cualquiera de esos campos son números algebraicos, es decir, números que satisfacen ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros, será suficiente si puede mostrarse que el número $\pi$ no es algebraico, es decir, que es trascendente.

La técnica necesaria para demostrar $\pi$ es un número trascendente fue creada por Charles Hermite (1822-1905), quien demostró que el número $e$ es trascendente. Mediante una ligera extensión del método de Hermite, F. Lindemann tuvo éxito (1882) al demostrar la trascendencia de $\pi$, dejando así definitivamente resuelta la vieja cuestión de la cuadratura del círculo. La demostración está al alcance de análisis avanzado, pero queda fuera de la relación con este trabajo.

Hemos encontrado la razón por la cuales estos tres problemas clásicos y el heptágono, no pueden ser resueltos empleando únicamente la regla y el compás.

# Conclusiones

La idea de este trabajo fue mostrar los tres problemas clásicos, además de algunos intentos para resolverlos. Vimos la construcción y sus justificaciones, enunciamos y demostramos teoremas del Álgebra Moderna que concluyen en la imposibilidad de resolver los tres problemas clásicos y la construcción de en ciertos polígonos con regla y compás.

Hemos recorrido estos temas a través de la Historia de las Matemáticas y pudiendo observar que en esta ciencia hay un mundo de posibilidades, que la forman de enfrentarse a los problemas puede ser impredecible e incluso ajena a todo lo ya establecido y que a veces al aceptar una negación se puede llegar a una verdad demostrable.

Observemos que un problema nos lleva a otro y con ello una relación entre las diversas áreas de las Matemáticas que no son aisladas una de la otra, como por ejemplo la Geometría Euclidiana y el Algebra Moderna.

# Glosario

- $=$ → Igualdad.
- $\approx$ → Semejanza.
- $\cong$ → Congruencia.
- **A,B,C** → Puntos.
- $\overline{AB}$ → Segmento que va del punto A al punto B.
- £ → recta.
- $\zeta_O$ → Circunferencia con centro en O.
- $\triangle EAB$ → Triángulo formado por los puntos EAB.
- $\angle ABC$ → Ángulo que comprende los puntos ABC.
- $\widehat{AC}$ → Arco que comprende los puntos A y C.
- $a(\widehat{AC})$**;** $a(\triangle ABC)$ → Área del arco comprendida por los puntos AC.Área del triángulo formado por los puntos ABC.
- $[K : F]$ → K extensión finita de F.
- $Q.E.D.$ (quod erat demonstrandum) → Lo que se quería demostrar.

# Bibliografía

[1] Bold, B. (1969). *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* Dover Publications, Inc. New York.

[2] Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática.* Alianza editorial.

[3] Courant, R. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica.

[4] Descartes, R. (1996). *La Geometría.* Ed. Limusa.

[5] Euclides (Reimpresión, 1991). *Elementos.* Editorial Gredos S.A.

[6] Herstein, I. (1996). *Álgebra Moderna.* Editorial Trillas.

[7] López, S. (1972). *Sistemas de ecuaciones.* Programa Nacional de Formación de Profesores. Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES).

[8] Moreno, R. (2002). *Omar Jayam. Poeta y matemático.* Colección La matemática en sus personajes. Editorial Nivola.

[9] Rivaud, J. (1987). *Acerca del cálculo diferencial e integral.* CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemáticas. V Coloquio del Departamento de Matemáticas.

[10] Rodríguez, N. (2011). *Soluciones Geométricas de Ecuaciones Algebraicas.* Tesis para obtener el grado de Maestro en Didáctica de las Matemáticas. Dirigida por M. en C. Roberto Torres Hernández. Universidad Autónoma de Querétaro. Facultad de Ingeniería.

[11] Vera, F. (1970). *Científicos Griegos, tomo II.* AGUILAR.