Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

"Visualización de los cuerpos platónicos por medio de su destazamiento con ayuda de software de Geometría Dinámica para los niveles de secundaria, preparatoria y superior"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Salvador Lacaba Domínguez

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio

SINODALES

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	Firma
Dra. Teresa Guzmán Flores Secretario	Firma
M. D. M. Carmen Sosa Garza Vocal	Firma
M. D. M. Ángel Balderas Puga Suplente	Firma
M. D. M. Alexander Bell Mejía Suplente	Firma

Dr. Gilberto Herrera Ruíz Director de la Facultad	Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Junio de 2010
México

RESUMEN

Los cuerpos o sólidos platónicos han sido trascendentales en la historia de la ciencia; y hoy en día se siguen utilizando, por lo que no podemos dejar de presentarlos a las nuevas generaciones. Sin embargo, en la actualidad en las instituciones la geometría presenta una dificultad que se encuentra en todos los niveles de la educación, particularmente por la visualización que tienen que hacer sobre objetos y/o símbolos que éstos representan. Razón por la que es necesario abordar la enseñanza de la geometría desde otras perspectivas y con otras herramientas, especialmente la referente al estudio de los cuerpos geométricos.

Usando como herramienta la realización de cortes a los cuerpos por medio de planos en puntos específicos que nos proporcionan la simetría de los polígonos con los que están construidos los poliedros se puede realizar un mejor estudio de dichos poliedros y de esta forma identificar mejor sus propiedades.

Una opción para realizar esta labor es con el uso de aplicaciones informáticas (software) dirigidas al estudio de la geometría del espacio de manera dinámica. El software permite ver en la pantalla de la computadora los “objetos geométricos”, como también permite manipularlos sin que éstos pierdan sus propiedades geométricas, ahorrando tiempo al docente; si este quisiera realizar actividades como estas de manera física en el salón de clases.

(**Palabras clave**: Didáctica de la geometría, poliedros, destazamiento)

SUMMARY

The bodies or platonic solids have been vital within the science history; and nowadays they still been used, so that we cannot stop showing them to the new generations. However, in the actuality the geometry institutions show a difficulty, which is present in all the levels of education, particularly for the visualization that they have to do over objects or symbols that these represent. This is why is necessary to approach geometry teaching from other perspectives and with other tools, specially the one referring to the geometry bodies study.

Using as tool the realization of cuts to the bodies through planes in specific points that provides us the polygons symmetry that construct the polyhedrons it can be done a better study of those polyhedrons and this form identify better your properties.

A way to realize this action is with the use of informatics applications (software) directed to the solid geometry study dynamically. The software allows us to see in the computer screen “the geometric objects”, as well as it allows us to manipulate them without losing not their geometric properties, saving time the teaching; if he wanted realize activities like these ones physically in the class room.

(**Key word**: Didactic geometry, polyhedrons, truncate)

Dedicatorias

A mi padre y a mi familia.

A los maestros que se preocupan por sus alumnos.

Agradecimientos

A mi padre y mi tía Tere por su apoyo, impulso e inspiración a cursar esta maestría.

A mi hermana Shumaí, Cesar su esposo y mis primas por su apoyo incondicional en mis proyectos.

Antonio y Héctor por ayudarme, motivarme y estar conmigo en todo el transcurso de la maestría.

A mis compañeros; Ellis, Areli, Nora y Pedro por su apoyo y compañerismo en todo el trayecto.

Al Dr. Víctor Larios por su apoyo durante mis estudios y en la elaboración de este trabajo. Así como a todos los maestros que trabajaron en nuestra formación en la maestría.

ÍNDICE

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

1. INTRODUCCIÓN

Una idea muy antigua, la de los cuerpos platónicos, ha sido trascendental en la historia de la ciencia y hoy en nuestros días se sigue utilizando por lo que no podemos dejar de presentarla a las nuevas generaciones. Sin embargo, actualmente la Geometría en las instituciones educativas, se ha convertido en una serie de ejercicios metodicos que como consecuencia se tiene una apatía y desgano por parte de los alumnos. Se les dificulta a los alumnos de todos los niveles de la educación particularmente por la visualización que tienen que hacer sobre objetos y/o símbolos que éstos representan. Razón por la que es necesario abordar la enseñanza de la Geometría desde otras perspectivas, especialmente la referente al estudio de los cuerpos geométricos.

Primeramente presento la geometría para ubicarnos en la materia en la que esta hecho el trabajando, posteriormente se aborda el tema de los cuerpos platónicos; su historia y sus propiedades. Después escribo sobre la geometría y la visualización. Todo con el fin de poder obtener una mejor visualización de los cuerpos platónicos por lo que presento algunos destazamientos, los cuales se realizaran haciendo uso de la simetría, permitiendo así identificar mejor las propiedades de los cuerpos y encontrar las relaciones entre los cuerpos.

Este proyecto está dirigido a los docentes de matemáticas de los niveles de secundaria, preparatoria y superior. Con el fin de ser un apoyo en sus clases en los temas relacionados con el estudio de poliedros.

Puede ser usado en varios temas afines a las matemáticas o simplemente que deseen ampliar o desarrollar la capacidad de visualización de los alumnos tanto de los cuerpos como del espacio.

1.1. OBJETIVO

El objetivo de este trabajo el estudio de las propiedades de los poliedros por medio de destazamientos con el uso de software como herramienta.

El trabajo se realiza bajo la siguiente hipótesis: el uso del software dinámico para el estudio de poliedros favorece la visualización de los poliedros, su aprendizaje y manejo, así como la observación y aprendizaje de sus propiedades.

1.2. PREGUNTAS

¿De qué manera se puede utilizar el recurso de destazar los poliedros para estudiar sus propiedades?

¿El software de geometría dinámica puede ayudar en este proceso de estudio?

1.3. JUSTIFICACIÓN

"Las personas mayores aman las cifras. Cuando les habláis de un nuevo amigo, no os interrogan jamás sobre lo esencial. … He visto una casa de cien mil francos. Entonces exclaman; ¡Que hermosa es!" (De Saint-Exupéry, 1984, pág. 23-24)

Deseando que los alumnos no se conviertan en esos adultos apáticos a su entorno. Quiero que vean lo esencial y aprecien las propiedades de las formas para dar un toque de belleza en su vida e incrementar su cultural.

En la actualidad la geometría en los colegios se ha convertido en una serie de operaciones algebraicas que ha desembocado en una apatía y desgano en los alumnos. Se dificulta en los alumnos de todos los niveles de la educación en mayor parte por la visualización que tienen que hacer sobre objetos y/o símbolos que representan estos. Por lo cual se convierte en un sacrificio y una lucha contra el docente por su comprensión.

Por eso debemos unirnos al grupo de docentes que no solamente reproduzcan los ejercicios de un libro de texto y ser de aquellos que realmente muestren un camino o cultiven en sus alumnos las ganas de buscar el conocimiento y la cultura, debelar a sus ojos la luz de la curiosidad.

Como una idea muy antigua, la de los cuerpos platónicos, ha sido trascendental en la historia de la ciencia, hoy en nuestros días se sigue utilizando, y no podemos dejar de presentarla a las nuevas generaciones con el reto de ellos continuar contribuyendo en la larga lista en la humanidad de personas que los han trabajado y aportado a pulir su esplendor.

Como define Fausto Ongay "Las matemáticas son la manera que tenemos de elevar a la categoría de un arte nuestros esfuerzos cognoscitivos" (Fausto Ongay, 2000, pág. 9). Para poder entender y comprender la matemática debemos acercarnos a los trabajos que se han realizado en el transcurso de la humanidad donde se pueden ver conceptos matemáticos. De paso se toma un poco de cultura que falta hace en nuestro país y si queremos ser educadores lo debemos realizar en todas las áreas y no solo en nuestra materia.

En México hay una corriente de artistas que buscan hacer sus obras por medio de figuras geométricas o con base en ellas, por lo cual es de destacar y mostrar a los alumnos que en nuestro país se pueden y se hacen trabajos de esta índole.

Uno de los artistas que trabaja eso en México es Carvajal y el justifica su pasión por el arte de esta forma:

"Siempre ha estado relacionada con mi pasión por la ciencia y la tecnología, la mayoría de mis esculturas son resultado de razonamientos matemáticos, físicos, del volumen y la presencia de la tercera dimensión en el espacio, los colores y sus posibilidades combinatorias.

Sin embargo, la escultura del caballito es el resultado de muchos años de trabajo gozoso, a lo largo de los cuales me le adelante al Rubick, el creador del famoso y popular cubo que se convirtió en un juguete masivo, al crear esculturas desplegables que se abren y se doblan y desdoblan, ofreciéndonos la posibilidad de descubrir el maravilloso universo de la geometría." (Hipograpo)

2. GEOMETRÍA

En este capitulo se presentaran algunos aspectos generales de la geometría, por la mimsa naturaleza del trabajo. Posteriormente también se darán las propiedades generales de la geometría plana con la simetría, la geometría espacial con la isometría, que son las herramientas con las cuales se realizaran los cortes que de los poliedros regulares.

La geometría se encuentra como una de las principales y más antigua rama de la matemática con la que trabajaron varias culturas como los griegos. Platón (Atenas, 427 - 347 a. C.) hace referencia de su importancia solicitando que los ciudadanos de su estado no descuiden su estudio en el libro de la "República", tomándola como una ciencia necesaria ya que "…atrae al alma hacia la verdad, forma en ella el espíritu filosófico, obligándola a dirigir sus miradas, en lugar de posarlas en las cosas terrenales." (Platón, 1989)

Euclides de Alejandría alrededor del 300 a.C. quien es conocido como "El Padre de la Geometría", escribe las bases de la geometría en "Los elementos" donde presenta la recopilación de las definiciones y propiedades de la geometría conocida en su época. Dicho material son las bases de una geometría que se utiliza actualmente.

También se afirma que la geometría se encuentra acompañando a la humanidad desde aproximadamente el 2000 a. C., como observamos en este esquema del árbol genealógico de la matemática presentado por Margenau y Bergamini en su libro "El científico" (1981, pág. 86-87).

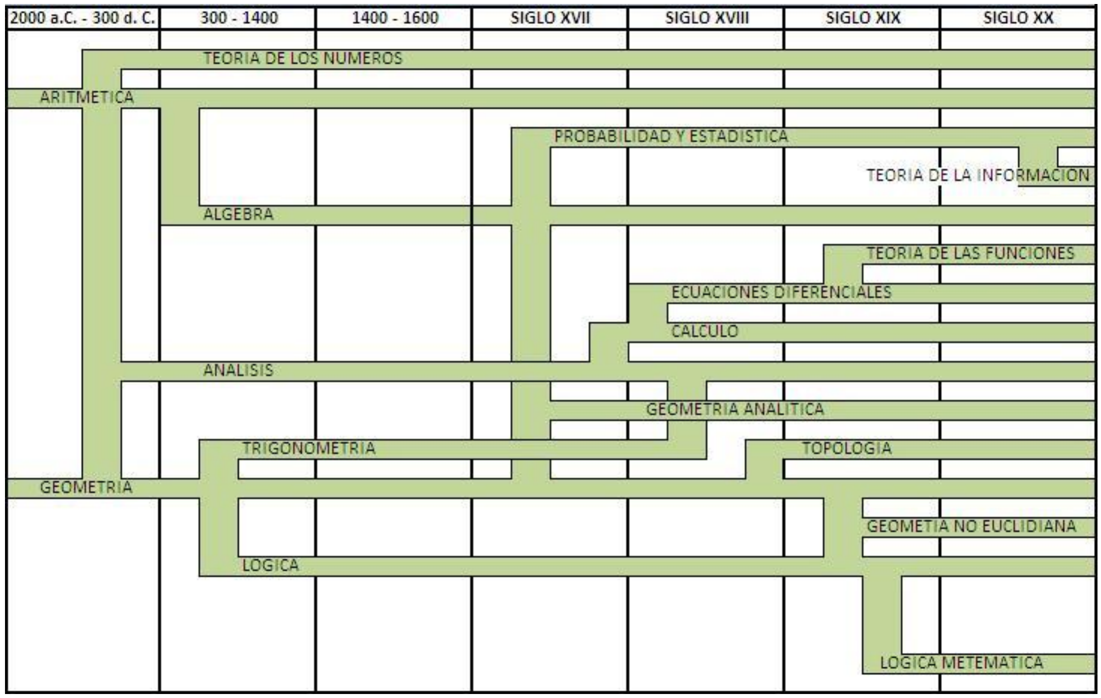


Ilustración 1 - Árbol genealógico de las Matemáticas

Se usará la definición de la geometría como:

La rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio. (Española, R. A. 2008)

Esta a su vez tiene algunas divisiones como:

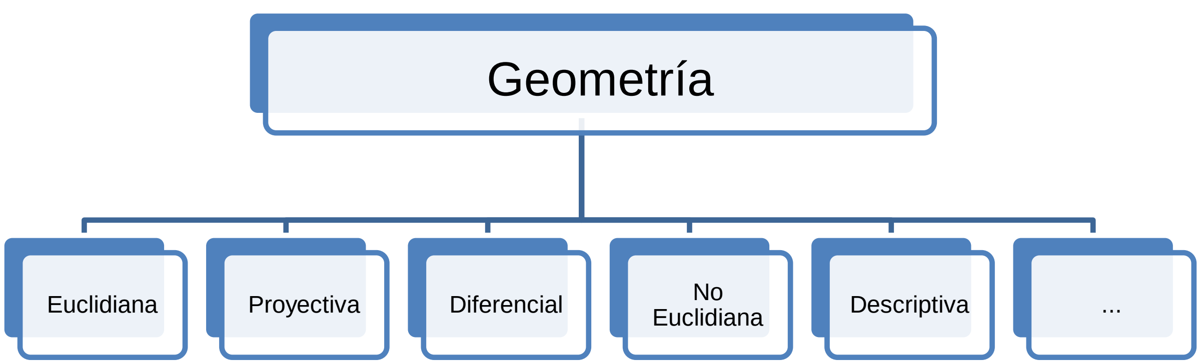


Ilustración 2 - Ramas de la Geometría

2.1. GEOMETRÍA PLANA

David Hilbert identificó tres sistemas básicos de los objetos para la geometría: puntos, líneas, y planos. El plano es una superficie de dos dimensiones con longitud y anchura infinita y ningún grueso.

Postulado del plano.

Por dos rectas que se cortan pueden pasar un plano, y sólo uno.

Corolario 1. Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.

Corolario 2. Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.

Corolario 3. Dos paralelas determinan un plano.

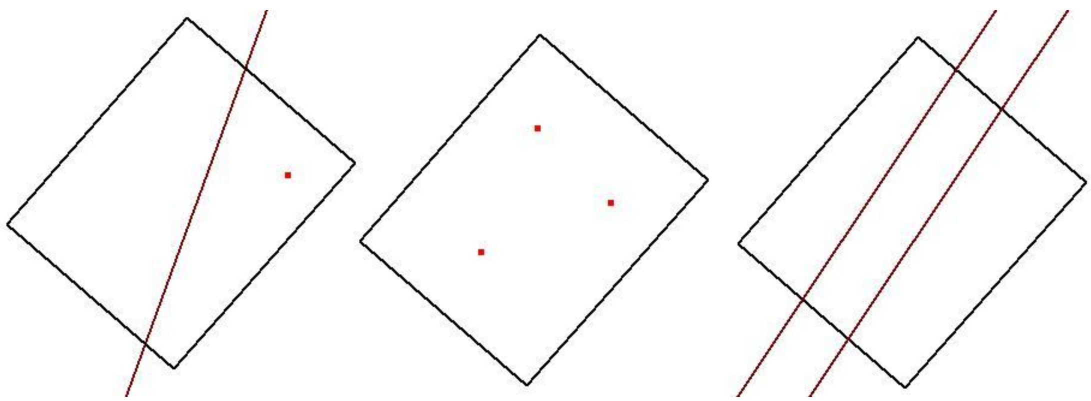


Ilustración 3 - Plano

Con el concepto de plano presentado ya se puede hablar de la geometría plana, por lo que: La geometría plana se trata del estudio de las figuras planas, o sea de las figuras cuyas partes están todas en un mismo plano.

En esta geometría se trabaja en un plano con lo cual únicamente tiene dos dimensiones, llamadas comúnmente largo y ancho, aunque esto puede cambiar dependiendo como coloquemos los objetos. En ellos se puede estudiar su perímetro, que es el contorno de una figura, y su área, el espacio del interior de la figura.

2.1.1. Simetría

En el diccionario de la “Real Academia Española” se encuentran las siguientes definiciones de simetría:

Simetría. (Del lat. symmetrĭa, y este del gr. συμμετρία).

1. Correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo.
2. Geometría. Correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano.

Usaremos la definición de la simetría como la propiedad que tiene una figura con respecto a un punto, recta o plano de ser reflejada de forma idéntica y cubrir la totalidad de la figura original.

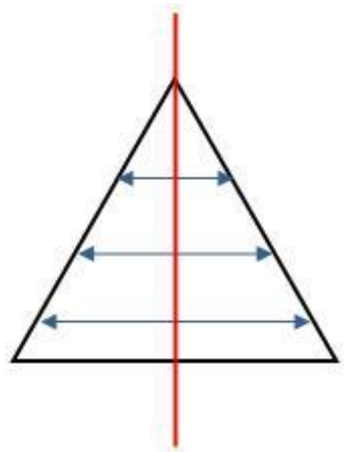


Ilustración 4 - Simetría

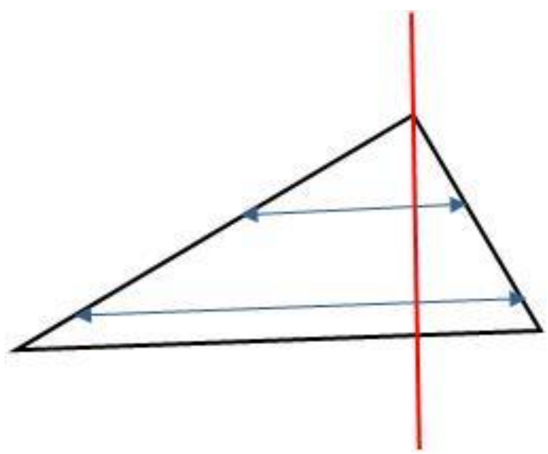


Ilustración 5 - Antisimetría

En la simetría se definen los siguientes elementos:

- **Centro de simetría:** Punto de una figura u objeto, tal que cualquier recta que por él pase ha de encontrar a ambos lados y a la misma distancia puntos correspondientes.

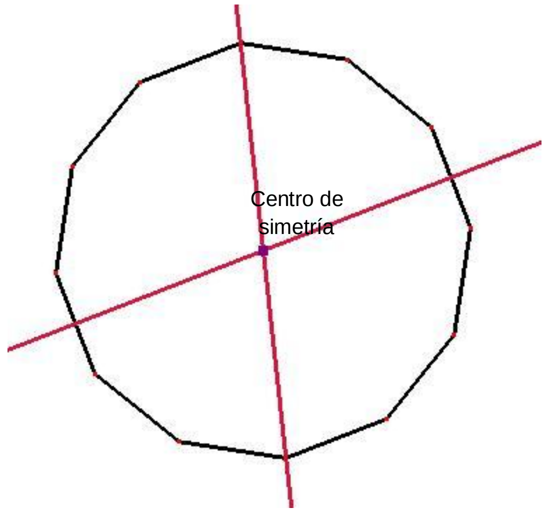


Ilustración 6 - Centro de simetría

- **Eje de simetría:** Recta que, al ser tomada como eje de giro de una figura o cuerpo, hace que se superpongan todos los puntos análogos.

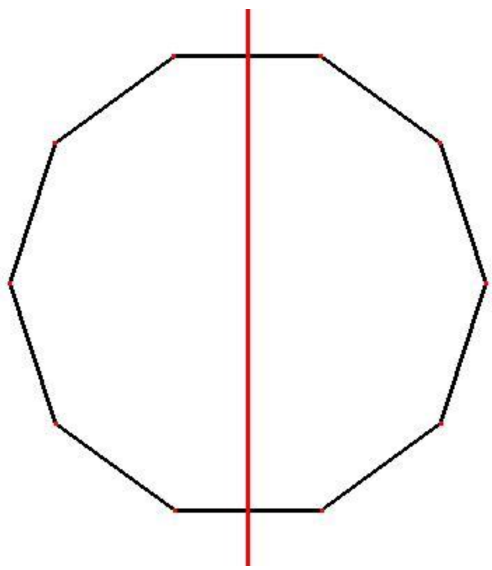


Ilustración 7 - Eje de simetría

- **Plano de simetría:** El que divide una figura o un cuerpo en dos partes, de tal modo que una figura geométrica se transforma en sí misma por una aplicación de simetría.

En la simetría se encuentran operaciones matemáticas, tales como las rotaciones, las reflexiones y las traslaciones, que se utilizan para describir con precisión los cambios de las partes de una figura.

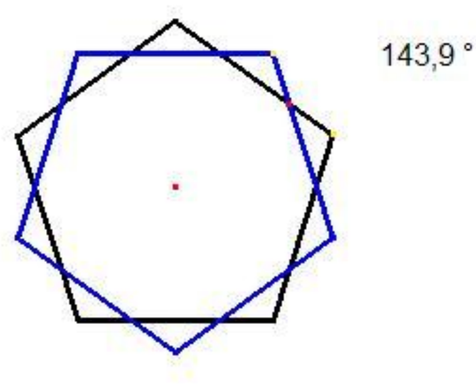


Ilustración 8 - Rotación

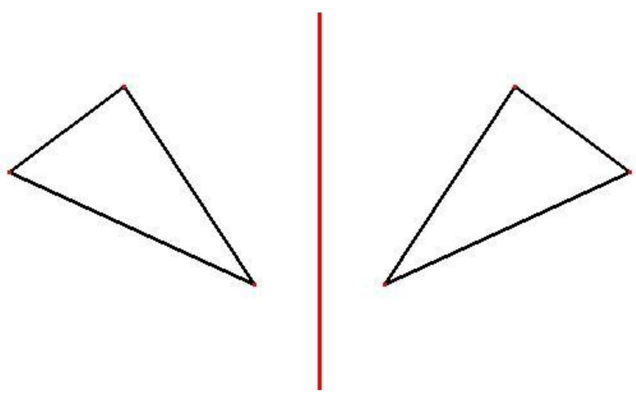


Ilustración 9 - Reflexión

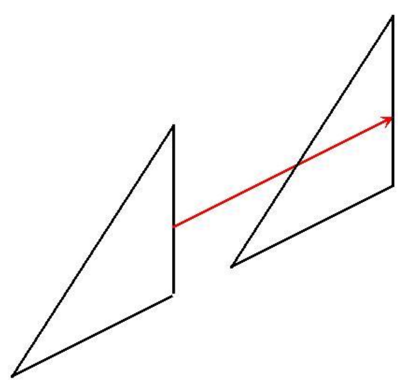


Ilustración 10 - Traslación

2.1.2. Figuras simétricas

Después de ver la simetría procedemos a aplicarla en las figuras.
Así, una figura es simétrica con respecto a un punto si el punto bisecta toda recta que pasa por él termina en el contorno de la figura.

Una figura es simétrica con respecto a un eje si el eje bisecta toda perpendicular a él limitada por el contorno de la figura.

Dos figuras son simétricas entre sí con respecto a un punto o un eje cuando todo punto de la una es simétrico con un punto de la otra.

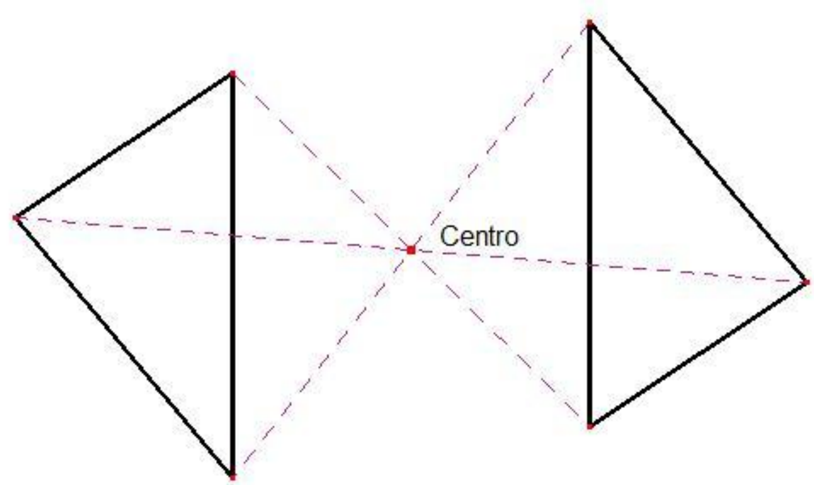


Ilustración 11 - Figuras simétrica con respecto a un punto

Se llaman *figuras isométricas* cuando sus perímetros son iguales.

Un polígono es una figura plana limitada mediante aristas y vértices. Se considera simple cuando sus aristas se pueden deformar continuamente hasta alcanzar el círculo sin cambios en sus propiedades topológicas.

Un movimiento, en el plano o en el espacio, es una transformación que cambia de posición todos los puntos del mismo, si bien, para algunos movimientos hay puntos que permanecen invariantes y figuras que, aunque todos sus puntos cambien de lugar, siguen siendo invariantes globalmente.

2.1.3. Transformaciones

Algunas transformaciones que convierten cualquier figura en una figura igual. Es decir, conservan las distancias. estas son congruentes y se llaman isometricas.

Así la **isometría** es la transformación que conserva las distancias, como la rotación, o en particular el giro de 180°. Las isometrías forman la base de congruencia: dos figuras son congruentes si y sólo si, una puede transformarse en la otra mediante una isometría.

Reflexión otra transformación que conserva las distancias estas con respecto a una recta, denominada eje de reflexión. Cada punto de este eje es invariante, es decir, es su propia imagen reflejada.

Traslación conserva las distancias entre dos puntos cualquiera y la dirección de la recta que los une.

Rotación otra transformación que conserva las distancias entre dos puntos. En estos el plano gira un ángulo dado alrededor de un punto. De esta forma el tamaño y la forma de las figuras permanecen invariantes, pero todos sus puntos se mueven a lo largo de arcos de circunferencias concéntricas. El centro, que puede pertenecer o no a la figura girada, es el único que permanece fijo.

En este árbol genealógico de las transformaciones presentado por Coxeter (1993, pág. 101) vemos como nos presenta esas herramientas geométricas.

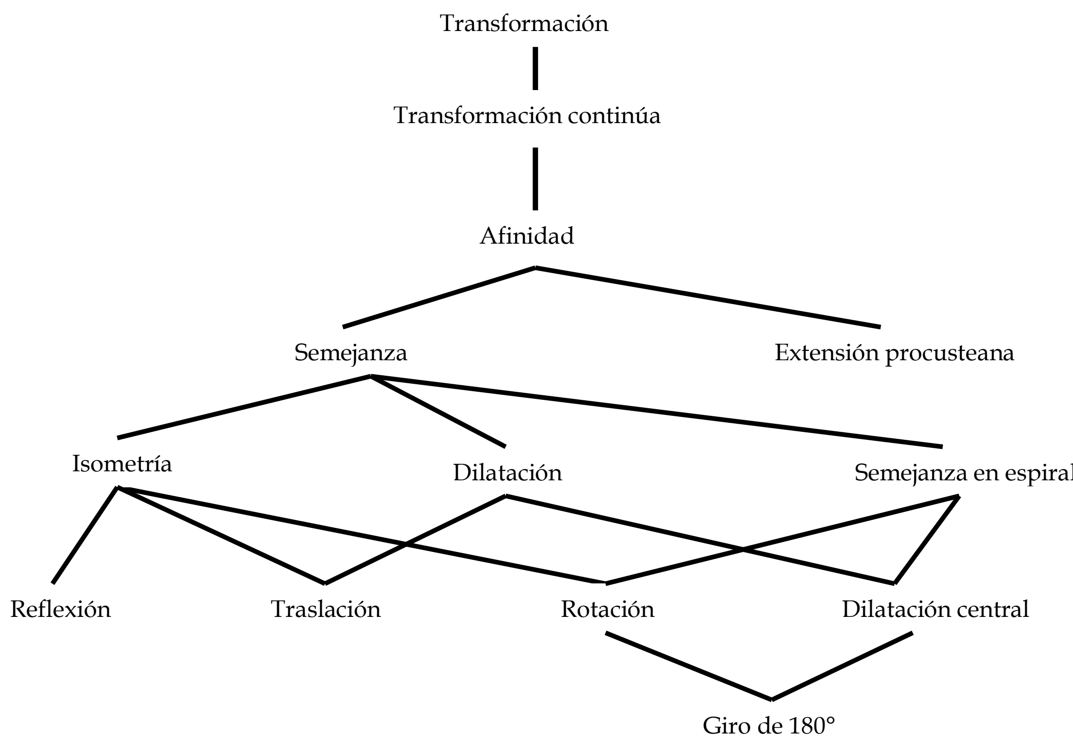


Ilustración 12 - Árbol genealógico de las transformaciones

2.2. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría plana trata de figuras de tres dimensiones, y de las propiedades y relaciones de las líneas y superficie en general. Pero cuando en el estudio agregamos una dimensión más pasamos a la geometría del espacio. La geometría espacial cuenta con tres dimensiones, largo, ancho y alto. Al igual que la geometría plana los nombres pueden cambiar dependiendo como coloquemos la figura en el espacio.

2.2.1 Isometrías en el espacio

Podemos analizar los poliedros poniendo énfasis en su simetría, regularidad y belleza, frente a las descripciones de los elementos que los componen y otras propiedades. Busquemos las simetrías que los organizan.

A los movimientos que mantienen la forma y el tamaño de los objetos se les llama isometrías.

En el siguiente esquema vemos las isometrias del plano y el espacio.

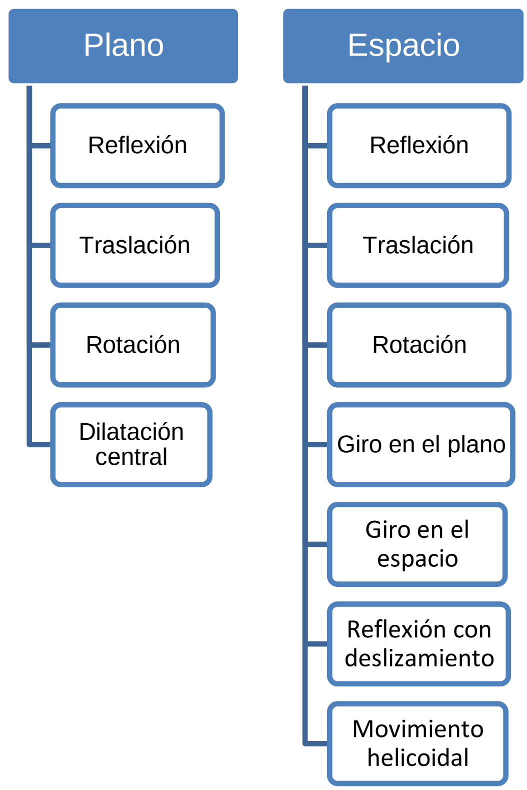


Ilustración 13 - Isometrías Plano vs Espacio

2.3. SIMETRÍA

2.3.1 Simetría del cuadrado, triángulo equilátero y pentágono regular

Se presenta la simetria de los siguientes poligonos: el cuadrado, el triangulo equilátero y el pentágono regular los cuales generan los cuerpo platónicos. La simetría se utilizará como base de los cortes para realizar el trabajo deseado en los cuerpos platónicos.

2.3.1.1. El cuadrado

Es un cuadrilátero tiene 4 ejes de simetría: 2 que pasan por los puntos medios de lados opuestos y 2 que cortan por sus diagonales.

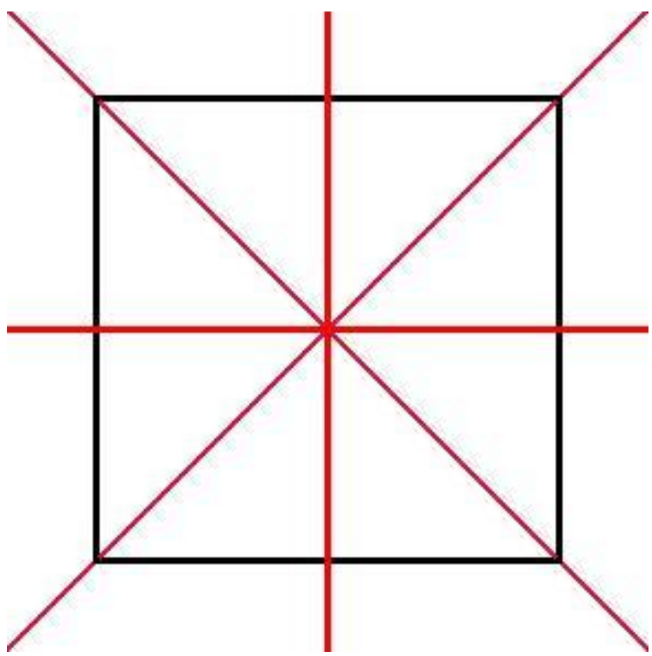


Ilustración 14 - Simetría del cuadrado

Al cortar el cuadrado por una línea horizontal se obtienen dos rectángulos con la misma base que el cuadrado y con una altura de la mitad de este, por consiguiente los rectángulos tienen la mitad del área del cuadrado. En el caso del cuadrado cortado por una linea vertical es similar. Cuando es cortado por rectas que cruzan por las diagonales opuestas se generan dos triángulos rectángulos isósceles, es decir con un ángulo recto y dos lados congruentes.

2.3.1.2. Triangulo equilátero

En el podemos trazar rectas que pasen por un vértice y pasen por el punto medio del lado opuesto, esta recta es perpendicular a la base por ser un triangulo equilátero.

Esta recta genera dos triángulos escalenos cuya hipotenusa es de la misma medida que el lado del triangulo equilátero y la base es de la mitad de un lado equilátero. Por ser triángulo equilátero las tres rectas que se pueden trazar generan los mismos casos.

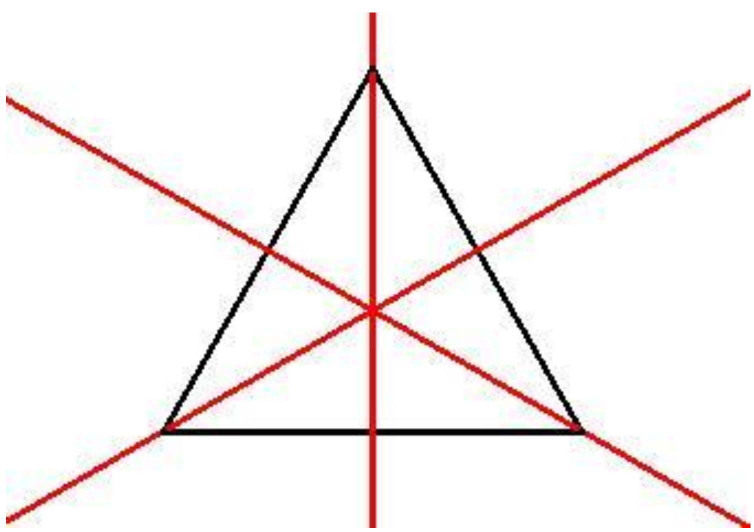


Ilustración 15 - Simetría del triangulo equilátero

2.3.1.3 Pentágono regular

Es el polígono con mayor dificultad de analizar ya que si solamente tomamos una recta que pase por un vértice del pentágono y por el punto medio del lado opuesto obtenemos una figura irregular de cuatro lados con dos lados congruentes con la misma medida que el pentágono, un lado con la mitad del lado de pentágono y el otro lado tiene la misma altura que el pentágono.

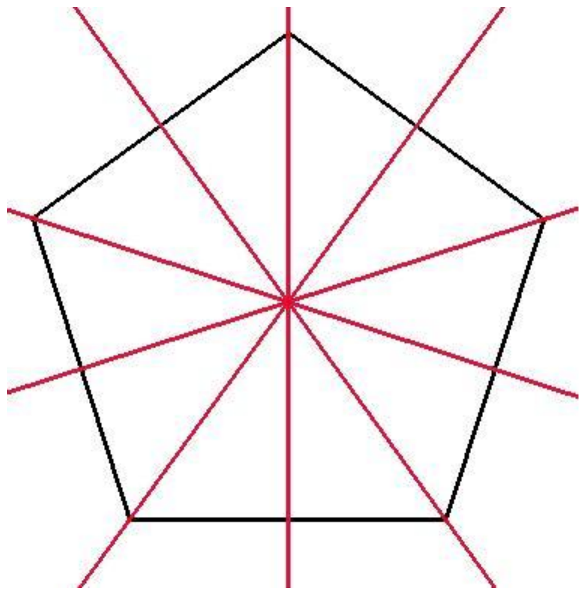


Ilustración 16 - Simetría del pentágono regular

Sin embargo si estudiamos el pentágono con las cinco rectas que pasan por los vértices y los puntos medios de los lados opuestos encontramos diez triángulos escalenos, que si los juntamos por parejas de tal forma que cubran un lado del pentágono obtenemos cinco triángulos isósceles cuyo lado desigual es del a misma medida que un lado del pentágono, los lados congruentes son radios de una circunferencia cuyo centro es el centro del pentágono y circunscribe al pentágono.

3. CUERPOS PLATÓNICOS

3.1. HISTORIA

En Geometría, los sólidos de caras planas reciben el nombre de "poliedros". (Del griego, *polys* múltiples y *hedra* cara.) Los poliedros cuyas caras son polígonos regulares congruentes, aquellos cuyos lados cuentan con las misma medida, se llaman **poliedros regulares***,* también conocidos como *Sólidos Platónicos.*

Desde hace siglos se sabe que sólo existen cinco poliedros regulares convexos: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el cubo o hexaedro (seis caras cuadradas), el octaedro (ocho caras triangulares), el dodecaedro (doce caras pentagonales) y el icosaedro (veinte caras triangulares). Los restos arqueológicos más antiguos en los que aparecen estas figuras poliédricas son unas piedras talladas del neolítico (aproximadamente 2,000 a.C.) encontradas en Escocia. (Extremiana, 2004)

Ilustración 17 - Cuerpos Platónicos neolíticos

Ilustración 18 - Sólidos regulares neolíticos

El origen de estas piezas puede ser de índole estético, místico o religioso, pero también es posible que fueran observadas en la naturaleza en la forma de algunos cristales o en esqueletos de animales marinos. (González, 2003)

Gordon Plummer en su obra *The Mathematics of the Cosmic Mind,* afirma que la mística hindú asocia el icosaedro con el *Purusha*, la semilla-imagen de Brahma, el creador supremo, la imagen del hombre cósmico. Mientras que el dodecaedro es asociado con Prakiti, el poder femenino de la creación, la Madre Universal, la quintaesencia del universo natural. (González, 2003)

Los cinco poliedros regulares se les llama “Cuerpos Platónicos” porque Platón en su diálogo “Timeo o De la naturaleza” explica la creación y construcción del universo. Dice: “Cuando Dios se propuso poner orden en el universo, mostraban ya el fuego, la tierra, el aire y el agua trazas de su propia naturaleza; pero no obstante, estaban en el estado en que deben encontrarse las cosas de las que Dios está ausente; empezó Él por distinguirlas por medio de formas y números.”

Explica como el cubo, octaedro, tetraedro e icosaedro se construyen a partir de triángulos rectángulos para asignar a cada elemento un cuerpo de acuerdo a sus propiedades: a la tierra, el cubo; al aire, el octaedro; el fuego, al tetraedro; el agua y al icosaedro. Posteriormente menciona que quedaba una última combinación, de la que Dios sirve para trazar el plano del universo. Asignando éter al dodecaedro. (Platón, 1989).

Cubo	Octaedro	Tetraedro	Icosaedro	Dodecaedro
Tierra	Aire	Fuego	Agua	Éter

Ilustración 19 - Los elementos representados por los cuerpos platónicos

Es en el libro XI de Euclides perteneciente al compendio titulado como ”los elementos” donde se encuentra el comienzo de trabajar con ellos de una manera formal.
Él presenta una definición de cuatro de ellos:

> **Definición 25**. Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados congruentes.
>
> **Definición 26**. Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos congruentes y equiláteros.
>
> **Definición 27**. Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos congruentes y equiláteros.
>
> **Definición 28**. Un dodecaedro es la figura sólida comprendida per doce pentágonos congruentes equiláteros y equiángulos.

El tetraedro no es definido por Euclides en este Libro XI más hace mención del él bajo el nombre de "pirámide" en la proposición 13 del Libro XIII, esto lo realiza así porque lo considera una pirámide triangular. (Euclides, 1991)

Los artistas del Renacimiento manifestaron gran interés por los poliedros. El estudio más completo fue realizado hacia 1480 por Piero della Francesca (1416–1492) en su obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*.

Luca Pacioli (1445–1509) inspirándose en las fuentes clásicas como Platón y Euclides y en los trabajos de Piero della Francesca, hace un estudio exhaustivo de los poliedros regulares y semirregulares en su obra *La Divina Proporción* donde abundan las referencias esotéricas y místicas En este libro aparecen numerosas ilustraciones de poliedros con dibujos hechos por su amigo Leonardo da Vinci (1452–1519), como los que se muestran a continuación. (Pacioli, 1509)

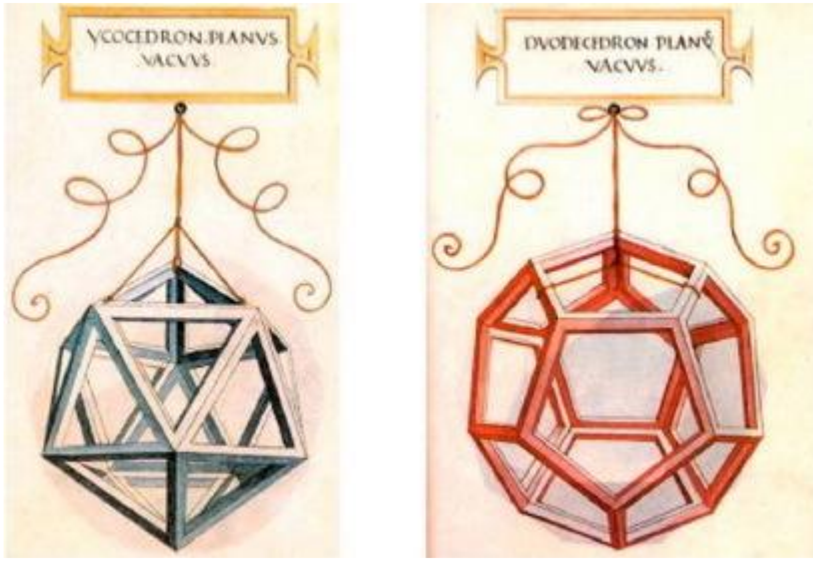


Ilustración 20 - Ilustraciones de Leonardo da Vinci en el libro de Luca Pacioli

Kepler (1571–1630), usa las ideas platónicas de la asociación de sólidos a entidades cósmicas para presentar la estructura del universo. En un folleto de 1596 titulado “El misterio Cósmico”.

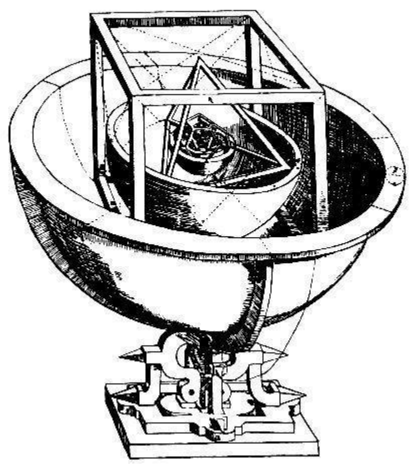


Ilustración 21 - Modelo Cósmico de Kepler

Por otro lado la importancia de los poliedros y la manera en la que aparecen en diversos campos que han tenido interés para el ser humano a lo largo de la historia, encontramos a un gran número de personajes que los utilizaron para presentar sus ideas o como base en la creación de sus obras.

3.2. CONSTRUCCIÓN

Se entiende que un polígono es una región del plano determinada por un número finito de segmentos. Estos segmentos se denominan lados o aristas y sus extremos vértices del polígono.

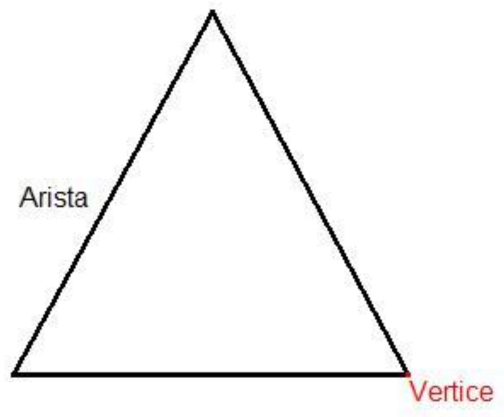


Ilustración 22 - Elementos del polígono

El polígono se llama regular si todos sus lados son congruentes y todos los ángulos determinados por las aristas en los vértices también son congruentes. Se dice que el polígono es convexo si es una región convexa; es decir, que el segmento que une dos puntos cualesquiera de la región está contenido en ella. De modo análogo, pensando en el espacio tridimensional, se dice que un poliedro es un cuerpo sólido limitado por una superficie que consta de un número finito de polígonos no coplanarios a los que se denomina caras del poliedro. Se llama regular si sus caras son polígonos regulares congruentes y se dice que es convexo si es una región convexa.

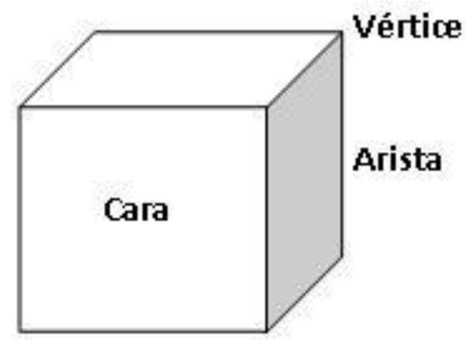


Ilustración 23 - Elementos del poliedro

De forma parecida puede pensarse en dimensiones sucesivamente mayores para obtener solidos que comúnmente se llaman politopos, y en particular los politopos regulares y convexos, cuya existencia y número están bien determinados.

Para la construcción de los poliedros requerimos de sus elementos. Los ángulos poliedros: formados por tres o más caras, con un vértice común. Un ángulo poliedro convexo debe tener por lo menos tres planos, y la suma de sus caras debe ser menor de 360°.

1. ° Puesto que cada ángulo de un triangulo equilátero es de 60°, pueden formarse ángulos poliedros convexos juntando tres, cuatro o cinco triángulos equiláteros. La suma de seis ángulos de 60° es 360°, y por tanto mayor que las de las caras de todo ángulo poliedro convexo. Por tanto, puede habar sólo tres poliedros regulares de caras triangulares.

2. ° Puesto que cada ángulo de un cuadrilátero es de 90°, puede formarse con tres cuadrados un ángulo poliedro. La suma de cuatro ángulos de 90° es de 360°, y por tanto puede haber sólo un poliedro regular de caras cuadradas.

3. ° Puesto que cada uno de los ángulos de un pentágono regular es de 108°, puede formarse un ángulo poliedro juntando tres pentágonos regulares. La suma de cuatro ángulos de 108° es de 423°, y por tanto no puede haber ángulo poliedro convexo que los tenga por caras, ni más de un poliedro regular de caras pentagonales.

4. ° La suma de tres ángulos de un hexágono regular es de 360°; la de tres de un heptágono regular (polígono regular de siete lados) es mayor que 360°, y las de tres de cualquier polígono regular de más de siete lados es también mayor que 360°.

Luego no puede haber más de cinco poliedros regulares convexos. Estos poliedros son: el tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro regulares.

Figura	Ángulos	Caras	Suma	Poliedro
Triangulo equilátero	60°	3	180°	Tetraedro
	60°	4	240°	Octaedro
	60°	5	300°	Icosaedro
	60°	6	~~360°~~	No
Cuadrado	90°	3	270°	Hexaedro
Pentágono	108°	3	324°	Dodecaedro
Hexágono	120°	3	~~360°~~	No
Heptágono	128.57°	3	~~385.71~~	No

Ilustración 24 - Construcción de los poliedros

En 1750 Leonhard Euler (1707 - 1783) publicó su "teorema de poliedros", el cual indica la relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro simple (sin orificios) cualquiera. En el que también concluye que sólo pueden ser cinco los sólidos regulares.

Un poliedro es un sistema finito compuesto de un conjunto de polígonos planos, tal que todas las aristas de uno de los polígonos pertenezcan a otro polígono. Los poliedros más importantes son los poliedros simples.

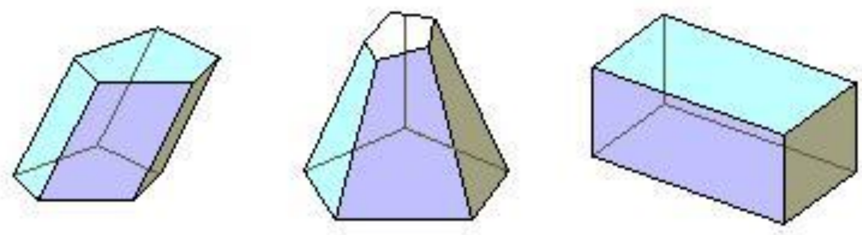


Ilustración 25 - Poliedros simples

Un poliedro es simple cuando es topológicamente equivalente a una esfera, topología es la parte de la geometría que investiga la relación y la posición relativa de las figuras geométricas; esto es, que puede ser deformado continuamente hasta alcanzar la esfera. Es posible construir muchas clases de poliedros, ya que consisten de varias combinaciones con las aristas rectas y curvas, caras planas y curvas, formas convexas y cóncavas.

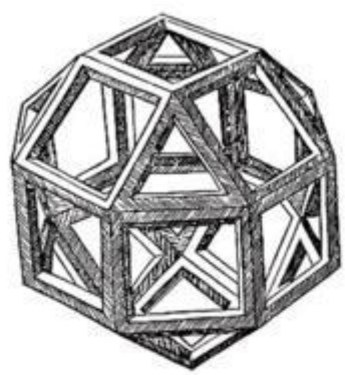


Ilustración 26 - Poliedro compuesto

Solamente cinco poliedros son posibles de acuerdo con las condiciones limitantes siguientes:

1. todos los polígonos son convexos;
2. todos los polígonos son regulares;
3. todos los polígonos en un poliedro son congruentes;
4. todos los vértices son idénticos;
5. todos los ángulos diedrales son congruentes.

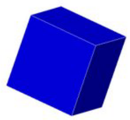
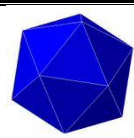
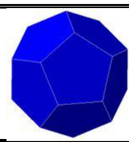
POLIEDRO REGULAR		CARAS	VÉRTICES	ARISTAS	ARISTAS POR VÉRTICES	SENO DEL ANGULO / CARAS
HEXAEDRO O CUBO		6 cuadrados	8	12	3	1
TETRAEDRO		4 triángulos equiláteros	4	6	3	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
OCTAEDRO		8 triángulos equiláteros	6	12	4	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ICOSAEDRO		20 triángulos equiláteros	12	30	5	$\frac{2}{3}$
DODECAEDRO		12 pentágonos regulares	20	30	3	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$

Ilustración 27 - Características de los poliedros regulares.

Euler relaciono caras, vértices y aristas de un sólido platónico diciendo que en todo poliedro convexo, el número de vértices (V) menos el número de aristas (A) más el número de caras (C) es igual a dos, algebraicamente: V – A + C = 2. Para su demostración ver Anexo 1.

Con la notación {L, V} que significa, el primer término es el número de lados del polígono y el segundo término es el número de polígonos que se encuentran en un vértice, los cuerpos platónicos quedan como hexaedro {4,3}, tetraedro {3,3}, octaedro {3,4}, icosaedro {3,5} y dodecaedro {5,3}.

Hay que poner atención a las parejas que se generan bajo esta notación, se observa que a excepción del tetraedro que es un {3, 3} que en ambas tiene el mismo número, podemos acomodar estas parejas por pares por tener en su par los mismos números es decir hexaedro {4,3} con octaedro {3,4} y el icosaedro {3,5} con el dodecaedro {5,3}. Esto es el siguiente punto que se analizará.

3.3. DUALIDAD DE LOS CUERPOS PLATÓNICOS

Aún más asombroso es ver lo que se conoce como la dualidad de los cuerpos platónicos o reciprocidad poliédrica, en donde se encontra en el interior de los cuerpos platónicos otro cuerpo platónico, siendo el cuerpo platónico cuyos vértices son los centros de las caras de otro cuerpo que también es platónico y también el cuerpo determinado por los planos tangentes en los vértices a la esfera circunscrita a un cuerpo platónico también es platónico.

Un poliedro y su dual tienen el mismo número de lados y el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro siendo así que encontramos al tetraedro que se inscribe en sí mismo, el octaedro y hexaedro se inscriben mutuamente tal como es el caso del icosaedro con el dodecaedro. En todos los casos para obtener un poliedro dual a partir de otro se utilizan los centros de las caras del original como vértices del dual y éstos se unen con los centros de las caras adyacentes del original.

Formalmente el poliedro dual, normalmente notado como P_d, con respecto a un poliedro dado, que se nota como P_0, se define como el poliedro resultante de tomar los centros de las caras del poliedro P_0 y tomarlos como vértices de un poliedro P_d. El poliedro dual de un poliedro dual es el poliedro inicial, algebraicamente $(P_d)_d = P_0$. Se encuentra una reciprocidad entre las caras del poliedro y los vértices de su dual, y los vértices del inicial y las caras del dual.

Los cuerpos platónicos están también muy relacionados entre sí en cuanto a la dualidad. Estas construcciones se pueden hacer infinitamente tanto al interior como al exterior de los cuerpos. Generando siempre el cuerpo dual.

El tetraedro tiene la peculiaridad que se inscribe en sí mismo debido a que por ser sus caras triángulos equiláteros y sus centros serán los vértices del nuevo tetraedro, y como son cuatro es el número de vértices de dicho poliedro. Al unir dichos centros de cada cara con los otros de las caras sobrantes, estas rectas generan las caras del nuevo tetraedro. Es decir el tetraedro es dual de si mismo y a este tipo de poliedros cuyo dual es el mismo, se les llama autoduales.

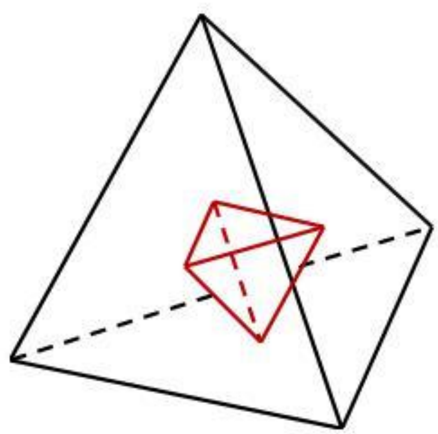


Ilustración 28 - Dualidad del tetraedro

Recordemos que con la notación de {L, V} el tetraedro es {3,3}, mismo número lados del polígono que el número de polígonos que se encuentran en un vértice, de ahí que sea autodual.

En el hexaedro, que cuenta con seis caras, se generan seis vértices para la nueva figura, que al crear rectas de punto a punto podremos observar el octaedro que cuentan con ese número de vértices. De forma análoga el octaedro generara en los centros de sus caras ocho vértices, número que tiene el hexaedro. Con lo que vemos que el hexaedro y el octaedro son por su parte duales entre sí ya que el número de caras de uno es el de vértices del otro, y viceversa.

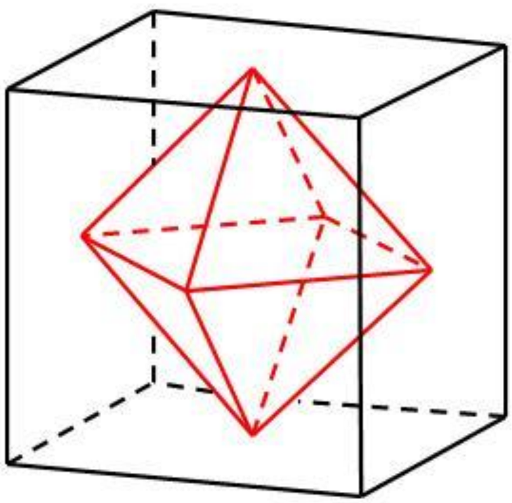


Ilustración 29 - Dualidad hexaedro - octaedro

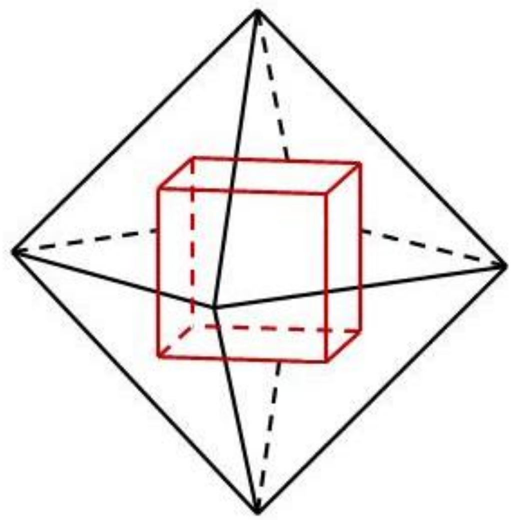


Ilustración 30 - Dualidad octaedro - hexaedro

Con la notación dada por {L, V} el hexaedro es {4,3} y el octaedro es {3,4} que es la misma pareja pero invertida y viceversa. Por esta razón ambos comparten el mismo grupo de simetría, cada simetría que se puede hacer con las caras de uno son las se puede hacer con los vértices del otro.

Para el icosaedro que cuentan con veinte triángulos equiláteros por caras generará los veinte vértices que requiere el dodecaedro. Y este generado por 12 pentágonos regulares tiene el número de vértices requerido para el icosaedro. De esta forma son duales el dodecaedro y el icosaedro, el dodecaedro con 12 caras y 20 vértices y el icosaedro con 20 caras y 12 vértices. Ambos pertenecen al mismo grupo de simetría.

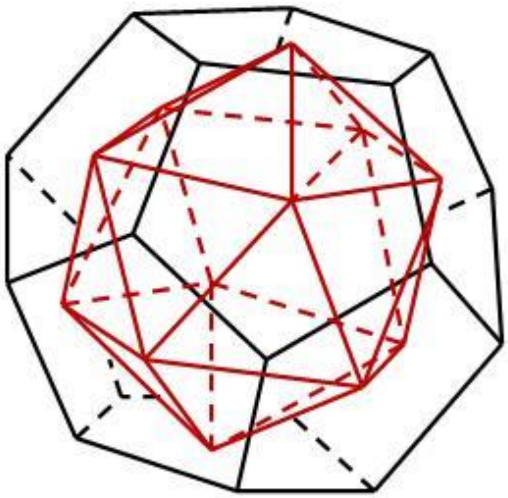


Ilustración 31 - Dualidad dodecaedro- icosaedro

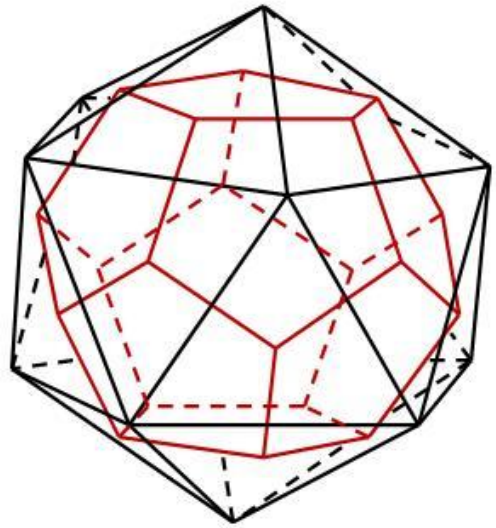


Ilustración 32 - Dualidad icosaedro - dodecaedro

Con la notación dada por {L, V} el icosaedro es {3,5} y el dodecaedro {5,3}.que es la misma pareja pero invertida y viceversa. Por lo que comparten el mismo grupo de simetría.

3.4. SIMETRÍA DE LOS CUERPOS PLATÓNICOS

3.4.1 GRUPOS DE SIMETRÍA

Un grupo G es una estructura algebraica que cumple con:

- $x(yz) = (xy)z$ para todo x, y, z en G (asociatividad);
- Existe un elemento e en G tal que $ex = xe = x$ para todo x en G ;
- A cada elemento x de G le corresponde un elemento x^{-1} en Gtal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. (Hoffman K., 1973, pág. 82).

Algunos grupos de simetría son:

Simetría puntual: Para cada uno de los cuerpos platónicos existe un punto, punto central del poliedro, que es el centro de simetría.

Simetría axial: Todos los sólidos tienen además varios ejes de simetría. Para cada poliedro la cantidad varía; pero en todos ellos el eje de simetría pasa por el centro de simetría.

Simetría de plano: los planos de simetría contienen al centro de simetría, y combinaciones de los ejes de simetría.

3.4.2 GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS CUERPOS PLATÓNICOS

En los sólidos platónicos se encuentra todos los tipos de simetrías que existen en el espacio, con relación a un punto llamada simetría puntual, a un eje llamada simetría axial y a un plano simetría del plano.

Se denominan grupos de simetría de acuerdo a los cuerpos platónicos aunque solamente hay tres grupos.

El hexaedro y octaedro pertenecen al grupo de simetría del octaedro que se denota por Oh Este grupo es de orden 48, número de simetrías, y de estas 9 son simetrías de plano.

El grupo del tetraedro, único cuerpo que tiene su propio grupo, se llama grupo de simetría del tetraedro que se denota por Td. El grupo tiene orden 24, de las cuales 6 son simetrías de plano.

El dodecaedro e icosaedro tienen las mismas simetrías, se denomina el grupo de simetría del icosaedro que se denota por Ih. Este grupo tiene 120 de las cuales, 15 son simetrías respecto a un plano.

4. GEOMETRÍA Y VISUALIZACIÓN

En este capítulo habla de la visualización y su importancia en la geometría por considerarla trascendental para el estudio de la geometría.

4.1. VISUALIZACIÓN

La visualización es ir más allá del simple ver u observar una figura, es ser capaz de abstraer elementos e información de lo que se está viendo de allí su importancia en el estudio. Duval (2003, pág. 6) dice: “Visualizar es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuvieran realmente delante de los ojos. La visualización debe pues distinguir e identificar, al primer vistazo (aprehensión vivida como inmediata) sea de un único vistazo (aprehensión simultánea) lo que está representado”.

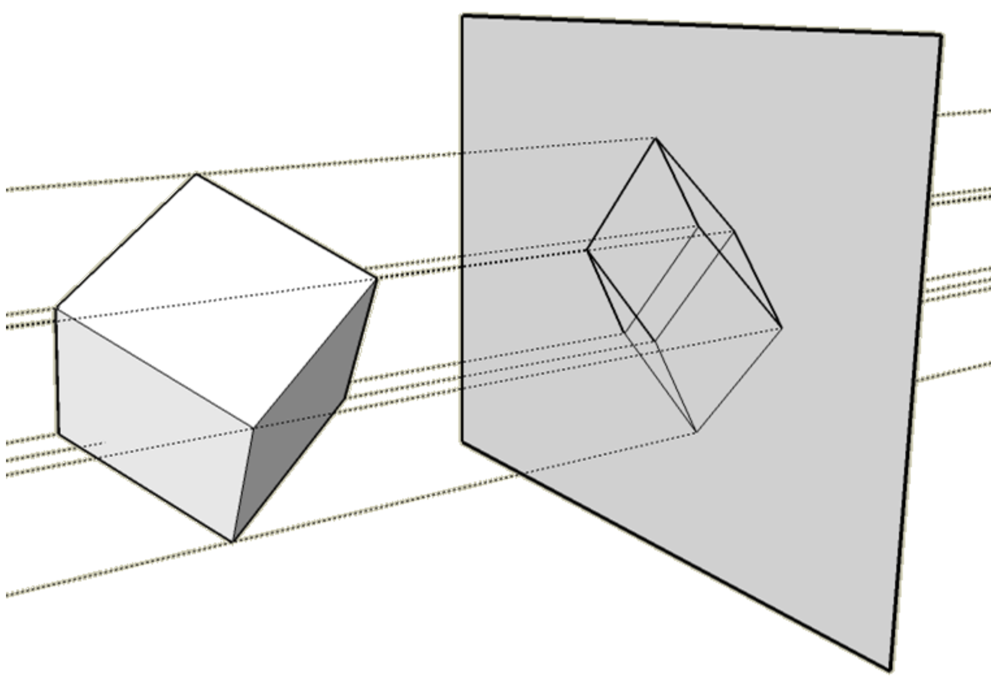


Ilustración 33 - Proyección del cubo en un plano

4.1.1. Visualizacion espacial

La percepción visual, elemento importante en infinidad de actividades de la vida, al centrarse en el estudio de la geometría 3-dimensional, se emplean generalmente los términos equivalentes de "visualización" o "visualización espacial".

Las imágenes mentales son el elemento básico central, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

1) Imágenes concretas pictóricas; se refiere a imágenes figurativas de objetos físicos.
2) Imágenes de fórmulas; consisten en la visualización mental de fórmulas algebraicas o relaciones esquemáticasde manera formal.
3) Imágenes de patrones; son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. En estas no se visualiza la relación propiamente dicha sino alguna representación gráfica de su significado.
4) Imágenes cinéticas; se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
5) Imágenes dinámicas; son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Las clasificaciones puede ser de dos tipos diferentes pues en una determinada imagen su clasificación como cinética o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, patrón o de fórmula.

De acuerdo con la distinción que hace Bishop (1989), las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, manipulación que, para Bishop, se realiza según dos tipos de procesos:

- Procesamiento visual (VP). Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.
- Interpretación de información figurativa (IFI). Este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

La tercera componente diferenciada de la visualización son las habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Aunque Bishop no diferencia claramente entre procesos y habilidades, otros investigadores sí han hecho esa distinción. Una relación bastante detallada de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo es la que nos proporciona Del Grande (1990), obtenida uniendo las propuestas de diversos autores y que se refiere a un contexto más amplio que el de la geometría:

1) Coordinación motriz de los ojos, es la habilidad para seguir son los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.

2) Identificación visual; es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varías partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.

3) Conservación de la percepción; es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.

4) Reconocimiento de posiciones en el espacio; es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.

5) Reconocimiento de las relaciones espaciales; es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.

6) Discriminación visual; es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

7) Memoria visual; es la habilidad para recordar las características visuales Y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

4.2. EDUCACIÓN DE LA GEOMETRÍA

El coste económico de la ignorancia matemática se mide, en parte, por las personas que, aunque capaces de ejecutar las operaciones aritméticas básicas, no saben cuándo ejecutar una y no otra. El coste social de nuestra inocencia matemática es más difícil de calcular pero los demagogos hacen su agosto donde hay ciudadanos ingenuos. (Paulos, 1991)

Se encuentran algunos estudios en la educación de la geometría que destacan y ayudan a justificar la importancia tanto de la visualización como de este trabajo. Por lo que se presentan alguno de estos que justifican mi punto este punto de vista y trascendentales en el estudio de cualquier rama de la geometría.

4.2.1. La teoría de los Van Hiele

La teoría de los Van Hiele se originó en las disertaciones doctorales respectivas de Dina van Hiele-Geldof y su esposo Pierre van Hiele en la University of Utrecht, Holanda, en 1957. Dina muere poco después de completarla y Pierre es quien desarrolló y publico la teoría posteriormente.

La disertación de Pierre principalmente trataba de explicar por qué los alumnos experimentaban problemas en la educación de la geometría, mientras la disertación de Dina era sobre un experimento de enseñanza, en ese sentido es más preceptivo con respecto a ordenar el contenido de la geometría y las actividades de aprendizaje de los alumnos. La característica más destacada de la teoría es la distinción de cinco niveles discretos de pensamiento con respecto al desarrollo de la comprensión de la geometría por parte de los alumnos. Cuatro características importantes de la teoría son resumidas como sigue por Usiskin (1982):

- Orden fijo - El orden en el cual los alumnos progresan a través de los niveles de pensamiento es invariante. Es decir, un alumno no puede estar en un nivel sin haber pasado por el nivel anterior.
- Adyacencia - Cada nivel de pensamiento que era intrínseco en el nivel precedente se convierte en extrínseco en el nivel actual.
- Distinción - Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan estos símbolos.
- Separación - Dos personas que razonan a niveles diferentes no pueden entenderse entre sí.

Los Van Hiele opinan que la razón principal del fallo del curriculum de la geometría tradicional es el hecho de que el curriculum era presentado en un nivel más alto al de los alumnos. Las características generales de cada nivel pueden ser descritas como sigue:

Nivel 1: Reconocimiento

Los alumnos reconocen visualmente figuras por su apariencia global. Reconocen triángulos, cuadrados, paralelogramos y otros por su forma, pero no identifican explícitamente las propiedades de estas figuras.

Nivel 2: Análisis

Los alumnos empiezan a analizar las propiedades de las figuras y aprenden la terminología técnica apropiada para describirlas, pero no relacionan las figuras entre sí o las propiedades de las figuras.

Nivel 3: Orden

Los alumnos ordenan lógicamente las propiedades de las figuras en cadenas cortas de deducciones y entienden las relaciones entre figuras.

Nivel 4: Deducción

Los alumnos empiezan a desarrollar secuencias más largas de enunciados y empiezan a entender el significado de la deducción, del papel de los axiomas, los teoremas y la demostración.

4.3. SOFTWARE DINÁMICO

El software dinámico es el programa en el cual el usuario puede modificar los valores de la función y así apreciar el cambio de los resultados. Muy usado para la modelación de problemas físicos principalmente en Internet por medio de applets realizados en Java, lenguaje de programación desarrollado por Sun para la elaboración de aplicaciones exportables en la red y capaces de operar sobre cualquier plataforma a través de un explorador Web.

Un concepto muy importante es el que se conoce en la jerga de la computación como "sistema de tiempo real"

4.3.1. SISTEMA DE TIEMPO REAL

Se concidera a cualquier sistema en el que el tiempo en que se produce la salida es significativo. Esto generalmente es porque la entrada corresponde a algún movimiento en el mundo físico, y la salida está relacionada con dicho movimiento. El intervalo entre el tiempo de entrada y el de salida debe ser lo suficiente pequeño para una temporalidad aceptable.

Otra definición lo presenta como: Aquél al que se le solicita que reaccione a estímulos del entorno (incluyendo el paso del tiempo físico) en intervalos del tiempo dictados por el entorno.

Un sistema de tiempo real posee muchas características más evidentemente, no todos los sistemas de tiempo real presentan todas las características; sin embargo, cualquier lenguaje de propósito general que vaya a ser utilizado para la programación de sistemas de tiempo real debe tener funcionalidades que soporten estas características:

- Grandeza y complejidad.
- Manipulación de números reales.
- Fiabilidad y seguridad extrema.
- Control concurrente de componentes separados del sistema.
- Control e tiempo real.
- Interpretación con interfaces hardware.
- Implementación eficiente.

4.3.2. MATERIALES EDUCATIVOS

Simón Mochón (2006, págs. 101-121) enlista las siguientes características importantes, identificadas durante sus investigaciones, que deben poseer los materiales educativos en computadora. Cuantas más propiedades el software educativo satisfaga mejor será.

1. *Dinámico*. En contraste con un libro impreso, un software debe tener acción, movimiento, cambio. En su forma más simple, puede adoptar el estilo de un vídeo o una animación.

2. *Interactivo*. El *software* no sólo debe proporcionar información, sino también recibirla. Esto es, debe aprovechar la capacidad de una computadora de "entrada y salida".

3. *Exploratorio*. El software no sólo debe recibir información, sino que debe procesarla y devolver una respuesta. En otras palabras, debe responder a preguntas del tipo: "¿Qué pasaría si...?".

4. *Abierto*. El *software* debe ser abierto en el sentido de que se pueda usar de distintas maneras de acuerdo con diferentes ideas pedagógicas.

5. *Universal*. No debe depender de un periodo o de un grupo específico. Por ejemplo, las notas de clase no tienen esta propiedad de universalidad.

6. *No denso*. La interface con los estudiantes (la pantalla de la computadora) debe mostrar en todo momento pocos componentes y textos muy cortos. Por ejemplo, no debe contener explicaciones largas.

7. *Concentrado*. El material educativo debe concentrarse en una o dos ideas importantes y muy específicas y tratarlas desde varias perspectivas.

8. *Social*. Debe fomentar la interacción de los estudiantes (trabajo en equipo).

9. *Didáctico*. Debe cumplir un objetivo didáctico definido, de preferencia centrado en el desarrollo conceptual. Esto es muy difícil de evaluar, puesto que todos los materiales educativos se diseñan con un objetivo. El punto importante aquí es que los estudiantes aprendan el objetivo del *software* (esto puede probarse haciendo estudios pilotos como los descritos en este artículo).

10. *Guiado*. Debe dirigir a los estudiantes hacia un objetivo didáctico, por ejemplo, utilizando hojas de trabajo. Los alumnos no deben simplemente "jugar" con el *software* para ver qué pueden aprender. Debe haber algo que dirija su camino.

4.3.3. SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Un elemento con el cual se trabaja ahora en la geometría es el software de geometría dinámica. En el pasado, muchos profesores han permitido simplemente la exploración informal de las relaciones geométricas a través de la construcción y la medición con papel-y-lápiz. Otro problema es que tales figuras construidas son estáticas, uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma.

El *software de geometría dinámica* (SGD) es una herramienta moderna y actual. Permite la manipulación de los que son las formas a estudiar para llegar a un análisis y una mejor abstracción.

El joven de hoy en día está muy familiarizado con la tecnología lo que nos lleva a entrar a él por un medio que conoce y se siente cómodo, de esta forma lo motivamos al estar hablándole en su lenguaje.

El SGD permite pasar de la geometría al algebra y viceversa, al poder realizar los cálculos y observar como al mover las variables se afectara tanto la ecuación como la representación.

4.3.4. EVALUACIÓN DEL SOFTWARE

Según las características de un buen software educativo de Simón Mochón se presenta la siguiente tabla en la que se evaluan algunos programas de geometría dinámica. La caracteristica de ser social es muy dificil de decidir si se puede cumplir.

	Dinámico	Interactivo	Exploratorio	Abierto	Universal	No denso	Concentrado	Social	Didáctico	Guiado
CABRI	X	X	X	X	X				X	X
CABRI 3D	X	X	X	X	X				X	X
Calques 3D	X	X	X	X	X	X	X		X	X
Cinderella café	X	X	X	X	X		X		X	
Géospécif	X	X	X	X	X	X			X	
Geup 3	X	X	X	X	X		X		X	X
GSP	X	X	X	X	X	X	X		X	X
Juno-2	X	X	X	X	X	X			X	X
Poly	X	X	X		X	X			X	
Unigéom	X	X	X	X	X				X	

Ilustración 34 - Evaluación del software

5. DESTAZAMIENTO DE LOS CUERPOS PLATÓNICOS

En este capítulo se presenta el destazamiento de los cuerpos platónicos. El destazamiento se define como la elaboración de piezas a partir de un cuerpo. Este se realiza por medio de algunos planos que cortan a los sólidos. Con este fin primeramente se presentó la simetría que se encuentra en las figuras que constituyen a los cuerpos platónicos.

Principalmente se realizan cortes simétricos con el objetivo de observar los cuerpos platónicos y las figuras que se generan. De estas hay algunas que ya son conocidas y utilizados los cuerpos que de ella se desprenden.

5.1. DESTAZAMIENTO DEL HEXAEDRO

El hexaedro o cubo se construye con 6 cuadrados uno en cada lado del otro, con 8 vértices en los cuales concurren tres de éstos y se forman 8 aristas.

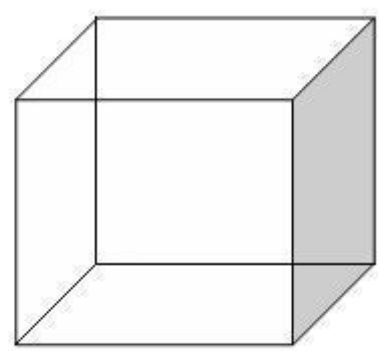


Ilustración 35 - Hexaedro

Empecemos buscando sus planos de simetría. Recordemos que un plano de simetría es un espejo que refleja una parte del objeto, de forma que lo podemos ver entero.

Si se pasa del plano al espacio podemos encontrar los planos de simetría del hexaedro a partir de los ejes de simetría del cuadrado.

Las rectas que pasan por los puntos medios de dos lados paralelos de un cuadrado son ejes de simetría de éste. Los planos que pasa por los ejes de simetría de dos caras paralelas de un cubo son planos de simetría del mismo. Un cubo tiene tres pares de caras paralelas, luego tendrá tres de estos planos de simetría. Son planos paralelos a pares de caras.

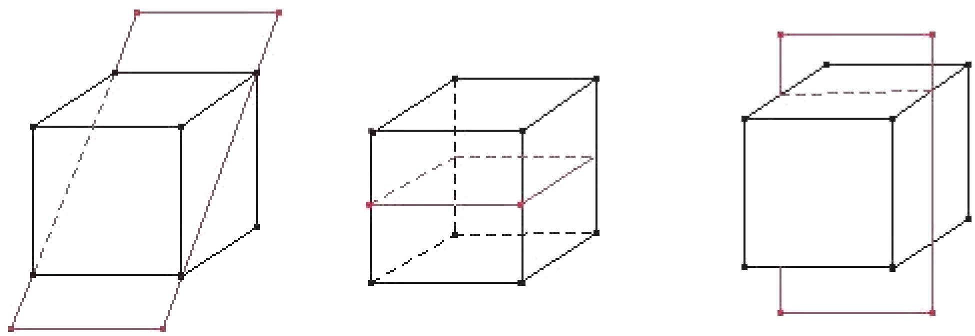


Ilustración 36 - Hexaedro cortado por planos

Las diagonales de un cuadrado son los otros ejes de simetría del cuadrado. Los planos que pasan por las diagonales de caras opuestas de un cubo son sus otros planos de simetría. Como el hexaedro tiene 3 pares de caras opuestas, y por cada par de caras hay 2 pares de diagonales, en total habrá 6 planos de simetría de este tipo. Estos planos pasan por pares de aristas opuestas.

El hexaedro con ocho planos que lo cortan por sus ejes de simetría; horizontal, vertical, diagonales y por sus puntos medios.

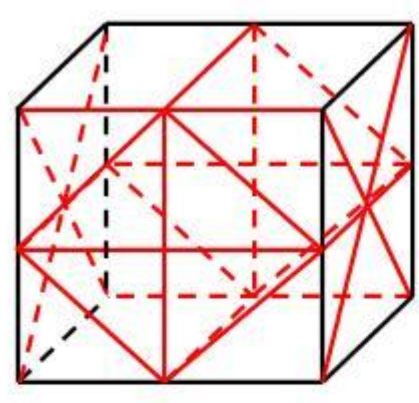


Ilustración 37 - Hexaedro cortado por planos; diagonal, vertical y horizontal

Destazamiento realizado por el corte de un plano que cruza al hexaedro, pasando por sus diagonales de la cara inferior y superior del vértice posterior izquierdo, al vértice frontal derecho.

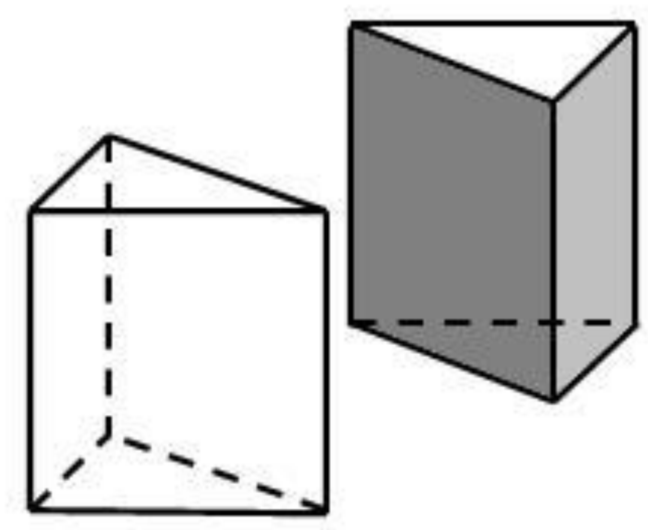


Ilustración 38 - Hexaedro cortado por plano transversal

De este destazamiento se obtiene dos prismas triangulares, cuya base triangular es un triangulo rectángulo con dos lados congruentes, estos ocupan la mitad del área del cuadrado de la base del hexaedro. Los prismas contaran con la misma altura del hexaedro y por las bases triangulares tendrán la mitad del volumen del hexaedro.

En los triángulos generados en las bases por ser isósceles se puede usar para presentar el caso de la raíz del número dos. También vemos que lo que se generan son dos figuras que se pueden usar como una rampa o como cuñas.

Destazamiento por un plano que cruza al hexaedro por los puntos medios de las caras superior, anterior, inferior y posterior. Se obtienen dos prismas rectangulares.

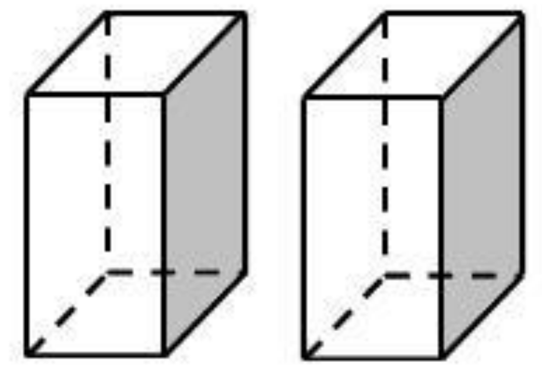


Ilustración 39 - Hexaedro cortado por plano vertical

En este destazamiento vemos que los prismas tienen la mitad del volumen que el hexaedro ya que sus bases tienen la mitad del área de la base del hexaedro por pasar por los puntos medios de caras opuestas generando los dos rectángulos con un lado de la misma medida que un lado del hexaedro y el otro con la mitad de su medida.

Destazamiento por cuatro planos que cortan al hexaedro al cruzar los puntos medios de las caras anterior y posterior. Éste nos permite obtener un hexaedro al centro y cuatro prismas triangulares.

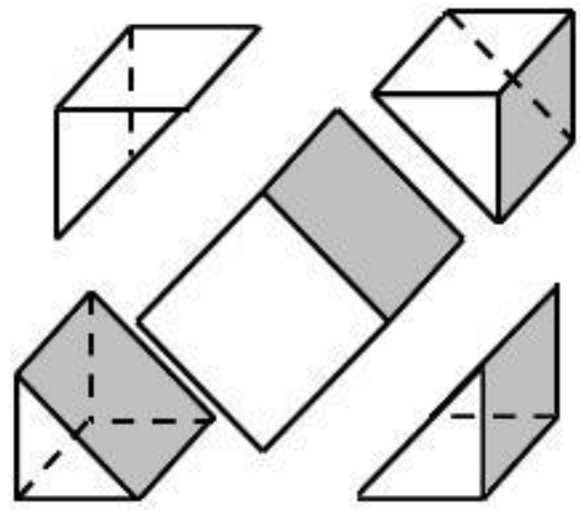


Ilustración 40 - Hexaedro cortado por cuatro planos

En este destazamiento encontramos cinco piezas de las cuales cuatro con congruentes. Primero veamos que al centro nos queda otro hexaedro cuyo volumen es la mitad del original ya que si juntamos las otras cuatro piezas de tal forma que podamos crear un hexaedro de caras congruentes a la pieza restante veremos que son congruentes. Basta con ver que la cara del hexaedro del centro es la cara del prisma que pertenece al lado de la hipotenusa del triangulo recto de la base del prisma. Así podemos acomodar las piezas restantes para generar dos hexaedros congruentes.

Destazamiento por dos planos que cortan al hexaedro en las diagonales de la cara superior e inferior. Forma cuatro prismas triangulares.

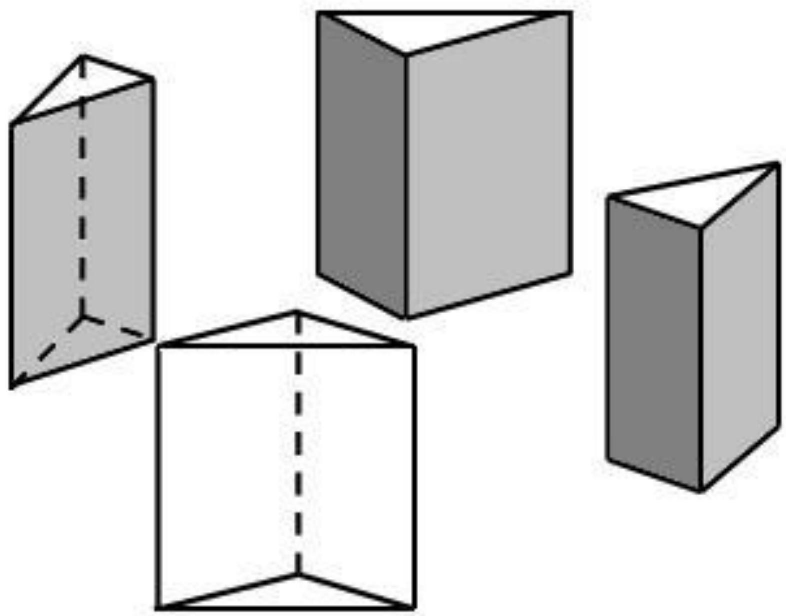


Ilustración 41 - Hexaedro cortado por cuatro planos que pasan por el centro

Estos prismas tienen la base de triángulos rectángulos isósceles. Cada pieza le corresponde una cuarta parte del volumen del hexaedro y las aéreas de las bases de los prismas tienen una cuarta parte del área de la base del hexaedro.

Destazamiento por dos planos que cortan al hexaedro por sus diagonales. Forma seis pirámides cuadrangulares cuya área es una sexta parte del hexaedro. Estas se interceptan en el centro del hexaedro. Las bases de estas pirámides son las caras del hexaedro y su altura es la congruente a la mitad de un lado del hexaedro.

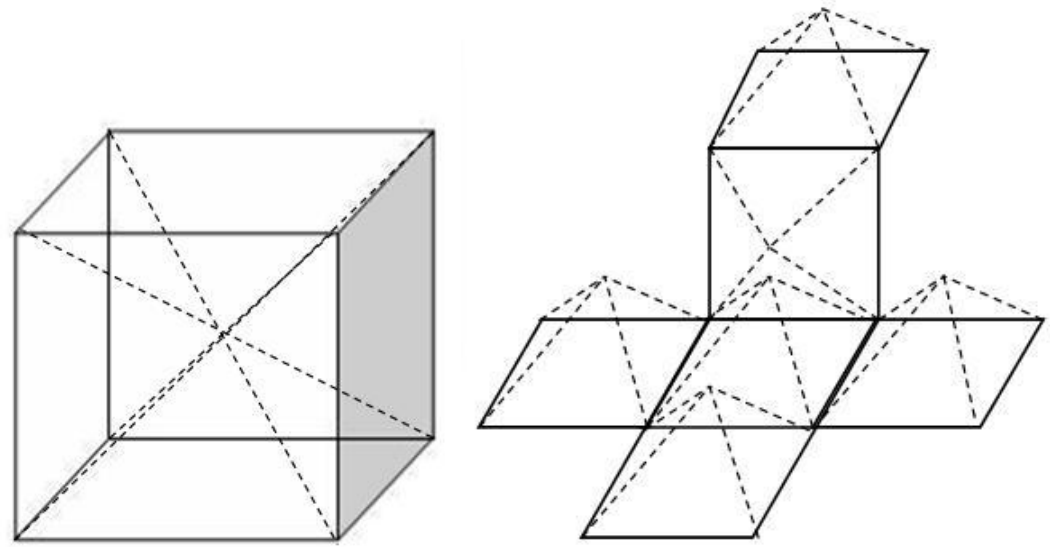


Ilustración 42 - Hexaedro cortado por dos planos y su desdoblamiento

5.2. DESTAZAMIENTO DEL TETRAEDRO

El tetraedro está construido por medio de cuatro triangulo equiláteros y cuenta con cuatro vértices.

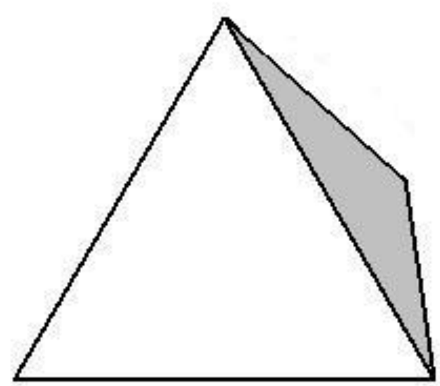


Ilustración 43 - Tetraedro

El tetraedro cortado por planos en sus ejes de simetría; horizontal, vertical, por sus diagonales y por sus puntos medios.

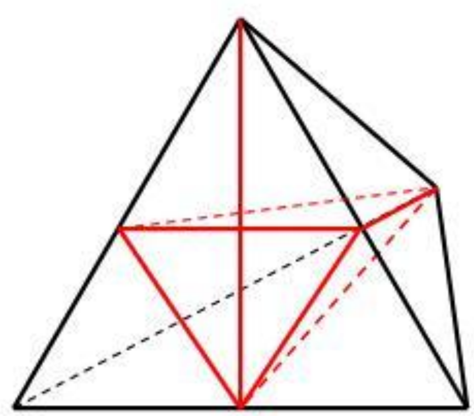


Ilustración 44 - Tetraedro cortado por tres planos

Los ejes de simetría del tetraedro no son tantos como el hexaedro, vemos el que pasa por dos vértices, una de sus aristas y el punto medio a la arista opuesta. También podemos cortar con un plano que pase por dos puntos medios de aristas de una cara y pase por el vértice opuesto a dicha cara. Estos cortes pueden ser en cada una de sus caras por lo que tenemos ocho cortes que podemos realizar.

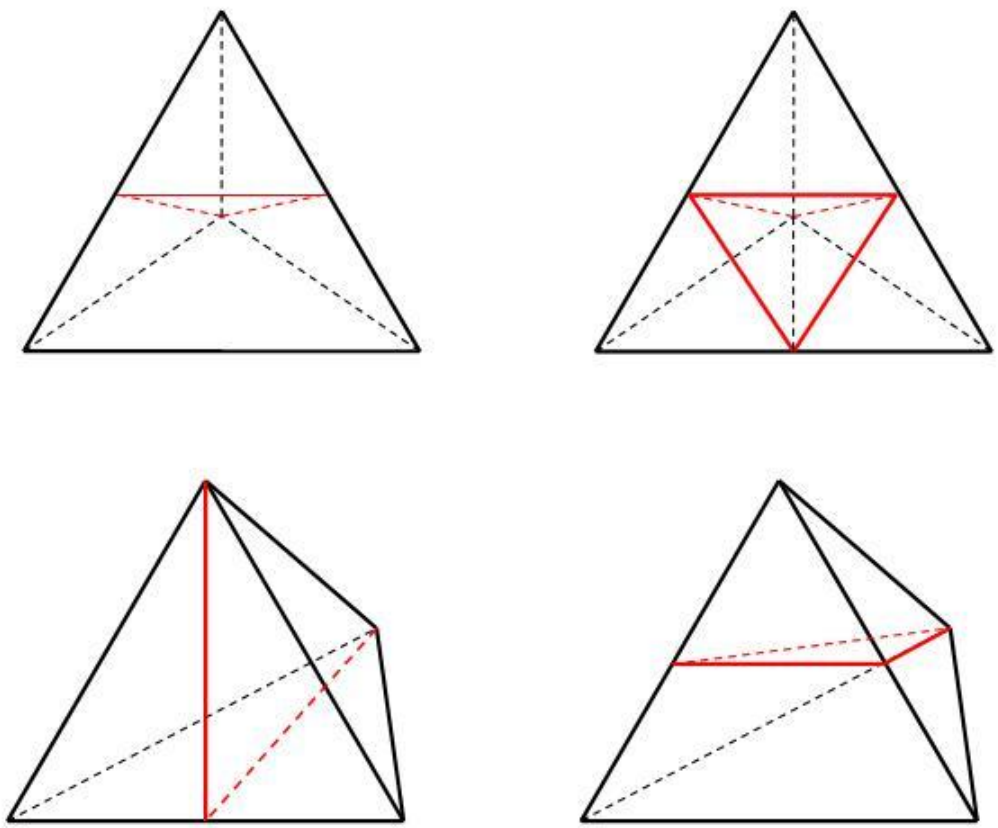


Ilustración 45 - Vistas de cortes del tetraedro

Destazamiento por puntos medios de dos de sus caras que tienen en común una arista.

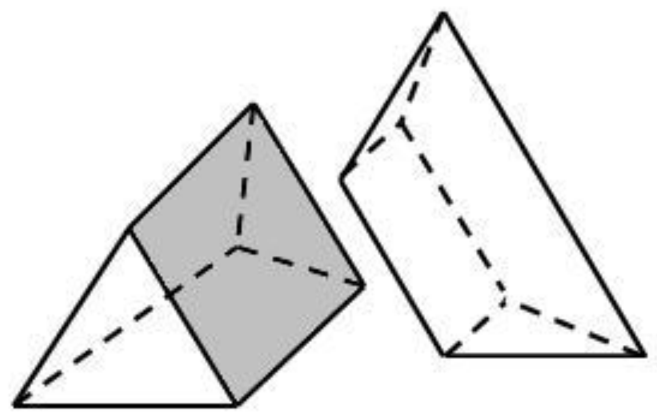


Ilustración 46 - Tetraedro cortado por un plano

Como observamos obtenemos dos cuerpos de cinco caras un par de triángulos equiláteros cuya distancia es la mitad de una arista del tetraedro; un par de trapecios isósceles con la base mayor congruente a la distancia de una arista del tetraedro, la base menor y los lados no paralelos son de la mitad de una arista del tetraedro y un cuadrado con la mitad de la distancia de una arista del tetraedro.

Destazamiento por puntos medios una de sus caras hacia el vértice opuesto. En este destazamiento nos genera dos cuerpos; un tetraedro cuyas aristas son la de la mitad las aristas originales y una pirámide de base trapezoidal isósceles cuya base menor y lados no paralelos son de de la mitad de una arista del tetraedro y la base mayor es congruente a una arista del tetraedro original ya que son comunes, una cara es congruente a una cara del tetraedro original y las otras tres son triángulos isósceles cuyos lados congruentes son congruentes a una arista del tetraedro original.

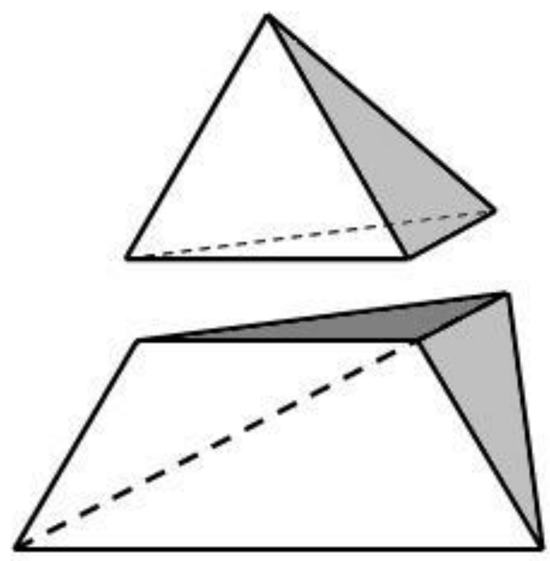


Ilustración 47 - Tetraedro cortada por un plano

Destazamiento por el punto medio de una de sus caras hacia el vértice opuesto de la misma cara de ese triangulo:

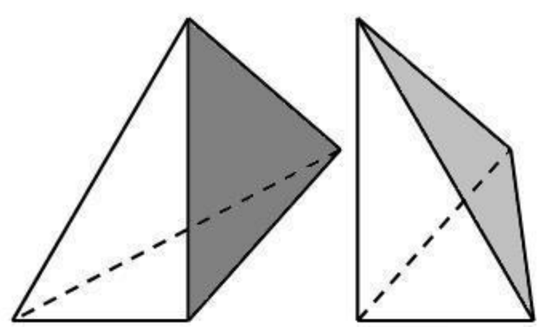


Ilustración 48 - Tetraedro cortado por plano vertical

Aquí encontramos que se crean dos pirámides triangulares congruentes; cuya base en un triángulo escaleno con un lado congruente a una arista del tetraedro, otra es de la mitad de esta y el otro lado es congruente a la altura de una cara del tetraedro, dos caras de las pirámides son congruentes, triángulos equiláteros idénticos a una cara del tetraedro por ser común a él y la otra cara es un triangulo escaleno congruente a la base de la pirámide.

Destazamiento por puntos medios de los tres lados de una de sus caras hacia el vértice opuesto. De aquí obtenemos cuatro pirámides triangulares cuya base es un triangulo equilátero cuyos lados son la mitad de las aristas del tetraedro original. Estas pirámides tienen una cuarta parte del volumen de tetraedro.

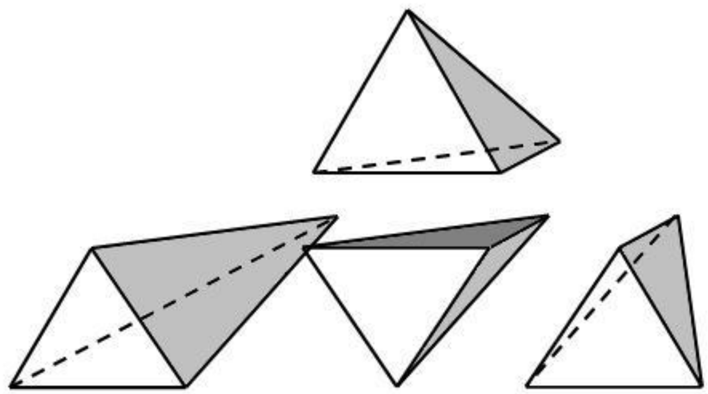


Ilustración 49 - Tetraedro cortado por tres planos

5.3. DESTAZAMIENTO DEL OCTAEDRO

El octaedro se construye por ocho triángulos equiláteros contando con seis vértices. En el octaedro podemos realizar cortes simétricos con planos; horizontal, vertical, diagonales que pasen por los puntos medios de las aristas de caras paralelas y con estos obtendremos seis destazamientos.

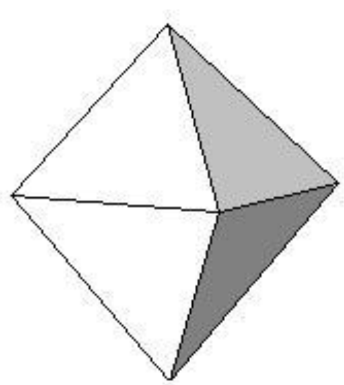


Ilustración 50 – Octaedro

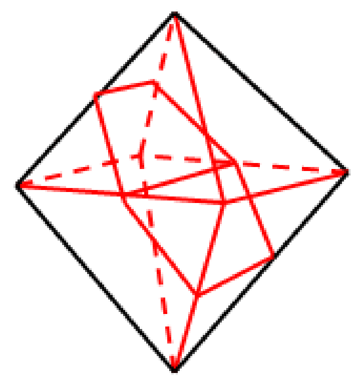


Ilustración 51 - Octaedro cortado por planos; diagonal, vertical y horizontal

Destazamiento por un plano horizontal a la mitad de su altura y corta al octaedro en dos prismas cuadrangulares idénticos con la mitad del volumen cada uno, las bases son cuadrados con la medida de una arista del octaedro.

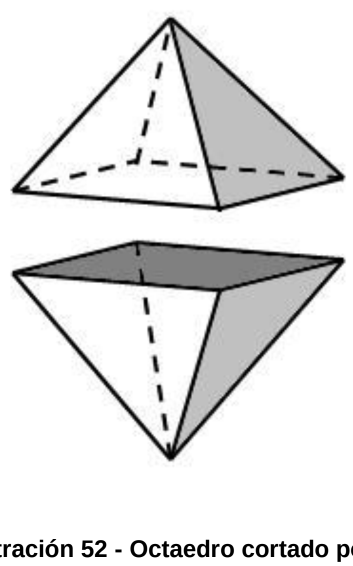


Ilustración 52 - Octaedro cortado por un plano horizontal

Destazamiento por un plano vertical corta al octaedro en dos prismas cuadrangulares idénticos cuya base es un rombo equilátero con la medida de las aristas del octaedro, misma altura que el octaedro y cada uno le corresponde la mitad del volumen del octaedro.

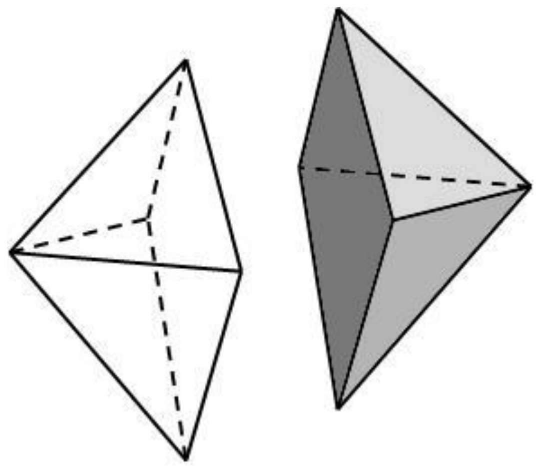


Ilustración 53 - Octaedro cortado por un plano vertical

Destazamiento al octaedro por un plano que corta de forma diagonal de las mediatrices de una cara a las mediatrices de la cara opuesta. Estos poliedros cuentan con ocho caras; un pentágono regular con la mitad de la medida de una arista, un triangulo equilátero de la magnitud de una arista, tres trapecios isósceles cuya base menor y lados no paralelos son de de la mitad de una arista del octaedro y la base mayor es congruente a una arista del octaedro original y tres triángulos equiláteros cuya magnitud es a la mitad de una arista del octaedro.

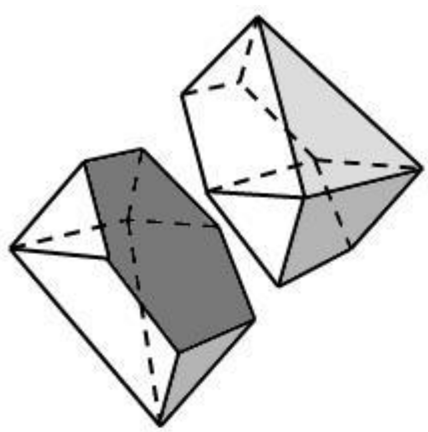


Ilustración 54 - Octaedro cortado por un plano diagonal que cruza por los puntos medios de caras opuestas

Destazamiento por dos planos que cortan al octaedro, uno horizontal y el otro de forma diagonal de las mediatrices de una cara a las mediatrices de la cara opuesta. Aquí obtenemos cuatro cuerpos; dos de cinco caras con un par de triángulos equiláteros cuya distancia es la mitad de una arista del octaedro; un par de trapecios isósceles con la base mayor congruente a la distancia de una arista del octaedro, la base menor y los lados no paralelos son de la mitad de una arista del octaedro y un rectángulo con la mitad de la distancia de una arista del octaedro y el otro lado congruente a una arista del octaedro, las otras dos piezas son de seis caras una común al octaedro, un triángulo equilátero de la mitad de una arista del octaedro y tres trapecios con base mayos congruente a una arista del octaedro y lados no paralelos y base menor de la mitad de una arista de octaedro.

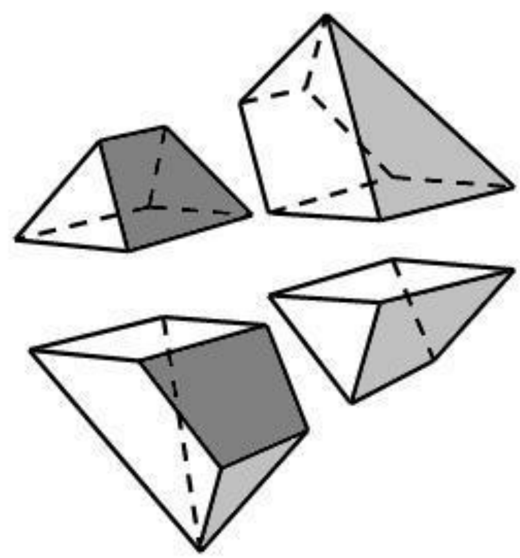


Ilustración 55 - Octaedro cortado por dos planos

El escultor chihuahuense Enrique Carvajal “Sebastián”, crea una estructura metálica pintada de amarillo, de 28 metros de altura, que está ubicada en Paseo de la Reforma y Avenida Juárez, y que vino a sustituir a la antigua estatua de Carlos IV de Tolsá popularmente llamada "El Caballito". Destazamiento desde el punto de intersección de dos de sus mediatrices cortando hacia el vértice de la cara opuesta. Cortan al octaedro quedando en tres cuerpos. Girando el superior e inferior 180° de de esta forma crea Sebastián la cara de sus caballo.

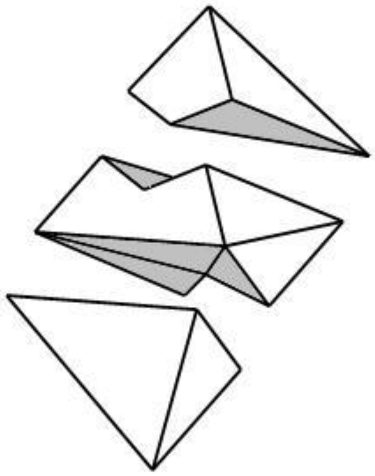


Ilustración 56 - Destazamiento del octaedro por Sebastián

Ilustración 57 - Caballo de Sebastián

Él mismo describe y explica su obra en una entrevista realizada para la revista en línea llamada *Hipograpo* (Hipograpo, 2009*)*:

> “Es una escultura hecha a partir de un cuerpo geométrico regular, un octaedro estirado y contrapuesto en el espacio, que anuncia la modernidad de nuestro país. Mas este caballito también cumple una función práctica, pues es la chimenea de una lumbrera del drenaje profundo que exhala por su nariz los gases y malos olores que podrían invadir esta populosa zona del centro.
>
> Analizando el octaedro y aplicándole una estrategia de cortes con un trazo armónico, lo corte y gire en su misma estructura para que ésta no se perdiera: es decir que seccione su base superior e inferior en dos partes, partiendo de los apotemas del cuerpo regular, y de esa forma nace El Caballito como la mayoría de la gente lo conoce.”

Agrego este fragmento porque es la pieza que inspira esta tesis, donde observo la hermosura de la geometría y como se puede hacer arte con ella. También para mostrar el trabajo e ingenio bien aplicado de un destacado mexicano.

5.4. DESTAZAMIENTO DEL ICOSAEDRO

El icosaedro se genera por veinte triángulos equiláteros contando con doce vértices.

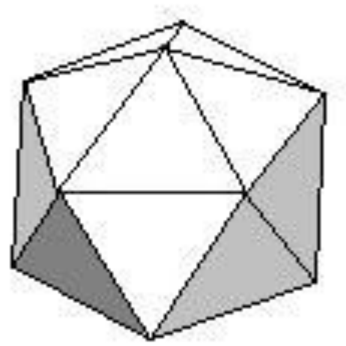


Ilustración 58 - Icosaedro

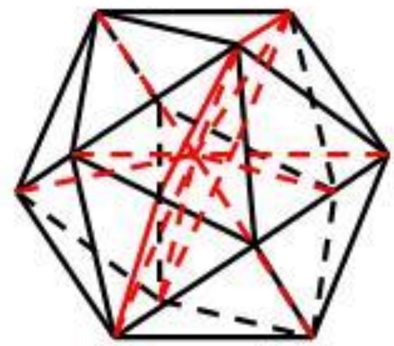


Ilustración 59 - Icosaedro cortado por planos

Destazamiento por medio de dos planos que cortan a cinco triángulos que se unen en un mismo vértice. Forma dos pirámides con base pentagonal siendo sus lados triángulos equiláteros mismos que generan el icosaedro y un antiprisma con base pentagonal (en lugar de rectángulos son triángulos equiláteros y las bases son pentágonos con un desfase en cada vértice).

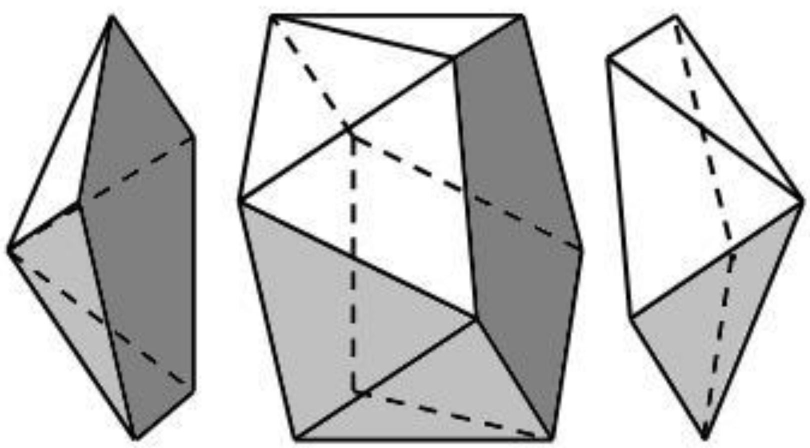


Ilustración 60 - Icosaedro destazado por dos planos

Destazamiento por medio de un plano que corta al icosaedro en dos aristas opuestas. Se generan dos cúpulas geodésicas de base hexagonal. El hexágono tiene dos lados opuestos con la misma medida de las aristas del icosaedro y los otros cuatro lados son de la medida de la altura del triángulo equilátero que forma el icosaedro. El volumen de las cúpulas geodésicas es la mitad del volumen del icosaedro.

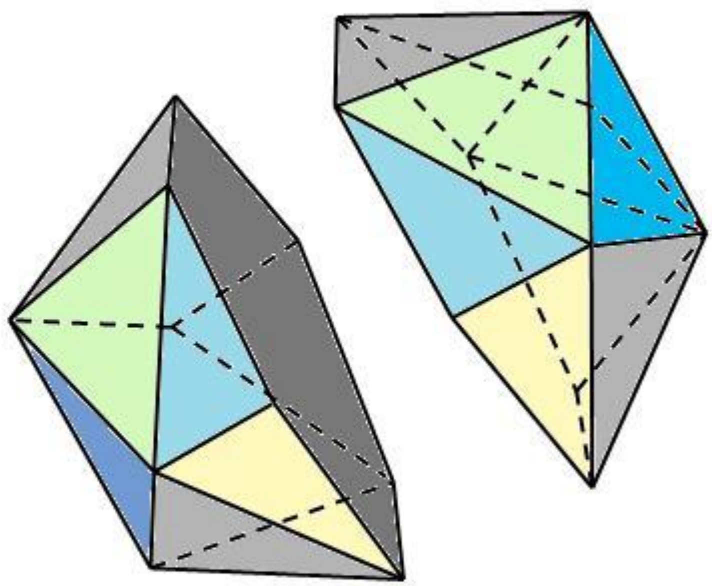


Ilustración 61 - Icosaedro destazado por un plano

5.5. DESTAZAMIENTO DEL DODECAEDRO

El dodecaedro esta generado por doce pentágonos regulares contando con veinte vértices.

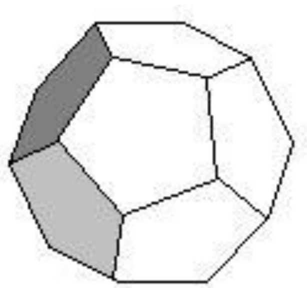


Ilustración 62 - Dodecaedro

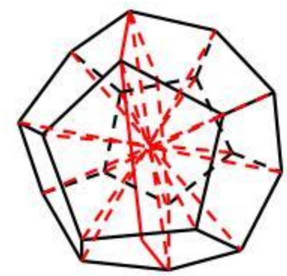


Ilustración 63 - Dodecaedro cortado por planos

Destazamiento del dodecaedro por planos que parten de los vértices de los pentágonos al interior del cuerpo. Se forman doce pirámides de base pentagonal y sus lados son triángulos equiláteros mismos del dodecaedro.

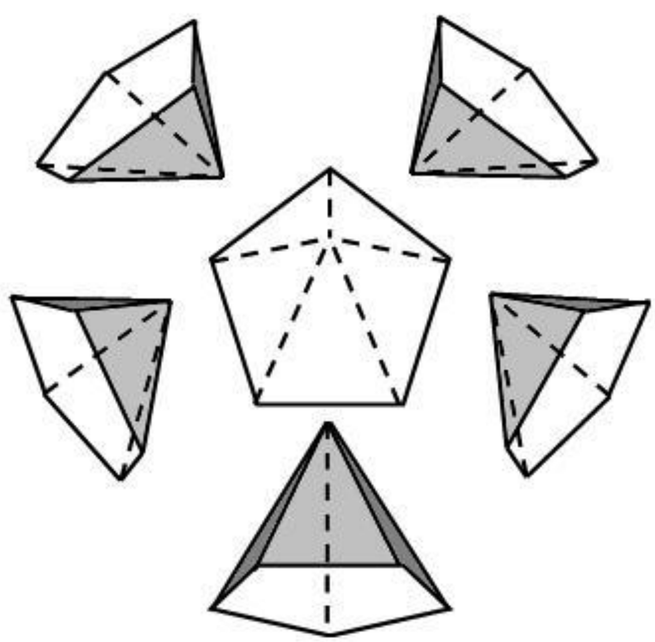


Ilustración 64 - Dodecaedro cortado por planos que pasan por su centro

Destazamiento por medio de un plano que corta al dodecaedro en dos aristas opuestas. Se generan dos cúpulas geodésicas de base hexagonal. El hexágono tiene dos lados opuestos con la misma medida de las aristas del dodecaedro y los otros cuatro lados son de la medida de la altura del pentágono equilátero que forma el icosaedro. El volumen de las cúpulas geodésicas es la mitad del volumen del dodecaedro.

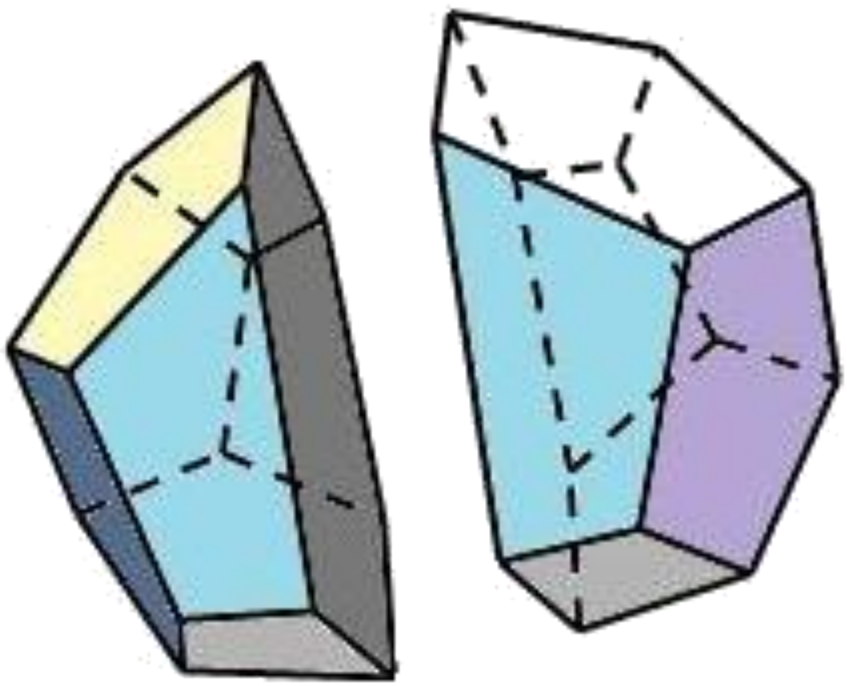


Ilustración 65 - Dodecaedro cortado por un plano

6. CONCLUSIÓN

Esta tesis que tiene por principio trabajar con una de las ideas más antiguas de la humanidad: los cuerpos platónicos y por otro lado, se propone mostrar sus propiedades con el uso de una herramienta de las más recientes creadas por el hombre como lo es la computadora, particularmente el empleo de un software cuyo uso didáctico enriquece la enseñanza de la matemática permitiendo ver en la pantalla los cuerpos. Como Duval (2003, pág. 6) dice: "Visualizar es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuvieran realmente delante de los ojos." La computadora permite ver en la pantalla los objetos deseados así como su manipulación y de esta forma se considera se genera la visualización deseada.

En el estudio de la geometría se considera que lo más difícil es "imaginar". El conocimiento que tiene el docente, quien conoce la materia y tiene la experiencia, como lo mostrará al alumno el cual se enfrenta a la tarea de imaginar o interpretar los dibujos que le realicen en el pizarrón. Ante esta problemática, que no es nueva, es necesario abordar la enseñanza de la Geometría desde otras perspectivas, especialmente la referente al estudio de los cuerpos geométricos, que realmente muestren un camino o cultiven en los alumnos las ganas de buscar el conocimiento y la cultura y así, "lograr develar a sus ojos la luz de la curiosidad".

Considero que conforme a la teoría de visualización espacial de Presmeg (1986) la geometría escolar se encuentra en imágenes de patrones, la cual por medio de un material como el destazamiento y más con ayuda de un software, se pasarían de imágenes estáticas a dinámicas, es decir, son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan. El movimiento de sus partes puede ayudar a una mejor comprensión de los cuerpos.

De acuerdo con la distinción que hace Bishop (1989), las imágenes visuales son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización y mi trabajo se realiza según en el procesamiento visual (VP) que él apunta. Así pasamos a desarrollar algunas habilidades en los estudiantes, esto será según el tipo de estudiante que se tenga pero considero que se puede trabajar con todas ellas.

1) Coordinación motriz de los ojos.
2) Identificación visual.
3) Conservación de la percepción.
4) Reconocimiento de posiciones en el espacio.
5) Reconocimiento de las relaciones espaciales.
6) Discriminación visual.
7) Memoria visual.

Para abstraer los cuerpos platónicos propongo su destazamiento, la elaboración de piezas, para que sea un proceso lúdico. En este proceso del destazamiento y manipulación de los cuerpos, se usa como herramienta principal la simetría de los cuerpos y de esta forma obtener una mejor visualización de sus propiedades y características.

Los Van Hiele opinan que la razón principal del fallo del curriculum de la geometría tradicional es el hecho de que el curriculum era presentado en un nivel más alto al de los alumnos. El objetivo en el aula sería lograr que por medio de un destazamiento los alumnos alcanzarán un nivel de deducción, nivel 4 en la teoría de los Van Hiele, en el momento de que el destazamiento se realiza en puntos específicos como es el caso de los planos diagonales que pasan por el punto medio de la arista de la cara opuesta o como el caso de planos verticales u horizontales que se realizan también en los puntos medios de las aristas de la base y alturas de los cuerpos. En este proceso el alumno pasa por los cuatro niveles;

- Al reconocer los triángulos, cuadrados y pentagonos que construyen los poliedros abordan el primer nivel el de reconocimiento,

- Cuando trabajan con estos poligonos empiezan a analizar sus propiedades y aprenden la terminología apropiada para describirlos es el segundo nivel el del analisis
- En el uso de la simetria ordenan lógicamente las propiedades de las figuras y sus relaciones que es el nivel tercero de orden,
- En el destazamiento de los poligonos o armado de ellos apartir de piezas entran en el cuarto nivel llamado de deducción.

Gregoria Guillen Soler (2005), de la Universitat de València en España, con su grupo de investigación, situados en marco del modelo Van Hiele, realizan una serie de clasificaciones de los sólidos para la enseñanza de la geometría. Éstas son por; sus particiones, sus jerarquías, criterios de construcción y analogías. Siendo un ejemplo del trabajo realizado usando este modelo y la visualización. Este trabajo permite clasificar los poliedros por sus particiones obtenidas, por sus criterios de construcción y a su ves por sus analogias.

También se mencionó como una herramienta el uso de aplicaciones informáticas como es el uso de software, dirigido al estudio de la Geometría del espacio de manera dinámica, es decir, el desarrollo de Software para Geometría Dinámica (SGD) en el espacio. Este tipo de software permite de una forma lúdica poder manipular las figuras y obtener una mejor visualización de éstas. Permite ver en la pantalla de la computadora los “objetos geométricos”, pero también permite manipularlos por medio del ratón y sin que éstos pierdan sus propiedades geométricas. Considerando que esta es una herramienta que puede explotase dentro y fuera de una institución académica, pues puede ser instalada en sus computadoras o todavía mejor, en una página web para el aprovechamiento de todos.

A partir del destazamiento de los cuerpos platónicos, podemos obtener otros cuerpos geométricos donde realizar todos estos destazamientos en modelos físicos sería una inversión de tiempo, materia prima para el docente y tiempo con las instituciones, en cambio con el empleo de software nos permite representar los modelos en la computadora, evitándonos la creación física de los cuerpos. El software por lo tanto, permite realizar estos procesos cuantas veces sea necesario además de que la manipulación se da más fácil y su exploración permite ver mejor los cuerpos. Para ver un ejemplo ver el anexo 3.De esta forma una figura que era un objeto seco para los jóvenes se vuelve algo animado y lúdico, ya que se utiliza una forma de comunicación para ellos cotidiana como lo es la visual que permite a través de una pantalla enriquecer la manipulación, volviéndose así, una experiencia didáctica para los jóvenes.

Existen en el mercado algunos software de geometría con buen material y manipulables pero por lo general requieren de una licencia para su manipulación. Se presentan las características de algunos softwares educativos según Simón Mochón y una evaluación de acuerdo a este criterio de algunos de los que se encontran en el mercado.

Después de la manipulación del software el docente puede plantear actividades como: solicitar al alumno generar una figura a partir de otra para crear otra pieza con un fin o utilidad. Otra actividad sería que desarrollaran plantillas de algunas de las piezas creadas (Anexo 2). Esto podría ser un complemento y/o convertirse en una evaluación. Por ese motivo se anexan las plantillas de los cuerpos platónicos. Estas plantillas se podrían también solicitar que se desarrollen en algún software de diseño o hasta en el procesador de textos como es el Word por medio de sus autoformas.

Considero que este trabajo puede ser utilizado en casi todos los niveles de nuestro sistema educativo. Menciono algunos ejemplos en donde considero su utilidad aunque no dudo que los docentes podrán encontrar otros temas en su asignatura en el cual lo puedan usar o que inspire algún otro trabajo.

Secundaria

En este nivel se pueden usar para;

- el estudio de la simetría, usando los cuerpos para ejemplificar el tema,
- en el estudio de las áreas examinando las caras de los cuerpos y de ahí pasara a estudiar los volúmenes.
- Los docentes también pueden utilizarlo para la elaboración de problemas algebraicos.

Considero que en este nivel hay muchos temas en donde se puede explotar.

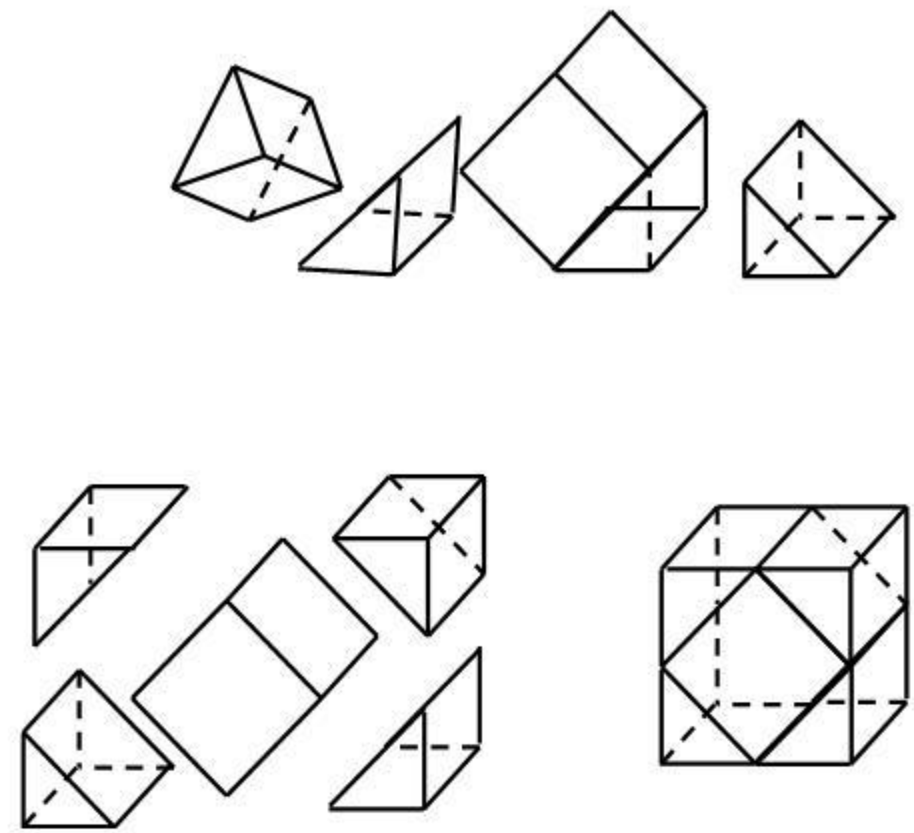


Ilustración 66 - Construcción a partir de piezas dadas

Bachillerato

En el nivelse puede usar para el estudio de la trigonometría al estudiar las caras de los poliedros, sus ángulos y los generados por los cortes. También puede ser usado en problemas de representación algebraica y de cálculo.

Superior

En nivel superior considero que puede servir en varias carreras como las ingenierías como aplicación en problemas de cálculo.

En ingenieria mecanica y civil puede usarce como ejemplo de resistencia, fuerzas y construcción.

En arquitectura y diseño se estudian los solidos. Con ellos se pueden motivar su creatividad solicitando actividades como de un poligono generar una pieza original. Como ejemplo esta el antes mencionado de Carbajal.

Espero que esta herramienta sea de utilidad a los docentes para presentar tanto los cuerpos platónicos, como auxiliar en la exposición y/o análisis de algunos otros temas de la matemática u otras materias como el diseño. Así que el esfuerzo de docente se vea reflejado en la comprensión de los alumnos de los cuerpos platónicos. Volviéndolos más analíticos, curiosos y entusiastas en la materia.

7. Bibliografía

Antoine, d. S.-E. (1984). El principito. México, D.F.: Alianza.

Baulac, Y., Bellemain, F., & Laborde, J. M. (1992). Cabri. The Interactive Geometry Notebook. Brooks/Cole Publishing Company.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics , 11 (1), 7-16.

Brousseau, G. (Abril 2000). EDUCACIÓN Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Grenoble, Francia: Educación matemática Vol. 12 Nº 1.

Burns, A., & Wellings, A. (2003). Sistemas de tiempo Real y Lenguajes de Programación (Tercera ed.). Madrid: Addison Wesley.

Coxeter, H. S., & Gretzer, S. L. (1993). Retorno a la Geometría. Madrid España: DLS-Euler Editores.

Cromwell, P. R. (1997). POLYHEDRA. Cambridge University Press.

De Castro Hernández, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. Revista Iberoamericana de Educación matemática , 59-77.

De Villiers, M. (1998). El futuro de la geometría en la escuela Secundaria. Grenoble, Francia.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. Arithmetic Teacher , 37 (6), 14-20.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy, Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual (págs. 41-76). México, México: Cinvestav y Fondo de Cultura Económica.

Española, R. A. (2008). Diccionario de la lengua española (Vigésima segunda edición ed.). Real Academia Española.

Euclides. (1996). Elementos. Madrid: Gredos.

Extremiana Aldana, J. I., Hernández Paricio, L. J., & Rivas Rodríguez, M. T. (2004). Poliedros. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño, España.

Extremiana Aldana, J. I., Hernández Paricio, L. J., & Rivas Rodríguez, M. T. (2004). Poliedros. Logroño, Depto. de Matemáticas y Computación, Univ. de La Rioja, España.

García, M. L. (s.f.). La simetría como una gramática del diseño de la naturaleza, el arte y la ciencia. Obtenido de http://www.iseron.com/index.php?seccion=3#menu2

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". Recherches en Didactique des Mathématiques.

González Urbaneja, P. M. (Diciembre de 2003). Els sòlids pitagòricoplatònics. (F. d. Catalunya., Ed.) Geometria, Art, Mística i Filosofia. , 10-24.

Guillén Soler, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los solidos. Educación Matemética , 17 (002), 117-152.

Gutierrez, Á. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Valencia: Memorias del 3er Congreso Internac. sobre Investig. en Educ. Mat.

Hipograpo. (s.f.). Recuperado el 11 de febrero de 2009, de http://www.hipograpo.com.mx/articulo.asp?titulo=SEBASTIAN-Y-SU-CABALLO&id=457

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). Álgebra Lineal. Prentice Hall.

Inc., P. S. (8 de Abril de 2009). Poly. Obtenido de http://www.peda.com/poly

Lecona Uribe, M. E. (2006). Geometría Euclidiana. Querétro, México: Escuela de Bachilleres U.A.Q. .

Margenau, H., & Bergamini, D. (1981). El Cientifico. México, D. F.: Offset Multicolor, S. A.

Mochón, S. (2006). Avances y hallazgos en la implementación de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. En E. Filloy Y. (Ed.), Matemática educativa, treinta años (págs. 101-121). México, México: Santillana y Cinvestav.

Ongay, F. (2000). Máthema: El arte del conocimiento. México, D.F.: La ciencia para todos 177.

Pacioli, L. (1509). De Divine Proportione.

Paulos, J. A. (1996). Un matemático lee el periódico. Barcelona: Metatemas.

Platón. (1989). Diálogos. México: Editorial Porrúa S.A.

Shively, L. S. Introducción a la Geometría Moderna. Continental S. A. .

Ströbl, W. (1985). Diccionario Matemática. Mexico: Ediplesa.

Sun. (4 de Julio de 2008). Java. Obtenido de http://www.java.com/es/about/

Usiskin, Z. Van Hiele levels and archievement in secondar school geometry. Chicago: University of Chicago, Department of Education.

Wentworth, J., & David Eugenio, S. (2003). Geometría plana y del espacio (Vigésimo cuarta ed.). México: Porrúa.

Winroth, H. (March 1999). Dynamic Projective Geometry. Stockholms Universitet: Kungl Tekniska Högskolan.

ANEXOS

8.1. EULER

Euler enuncia que en un poliedro convexo el número de vértices más el número de caras excede en dos al número de aristas:

$$C + V = A + 2.$$

Demostración:

Sea P un poliedro convexo con C caras, A aristas y V vértices, entonces

$$C + V = A + 2.$$

Considérese que al poliedro *P* se le quita una de sus caras, pero se dejan sus correspondientes aristas y vértices. Se elige una de las restantes, llamándola C_1. C_1 tiene a_1 aristas y v_1 vértices.

Se elige ahora otra cara C_2, no disjunta con C_1; o sea, que tiene alguna arista en común con ella. C_2 tiene a_2 aristas y v_2 vértices no comunes con C_1.

Considérese luego C_3, no disjunta con C_1 o con C_2, con a_3 aristas y v_3 vértices no comunes con las dos caras anteriores. Y así sucesivamente se pueden ir considerando todas las caras del poliedro.

$C - 1$ es el número total de caras que se pueden elegir de esta manera. A través de este procedimiento se recorre todo el poliedro, excepto la cara que se le ha quitado.

Se verifica entonces que:

$$
\begin{gathered}
a_1 = v_1 \\
a_2 = v_2 + 1 \\
a_3 = v_3 + 1 \\
\vdots \\
a_{c-1} = v_{c-1} + 1
\end{gathered}
$$

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{c-1}) = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{c-1} + C - 1 - 1$$

O sea,

$A = V + C - 2$:

O bien, como se quería demostrar $C + V = A + 2$. (Cromwell, 1997, pág. 190-212)

8.2. PLANTILLAS DE LOS CUERPOS PLATONICOS

Con estas plantillas se pueden creear los cuerpos platonicos. El objetivo de presentarlas es que el docente puede pedir a los alumnos su creación y apartir de ellas que realicen destazamientos. También pueden servir para que se les solicite crear plantillas para elaborar las piezas obtenidas apartir de un destazamiento determinado.

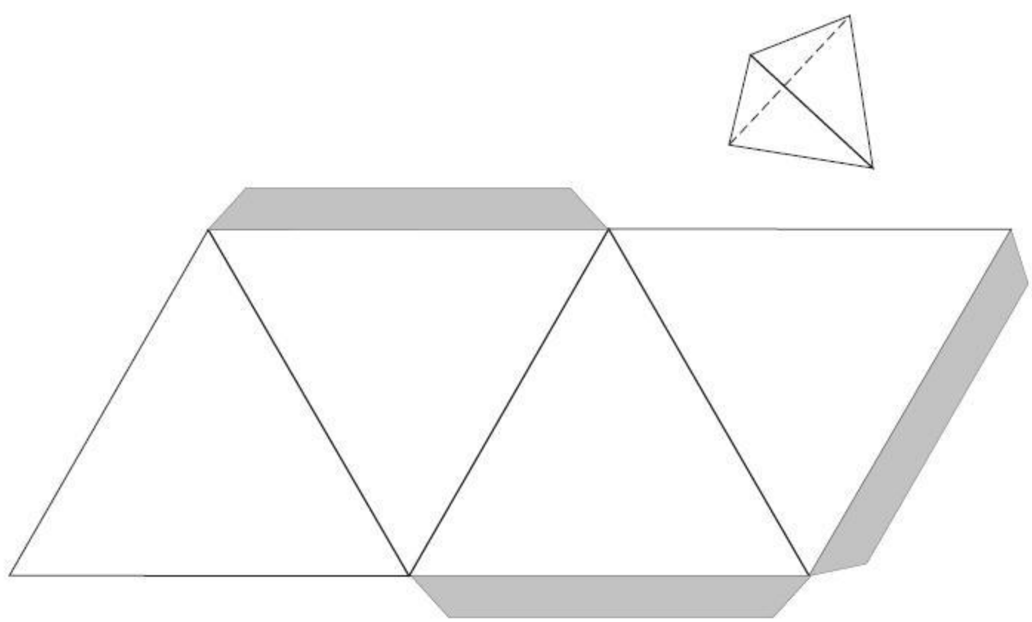


Ilustración 67 - Plantilla del tetraedro

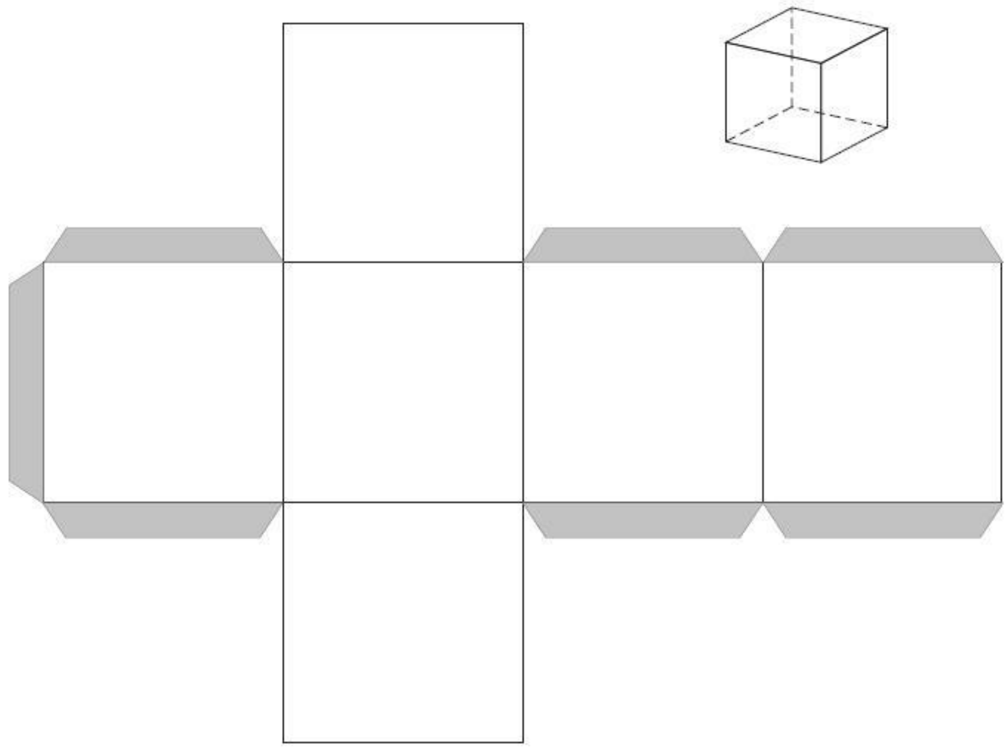


Ilustración 68 - Plantilla del hexaedro

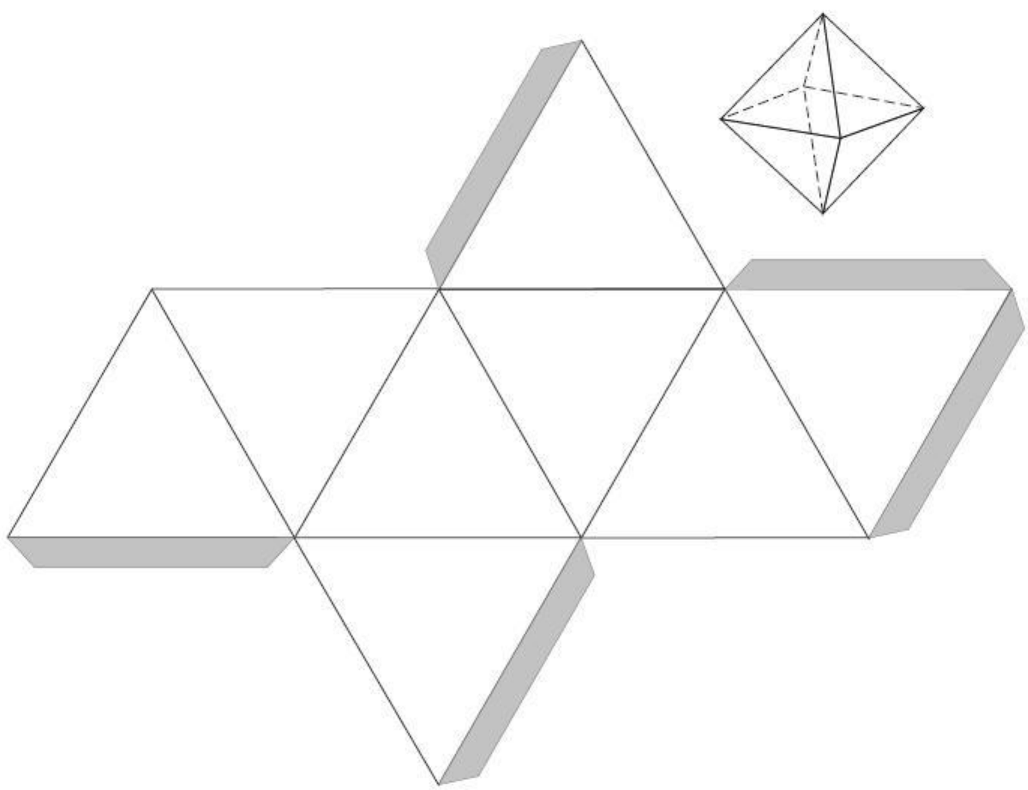


Ilustración 69 - Plantilla del octaedro

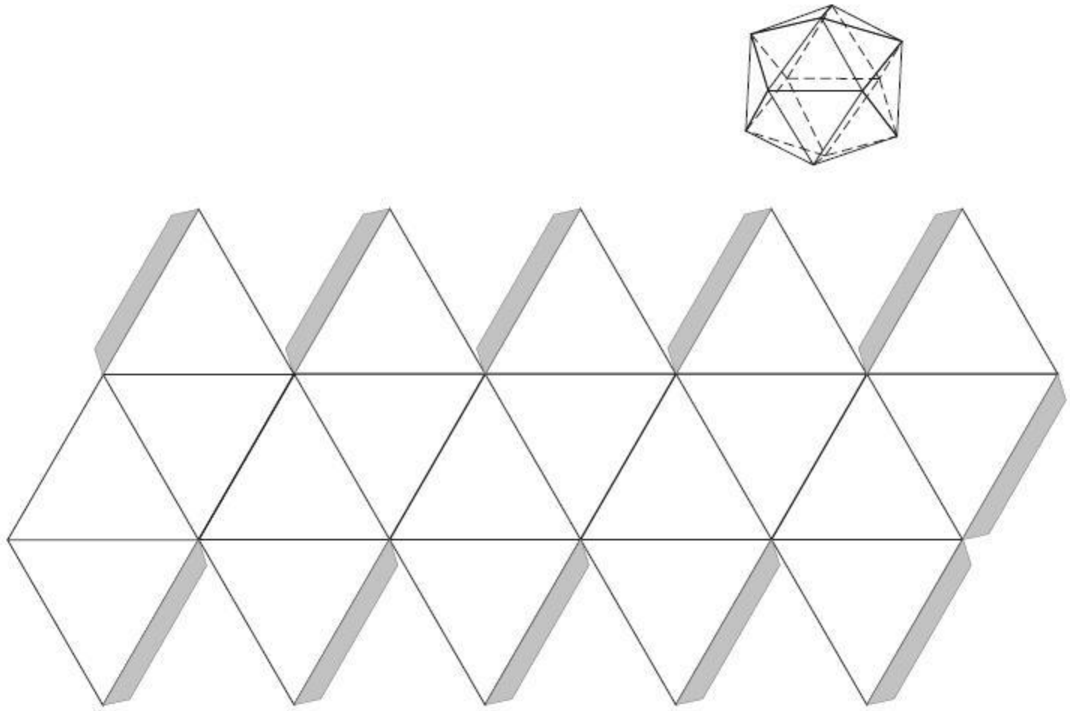


Ilustración 70 - Plantilla del icosaedro

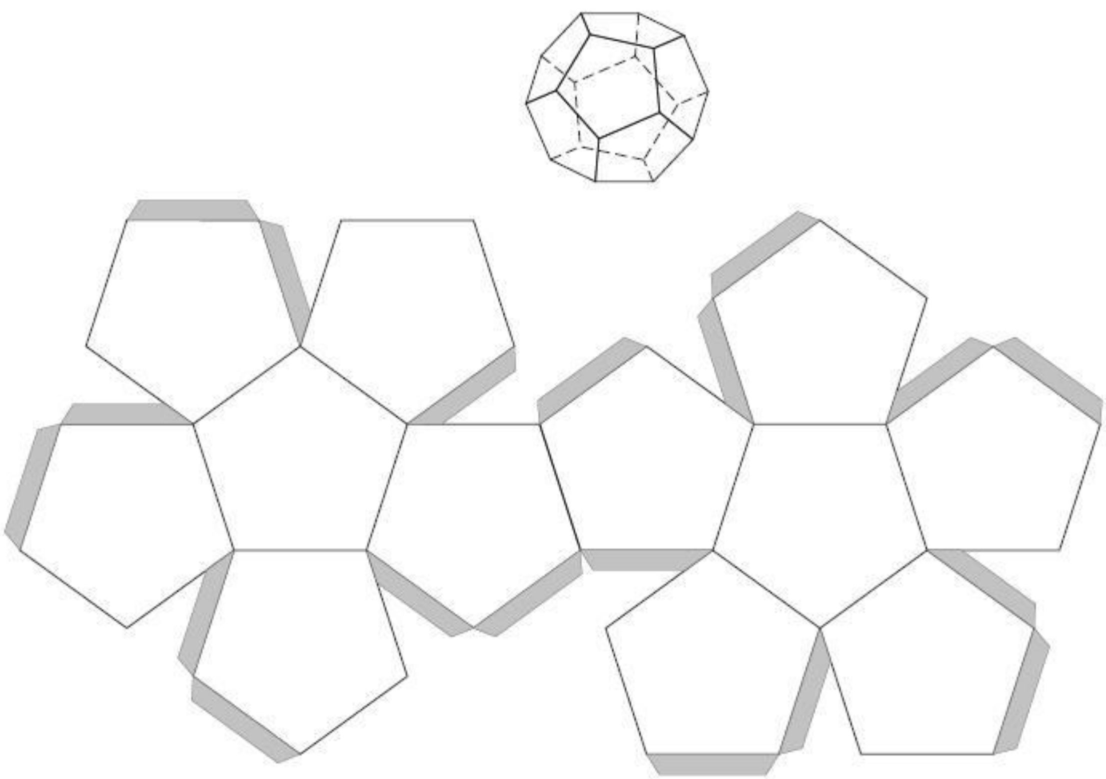


Ilustración 71 - Plantilla dodecaedro

8.3. ANIMACIÓN DE UN DESTAZAMIENTO

En estas imágenes se ve un destazamiento realizado en PowerPoint, por medio de animaciones se le da movimiento. Aquí se puede mostrar como se destaza un hexaedro y se separan las piezas pudiendose realizar a la inversa mostrar las piezas sueltas y crear el hexaedro.

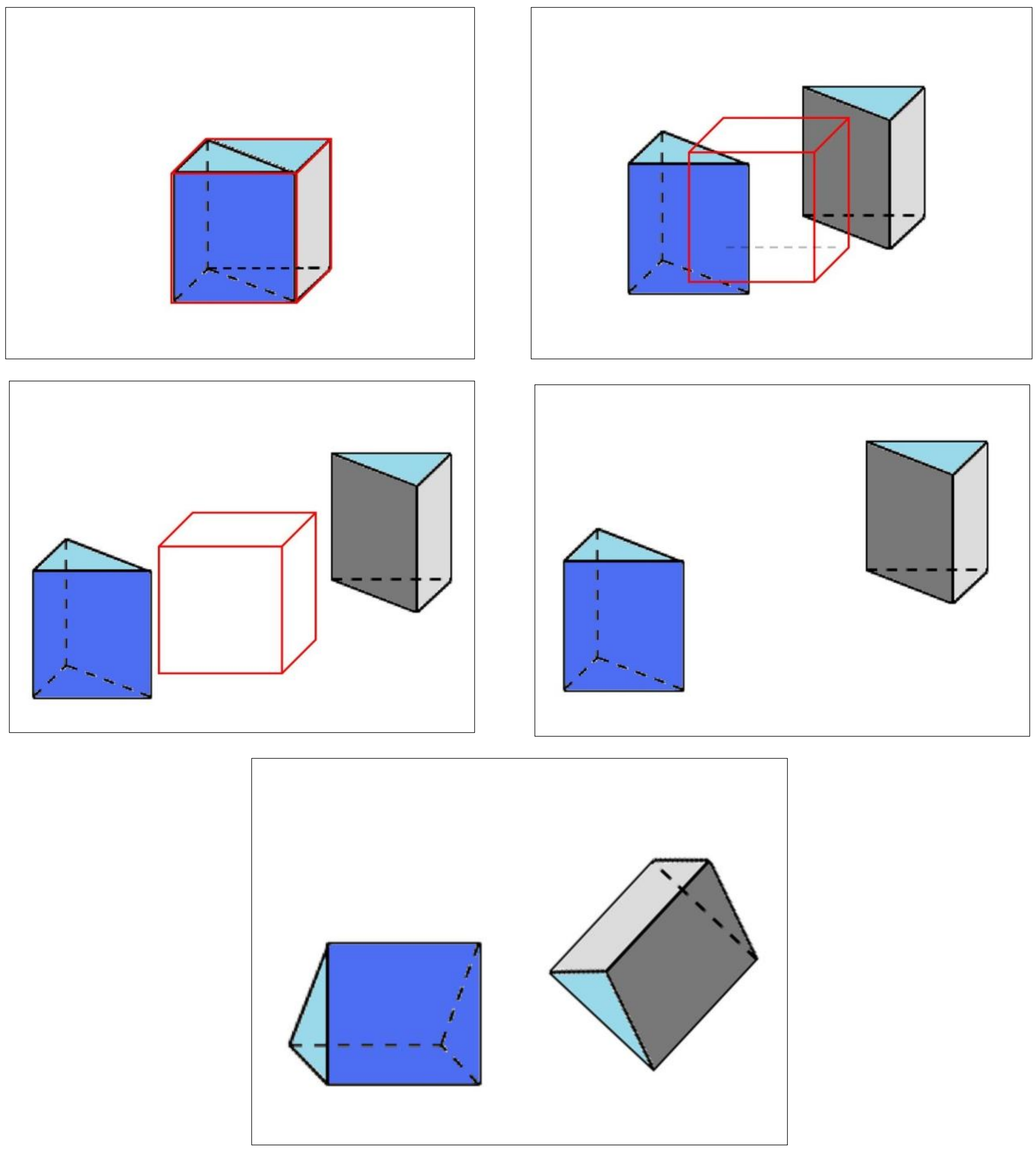


Ilustración 72 - Destazamiento animado en PowerPoint