Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Soluciones geométricas de ecuaciones algebraicas

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el grado en la Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:

Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Santiago de Querétaro, Querétaro; mayo de 2011

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

SOLUCIONES GEOMÉTRICAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el grado en la Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:

Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Dirigida por:

M en C Roberto Torres Hernández

SINODALES:

M en C Roberto Torres Hernández
Presidente — Firma

MDM Carmen Sosa Garza
Secretario — Firma

M en C José Enrique Crespo Baltar
Vocal — Firma

MDM Teresa Valerio López
Suplente — Firma

MDM Arturo Corona Pegueros
Suplente — Firma

Dr. Gilberto Herrera Ruiz
Director de la Facultad

Dr. Luis Gerardo Hernández Sandoval
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitário
Querétaro, Qro.
mayo de 2011
México

R E S U M E N

Este trabajo presenta tres de los métodos propuestos por Descartes en el apéndice "La Geometrie" de su libro "El Discurso del Método" publicado en 1637, para resolver de manera geométrica ecuaciones cuadráticas. Además presenta uno de los métodos expuestos por Omar Jayyam en su libro "Álgebra", para resolver ecuaciones de tercer grado. Se han adaptado estos métodos para realizarlos con ayuda de Cabri Géomètre II Plus y aprovechando el dinamismo de este programa, visualizar ciertas relaciones algebraicas y su interpretación geométrica, dando así un significado diferente a la solución de una ecuación.

Lo que se propone es el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico para eslabonar diversos temas de Álgebra y Geometría sobre un problema común como lo es solución de ecuaciones, buscando promover el estudio del origen de las ideas que cristalizaron en las definiciones y teoremas actuales que estudiamos en el aula, para llegar a entender la riqueza conceptual de éstas y no sólo repetir los procesos algorítmicos tan comunes en la enseñanza tradicional.

(**Palabras Clave:** Geometría, Álgebra, Descartes, Jayyam, Parábola)

S U M M A R Y

This paper presents three methods proposed by Descartes in the appendix "La Geometrie" of his book "Discourse on Method" published in 1637, to solve quadratic equations geometrically. It also presents one of the methods exposed by Omar Jayyam in his book "Algebra" to solve equations of third grade. They have adapted these methods to achieve them with the help of Cabri Geometry II Plus and harnessing the dynamism of this program, view certain algebraic relationships and geometric interpretation, thus giving a different meaning to the solution of an equation.

What is proposed is the use of the History of Mathematics as a teaching resource to link up various topics of Algebra and Geometry on a common problem such as solving equations, promoting the study of the origin of the ideas that crystallized in the definitions and Current theorems studied in the classroom, coming to understand the conceptual richness of these and not just repeat the algorithmic process so common in traditional teaching.

(**Key words:** Geometry, Algebra, Descartes, Jayyam, Parabola)

Con todo mi amor para mi mamá y mi hijo.

Agradezco a:

Mi familia y mi hijo.

Al Profe Torres.

A la Maestra Carmen.

Al Profe Crespo.

A la Maestra Tere.

Al Profe Arturo.

Al Dr. Gilberto Herrera.

A todos mis maestros que me formaron al cursar mis estudios hasta hoy.

A mis compañeros y amigos.

A todos ellos gracias de todo corazón por su apoyo.

Í N D I C E

Resumen…………………………………………………………………………………….. i

Summary……….…………………………………………………………………………….. ii

Dedicatoria…………………………………………………………………………………….. iii

Agradecimientos……………………………………………………………………………... iv

Índice………………………………………………………………………………………… v

Introducción…………………………………………………………………………………... vii

CAPÍTULO I. Propuesta didáctica

Descripción del contenido…………………………………………………….……………... 3

Antecedentes………………………………………………………………………………….. 4

Fundamentación teórica……………………………………………………………….…..... 5

Objetivos………...………………………………………………………………………..…... 6

Metodología y posibles aplicaciones………………………………………………………... 7

CAPÍTULO II. Descartes y la ecuación cuadrática

La Geometría de Descartes…………………………………………………………………... 10

Método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$ con $a > 0$…………………………………………………………………………………………… 11

Demostración del método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$ con $a > 0$………………………...……………………………………………………. 14

Ejemplo del método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$ con $a > 0$…………………………………………………………………………………………… 15

Método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$…………………………………………………………………………………………... 18

Demostración del método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$……………………………………………………………… 19

Ejemplo del Método de Descartes para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$……………………………………………………………… 20

CAPÍTULO III. La parábola y su parábola

Su parábola…………………………………………………………………………………….. 26

Construcción de la parábola………………………………………………………………… 27

Justificación de su lado recto………………………………………………………………… **31**

CAPÍTULO VI. Omar Jayyam y la ecuación cúbica

Álgebra de Omar Jayyam……………………………………………………………………….. **35**

Método de Jayyam para resolver ecuaciones de la forma $y^3 + by = c$, con $b > 0$ y $c > 0$. **37**

Demostración del método de Jayyam para resolver ecuaciones de la forma $y^3 + by = c$, con $b > 0$ y $c > 0$ ………………………………………………………………………………… **38**

CAPÍTULO V. Actividades propuestas

Introducción…………………………………………………………………………………. **42**

Actividades propuestas…………………………………………………………………….. **43**

Actividad 1……………………………………………………………………………………. **44**

Actividad 2……………………………………………………………………………………. **46**

Actividad 3……………………………………………………………………………………. **48**

Actividad 4……………………………………………………………………………………. **50**

Actividad 5……………………………………………………………………………………. **52**

Actividad 6……………………………………………………………………………………. **54**

Conclusiones…………………………………………………………………………………. **56**

Bibliografía……………………………………………………………………………………. **58**

Apéndice 1……………………………………………………………………………………..... **59**

Apéndice 2……………………………………………………………………………………. **69**

INTRODUCCIÓN

Rene Descartes (1596-1650) publica su obra el "Discurso del Método" en 1637, uno de los apéndices contenidos en esta obra es el titulado "La Géometrie", o bien, “La Geometría” castellanizado, el cual es considerado como un aporte fundamental en el desarrollo de la Matemática.

El apéndice "La Geometría" esta compuesto por tres Libros, o bien pueden verse cómo capítulos. El Libro Primero se titula *Problemas que pueden construirse empleando sólo circunferencias y líneas rectas*. A continuación transcribiré el primer párrafo del Libro Primero, con la finalidad de observar su contenido:

"Cualquier problema en geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción. Como la aritmética consiste en sólo cuatro o cinco operaciones, a saber, suma, resta, multiplicación, división y la extracción de raíces, que puede considerarse una especie de división, de manera que, en la geometría, para encontrar líneas requeridas es meramente necesario sumar o restar otras rectas; o de otra forma, tomando una línea que llamaré unidad para relacionarla tanto como se pueda a números, y que, puede escogerse arbitrariamente, y habiendo dado dos líneas más, encontrar una cuarta a una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (que es lo mismo que la multiplicación); o bien encontrar una cuarta línea que sea a una de las líneas como la unidad es a la otra (lo que es equivalente a la división); o, finalmente, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, la raíz cúbica, etc., de la línea dada). Y no he de dudar en introducir estos términos aritméticos en la geometría, en bien de la mayor claridad. " [1]

En "La Geometría" Descartes da una propuesta para determinar las raíces de una ecuación cuadrática de las siguientes formas con $a > 0$ y $b > 0$:

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0$$
$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

Observe que no propone un método para resolver ecuaciones del tipo: $x^2 + ax + b^2 = 0$, reiterando con $a > 0$ y $b > 0$ dado que este tipo de ecuaciones tienen sus dos raíces negativas. El método que propone Descartes, maneja longitudes de segmentos, en este sentido creemos que resolver geométricamente una ecuación, significa encontrar mediante procesos geométricos, un segmento cuya longitud satisfaga la ecuación propuesta. Se trata de representar geométricamente un proceso matemático, que permita visualizar la solución de una ecuación en este caso. Proceso que tiene sus orígenes legibles en la ciencia y filosofía griegas. Entonces dado que Descartes no trabaja con soluciones negativas, debe estudiar por separado distintas clases de ecuaciones que hoy consideramos una sola, la forma $ax^2 + bx + c = 0$, para todo a, b y c.

Por otro lado poco se sabe de Omar Jayyam, el otro personaje del que trataremos en esta Tesis. Se sabe que nació a mediados del siglo XI en Nishapur, Corasán, actual Irán y que además de reputado científico, fue un gran poeta. La Universidad de Oxford posee la colección poética más antigua atribuida a Jayyam, una copia de un manuscrito del año 1461.

En algunos de sus poemas, que muestran el ser más humano de Jayyam, razona por qué no cree en un castigo que espere a los que disfrutan de los placeres de la vida:

Que amantes y borrachos irán a los infiernos,
no puede ser verdad, creerlo es imposible
si van a los infiernos amantes y borrachos,
quedará el paraíso desierto y despoblado.

Omar Jayyam escribió su libro "Álgebra" alrededor del 1074. El rastro más antiguo de esta obra es un fragmento resguardado por la Biblioteca Nacional de París, de una copia de unos trece años posterior a su muerte. Jayyam desaconseja la lectura de su libro a quien no conozca los "Elementos" y los "Datos" de Euclides, así como los dos primeros libros de las "Cónicas" de Apolonio. De las proposiciones de los "Elementos" necesarias para entender el "Álgebra" se encuentran, por mencionar algunas de las relacionadas al tema que trataremos:

Del Libro VI, proposición 2. Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina sobre los otros dos segmentos proporcionales.

Del Libro VI, proposición 8. La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina.

Las "Cónicas" de Apolonio es una obra compuesta por ocho libros, sólo de los primeros cuatro nos han llegado del original griego, los tres siguientes los conocemos por traducciones del árabe y del octavo se sabe perdido. Sobre las cónicas escribieron otros matemáticos como Menecmo, Euclides y Arquímedes, pero fue Apolonio quien las describe de un modo más sistemático y completo, quien alrededor del siglo III a.C. publica su tratado donde recoge todo lo que se sabía sobre las cónicas y da a conocer muchos resultados más.

En el primer libro de las "Cónicas" se habla de lo que sucede cuando cortamos un cono mediante un plano y da nombre de parábola a la ecuación $y^2 = ax$, nombre que a perdurado hasta hoy, siendo a el lado recto.

Hemos conjugado las ideas de Descartes y Jayyam, dos personajes aparentemente ajenos en la historia, para presentar una relación que se establece en la ecuación de la Parábola, tratando de aprovechar las propiedades de los métodos para la enseñanza de un nuevo concepto. Reiterando que en Matemáticas nada es asilado, todo guarda una relación hasta su misma historia.

Capítulo I

Propuesta didáctica

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

Como se sabe han surgido diversas y variadas actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, por ser esta una de las materias más importantes para el desarrollo mental y social de las estudiantes. Creemos que primeramente para lograr la enseñanza y el aprendizaje en los estudiantes, los profesores deben estar en continuo aprendizaje para con ello lograr estrategias que le sean efectivas en su labor.

Este trabajo presenta dos métodos para resolver de manera geométrica ciertas ecuaciones cuadráticas y un método para resolver cierta ecuación cúbica, además relaciona estos dos métodos, para con ello construir y fundamentar un concepto importante de la Geometría Analítica como lo es la parábola. Por ello como se verá los métodos y su respectiva justificación matemática emplearán temas de Álgebra, Geometría Euclidiana y Geometría Analítica, haciendo ver que en Matemáticas todo esta relacionado y aprovechando los hechos históricos mostrar esta relación al paso del mismo desarrollo de esta importante ciencia.

A lo largo de los cursos de nivel secundaria y bachillerato, comúnmente se enseña Álgebra, Geometría Euclidiana y Geometría Analítica de manera aislada. Con las actividades aquí propuestas, que van dirigidas a la formación de profesores de estos niveles, se pretende fomentar una reflexión sobre el eslabonamiento de estas ramas y de esta manera se pretende que estas actividades sirvan para ampliar la visión de los profesores al abordar los temas de Matemáticas, pero además, y sobre todo, se busca que con su experiencia docente, se generen algunas ideas que les sirvan para impartir y mejorar sus clases.

ANTECEDENTES

Una propuesta expuesta en el History and Padagogy of the Mathematics (HPM) 2008, efectuado en la Ciudad de México en el mes de junio, fue la utilización de fuentes históricas primarias para introducir un concepto o tema en el aprendizaje de los estudiantes en los diversos cursos y niveles de educación.

La propuesta se sienta, básicamente, para que en medida de lo posible se utilicen fuentes históricas primarias, por ejemplo, los manuscritos o publicaciones originales o facsimilares de algún autor que haya aportado algún concepto, teorema o definición importante a las Matemáticas, documentos que servirán para proporcionarle en clase al estudiante y conozca el origen Histórico del concepto o tema que vaya a aprender, relacione el desarrollo de las Matemáticas con la historia y evolución humana, relacione con mayor fuerza la necesidad del surgimiento y creación de un nuevo concepto matemático, tome en sus manos y haga suyos documentos históricos originales que han sido parte fundamental para el desarrollo de las Matemáticas, conozca a los Matemáticos, su vida, su obra, sus aportaciones, las dificultades a las que se enfrentaron y cómo fueron capaces de salir de ellas, cómo hicieron frente a sus problemas personales, muchos de los cuales son un ejemplo para la juventud, así como a sus problemas matemáticos que los llevaron a inventar nuevas herramientas para cubrir sus intereses y aportar al mundo conocimiento útil, aplicable a la vida y necesidades reales y a necesidades meramente matemáticas, a la abstracción, al conocimiento y desarrollo del pensamiento humano.

Para esta Tesis, presentamos "La Géometrie" de Rene Descartes extraída de la edición facsimilar del original francés de la obra La Géometrie, Livre Premier de René Descartes, primera edición de 1637. Tomada del libro La Geometría. René Descartes. Editorial Limusa.

1997. Primera Edición [1], así como una traducción al español tomada del mismo libro, que nos servirá como material para el desarrollo de las actividades.

Esta propuesta, de utilizar fuentes históricas primarias, pudiera verse lejana, difícil y hasta con la barrera del idioma si se busca en fuentes extranjeras, como es el caso, pero es un reto y cualquier aportación será reconocida por las futuras generaciones, en memoria de nuestros antepasados, del rescate de sus pensamientos y sus aportaciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Brousseau plantea la Situaciones Didácticas como una forma para “modelar” el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera tal que este proceso se visualiza como un juego para el cual el docente y el estudiante han definido o establecido reglas y acciones implícitas, que en conjunto se denomina *Contrato Didáctico* que en un sentido más estricto, refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma se comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente. El docente debe estar atento a que el medio didáctico reúna las condiciones óptimas de modo que el estudiante pueda elaborar su conocimiento.

Al referirnos a las Situaciones Didácticas, en principio debemos distinguir dos enfoques: uno, tradicional; otro, el enfoque planteado por la teoría de Brousseau. Ambos en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el primero, tendríamos una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados.

Ahora bien, en el enfoque planteado por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento, dicho de otro modo, el docente **proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento** Así, Situación Didáctica se refiere al conjunto de **interrelaciones** entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico.

En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento y pueda el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente.

En este sentido promovemos que, la relación irremovible que se establece entre el profesor como provedor de un medio didáctico para el estudiante, se realice a través de las fuentes históricas primarias, es decir, que el docente utilice como medio didáctico la historia de las Matemáticas, para que con su estudio, el estudiante logre eslabonar, relacionar y generar sus propias conclusiones sobre los procesos matemáticos que se le enseñan en el aula.

OBJETIVOS

- Formación docente.

- Ampliar la visión de los profesores al abordar los temas de Matemáticas. En particular la relación dada entre Álgebra, Geometría Euclidiana y Geometría Analítica que enriquecerá el conocimiento de los temas de estas ramas.
- Que con la experiencia docente de los profesores se sirvan de algunas ideas que les pudieran surgir de las actividades aquí propuestas para impartir sus clases.
- Conocer el apéndice *La Geometría* de Rene Descartes.

METODOLOGÍA Y POSIBLES APLICACIONES

El trabajo propone diversas actividades con el uso de Cabri Géomètre II Plus u otro software de geometría dinámica y aprovechando el dinamismo de estos programas, visualizar ciertas relaciones algebraicas y su interpretación geométrica, dando así un significado diferente a la solución de una ecuación y la construcción del concepto de parábola, haciendo siempre análisis formal Geométrico y Algebraico.

El contenido esta dirigido principalmente a profesores de educación secundaria y media superior con los objetivos anteriormente descritos. Dichas actividades pueden ser impartidas en diplomados, talleres o cursos de actualización y formación de profesores. En un trabajo antecedente a este se realizaron actividades para hacer uso de la regla y el compás, y se llevaron a cabo en tres talleres en dos distintos Congresos, obteniendo resultados y comentarios favorables de los profesores que asistieron, a quienes estuvieron dirigidas las actividades que propusimos y que hemos diseñado, creyendo que entre otras cosas y en su caso, amplíen su formación y dada su experiencia docente generen ideas para impartir o motivar sus clases, como ya se ha mencionado en la descripción del trabajo.

Capítulo II

Descartes y la ecuación cuadrática

LA GEOMETRIE DE DESCARTES

El apéndice “La Geometría” de Rene Descartes (1596-1650) contenido en el apéndice de su obra el “Discurso del Método” publicado en 1637, muestra, como vimos en la introducción, la forma de sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces de manera geométrica con construcciones mediante el uso de la regla y el compás.

En cuento a la extracción de raíces, específicamente, en el Libro I de “La Geometría” Descartes da una propuesta para determinar las raíces de una ecuación cuadrática de las siguientes formas con $a > 0$ y $b > 0$:

$$\boldsymbol{x^2 - a = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 - ax - b^2 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 + ax - b^2 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 - ax + b^2 = 0}$$

Observe que no propone un método para resolver ecuaciones del tipo:

$$\boldsymbol{x^2 + ax + b^2 = 0}$$

Dado que este tipo de ecuaciones tiene sus dos raíces negativas, reiterando para $a > 0$ y $b > 0$. Los métodos que propone Descartes, manejan longitudes de segmentos, en este sentido creemos que resolver geométricamente una ecuación, significará encontrar mediante procesos geométricos, un segmento cuya longitud satisfaga la ecuación propuesta. Se trata de representar geométricamente un proceso matemático, que permita visualizar la solución de una ecuación. Al tratarse de longitudes de segmentos y dada la época en la que Descartes vive, misma donde el desarrollo de los números negativos aún no era notable, solamente presentó métodos para ecuaciones que tuvieran sus raíces reales y positivas.

En este Capítulo presentaremos dos de los métodos utilizados por Descartes para resolver las ecuaciones cuadráticas antes mencionadas. Dado que Descartes no justifica sus métodos, aquí encontrará su respectiva justificación, las figuras han sido realizadas con Cabri Géomètre II Plus y aprovechando el dinamismo de este programa, visualizar ciertas relaciones algebraicas y su interpretación geométrica como se verá en las actividades.

Además de estudiar los métodos, podremos ir observando la notación que Descartes utilizó, observe el apéndice 1 de este trabajo donde encontrará el Libro I de la Géometrie, por ejemplo, lo que describe para sumar dos segmentos de líneas BD y GH, dice: *"a una la llamo a y a la otra b, y escribo $a+b$; entonces $a-b$ indicará que b se resta de a; ab que a es multiplicada por b; $\frac{a}{b}$ que a se divide entre b; aa o a^2 que a se multiplica por sí misma; a^3 que este resultado se multiplica por a, etc."* Que consideramos de importancia para ir comprendiendo mejor nuestra notación actual en Matemáticas. Además al ir estudiando los métodos en la siguiente sección de este Capítulo, podemos ir relacionando y observando lo descrito por Descartes teniendo a la mano el apéndice.

EL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - a = 0$ CON $a > 0$.

Para la ecuación de la forma $x^2 - a = 0$, Descartes propone obtener la raíz cuadrada de la longitud a. Describe su método de la siguiente manera:

"Si se desea la raíz cuadrada de GH, sumo, sobre la misma línea recta, FG igual a la unidad; entonces, bisecando FH en K, describo la circunferencia FIH alrededor de K como centro, y trazo a partir de G una perpendicular y la extiendo hasta I, y GI es la raíz requerida."

Observemos la figura 1 que es la utilizada por Descartes (página 298 del apéndice 1).

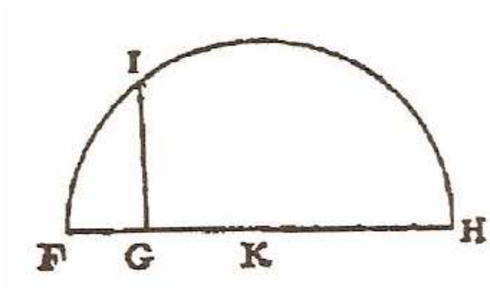


Figura 1.

A continuación, presentamos paso por paso el método de Descartes, las figuras han sido trazadas con Cabri Géometre II Plus:

- ***Si se desea la raíz cuadrada de GH.***

Trazamos el segmento GH (figura 2) que llamaremos a, es decir, $GH = a$ entonces encontraremos la raíz cuadrada de a.

Figura 2.

- ***Sumo, sobre la misma línea recta, FG igual a la unidad.***

Es decir, de manera continua al segmento GH trazamos el segmento FG, donde $FG = 1$. Figura 3.

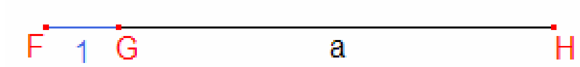


Figura 3.

- ***Entonces, bisecando FH en K, describo la circunferencia FIH alrededor de K como centro.***

Encontramos el punto medio del segmento FH, al cual llamaremos K, trazamos la circunferencia con centro en K y que pasa por F y H (Figura 4), además pasará por un punto I que a continuación sabremos de quien se trata (Figura 5).

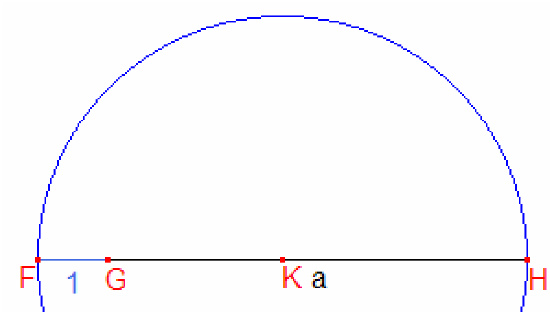


Figura 4.

- ***Y trazo a partir de G una perpendicular y la extiendo hasta I.***

El punto I es el punto donde la recta perpendicular que pasa por G corta a la circunferencia.

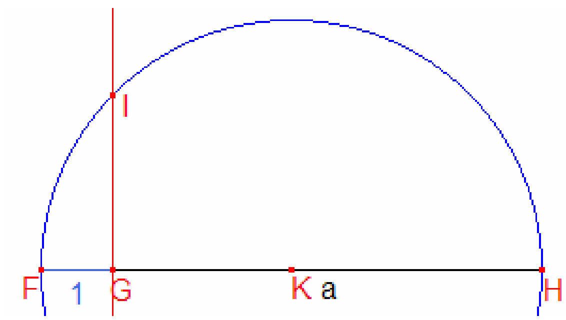


Figura 5.

- ***Y GI es la raíz requerida.***

Es decir, la raíz del segmento $GH = a$ es la longitud del segmento $GI = x$.

Aunque Descartes no explica la razón de su afirmación, no es difícil convencerse, con proporcionalidades, que su afirmación es cierta. Además Descartes dice: … *la extracción de raíces, que puede considerarse una especie de división… encontrar una cuarta línea que sea a una de las líneas como la unidad es a la otra (lo que es equivalente a la división)…*

Luego interpretamos que lo que hace Descartes es encontrar una línea que sea proporcional a las otras en este caso, $GH = a$ y $FG = 1$. Observe en la figura 5 la proporcionalidad siguiente:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{a} \qquad (1)$$

En la siguiente sección se demostrara (1).

Entonces de (1)

$$x^2 = a \qquad (2)$$

$$x = \pm\sqrt{a} \qquad (3)$$

De aquí que x sea la raíz cuadra de a, tomando nota que para el método de Descartes se toma en cuenta sólo la raíz positiva, dado que se trata de la longitud de un segmento.

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - a = 0$ CON $a > 0$.

De la figura 6 se tienen los triángulos ΔFGI y ΔIGH, que son rectángulos dado que GI es perpendicular a FH, así se construyó. Dichos triángulos son semejantes, a continuación se demuestra esta afirmación.

El ΔFIH es triángulo rectángulo ya que su ángulo $\sphericalangle FIH$ es recto porque se tiene su vértice sobre la circunferencia y comprende un diámetro, entonces $\Delta FGI \approx \Delta FIH$, ya que son rectángulos y tienen un lado en común. Análogamente $\Delta IGH \approx \Delta FIH$. Entonces transitivamente $\Delta FGI \approx \Delta FIH$ y sus lados son proporcionales. Esto es la Proposición 8 del Libro VI de los “Elementos” de Euclides [7], quien ya lo había demostrado.

La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina.

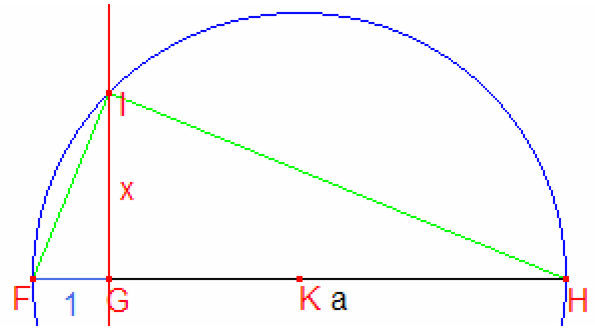


Figura 6.

Entonces se tienen la siguiente relación de proporcionalidad.

$$\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

$$(GI)^2 = (FG)(GH) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5)}$$

Donde tenemos que $GH = a$; $FG = 1$ y $GI = x$.

Entonces (5) se puede escribir como:

$$x^2 = (1)(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}$$

$$x^2 = a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(7)}$$

$$x^2 - a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8)}$$

Con esto se ha demostrado que el segmento GI de la figura 6, satisface las ecuaciones del tipo (8), por lo que si se desea resolver una ecuación que tenga esta expresión, el método expuesto puede ayudarnos.

EJEMPLO DEL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - a = 0$ CON $a > 0$.

A continuación presentamos un ejemplo concreto para resolver las ecuaciones $x^2 - a = 0$, equivalentemente podemos pensar en encontrar la raíz cuadrada de un número a.

Raíz cuadrada de 9 mediante el método de Descartes.

Se tiene la siguiente ecuación $x^2 - 9 = 0$, se hará con este valor, porque sabemos que $\sqrt{9} = 3$ y trabajando con este sencillo valor, podremos comprender mejor el método de Descartes.

Ahora bien, traza un segmento de longitud 9 y extremos G y H (se usarán las mismas literales que Descartes para designar a los segmentos).

Figura 7.

En el extremo G, traza prolongadamente un segmento de longitud uno, al extremo trazado llámale F.

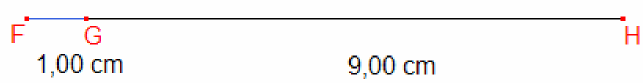


Figura 8.

Encuentra el punto medio del segmento FH y llámalo K.

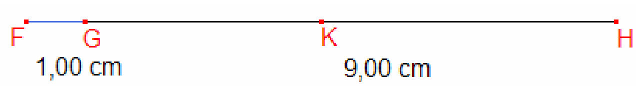


Figura 9.

Traza una circunferencia con centro en K y radio FK.

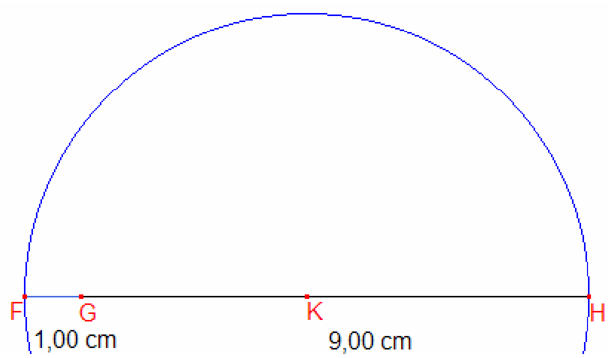


Figura 10.

Traza la recta perpendicular a FH que pase por G y prolongue hasta que corte a la circunferencia en el punto I. Mida la longitud del segmento GI, esa longitud será la raíz cuadrada de 9.

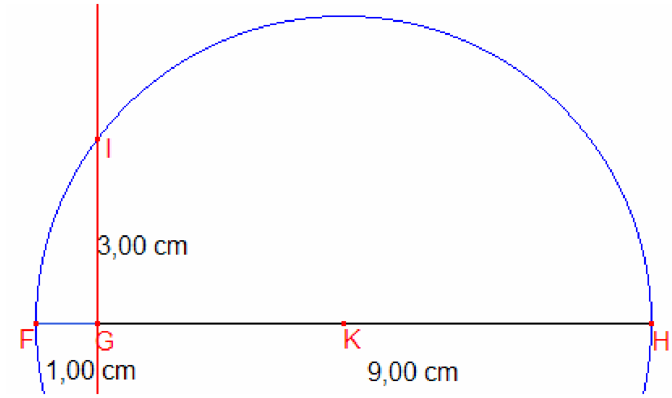


Figura11.

Una vez que se ha resuelto esta ecuación, pueden surgirle algunas preguntas como por ejemplo:

1. ¿Qué pasa si quiere obtener la raíz cuadrada de un número que no tiene raíz entera?
2. ¿Qué pasa si quiere obtener la raíz cuadrada de un número decimal o racional, sirve o no el método?

Es conveniente recordar que este método presentado por Descartes, se sabe que fueron los mesopotámicos los primeros en utilizarlo y que en la Época Heroica se presentó y difundió con mayor auge y fue en esta época donde precisamente se comenzó a tratar de resolver problemas algebraicos utilizando únicamente regla y compás [2].

Hoy en día el uso de las tecnologías como herramienta didáctica ha tenido una fuerte difusión. En este trabajo proponemos realizar las construcciones con Cabri Geometrie Plus II, aunque se pude realizar con otro software de geometría dinámica, y de esta manera poder modificar el segmento GH, obteniendo así, la raíz cuadrada de un número deseado, más aún, dado que Cabri dibuja en efecto una circunferencia de FIH alrededor de K como centro, podemos determinar a G como el origen de un plano y observar los segmentos de que se forman con la recta GI y la circunferencia.

EL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$.

Descartes aborda el problema de encontrar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$, con $a > 0$ y $b > 0$. Aunque la forma b^2 del coeficiente independiente puede parecer extraño, se explica porque considerar la raíz cuadrada de él, no representa dificultad alguna, incluso podría ser calculada con lo expuesto en el método anterior.

Para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$, con $a > 0$ y $b > 0$ Descartes dice:

...si tengo $z^2 = az - b^2$, hago NL igual a $\frac{1}{2}a$ y LM igual a b; en seguida, en vez de unir los puntos M y N, trazo MQR paralela a LN, y con N como centro describo una circunferencia a través de L cortando MQR en los puntos Q y R; a continuación, z, la línea buscada, es MQ o MR, pues en este caso puede expresarse de dos maneras, a saber:

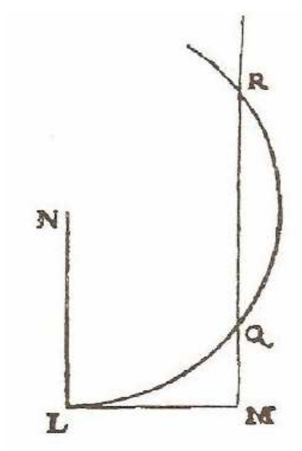


Figura 12.

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

y

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

Note que Descartes utiliza la letra z en vez de la x para designar a la variable (apéndice 1, pág. 301-303). En este trabajo y para mejor familiaridad utilizaremos la x para la variable.

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - ax + b^2 = 0$ CON $a > 0$ Y $b > 0$.

Nuevamente Descartes no justifica su método ni las igualdades que obtiene para las ecuaciones del tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$, se limita a sólo describirlo y da algunas conclusiones que no transcribiré porque pueden ser parte de conjeturas interesantes para plantear a los alumnos o a usted mismo, sin embargo, no es difícil llegar a las igualdades.

Para la demostración observe la figura 13 donde consideremos el punto auxiliar S como punto medio de la cuerda QR, entonces NS es perpendicular a MR.

Los triángulos ΔNSR y ΔNSQ que se forman, son rectángulos porque NS es perpendicular a MR.

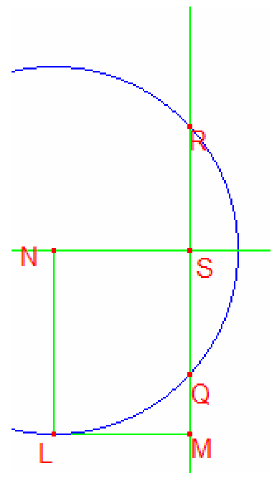


Figura 13.

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos NSR y NSQ.

Del ΔNSR tenemos, $(NS)^2 + (SR)^2 = (NR)^2$ ……………...………(9)

Del ΔNSQ tenemos, $(NS)^2 + (SQ)^2 = (NQ)^2$ ……………….....(10)

Despejando SR en (9) se tiene: $SR = \sqrt{(NR)^2 - (NS)^2}$ …………..…..(11)

Despejando SQ en (10) se tiene: $SQ = \sqrt{(NQ)^2 - (NS)^2}$ …………(12)

Sabemos que $NL = NQ = NR = \dfrac{a}{2}$ porque son radios de la circunferencia y $NS = LM = b$ por construcción.

Al sustituir $NR = \dfrac{a}{2}$ y $NS = b$ en (11) tenemos:

$$SR = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \quad \ldots\ldots(13)$$

Igualmente sustituyendo $NQ = \frac{a}{2}$ y $NS = b$ en (12) tenemos:

$$SQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - (b)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \text{ ....(14)}$$

De la figura 13 tenemos el rectángulo $NSML$ porque se trazo MQR paralela a LN *además* NS es perpendicular a MR y $NS = LM = b$, entonces afirmamos que $MS = LN = \frac{a}{2}$ porque son lados del rectángulo $NSML$.

Finalmente Descartes da longitudes MR y MQ como el valor z que se esta buscando, pues:

$$MR = MS + SR \text{ ....(15)}$$

$$MQ = MS - SQ \text{ ....(16)}$$

Sustituyendo $MS = \frac{a}{2}$ y (13) en (15) tenemos:

$$MR = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \text{ ....(17)}$$

Y sustituyendo $MS = \frac{a}{2}$ y (14) en (16) tenemos:

$$MQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \text{ ....(18)}$$

Donde (17) y (18) son las igualdades del método de Descartes.

EJEMPLO DEL MÉTODO DE DESCARTES PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $x^2 - ax + b^2 = 0$ CON $a > 0$ Y $b > 0$.

A continuación presentamos un ejemplo concreto para la utilización del método de Descartes.

Obtenga las raíces de la siguiente ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$ mediante el método de Descartes.

Se sigue que $a = 10$ y $b^2 = 16$, es decir, $b = 4$ recordemos que tomamos la raíz positiva dado que son segmentos de línea.

Trace lo siguiente:

- Un segmento de longitud $\frac{a}{2}$ y extremos N y L, utilizaremos las mismas literales que Descartes para asignar a los segmentos. Dado que $a = 10$ en este caso el segmento NL será de longitud 5, observe que puede ser vertical u horizontal, conforme conozca el método utilice lo que mejor le convenga. Aquí seguiremos las figuras tal como las usó Descartes.

Figura 14.

- Con extremo en L trace una perpendicular a NL de longitud b, en este caso 4 y al otro extremo asigne la letra M.

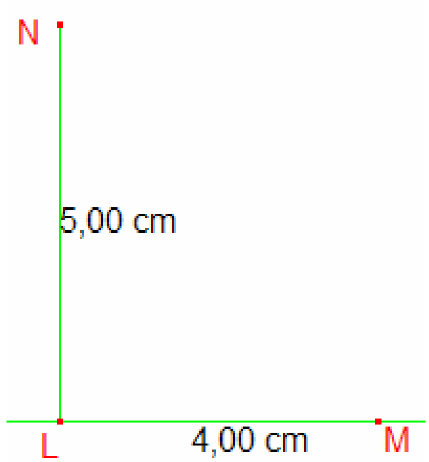


***Figura 15*.**

- Trace una paralela a NL que pase por M de una longitud mayor a NL.

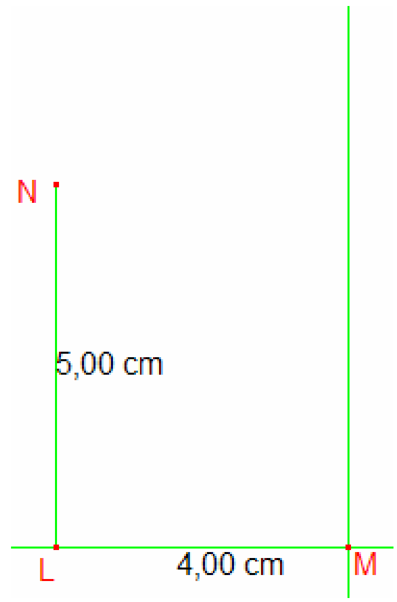


Figura 17.

- Trace una circunferencia con centro en N y radio NL. Donde la circunferencia se intersecte con la recta paralela marque con los puntos Q y R.

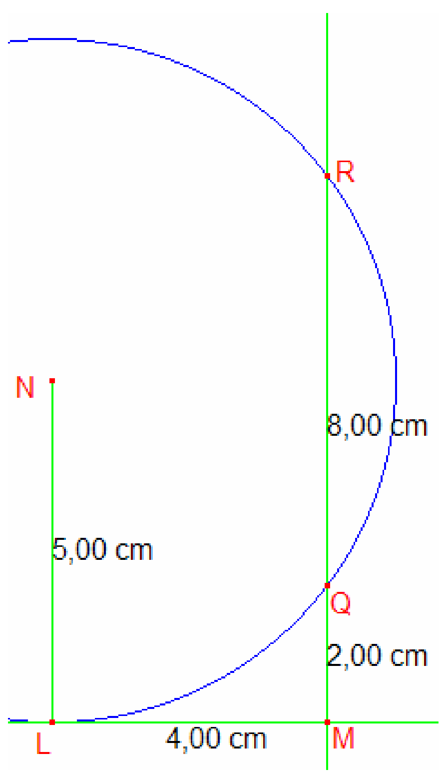


Figura 18.

- Mida la longitud de los segmentos MR y MQ, las cuales serán las raíces de la ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$.

De igual manera pueden surgirnos algunas preguntas como por ejemplo:

- ¿Qué pasa si la circunferencia no toca a la recta paralela, es decir no se encuentran los puntos Q y R?
- ¿Qué pasa si la circunferencia sólo toca a la recta en un punto?
- ¿Hay alguna relación entre la longitud a y la longitud b?

De igual manera sugerimos realizar las construcciones con Cabri Geometrie Plus II, aunque se pude realizar con otro software de geometría dinámica, y de esta manera poder modificar los segmentos ML y NL. Observe que pasa si son iguales, si $ML > NL$ qué puede decir de la ecuación, etc.

Capítulo III

La parábola y su parábola

SU PARÁBOLA

Para el estudio de la parábola vamos a recurrir a las ideas desde los mesopotámicos hasta Descartes, pasando por Euclides, Apolonio y la Época Heroica de las Matemáticas.

Recordemos que este método presentado por Descartes (1596-1650) para resolver las ecuaciones de la forma $x^2 - a = 0$ con $a > 0$, se sabe que fueron los mesopotámicos los primeros en utilizarlo y que en la Época Heroica se presentó y difundió con mayor auge y fue en esta época donde precisamente se comenzó a tratar de resolver problemas algebraicos utilizando únicamente regla y compás. Sin embargo no se conoce alguna demostración, hasta Euclides (fl. ca. 300 a.C.) quien en la Proposición 8 del Libro VI de los “Elementos” [7] demuestra que:

La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina.

Lo que determina la proporcionalidad entre los triángulos que se forman de por ejemplo la figura 6 del Capítulo anterior.

Por otro lado se sabe que Apolonio (fl.ca. 270 a.C.) en su primer libro de las "Cónicas" se habló de lo que sucede cuando cortamos un cono mediante un plano de tal manera que el plano sea paralelo a uno de los lados del cono (observe figura 19). A dicha curva que se forma le da el nombre de parábola. Pero se sabe que sobre las cónicas escribieron otros matemáticos como Menecmo (fl.ca. 340 a.C.), Euclides (fl. ca. 300 a.C.) y Arquímedes (fl. ca. 287 a.C.), en especial Arquímedes hace un tratado sobre la cuadratura de la parábola, lo que nos dice que ya se sabía sobre esta curva, misma que utiliza Jayyam (mediados del siglo XI) [4] para resolver una ecuación algebraica de tercer grado manera geométrica.

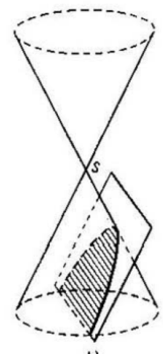


Figura 19.

Ahora nosotros conjuntamos y observamos que la construcción para resolver la ecuación algebraica $x^2 - a = 0$ con $a > 0$ de manera geométrica, lleva a la construcción de la parábola, que hoy estudiamos en la rama de la Geometría Analítica y que al estudiarla de este modo, se pueden ver las propiedades y la naturaleza de esta curva, mostrando con ello la maravillosa conjunción de tres ramas de las Matemáticas, Álgebra, Geometría Euclidiana y Geometría Analítica. Por ello no es casualidad que toda esta bola de nieve culmine bautizando a Rene Descartes como el padre de la Geometría Analítica, rama que nace de la relación entre Álgebra y la Geometría Euclidiana.

CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA

Supongamos que queremos trazar una parábola de lado recto $\boldsymbol{b > 0}$. Sin pérdida de generalidad podemos trazar la parábola con eje focal el eje X, entonces se tendrá la ecuación $\boldsymbol{y^2 = bx}$, misma que podemos ver como una ecuación de la forma $\boldsymbol{x^2 - a = 0}$, que ya hemos resuelto con Descartes, de manera que tenemos la ecuación cuadrática $\boldsymbol{y^2 - bx = 0}$.

Para este caso tracemos un segmento de longitud b y extremos AV. Ahora colinealmente en vez de trazar un segmento de longitud 1 trazamos un segmento de longitud $x = \frac{b}{4}$ con extremos V y F. Determinamos el punto medio del segmento AF, llamémosle M y con M como centro trazamos la circunferencia de radio AM, por último trazamos por V un recta perpendicular a AF que corte a la circunferencia en los puntos P y Q (figura 20).

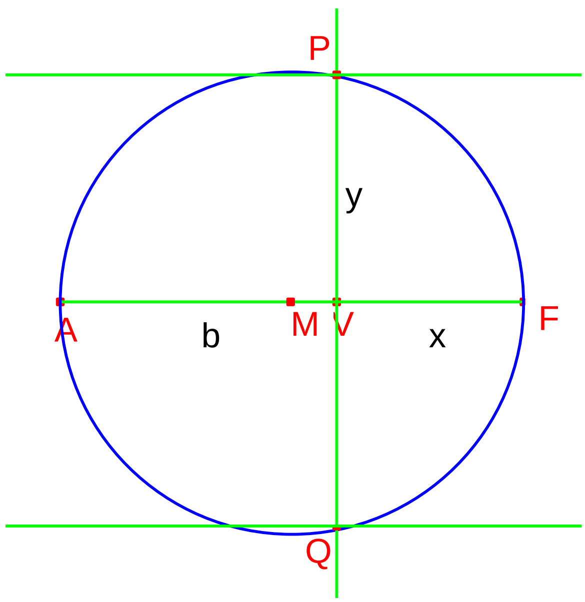


Figura 20.

Observe que se cumple la relación $\frac{AV}{VP} = \frac{VP}{VF}$

De esta relación se tiene que

$$(VP)^2 = (AV)(VF) \quad \text{...(19)}$$

Además también se cumple que

$$(VQ)^2 = (AV)(VF) \quad \text{...(20)}$$

Donde en (19) y (20) sabemos que $AV = b$, $VF = x$ y $VP = VQ = y$.

Ahora, si trazamos la recta perpendicular a AF que pase por F y la intersecamos con las rectas que pasan por P y Q perpendiculares a PQ, encontramos los puntos P' y Q' respectivamente (observa la figura 21).

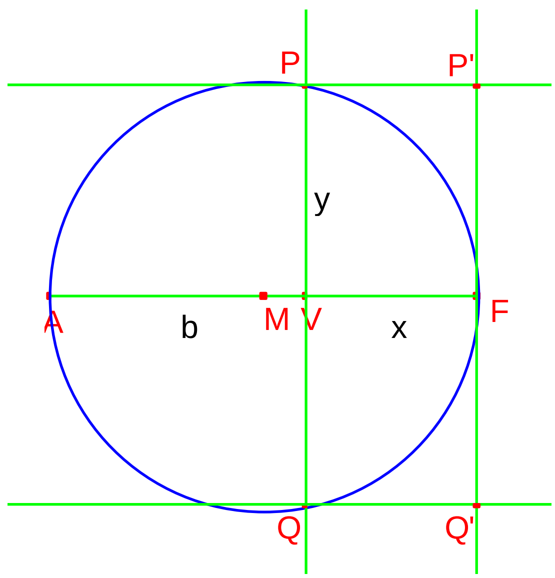


Figura 21.

Se sigue cumpliendo (19) y (20) para los segmentos $FP' = FQ'$, dado que $VP = VQ = FP' = FQ' = y$ (Figura 21).

Entonces los segmentos FP' y FQ' son segmentos que satisfacen la ecuación de la parábola $y^2 = bx$, o bien, los puntos P' y Q' satisfacen la ecuación.

Dado que consideramos la ecuación $y^2 = bx$, se tiene que la variable independiente es x, luego para ese valor de $x = VF$ que seleccionamos encontramos P' y Q'.

Ahora si consideramos otro valor de *x*, permaneciendo fijo el segmento $AV = b$, y procedemos de manera análoga a lo anterior podemos encontrar otros puntos P'' y Q'' que pertenezcan a la ecuación (figura 22).

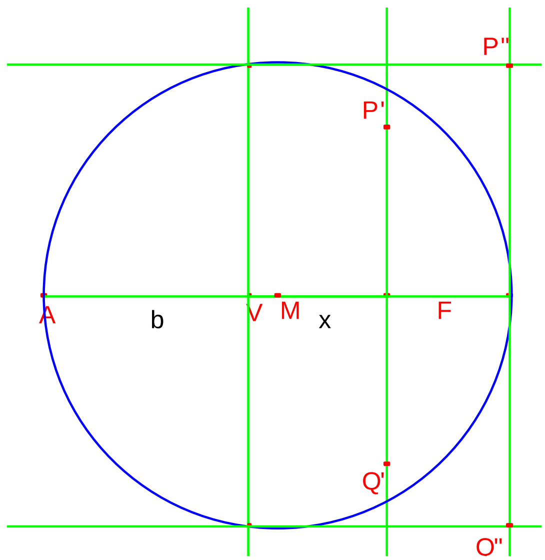


Figura 22.

De esta manera encontramos por lo menos cinco puntos que satisfagan la ecuación para que con Cabri encontremos una cónica que pase por los puntos $P's$ y $Q's$ y por el punto V (Figura 23).

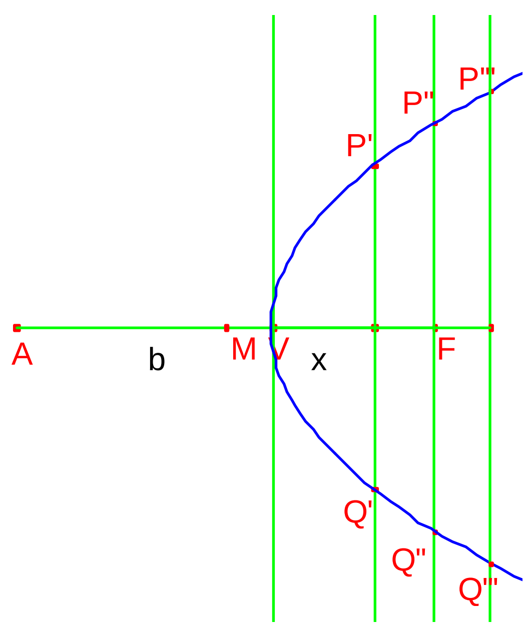


Figura 23.

JUSTIFICACIÓN DE SU LADO RECTO

Lo que queda es demostrar que esta parábola tiene lado recto $\boldsymbol{b}$.

Se sabe que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$ y si tiene vértice en el origen y eje focal el eje X, con $p > 0$ las coordenadas del foco son $(p, 0)$, considerando esto, no fue casualidad que tomáramos el primer *x* con valor de $\frac{b}{4}$, pues $|4p| = 4p$ con $p > 0$, luego $4p = b$, entonces $p = \frac{b}{4} = x$, por lo que las coordenadas del foco son $\left(\frac{b}{4}, 0\right)$, si consideramos a V como origen de un plano cartesiano.

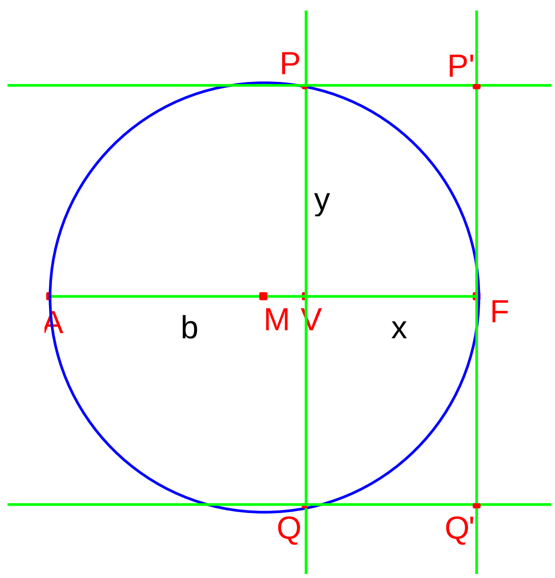


Figura 24.

Entonces la recta $P'Q'$ perpendicular a VF (figura 24) que pasa por F, es la longitud del lado recto, esto es, $P'Q' = b$, ya que se tiene

$$\frac{AV}{FP'} = \frac{FP'}{VF} \text{ y } \frac{AV}{FQ'} = \frac{FQ'}{VF} \quad \text{...(21)}$$

entonces,

$$\left(\boldsymbol{FP'}\right)^2 = \left(\boldsymbol{AV}\right)\left(\boldsymbol{VF}\right) \text{ y } \left(\boldsymbol{FQ'}\right)^2 = \left(\boldsymbol{AV}\right)\left(\boldsymbol{VF}\right) \text{ ....(22)}$$

Pero $\boldsymbol{AV = b}$ y $VF = x = \dfrac{b}{4}$

Luego (22) se escribe como

$$\left(FP'\right)^2 = b\left(\frac{b}{4}\right) \text{ y } \left(FQ'\right)^2 = b\left(\frac{b}{4}\right) \text{ ....(23)}$$

Por lo que de (23) despejando $\boldsymbol{FP'}$ y $\boldsymbol{FQ'}$ y sumando miembro a miembro tenemos que $\boldsymbol{P'Q' = b}$.

Que era lo que buscábamos justificar.

Capítulo VI

Omar Jayyam y la ecuación cúbica

ÁLGEBRA DE OMAR JAYYAM

Se sabe que a mediados del siglo XI en Nishapur, Corasán, actual Irán nació Omar Jayyam el otro personaje del que trataremos en esta Tesis y que además de matemático, fue un gran poeta.

Omar Jayyam escribió su libro "Álgebra" alrededor del 1074. El rastro más antiguo de esta obra es un fragmento resguardado por la Biblioteca Nacional de París, de una copia de unos trece años posterior a su muerte. Recordando un poco la introducción de esta Tesis, decíamos que Jayyam desaconseja la lectura de su libro a quien no conociera los "Elementos" y los "Datos" de Euclides, así como los dos primeros libros de las "Cónicas" de Apolonio.

Proposiciones importantes de los "Elementos" para entender el "Álgebra" son:

Del Libro VI, proposición 2. Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina sobre los otros dos segmentos proporcionales [7].

Del Libro VI, proposición 8. La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina [7].

Dichas proposiciones le fueron muy útiles a Jayyam, pues en ellas se basa, como se verá para realizar sus trabajos. Otro libro que recomienda como conocimiento previo, que es de fundamental importancia para entender sus ideas es las "Cónicas" de Apolunio, obra compuesta por ocho libros, sólo de los primeros cuatro nos han llegado del original griego, los tres siguientes los conocemos por traducciones del árabe y del octavo se sabe perdido [4].

Sobre las cónicas escribieron otros matemáticos como Menecmo, Euclides y Arquímedes, no sólo Apolunio, pero se sabe que fue Apolonio quien las describe de un modo más sistemático y completo, quien alrededor del siglo III a.C. publica su tratado donde recoge todo lo que se sabía sobre las cónicas y da a conocer muchos resultados más [4].

En el primer libro de las "Cónicas" se habla de lo que sucede cuando cortamos un cono mediante un plano de distintas maneras, una de ellas, es si cortamos un cono mediante un plano de tal manera que el plano sea paralelo a uno de los lados del cono (observe figura 25). A dicha curva qe se forma le da el nombre de parábola, nombre que a perdurado hasta hoy.

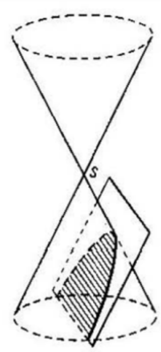


Figura 25.

Ahora con las ideas de Euclides y Apolunio, vamos a estudiar un poco del Álgebra de Jayyam, en especial la forma en que resuelve la ecuación de tercer grado de la forma $y^3 + by = c$, con $b > 0$ y $c > 0$.

De las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que tres, Jayyam reconoce veinticinco formas distintas. Seis de las cuales ya se habían estudiado por algebristas anteriores. Otras cinco son reducibles a éstas y las restantes catorce no pueden ser resueltas con regla y compás.

MÉTODO DE JAYYAM PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $y^3 + by = c$, CON $b > 0$ Y $c > 0$.

Para la construcción de su solución Jayyam básicamente propone trazar una parábola de lado recto $\sqrt{b} = AV$, es decir, que tenga ecuación $y^2 = \sqrt{b}x$, luego trazar un segmento $\frac{c}{b} = VC$ sobre la recta perpendicular a AV que pasa por V y tracemos una circunferencia de diámetro VC, de igual manera se propone trazar estos segmentos con ayuda de Cabri Géomètre II Plus. Sea R el punto de intersección de la circunferencia con la parábola y S el pie de la perpendicular al diámetro desde R. Luego la longitud del segmento VS, resuelve la ecuación (figura 20), es decir,

$$VS = y \text{ para } y^3 + by = c \qquad (24)$$

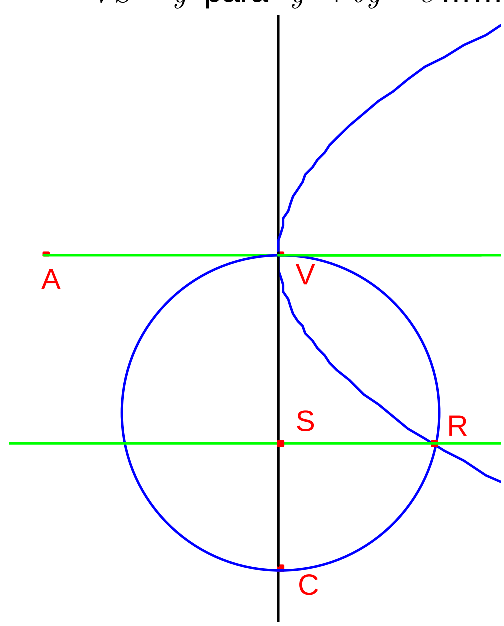


Figura 26.

Para este punto será fácil trazar la parábola en Cabri si seguimos los pasos y el razonamiento del Capítulo III.

DEMOSTRACIÓN DEL MÉTODO DE JAYYAM PARA RESOLVER ECUACIONES DE LA FORMA $y^3 + by = c$, CON $b > 0$ Y $c > 0$.

Jayyam, tampoco dio una demostración a su método, que de igual manera no es difícil justificar. Para comprobar que $VS = y$ para $y^3 + by = c$.

Considere la relación geométrica () que se obtiene de la semejanza de los triángulos ΔVSR y ΔRSC, que dicho sea de paso es la Proposición 8 del Libro VI de los "Elementos".

La altura al ángulo recto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos que sobre ella determina.

$$\frac{VS}{SR} = \frac{SR}{SC} \qquad \text{...(24)}$$

Por ser **R** punto de la parábola, se tiene que el segmento SR cumple que $y^2 = \sqrt{b}x$, donde

$VS = y$, $\sqrt{b} = AV$ y $SR = x$

Entonces sustituimos en (24) y se tiene $(VS)^2 = (AV)(SR)$

Luego tenemos que

$$\frac{AV}{VS} = \frac{VS}{SR} \qquad \text{...(25)}$$

Si elevamos al cuadrado (25) tenemos

$$\left(\frac{AV}{VS}\right)^2=\left(\frac{VS}{SR}\right)\left(\frac{VS}{SR}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26)$$

Sustituyendo (24) en (26) tenemos

$$\frac{(AV)^2}{(VS)^2}=\left(\frac{VS}{SR}\right)\left(\frac{SR}{SC}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Luego

$$(VS)^3=(AV)^2(SC)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Pero $SC=VC-VS$ y como $VC=\frac{c}{b}$ y $VS=y$, entonces $SC=\frac{c}{b}-y$

De modo que (28) queda como

$$y^3=\left(\sqrt{b}\right)^2\left(\frac{c}{b}-y\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Que es $y^3+by=c$.

Lo cual demuestra que $VS=y$ para $y^3+by=c$.

Observamos que en Matemáticas una cosa lleva a otra, Euclides a Apolunio y a muchos otros más y posteriormente a Jayyam y Descartes, y hoy hasta nosotros, que con esto demostramos, que en Matemáticas nada es asilado, todo es un todo.

Capítulo V

Actividades propuestas

INTRODUCCIÓN

En este apéndice se presentan cuatro actividades que ya han sido utilizadas con estudiantes y maestros de nivel medio superior y superior en el Primer Congreso Internacional Sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la UNAM, Cuahutitlan en mayo de 2009 y en obteniéndose resultados satisfactorios. Las actividades en estos talleres fueron propuestas para realizarse con regla y compás, sin embargo, hoy en día el uso de las tecnologías como herramienta didáctica ha tenido una fuerte difusión, por lo que proponemos realizar las construcciones con Cabri Geometrie Plus II, aunque se pude realizar con otro software de geometría dinámica, y de esta manera poder modificar el segmentos y que el profesor conjeturen propiedades aunadas a las interpretaciones geométricas que se puedan observar, como se verá en cada una de las actividades.

Reiteramos que estas actividades van dirigidas a la formación de profesores de nivel secundaria y nivel medio superior con el fin de proporcionar un marco más amplio para abordar los temas tradicionales de Matemáticas, pero además se busca que con su experiencia docente, observe que tiene al alcance la generación de ideas que les sirvan para impartir y mejorar sus clases, toda vez que se acerquen a la Historia de está área del conocimiento.

Dada la naturaleza del método de Descartes y Jayyam para resolver ecuaciones es posible trabajar en temas de Álgebra, Geometría Analítica o Geometría Euclidiana o de una manera unificada en estas ramas de las Matemáticas.

Para la resolución de ecuaciones cuadráticas en específico, se conocen diversos métodos como factorización, completando cuadrados, graficando la parábola o el principal de ellos con la fórmula general. El método propuesto por Descartes utiliza básicamente circunferencias y líneas rectas, sin embargo, es un método que sorprende por su creatividad, agudeza y simpleza. Este trabajo contiene el método para resolver ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - a = 0$ con $a > 0$ y $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Es importante que se observe que dado la naturaleza del método al usar trazos con regla y compás es muy factible cometer errores y la medida de las longitudes de los segmentos no sea tan precisa como lo es con los métodos analíticos algebraicos, sin embargo, con el uso de software puede evitarse esta discrepancia y recalcar que la importancia de estos métodos no radica en encontrar las raíces de una ecuación, sino más bien estudiar desde otra perspectiva las Matemáticas y buscar una unificación de sus ramas, además de observar y relacionar propiedades que nos permitan una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y la naturaleza de los mismos, relacionando con su desarrollo histórico.

NOTA: Se recomienda al profesor que antes de llevar acabo las actividades vea las notas correspondientes a la actividad.

ACTIVIDAD 1. Conozcamos a René Descartes y su Géometrie

MATERIAL:

- Copias de la Geometría de Descartes (facsímile, apéndice 1).

ACTIVIDADES:

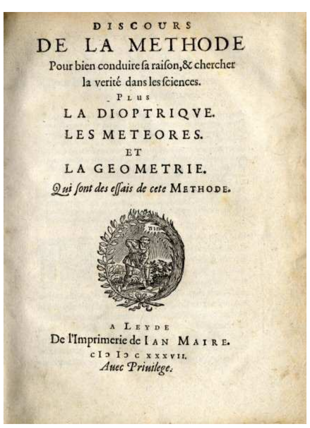
1. ¿Quién fue Descartes?

René Descartes
(1596-1650)

El Siglo de las Luces (XVII) donde los pensadores coinciden en la valoración de la inteligencia humana como instrumento para revelar los secretos de la naturaleza y proporcionar técnicas que mejoren las condiciones materiales y la **ética** de los humanos, comprende a uno de los hombres más prodigios en la historia de la humanidad, René Descartes quien a la edad 41 años publicó su máxima obra *"Discours de la Méthode, 1637"*, libro que contiene su máxima creación matemática *"La Geometríe"*.

El LIBRO I de "La Geometrie" se titula Problemas que pueden construirse empleando sólo circunferencias y líneas rectas. Descartes en el Libro I propone estudiar de manera geométrica la suma, resta, multiplicación, división y la extracción de raíces.

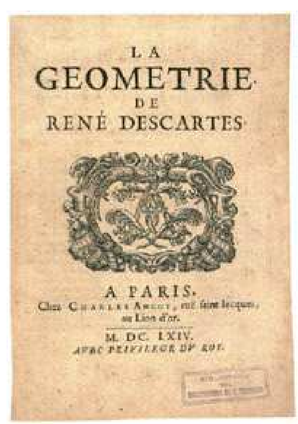
A continuación presentamos la portada del Discurso del Método y la portada de la *"La Géometrie".*



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Portada del Discurso del Método



LA
GEOMETRIE
DE
RENÉ DESCARTES

A PARIS,
Chez CHARLES ANGOT, rue saint Iacques,
au Lion d'or.
M. DC. LXIV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Portada de La Geometrie

2. De las copias de la Geometría, observa la notación usada por Descartes, menciona una que te sea familiar y una desconocida.

3. ¿Qué más observas en esas hojas?

NOTAS A LA ACTIVIDAD 1.

- Se pretende observar la notación usada por Descartes, porque es una de sus aportaciones más importantes a las Matemáticas, también se pretende que observe las figuras geométricas, el idioma, si encuentra alguna ecuación o fórmula que le sea familiar. Por ejemplo; Descartes tenia una forma muy peculiar de escribir el símbolo de igualdad lo hacia de la siguiente manera ∞, algo así como el símbolo de infinito, además utiliza con mayor frecuencia la ***z*** para denotar a las incógnitas
- Es posible hacer muchas más comparaciones usando el apéndice 2 de este trabajo, es una traducción al español y a la notación matemática actual de la Geometría de Descartes.

ACTIVIDAD 2. *Para la enseñanza de la ecuación cuadrática de la forma*

$x^2 - a = 0$ ***con*** $a > 0$

MATERIAL:

- Cabri Geometrie Plus II u otro software de geometría dinámica.

ACTIVIDADES:

Supón que tienes la siguiente ecuación $x^2 - 9 = 0$

Toma la variable a igual al valor de la variable independiente, es decir para este caso $a = 9$, observa que el signo menos de la variable independiente es de la forma que tiene la ecuación. Traza lo siguiente:

1. Un segmento horizontal de longitud a, en este caso $a = 9$ y llama a los extremos de este segmento G y H.
2. En el extremo G, traza prolongadamente un segmento de longitud uno y al nuevo extremo llámale F.
3. Encuentra el punto medio del segmento FH y llámalo K.
4. Traza una circunferencia con centro en K y radio FK.
5. Traza la recta perpendicular a FH que pase por G y prolóngala hasta que corte a la circunferencia, al punto de corte llámale I.
6. Mide la longitud del segmento GI.
7. Sustituye la longitud GI en la ecuación que tenias al principio, es decir $x^2 - 9$ y realiza las operaciones ¿Qué observas?
8. ¿Qué puedes concluir o decir del método?

9. ¿Qué pasa si quiero obtener la raíz cuadrada de un número que no tiene raíz exacta, sirve el método de Descartes?

10. ¿Qué pasa si quiero obtener la raíz cuadrada de un número decimal, sirve o no el método?

11. ¿Qué observas si modificas el segmento GI ?

12. Dado que Cabri dibuja en efecto una circunferencia de FIH alrededor de K como centro, podemos determinar a G como el origen de un plano y observar los segmentos de que se forman con la recta GI y la circunferencia. ¿Qué relación encuentras con el Plana Cartesiano?

13. Siguiendo los pasos anteriores resuelve las siguientes ecuaciones.
    1. $x^2 - 4 = 0$
    2. $x^2 - 6.25 = 0$
    3. $x^2 - \frac{16}{9} = 0$
    4. $x^2 = 5$
    5. $x^2 = 7$

14. Observa las copias del Facsímile de Descartes y encuentra la figura que haz realizado en este método. Comenta con tus compañeros.

NOTAS A LA ACTIVIDAD 2

- Observe que el método sirve para obtener la raíz cuadrada de un número de manera geométrica, de esta manera esta actividad puede ser utilizada como una actividad auxiliar para la enseñanza de raíces cuadradas.
- Dado que Descartes no justifica su método, sino que se limita a sólo describirlo, puede encontrar en el Capítulo II de este trabajo la justificación y demostración matemática del método de Descartes para la resolución de las ecuaciones del tipo $x^2 - a = 0$.

ACTIVIDAD 3. Para la enseñanza de la ecuación cuadrática de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ *con* $a > 0$ *y* $b > 0$

MATERIAL:

- Cabri Geometrie Plus II u otro software de geometría dinámica.

ACTIVIDADES:

Supón que tienes la siguiente ecuación $x^2 - 10x + 16$

Toma a como el valor del coeficiente de la variable lineal, es decir, $a = 10$ observa el signo de la forma que tiene la ecuación y toma b como la raíz cuadrada del valor del término independiente, es decir, $b = 4$ para este caso.

Traza lo siguiente:

1. Un segmento vertical de longitud $\frac{a}{2}$, al extremo superior llámele N y al inferior L.
2. Con extremo en L traza una perpendicular a NL de longitud ***b**, y al* extremo de dicha perpendicular asígnale la letra M.
3. Traza una paralela a NL que pase por M de una longitud mayor que NL.
4. Traza una circunferencia con centro en N y radio NL.
5. Observa que la circunferencia corta a la recta trazada en la instrucción 3 en dos puntos. Al más cercano a M llámale Q y al más lejano a M, es decir, el que esta más arriba, llámale R.
6. Mide la longitud de los segmentos MR y MQ. Anótalos en la siguiente tabla:
7.

MR =	
MQ =	

8. Sustituye una de las longitudes en la expresión que tenias al principio $x^2 - 10x + 16$ y realiza las operaciones ¿Qué observas?

9. Sustituye la otra longitud en $x^2 - 10x + 16$ y realiza las operaciones ¿Qué observas?
10. ¿Qué puedes concluir o decir del método?

11. ¿Qué pasaría si la circunferencia sólo toca a la recta paralela de la instrucción 3 en un sólo punto?

12. ¿Qué pasa si la circunferencia no tocará a la recta paralela de la instrucción 3, es decir, no se encuentran los puntos Q y R?

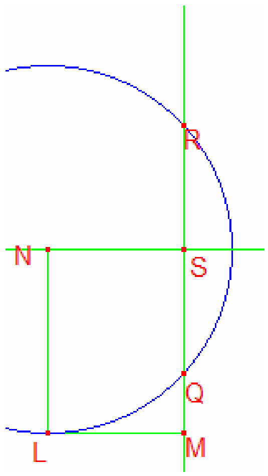
13. Verifica tus respuestas realizando los siguientes ejercicios, sigue las instrucciones 1 a la 9.

    1. $x^2 - 8x + 9 = 0$
    2. $x^2 - 7x + 16 = 0$
    3. $2x^2 - 8x + 18 = 0$
    4. $x^2 - 8x + 6.25 = 0$
    5. $x^2 - 4x + 16 = 0$

ACTIVIDAD 4. Demostración de Descartes por Descartes.

A continuación se transcribe la traducción del método de Descartes para resolver ecuaciones del tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$.

…si tengo $z^2 = az - b^2$, hago NL igual a $\frac{1}{2}a$ y LM igual a b; en seguida, en vez de unir los puntos M y N, trazo MQR paralela a LN, y con N como centro describo una circunferencia a través de L cortando MQR en los puntos Q y R; a continuación, z, la línea buscada, es MQ o MR, pues en este caso puede expresarse de dos maneras, a saber:



$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

y

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

1. ¿Qué relación encuentras de estas ecuaciones y la Fórmula General para ecuaciones de segundo grado?

2. La ecuación que Descartes resuelve en su método es de la forma $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$

La Fórmula General para ecuaciones cuadráticas es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En la siguiente tabla observa el valor de las variables de la Fórmula General (azules) igualado a las variables de la ecuación de Descartes (rojas):

	F. Gral. (azules)		Descartes (rojas)
Coeficiente Cuadrático	a	=	1
Coeficiente lineal	b	=	$-a$
Término Independiente	c	=	b^2

Sustituye los coeficientes literales de la ecuación de Descartes en la Fórmula General para ecuaciones cuadráticas y trata de llegar a

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \ \text{y} \ z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

NOTAS A LA ACTIVIDAD 4

- Esta actividad servirá para que el estudiante relacione el método de Descartes con la Fórmula General para resolver ecuaciones de segundo grado. Esta actividad se recomienda para estudiantes de nivel Bachillerato dado el nivel de álgebra que hay que tener para realizar algunas manipulaciones.
- De igual manera Descartes no justifica su método, sino que se limita a sólo describirlo, puede encontrar en el Capítulo II de este trabajo la justificación y demostración matemática del método de Descartes para la resolución de las ecuaciones del tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$ con $a > 0$ y $b > 0$.

ACTIVIDAD 5. Trazando una parábola.

MATERIAL:

- Cabri Geometrie Plus II u otro software de geometría dinámica.

ACTIVIDADES:

Supón que tienes la siguiente parábola $\boldsymbol{y^2 = 12x}$. Observa que se trata de una parábola con eje focal el eje X.

Traza lo siguiente:

1. Traza un segmento de longitud b=8 y extremos *AV.*
2. Ahora colinealmente traza un segmento de longitud *x=2* con extremos V y F.
3. Determinamos el punto medio del segmento AF, llamémosle M y con M como centro trazamos la circunferencia de radio AM.
4. Traza por V un recta perpendicular a AF que corte a la circunferencia en los puntos P y Q.
5. Ahora, si trazamos la recta perpendicular a AF que pase por F y la intersecamos con las rectas que pasan por P y Q perpendiculares a PQ, encontramos los puntos P′ y Q′ respectivamente. Estos serán dos puntos de la parábola.
6. **NOTA:** Para ese valor de $\boldsymbol{x = VF}$ que seleccionamos encontramos P′ y Q′.
7. Ahora si consideramos otro valor de $\boldsymbol{x = 3}$, permaneciendo fijo el segmento *AV*, y procedemos repitiendo los pasos 2 al 5 de manera análoga podemos encontrar otros puntos P″ y Q″ que pertenezcan a la parábola.
8. De esta manera encontramos por lo menos cinco puntos de la parábola, que son: V, P’, P’’, Q’ y Q’’, y que necesitamos para que con Cabri encontremos una cónica.
9. ¿Qué cónica se forma?

10. ¿Qué pasa si modificamos el segmento AV?

11. ¿Quién es el segmento AV?

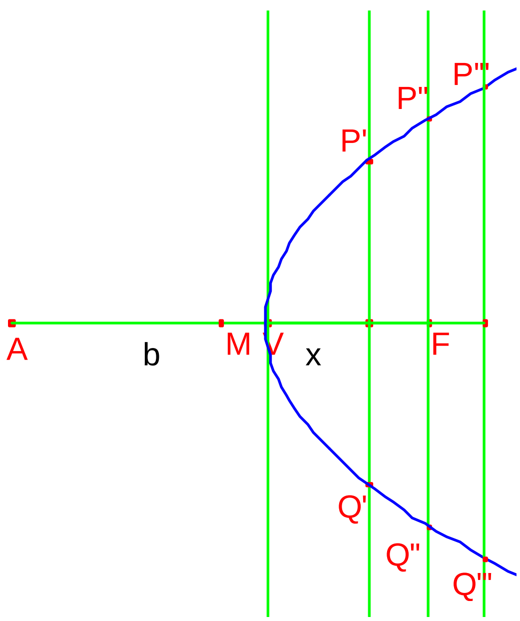


Figura obtenida de la actividad 5.

ACTIVIDAD 6. Jayyam y la ecuación cúbica.

MATERIAL:

- Cabri Geometrie Plus II u otro software de geometría dinámica.

ACTIVIDAD:

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación $y^3 + 4y = 2$ donde $\boldsymbol{b = 4}$ y $\boldsymbol{c = 2}$, y queremos resolverla. Trazar lo siguiente:

1. Trazar una parábola de lado recto $\sqrt{b} = AV$, es decir, $\boldsymbol{AV = 2}$. (Ver actividad anterior).
2. Trazar un segmento $\frac{c}{b} = VC$, es decir, $\boldsymbol{VC = \frac{1}{2}}$, perpendicular a AV que pase por V.
3. Tracemos una circunferencia de diámetro VC, tangente a AV.
4. Sea R el punto de intersección de la circunferencia con la parábola y S el pie de la perpendicular al diámetro de la circunferencia del punto 3 desde R.
5. Mide la longitud del segmento $\boldsymbol{VS}$.
6. Sustituye el valor de la longitud en la expresión que tenias al principio $y^3 + 4y = 2$ y realiza las operaciones ¿Qué observas?

7. ¿Qué puedes concluir o decir del método?

8. ¿La circunferencia siempre va a tocar a la parábola? Justifica tu respuesta.

CONCLUSIONES

Se ha dado la representación geométrica de la solución de una ecuación de segundo grado y una de tercer grado, se han querido conjugar y relacionar las dos demostraciones. El orden en que se presentó, lógicamente no fue así, pues como sabemos Descartes es cronológicamente posterior a Jayyam, pero la relación entre resolver la cuadrática $x^2 - a = 0$ y la cúbica $y^3 + bx = c$, con $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ está estrechamente relacionada con la proposición 8 del Libro VI de los Elementos de Euclides.

A lo largo de la Historia de la Matemáticas y básicamente a partir de la Época Heroica, los matemáticos trataron de resolver problemas con regla y compás, esta condición se fue heredando a través del tiempo y matemáticos posteriores consideraban resolver problemas algebraicos con representaciones geométricas. Lograron resolver ecuaciones cuadráticas, cúbicas y de cuarto grado algunas reduciéndolas a ecuaciones cuadráticas, estas soluciones se fueron dando por casos, es decir, no dieron una construcción geométrica para resolver la ecuación de forma general, dado que sólo consideraban los casos dónde las raíces fueran números positivos dada la naturaleza de trabajar con segmentos, que consideraban como positivos. En cuanto a las ecuaciones de quinto grado, que son las que naturalmente seguirían por resolver, se encontraron con la dificultad de no poder encontrar su representación geométrica. Pero no quisieron detenerse y al paso del tiempo tuvieron que dejar de pensar en sólo regla y compas y descubrir nuevas Matemáticas para encontrar que era imposible resolver ecuaciones de quinto grado con una construcción a regla y compás.

Como se mencionó anteriormente, a la luz de las experiencias adquiridas en el empleo de estas ideas, llevadas como talleres para la formación de profesores. Consideró que, dados los resultados y comentarios favorables de los profesores que asistieron, podemos implementar estas ideas para que los profesores profundicen en un concepto matemático, además que creo enriquecerá su conocimiento y ampliara su visión eslabonando diversos temas de distintas áreas de las Matemáticas.

Así los profesores adquiriendo más formación, puedan plantear a sus estudiantes nuevas actividades, como trazar las figuras o promuevan reflexiones sobre los procesos histórico-matemáticos de las definiciones, conceptos, fórmulas y técnicas que enseñamos en las aulas.

Concretamente, se pueden diseñar secuencias didácticas en las que los alumnos construyan, paso a paso y utilizando algún paquete de geometría dinámica (como Cabri Geometré plus II) los algorítmos geométricos aquí presentados para, desde calcular la raiz cuadrada de un número positivo, hasta resolver ecuaciones de grado tres, estimulando de este modo la exploración e investigación por ellos mismos de ciertos aspectos del pensamiento y quehacer matemático.

En este caso se ha dado una interpretación geométrica a una ecuación algebraica, siendo que históricamente así se comenzaron a trabajar las ecuaciones. De esto modo, se ha querido dar pie a generar nuevas inquietudes por descubrir más Matemáticas a través de su Historia, promoviendo el estudio del origen de las ideas, conceptos y definiciones que hoy en día usamos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Descartes, R. Descartes. 1996. La Geometría, Ed. Limusa.

[2] Boyer, C. Boyer. 1986. Historia de la matemática. Alianza Editorial.

[3] Lehmann, C. Lehmann. 2006. Geometría Analítica. Ed. Limusa.

[4] Moreno, R. Moreno. 2002. Omar Jayyam. Poeta y matemático. Colección La matemática en sus personajes. Editorial Nivola.

[5] Torres, R. Torres. Mayo, 2000. Descartes y la ecuación cuadrática. Cubo matemática Educacional. Vol. 4 No. 1.

[6] Torres, R. Torres. Agosto, 2000. Un triángulo amoroso: el álgebra, la geometría euclidiana y la geometría analítica. Educación Matemática. Vol. 12 No. 2.

[7] Euclides. Elementos. Reimpresión, 1991. Volumen del I al XIII. Editorial Gredos S. A.

A P É N D I C E   1

´

La Géometrie

de René Descartes

Edición facsimilar del original francés de la obra La Géometrie de René Descartes, primera edición de 1637. Tomada del libro La Geometría. René Descartes. Editorial Limusa. 1997. Primera Edición.

Los números de página corresponden a las páginas donde aparecen notas marginales en el original francés de la edición de 1637, donde La Geometría se publicó como apéndice de El Discurso del Método; es por esto que comienza en la página 297.

TABLE

Des matieres de la

GEOMETRIE.

Liure Premier.

DES PROBLESMES QU'ON PEUT construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

COMMENT *le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.* 297

Comment se font Geometriquement la Multiplication, la Diuision, & l'extraction de la racine quarreé. 298

Comment on peut vser de chiffres en Geometrie. 299

Comment il faut venir aux Equations qui seruent a resoudre les problesmes. 300

Quels sont les problesmes plans; Et comment ils se resoluent. 302

Exemple tiré de Pappus. 304

Response a la question de Pappus. 307

Coment on doit poser les termes pour venir a l'Equation en cet exẽple. 310

Kkk

Com

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

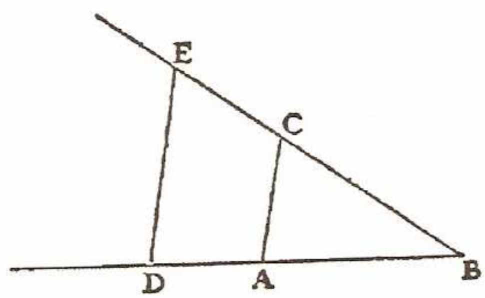
Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a-t'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

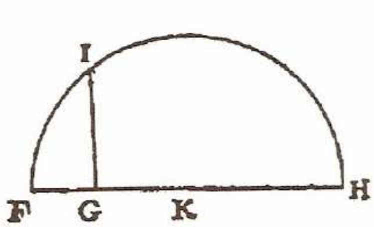


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commēt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces ligne gnes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a + b$; Et $a -- b$, pour soustraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 -- b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 -- b^3 + abb$, & ainsi des autres. vser de chiffres en Geometrie.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point déterminée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 -- b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est déterminée, a cause qu'elle peut estre sousentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb -- b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

Au refte affin de ne pas manquer a fe fouuenir des noms de ces lignes, il en faut toufiours faire vn regiftre feparé, à mefure qu'on les pofe ou qu'on les change, efcriuant par exemple.

A B ∞ 1, c'eft a dire, A B efgal à 1.

G H ∞ a

B D ∞ b, &c.

Commēt il faut venir aux Equatiōs qui feruent a refoudre les problefmes.

Ainfi voulant refoudre quelque problefme, on doit d'abord le confiderer comme defia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui femblent neceffaires pour le conftruire, auffy bien a celles qui font inconnuës, qu'aux autres. Puis fans confiderer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, felon l'ordre qui monftre le plus naturellement de tous en qu'elle forte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iufques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne mefme quantité en deux façons: ce qui fe nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons font efgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a fuppofé de lignes, qui eftoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobftant on n'omette rien de ce qui eft defiré en la queftion, cela tefmoigne qu'elle n'eft pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a difcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës aufqu'elles ne correfpond aucune Equation. Aprés cela s'il en refte encore plufieurs, il fe faut feruir par ordre de chafcune des Equations qui reftent auffy, foit en la confiderant toute feule, foit en la comparant auec les autres, pour expliquer chafcune de ces lignes inconnuës; & faire ainfi ainſi en les demeſlant, qu'il n'en demeure qu'vne ſeule, eſgale a quelque autre, qui ſoit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit eſgal a ce, qui ſe produiſt par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantités, dont l'vne ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte.

$z \propto b$. ou

$z^2 \propto -a z + bb$. ou

$z^3 \propto +a z^2 + bbz - c^3$. ou

$z^4 \propto a z^3 - c^3 z + d^4$. &c.

C'eſt a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, eſt eſgalé a b, ou le quarré de z eſt eſgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z eſt eſgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

Et on peut touſiours reduire ainſi toutes les quantités inconnuës à vne ſeule, lorſque le Probleſme ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſy par des ſections coniques, ou meſme par quelque autre ligne qui ne ſoit que d'vn ou deux degrés plus compoſée. Mais ie ne m'areſte point a expliquer cecy plus en detail, a cauſe que ie vous oſterois le plaiſir de l'apprendre de vous meſme, & l'vtilité de cultiuer voſtre eſprit en vous y exerceant, qui eſt a mon auis la principale, qu'on puiſſe tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

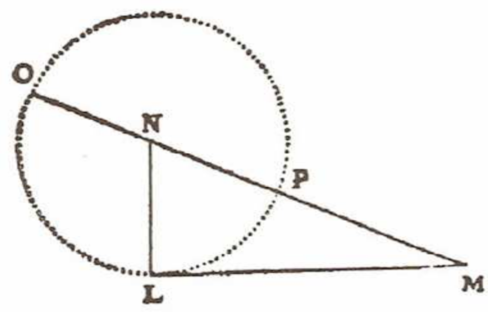
Quels ſont les problesmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe resoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$$z^2 \propto az + bb$$

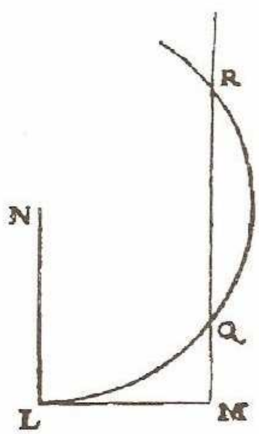


ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$$z^2 \propto az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens , & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple tiré de Pappus.

Et on le peut voir aussy fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septiesme liure, ou aprés s'estre aresté quelque tems a denombrer tout ce qui auoit esté escrit en Geometrie par ceux qui l'auoient precedé, il parle enfin d vne question , qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucun autre n'auoient sceu entierement resoudre. & voycy ses mots.

Ie cite plutost la version latine que le texte grec affin que chascun l'entende plus aysement.

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum conica , quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.

Et vn peu aprés il explique ainsi qu'elle est cete question.

At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se iactat, & ostentat, nulla habita gratia ei , qui prius scripserat , est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis

A P É N D I C E 2

´

La Geometria

de René Descartes

Traducción al español de la obra La Géometrie de René Descartes, primera edición de 1637 tomada del libro La Geometría. René Descartes. Editorial Limusa. 1997. Primera Edición.

Colaboración en la traducción: Roberto R. García Aguilar. Profesor del Centro de Lenguas Extranjeras (CENLEX) del IPN.

Revisión: Guillermo García Talavera. Ingeniero, exbecario del CENT de País, Francia.

Tabla de las Materias de la Geometría

Libro Primero

		Página
	PREFACIO	**7**
	PROBLEMAS QUE PUEDEN CONSTRUIRSE EMPLEANDO SÓLO CIRCUNFERENCIAS Y LÍNEAS RECTAS	**13**
	Apostillas*	
[1]	Cómo se relaciona el cálculo aritmético con las operaciones de Geometría	**13**
[2]	Cómo se efectúan geométricamente la multiplicación, división y raíz cuadrada	**13**
[3]	Cómo pueden usarse números en Geometría	**13**
[4]	Cómo establecer ecuaciones que sirven para resolver los problemas	**14**
[5]	Cuáles son los problemas planos y cómo se resuelven	**15**
[6]	Ejemplo tomado de Pappus	**17**
[7]	Respuesta al problema de Pappus	**18**
[8]	Cómo deben escribirse los términos para establecer la ecuación en este ejemplo	**19**

* Aquí las apostillas desempeñan el papel de parágrafos, que se señalan seriadamente con un número arábigo en paréntesis rectangular, en los márgenes de las páginas correspondientes.

La Geometría de René Descartes

LIBRO I

PROBLEMAS QUE PUEDEN CONSTRUIRSE EMPLEANDO SÓLO CIRCUNFERENCIAS Y LÍNEAS RECTAS

CUALQUIER problema en geometría puede reducirse fácilmente a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción. Como la aritmética consiste en sólo cuatro o cinco operaciones, a [1] saber, suma, resta, multiplicación, división, y la extracción de raíces, que puede considerarse una especie de división, de manera que, en la geometría, para encontrar líneas requeridas es meramente necesario sumar o restar otras líneas; o de otra forma, tomando una línea que llamaré unidad para relacionarla tanto como se pueda a números, y que, en general, puede escogerse arbitrariamente, y habiendo dado dos líneas más, encontrar una cuarta que será a una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (que es lo mismo que la multiplicación); o bien, encontrar una cuarta línea que sea a una de las líneas dadas como la unidad es a la otra (lo que es equivalente a la división); o, finalmente, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, la raíz cúbica, etc., de la línea dada). Y no he de dudar en introducir estos términos aritméticos en la geometría, en bien de la mayor claridad.

Por ejemplo, tómese AB como unidad, y sea requerida para multiplicar BD por [2]
BC. Sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA; entonces BE es el producto de BD y BC.

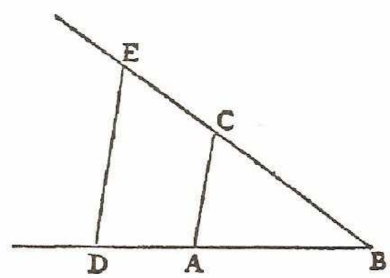


Figura 1

Si es necesario dividir BE entre BD, uno E y D, y trazo AC paralela a DE; entonces BC es el cociente de esta división.

Si se desea la raíz cuadrada de GH, sumo, sobre la misma línea recta, FG igual a la unidad; entonces, bisectando FH en K, describo la circunferencia FIH alrededor de K como centro, y trazo a partir de G una perpendicular y la extiendo hasta I, y GI es la raíz requerida. No hablo aquí de la raíz cúbica, pues hablaré más tarde de ellas, de una forma más conveniente.

A menudo es innecesario, pues, trazar las líneas sobre papel, sino que es sufi- [3]
ciente designar a cada una mediante una sola letra. Así, para sumar las líneas BD y GH, llamo a una a y a la otra b, y escribo $a + b$. Entonces $a - b$ indicará que b se resta de a; ab que a es multiplicada por b; $\frac{a}{b}$ que a se divide entre b; aa o a^2 que a se multiplica por sí misma; a^3 que este resultado se multiplica por a, etc.,

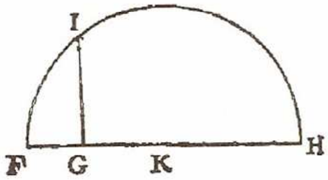


Figura 2

indefinidamente. Si quiero extraer la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$, escribo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Si se desea extraer la raíz cúbica de $a^3 - b^3 + ab^2$, escribo $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$; y de forma similar para las demás raíces. Aquí debe observarse que por a^2, b^3, y expresiones similares, ordinariamente me refiero sólo a líneas simples, que, sin embargo, llamo cuadradas, cúbicas, etc., de manera que hago uso de los términos empleados en álgebra.

Debe notarse también que todas las partes de una sola línea deben siempre expresarse mediante el mismo número de dimensiones siempre que la unidad provista no se determine por las condiciones del problema. Así, a^3 contiene tantas dimensiones como ab^2 o b^3, siendo éstas las partes componentes de la línea a la que he llamado $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$. No es, sin embargo, lo mismo cuando la unidad se determina, pues la unidad puede siempre entenderse, aun cuando haya demasiadas o demasiado pocas dimensiones; así, si fuese necesario extraer la raíz cúbica de $a^2b^2 - b$, debemos considerar que la cantidad a^2b^2 se divide una vez entre la unidad, y que la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad.

Finalmente, para que podamos estra seguros de recordar los nombres de estas líneas, siempre se debe hacer una lista separada, tan a menudo como se designen o cambien nombres. Por ejemplo, podemos escribir, AB = 1, esto es, AB es igual a 1; GH = a, BD = b, etc.

[4] Si, entonces, queremos resolver un problema cualquiera, suponemos primero que la solución se ha efectuado ya, y damos nombres a todas las líneas que parezcan necesarias para su construcción, —tanto a las conocidas como a las desconocidas. A continuación, sin distinguir entre líneas conocidas y desconocidas, debemos desembrollar la dificultad de cualquier manera que muestre, de forma más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que encontremos posible expresar una sola cantidad de dos formas. Esto constituirá una ecuación, puesto que los términos de una de estas dos expresiones son juntos iguales a los términos de la otra.

Debemos encontrar tantas ecuaciones como se supone que hay líneas desconocidas, pero, si después de considerar todo lo involucrado, no pueden encontrarse muchas, es evidente que la cuestión no está enteramente determinada. En tal caso, podemos escoger arbitrariamente líneas de longitud conocida para cada línea desconocida a la que no corresponda ninguna ecuación.

Si hay varias ecuaciones, debemos usar cada una en orden, ya sea considerándola sola o comparándola con otras, para obtener un valor para cada una de las líneas desconocidas; y, por ello, debemos combinarlas hasta que quede una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida, o cuyo cuadrado, cubo, cuarta potencia, quinta, sexta, etc., sea igual a la suma o diferencia de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida, mientras las otras consisten en medias proporcionales entre la unidad y este cuadrado, o cubo, o cuarta potencia, etc., multiplicadas por otras líneas conocidas. Puedo expresar esto como sigue:

$$z = b,$$
$$z^2 = -az + b^2,$$
$$z^3 = az^2 + b^2z - c^3,$$
$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc.}$$

Esto es, z, que tomo por cantidad desconocida, es igual a b; o, el cuadrado de z es igual al cuadrado de b disminuido en a multiplicada por z; o, el cubo de z es igual a a multiplicada por el cuadrado de z, más el cuadrado de b multiplicada por z, disminuida en el cubo de c; y similarmente para las demás.

Así, todas las cantidades desconocidas pueden expresarse en términos de una sola cantidad, siempre que el problema pueda construirse por medio de circunferencias y líneas rectas, o mediante secciones cónicas, o incluso mediante alguna otra curva de grado no mayor al tercero o cuarto.

Pero no he de detenerme a explicar esto en más detalle, pues le privaría del placer de investigarlo por sí mismo, así como de la ventaja de entrenar su mente trabajando en ello, que en mi opinión es el mayor beneficio que de esta ciencia debe obtenerse. Puesto que no encuentro aquí algo tan difícil que no pueda solucionar cualquiera que conozca algo de la geometría ordinaria y del álgebra, quien considerará cuidadosamente todo lo que en este tratado se expone.

Debo, por lo tanto, contentarme con la declaración de que si el estudiante, al resolver estas ecuaciones, no deja de hacer uso de la división dondequiera que sea posible, seguramente alcanzará los términos más simples a los que el problema puede reducirse.

Y si puede resolverse mediante la geometría ordinaria, es decir, a través del uso de líneas y circunferencias trazadas sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido totalmente resuelta, quedará a lo mucho sólo el cuadrado de una cantidad incógnita, igual al producto de su raíz por alguna cantidad conocida, aumentada o disminuida por alguna otra cantidad también conocida. Enseguida, esta raíz o línea desconocida puede encontrarse fácilmente. Por ejemplo, si tengo $z^2 = az + b^2$, construyo un triángulo recto NLM con un lado LM, igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado, LN, igual a $\frac{1}{2}\,a$, esto es, a la mitad de la otra conocida que fue multiplicada por z, que supuse ser la línea desconocida. Entonces, prolongando MN, la hipotenusa de este triángulo, hasta O, de manera que NO sea igual a NL, la línea entera OM es la línea requerida z. Esto se expresa de la manera siguiente: [5]

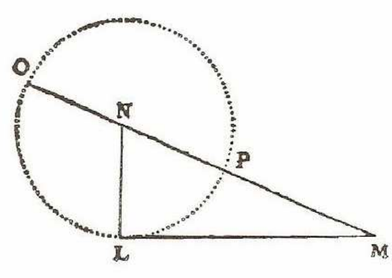


Figura 3

$$z = \frac{1}{2}\,a + \sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 + b^2}.$$

Pero si tengo $y^2 = -ay + b^2$, donde y es la cantidad cuyo valor se desea, construyo el mismo triángulo rectángulo NLM, y sobre la hipotenusa MN trazo

NP igual a NL, y la restante PM es y, la raíz deseada. Así, tengo

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2},$$

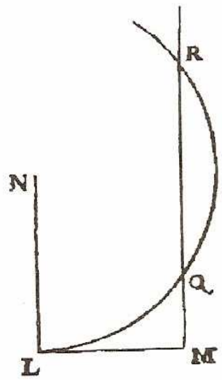


Figura 4

De la misma forma, si tuviera

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

PM sería x^2 y debería tener

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}},$$

y de forma similar para otros casos.

Finalmente, si tengo $z^2 = az - b^2$, hago NL igual a $\frac{1}{2}a$ y LM igual a b como antes; enseguida, en vez de unir los puntos M y N, trazo MQR paralela a LN, y con N como centro describo una circunferencia a través de L cortando MQR en los puntos Q y R; a continuación, z, la línea buscada, es MQ o MR, pues en este caso puede expresarse de dos maneras, a saber:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

y

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Y si la circunferencia descrita alrededor de N y que pasa a través de L ni corta ni toca a la línea MQR, la ecuación no tiene raíz, de manera que podemos decir que la construcción del problema es imposible.

Pueden encontrarse estas mismas raíces a través de muchos otros métodos; he dado estos muy simples para mostrar que es posible construir todos los problemas de la geometría ordinaria haciendo sólo la pequeña cobertura en las cuatro figuras que he explicado. Esto es algo que creo que los matemáticos antiguos no observaron, pues de otra forma no habrían puesto tanta labor en escribir tantos libros en los que la secuencia misma de las proposiciones muestra que no tenían un método seguro de encontrar todo, sino que más bien reunían todas las proposiciones a las que habían llegado por accidente.

Esto es también evidente de lo que Pappus ha hecho en el principio de su séptimo libro, donde, después de dedicar espacio considerable a una enumeración de los libros sobre geometría escritos por sus predecesores, se refiere finalmente a una cuestión que dice que ni Euclides ni Apolonio ni nadie más ha podido resolver completamente; y estas son sus palabras: [6]

"Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neqe aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis, quod Euclides scripsit, per era tantum conica, quousque ad Euclidis tempora pramonstrata sunt, &c." (1)

Un poco más adelante, plantea la cuestión como sigue:

"At locus ad tres, & quator lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat, & ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquoe: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatour rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit; similiter punctum datum coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quator, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, & qua manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem isparum æ sunt.

"Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur recta linea in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur rekliquis duabus, & data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum contingent positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quator lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus." (2)

Aquí le ruego que observe de pasada que las consideraciones que forzaron a los antiguos escritores a usar términos aritméticos en geometría, haciéndoles así imposible proceder allende un punto donde pudieran ver claramente la relación entre los dos sujetos, causó mucha obscuridad y bochorno, en sus intentos por explicar.