Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
División de Estudios de Posgrado
Maestría en Docencia de las Matemáticas

“PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN BACHILLERATO”

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestro en Docencia de las Matemáticas

Presenta

Arturo Corona Pegueros

Querétaro, Qro., marzo 2005

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Docencia de las Matemáticas

"PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES DE GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN BACHILLERATO"

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestro en Docencia de las Matemáticas

Presenta
Arturo Corona Pegueros

Dirigido por:
M.C. Roberto Torres Hernández

Sinodales:

M.C. Roberto Torres Hernández Presidente	________________ Firma
M.C. Carmen Sosa Garza Secretario	________________ Firma
M.C. Alexander Bell Mejía Vocal	________________ Firma
M.C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez Suplente	________________ Firma
M.C. José Enrique Crespo Baltar Suplente	________________ Firma

________________________ **M.I. René Serrano Gutiérrez** Director de la Facultad de Ingeniería	________________________ **Dr. Sergio Quesada Aldana** Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Santiago de Querétaro, Qro.
Marzo de 2005
México

RESUMEN

La actualización docente es un aspecto importante para el profesor de todos los niveles educativos, especialmente en el área del conocimiento matemático. Este documento presenta una propuesta dirigida a los docentes de geometría euclidiana en bachillerato, que sin formación matemática pero con gran compromiso hacia la educación y la matemática, buscan su actualización continua. Por ello, se rescatan y valoran los conocimientos geométricos que el profesor posee como resultado de su formación profesional y su experiencia docente. En la primera parte del documento, se fundamenta la propuesta desde la construcción del conocimiento matemático, partiendo de estructuras cognitivas previas para lograr un conocimiento significativo. La segunda parte conforma la propuesta, que parte de una axiomática local para concluir en un mosaico deductivo. Posteriormente, se vinculan los conocimientos estudiados con la axiomática euclidiana, realizando un análisis del quinto postulado y algunas de sus equivalencias. Finalmente, se describen algunas geometrías no euclidianas resultantes de la negación del postulado de las paralelas, seguros de que tal estudio proporciona al docente un potencial invaluable para desarrollar sus cursos, aún cuando el tema no se incluya en los bachilleratos. Dejando la invitación para que el docente continúe su proceso de formación en beneficio propio y de sus alumnos.

(**Palabras claves**: construcción de conocimientos, aprendizaje significativo, axiomática, geometría euclidiana, geometría no euclidiana)

SUMMARY

It is important for all teachers to be brought up to date at every level of education, especially in the area of mathematical knowledge. This paper presents a proposal addressed to Euclidean geometry teachers at high school level who do not have a background in mathematics but do have a strong commitment to education and mathematics and who constantly seek to be brought up to date. As a result, the knowledge of geometry that the teacher has due to his/her education or experience is respected and valued. In the first part of this work, the fundamentals of the proposal, beginning with knowledge of mathematics, are given, based on previous cognitive structures in order to achieve significant knowledge. The second part includes the proposal itself, beginning with a local axiom and concluding with a deductive mosaic. After, the knowledge examined is linked with the Euclidean axiom, carrying out an analysis of the fifth postulate and some of its equivalences. Finally, we described some non-Euclidean geometry which results from a negation of the postulate of parallels, feeling assured that such a study will provide the teacher with an invaluable potential for developing his/her courses, even if the topics is not included in high school studies. We invite teachers to continue their education for their own benefit and for that of their students.

(KEY WORDS: Construction of knowledge, significant learning, axiomatic, Euclidean geometry, non-Euclidean geometry)

Í N D I C E

“No te preocupes: si son iguales, los sumas”.

Frase de mi hija Tere de tres años, cuando me vio preparar este documento.

1. INTRODUCCIÓN

La matemática como profesión es, sin lugar a duda, una actividad que se caracteriza por tener un escaso número de seguidores en el ámbito mundial, y en nuestro país dicha tendencia es particularmente notable. Dentro de este contexto, es fácil entender por qué el número de docentes de matemáticas que poseen una formación matemática es reducido en nuestros bachilleratos, e incluso en nuestras universidades.

Las características socio económicas de nuestro país han llevado a muchos profesionistas a incursionar en la docencia en diferentes áreas, desde bachilleratos hasta universidades. La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es una de esas áreas. De esta manera, el profesor de matemáticas enfrenta con mucho entusiasmo y profesionalismo su labor docente, sin embargo, las herramientas con las que cuenta pueden verse, en muchos casos, limitadas de manera importante.

Las instituciones educativas han buscando ampliar y actualizar dichas herramientas a través de programas de actualización, que comprenden estudios de posgrado, diplomados y talleres (Ontiveros, 1994). En algunos casos, los profesores buscan la actualización de manera autodidácta, a través del material escrito del área correspondiente.

Dicho material didáctico debe responder a las necesidades y condiciones particulares de las áreas del conocimiento matemático en las cuales se desarrollan los docentes, pero además, es importante proporcionar la visión que la matemática actual requiere: una ciencia en movimiento y construcción.

Este documento presenta una propuesta didáctica para los docentes de geometría euclidiana de bachillerato, retomando y consolidando los conocimientos que el profesor maneja en su práctica diaria, permitiéndole visualizar la estructura axiomática de la geometría de manera que el docente pueda organizar de forma secuencial los teoremas que desea abordar en su curso. Para tal efecto se presenta el uso del mosaico deductivo, que detallaremos en su momento. Finalmente se realiza una reflexión sobre el quinto postulado de Euclídes que permite mostrar el poder del método axiomático.

Con esta idea la primera parte delimita el problema de investigación, en ella se establecen la justificación y el sustento teórico de la propuesta, la segunda parte presenta la propuesta misma con la estructura resultante de la investigación realizada.

2. ANTECEDENTES

Uno de los libros que más se ha utilizado en la historia de la ciencia es, sin lugar a duda, *Los Elementos* de Euclídes. Durante muchos años se consideró como el ejemplo del rigor deductivo en matemáticas, con su estructura lógica y sus demostraciones se constituyó como el libro de texto obligado para aprender geometría. De los *Elementos* se han derivado tratados de geometría euclidiana que tratan de dar enfoques diferentes, sin embargo, caen inevitablemente en el mismo corte y estructura de la obra de Euclídes (Filloy, 2001).

Estos libros parten de definiciones, postulados y nociones básica, debido que se dirigen a lectores en general y, por tanto, no consideran los conocimientos que de alguna forma pueda tener quien desea aprender geometría. De manera que presentan un fuerte obstáculo para aquellas personas que no son matemáticos de formación, incluyendo profesores de bachillerato. La consecuencia suele ser una experiencia desalentadora para el lector, sea profesor o alumno. En la IX Reunión Centroamericana y del Caribe, Dalgys Rosales (Rosales, 1995) identifica la forma en que se presenta la geometría en los libros de texto como una de las dificultades en el aprendizaje de esta rama de las matemáticas.

Posterior al fracaso de la implementación de la *nueva matemática*[1] en las aulas a principios de los años 60's, surgieron posturas antagónicas respecto a la forma de enseñar la geometría: algunos autores de libros de texto se mantuvieron enfocados en las aplicaciones sin dar importancia al sustento teórico.

En tal caso, la geometría se reduce a un conjunto de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes. O bien a un conjunto de actividades que permiten ejercitar los trazos con regla y compás. Finalmente algunos cursos y profesores han decidido tomar el camino del doblado de papel, pero nuevamente quedando

[1] Recordemos El Fracaso de la Matemática Moderna "Por qué Juanito no sabe sumar", obra

en la actividad manual y recreativa, dejando la esencia de la geometría de lado. Como afirma Cecilia R. Crespo en la citada reunión de La Habana (Crespo, 1995): “la enseñanza de la geometría viene sufriendo desde hace tiempo, un relajamiento dentro de las actividades docentes”. Comenta que ésta se deja al final del curso y se desprecia su valor formativo.

Instituciones como la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, han proporcionado estudios de postgrado para apoyar al docente de matemáticas en su formación y actualización. La Maestría en Docencia de las Matemáticas es uno de esos programas.

Al cursar dicha maestría en 1999, experimentamos las dificultades en el aprendizaje de la geometría euclidiana, que en gran medida son similares a las que enfrentan los alumnos en bachillerato. Los teoremas que aborda el curso son en su mayoría conocidos para los alumnos-profesores, sin embargo, parecen formar un conjunto de proposiciones sin estructura ni organización, la relación de precedencia parece no ser clara provocando círculos donde, al demostrar un teorema se utiliza algún resultado del mismo teorema que se desea demostrar.

Un segundo obstáculo lo constituye la demostración misma. En muchos casos, la demostración se convirtió en un reto interesante, pero en ocasiones, resultó una experiencia frustrante y de poco éxito. Estas experiencias con los alumnos no son exclusivas de una generación, por el contrario, constituyen una característica común a lo largo de la historia de la maestría (R. Torres, comunicación personal).

---

editada en español en1976 de Morris Kline.

3. PLANTEMIENTO DEL PROBLEMA

Resulta evidente que el conocimiento matemático es necesario en un profesor de matemáticas, coincidimos con Villatoro (2001) en los primeros tres puntos que establece para el perfil ideal del docente de educación media superior:

"1. Dominio de los fundamentos y temas de la asignatura y comprensión de los enfoques de la institución.
2. Comprensión articulada del plan de estudios, del área de conocimiento y de la asignatura.
3. Actualización sistemática de los contenidos...".

Sin embargo, la deficiencia en conocimientos básicos de algunos profesores de matemáticas es una realidad. Citemos los resultados que reportan Ibáñez y Ortega (1997) de un experimento con 83 alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica, donde muestran una diapositiva con la demostración del teorema de Tales y se les pregunta si es correcta. Un total de 40 de ellos opinaron, equivocadamente, que existía un error o que era incompleta la demostración, los profesionistas que conforman el grupo de estudio fueron Economistas, Químicos, Biólogos, Ingenieros, Arquitectos, Físicos y Matemáticos.

Otro estudio realizado por Bravo et al. (2002) con 140 profesores de matemáticas de bachillerato, incluyendo profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) y la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México, revela: "Nuestra primera conclusión es que la formación matemática de gran parte de los profesores es deficiente. Para subsanar esto, algunos de ellos sólo requieren tener una vida académicamente activa, mientras que otros necesitan, además, cursos de matemáticas para cubrir sus deficiencias de formación básica". No obstante que se trata de un estudio de caso y su generalización no puede ser extendida, el hecho de incluir profesores de los bachilleratos de la máxima casa de estudios del país lo convierte en una investigación que debe ser considerada dentro del problema de la docencia de matemáticas en bachillerato.

Los epígrafes anteriores nos llevan a reflexionar sobre la formación profesional de los docentes de matemáticas del bachillerato. Si bien las escuelas normales de nuestro país forman profesores de matemáticas para secundaria y bachillerato, la gran mayoría de los egresados se ubican en escuelas secundarias, dejando un hueco en el nivel medio superior y superior.

Dado el contenido matemático de los programas de ingeniería, resulta evidente que la formación predominante de los profesores de matemáticas de nivel bachillerato es la ingeniería en sus diferentes áreas, así como la formación en ciencias (Bravo et al., 2002). Sin embargo, es precisamente esa variedad en las áreas de formación profesional la que genera variaciones importantes en el conocimiento matemático, y especialmente geométrico que manejan los docentes dedicados a la enseñanza de la matemática. En el caso particular de nuestro estado podemos afirmar que una gran mayoría de docentes enfrentan el curso de geometría euclidiana de bachillerato con el conocimiento proveniente de su formación profesional.

Eugenio Filloy Yagüe (2001) comenta que los alumnos logran adquirir los principios de la deducción que utiliza el método axiomático hasta cerca de los 20 años, es decir, hasta que realiza estudios de licenciatura. De manera que una gran cantidad de profesores de geometría no tiene clara la esencia de la axiomática, y tampoco la función de la demostración.

De esta manera, podemos enunciar el problema de la presente investigación:

"**Diseñar una propuesta didáctica que permita al docente de bachillerato del área de geometría euclidiana, actualizar sus conocimientos a partir de su experiencia para lograr una visión axiomática de la Matemática**".

4. JUSTIFICACIÓN

La matemática se ha distinguido por su nivel de abstracción, sus demostraciones y sus aplicaciones (Aleksandrov et al.,1985). El Programa de Matemáticas III de la Escuela de Bachilleres de la U.A.Q. (1999) considera el curso de geometría euclidiana como el campo propicio para que el alumno se acerque al método deductivo, pueda conocer la demostración e introducirlo a su práctica con teoremas sencillos (U.A.Q., 1999). Sin embargo, el mismo Programa señala: "No es necesario demostrar todos los teoremas que se enuncien, la elección de cuáles si y cuáles no queda a cargo del profesor que con su experiencia y sensibilidad irá marcando un ritmo y una profundidad de acuerdo al grupo con el que esté trabajando" (Íbidem).

De esta manera, el Programa establece como requisito cierta experiencia en el docente, experiencia orientada al conocimiento de teoremas básicos de geometría, la secuencia apropiada de dichos teoremas para realizar las demostraciones pertinentes al curso, así como la habilidad en la demostración de los teoremas. Además de una visión y una postura respecto al rigor y formalismo que debe solicitarse a los alumnos al reproducir una demostración o intentar una nueva.

Por ello, el enfoque con el cual deba considerarse el rigor matemático es importante al momento de seleccionar los teoremas que el docente planea trabajar en clase. Si bien es cierto que en algunos momentos del desarrollo de la educación matemática se han considerado posturas en extremo formales, consideramos que la más adecuada es la que plantean Aleksandrov et al. (1985): "... el rigor de la matemática no es absoluto; está en proceso de continuo desarrollo; los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas".

Es precisamente este desarrollo continuo el que da vitalidad a la matemática, permitiendo visualizarla como una ciencia no terminada y en constante revisión de sus principios. Por ello es preciso que el docente presente la asignatura de manera que permita al alumno acceder de forma natural a los estudios universitarios. Y es por esta razón que el docente "... en el nivel medio debe, necesariamente, dominar los dos aspectos del quehacer matemático: la fundamentación axiomática de la disciplina, por una parte, y el contenido estructural del cuerpo de doctrina, por otra" (Casanchi, 2004).

Dada la escasa experiencia que el docente ha tenido para desarrollar su habilidad en la demostración a lo largo de su formación profesional, es necesario realizar actualizaciones que permitan, además de la práctica de la demostración, la reflexión a cerca de la importancia del método axiomático de la matemática.

De lo contrario, el docente corre el riesgo de caer en el extremo de solicitar al alumno demostraciones con formalismo que no son acordes a la esencia de la enseñanza de la geometría en bachillerato. O bien, ignorar por completo las demostraciones en su curso de geometría. En ambos casos, el docente imposibilita al alumno el acercamiento a la demostración matemática y a la axiomática. Recordemos que para muchos alumnos tal acercamiento es el primero y para otros tantos, el único.

De manera que una visión más amplia de la axiomática y la demostración en geometría permiten al docente una mejor comprensión y valoración de los logros que obtienen sus alumnos.

5. MARCO TEÓRICO

5.1 Axiomática y demostración

Un rasgo característico de la matemática es su nivel de abstracción, ya mencionado anteriormente, sin embargo, un segundo rasgo lo constituye la demostración. Una vez logrado el alto nivel de abstracción que maneja la matemática, la validación de los conocimientos generados es a través de la demostración, la cual se constituye en una forma de comunicar los resultados.

Es importante recordar que la demostración ha realizado un camino largo en la historia de la matemática. Los conocimientos prehelénicos logrados en Babilionia y Egipto consistían en un conjunto de cálculos y métodos obtenidos de forma empírica. La verificación constante de los resultados era la forma de "demostrar" los conocimientos, elevándolos al rango de "verdades". De alguna forma la demostración era similar a la que realizamos en la actualidad cuando se nos pide demostrar que 3 es raíz de $x^3 + x^2 - 4x - 24 = 0$, simplemente comprobamos que 3 es efectivamente una raíz de la ecuación (Filloy, 2001).

Es con los griegos donde se inicia la sistematización de dichos conocimientos, y dentro de la cultura griega surge el convencimiento de demostrar las proposiciones de manera deductiva. De esta manera se establece un ordenamiento en los conocimientos de la época, dado que una proposición es consecuencia lógica de otra precedente. Es importante recordar que *teorema* en su etimología original quiere decir *objeto de una visión*. Es decir, la veracidad de la proposición debe ser visible de inmediato, o bien, la hacemos visible a través de una demostración. Supongamos que deseamos convencer a un amigo de la validez de la proposición S_1 y para ello le hacemos notar que es consecuencia lógica de otra proposición S_2, si nuestro amigo comprende que S_1 se deduce de S_2 pero no acepta a ésta última como válida, podemos mostrarle que S_2 se deduce de otra proposición S_3, en caso de no convencerlo podemos usar n proposiciones, lo cual representamos de la siguiente forma:

$$S_n \rightarrow \ldots \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$$

Naturalmente debe haber una proposición S_n que acepte como válida, de lo contrario llegaríamos a un regreso infinito.

De esta forma se establece el método axiomático: debe existir un cierto número de proposiciones iniciales que se aceptan como válidas sin demostración, a las cuales llamamos axiomas o postulados; además debe existir un consenso en las reglas de deducción que han de usarse (Bromberg y Moreno, 1987).

La elección de los postulados y axiomas es en gran medida arbitraria, sin embargo, es conveniente que sean simples y en número pequeño.

El método axiomático mostró tal poder que llamó la atención sobre sí mismo, su estudio condujo al desarrollo posterior de una rama de la matemática: la lógica matemática. De ésta se desprenden tres características que debe tener un sistema axiomático:

i) *Consistencia*: no debe existir dos teoremas mutuamente contradictorios y que se deduzcan de los postulados.

ii) *Completitud*: todos las proposiciones del sistema son teoremas deducidos de los postulados, o bien son postulados.

iii) *Independencia*: por razones de economía, no debe deducirse un postulado a partir de los otros (Courant y Robbins, 2002).

En el caso particular de la geometría, la ciencia de la axiomatización por excelencia, los postulados y axiomas surgen de la experiencia e intuición. Los axiomas son proposiciones válidas en cualquier contexto, mientras que los postulados son aquellas proposiciones del ámbito de la geometría exclusivamente

(Bromberg y Moreno, íbidiem).

Sin embargo, es importante hacer notar que no toda la matemática griega fue presentada de forma axiomática, más aún el método axiomático no es el camino para la generación de nuevos teoremas, éstos surgen de la intuición, la experiencia y la creatividad. (Courant y Robbins, 2002)

Por otro lado, respecto a la demostración, es conveniente establecer una clasificación que permita una visión más amplia. Mostramos parte de la propuesta de Ibáñez y Ortega (1997)[2]:

i) <u>Tipo,</u> considerando la estructura lógica del enunciado:

- En relación a la implicación:
  - De condición necesaria o suficiente
  - De condición necesaria y suficiente
- En relación al cuantificador existencial:
  - De existencia simple
  - De imposibilidad
  - De unicidad

ii) <u>Método</u>, considerando los procedimientos lógicos:

- Por silogismo
- Por casos
- Por reducción al absurdo
- Por inducción
- Constructivo (ejemplo o contraejemplo)
- Por analogía
- Por dualidad

[2] Ibáñez y Ortega presentan un criterio más de clasificación, el estilo, de acuerdo al procedimiento matemático usado, eg. geométrico, algebraico, etc.. Dado el enfoque de este documento no se

iii) Modo, de acuerdo al procedimiento de exposición:

- Sintético
- Analítico

Es importante señalar que la demostración que se maneje en el aula no puede tener el mismo nivel de formalidad, y por tanto, el mismo nivel de rigor que la demostración usada en el discurso matemático. Los estudios referentes a la enseñanza de la demostración y al uso de la demostración como herramienta didáctica, son múltiples. Podemos afirmar que el consenso general es el fracaso en el intento de llevar la demostración al aula en el nivel medio, como lo muestra Hoyles (1997) para Inglaterra y Arsac (1999) para Francia; Hanna (1997) coloca en la mesa de discusión la misma demostración al considerar las “pruebas” aportadas a través de la computadora, y Duval (1999) afirma que la argumentación, usada por muchos profesores como el paso previo a la demostración, en realidad se erige como el obstáculo que no permite al alumno llegar a realizar demostraciones matemáticas.

De esta manera, el estudio de la demostración y su uso en el aula constituye un problema fuerte en la didáctica de las matemáticas, y es precisamente por este motivo que el profesor de matemáticas necesita desarrollar la habilidad de demostrar, para comprender las dificultades que el estudiante enfrenta cuando observa una demostración en clase, y poder diseñar las estrategias que mejor acerquen al alumno a la axiomática en la medida que se requiere al nivel bachillerato.

Una propuesta para realizar demostraciones en “paquetes” se presenta en la obra de Velasco (1983): “este método consiste en omitir todas las formalidades y sutilezas referentes a los fundamentos de la geometría y dedicarse exclusivamente a exponer algunos *paquetes* encadenados de teoremas y corolarios, en los cuales cada teorema se sigue del anterior o de alguno de los

---

considera necesario incluir dicha clasificación.

anteriores”.

La Propuesta del nuevo Programa de la Escuela de Bachilleres de la U.A.Q. (1999) presenta una metodología similar a la de Velasco, donde se sugiere para el curso de Matemáticas III que se presente al alumno un teorema “meta” cuya demostración no sea trivial, proporcionando posteriormente los conceptos necesarios para llegar a la demostración.

Finalmente, podemos citar el mosaico deductivo que maneja Alejandro Díaz-Barriga (Díaz-Barriga, 2002): “La intención de esta propuesta educativa es presentar un mosaico deductivo, es decir, trabajar localmente en geometría euclidiana. Pretendemos que se guíe al estudiante para que pueda conjeturar y hacer deducciones locales argumentando a favor de teoremas, no a partir de los axiomas de la geometría, sino de hechos que se suponen ciertos y que el estudiante conoce, o pedimos que los crea a condición de que en un momento posterior se les prueben a partir de hechos que sí conozca”.

5.2 Constructivismo en matemáticas

A través de la historia de la ciencia, los eruditos han buscado explicar qué es el conocimiento, cómo se forma y cómo se desarrolla. Las teorías que han surgido toman diferentes perspectivas, algunas se basan en sustentos psicológicos, otras utilizan la epistemología o la sociología. Actualmente, existe una aceptación mundial de la corriente constructivista, la cual establece que el conocimiento se construye a través de la interacción del sujeto que aprende, con el medio ambiente, formado por situaciones didácticas, académicas, sociales, etc.

En este contexto están ubicados los estudios en educación matemática, la construcción de conocimientos matemáticos se explica a través de diversas teorías, sin embargo, la presente propuesta se basa en conceptos de tres exponentes de la corriente constructivista: Jean Piaget, Lev. S. Vigotsky y David Ausubel. También se consideran algunos aportes del matrimonio Van Hiele en el área de la educación de la geometría.

5.2.1 La teoría epistemológica genética de Piaget

Los conocimientos forman estructuras mentales denominadas cognitivas, las cuales explican de la mejor manera posible, una realidad. La Teoría de Piaget explica la forma en que se construyen y evolucionan dichas estructuras a lo largo del desarrollo del sujeto. Esta postura piagetana está presente en los programas de educación de nuestro país en todos sus niveles, desde pre escolar hasta universidad.

Para Piaget, el desarrollo de la inteligencia consta de dos procesos esenciales e interdependientes: la *asimilación y la acomodación*. El sujeto recibe e integra los nuevos elementos y experiencias del ambiente a las estructuras que ya posee (asimilación). Si la estructura responde a la realidad, entonces se produce una asimilación conservadora. Pero si la asimilación genera una estructura que no genere el resultado esperado, entonces se produce un desequilibrio cognitivo, y la estructura debe modificarse (acomodarse) para recuperar el equilibrio (Moreno, 1996).

En teoría, el equilibrio de una estructura se conseguiría cuando las acomodaciones anteriores pudieran permitir la asimilación de algo nuevo sin que dicha estructura se modificara. Pero, justamente, para avanzar en el nivel de inteligencia, el desarrollo requiere del “desequilibrio” para que puedan modificarse las estructuras intelectuales.

La inteligencia se desarrolla, así, por la asimilación de la realidad y la acomodación a la misma (Teorías de Aprendizaje, 2003).

Es así, que en la interacción de la adaptación y de la asimilación, se origina una estructura intelectual que permite al individuo acceder de estructuras simples a más complejas, hasta llegar a la etapa de las operaciones formales. La maduración física, la interacción con el medio y la equilibración son necesarias para el desarrollo y construcción de las estructuras cognitivas, ya que éstas sólo se construyen a través de la superación de inconsistencias y desequilibrios. Así “el aprendizaje dependerá, por tanto, del grado de desarrollo, y habrá de estar en relación con el nivel operativo: el aprendizaje se sirve y depende del desarrollo, y no al revés (Teorías de Aprendizaje, ïbidem).

Es importante realizar dos aclaraciones:

i) El proceso de construcción de nuevas estructuras cognitivas se presenta a lo largo del aprendizaje de una persona, no solo en la etapa escolar. De manera que el profesor que se actualiza y prepara constantemente en los conocimientos de la materia que imparte, también realiza los procesos cognitivos descritos.

ii) Las etapas de operaciones concretas y formales que Piaget menciona en su teoría no se establecen en una edad exacta, un estudiante de universidad puede tener la madurez fisiológica para lograr la etapa de operaciones formales en cierta área del conocimiento, pero pueden faltar las estructuras cognitivas previas. En este caso, el paso de operaciones concretas a formales será más rápido para un profesor que para un estudiante.

5.2.2. Modelo de aprendizaje sociocultural de Vigotsky

La teoría de Piaget da cierta importancia al medio cultural en la construcción del conocimiento, sin embargo, la teoría de Lev S. Vygostki, sostiene que el desarrollo del individuo se produce en la medida en que interactúa con su entorno social; así la estructura del funcionamiento individual se deriva y refleja de la estructura del funcionamiento social. De esta manera es como se desarrollan las funciones psicológicas denominadas superiores (el razonamiento lógico y la solución de problemas, entre otras), en colaboración con otros, especialmente con expertos, de manera que la adquisición de aprendizajes se explica como formas de socialización. Vigotsky concibe al hombre como una construcción más social que biológica, en donde las funciones superiores son fruto del desarrollo cultural e implican el uso de mediadores (Teorías de Aprendizaje, Íbidem).

Para explicar el desarrollo del aprendizaje es necesario ubicar dos niveles de desarrollo: el desarrollo actual y el desarrollo potencial: "El desarrollo actual está determinado por la capacidad del niño para resolver problemas por sí mismo. El desarrollo potencial está determinado por su capacidad para resolver problemas en colaboración con un compañero más capaz" (Ursini, 1998). La distancia entre la zona de desarrollo actual y la zona de desarrollo potencial se denomina zona de desarrollo próximo.

Esta noción subraya la importancia de la cooperación y del intercambio social en el desarrollo. En el campo educativo, podemos afirmar que el estudiante "tiene ya un determinado nivel de desarrollo que está al alcance de sus posibilidades a condición de que se le ayude; la enseñanza consistirá justamente en aportar esa asistencia que permite actualizar los contenidos incluidos en la zona de desarrollo potencial". (Palacios, 1987).

De las ideas de Piaget y Vigotsky nos resulta evidente que los conocimientos y experiencia previas que un estudiante tiene son básicos en la construcción de nuevas estructuras. En el aula no podemos suponer que el alumno enfrenta nuestro curso sin conocimientos previos, tal suposición o incluso la intención de tratar de suprimirlos, puede provocar en el estudiante la imposibilidad de construir el conocimiento que pretendemos.

5.2.3 El aprendizaje significativo

La construcción de una estructura más compleja a partir de una más simple, debe llevar al alumno a dar significado al aprendizaje realizado. Para David Ausubel, “la significatividad se da cuando se relaciona la nueva información recibida con información previamente asimilada por el sujeto. Un aprendizaje es significativo cuando la información nueva es relacionada de una manera lógica y no arbitraria con información que ya posee el alumno.” (Zarzar, 2000).

Para Ausubel (Teorías de Aprendizaje, 2003), deben darse dos condiciones para que el aprendizaje sea significativo:

- El alumno debe mostrar disposición hacia lo que se le enseña. De ahí la importancia que tiene la selección de contenidos que se presenten, de tal forma que sean coherentes, estructurados y lógicos.

- El alumno debe tener los conocimientos previos que le permitan acceder a los conocimientos nuevos. Esta condición motiva al alumno y hace ver al nuevo conocimiento como un material potencialmente significativo.

5.2.4 El modelo de Van Hiele: una propuesta en geometría

La frecuente queja de los profesores de matemáticas sobre la ineficacia de la geometría en sus aulas, indujo a los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof (de origen holandés), a establecer un modelo que diera respuesta a este problema. Este modelo es uno de los más efectivos en el ámbito mundial (Alsina, 1997).

Los Van Hiele proponen un modelo para el aprendizaje de la geometría. Este proceso es comparado a un proceso inductivo donde cada nivel establece relaciones entre los conceptos que sólo pueden ser abordados si cuentan con los prerrequisitos del nivel anterior.

El modelo de Van Hiele presenta dos líneas: en la primera, presenta una secuencia de niveles de razonamiento en geometría; y en la segunda parte, define algunas directrices que pueden ayudar a los profesores para que sus alumnos alcancen los niveles respectivos.

La propuesta de los Van Hiele establece cinco niveles de razonamiento (Antón, 1994):

a) Nivel 0: Los individuos pueden copiar una figura sin reconocer las partes y componentes de las figuras.

b) Nivel 1: Los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares de las figuras, pero no externan relaciones entre las distintas familias.

c) Nivel 2: Los individuos determinan las figuras por sus propiedades, pero son incapaces de organizar una secuencia de razonamientos que justifiquen sus observaciones.

d) Nivel 3: Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, pero no reconocen la necesidad del rigor del razonamiento.

e) Nivel 4: Aprecian el rigor de varios sistemas deductivos; la consistencia, la independencia y la completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría.

Es importante resaltar el hecho que los Van Hiele han demostrado que el paso de un nivel a otro es independiente de la edad. De manera que resulta interesante notar que el nivel 4 constituye la posibilidad de comprender la axiomática de la geometría, y sin embargo varios profesores acusan deficiencias en dicho nivel, según lo exhibimos en los antecedentes y planteamiento del problema del presente documento.

Podemos concluir el presente apartado afirmando que “la idea central del modelo de Van Hiele en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento es que la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia” (Jaime, 1990).

6. METODOLOGÍA

Al cursar la maestría en Docencia de las Matemáticas de la Facultad de Ingeniería, experimentamos las dificultades para organizar los conocimientos geométricos que ya se poseen, gracias a la experiencia docente y a la formación profesional. Observamos que un curso de actualización, dado que tal fue la función del curso de geometría de la maestría, es necesario para poder organizar y estructurar esos conocimientos de manera que puedan utilizarse en forma deductiva.

De esta manera surgió la idea de elaborar material didáctico que pueda ayudar en la actualización del docente en el área de geometría euclidiana. Para el diseño de dicho material nos dimos a la tarea de investigar las teorías de construcción del conocimiento matemático que pudieran aportar una guía. Encontramos que las teorías expuestas resaltan la importancia del conocimiento y experiencia previa que tiene el alumno, en nuestro caso, el profesor, para la construcción de nuevas estructuras cognitivas. Además, se coincide con las teorías expuestas en la suposición de que los niveles de razonamiento lógico que permiten apreciar y comprender la axiomática de la geometría, se presentan en la etapa en la cual el profesor ha cursado la geometría, dejando la laguna correspondiente.

Así, nos dimos a la tarea de investigar en la bibliografía una estrategia que pudiera funcionar, encontrando el mosaico deductivo, teorema meta o paquete, como una herramienta que el profesor puede utilizar para la enseñanza de la geometría de una manera modular, pero manteniendo la esencia axiomática de la geometría.

Se ha integrado la información encontrada en una propuesta que toma los conocimientos geométricos que la mayoría de los profesores poseen, y busca organizarlos a partir de un conjunto de “axiomas” propuestos por nosotros.

LITERATURA CITADA

Academia de Matemáticas de la UAQ. (1999). "Propuesta para la conformación del nuevo plan de estudios de la Escuela de Bachilleres". Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro. Pág. 29

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. et al. (1985). "La matemática: su contenido, métodos y significado". Vol. 1. Editorial Alianza. Madrid. Págs. 19 y 20.

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. et al. (1985). "La matemática: su contenido, métodos y significado". Vol. 3. Editorial Alianza. Madrid.

Alsina, C., Fortuny, J.M. y Pérez (1997). "¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO". Editorial Síntesis. Madrid. Pág. 37.

Antón, J.L. (1994). "Materiales de apoyo para el profesorado de Educación Secundaria Obligatoria". Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencias Narcea, S.A. de Ediciones Madrid. Madrid. Pág. 86.

Arsac, G. (1998). "Las investigaciones actuales sobre el aprendizaje de la demostración y los fenómenos de validación en Francia". Rev. Reserches en Didactiques des Mathématiques. Vol. 9, No. 3. Trad. Josefina Ontiveros Quiroz. Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro.

Bravo, A., Díaz-Barriga, A., Fernández-Villanueva, M. y Meda, A. (2002). "Concepciones sobre la matemática y su enseñanza en el bachillerato". En: **De la Peña, J.** (Comp.) "Algunos problemas de la educación en matemáticas en México". Siglo XXI-UNAM. México. Págs. 205.

Bromberg, S. y Moreno, L. (1987). "Fundamentos de la Geometría de Euclídes a Hilbert", Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas. CINVESTAV, IPN. México. Págs: 7 - 9.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). "¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales", Fondo de Cultura Económica. México. Págs: 249 - 253.

Crespo, C. (1995). "Geometría: los problemas a lo largo de la historia". Pueblo y Educación. La Habana.

Díaz-Barriga, A. (2002). "Triángulo de Napoleón y Cuadrados Pitagóricos". En Briseño, A y Díaz-Barriga, A. (Coord). Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza. Serie Bachillerato. Vol I. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Pág. 32.

Duval, R. (1999). "Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?". Grupo Editorial Iberoamérica - Pitágora Editrice Bologna. México.

Eves, H. (1969). Estudio de las Geometrías. Tomo I. Editorial UTEAH. México.

Filloy, E. (2001). "Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana". Grupo Editorial Iberoamérica. México. Págs. 4, 58, 59.

Gacetilla Matemática. (2001). Obtenida el 20 de octubre de 2004 desde http://www.arrakis.es/mcj/euclides.htm

García, J.D. (1992). Euclides. Elementos de Geometría I, II. Universidad Autónoma de México. México.

Hanna, G. (1997). "El valor permanente de la demostración". Rev. La matematica e la sua didattica. Vol. 3. Trad. Víctor Larios Osorio. Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro.

Hoyles, C. (1997). "La influencia del curriculumn en la aproximación de los estudiantes a la demostración". Rev. For the Learning of Mathematics. Vol. 17, No. 1. Trad. Ángel Balderas Puga. Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro.

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La Demostración en Matemáticas. Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria", Rev. Educación Matemática. Vol. 9 No 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Págs: 65 y 66.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele". Iberoamérica. Sevilla. Pág. 330.

Joyce, D.E. (1998). Euclides Elements. Obtenido el 25 de noviembre de 2004, desde http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html

Moise, E. (1980). "Geometría Elemental desde un punto de vista avanzado". Compañía Editorial Continental S.A. México.

Moreno, L.E. (1996). "La epistemología genética: una interpretación". Rev. Educación Matemática. Vol. 8 No. 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Pág. 10.

Ontiveros, J. (1994). "El fracaso en la enseñanza de las matemáticas del bachillerato". Universidad Autónoma de Querétaro. Querétaro. Págs. 9, 14.

Palacios, J. (1987). "Vigotsky: El hombre y su causa. Teoría de Aprendizaje". Editorial Anthropos. Madrid. Pág.180.

Rosales, D. (1995). "Algunas consideraciones acerca del tratamiento de la geometría en la enseñanza general". Pueblo y Educación. La Habana.

Teorías de Aprendizaje. (n.f.). Curso a distancia. Obtenido el 10 de septiembre de 2004, desde http://www.educarchile.cl/web_wizzard/ver_home.asp?id_proyecto=3

Ursini, S. (1996). "Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L.S. Vigotsky". Rev. Educación Matemática. Vol. 8 No. 3. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Pág. 45.

Velasco, G. (1983). "Tratado de geometría". Editorial Limusa. México. Pág. 7.

Villatoro, C. (2001). "La profesionalización de la enseñanza y su organización académica". En: **Bazán, J. y García, T**. (Coord.). "Educación Media. Aportes" Vol. I. Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades. México. Pág. 228.

Zarzar, C. (2000). "La didáctica grupal". Editorial Progreso. México. Pág. 28.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Quotations/Newton.html