Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería

La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta

Claudia Arellano Camacho

Santiago de Querétaro. Qro. Mayo 2013

Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos.

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Claudia Arellano Camacho.

Dirigido por:
Dr. Víctor Larios Osorio.

SINODALES

Dr. Víctor Larios Osorio Presidente	Firma
M.D.M. Teresa de Jesús Valerio López Secretario	Firma
M.C. Patricia Isabel Spíndola Yáñez. Vocal	Firma
M.D.M. Carmen Sosa Garza. Suplente	Firma
M.D.M. Arturo Corona Pegueros Suplente	Firma

Dr. Aurelio Domínguez González **Director de la facultad**	**Dr. Irineo Torres Pacheco** **Director de Investigación y Posgrado**

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Mayo 2013
México

RESUMEN

En este documento se describe una investigación mediante estudio de casos realizada en el periodo 2010-2012 sobre la problemática a la que se enfrentan los estudiantes de bachillerato para exponer argumentos que validen sus procesos de razonamiento y soluciones al resolver un problema matemático. El trabajo se dirigió concretamente a cubrir dos objetivos: Estudiar el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver con lápiz y papel algunos problemas de geometría euclidiana y a categorizar los tipos de argumentos detectados. El análisis y discusión de resultados se realiza a partir de la descripción y categorización de los esquemas de prueba identificados en las respuestas de los estudiantes, apoyado por la exposición de algunos casos significativos, haciendo inferencias y formulando las conclusiones pertinentes. De las evidencias recogidas se formulan las siguientes conclusiones: La mayoría de estudiantes esperan la aprobación del docente ante cada procedimiento que hacen y en términos generales perciben los problemas como algo para resolver, no para justificar. Esto posiblemente no es sino consecuencia de las prácticas escolares. Los esquemas de prueba más avanzados son utilizados en los problemas que contienen datos numéricos y que demandan información de la misma naturaleza. No trabajan con generalidades, recurren a casos para validar su respuesta e incluso uno solo suele bastarles. En particular, los esquemas perceptuales están arraigados en su forma de pensamiento. Se considera importante valorar todos los tipos de esfuerzos de los estudiantes dado que sus métodos corresponden en gran medida a las etapas evolutivas propias de la geometría con las que nació la demostración como la conocemos en la actualidad. Y dado que los estudiantes no argumentan con facilidad se sugiere solicitarles de modo muy explícito la explicación, incluso de manera dirigida. Se pretende que esta investigación se constituya en antecedente para dos aspectos principalmente: Por un lado para la formulación de estrategias de intervención didáctica orientadas a favorecer el aprendizaje de formas de validación basadas en el razonamiento deductivo, y por otro lado puede convertirse en un elemento para la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas en futuras investigaciones.

(**Palabras clave**: Argumentación, validación, resolución de problemas, demostración, esquema de prueba)

SUMMARY

This document describes research done through case studies carried out from 2010-2012 regarding the problem high school students face in expounding arguments that validate their reasoning processes and solutions when solving a mathematical problem. Concretely, the work was directed towards covering two objetives: Studying the argumentative discourse carried out by students for justifying procedures and results when solving whit pencil and paper some Euclidean geometry problems and categorizing the types of arguments detected. Analysis and discussion of results is done through the description and categorization of proof schemes identified in the students' answers, supported by setting forth some significant cases, making inferences and reaching pertinent conclusions. From the evidence collected, the following conclusions are set forth: The majority of students expect the teacher's approval of each procedure they carry out and, in general terms, perceive the problems as something to solve, not justify. This may simply be the consequence of scholastic practices. The most advanced proof schemes are used with problems containing numerical data which require information of a similar nature. They do not work with generalities but rather use cases to validate the answer; sometimes one is sufficient for them. In particular, perceptual schemes are rooted in their way of thinking. It is important to value all types of efforts made by students since their methods closely correspond to historical stages common to geometry as we know it today. And since students do not easily present their arguments, it is suggested that they be explicitly requested to give an explanation, even in a directed manner. The intention of this study is to create an antecedent mainly for two aspects: On the one hand, for the creation of didactic intervention strategies aimed at favoring the learning of validation forms based on deductive reasoning, and on the other, for becoming a factor in the creation of hypotheses to be contrasted in future studies.

(**Key words**: Argumentation, validation, problem solving, demonstration, proof scheme)

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo de esta tesis se atendieron las atinados comentarios de los cinco sinodales de la misma: Dr. Víctor Larios, M.D.M Carmen Sosa Garza, M.D.M Teresa de Jesús Valerio López, M.C. Patricia I. Spíndola Yáñez, y del M.D.M Arturo Corona Pegueros. A todos ellos mi sincero agradecimiento por revisar el texto y por su orientación para mejorarlo.

De manera especial, agradezco la dirección del Dr. Víctor Larios Osorio, quien creyó en el proyecto de principio a fin y con su paciencia y guía colaboró de manera invaluable a su conclusión.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla

I. INTRODUCCIÓN

Este documento describe una investigación realizada en el periodo 2010-2011 sobre la problemática a la que se enfrentan los estudiantes de bachillerato para exponer una argumentación que valide sus procesos de razonamiento y soluciones de un problema matemático. Centrada en la exploración de los esquemas de prueba personales que usan los estudiantes de segundo grado de bachillerato del plantel 16 del COBAQ, pretende constituirse en un antecedente para dos aspectos principalmente; por un lado, puede ser útil para la formulación de estrategias de intervención didáctica orientadas a favorecer el aprendizaje de formas de validación basadas en el razonamiento deductivo, y por otra parte, no menos importante, puede convertirse en un elemento para la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas en futuras investigaciones.

En la descripción del problema se exponen las razones del interés en el estudio del bajo nivel de razonamiento para la validación de procesos y resultados al resolver problemas por parte de los alumnos observado en la experiencia docente propia por cerca de 10 años. En esta parte también se exponen los objetivos e hipótesis de la investigación y se citan antecedentes importantes en investigaciones recientes sobre el mismo tema, los hallazgos de éstas y algunas propuestas relevantes al respecto.

En el marco teórico se plantea la delimitación conceptual necesaria para el estudio: la distinción entre los conceptos de prueba, explicación, demostración y argumentación que han realizado importantes investigadores interesados en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática y las formas de razonamiento que le anteceden y que deben ser valoradas en el contexto particular de la clase de matemáticas. A partir de ello se formula aquí el sentido que tiene el concepto de argumentación en este trabajo y su relación con el proceso de validación en la resolución de problemas. Aparece un breve recuento de cómo la resolución de problemas de matemáticas se ha convertido en una importante estrategia didáctica para que el sujeto que los resuelve construya conocimientos a través de este proceso y se describen los modelos de resolución de problemas en que se basa el planteamiento de problemas en este trabajo.

Los esquemas de prueba de Harel y Sowder reciben especial atención en esta parte del documento ya que son dichos esquemas los que han servido de guía para analizar y categorizar las argumentaciones de los alumnos sujetos del experimento. Se describen las características de cada uno de los tres esquemas y subcategorías que establecieron estos teóricos como resultado de cuidadosas investigaciones con estudiantes a los cuales enfrentaron al desarrollo de demostraciones y se justifica el por qué utilizamos aquí sus esquemas como referencia para el análisis de argumentos de validación en la resolución de problemas.

Luego, en la metodología se aborda la descripción de las particularidades relevantes de la investigación mediante estudio de casos dentro del paradigma de la investigación cualitativa desde el cual se realizó este trabajo. Se describe el diseño del experimento, desde la selección de los problemas que cumplieran las características necesarias para que fueran susceptibles de poder argumentar el proceso de resolución y la propia solución, la prueba piloto para tal propósito, las posibles preguntas esperadas por parte de los alumnos al enfrentar cada problema y las que en realidad hicieron, la elección de alumnos participantes en el experimento y la recogida de datos mediante una prueba escrita compuesta por tres problemas de geometría que habrían de resolver en parejas. Esta parte se concluye con las observaciones generales durante la aplicación enfatizando el significado de la argumentación para los alumnos con la muestra de un caso ilustrativo.

Los resultados y análisis constituyen la parte medular de este trabajo. Se exponen los hallazgos del experimento en relación con la teoría preestablecida respecto a la argumentación de los estudiantes como tema central y algunos asuntos relacionados con el mismo y a partir de ello se formulan conjeturas e importantes conclusiones.

II. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La resolución de problemas es un objetivo general en la enseñanza de las matemáticas, ya que ésta se justifica por su aplicación y utilidad en la vida real. Es un proceso del pensamiento, pues al resolver un problema se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas y se intenta reorganizar datos y conocimientos previos en una nueva estructura mediante un proceso secuencial. En este sentido son tan importantes los procedimientos y métodos empleados como el resultado final y por ello se considera primordial la validación de ambos aspectos, pero la validación realizada por el propio sujeto que resuelve los problemas.

Cuando se considera a la resolución de problemas como estrategia didáctica se vuelve necesario considerar, entre otros, los contenidos matemáticos específicos, los tipos de problemas y sus métodos de solución, el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes y sus conocimientos previos, para de este modo organizar el trabajo escolar de enseñanza de conceptos y desarrollo de habilidades matemáticas desde la resolución de problemas.

La experiencia de trabajar con alumnos de bachillerato la resolución de problemas nos ha permitido observar que aunque existen alumnos que argumentan coherentemente y con sentido lógico, mostrando conocimiento y habilidades comunicativas (simbólicas y verbales); representan minorías en los grupos y surgen las interrogantes que llevan al desarrollo de este trabajo de investigación. Al parecer los alumnos no argumentan porque no han tenido acercamientos dirigidos hacia la argumentación.

El tipo de explicaciones que se observan no son encadenamientos deductivos, propios de la matemática, y por tanto consideramos necesario analizar los razonamientos de los alumnos a través de los productos en los que evidencian su pensamiento al resolver problemas.

Los argumentos que dan los alumnos parecen indicar razonamientos intuitivos que toman como verdades universales y por sí mismos no se preguntan por qué son válidos. Si encuentran un caso que cumple la exigencia de un problema hacen extensivo el comportamiento o propiedades.

No debemos desestimar estas dificultades de los alumnos, sino tratar de interpretarlas y conducir estrategias que los lleven a comprender la importancia de validar procesos y resultados, no de acuerdo a creencias personales sino válidas desde la estructura interna de la matemática.

En la propuesta de los nuevos programas del marco curricular común para el bachillerato de 2008, puede leerse:

*"…*Durante la secundaria, se buscó que los estudiantes aprendieran a plantear y resolver problemas en distintos ámbitos de su realidad, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados, empleando el lenguaje matemático como un elemento más de comunicación. En el bachillerato, se busca consolidar y diversificar los aprendizajes y desempeños adquiridos, ampliando y profundizando los conocimientos, habilidades, actitudes y valores relacionados con el campo de las Matemáticas"(…) "Es importante destacar que la asignatura de Matemáticas contribuye ampliamente al desarrollo de estas competencias (…) **evaluar argumentos** o elegir fuentes de información al analizar o resolver situaciones o problemas de su entorno; aprende de forma autónoma **cuando revisa sus procesos de construcción del conocimiento matemático** (aciertos, errores) o los relaciona con su vida cotidiana; trabaja en forma colaborativa al aportar puntos de vista distintos o proponer formas alternas de solucionar un problema matemático"[1] (SEP, 2008, págs. 5,7)

Dentro de las competencias disciplinares que se pretende debieran desarrollarse en los estudiantes y que directamente se relacionan con esta investigación podemos citar las siguientes:

[1] Énfasis añadido.

- Formular y resolver problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explicar e interpretar los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y contrastarlos con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos o analíticos, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación**.** (SEP, 2008, pág. 9)

Las dificultades enunciadas más arriba en relación a la escasa producción de argumentos deductivos por parte de los alumnos nos dejan ver que en la práctica estos preceptos se cumplen de manera muy parcial. Y esto puede ser producto de múltiples factores que limitan el desarrollo de la argumentación por parte de los estudiantes: sus hábitos de estudio, el propósito con el que se les presentan los problemas, el tiempo asignado al trabajo con los mismos, las creencias del profesor y de ellos mismos respecto al conocimiento matemático, a la clase, al aprendizaje y en última instancia a la argumentación de una solución y del proceso para llegar a la misma en la resolución de un problema, etc. Con estos y otros elementos a considerar en el estudio de las deficiencias argumentativas es que surgen interrogantes importantes: ¿Cómo modificar en el micro universo de un aula de clases este estado de las cosas y disminuir la distancia entre lo que se pretende teóricamente y lo que se hace en la práctica a favor del desarrollo de capacidades argumentativas para construir y comunicar conocimientos matemáticos?, ¿cómo propiciar en los alumnos el desarrollo de competencias argumentativas, de modo que sean capaces de justificar y defender con argumentos deductivos sus procedimientos en la resolución de problemas?

Se considera que una primera acción importante ante esta problemática es el estudio de las formas en que argumentan los estudiantes y su posible origen, en segunda instancia se situaría el impulso y diseño de propuestas tendientes a modificar las condiciones en que se enmarca el desarrollo de habilidades argumentativas. Posteriormente la puesta en marcha de esas acciones propuestas y el estudio de sus resultados.

II.1. Delimitación al campo de la geometría

¿Por qué ubicar el estudio de la argumentación en la resolución de problemas geométricos? La elección obedece a la forma relativamente rápida y natural en que esta área del conocimiento matemático permite abordar planteamientos y dar explicaciones de lo que se hace y por qué se hace, tan es así que fue en la geometría donde nació la demostración, hecho que se resume enseguida:

Los orígenes del conocimiento matemático se sitúan en la necesidad práctica de la humanidad. Así como el comienzo de la aritmética suele situarse con los fenicios debido a su uso en el comercio y las transacciones, se reconoce que la geometría nació en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas. Con ello se reconoce que la inclinación empirista de la matemática prehelénica con egipcios y babilonios no es más que una cosa natural. A estas civilizaciones les bastó ver que los resultados en la práctica siempre eran los mismos y con ellos trabajaron y resolvieron sus problemas.

La necesidad del rigor vía la demostración nació con los griegos. ¿Por qué necesitaron y construyeron el edificio formal de las matemáticas? Quienes han estudiado con seriedad este asunto apuntan que la explicación a esto parece obedecer tanto a factores socioculturales como internas del desarrollo del conocimiento matemático de la época. Proclives a construir grandes teorías con pocas evidencias los griegos hicieron de la razón un culto tratando de probar a como diera lugar que sus teorías encajaban en la realidad y buscando que la razón impregnara todo su conocimiento. Basta examinar el desarrollo que tuvo la poesía, teatro, filosofía, escultura, música, etc; para concluir que un desarrollo no parecido de la matemática estaría fuera de lugar en esa sociedad donde el conocimiento ennoblecía a los hombres libres (Filloy, 2001).

Dado ese firme propósito de hacer encajar en el mundo real sus teorías construidas, la máxima filosófica de los pitagóricos de que “todo es número” tenía que ser cierta, para empezar, al interior de la matemáticas, pero pronto aparecieron las contradicciones. Con el descubrimiento de los inconmensurables quedó probado que no todo era número, al menos no con su concepto de número. Este hecho sumado a las paradojas planteadas por Zenón los obligó a voltear hacia terrenos más sólidos que los de la aritmética. La geometría basada en principios observables se convirtió en el terreno seguro en el cual edificar una gran teoría, en la que el pesado armazón de la lógica impondría sus virtudes y defectos (Filloy, 2001). La matemática adquiere con los griegos y su visión geometrizante una estructura como cadena de razonamientos, cada uno de los cuales se va sosteniendo en los anteriores. La demostración alcanzó así la forma clásica que conocemos. Con A y B resultados obtenidos mediante experimentación se establecieron C y D por medio de argumentos simples (deducción) y luego los probaron en objetos reales y al ver que se verificaban surgió la concepción de las matemáticas como el estudio de los aspectos inmutables de la naturaleza y el universo; y ahora para estar en posición de dar alguna interpretación del mundo físico era preciso saber matemáticas. Se pasó con ello a las demostraciones libres de los engaños de la intuición o la percepción sensorial y por mucho tiempo fue la geometría griega el mejor ejemplo de la teoría deductiva convirtiéndose en un campo generador de rutas para el tránsito hacia la formalización de toda la matemática.

¿Qué pasa con el aprendizaje de las matemáticas en la escuela? Queda probado con la propia evolución del conocimiento matemático en general y geométrico en particular que para resolver un problema en este ámbito es completamente válido hacer ensayos, conjeturas, pruebas experimentales, utilizar la analogía, la inducción, particularización y la generalización en el desarrollo de conocimientos. Y por todas estas bondades es que se eligió la geometría para el desarrollo de este trabajo ya que los alumnos sujetos del experimento tenían con ello la oportunidad de abordar los problemas con recursos que utilizan de manera natural: observación, intuición, construcciones auxiliares, analogías, formulación y prueba de conjeturas y todo lo que les posibilita la experimentación para resolver los problemas planteados al permitir justificar, hallar pruebas y argumentos en el benévolo contexto de la geometría.

II.2. Objetivos

Esta investigación se sitúa en esa primera acción de análisis sistemático, mediante el estudio de casos, de los argumentos que dan los alumnos en la resolución de problemas de tal modo que se convierta en un antecedente inmediato del diseño de propuestas didácticas. Se plantearon problemas de geometría solo por delimitar el experimento, no porque no sea posible desde otras áreas matemáticas.

Con este trabajo se pretende concretamente cubrir los objetivos siguientes:

Analizar y comparar, partiendo de los esquemas propuestos por los teóricos citados, el discurso argumentativo que realizan los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver con papel y lápiz algunos problemas de geometría euclidiana.

Categorizar los tipos de argumentos producidos por los alumnos para la justificación de procedimientos y resultados al resolver algunos problemas de geometría euclidiana.

II.3. Hipótesis

Para este estudio se ha formulado como hipótesis que:

Los alumnos utilizan argumentos lejanos a la deducción, apoyándose principalmente en lo que se reconoce como esquemas de argumentación empíricos y que se describen más adelante.

El por qué usan ese tipo de argumentos queda fuera del objetivo principal del trabajo, aunque a manera de reflexión podemos conjeturar que bien puede deberse, entre otros factores, a las escasas o nulas experiencias escolares que han tenido con la construcción de argumentos deductivos.

II.4. Antecedentes en el estudio de la argumentación

La argumentación en la clase de matemáticas ha recibido especial atención en estudios recientes. Su conceptualización desde diversos marcos teóricos, su caracterización, la relación que guarda con la "demostración" en matemáticas y el papel que tiene en la construcción de conocimiento en el aula y fuera de ella son tópicos que han motivado múltiples trabajos de investigación tendientes a proporcionar elementos de orientación al diseño de propuestas didácticas para introducir a los alumnos a la demostración y argumentación. Con ese propósito se han diseñado y probado proyectos de investigación en diferentes niveles de edad en distintos países y esto es un indicativo de que existe un consenso general sobre el hecho de que el desarrollo de un sentido de argumentación constituye un objetivo importante de la educación matemática actual.

Así, encontramos que el tema ocupa diferentes espacios en congresos, grupos de trabajo con informes de investigación, como los del Internacional Group of Psychology in Mathematics Education (PME).

En numerosas publicaciones electrónicas e impresas se exponen cuestiones relativas a la argumentación y su significado en la clase de matemáticas. Véase, por ejemplo, Nicolás Balacheff, 1987-) Godino, 1997 ; Godino, A.M Recio, 21 PME 1997; Luz Manuel Santos Trigo, 2004; Cecilia Crespo y Rosa María Farfán,2005; Acuña y Larios, 2005, 2009; Mariotti, 2006; Larios, 2006 ; Llanos y Otero, 2007; Leitao, 2007 ; Crespo, 2009.

Revisando la conceptualización de argumento y argumentación en investigaciones relativas al tema dentro de la didáctica de las matemáticas se encuentra que son conceptos que aparecen, en general, aparejados a otros, como el de justificación, explicación, prueba y demostración. Con ello se vuelve necesario para los autores de tales trabajos hacer referencia a las distintas acepciones que ellos identifican y precisar en qué sentido será tomado cada concepto dentro del estudio particular que realizan.

Aquí se mencionan algunas referencias a trabajos relacionados con la temática los cuales consideran a los argumentos en la clase de matemáticas como parte importante de un continuo en los razonamientos que conducen a un individuo a validar una proposición o realizar una "demostración" en matemáticas. Tal es el caso de María Alessandra Mariotti y Raymond Duval. Pero ese continuo supuesto que puede ocurrir en el desarrollo de los niveles de razonamiento en un sujeto para ir de argumentaciones que pretenden explicar el por qué y el cómo para más tarde acceder a la demostración formal propia de la matemáticas no ocurre de manera espontánea y es entonces que se vuelve necesaria una intervención didáctica específica, explícita y reflexiva, para el pasaje de la argumentación a la demostración. (Duval, 1999)

En "Proof and proving in mathematics education" Mariotti (2006) realiza una revisión de los trabajos del grupo PME que abordan esta temática. En este documento refiere que el razonamiento y la demostración (prueba) no debieran ser actividades especiales reservadas para momentos o periodos especiales en el plan de estudios sino que debieran aparecer de manera natural en las discusiones (**argumentaciones)** del salón de clase sin importar qué asunto se esté estudiando.

III. MARCO TÉORICO

Habiendo identificado los referentes teóricos que se aplican a este problema de investigación, se muestra enseguida y sin ser exhaustivos, un acercamiento a las conceptualizaciones que sirven de punto de partida para este trabajo.

Dado que el vocablo *argumentación* aparece asociado a los términos de explicación, justificación y prueba, todos ellos en relación a la demostración en matemáticas y sin hallar una teoría uniforme sólidamente establecida sobre la demostración matemática, se describe inicialmente la conceptualización que para estos términos destacan diversos investigadores.

En un segundo momento se hace referencia a algunos modelos de resolución de problemas, particularmente los procesos de validación que ocurren (o que se espera ocurrieran) en ésta, ya que es en el componente de validación donde ubicamos la argumentación y en la cual se abunda al referirnos a la resolución de problemas en este trabajo por considerar que es una etapa que implica la devolución de la responsabilidad matemática al estudiante que resuelve los problemas.

III.1. Delimitación conceptual: prueba, explicación, demostración y argumentación

Relacionar la demostración con otras formas de validación constituye un amplio campo para la investigación en educación matemática. Consideramos necesario apuntar algunos hallazgos y conclusiones que con base a la investigación han formulado autores como Nicolás Balacheff, Raymond Duval, Juan D. Godino y Ángel M. Recio al respecto, ya que abordar los términos de explicación, argumentación, prueba y demostración como sinónimos constituye un primer obstáculo para su estudio.

Para distinguir entre prueba, explicación y demostración retomamos aquí la conceptualización de Balachef, quien al señalar algunas especificaciones sobre estos conceptos muestra implícitamente un continuo creciente en la amplitud y complejidad de su significado. Él define las explicaciones como razones dadas para los "por qué" y dice que en las explicaciones es la propia racionalidad del sujeto locutor lo que establece y garantiza la validez de una proposición.

La prueba en cambio, es para él *"…* una explicación reconocida y aceptada por una comunidad determinada en un momento dado. Es una explicación que ha evolucionado mediante un proceso social, trascendiendo al sujeto locutor". Y en esta conceptualización la demostración es un tipo especial de prueba, específica en el campo del conocimiento matemático. "Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas" y para él un **proceso de validación** ocurre cuando el razonamiento se encamina hacia el aseguramiento de la validez de una proposición. (Balacheff, 2000, pág. 13)

Balacheff se interesa por las características que se esperan en una situación que favorezca los procesos de validación por parte de los estudiantes, visto el proceso de validación como proceso social ligado a fines prácticos. Dice que considerando la clase de matemáticas como un proceso social en un contexto muy específico, si dentro de la misma se vive una situación didáctica tal que permite la ausencia de validación, es natural que ésta no aparezca. (Balacheff, 2000).

Duval también plantea diferencias entre argumentación y demostración y su investigación es una búsqueda para determinar si existe entre ambos procesos una continuidad cognitiva y de ser así qué implicaciones tiene en el proceso didáctico. Para este autor la argumentación es "una forma de razonamiento natural que no se deja describir ni evaluar según los criterios lógicos clásicos" (Duval, 1999, pág. 5). Es más bien un razonamiento ligado al uso del lenguaje natural que obedece a vínculos de pertinencia y tiene como objetivo el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto muy cercano a las prácticas discursivas espontáneas. En cambio, para constituirse como una demostración un razonamiento debe ser juzgado como válido por su valor epistémico.

III.2. La demostración en la enseñanza de las matemáticas

Siendo la clase de matemáticas un contexto institucional muy particular, los significados que en este espacio toma la demostración y su relación con los otros contextos es lo que ocupa a aquellos que buscamos estrategias y respuestas para orientar la actividad didáctica. En el contexto escolar más que las demostraciones que prueban que un hecho es verdadero interesan las demostraciones que explican, en las cuales el sujeto hace conjeturas, explora y argumenta, desarrollando conocimiento en un proceso significativo y no necesariamente con el rigor desde el punto de vista científico (Larios, 2001).

Larios y Acuña (2009), cuyo interés en esta temática los ha llevado a investigar el papel de la prueba en el ambiente institucional del salón de clase, enfatizan que en la clase de matemáticas se vuelve muy importante distinguir demostración y prueba en términos de validación ya que para los profesores, al ocuparse sólo de la segunda, debe ser relevante la necesidad de definir una visión conveniente de la prueba para el trabajo en la clase de matemáticas y reconocer el significado institucional que tiene la prueba en el nivel y contexto educativo en que se planteen las prácticas. Ellos reconocen la búsqueda de dicha visión y plantean que en la escuela una prueba se basa principalmente en discusiones para convencer y su estructura se organiza en base a inferencias y conjeturas que tienen su origen en la exploración.

Godino y Recio (2001) han abundado también en el estudio del significado de la demostración en la clase de matemáticas y proponen el estudio de los diversos significados de la demostración en función de los contextos en que se emplee y usan el término *demostración* para referirse de modo genérico "… al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, en situaciones que requieren justificar o validar el carácter verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción". (Godino & Recio, 2001)

Ellos describen los matices que sobre el significado de la demostración encuentran en los contextos de: la lógica y fundamento de las matemáticas, la matemática profesional, la vida cotidiana, las ciencias experimentales y para el contexto muy particular de la enseñanza de las matemáticas. Aquí se hace referencia de manera breve al significado en tales contextos sólo para enfatizar sus diferencias con el contexto de la enseñanza y al mismo tiempo reconocer que el significado que la demostración tiene para un sujeto se encuentra mediado por la conjunción de contextos que han influido en su desarrollo.

En el contexto de la lógica y fundamento de las matemáticas el término *argumento* se utiliza como sinónimo de argumento deductivo, con la característica de admitir algunos enunciados sin prueba (axiomas) y a partir de ellos establecer los demás. Con este planteamiento se reconoce entonces que la demostración, concebida como proceso y no producto, tiene entre sus funciones un carácter de validar el conocimiento y por ello tiene sentido ocuparse de su estudio en un trabajo dirigido a la validación de procesos y de resultados en la solución de problemas matemáticos ya que al resolver problemas los alumnos observan, analizan, comparan, argumentan, reformulan y estas importantes actividades nos ayudan a estudiar la evolución de su actividad cognoscitiva y la pertinencia de las prácticas de enseñanza dirigidas a la misma.

En la matemática profesional las demostraciones son deductivas pero no formales, se expresan mediante el lenguaje ordinario y el uso de expresiones simbólicas; así, la demostración en la práctica real del matemático se describe como "un argumento convincente juzgado como tal por jueces cualificados" Hersh (Citado por Godino y Recio,2001)

Para las ciencias experimentales la demostración se fundamenta básicamente en pruebas empíricas y otras prácticas argumentativas, por ejemplo inductivas o analógicas, sin descartar el empleo simultáneo de argumentaciones deductivas.

En el contexto de la vida cotidiana la argumentación empleada es de carácter informal y no necesariamente genera verdades, se aplica a cuestiones importantes para el individuo siendo el lenguaje ordinario el medio para expresarse. Sin embargo, este razonamiento informal no es privativo de la vida cotidiana ya que "…es usado incluso en las matemáticas y las ciencias naturales (…) pudiendo considerar a estas prácticas argumentativas informales no deductivas como los primeros estadios de la demostración". (Godino & Recio, 2001, pág. 410)

Considerando sus referencias al significado de la demostración en función del contexto en que se aplica, en la clase de matemáticas toma un sentido muy diferente al que tiene en la práctica profesional de la investigación matemática y en general en todos los demás contextos. Parafraseando la exposición de sus hallazgos puede decirse que en la clase de matemáticas los alumnos suelen tener la necesidad de una garantía sobre la validez de sus producciones y esperan que el profesor sancione la verdad o la falsedad de los enunciados, esto por supuesto termina condicionando lo que es considerado como verdadero.

En relación a este contexto, estos investigadores sostienen que "para los currículos, textos y profesores de matemáticas (…) en general, los teoremas matemáticos son necesariamente verdaderos. Pero las argumentaciones que establecen esa verdad son, en el mejor de los casos, argumentaciones deductivas informales y con frecuencia argumentaciones no deductivas o incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad". (Godino & Recio, 2001, pág. 410)

Godino y Recio sugieren que en general en la clase de matemáticas predominan las argumentaciones no analíticas, pero apuntan que estas formas juegan un papel importante en las etapas de búsqueda y formulación de conjeturas en la resolución de problemas, algo muy parecido a lo que sucede con el matemático profesional cuando en las fases de creación de soluciones puede argumentar usando analogías e inducciones empíricas. Por ello resulta importante reconocer que la comprensión y el dominio de la argumentación por parte de los estudiantes está mediada por la experiencia en cómo viven la argumentación dentro de los contextos sociales y culturales habituales para ellos, de modo que el progreso hacia argumentaciones axiomático-deductivas implica el desarrollo de una racionalidad y un estado específico de los conocimientos y hay que admitir que la construcción de esta racionalidad "…es un proceso progresivo que requiere tiempo, así como adaptaciones (…) del objeto prueba (…) en los distintos niveles de enseñanza*".* (Godino & Recio, 2001, pág. 412). De ello se desprende la importancia concedida al análisis de las argumentaciones que buscan explicar el cómo y por qué de un resultado o procedimiento al resolver un problema en la clase de matemáticas porque al reconocer en la práctica y no sólo en el discurso la importancia que se da a la validación es que los estudiantes pueden ir adquiriendo confianza en sus argumentos a la vez que los van precisando al darse cuenta cómo deben ser expresados para que los otros interpreten lo que mismo que quien lo dice.

III.3. Los esquemas de prueba de Harel y Sowder

Hasta el momento se han citado importantes conceptualizaciones que refuerzan la necesidad de ocuparse del estudio de las formas de razonamiento de los estudiantes al aprender matemáticas y dado que se considera que dicho estudio debe ocurrir de manera sistematizada se vuelve necesario partir de un modelo pertinente para estructurar el mismo. En este trabajo, en particular, los análisis y clasificación de las respuestas que los estudiantes dieron a los problemas propuestos se realizaron tomando como base la categorización que realizan Harel y Sowder sobre los esquemas de prueba individuales. Ellos han determinado tal categorización a partir de extensas observaciones realizadas de secuencias de experimentos de enseñanza con estudiantes en diferentes áreas de las matemáticas. Determinaron a partir de las numerosas pruebas con alumnos un marco teórico para analizar las formas de pensamiento asociadas a la demostración que usan los sujetos para convencer de la certeza y validez de algo a partir de las representaciones mentales que poseen.

Harel y Sowder han relacionado la demostración con la idea de *justificación*, considerando una demostración como justificación de la verdad de una conjetura, en un proceso que implica dos aspectos: *convencimiento o determinación* entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo) *y la persuasión* como el proceso de remover las dudas de otros acerca de la verdad de una aserción (convencer a los demás) (Harel, 2007). Con ello introdujeron la idea de esquema de demostración individual llamado *esquema de prueba,* y lo definen como "todo lo que significa convencimiento y persuasión para esa persona".

Resulta importante considerar, tal como ellos mismos indican, que los procesos de convencimiento y persuasión no son independientes sino que ocurre entre éstos un proceso dialéctico, pues al momento de convencerse uno mismo puede estar considerando formas de cómo persuadir a otros y en el proceso de persuadir a los otros nuestra propia certeza llega a modificarse. (Harel, 2007)

Llegaron a plantear una taxonomía que distingue estos esquemas de demostración y han agrupado en tres grandes conjuntos los elementos argumentativos que las personas usan para defender una postura. La identificación de cada esquema de prueba depende, según sus conclusiones, del origen de dicho esquema.

Se resume enseguida la categorización de los esquemas:

1) **Esquemas de pruebas por convicción externa:** son aquellos que se presentan cuando las afirmaciones se apoyan en elementos ajenos al sujeto y se organizan en tres subcategorías:
   - ***Esquema de prueba autoritario***: Se sustentan en una autoridad como el profesor o el libro de texto.

   - ***Esquema de prueba ritual:*** Se basan estrictamente en la apariencia del argumento. El ritual de la presentación hecha por la autoridad (el profesor, un libro, un experto) es en este tipo de esquemas lo que convence a alguien y le sirve para despejar sus dudas.

- **E*squema de prueba simbólico no referencial:*** Se apoya en manipulaciones simbólicas donde los símbolos o las manipulaciones no poseen un sistema coherente de referentes a los ojos del estudiante.

2) **Los esquemas de prueba empíricos** son aquellos desde los cuales las conjeturas se aceptan o rechazan en virtud de experiencias sensoriales. De acuerdo al énfasis que aparezca en las mismas, pueden ser:
   - ***Esquema de prueba inductivo:*** Basado en la evidencia de ejemplos, de mediciones directas, de cantidades, sustitución de números específicos en expresiones algebraicas, etc.
   - ***Esquema de prueba perceptual:*** Sustentado en percepciones visuales.

3) **Los esquemas de prueba deductivos,** constituidos a su vez por dos subcategorías:
   - ***Esquema de prueba transformacional*** con tres características esenciales: la de poseer **generalidad** (cuando la meta que se persigue es justificar mediante un argumento que resulte válido para todos los casos y no se aceptan excepciones), **pensamiento operacional** (que se manifiesta cuando un individuo concibe metas o submetas intentando anticipar resultados durante el proceso de la demostración), e **inferencia lógica** (cuando el individuo comprende que la justificación en matemáticas debe estar basada en última instancia sobre reglas lógicas de inferencia). La transformación de imágenes ocurre por medio de las deducciones lógicas, a diferencia de las relaciones observadas inductiva o perceptualmente, consideradas como estáticas. Las operaciones de

trasformación se realizan o pueden realizarse de manera intencionada y prever sus efectos.

- ***El Esquema de prueba axiomático*** que posee las tres características anteriores pero también incluye el atributo de que el individuo comprende que cualquier proceso de demostración debe empezar desde términos ya definidos y aceptados (axiomas), y las entidades a las cuales se aplican son parte de la realidad matemática de uno (Harel, 2007). Si los axiomas responden a la pura intuición de la persona entonces se trata de un esquema intuitivo axiomático, pero cuando se piensa en las conjeturas como representaciones generales en diferentes modelos que comparten una estructura matemática común se reconoce un esquema axiomático estructural.

La conceptualización de Harel y Sowder se realiza desde las demostraciones matemáticas y aunque aquí no se trabaja con dichas demostraciones consideramos que éstas cumplen características de problema como el hecho de llegar a un resultado mediante deducciones y razonamientos que convencen a quienes conocen el tema, es decir, lo que para una comunidad es verdad.

Enfaticemos que Harel y Sowder agrupan en tres grandes conjuntos los elementos argumentativos que las personas usan para defender una postura y en función del origen de tales unidades de convencimiento es que se refieren a un determinado tipo de esquema de prueba. Es por ello que podemos inscribir el estudio de la argumentación ante la resolución de un problema desde sus aportes teóricos, reconociendo que las explicaciones que los sujetos dan a sus procedimientos y respuestas de los problemas están determinadas precisamente por los esquemas de prueba que utilizan para la justificación de lo que hacen.

Además para considerar que el trabajo con demostraciones tiene características similares a lo que ocurre en los procesos de validación durante la resolución de problemas se acepta la posibilidad de continuidad cognitiva que va de la argumentación a la demostración así como la no garantía de que esto ocurra de manera natural, sino a través del desarrollo de actividades que permitan a los estudiantes la formulación de conjeturas y realizar una sistematización o demostración de las mismas, sea a través de un convencimiento intuitivo, de una argumentación o de una exploración (Larios, 2006).

Cabe también señalar que la taxonomía de esquemas de prueba de Harel y Sowder ya ha sido utilizada en investigaciones relacionadas con la resolución de problemas. Ibañes y Ortega (2005), por ejemplo, reconocen que al ocuparse del estudio del papel que juega la demostración en la clase de matemáticas y todos los conceptos y problemáticas relacionadas con ello, lo que se encuentra en la base son los esquemas de prueba de los estudiantes, entendidos estos en los términos que lo plantean Harel y Sowder, como aquello que significa convencimiento y persuasión para una persona.

III.4. El concepto de argumentación en este trabajo

Interpretando la argumentación como un proceso de elaboración de explicaciones para convencer de la validez de una proposición, tomaremos aquí como argumento el encadenamiento de razonamientos dados por los alumnos para explicar la validez de sus respuestas y procedimientos seguidos para darle solución a un problema propuesto en la clase de matemáticas. Después de todo, el valor que los alumnos conceden a la demostración es el que se relaciona con su poder explicativo (Ibañes & Ortega, 2005).

En la enseñanza de la demostración se ubican los argumentos del estudiante como punto de partida para "conducirlo a una situación paradójica en la que se verá obligado a ponerlos nuevamente en tela de juicio…hacer que se tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales", se trata de "…crear las condiciones para que el desenlace quede bajo la responsabilidad de los estudiantes" (Balacheff, 2000, pág. 5).

El reconocimiento de las formas incipientes en que ocurre el aprendizaje de la justificación o validación y la necesidad de que sea objeto de enseñanza en la clase de matemáticas es un común denominador en los trabajos de los autores hasta aquí citados. Por ello la importancia de estudiar en esta investigación de qué formas y con base a qué los estudiantes formulan sus argumentos ante la resolución de un problema matemático.

Una de las más reconocidas estrategias para propiciar la argumentación encaminada hacia la demostración deductiva es sin duda la resolución de problemas pero no de cualesquiera problemas, sino de problemas escogidos cuidadosamente en los cuales la consigna sea argumentar las soluciones y procedimientos para llegar a ellas.

Esto conduce a revisar qué es la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

III.5. Resolución de problemas

La resolución de problemas como estrategia didáctica cobra importancia a partir de la segunda mitad del siglo pasado.

Los investigadores del aprendizaje de las matemáticas reconocieron de manera abierta que la dificultad o facilidad del aprendizaje no podía ser explicada considerando únicamente la complejidad del material, sino que era necesario considerar otros factores para explicar los éxitos y errores en el camino del aprendizaje. Hasta ese momento el conductismo había presentado un punto de vista externo muy simple y era necesaria una teoría psicológica más compleja, que explicara no solo los comportamientos sino la experiencia de aprendizaje. (Confrey & Kazak, 2006).

Si el problema radicaba en encontrar múltiples factores implicados en el aprendizaje había que centrarse, entre otras cosas, en buscar explicaciones relativas al cómo se aprende, y de forma particular cómo se aprende matemáticas.

Como resultado de esa búsqueda se llegó a reconocer, principalmente, al constructivismo como teoría de la adquisición del conocimiento, y las propuestas socioculturales como corrientes vitales en la búsqueda de dar valor a aspectos cognoscitivos, psicológicos (afectivos) y sociales como variables en el aprendizaje escolar en general y de manera específica en el aprendizaje de las matemáticas.

Confrey y Kazak (2006) rastrean el origen del constructivismo en tres tradiciones que de alguna manera se habían insertado en las prácticas educativas: La resolución de problemas, la consideración de los obstáculos epistemológicos para el aprendizaje y las teorías del desarrollo cognitivo. Las tres con la característica común de que consideran que para explicar, predecir y facilitar el aprendizaje de las matemáticas es necesario algo más que comprender la lógica formal que como cuerpo de conocimiento estructurado implican.

Creció el interés de los investigadores por analizar el razonamiento de los niños y entender la riqueza de las estrategias de los estudiantes y fue así que el constructivismo se arraigó en la práctica educativa enfocándose a los alcances y recursos que los niños ponían en las tareas e involucrándolos activa y participativamente de acuerdo a los principios teóricos de que el conocimiento se construye a través de las acciones del sujeto cognoscente en relación con el objeto que busca conocer.

Luego, "…*el individuo que aprende matemáticas, desde un punto de vista constructivista, debe precisamente construir los conceptos a través de la interacción que tiene con los objetos y con los otros sujetos*." (Larios, 1998)

Desde una perspectiva constructivista no existe entonces objeto de enseñanza sino objeto de aprendizaje. Y en la búsqueda de formas que expliquen cómo se genera el conocimiento matemático repunta la resolución de problemas como estrategia que busca generar la construcción de conocimiento en los sujetos que los resuelven. Esta afirmación tiene su fundamento en la verdad reconocida de que la resolución de problemas es la que ha conducido la evolución del conocimiento matemático ante las necesidades que la humanidad ha ido resolviendo como retos de sobrevivencia y aculturación.

Bajo estas premisas se apostó por una orientación didáctica que contempla la resolución de problemas como herramienta fuerte para propiciar la generación de nuevos conocimientos por parte de los sujetos que los resuelven y a partir del trabajo de George Polya (1957) se desarrollaron importantes propuestas al respecto.[2]

En este estudio reconocemos en la resolución de problemas una de las propuestas a través de las cuales se busca que el sujeto interactúe activamente con otros y con el objeto del conocimiento para adquirir nuevos saberes a partir de todos los recursos con que cuenta y que desarrolle habilidades que le permitan validar ese nuevo conocimiento. Esa interacción ocurre en un proceso dialéctico entre el sujeto consigo mismo y con el objeto de conocimiento, ya que las acciones externas modifican sus estructuras mentales y la reestructuración de éstas lo lleva a acercarse de otra forma al objeto.

Para la caracterización de la resolución de problemas como propuesta didáctica nos centraremos en las ideas de Alan Schoenfeld y solo como referencia de éste citaremos brevemente en qué consiste la propuesta de George Polya, ya que es a partir del estudio de su trabajo que Schoenfeld se interesa por investigar qué pasa en la mente humana durante la actividad de resolución de problemas.

III.5.1. Concepto de problema

Blanca Parra establece que "un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata". (Parra, 1990)

[2] (Véase por ejemplo Garofalo y Lester, 1985; Goldin y Gennain, 1983; Shoenfeld, 1985).

Tomando la definición de A. Labarrere "Un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa o inmediatamente a la persona". (Labarrere, 1992).

Entendemos entonces que un problema es toda situación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar. Y desde esta concepción es comprensible que un planteamiento resulte ser un problema para algunos sujetos pero no para otros, ya que demandará un nivel distinto de esfuerzo cognoscitivo. La teoría sociocultural de Vigotsky explica esto mediante el concepto de Zona de Desarrollo Próximo(ZDP) definida como la distancia entre la capacidad del niño para resolver un problema de manera independiente y el nivel de desarrollo potencial determinado por su capacidad para resolver el problema bajo la guía de un adulto o en colaboración de compañeros más capaces. (Ursini, Escareño, Montes, & Trigueros, 2005).

En el caso específico de problemas matemáticos han sido varios los autores que han desarrollado modelos cuya función es analizar, describir, explicar o ejemplificar el proceso que los individuos siguen para resolver un problema y en el que se representa la secuencia de pasos que se dan para que el proceso resulte satisfactorio.

Alan Schoenfeld ha situado su análisis bajo un enfoque cognitivo sobre la resolución de problemas. Señala que para entender el proceso usado por quienes resuelven problemas matemáticos en el campo escolar, resulta necesario tomar en cuenta, a la matemática como disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar. Revisemos en qué consiste su modelo de resolución de problemas como recurso didáctico para la clase de matemáticas, y cómo se encadena con el de su antecesor G. Polya.

III.5.2. Modelos de resolución de problemas

III.5.2.1. Modelo de George Polya

La posición de Polya respecto a la resolución de problemas se basa en una perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, este autor plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que utilizamos en cualquier campo de la vida diaria. (Alfaro, 2006). Polya se cuestionó los métodos que existían para resolver problemas y llegó a plantear su método consistente en cuatro pasos bien definidos, a saber:

1) **Comprender el problema**: Esta es la etapa para determinar la incógnita, los datos, y las condiciones del problema. Y las preguntas que nos auxilian para ello, son ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Es redundante?, ¿Es contradictoria?

2) **Concebir un plan:** Una vez que se comprende el problema se debe pensar en un camino o procedimiento para resolverlo. En esta etapa del plan el problema debe relacionarse con problemas semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles, y se debe determinar si se pueden usar problemas similares. Algunas interrogantes útiles en esta etapa son: ¿Se ha encontrado con un problema semejante?, ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce un problema relacionado?, ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?

3) **Ejecución del plan :** En esta etapa es importante examinar todos los detalles y darse cuenta de la diferencia entre percibir que un paso es correcto y demostrar que efectivamente lo sea. Esta es la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar. Desde el planteamiento de Polya se debe hacer un uso intensivo de esta serie de preguntas en cada momento ya que van dirigidas sobre todo a lo que él llama problema por resolver y no tanto los problemas por demostrar ¿Puedo ver claramente que el paso es correcto?, ¿Puedo demostrarlo? Cuando se tienen problemas por demostrar, entonces, cambia un poco el sentido, ya no se habla de datos sino de hipótesis. En realidad, el trabajo de Polya es fundamentalmente orientado hacia los problemas por resolver en los cuales al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

4) Etapa de la visión retrospectiva, en la cual es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo, verificar el resultado y el razonamiento seguido. Se trata de preguntarnos: ¿Puedo verificar el resultado?, ¿Puedo verificar el razonamiento?, ¿Puedo obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puedo emplear el resultado o el método en algún otro problema?, etc.

Polya plantea que cuando se resuelve un problema se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera. En esta etapa también se contempla la posibilidad de verificar si se pueden hallar estrategias alternativas de solución para el mismo problema.

III.5.2.2. Modelo de Alan Schoenfeld

Alan Schoenfeld(1985) enriquece el modelo de G. Polya ya que con éste como base se cuestiona, diseña y ejecuta proyectos de investigación con alumnos y maestros buscando caracterizar la resolución de problemas para un contexto muy específico, la clase de matemáticas; analizar sus componentes y las posibles formas de intervención para poder utilizar la resolución de problemas como recurso que mejorará la adquisición de conocimientos y habilidades matemáticas. Concluye que en el proceso de resolver un problema los sujetos ponen en juego distintos elementos. Sus resultados son el componente que de alguna manera acrecienta el modelo de su antecesor ya que G. Polya no realizó estudios experimentales sino que escribió lo que él consideraba que era el camino hacia la efectiva resolución y planteamiento de problemas.

Como producto de sus experimentos, Alan Schoenfeld formuló algunas conclusiones que hay que tener en cuenta cuando se trabaje con la resolución de problemas como estrategia didáctica. Considera que al momento de resolver problemas hay que tener en cuenta los recursos, las heurísticas, el control y los sistemas de creencias.

Bajo el término de **recursos** agrupa los conocimientos previos como conceptos, fórmulas y algoritmos con los que cuenta el sujeto al momento de enfrentarse a un problema. Aborda el asunto de las *circunstancias estereotipadas* que tiene que ver con aquellas respuestas que ocurren casi de forma automática aún cuando su ejecución puede tener algún alto grado de complejidad pero tienen un algoritmo a seguir; por ejemplo, la determinación de un valor máximo en una función. Y algo importante por considerar también son los *recursos defectuosos* refiriéndose con esto a aquello que el estudiante cree saber pero son conocimientos mal aprendidos; fórmulas, procedimientos erróneos, etc y los aplica creyendo que resolverá la situación pero no corresponden.

En referencia a **las heurísticas** señala que cada problema implica heurísticas particulares y que no pueden ser implementadas de forma general tal como lo propuso G. Polya, sino que habría que conocerlas, saber cómo usarlas y tener la habilidad para hacerlo.

Para este autor, **control** se refiere a todo aquello que una persona hace para monitorear su proceso de solución, cómo elige una o varias estrategias, cómo revisa que lo lleven a la solución y cómo prueba otros caminos al darse cuenta que lo que creía lo más conveniente resultó inútil para conseguir su objetivo.

Schoenfeld propone algunas actividades concretas que pueden propiciar el desarrollo de habilidades para el control:

"…tomar las equivocaciones como modelo,… discutir las soluciones con todo el grupo para que cada uno aporte ideas, … cerciorarse que los estudiantes entiendan el vocabulario usado en la redacción del problema; hacer preguntas orientadoras y evaluar los métodos sugeridos por los estudiantes, …que se resuelvan problemas en pequeños grupos*…"* (Barrantes, 2006)

Otro elemento a tomar en cuenta son **las creencias** que las personas tienen sobre las matemáticas, pues estas mediarán de modo importante la forma en que los estudiantes y maestros se comporten a la hora de enfrentarse a un problema.

El tipo de creencia que Schoenfeld enfoca más es aquel sobre cómo perciben el estudiante y los profesores o los matemáticos **el asunto de la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema**[3]. Para el matemático esto es una herramienta más; la argumentación y el razonamiento formal le sirven para descubrir soluciones, pero "… *en todos los experimentos que él hizo [sic] a ningún estudiante se le ocurrió utilizar la parte formal para encontrar la solución a un problema; todos enfocaban el proceso por la vía empírica, haciendo ensayos, viendo qué pasaba"* (Barrantes, 2006).

Dice Schoenfeld que para el estudiante la argumentación matemática solo se puede usar en dos circunstancias:

Para confirmar algo que es intuitivamente obvio y en cuyo caso la prueba parece redundante o superflua; o bien, para verificar algo que ya es cierto porque lo dice el profesor, algo que no es tan obvio pero que el profesor dice que es cierto.

Se puede decir que la argumentación, según los estudiantes, no sirve; en un caso ya es obvio, y en el otro ya alguien, en cuya autoridad y conocimiento confían, lo sabe ¿para qué lo van a demostrar ellos?

Muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas están determinados por las creencias de los estudiantes. "…*pueden creer que la matemática es solamente una serie de reglas que simplemente van a memorizar. O pueden creer que la matemática es elaboración de conceptos, establecimiento de relaciones, patrones; en este caso, entonces, probablemente van a tratar de comprenderla pues creen que tal comprensión les va a ser útil"* (Barrantes, 2006)

Las creencias se adquieren con la experiencia, con lo que se ve, se escucha y se hace con las matemáticas. Se transmiten de manera implícita en las prácticas escolares o de forma explícita en el discurso y la práctica.

Algunas de las creencias que Schoenfeld identifica en los estudiantes, son:

- Los problemas matemáticos tienen una y solo una respuesta correcta.

---

[3] Énfasis añadido.

- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor da en clase.
- Los estudiantes corrientes no pueden esperar entender matemáticas, simplemente esperan memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente.
- Las matemáticas son una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas podrán resolver cualquier problema que se les asigne en cinco minutos o menos.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tiene poco o nada que ver con el mundo real.

III.5.3. El proceso de validación en la resolución de problemas

En los modelos antes descritos sobre resolución de problemas está contenido siempre un proceso de validación de la comprensión y resolución de los mismos, el cual puede realizarse de diversas maneras por quien resuelve el problema y ha de servirle para convencerse y convencer a otros de la validez tanto de sus resultados como de los procedimientos seguidos y conclusiones a las que llega.

En este trabajo el componente de validación dentro del proceso de resolver problemas es en el que recae nuestra atención ya que es donde ubicamos la argumentación con el sentido y la importancia que hemos descrito.

Desde los modelos de resolución de problemas que hemos citado la validación se ubica cómo una visión retrospectiva o de monitoreo en la cual es importante verificar resultados y procedimientos seguidos; cómo elegir una o varias estrategias, preguntarse qué fue lo que hizo y si hay una mejor manera de realizarlo.

Consideremos aquí que todo aquello que la persona hace para autorregular sus razonamientos durante la resolución de un problema forma parte de un proceso de validación, ya que a partir del reconocimiento personal de la validez de los procedimientos y respuestas es que se puede argumentar ante terceros. Y admitiendo que el estudiante puede validar de alguna forma lo que hace, el por qué, cómo y para qué de sus procedimientos así como la pertinencia de sus resultados al resolver un problema de matemáticas es que se le piden argumentos tendientes a la validación. Tales argumentos son los que hemos tipificado aquí a la luz de la teoría expuesta porque sabemos que las argumentaciones de los alumnos, sea cual sea su forma y origen, informales y con frecuencia no deductivas e incluso basadas en criterios externos de autoridad, merecen ser atendidas para plantear a partir de su estudio, estrategias que favorezcan el desarrollo de habilidades argumentativas en el contexto de la clase de matemáticas.

IV. METODOLOGÍA

IV.1. El paradigma

Esta investigación, planteada como estudio de casos**,** se inscribe en el modelo cualitativo considerado como un método de investigación interpretativo que permite la explicación causal, a partir de la observación y el análisis sistemáticos, generalmente de hechos sociales.

Algunas características básicas de la metodología cualitativa son:

- No tiene reglas de procedimiento
- Es recursiva porque el problema inicial se va reformulando según se requiera.
- Permite la categorización de acuerdo a la clasificación de los datos.
- Asume que la realidad social es construida por la participación en ella y es una realidad dinámica.
- Aplica una observación naturalista y sin control.
- Estudia las acciones humanas en situaciones naturales y realiza exploraciones intensivas de casos.
- Hace observaciones holistas de un contexto total cuando la acción social ocurre.
- Emplea la inducción, deducción para analizar los datos.
- Generaliza conclusiones a partir de casos buscando otros similares.
- Las investigaciones son exploratorias, inductivas y descriptivas. Se realizan inferencias a partir de la información así obtenida.
- El ordenamiento que implica una sistematización se realiza de acuerdo con ciertas categorías o criterios que pueden ser emergentes o preestablecidos. (Martínez, 2007)

Dentro del paradigma cualitativo se destaca la investigación mediante el estudio de casos, y es precisamente éste el que se ha elegido para dar un seguimiento analítico y sistemático al trabajo de algunas parejas de alumnos cuando resuelven problemas de geometría con lápiz y papel; específicamente al proceso de cómo argumentan, la forma en que dan cuenta del cómo y el por qué de los procesos que siguen para llegar a formular sus conclusiones y respuestas a los problemas planteados.

El estudio de casos sirve para explorar cómo unos cuantos ejemplares de una comunidad más amplia proceden ante una situación y en base a ello se pueden formular generalizaciones a partir de una realidad singular. Para este método de investigación es válido considerar que de alguna manera en la parte se encuentra el todo y se permite la posibilidad de conocer una comunidad a partir del conocimiento profundo de algunos de sus miembros. (Cohen & Manion, 2002)

Por otro lado, dentro de la investigación cualitativa se distingue el Método de Comparación Constante (MCC) cómo método de análisis que consiste en la comparación continua de los incidentes de los datos en la información recabada de las situaciones. Los datos se codifican y analizan con el fin de desarrollar conceptos, identificar propiedades, explorar las relaciones de unos con otros. Se empieza seleccionando varios casos que pueden compararse y contrastarse. Éstos son elegidos por su posible relevancia para el campo teórico que se pretende estudiar. Las diferencias entre los casos elegidos hacen posible la elaboración de los atributos de las categorías, la determinación de sus variantes y la delimitación de su alcance. (Martínez, 2007)

Aquí se ha aplicado el MCC para el análisis de los argumentos de los estudiantes que participaron en el experimento, tomando estos como **casos representativos** y buscar redescubrir la teoría que está implícita en la realidad estudiada.

En resumen, la investigación que se presenta es un estudio de la manera natural en que los estudiantes argumentan los procesos que siguen para resolver un problema y con ello la solución a la que llegan, se busca conocer el cómo en cada paso van validando y sosteniendo lo que hacen en dirección hacia una respuesta convincente y con base a qué justifican ésta.

Se determinó que la resolución a los problemas fuera realizada en parejas porque eso permite la interacción entre pares y con ello se da la oportunidad de observar los dos elementos que permiten expresar lo que para alguien representa la certeza y validez de algo: primero frente a mí mismo (convencimiento) y luego ante otros (persuasión). En este experimento el concepto de otros se personifica principalmente en el compañero con quien se resuelve el problema y de manera secundaria con la profesora, quien cuestionó de manera intencional algunas partes del argumento oral y escrito durante y después de la resolución. Al resolver entre dos personas un planteamiento surge la necesidad de discutir y aceptar el argumento más convincente desde la lógica del problema, de identificar y utilizar los conocimientos que se tienen relacionados con el problema, de elegir y probar estrategias. Ya se ha expuesto la necesidad de la socialización del conocimiento y de ahí la importancia de la interacción entre iguales para su consolidación.

IV.2. El diseño del experimento

El diseño de este proyecto se dividió en:

Selección de los problemas,

Prueba Piloto

Rediseño del planteamiento

Segunda Aplicación

Descripción y análisis de resultados

IV.2.1. Los problemas

Considerando el concepto de problema que se ha retomado para este trabajo, se buscaron problemas cuyo planteamiento permitiera a los alumnos encontrar una solución y justificarla argumentando cada paso realizado para llegar a la misma y que la argumentación para ambos procedimientos implicara el hacer referencia a las propiedades geométricas necesarias y suficientes en cada caso. Los problemas propuestos contienen nociones consideradas elementales para su nivel y por tanto era factible la argumentación en su función explicativa y de validación. Se consideraron problemas con los cuales los alumnos pudieran dar cuanta del cómo y por qué de sus procesos de solución. Son problemas que ofrecen la posibilidad de probar con ejemplos, formular conjeturas y probarlas para realizar justificaciones lógicas apoyándose en teoremas o proposiciones conocidas haciendo uso de su capacidad de generalización y simbolización.

Para asegurar la pertinencia de los problemas se aplicaron antes con estudiantes de características similares a los sujetos del experimento tal cómo se detalla más adelante, y se explica por qué uno de los planteamientos quedó fuera de la prueba. Tal como se apuntó en la descripción del problema el por qué se utilizaron problemas geométricos y no de otra índole (numéricos o algebraicos, por ejemplo) obedece a la benevolencia de la geometría para llegar de modo relativamente rápido a la formulación de argumentos, ya que su carácter visual facilita la experimentación como auxilio para la generalización y favorece con ello la confianza de los alumnos que resuelven los problemas. Históricamente la geometría fue el terreno sólido que permitió el surgimiento de la demostración y esta se construyó justo a partir de principios evidentes que nos entran por los ojos y que luego se someten a las pruebas de la razón.

En la descripción de cada uno de los problemas se señalan las propiedades implicadas en el mismo, a las que se esperaba hicieran referencia, se conjeturó sobre posibles dudas y también se apuntan las que en realidad tuvieron, así como las preguntas orientadoras dirigidas a ellos en el proceso de clarificar sus explicaciones.

La estructura lógica del enunciado de cada problema puede dar lugar a demostraciones de los tipos: de condición necesaria, de condición suficiente, de condición necesaria y suficiente. En ningún momento del trabajo se esperaron demostraciones desde el punto de vista matemático formal y riguroso, sino más bien en el sentido que lo plantean Godino y colaboradores de lo que es demostración en el contexto particular de la clase de matemáticas. Para ellos y para este trabajo lo más cercano a la demostración son las argumentaciones tendientes a explicar el cómo y por qué de algún hecho o actividad, consideradas éstas como formas incipientes y por demás necesarias en el camino hacia el desarrollo de las formas deductivas del pensamiento propias del conocimiento matemático.

Lo que se quiere ver es la situación “natural” referida a la forma en que argumentan los alumnos, explicar (al dar cuenta de) cómo llegan a la resolución de un problema del cual se pide hallar la solución pero también justificar el cómo se va llegando a ésta y por qué es válido lo que se hace durante el proceso de solución.

No se evalúa la clase de matemáticas sino que se busca poder elaborar conjeturas a partir de lo que pasa con algunos casos para analizar la argumentación oral y escrita de los estudiantes. Cabe señalar que los conocimientos implicados en los problemas se abordan en el curso de Matemáticas II, materia que los participantes habían cursado ya al momento del experimento.

La estructura de los problemas planteados es tal que demanda el uso de propiedades necesarias y suficientes para resolverlos, de modo que teóricamente permiten la posibilidad de argumentar tanto el cómo se llega a una solución como la pertinencia de la misma al ir relacionando los conceptos implicados en los mismos.

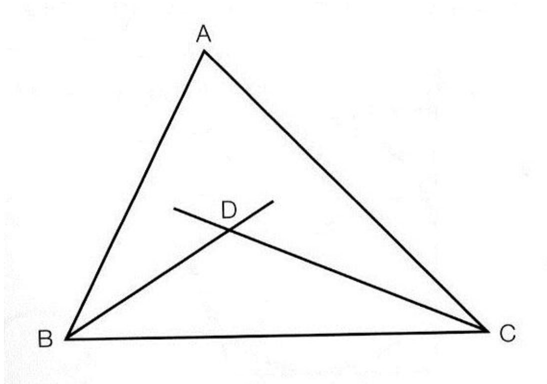
Enseguida se presentan y analizan los cuatro problemas aplicados en la prueba piloto para revisar en qué medida se cumplía esto y se explica luego por qué uno quedó fuera de la aplicación definitiva.

.

Los problemas 1 y 2 fueron extraídos de Berrondo-Agrell, Marie (2006). 100 Enigmas de geometría. México, México: Ediciones Ceac.

IV.2.1.1. Problema 1

En el triángulo ABC se han trazado las bisectrices por B y C cortándose en D. Si al ángulo BDC le restamos la mitad del ángulo A, ¿Qué quedó?



Es importante apuntar que se incluyó la figura en el planteamiento.

El propósito con este problema fue que los alumnos reconocieran como propiedades necesarias y suficientes las características de la bisectriz y que establezcan las relaciones adecuadas entre éstas y el teorema de la suma de ángulos internos del triángulo.

Para resolverlo habrían de recurrir al concepto de bisectriz como recta que biseca cada ángulo del triángulo y a partir de ello encadenar esta propiedad con las igualdades de la suma de 180º en los ángulos de los triángulos ABC y DBC y con ello se dieran cuenta que el ángulo BDC es igual a la suma de los ángulos $CBD + DCB + BAC$ porque $CBD = \frac{CBA}{2}$, $DCB = \frac{ACB}{2}$

Solución esperada

Para simplificar nombramos aquí a los ángulos con la literal del vértice, así $BDC = D$

Para el triángulo ABC se tiene que $A + B + C = 180°$

Y para el triángulo BDC: $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + D = 180^{o}$ y por tanto:

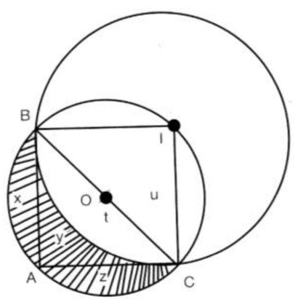
$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + D = A + B + C$$

Con lo cual $D = 180° - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ $y\ también$ $D = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$

$$D - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{A+B+C}{2} = 90°$$

IV.2.1.2. Problema 2

ABC es un triángulo rectángulo isósceles de $10cm^2$(ángulo recto en A). El círculo con centro en O es circunscrito al triángulo ABC. El círculo tangente al triángulo en B a AB y en $C\ a\ AC$, tiene centro en I. ¿Cuál es el área de la luna formada por la parte del círculo pequeño O que queda fuera del círculo grande I?



En este problema se involucran como propiedades necesarias y suficientes los conceptos de área de triángulo y de círculo, radio, tangencia y teorema de Pitágoras. Se planteó en la prueba piloto para revisar si llegaba a ser preferido por los alumnos sobre los otros tres problemas por tener datos numéricos.

Solución esperada:

$$\boldsymbol{\frac{a^2}{2} = 10}$$

$\boldsymbol{a = \sqrt{20} = BI = radio\ del\ círculo\ mayor}$ **(Círculo I)**

$\boldsymbol{BC = \sqrt{40}}$, $\boldsymbol{OC = \frac{\sqrt{40}}{2} = radio\ del\ círculo\ menor\ (Círculo\ O\ )}$

Área del círculo O

$$A_O = \frac{40\pi}{4} = 10\pi$$

Área del círculo I

$$A_I = 20\pi$$

Área de un cuadrado auxiliar inscrito en I con lado BC

$A_C = 40$

Y de esta forma, la sección circular comprendida por el arco BC y la cuerda BC, marcada como área "$\boldsymbol{t}$" en la figura queda determinada por:

$\boldsymbol{t} = \frac{20\pi-40}{4} = 5\pi - 10$ y entonces el área sombreada A_s se calcula al restar **t** a medio círculo O

$$A_s = \frac{A_O}{2} - t$$

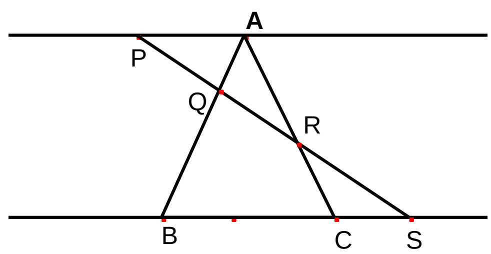
$$\boldsymbol{A_s} = \frac{10\pi}{2} - (5\pi - 10) = \mathbf{10}$$

Los dos siguientes son problemas tipo olimpiada, su resolución implica que se establezca la relación de conocimientos mediante una estrategia no necesariamente única, y sobre todo que se pueda explicar el por qué de la misma.

IV.2.1.3. Problema 3

(Extraído de Problemas para la 20ª olimpiada nacional, problema 38):

En la siguiente figura el triángulo ABC es un equilátero con lados de longitud 3 y PA es paralela a BC. Si $PQ = QR = RS$, la longitud de CS es:



En este problema el reconocimiento y elección adecuada de la pareja de triángulos semejantes $CSR\ y\ APR$ es necesaria aunque no suficiente para resolverlo, ya que para ello queda por establecer de manera correcta y conveniente las razones entre los lados de éstos.

Solución esperada:

El triángulo CSR es semejante al triangulo APR, porque:

$RAP = RCS$ (por ser ángulos alternos internos), y

$PRA\ = SRC$ (por ser opuestos por el vértice).

Con ello obtenemos que: $\frac{CS}{AP} = \frac{SR}{RP} = \frac{SR}{2SR} = \frac{1}{2}$, $\quad AP = 2CS$

Por otro lado, los triángulos $\Delta BQS \sim \Delta AQP$ (los ángulos $CBA\ y\ BAP$ son alternos internos y PQA con BQS opuestos por el vértice).

$$\frac{QS}{QP} = \frac{BS}{AP}$$

Pero $QS = 2QP, \quad BS = BC + CS \quad y \quad AP = 2CS$

$$\frac{2QP}{QP} = \frac{BC + CS}{2CS}$$

$$2 = \frac{3 + CS}{2CS}$$

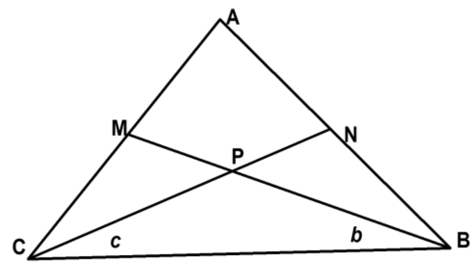
$$4CS = 3 + CS, \qquad \boldsymbol{CS = 1}$$

IV.2.1.4. Problema 4

(Del problemario 2000, problema 7):

4.- En la figura tenemos que $AC = AB$ y los ángulos $c = b$. Probar que

$MP = NP \ y \ AM = AN$.



Aquí también se tiene que identificar como parte necesaria y no por ello suficiente que los triángulos $ABC \ y \ PBC$ son isósceles

Solución esperada:

Con $b = c \ \ el \ \Delta CPB$ es isósceles con $CP = BP$ y por $AC = AB$ el ΔCPB es también isósceles. Con esto se tiene que los ángulos: $ACN = ABM$ y como también $NPB = MPC$ por ser opuestos por el vértice, el triángulo MCP es congruente al triángulo NBP.

Entonces $\boldsymbol{MP} = \boldsymbol{NP}$ y además $MC = NB$

Por otro lado A$M = AC - MC \quad y \ \ AN = AB - NB$

Pero $MC = NB \ \ y \ \ AC = AB$ y por tanto $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{AN}$

IV.3. Prueba piloto

En un primer momento del trabajo de campo, se aplicó el examen a manera de prueba piloto para estimar el tiempo requerido, evaluar si la redacción de los problemas era clara para los alumnos, revisar el nivel de dificultad de los problemas y ver si realmente eran problemas para los alumnos, si alguno(s) resultaban inaccesibles por alguna razón o bien si los consideraban simples y no alcanzaban a representar un reto; y de manera fundamental para valorar la potencialidad de los problemas en cuanto a posibilitar la argumentación de los estudiantes referida a los procesos que los van conduciendo a una respuesta.

IV.3.1. Los alumnos participantes y la aplicación

Se probaron los 4 problemas con 12 parejas de alumnos voluntarios de segundo y cuarto semestre de bachillerato en el plantel 16 del COBAQ para evaluar si realmente reunían las condiciones antes mencionadas. Los participantes en el experimento fueron 24 alumnos de edades comprendidas entre 16 y 17 años.

La formación de las parejas fue por afinidad por considerar que esto contribuye a que sus acciones y actitudes fueran lo más natural posible durante la resolución de los problemas.

La prueba se respondió fuera de la clase de matemáticas, por el tiempo requerido para el trabajo.

La indicación fue resolver de 1 a 2 de los problemas, esto para ver si había predilección sobre alguno(s) de ellos y en su caso analizar por qué.

IV.3.2. Resultados y observaciones de la prueba piloto

De la prueba piloto se extrajo la información general que se enuncia a continuación:

Tabla IVV-1. Observaciones generales (prueba piloto)

Pareja de Alumnos	Problema(s) que resolvieron o intentaron	OBSERVACIONES GENERALES
1P	1	Respuesta incorrecta, corta, sin explicación alguna
2P	4	Respuesta correcta, hay justificaciones casi

		completas a cada afirmación.
3P	2, 3	Respuesta correcta para el problema 2, explicación clara. Intentos en el problema 3 y sin justificación alguna (dijeron que quizá con más tiempo terminarían este pero que de momento no sabían que más hacer ni cómo)
4P	1, 3	Respuestas incorrectas, argumentos no validados, conjeturas erróneas.
5P	2,3,4	2 y 4: Respuesta correcta, explicación amplia. 3: Respuesta incorrecta, construcciones auxiliares incorrectas, argumentos breves e incorrectos.
6P	1	Respuesta correcta, explicación breve.
7P	1	Respuesta correcta, explicación breve.
8P	2	Respuesta correcta, explican detalladamente
9P	2	Respuesta correcta, explican detalladamente
10P	3	Usan construcciones auxiliares, toman medidas sobre la figura. No llegaron a la respuesta, Explicación confusa.
11P	3	No llegan a la respuesta, explicación general, mencionan semejanzas que no justifican del todo.
12P	2, 4	Confusión de conceptos de semejanza-congruencia, Respuesta correcta, explicación escrita incompleta.

En la siguiente tabla se muestra el contraste entre las anotaciones previas a la aplicación, en la segunda y tercera columnas, con relación a las preguntas más destacadas que en realidad hicieron los alumnos durante la prueba piloto y la orientación que se les proporcionó.

Tabla IV-2. Preguntas hipotéticas vs reales (prueba piloto)

Problema	Propiedades necesarias	Posibles preguntas y dudas para resolverlo.	Preguntas que hicieron los alumnos (PA) y preguntas orientadoras (PO)
1	Bisectrices, teorema de ángulos internos del triángulo	¿Cuánto mide el ángulo A o el ángulo D?	PA: ¿Cómo sabemos la medida de cada ángulo? ¿Podemos poner cualquier medida para ver qué pasa? PO: Revisen si realmente se requiere la medida de los ángulos para responder a la exigencia… Analicen… Si ponen medidas, ¿cuántos triángulos probarán?
2	Área de triángulo y de círculo, radio, tangencia, teorema de Pitágoras.	¿Cómo se calcula el área de una “luna”? ¿Fórmulas para las áreas del cuadrado y círculo?, ¿Qué significa que la circunferencia grande sea tangente al triángulo en B y C?, ¿podemos dibujar más círculos, cuadrados y triángulos?	PA: ¿Podemos hacer otros trazos , verdad? Podemos? PO: Si te sirven hazlos.
3	Triángulo equilátero, teorema de Thales, semejanza	¿CS=CR?, ¿qué triángulos son iguales?, ¿Podemos hacer el dibujo real para resolver? ¿Qué condiciones cumplen los triángulos semejantes?, ¿Cómo se establece una razón de semejanza?	PA:¿Se hace con triángulos semejantes? PA:¿Podemos hacer más trazos? PO: ¿Quieren probar con semejanza?, ¿qué triángulos son semejantes
4	Igualdad de segmentos y de ángulos, Triángulo isósceles, semejanza y congruencia de triángulos.	¿Cuánto mide el segmento o ángulo tal? ¿Cuándo son semejantes y cuándo congruentes los triángulos?	No hubo preguntas. Dos de los intentos de resolución pusieron medidas a los segmentos y no llegaron a determinar la respuesta.

A partir del estudio piloto se anotó lo siguiente:

1) Se consideró conveniente destinar una hora por problema en promedio para realizar la explicación y aclaraciones en caso necesario, es decir, la solución completa a los planteamientos. Por ello se destinó un tiempo de 3 horas para resolver 3 problemas en la segunda aplicación.
2) En esta fase solo una pareja dijo haber elegido de principio el problema 2 porque el planteamiento incluye medidas en datos numéricos.
3) El único problema que pareció inaccesible a los alumnos fue el problema 3. Algunos estudiantes tuvieron idea de aplicar semejanza de triángulos pero no supieron cómo plantearla. Tomando esto como indicador de un dominio insuficiente del concepto de semejanza y de dificultades para reconocerlo en este problema, se descartó el mismo de la aplicación definitiva ya que el desconocimiento conceptual limita o impide la resolución del problema y la argumentación del por qué no lo pueden resolver.
4) Se hallaron 9 de 17 respuestas correctas pero la argumentación es breve y muy general, plantean conjeturas que no validan.
5) Los alumnos no piensan en casos generales en un primer momento al abordar un problema, empiezan intentando resolver con casos y hasta que se les hace dudar sí eso basta es que algunos de ellos intentan generalizar.
6) La argumentación que realizan es breve y muy general, aún cuando se trata de respuestas correctas al problema. Por ello en la segunda aplicación insistimos en la importancia de la argumentación de procesos y resultados como medio para exponer la validez de lo que hacemos. Con esto también confirmamos la necesidad de formular preguntas a los alumnos que los conduzcan a la verbalización o redacción de los argumentos con aquellas respuestas donde no incluyan explicaciones.
7) En la segunda aplicación se presentaron los otros tres planteamientos restantes con la consigna de resolver al menos dos pero procurando terminar los tres.

IV.4. La segunda aplicación

Con las modificaciones y ajustes derivados de las observaciones en la prueba piloto se rediseñó el experimento en detalles fundamentales como: Los participantes, el tiempo requerido, la redacción de uno de los problemas y la eliminación de otro, la puntualización de la demanda de argumentar, explicar procedimientos y resultados.

IV.4.1. Elección de participantes

Para la aplicación definitiva, de la cual se analizan a profundidad las respuestas, se eligió un grupo completo con un total de 44 alumnos de tercer semestre en el que no se conocían los problemas propuestos.

Se explicó a los alumnos en qué consistiría la actividad así como el propósito y trascendencia de la misma pidiéndoles seriedad en su participación. Se indicó fecha, espacio y horario para el trabajo.

Igual que en la prueba piloto los problemas se respondieron en pareja por las razones antes expuestas.

IV.4.2. Recopilación de datos.

Durante la aplicación se permitieron preguntas relativas a la clarificación del planteamiento, así como de conceptos, ya que el objetivo no fue ver cuántas matemáticas saben sino cómo utilizan el conocimiento que tienen ante situaciones que demandan su aplicación. Se realizaron algunas preguntas orientadoras durante la resolución para que ampliaran he hicieran precisiones en sus argumentos. Aquí, como en la prueba piloto emplearon aproximadamente 2 horas y media de las tres asignadas para la resolución de los problemas propuestos.

El principal material recopilado fueron las respuestas escritas por los alumnos y como material auxiliar algunas entrevistas no estructuradas orientadas a ampliar o aclarar argumentos sobre su respuesta y estrategia de solución para llegar a la misma. La información obtenida mediante la entrevista se recopiló en grabaciones de voz o de manera escrita y ésta se realizó en el momento de la resolución con los alumnos o inmediatamente después. Esto con los casos detectados como representativos. Por un lado con aquellos cuya respuesta apareció correcta pero la argumentación era escasa, por otro con los que requerían aclaraciones para continuar la resolución y también con quienes no llegaron a la respuesta, para buscar cuáles fueron sus obstáculos y tomar esto como parte importante de las conclusiones que derivaron de este experimento.

IV.4.3. Observaciones generales durante la aplicación

Tal como ocurrió a una pareja de estudiantes en la aplicación piloto, en esta ocasión hubo 5 parejas que no comprendieron los planteamientos, no consiguieron siquiera formular preguntas para comprender qué se pedía. Los problemas no estuvieron a su alcance, no significaron un reto, y no resolvieron ninguno. Es importante incluir esta observación porque es algo que probablemente ocurre en muchas aulas de matemáticas y se vuelve necesario plantear la necesidad de la intervención didáctica para manejar esta problemática.

La experiencia en el trabajo con grupos permite observar que en el trabajo por parejas o equipos más grandes resulta común ver un mayor conocimiento y liderazgo de un integrante de la pareja o equipo. En esta ocasión se percibió que ante tal situación pueden suceder dos cosas: o se conserva el interés y entusiasmo del otro compañero quien ve en ello una experiencia positiva y una oportunidad de enriquecer su conocimiento tal como ocurrió con las parejas 4P, 6P y 7P, o bien, termina por dejar prácticamente solo al que muestra mayor dominio y que sea éste quien termine de explicar y resolver.

La conducta que puede considerarse ideal en el trabajo colaborativo por parejas es como lo que sucedió con las parejas 5P, 8P, 9P, 13P, 17P, 18P quienes trabajaron de manera armónica y colaborativa, aportando sus conocimientos y estrategia de solución, explicando al compañero en caso necesario y tomando acuerdos sobre el cómo escribir las respuestas y argumentos.

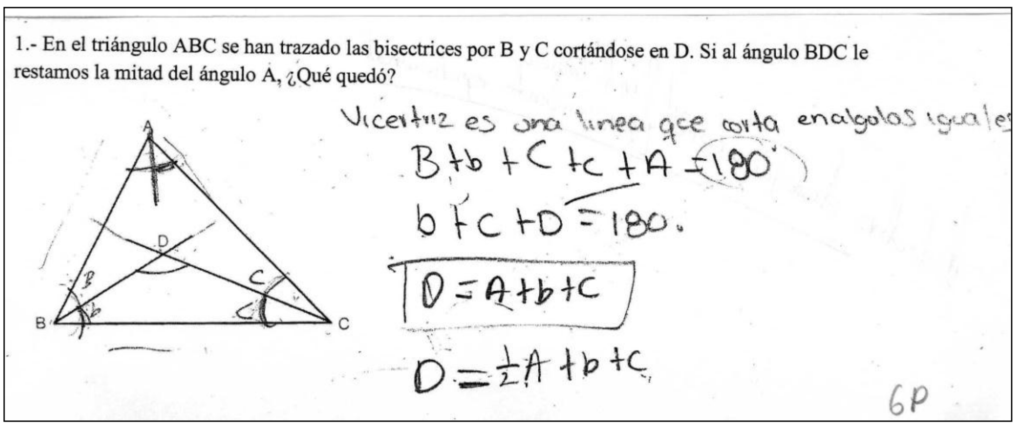
Algunos alumnos encuentran de manera natural compañeros con quienes trabajar en esta forma, pero es importante considerar que en muchos otros casos es necesaria la intervención didáctica intencionada para conseguirlo.

IV.4.3.1. El significado de la argumentación para los alumnos (el caso de la pareja 6P)

Se observó que de manera general los alumnos explican de manera muy escueta a menos que se exija la clarificación de su procedimiento o partes del mismo. Esto nos plantea una interrogante importante: ¿podemos atribuir esto al hecho de que durante su experiencia escolar los problemas les han sido presentados para hallar una respuesta y no para validarla, ni para convencer a otros ni a sí mismos? De manera implícita esperan que la validación la haga el profesor y ellos confían en lo que éste considera como verdad, en lo que él diga que está bien. Esta conducta denota la presencia de los esquemas de prueba por convicción externa en los estudiantes, donde lo que despeja sus dudas es el ritual de la presentación que hace el experto, en este caso el profesor.

Alan Schoenfeld en sus investigaciones encuentra también este fenómeno, lo señala como preocupante y va más allá al buscar la explicación del mismo en las creencias de estudiantes y maestros sobre lo que significa aprender matemáticas. Concluye que la argumentación se revela como un componente innecesario desde el punto de vista de los alumnos, sea por considerar que es evidente y no tiene caso “explicar, demostrar, argumentar” o bien porque hay alguien que ya lo sabe, el propio profesor que se lo está demandando, y no hayan sentido al hecho de justificar ni la respuesta ni el cómo llegaron a ella. La observación de este fenómeno es por demás relevante como resultado del experimento y por ello citamos un ejemplo representativo del mismo en el siguiente extracto de la entrevista aplicada a la pareja 6P, en la cual “Ao” indica respuesta de los alumnos, e Inv se refiere a nuestra intervención. Esto se hizo debido a la escasa explicación hallada en su resolución del problema 1, ya que cometen algunos errores en la representación simbólica que utilizan en el proceso de resolución y se buscó con la entrevista clarificar si el error era solo operacional o conceptual. Como puede verse en lo que dicen, la respuesta es correcta y llegaron a la misma mediante establecimiento de relaciones adecuadas conceptualmente, solo que con errores en las expresiones simbólicas y con escasez de argumentos para expresarlo verbalmente o por escrito. Sin embargo la introducción del simbolismo (usar letras minúsculas para referirse al ángulo cuya medida es la mitad del representado por la mayúscula correspondiente) indica que el dominio de los conceptos implicados les permite cierto nivel de generalización y lo que más se ve en esta respuesta es una falta de capacidad argumentativa, no falta de dominio de conceptos ni de estrategias para resolver el problema.

Ellos escribieron como respuesta:



Inv: Por qué $D = A + b + c$? y también $D = \frac{1}{2}A + b + c$?, ¿pueden cumplirse ambas igualdades?

Ao: Es que dice que se quita media $\boldsymbol{A}$

Inv: Entonces ¿Cuál es el valor del ángulo D?

Ao: El de $\boldsymbol{A + b + c}$, el primero que escribimos

Inv: ¿Y la otra igualdad?

Ao: Eso es lo que queda

Inv: ¿Lo que queda de A?

Ao: Sí, cuando quitamos la mitad de A al ángulo que se dice que se le quita:

Si al angulo bDC le restamos la mitad del angulo A seria igual a $D=\frac{1}{2}A+b+c$ (igual a 90°) si la suma de $A+B+C$ es = al 180°

Inv: ¿Por qué escriben otra vez $D = \frac{1}{2}A + b + c$?

Ao: Es lo que se busca, cuánto queda,

Inv: Entonces, ¿no se busca cuánto mide el ángulo D?, ¿Por qué ambas igualdades se refieren a D?

Ao: No, cuánto queda si al D le quitamos media A, por eso hay que saber cómo es D.

Inv: ¿Cómo representamos (escribimos) eso, lo que queda?

Ao: No sé, pero si $A + B + C = 180°$ y b es media B, c media C entonces la suma $\frac{1}{2}A + b + c$ es media A, media B y media C (los ángulos grandes), y eso tiene que ser 90º, lo que sobra es 90º; los ángulos grandes suman 180º.

Inv: ¿Seguros? ¿Por qué?

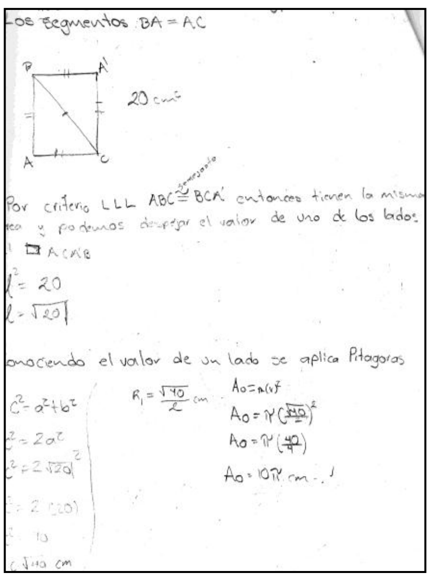
Ao: Sí, ya dijimos que están partidos a la mitad.

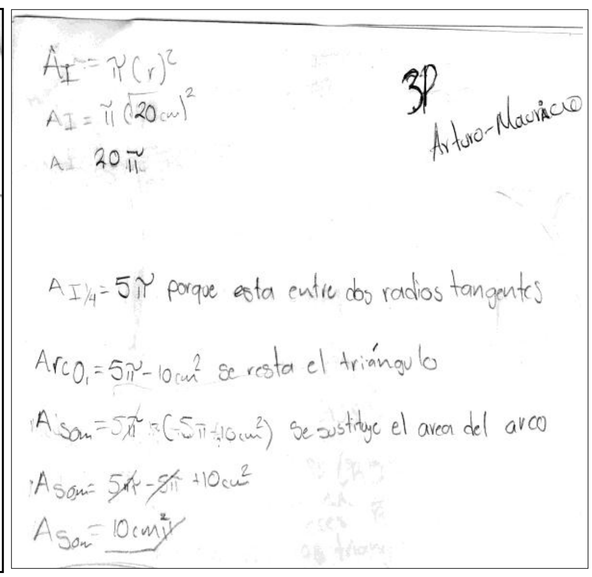
Inv: ¿Se les ocurre otra manera de probarlo?

Ao: no, creo… pensamos que está bien así.

Otro ejemplo de escasa validación de respuesta y argumentación del proceso lo encontramos en el trabajo de la pareja 3P al resolver el problema 2.

Aunque ellos representan a aquellos estudiantes que sin explicar ni hacer un relato extenso como sus compañeros que resolvieron el mismo problema, dejan clara su comprensión del problema y su resolución. No escriben explicaciones de cada subproceso que van realizando pero hacen las anotaciones concretas con una simbolización adecuada que les permiten establecer las relaciones que van descubriendo entre los datos de la figura mostrada. Al solicitarles una argumentación verbal y clarificación de la simbología utilizada se limitaron a leer lo que habían escrito, y pedir que se les dijera si “todo estaba bien”, porque ellos estaban seguros de su respuesta pero faltaba que la maestra diera su aprobación. Mencionaron que cuando está todo correcto se ve en la propia resolución y con ello dejan ver al menos dos de sus creencias al respecto: los problemas son para resolver, no para validar , y en todo caso “la validación la da el profesor”.





V. RESULTADOS Y ANÁLISIS

El análisis de las respuestas se hizo aquí considerando como formas de argumentación todos los intentos que los alumnos hicieron para explicar, verificar o justificar y convencerse a sí mismos, a su compañero y a la profesora de la veracidad de sus afirmaciones. Esto en correspondencia con lo que para este trabajo significa **argumento**.

Como ya se indicó en páginas anteriores, para la clasificación y estudio de las respuestas de los estudiantes se utilizaron las categorías propuestas por Harel y Sowder (1998). También se ha resaltado ya que no se pretende en este trabajo empatar argumentación y demostración. La investigación se dirigió a la primera desde su función explicativa para analizar cómo la utilizan los alumnos para el convencimiento de sí mismos y la exposición de su razonamiento ante la resolución de un problema matemático. Ello porque se considera importante alentar los intentos de los alumnos por justificar sus resultados, analizar sus aproximaciones al razonamiento deductivo propio del trabajo en matemáticas y se ha querido ver cómo asumen y entienden la explicación y justificación de lo que hacen en el proceso de solución de los problemas planteados.

Para presentar las soluciones, primero se muestra la organización de las mismas en un concentrado que señala de qué problema se trata, qué esquema(s) evidencia y qué pareja lo resolvió; luego aparece la descripción de las soluciones dadas por problema y los esquemas de prueba detectados en cada una, así como las observaciones que permiten tal clasificación. Posteriormente se expone el análisis de cada categoría de los esquemas de prueba mismo que se apoya con la exposición de algunos casos significativos haciendo inferencias y formulando las conclusiones pertinentes. En esta parte se hacen también algunas anotaciones sobre la función que para los alumnos puede tener la argumentación más allá del cumplimiento con la exigencia que se impone ante el planteamiento de un problema matemático con texto.

Se analizaron en total 19 respuestas, correspondientes al trabajo de 17 parejas de alumnos, de las cuales cinco corresponden al problema 1, ocho al problema 2 y seis al problema 4.

Tabla V-1. Concentración de relaciones entre respuestas y categorías de esquemas de prueba

CATEGORIA	SUBCATEGORÍA	PROBLEMA 1					PROBLEMA 2								PROBLEMA 4					
		4P	6P	7P	16P	17P	3P	5P	8P	9P	13P	14P	15P	19P	2P	5P	16P	18P	20P	21P
Esquemas de prueba por convicción externa	Autoritario																			
	Ritual	X																		
	Simbólico no referencial	X			X	X													X	X
Esquemas de prueba empíricos	Inductivo									X										
	Perceptual	X			X	X				X								X	X	X
Esquemas de prueba deductivos	Trasformacional		X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
	Axiomático						X								X	X	X			

V.1. Descripción de las categorías y análisis de datos por problema

Tabla V-2. Descripción de las categorías y análisis de datos del problema 1.

PAREJA QUE RESOLVIÓ	**ESQUEMA DE PRUEBA QUE SE EVIDENCIA**	**DATOS (información a partir de la cual se realiza la afirmación)**	**ANÁLISIS Y OBSERVACIONES**
1P	Ninguno	No resolvieron el problema. Dan una respuesta (intento de) sin argumentación alguna.	No comprendieron el planteamiento ni pudieron formular preguntas que les permitiera hacerlo. Se les invitó a recordar el concepto de bisectriz y el teorema de ángulos internos del triángulo y analizar si eso podría ayudarlas pero siguieron sin hacer algún procedimiento.
4P	De convicción externa (Prueba ritual, simbólico no referencial)	Quedan $\frac{3}{4}$ del ángulo D. El ángulo A es la mitad de D pues la medida de C y D aumentan al doble, lo que hace que D pase a ser el doble de A…	Hacen manipulaciones simbólicas sin utilizar unas referencias coherentes para las mismas. No llegan a la respuesta
6P	Deductivo (Transformacional)	$b+\ b+\ c+\ c+\ A\ = 180,$ $b+\ c+\ D = 180$ $D=\dfrac{1}{2}A+c+b$	La deducción correcta es: $D=A+c+b$ Llegan al resultado correcto pero fueron necesarias las aclaraciones para que argumentaran la respuesta… hay huecos en su explicación. Se observa el pensamiento operacional e inferencias lógicas.
7P	Deductivo (Transformacional)	Si b,b,c,c y A suman 180 y $B,c+D$ también suman 180 el cual nos dice que D es más grande ya que con menos ángulos D suma $180°$, nos queda una fórmula que es D=A+c+b Donde vamos a restarle la mitad de A y queda D=$\frac{1}{2}A+c+b$ = 90º porque la suma A,B,C es de 180º	Trabajaron con submetas, haciendo deducciones lógicas. La exposición de su procedimiento es incompleta porque no escriben todo el análisis de cómo llegan a los 90°. Establecen que $b=\frac{B}{2},\ \ c=\frac{C}{2}$ Realizan inferencias lógicas propias de este esquema de prueba cuando apuntan y el simbolismo que usan da cuenta de cierto nivel de generalización. $b+b+c+c+A=180°$ $b+c+D\ =180°$ y por tanto: $D=A+c+b$

16P	Empírico (Perceptual) De convicción externa (simbólico no referencial)	Renombran ángulos y establecen las igualdades $O = P,\ M = N$ $O + P = B$ $M + N = C$ Por lo que $x = M + N + \frac{A}{2}$	Al preguntarles por las primeras dos igualdades responden que los ángulos “se ven” iguales, no hacen referencia a las bisectrices. No llegaron a la respuesta
17P	Empírico (Perceptual); De convicción externa (simbólico no referencial)	Dicen que el ángulo $DBC = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + A$ Pero enseguida establecen erróneamente que $A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 180º$	No dan referencias de sus afirmaciones. Intentan explicar pero se confunden al tratar de argumentar, no tienen claro el por qué de sus operaciones. Escriben la respuesta correcta pero no completan un procedimiento lógico para llegar a la misma.

Tabla V-3. Descripción de las categorías y análisis de datos del problema 2.

PAREJA QUE RESOLVIÓ	**ESQUEMA DE PRUEBA QUE SE EVIDENCIA**	**DATOS (información a partir de la cual se realiza la afirmación)**	**ANÁLISIS Y OBSERVACIONES:**
3P	Deductivo • Transformacional • Axiomático	Radio del círculo $I =$ lado del cuadrado ABIC. Área del círculo I $A_O = 10\pi, \quad A_I = 20\pi$ Área entre arco BC y radios BI y CI es $\frac{1}{4}A_I = 5\pi$ porque está comprendida entre dos radios perpendiculares. ArCO(*Área entre el arco BC y la*	Se expresa el pensamiento operacional y el uso de inferencias lógicas a partir de propiedades geométricas en el establecimiento de submetas para calcular radios y áreas de los círculos, de segmentos circulares y finalmente el área sombreada. Se observan las tres características del esquema de prueba Deductivo transformacional (generalidad, pensamiento operacional e inferencias lógicas). Hacen sus análisis dejándolos escritos para retomarlos más tarde y solo realizar operaciones estrictamente necesarias.

		cuerda BC) $= 5\pi - 10cm^2$ se resta el triángulo BIC (*que es igual al triángulo* BAC) del cuarto de círculo grande. $A_{som} = 5\pi - (5\pi - 10cm^2)$ medio círculo chico menos el área del arco.	Muestran un buen dominio conceptual y operacional pero basan su proceso de validación en la propia resolución, que se explique por sí sola.
5P 8P	Deductivo • Transformacional	Al área del cuadrado $ABIC$ le restan un cuarto del círculo I para obtener la parte del área sombreada que está dentro del cuadrado. Al área del círculo menor le restan el área del cuadrado y determinan el área sombreada fuera del cuadrado. Suman las partes de área sombreada que han determinado.	Trabajaron resolviendo por etapas y luego relatan paso a paso cómo lo han hecho con lo cual denotan el pensamiento operacional y formulación de inferencias lógicas. No llegan a enunciar como generalidades las relaciones entre los lados del cuadrado, triángulos y circunferencias de la figura, trabajan con los datos numéricos que se dan. Es clara la creencia de que los problemas son para resolver no para validar. Se considera importante valorar este tipo de respuestas y mediante la socialización de las mismas al interior del aula de clase ir haciendo necesaria la discusión de resultados y procesos para validar lo que se ha hecho y la forma en que se realizó.
9P	Deductivo • Transformacional	Se evidencia el uso de submetas. Antes de hacer cálculos explican la división del área en 3 secciones; dos de ellas iguales: $\boldsymbol{x = z}$. Hallan el valor de éstas, luego el de la sección **y**, suman las tres y obtienen el resultado**.**	
12P	Deductivo • Transformacional	Hacen construcciones auxiliares. Calculan áreas por secciones y luego operan con ellas para determinar el área sombreada. No hay argumentación, solo enlistan las áreas parciales.	

13P	Deductivo (Transformacional)	…saqué el área del círculo pequeño…después el área del triángulo…Luego al área de este círculo le resto el cuadrado. Divido este resultado entre 4 porque sobran 4 partes como x, z. La luna está formada por 2 de estas 4 partes. Tomo dos de esas partes y le sumo lo del ángulo recto 90º	Realizan procedimientos por partes (submetas). Las operaciones que hacen tienen un propósito y lo señalan. Sus inferencias relativas al procedimiento general parecen seguir una secuencia lógica pero no reconocen la naturaleza de las magnitudes que se manejan, tanto que suman 90º como área (área “**y**” en la figura)
14P	Deductivo (Transformacional y axiomático)	Se observan claramente cálculos por separado, de: Lado del cuadrado, Radio y área del círculo pequeño, Área del círculo grande, Área del cuadrado, y Área del triángulo. Posteriormente operan relacionando estas áreas parciales correctamente para determinar el área sombreada.	Al calcular áreas parciales no retoman la que ya se da para el triángulo ABC sino que la determinan; aunque al redactar la explicación si retoman este dato. Realizan inferencias lógicas y establecen subprocesos para llegar al resultado. Usan correctamente los conceptos involucrados y axiomas sobre los mismos.
19P	Deductivo (Transformacional)	Mencionan que el radio del círculo grande es el lado del cuadrado. Calculan el área del círculo chico y le restan el cuadrado. Obtienen el área de las secciones x, z. Para hallar el área “y” restan al cuadrado un cuarto del círculo grande.	Encuentran la respuesta correcta mediante un procedimiento organizado por etapas. La explicación escrita les permite reorganizar el procedimiento. Utilizan adecuadamente los conceptos y propiedades involucrados en el planteamiento.

Tabla V-4. Descripción de las categorías y análisis de datos del problema 4.

PAREJA QUE RESOLVIÓ	ESQUEMA DE PRUEBA QUE SE EVIDENCIA	DATOS (información a partir de la cual se realiza la afirmación)	ANÁLISIS Y OBSERVACIONES:
2P	Deductivo (Transformacional y axiomático)	Como ABC es isósceles los ángulos B y C son iguales… Los triángulos $MPC\ y\ NPB$ son iguales por ALA. Con ello $CM = NB, CP = BP\ y\ MP = NP$.	Parten del hecho de que en un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales y realizan deducciones. Comprenden el concepto de congruencia aunque no usan el término para referirse al mismo. Realizan inferencias lógicas que los conducen al resultado esperado.
5P	Deductivo (Transformacional y axiomático	El triángulo ABC es isósceles y también el triángulo CPB. Los triángulos $CMP\ y\ BNP$ son idénticos debido a que sus lados $CP = PB$ ya que el ángulo $CPM = BPN$. Con esto podemos tener otros triángulos isósceles: $ANM\ y\ MPN$ con $MP = NP, AN = AM$ esto porque $CM = BN$ en el triángulo isósceles ABC y eso hace que $AM = AN$, además con los lados de los triangulitos idénticos $CMP = BNP, MP = NP$	Reconocen la congruencia de triángulos y la justifican parcialmente. Argumentan correctamente el por qué el triángulo ANM es isósceles, no así para MPN.
12P	Convicción externa (Simbólico no referencial) Empírico (Perceptual)	Establecen simbólicamente la congruencia entre los triángulos MPC con NPB y de MNA con ACB, mas no la sustentan.	Parece que establecen la congruencia entre los triángulos sólo a partir de la percepción visual. Intentan el manejo simbólico pero no sustentan tales afirmaciones. Confunden los conceptos de semejanza y congruencia. No llegan a la respuesta.
20P	De convicción externa:	Escriben, sin justificación lógica	Se observa que no comprendieron

	Simbólico no referencial	alguna, igualdades entre segmentos. Formulan deducciones no coherentes.	cómo empezar a probar las igualdades enunciadas en el planteamiento
18P	Empírico (Perceptual)	Dicen que NC y BM son bisectrices porque "ven" que divide los ángulos del triángulo ABC en 2 iguales. Los lados $AM = AN$ ya que $AB = AC$ y las bisectrices cortan a AB y AC en N y M respectivamente.	Es evidente que su intento por dar una explicación parte de la percepción visual, y al tratar de justificar la igualdad $AM = AN$ se evidencia que carecen de referencias. La falta de comprensión conceptual obstaculizó su resolución.
16P	Deductivo (Transformacional y axiomático)	ABC y CPB son isósceles. Los triángulos MCB y NBC son congruentes por ALA y con eso $NB = MC\dots$ Si ya dijimos que ABC es isósceles y las bisectrices cortan en M y N pedazos iguales de AC y AB entonces $AM = AN$	Atienden de manera completa la información del planteamiento. Justifican las igualdades de segmentos que van declarando durante el proceso. Llegan correctamente a la respuesta utilizando procesos intermedios y manejando axiomas adecuadamente.
21P	Empírico (Perceptual)	Establecen que $AM = AN$ porque ANM es equilátero.	No utilizan ninguna propiedad geométrica enunciada en el planteamiento o formulada a partir del mismo. La afirmación de que el triángulo es equilátero es meramente perceptual. No resuelven el problema porque no lo asumen como tal.

V.2. Esquemas de prueba evidenciados

V.2.1. Esquemas de prueba por convicción externa

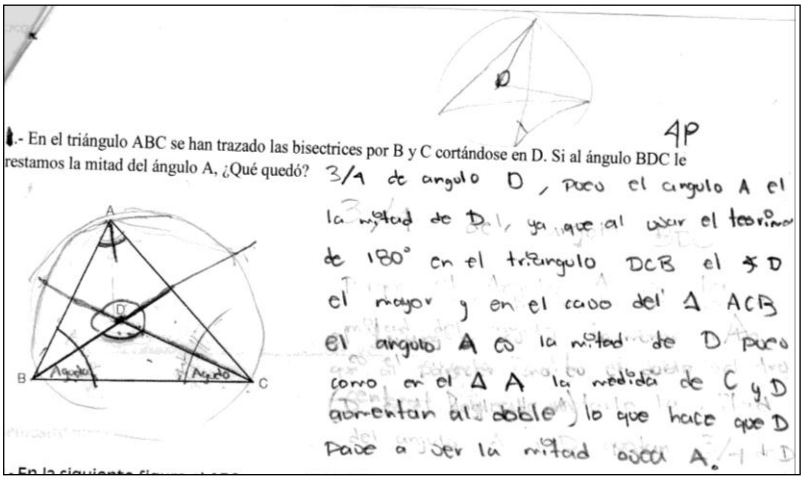
Resulta interesante la observación de que no es el esquema más detectado en las respuestas lo cual indica que los estudiantes del experimento asumen a cierto nivel la responsabilidad de justificación de sus conjeturas y estrategias aún cuando ya se dijo que sus argumentos son escuetos, éstos no se sustentan en la autoridad, al menos no es el esquema que más aparece. Sin embargo son 5 parejas que lo evidencian y todos en combinación con los esquemas empíricos, específicamente con el atributo de empírico perceptual. Resulta preocupante que diez alumnos de un total de 40 son quienes justificaron desde este esquema. Ellos toman como verdad lo que se les ha expuesto, aunque no lo comprendan y se auxilian en todo caso de la percepción de sus sentidos, “lo que veo es lo que es”. No trascienden esquemas sensoriales y de autoridad externa.

V.2.2. Esquemas de prueba empíricos

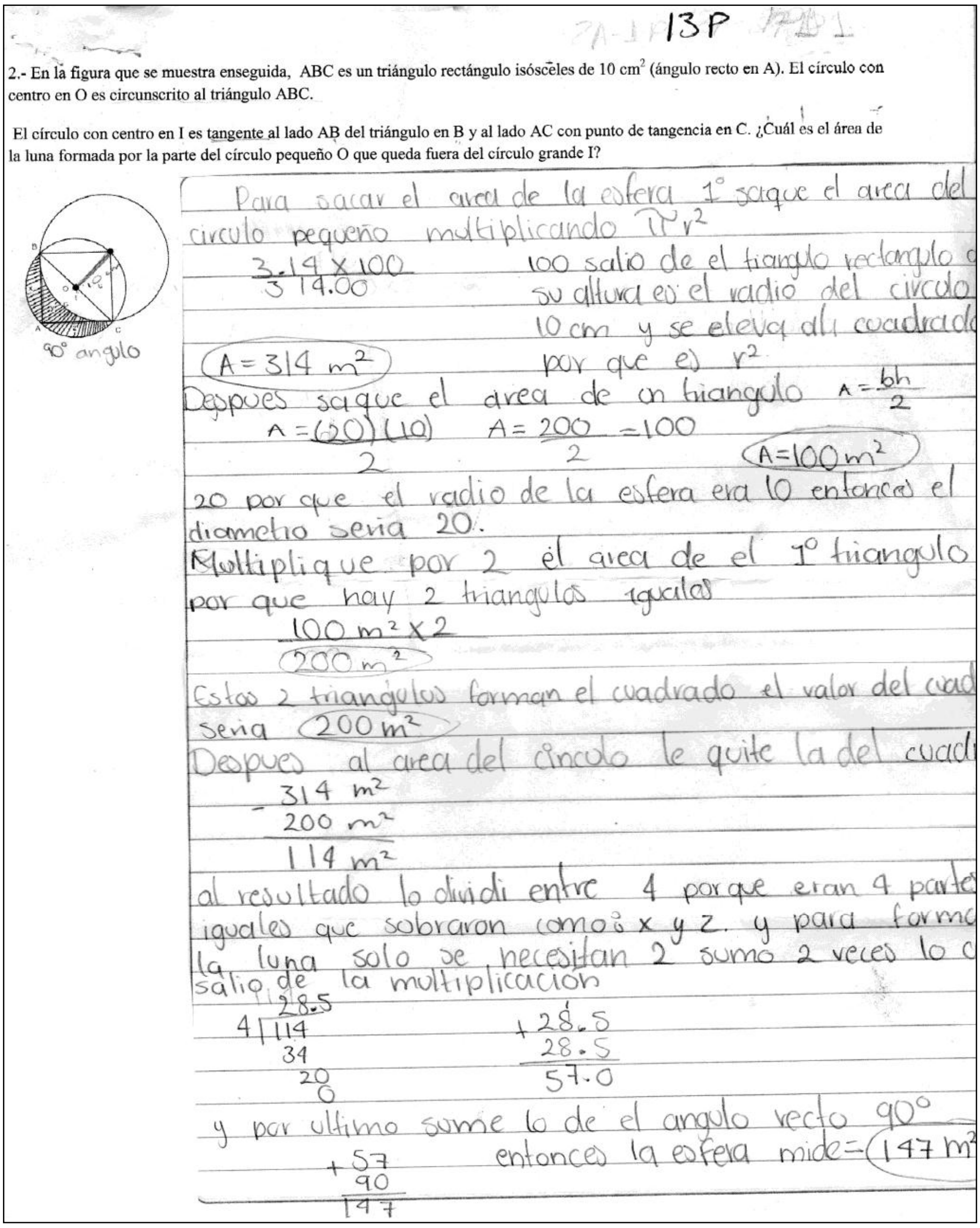
Aquí se sitúan las respuestas de siete parejas: Tres de ellas en el problema 1, una para el problema 2 y tres parejas en el problema 4. Nótese además que cinco de estas siete parejas utilizan también los esquemas de prueba por convicción externa.

Solo la pareja que lo usa para el problema 2 utiliza el inductivo y perceptual, los otros cuatro solo perceptual en combinación con los esquemas por convicción externa o los deductivos. En la utilización de los esquemas empíricos se aprecia que los alumnos asumen de alguna manera la responsabilidad de la resolución desde sus conocimientos y estrategias. Intentan probar sus conjeturas aún cuando es fuerte el uso de ejemplos, casos, mediciones y hasta percepciones visuales. Cabe aquí la reflexión de si es esto preferible sobre la utilización de los esquemas de convicción externa en los cuales se confiere el poder de la verdad y validez a la autoridad representada por el profesor. También es posible la pregunta de si puede ser la combinación del uso de estos esquemas un antecedente necesario hacia el desarrollo de la capacidad de argumentación utilizando esquemas de prueba deductivos.

Veamos enseguida la respuesta de 4P al problema 1 en la cual se puede apreciar tanto una fuerte confianza en la percepción visual como el uso de esquemas por convicción externa pues al pretender con el ritual de la presentación la justificación de lo que hacen y en un intento por utilizar conocimientos que dominan o creen dominar (como el teorema de la suma de ángulos internos del triángulo) intentan plantear relaciones entre los elementos de la figura pero su operatividad simbólica resulta insuficiente para justificar la respuesta, aunque no se dan cuenta de ello.



Por otro lado, en la respuesta de 13P al problema 2 se observa cómo la falta de dominio conceptual entorpece la capacidad de resolución de un problema. Nótese el tratamiento como sinónimos entre círculo y esfera.



13P

2.- En la figura que se muestra enseguida, ABC es un triángulo rectángulo isósceles de 10 cm^2 (ángulo recto en A). El círculo con centro en O es circunscrito al triángulo ABC.

El círculo con centro en I es tangente al lado AB del triángulo en B y al lado AC con punto de tangencia en C. ¿Cuál es el área de la luna formada por la parte del círculo pequeño O que queda fuera del círculo grande I?

90° angulo

Para sacar el area de la esfera 1° saque el area del circulo pequeño multiplicando πr^2

3.14 x 100 = 314.00

100 salio de el triangulo rectangulo c su altura es el radio del circulo 10 cm y se eleva al cuadrado por que es r^2

A = 314 m^2

Despues saque el area de un triangulo $A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{(20)(10)}{2}$ $A = \frac{200}{2} = 100$

A=100 m^2

20 por que el radio de la esfera era 10 entonces el diametro seria 20.

Multiplique por 2 el area de el 1° triangulo por que hay 2 triangulos iguales

100 m^2 x 2

200 m^2

Estos 2 triangulos forman el cuadrado el valor del cuad seria 200 m^2

Despues al area del circulo le quite la del cuadi

314 m^2
− 200 m^2
114 m^2

al resultado lo dividi entre 4 porque eran 4 partes iguales que sobraron como ó x y z. y para formar la luna solo se necesitan 2 sumo 2 veces lo q salio de la multiplicacion

114 ÷ 4 = 28.5

28.5 + 28.5 = 57.0

y por ultimo sume lo de el angulo recto 90° entonces la esfera mide = 147 m^2

57 + 90 = 147

V.2.3. Esquemas de prueba deductivos

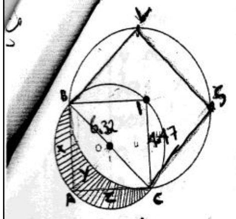
A pesar de las descripciones para los esquemas anteriores es este último el que más aparece. Pero antes de sobrevalorar esto veamos que, siendo 13 parejas quienes lo utilizan 8 de ellas lo hacen en el problema 2, el cual tiene características muy especiales. Es el único que al incluir información de medidas concretas se restringe a un caso y permite a los alumnos sentirse seguros al resolverlo y argumentar ampliamente su respuesta dejando ver con ello el aspecto transformacional de este esquema, ya que la resolución fue hecha por partes. Las deducciones que implica no son únicamente a partir de teoremas o postulados como en los otros y probablemente los alumnos se sienten más seguros al resolver ese tipo de problemas porque es a los que están más habituados.

Ilustramos con dos casos representativos el manejo de los esquemas de prueba deductivos:

Primero con el trabajo de la pareja 9P en el problema 2 que permite observar con claridad la división en submetas (transformacional). Posteriormente el caso que utiliza los dos atributos (transformacional y axiomático) de este esquema al resolver el problema 4, el cual proporciona una figura general e implica relacionar teoremas y definiciones para responder el cuestionamiento desde esquemas deductivos axiomáticos.

El carácter transformacional de este esquema de prueba fue el más observado en este estudio; además, la mayoría de los estudiantes que lo utilizan en la resolución dan explicaciones de cada paso que van realizando. Veamos como ejemplo ilustrativo de ello el trabajo de la pareja 9P en el problema 2. Ellos establecieron subprocesos claros, calcularon áreas por partes y luego integraron sus resultados para dar respuesta a la pregunta, manifestando con ello el pensamiento operacional y el uso de inferencias lógicas a partir de propiedades geométricas para calcular radios y áreas de los círculos, de segmentos circulares y finalmente el área sombreada solicitada. Relatan paso a paso cómo lo han hecho y en su explicación queda evidente el atributo transformacional de este esquema de prueba. Sin embargo no llegan a enunciar como generalidades las relaciones entre los lados de las figuras del problema, se limitan a trabajar con los datos numéricos que se dan ya que con ello se responde la pregunta planteada.

...ángulo rectángulo isósceles de 10 cm^2 (ángulo recto en A). Traza el círculo circunscrito ...O, justo en la mitad de BC. Traza luego el círculo tangente en B a AB y en C a AC, con centro ...es el área de la luna formada por la parte del círculo pequeño O que queda fuera del círculo



Δ(ABC)
a= 10cm^2

$\square$(ABC1)
a=20cm^2

círculo con centro en (O)
a=31.37 cm^2

$\square$ (BCSV)
a= 39.94 cm^2

círculo con centro en
a=62.77cm^2

R= 9.98cm^2

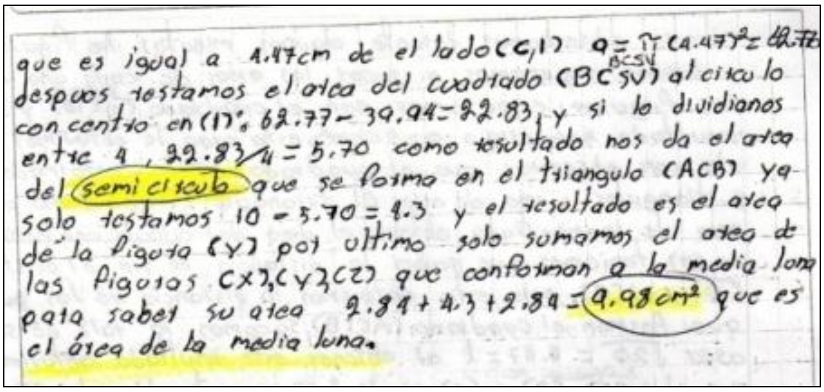
area de la media luna es
9.98cm^2

Eduardo Mtz. M
Martín González P

PROBLEMA 2:

Primero observamos durante algunos minutos las figuras y despues empezamos a sacar las areas de cada una de las figuras, empesamos con el cuadrado (ACIB) y como resultado nos arrojo a=20cm^2, esta area la obtuvimos tan solo con observar que el cuadrado estaba conformado por 2 triangulos y uno de ellos el triangulo (ACB) tiene un area de 10cm^2. Para obtener el area del circulo con centro en (O) teniamos que saber la distancia en tre el punto (O) y el (C), para esto obtuvimos la distancia de los puntos que forman el cuadrado (ACIB), sacamos la raiz de su area $\sqrt{20}$ = 4.47 = l al obtener este resultado obtuvimos que el punto (A) a (C) es de 4.47cm y tambien del (A) al (B) con estos datos teniamos 2 lados del triangulo (ACB) y pudimos aplicar el teorema de pitagoras grasias a su angulo recto, encontramos el lado que faltaba del triangulo 6.32 (BC) que es el diametro del circulo con centro en (O); 6.32 / 2 = 3.16 = r y obtuvimos su area a=3.16^2 π = 31.37cm^2., Observamos que si restamos el area del cuadrado (ACIB) al circulo con centro en(O) resultaba el area de 4 semicirculos 31.37 - 20 = 11.37cm^2 y que 2 de los 4 semicircolos conformaban el area de la figura (x) y (z) integrantes de la media luna 11.37/4 = 2.84 = a la figura (x) y 2.84 = a la figura (z). Observamos las figuras otro minuto y concluimos que si restabamos el area del semicirculo que se formaba dentro del triangulo (ACB) al mismo triangulo (ACB) resultaria el area de la figura (y) que era el area faltante para saber el de la media luna. Vimos que se podia formar un cuadrado en el circulo con centro en(1) y como ya teniamos uno de sus lados (BC) facilmente sacamos el area a= 6.32 (6.32 = 39.94cm^2, despues sacamos el area del circulo con centro en (1), para este ya teniamos su radio.

9P



que es igual a 4.47cm de el lado (C,1) a = π (4.47)² = 62.77
despues restamos el area del cuadrado (BCSV) al circulo lo
con centro en (1): 62.77 − 39.94 = 22.83, y si lo dividimos
entre 4, 22.83/4 = 5.70 como resultado nos da el area
del semi circulo que se forma en el triangulo (ACB) ya
solo restamos 10 − 5.70 = 4.3 y el resultado es el area
de la figura (Y) por ultimo solo sumamos el area de
las figuras (X),(Y),(Z) que conforman a la media luna
para saber su area 2.84 + 4.3 + 2.84 = 9.98 cm² que es
el área de la media luna.

Sobre el por qué resolvieron este problema y no los otros se ilustra también con la pareja 9P la opinión de los alumnos que sólo resolvieron este problema.

Terminando su resolución platicamos lo siguiente:

Inv. ¿Por qué resolvieron únicamente el segundo problema?

Ao: Lo vimos más fácil

Inv: ¿por qué lo ven más fácil?

Ao: Sentimos que lo podemos resolver porque sabemos las fórmulas para las áreas.

Inv: ¿Qué áreas?

Ao: Las que pide, de cuadrados y círculo.

Inv: ¿Y por qué no resolvieron los otros problemas?

Ao: Porque no está claro lo que pide.

Inv: ¿Qué les parece que no está claro? A ver, por ejemplo del primero, qué parte no está clara?

Ao: Mmm no sé, no dice cuánto miden los ángulos, ¡no se da medida de ninguno! (sorprendidos)…y del otro tampoco dan medidas, así es complicado hacerlo.

Inv: Pero ustedes saben muchas cosas sobre ángulos y triángulos.

Ao: A pues sí verdad… (pensativos)

Inv: ¿Cómo qué saben? , ¿qué recuerdan?

Ao: Que suman 180º

Inv: ¿qué es lo que suma 180º?

Ao: Los ángulos de un triángulo.

Inv: Ok, ¿Qué más?

Ao: mm nada más

Inv: ¿seguros?

Ao: bisectrices?...(ve interrogativamente al compañero) ¿sabemos qué son bisectrices?

Ao: ¿Cuáles son las bisectrices?

Inv: Recuérdenlo.

Ao: No, no me acuerdo… ¿van al punto medio?, ¿o al centro del triángulo?

Inv: Son las rectas que bisecan a cada ángulo interno del triángulo. ¿Recordamos qué es bisecar?

Ao: Sepa, no.

Inv: cortar algo por la mitad, en este caso los ángulos internos del triángulo.

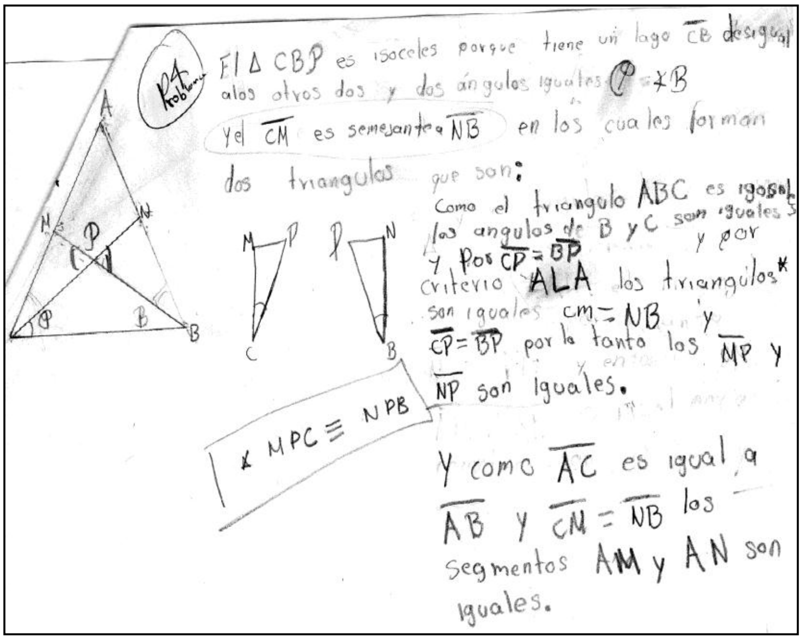
Ao: Bueno… Luego…pero ¿podría ser mañana?... ¿Podemos tratar de hacer ese problema también?…

Ao: mejor ya con ese, con el 2, podemos dejarlo, ¿si?

Inv: Sí, gracias por su participación.

Otro señalamiento especial merecen las respuestas que alcanzan a dar muestras de un razonamiento axiomático. En teoría éste debiera manifestarse en los problemas 1 y 4 que demandan de manera más explícita el razonamiento deductivo; sin embargo sólo dos de cinco parejas que resolvieron el primer problema dan muestras de razonamiento deductivo pero únicamente en el aspecto transformacional sin alcanzar el carácter axiomático. Este solo aparece de manera clara en tres de seis respuestas para el problema 4. Veamos un caso que ilustra esto:

La pareja 2P escribió esto:



Y para efectos de comprensión reescribimos enseguida:

El triángulo CBP es isósceles porque tiene un lado CB desigual a los otros y dos ángulos iguales $A = \beta$ y el CM es semejante a NB en los cuales forman los triángulos congruentes $MPC\ y\ NPB$.

Como el triángulo ABC es isósceles los ángulos $B\ y\ C$ son iguales y por criterio ALA los triángulos $MPC\ y\ NPB$ son iguales. Así que $CM = BN$ y $CP = BP$; por lo tanto los $MP\ y\ NP$ son iguales.

Y como $AC = AB$ y $CM = BN$ entonces los segmentos AM y AN son iguales.

Ahora las aclaraciones y comentarios:

Inv: ¿Cómo es eso de que CM es semejante a NB? ¿qué significa semejante?

Ao: Miden igual

Inv: ¿Y cómo sabemos que CB es desigual a los otros lados del triángulo CBP? ¿Por qué afirman eso?

Ao: Es que dice que $A = \beta$ y si esos ángulos son iguales entonces los lados $CP\ y\ BP$ son iguales y como un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual, el diferente es ese CB.

Inv: Luego mencionan que el triángulo ABC es también isósceles ¿por qué es isósceles?

Ao: Aaaah sí… porque los ángulos B y C son iguales…

Inv: ¿Y cómo sabemos eso, que $B = C$?

Ao: Ya lo sabíamos… (pensativos) ¿o no? Sí, acá dice (señalando el texto del problema) que estos lados $AB = AC$

Inv: ¿y sí atendieron ese dato cuando escribieron que ABC es isósceles, es decir que $AB = AC$?

Ao: sí, si no cómo iba a ser isósceles.

Inv: No sé, tal vez “vieron” que era isósceles.

Ao: No, bueno se ve casi equilátero pero dice que $AB = AC$

Ao: Y ya sabiendo esto, no estuvo tan complicado, pero sí nos costó trabajo este problema…

Inv: En pocas palabras ¿fue un problema para ustedes? Recuerdan que hemos hablado de eso en clase de cuándo un planteamiento es problema para alguien?

Ao: Sí, si nos costó, no está tan fácil de ver que los triángulos chiquitos son iguales…

Inv: ¿Cuáles triángulos chiquitos?

Ao: Esos del centro… $\boldsymbol{CMP}$ y $\boldsymbol{BNP}$

Inv: En algún momento tenían que ver eso.

Ao: Sí, este problema estuvo interesante, si no vemos eso a lo mejor no acabamos… ¿cómo íbamos a encontrar que $\boldsymbol{MP = NP}$?

Inv: No sé, tal vez hay otro camino…

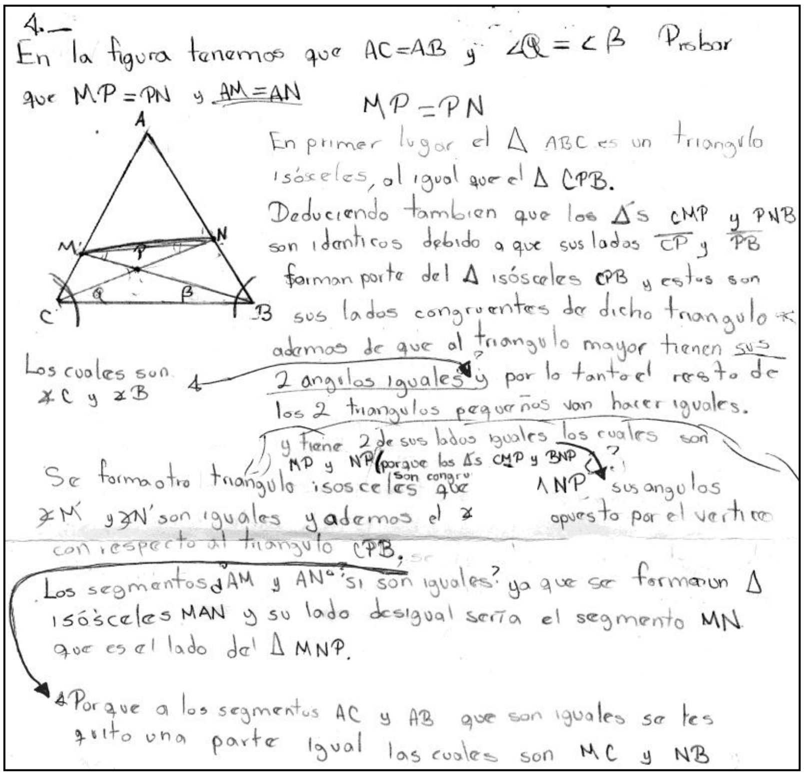
Ao: No, pensamos que no… habría que buscarle mucho a ver si hay otra solución… pero lo importante es que acabamos ya… y no fue muy fácil…

Nótese que mencionan el triángulo isósceles ABC y sólo cuando se les pregunta por qué saben que es isósceles recurren a la información que permite esa conclusión. En detalles como este nos damos cuenta que ellos no dan mucha importancia a la justificación de sus afirmaciones, las hacen cuando se les exigen; finalmente solo buscan dar respuesta una respuesta para que alguien más diga si es correcta o no.

Veamos también el error conceptual al definir triángulo isósceles que los hace concluir y ocuparse innecesariamente de que el lado CB sea distinto a $CP = BP$, cuando basta decir que $CP = BP$ porque $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\beta}$ y con ello los triángulos $MPC\ y\ NPB$ son congruentes por ALA.

Manejan correctamente el concepto de congruencia aunque no usan el término para referirse al mismo. Usan indistintamente (como sinónimos) los términos semejante, congruente e igual. Cuando dicen "y el CM es semejante a NB" en realidad quieren expresar que se trata de segmentos congruentes.

Con todo y los errores señalados, este par de alumnos formula inferencias lógicas que los conducen al resultado esperado y se ven en la necesidad de ir relacionando propiedades del triángulo isósceles y de congruencia de triángulos, respondiendo desde un esquema de prueba deductivo axiomático.



4.—

En la figura tenemos que AC=AB y ∠α = ∠β Probar que MP=PN y AM=AN

MP=PN

En primer lugar el Δ ABC es un triangulo isósceles, al igual que el Δ CPB.

Deduciendo tambien que los Δ's CMP y PNB son identicos debido a que sus lados $\overline{CP}$ y $\overline{PB}$ forman parte del Δ isósceles CPB y estos son sus lados congruentes de dicho triangulo ∗ ademas de que al triangulo mayor tienen sus 2 angulos iguales y por lo tanto el resto de los 2 triangulos pequeños van hacer iguales.

Los cuales son ∡C y ∡B

y tiene 2 de sus lados iguales los cuales son MP y NP (porque los Δs CMP y BNP son congru ∧NP

Se forma otro triangulo isosceles que sus angulos ∡M' y ∡N' son iguales y ademas el ∡ opuesto por el vertice con respecto al triangulo CPB.

Los segmentos AM y AN ¿si son iguales? ya que se forma un Δ isósceles MAN y su lado desigual sería el segmento MN que es el lado del Δ MNP.

∗ Porque a los segmentos AC y AB que son iguales se les quito una parte igual las cuales son MC y NB

VI. CONCLUSIONES

De las evidencias recogidas a través del trabajo de los alumnos implicados en este estudio se formulan las siguientes conclusiones:

Los estudiantes no argumentan con facilidad. Hay que solicitar de modo muy explícito la explicación, incluso de manera dirigida. Así que este acercamiento puede servir como antecedente para la realización de una propuesta didáctica, con secuencias tales que acerquen a los alumnos a la importancia y necesidad de argumentar, de probar, persuadir. Es decir, si se apuesta a la conveniencia de la argumentación las prácticas escolares cotidianas deben dirigirse a desarrollar esta habilidad para que se convierta en una práctica natural durante la resolución de problemas.

Los esquemas más avanzados son utilizados en los problemas que contienen datos numéricos y que demandan información de la misma naturaleza; de modo que si se quiere que trabajen con el otro tipo de problemas (como el 1 y 4 del experimento) habrá que dirigir hacia allá el trabajo en la clase de matemáticas.

La notación simbólica no parece representar una dificultad al momento de expresar operaciones, al menos no una dificultad significativa ya que si comprenden los conceptos y las relaciones entre ellos, “inventan” una simbología para representarlos. Esos símbolos al tener un significado al interior de cada problema les permite simplificar expresiones y son un indicativo de que ya hay principios de generalización.

Aunque recurren a casos para encontrar e incluso validar una respuesta y un solo caso suele ser suficiente y los esquemas perceptuales están arraigados en su forma de pensamiento se observa que una mayor comprensión conceptual amplía la habilidad argumentativa. Con esto se deduce que no puede fomentarse la argumentación por sí sola, tiene que ir ligada al dominio de conceptos y el análisis de las relaciones entre los mismos.

La mayoría de estudiantes esperan la aprobación del docente ante cada procedimiento que hacen y en términos generales perciben los problemas como algo para resolver, no para justificar. Esto posiblemente no es sino consecuencia de las prácticas escolares; si esto ha sido lo cotidiano, si en el mejor de los casos se les demanda dejar escritas las operaciones que realizan, a eso se acostumbran y cuando se solicita una argumentación o explicación del cómo y por qué de lo que hacen se ven enfrentados al obstáculo de la falta de entrenamiento en esta actividad y en tal sentido es normal que ocurra de manera incipiente.

Se percibe la necesidad de impulsar prácticas que lleven a los alumnos a desarrollar la autoconfianza en lo que saben y en la forma en que lo expresan para otros.

La mayoría de estos estudiantes no establecen una estrategia general para resolver el problema. Han aprendido a ir realizando por pasos la resolución antes de plantear un análisis inicial completo; primero empiezan a resolver lo que ven que se puede resolver y dejan los datos que obtienen como para ver si más adelante tienen alguna utilidad.

La falta de comprensión conceptual limita la capacidad de resolución. Si los alumnos no reconocen el significado de un concepto manejado en el planteamiento no pueden abordar con seguridad la resolución del mismo, ya que aún cuando en el momento de la resolución se les explique el significado de algún concepto, eso no tiene el mismo valor que tener la experiencia de trabajar con el concepto y relacionarlo de manera adecuada con el resto de la información contenida en el problema.

Si no existe la argumentación adecuada o si no se considera esta al momento de evaluar el desempeño de los estudiantes durante la resolución de problemas se deja de motivar su desarrollo, el poder estar conscientes de que saben lo que saben, porque es deseable que reconozcan lo que saben y lo defiendan, convenzan a otros y a sí mismos de la validez de ese conocimiento ya construido. Esta es una habilidad extensiva a toda área de la vida, no solo para la clase de matemáticas; no pueden ir por el mundo esperando siempre que alguien les diga si está bien lo que hacen o no, necesitarán confiar en que todo el arsenal de conocimientos, habilidades y valores que poseen les permite validar por sí mismos con seguridad sus acciones, ideas, pensamientos y decisiones.

VI.1. Posibilidades a futuro

A partir de las conclusiones y análisis de resultados se pretende que este trabajo sirva como antecedente para el futuro diseño de propuestas que contribuyan a propiciar en los alumnos de bachillerato la capacidad de argumentar sus respuestas y estrategias de solución al resolver problemas y que dichas estrategias estén fundamentadas en esquemas deductivos, de manera que se vayan acercando paulatinamente a las formas de validación propias de la matemática.

Quedan cuestionamientos importantes sobre los cuales trabajar en el diseño, aplicación y evaluación de dichas propuestas. Por ejemplo, ¿cómo es que algunos alumnos utilizan diferentes esquemas de prueba en distinto problema?, ¿dependen entonces de la naturaleza del problema?, ¿En qué medida?

Se pretende diseñar una propuesta que abarque el seguimiento a un grupo experimental durante toda su estancia en este nivel escolar (3 años) sobre el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas.

Se espera también que este estudio sea un referente para la investigación propia o ajena sobre temas relacionados con el mismo.

VII. BIBLIOGRAFÍA

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución d eProblemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. , 1* (1), 1-13.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Barrantes, H. (2006). Resolución de Problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formacióm en Educación Matemática, Año 1. No. 1* , 1-9.

Codina, S. A. (s.f.). Recuperado el 3 de septiembre de 2011, de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CodinaA99-2672.PDF

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A Thirty Year Reflection on Constructivism in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Researcho on Psychology on Mathematics Education: Past, Present and Future* (págs. 305-345). Génova, Italia: Sense Publishers.

Crespo, C. R. (2006). La importancia de la argumentación en el aula. *inst profesorado argentina* , 1-7.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* D.F, México: Iberoamérica.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias Vol.19, No.3* , 405-414.

Harel, G. (2007). Student´s Proof Schemes Revisited. En P. Boero, *Theorems in School* (págs. 66-77). Génova, Italia: Sense.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la Demostración en Bachillerato. *Números* , 19-40.

Labarrere, S. A. (1992). *El desarrollo de la actividad congnoscitiva de los estudiantes.* Pendiente: Revisar.

Larios, V. (1998). Constructivismo en tres patadas. *Gaceta COBAQ, No.132* , 10-13.

Larios, V. (2001). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. *Xixim* , 7-11.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un Problema o el Problema es Demostrar.* Santiago de Querétaro: UAQ.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 173-200). SENSE PUBLISHERS.

Nápoles, V. J. (2001). Recuperado el 10 de marzo de 2010, de http://www1.unne.edu.ar/cyt/2001/9-Educacion/D-021.pdf

Parra, B. M. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Educación Matemática , 2* (3), 22-31.

Recio, M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

SEP. (2008). *PLANES Y PROGRAMAS DE BACHILLERATO, MATEMÁTICAS I.* D.F: SEP.