



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Instrumentación y control

”Diseño de algoritmos de control para robots manipuladores”

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestría en Instrumentación y Control

Presenta:

Román Eduardo García Ferral

Dirigido por:

Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz

SINODALES

Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz
Presidente

Dr. Fernando Reyes Cortés
Secretario

Dr. José Manuel Álvarez Alvarado
Vocal

Dr. José Román García Martínez
Suplente

Dra. Georgina del Carmen Mota Valtierra
Suplente

Centro Universitario Querétaro, QRO
Mayo 2022
México.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios por permitirme vivir esta etapa tan maravillosa en mi carrera profesional.

Agradezco enteramente a mi madre Lourdes y a mi padre Román por confiar en mí mientras me ayudaban a desarrollarme como maestro, llevándome por el camino de los buenos valores.

A mi futura esposa Yareli por impulsarme a ser mejor persona y acompañarme tanto en los malos momentos como en los buenos.

A Ángel cuya amistad valoro por el tiempo y los buenos momentos que quedaran como anécdotas de vida.

A mi director de tesis, Dr. Juvenal, por sus consejos, gran apoyo y darme la oportunidad de formar parte de su equipo de trabajo.

A mis asesor de tesis Dr. Fernando Reyés Cortés y por supuesto a M.C Brandon Erick Sánchez por el apoyo incondicional en cada etapa de mis estudios para lograr ser un mejor investigador.

A mis compañeros y amigos de la maestría por los consejos, apoyo y ratos agradables de camaradería.

Reconocimientos

A la UAQ por permitirme estudiar en la institución y formarme éticamente en la maestría.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por permitirme utilizar instrumentación del área de robótica para llevar a cabo el presente trabajo de investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgar el apoyo total para llevar a cabo la redacción de esta tesis.

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de regulación para robots manipuladores en su espacio articular, mediante el diseño de reguladores con ganancias variables y la demostración de estabilidad asintótica. Se hace uso de la metodología de moldeo de energía modificada para el desarrollo del algoritmo. La velocidad convencional y el error de posición y de dichos reguladores, son argumentos de funciones acotadas para un funcionamiento de los servomotores con un torque limitado; es decir, no se llega a sus valores máximos. Las ganancias variables están formadas por funciones continuas así como también diferenciales dependientes del error de posición y velocidad de movimiento. Para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio, se plantea una función estricta de Lyapunov. También, se propone una regla de sintonía para las ganancias variables. Por último se presentan resultados experimentales en un robot con 3 grados de libertad (gdl) en aras de determinar el desempeño de los reguladores propuestos.

Palabras Clave: Algoritmo, Robot manipulador, Control de posición, Función de Lyapunov.

Abstract

In this work, the regulation problem for manipulator robots in their joint space is addressed, by the design of regulators with variable gains and the demonstration of asymptotic stability. The modified energy shaping methodology is used for the development of the algorithm. The conventional speed and the position error of the regulators are arguments of bounded functions for a servomotor operation with a limited torque; that is, its maximum values are not reached. Variable gains are made up of continuous functions as well as differentials dependent on position error and motion speed. To demonstrate the asymptotic stability of the equilibrium point, a strict Lyapunov function is proposed. Also, a tuning rule for variable gains is proposed. Finally, experimental results are presented in a robot with 3 degrees of freedom (DOF) in order to determine the performance of the proposed regulators.

Keywords: Algorithm, Robot manipulator, Position control, Lyapunov Function.

Índice general

Reconocimientos

Resumen

Abstract

Índice

Índice de Figuras **III**

Índice de Tablas **V**

1. INTRODUCCIÓN **1**

1.1. Antecedentes 4

1.2. Justificación 6

1.3. Hipótesis 8

1.4. Objetivos 8

1.4.1. Objetivo principal 8

1.4.2. Objetivos secundarios 8

2. Robots manipuladores **9**

2.1. Robots de transmisión directa 12

2.1.1. Servomotores 13

2.2. Cinemática del robot manipulador 17

2.2.1. Cinemática directa 18

2.2.2. Cinemática inversa 19

2.2.3. Jacobiano	19
2.3. Dinámica del robot manipulador	20
2.3.1. Lagrangiano	21
2.3.2. Ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange	22
2.3.3. Modelo dinámico	24
2.3.4. Fenómenos físicos del modelo dinámico	24
2.4. Descripción del problema	27
2.4.1. Control de posición	27
2.5. Moldeo de energía	29
2.6. Teoría de estabilidad de Lyapunov	31
2.6.1. Método directo de Lyapunov	32
2.7. Plataformas de trabajo	33
2.7.1. Plataforma de simulación <i>Matlab</i>	33
2.7.2. Plataforma experimental para robot manipuladores	34
3. Diseño de algoritmos de control	37
3.1. Ganancias constantes	38
3.2. Ganancias variables	39
3.3. Familia de reguladores	41
3.3.1. Propuesta del diseño de algoritmos de control	41
3.4. Algoritmo con ganancias constantes	42
3.5. Algoritmos con ganancias variables	44
3.5.1. Algoritmo 1	44
3.5.2. Algoritmo 2	50
3.5.3. Algoritmo 3	51
3.6. Estabilidad asintótica de Lyapunov	53
3.7. Robustez paramétrica los algoritmos de control	58

3.8. Regla de sintonía	60
4. RESULTADOS	61
4.1. Resultados de simulación	61
4.1.1. Algoritmo ganancias constantes	62
4.1.2. Algoritmo con ganancias variables 1	63
4.1.3. Algoritmo con ganancias variables 2	65
4.1.4. Algoritmo con ganancias variables 3	67
4.2. Robustez frente a perturbaciones	69
4.2.1. Algoritmo con ganancias variables 1	70
4.2.2. Algoritmo con ganancias variables 2	72
4.2.3. Algoritmo con ganancias variables 3	74
4.3. Implementación real de un algoritmo de control	75
4.3.1. Experimento 1	77
4.3.2. Experimento 2	80
4.3.3. Experimento 3	83
4.4. Norma \mathcal{L}_2	86
5. CONCLUSIONES	88
Referencias	97
6. ANEXOS PRODUCTOS DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	98
A. Artículo colocado en el buscador IEEE	98
B. Participación en CONIIN	100
C. Participación en 15° Coloquio	101
D. 1° Lugar en COTAER	102
E. Taller de ANSYS ELECTRONIC	103

Índice de Figuras

2.1. Robot cartesiano de 3 gdl.	9
2.2. Robot cilíndrico de 3 gdl.	10
2.3. Robots comerciales.	11
2.4. Motor de transmisión directa.	13
2.5. Encoder.	14
2.6. Ejemplo de un amplificador.	15
2.7. Región de trabajo del servomotor.	17
2.8. Diagrama esquemático de control de posición de robots manipula- dores.	28
2.9. Técnica del moldeo de energía.	30
2.10. Robot experimental de transmisión directa de 3gdl.	35
3.1. Secuencia del trabajo.	37
3.2. Perfil de la función acotada.	43
3.4. Lazo cerrado del sistema.	48
4.1. Torques aplicados.	62
4.2. Error de posición de las articulaciones.	63
4.3. Torques aplicados.	64
4.4. Error de posición de las articulaciones.	64
4.5. Torques aplicados.	66
4.6. Error de posición de las articulaciones.	66
4.7. Gráfica de los torques suministrados a las articulaciones del robot.	67
4.8. Error de posición de las articulaciones.	68

4.9. Gráfica de los torques suministrados aplicados con perturbación a los eslabones del robot.	70
4.10. Error de posición de las articulaciones con una perturbación. . . .	71
4.11. Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.	72
4.12. Error de posición de las articulaciones con una perturbación. . . .	73
4.13. Gráfica de los torques suministrados con perturbación a las articulaciones del robot.	74
4.14. Error de posición de las articulaciones con una perturbación. . . .	75
4.15. Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.	78
4.16. Gráfica de las velocidades en las articulaciones.	78
4.17. Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.	79
4.18. Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.	81
4.19. Gráfica de las velocidades en las articulaciones.	81
4.20. Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.	82
4.21. Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.	84
4.22. Gráfica de las velocidades en las articulaciones.	84
4.23. Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.	85
4.24. Análisis de desempeño empleando la norma \mathcal{L}_2	87

Índice de Tablas

2.1. Especificaciones de los servomotores	35
4.1. Valores recibidos del manipulador	77
4.2. Valores recibidos del manipulador	80
4.3. Valores recibidos del manipulador	83

INTRODUCCIÓN

La robótica es una rama de investigación que permanece en constante estudio. Actualmente en México, los robots manipuladores son parte importante para el desarrollo del país. Por ejemplo, algunos quirófanos ya cuentan con robots para realizar operaciones en distintas áreas de la salud, la industria automotriz se encuentra robotizada y con ello automatizada; si bien no en su totalidad, los robots manipuladores aligeran la carga manual de muchos trabajos pesados para los operadores, aunado a que, a diferencia de un humano, un robot no presenta cansancio físico aumentando el ritmo de trabajo de manera más eficiente. En (1), se menciona que los robots manipuladores figuran como nuevas maneras de crear desarrollo y generar bienestar de la sociedad. Se dice que, son elementos claves de la modernización tecnológica y representan un impacto notorio dentro de la economía global. En este sentido, no es de sorprenderse que la industria automotriz, quien fue una de las pioneras en el uso de robots manipuladores (2), siga trabajando con ellos, a tal punto de que en el año 2018 fue el sector industrial que más instalaciones de manipuladores tuvo (3).

Los robots manipuladores ahorran enormes cantidades de tiempo y reducen el costo de producción (4). Por su naturaleza no lineal, estos generan un tema de investigación muy vasto, para ser más exacto, no existirían los beneficios antes mencionados de no ser por los algoritmos de control. La no linealidad

en un sistema puede desencadenar comportamientos complejos, los cuales resultarían difíciles de modelar. A su vez, se entrarían en temas de dinámica no modelada que impedirían un control adecuado del robot. Si bien es cierto que existen maneras de linealizar una parte de la función, no es necesario encontrar una solución de la ecuación diferencial del sistema gracias a la teoría de Lyapunov. Lo que determina que un robot manipulador se desempeñe de manera adecuada en su tarea encomendada, es el algoritmo de control de alto rendimiento que éste contiene (5). Desarrollar nuevos algoritmos de control con alto desempeño, permite que las aplicaciones de los manipuladores (operaciones complicadas, maquinado, etc.) puedan ser más exigentes.

Dado que un robot manipulador puede tener n grados de libertad, algunas movi- lidades de las articulaciones pueden ser lineales, rotatorias o la combinación de ellas. Para estos fines, es necesario contar con actuadores que generen estos movimientos. Las condiciones para la elección del servomotor, dependerán tanto del propósito del manipulador como las condiciones físicas del sistema. Independientemente de la configuración del robot, se busca la mejor respuesta según los requerimientos del usuario. Por ejemplo, a veces es necesario precisión para llegar al punto deseado en vez de priorizar la velocidad de convergencia. Para otras tareas encomendadas se busca una llegada rápida de las articulaciones del robot al punto deseado, sin embargo, para ambas respuestas es necesario controlar al sistema mediante técnicas o análisis. (6).

Una de las técnicas más usadas por diversos investigadores para el diseño de reguladores de robots manipuladores, es el moldeo de energía propuesta por Takegaki y Arimoto en 1981 (7). A partir de esta técnica, numerosas familias de esquemas de control han sido desarrolladas a través de los años, expandiendo el campo de la robótica controlando a los manipuladores. Dicha técnica funge como

herramienta si se desea obtener un algoritmo de control por medio del gradiente de la energía potencial artificial del robot. Cabe resaltar que el moldeo artificial no es único e impulsa al manipulador hacia la posición deseada. Dentro del esquema se añade un término derivativo, este toma el rol de freno mecánico al aplicar un torque disipativo. Con esto, se va atenuando el sobretiro y picos máximos que se pueden llegar a tener en el estado transitorio. Estas características son claves para el diseño de un regulador adecuado para cualquier robot manipulador. Por ejemplo, al utilizar la técnica de moldeo de energía se puede mejorar la robustez del control (8), (9).

Para llevar a cabo un análisis fiable de la estabilidad del punto de equilibrio, existe una relación directa entre el moldeo de energía y el método directo de Lyapunov. Dicha teoría se analizará mas a detalle adelante. En los esquemas de control las ganancias juegan un papel muy importante en el rendimiento de un algoritmo. Una desventaja de ellos es el uso de ganancias constantes, puesto que, al ser un ajuste manual se consume tiempo importante (10). Debido a este motivo surge la necesidad de utilizar otro tipo de ganancias, como lo son las variables. Se ha logrado demostrar que, el uso de ganancias variables supera en desempeño a su contra parte constante. No obstante la sintonía para las ganancias sigue siendo arbitraria en muchos aspectos, por esta razón es necesario proponer una regla.

Las ganancias variables han sido muy utilizadas desde su introducción en 1953, básicamente la ganancia varía pero mantiene un nivel de salida constante, (11). Uno de los primeros trabajos en torno a ganancias variables fue en un proceso para sintonizarlas obteniendo estabilidad asintótica global (12). Las variables de estado; error y posición, están ligadas fuertemente a este concepto de ganancias. Uno de los problemas que se evita al tener funciones acotadas en

torno a la adaptabilidad de la ganancia es el fenómeno de saturación.

El fenómeno de saturación sucede cuando se trabaja fuera de la región lineal del servomotor. Por este motivo, se debe acotar la zona de trabajo al desarrollar algoritmos. Por ejemplo, en (13) no muestra si los actuadores fueron acotados. Puede suceder que en caso de colocar una ganancia errónea el robot manipulador pierda el control provocando accidentes o en el mejor de los casos no llegar a la posición deseada. Es importante respetar las limitaciones físicas de los sistemas en aras de obtener una buena respuesta. A continuación abordaremos algunos trabajos relacionados en el tema.

1.1. Antecedentes

En el estado del arte podemos encontrar diversos trabajos para abordar el problema de regulación; algunos autores hacen uso de ganancias constantes y las técnicas para el diseño suelen ser diversas. Unos de los primeros controladores funcionales para robots manipuladores en la literatura y que ya es bien conocido es el clásico PD (14). A pesar de su simplicidad y fácil implementación cuenta con muchos problemas; por ejemplo las trayectorias deseadas que cambian rápidamente suelen ser difíciles de seguir y pueden dar lugar a grandes errores de seguimiento (15). Otro problema es que, al no estar acotada por una función estricta puede saturar al servomotor si se coloca una ganancia que haga trabajar al par fuera de la zona lineal. Por esta razón varios investigadores del área de robótica han intentado mejorar al PD.

En (16) un esquema de control, cuya base cae en la metodología de moldeado de energía, es propuesto. Dicho regulador da pauta al desarrollo de varias

familias de controladores adaptativos acotados definidos mediante funciones de saturación. Sin embargo, a pesar de todo el aporte fuerte que otorga este artículo, resalta la sintonización de las ganancias. Para definir K_p y K_d fue necesario numerosos intentos de prueba y error en aras de obtener un rendimiento adecuado en lazo cerrado. Esto último también ocurre en (13) donde, a pesar de tener diferentes plataformas de trabajo es a expertiz del usuario la sintonización. En (17) también se pueden ver las ganancias constantes para el controlador, a diferencia del trabajo previo este propone funciones Lipschitz que hacen mas suave la respuesta de la planta. Un trabajo mas con ganancias constantes lo vemos en (18), donde a pesar de proponer una nueva metodología se puede interpretar que la sintonización de las ganancias es mediante la habilidad del diseñador.

Al utilizar funciones estrictas se puede demostrar estabilidad asintótica, con lo cual podemos asegurar que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado es estable y a su vez el sistema lo será (19). En base a esto podemos proponer numerosas funciones para lograr el fin de llegar a la posición deseada.

En el presente trabajo se ha propuesto un algoritmo de control en base a una modificación en la técnica de moldeo de energía; esto es, inyectar una energía potencial al robot. Para lograr esto, primero se utilizaron ganancias constantes para posteriormente pasar a ganancias variables. Es necesario demostrar matemáticamente la estructura del algoritmo. Por esta razón se definen las ecuaciones pertinentes de cada estructura.

1.2. Justificación

Para comenzar, tenemos que los robots manipuladores siguen siendo usados en la actualidad. Si bien es cierto que, a causa de la pandemia muchos sectores disminuyeron su producción, los manipuladores fueron una pieza clave para afrontar el problema global causado por la enfermedad (20) (21). Por ende, como ya se ha mencionado con anterioridad, los reguladores son necesarios para poder controlar al manipulador. Esto conlleva a que, el análisis y desarrollo de nuevos algoritmos de control sea una buena área de investigación.

Los algoritmos más comunes en el sector industrial; como lo son el PD y el PID, no cuentan con acciones de control acotadas. Por esta razón es más factible que ocurran factores de saturación e incluso problemas mecánicos o térmicos que afectan directamente a la planta. Peor aún, se añadiría mecánica no modelada la cual sería imposible de controlar por su comportamiento incierto. Por este motivo, a diferencia de los trabajos mencionados con anterioridad, se realiza la propuesta de una función acotada para evitar la saturación de los servomotores.

La justificación de este trabajo también yace en que existen pocos trabajos con ganancias variables explícitas en los algoritmos de control. Esto significa, proponer una función suave y continua (Lipchitz) en las ganancias para ver una respuesta adecuada del algoritmo. Para llevar a cabo esto, es indispensable demostrar estabilidad en el sistema. Esto es; asegurar que existe un punto de equilibrio único y un atractor, por lo que el manipulador no se saldrá del balance en el cual se encuentra. Además, la mayoría de los autores anteriormente citados demuestran estabilidad por medio del teorema de invarianza de LaSalle. En el área de control automático, usar estos postulados no reflejan un análisis riguroso de la estabilidad del punto de equilibrio. En este sentido, proponemos una función

estricta de Lyapunov, la cual es una función definida positiva y su derivada con respecto al tiempo es definida negativa; desde el contexto del método directo de Lyapunov, nos permite concluir que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable y global. Además, al demostrar dicha estabilidad, nos permite extrapolar a los reguladores hacia otras aplicaciones de control, como son: control cartesiano, control punto a punto, control de movimiento, etc.

Para el problema de sintonía de las ganancias, los trabajos existentes presentan diversos enfoques como son: sintonía fuzzy (22), algoritmo PSO (23), empírico como ya lo vimos en trabajos anteriores y algunas reglas de sintonía (24). A pesar de que dichos artículos son un gran aporte a la ciencia no son de fácil entendimiento para un diseñador inexperto. Por lo cual dichos algoritmos pueden ser complicados de implementar por cualquier usuario nuevo en robótica y control automático. Debido a esto, surge la motivación de proponer una regla matemática explícita simple para ganancias variables en términos del par máximo proveniente del i -ésimo servomotor del robot, siendo una alternativa más sintetizada y flexible para cualquier usuario, con respecto a los algoritmos de sintonía antes mencionados.

A diferencia de los trabajos previamente reportados en la literatura, nuestra propuesta incremental es utilizar ganancias variables dependientes del error de posición y la velocidad articular para abordar el problema de regulación. Se estima mejorar el desempeño del PD al menos en un 30%. Este desempeño medido en torno al tiempo del experimento y es subjetivo a las aplicaciones de los robots manipuladores.

1.3. Hipótesis

La propuesta de un control híbrido con ganancias variables explícitas, utilizando una modificación de la técnica de control de moldeo de energía, permite a un robot de 3 gdl llegar a la posición deseada con un índice de desempeño \mathcal{L}_2 del 30 % superior al mostrado por el control PD sin importar las condiciones iniciales con un mínimo de vibraciones y de sobre impulso.

1.4. Objetivos

En esta sección, presentamos los objetivos de este trabajo:

1.4.1. Objetivo principal

Abordar el problema de control de posición de robots manipuladores a través de la propuesta de una nueva estructura de control con ganancias variables explícitas proporcional y derivativa.

1.4.2. Objetivos secundarios

- Diseñar un esquema de control de posición con ganancias constantes.
- Diseñar una nueva estructura de control con ganancias variables.
- Validar experimentalmente la funcionalidad y desempeño del algoritmo de control en robot manipulador de 3 gdl.
- Documentar los resultados.

Robots manipuladores

En la literatura, podemos encontrar muchas definiciones del robot manipulador. En este trabajo, adoptamos la siguiente definición para el robot manipulador: un robot manipulador es una cadena cinemática abierta de un número variable de grados de libertad (25). Además, tiene diferentes configuraciones según sean las necesidades y exigencias de su uso. En la Figura 2.1, se aprecia un diseño de un robot manipulador cartesiano de 3gdl. Este robot aparece en la industria y algunos usos que tiene este robot son el movimiento de objetos (26), ensamblaje de piezas pequeñas hasta la robótica de servicio, la colaboración entre humanos y robots (27).

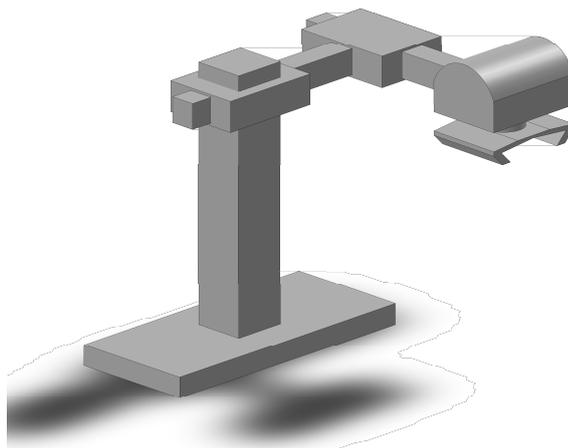


Figura 2.1: Robot cartesiano de 3 gdl.

Otra configuración modelada, puede ser apreciada en la Figura 2.4. Es-

ta representación semeja a un manipulador de tipo cilíndrico que de igual manera esta presente en la industria. Se utiliza principalmente en operaciones de montaje, mantenimiento de máquinas, manipulación de materiales y paletización (levantamiento de pallets) (28).

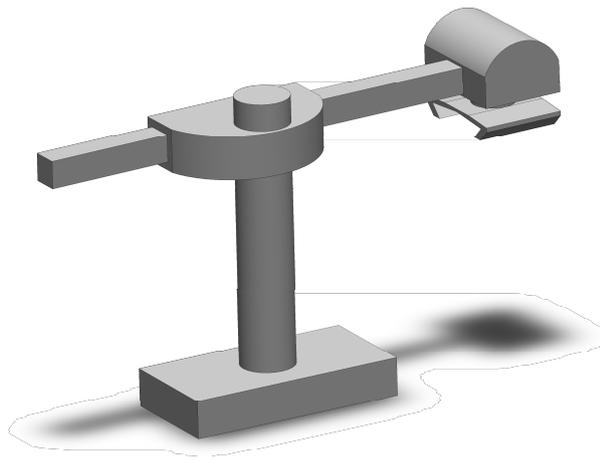


Figura 2.2: Robot cilíndrico de 3 gdl.

Derivado de las diferentes configuraciones y usos de los manipuladores, se han construido vastas cantidades comerciales. Podemos mencionar algunos robots como ejemplo para este ámbito, como lo son los fabricados por ABB, Fanuc y Kuka los cuales se pueden ver en las figura 2.3a,2.3b,2.3c respectivamente. Dichos robots pueden ser vistos en naves industriales para el desarrollo de productos, ensamblajes, sector automotriz, soldadura, etc. Este tipo de robots cuentan con el manual para poder utilizarlos así como también las distintas aplicaciones específicas para los cuales fueron construidos:



(a) Robot ABB.



(b) Robot Fanuc.



(c) Robot Kuka.

Figura 2.3: Robots comerciales.

A pesar de que el alcance de los manipuladores comerciales es muy extenso, los robots cuentan con una arquitectura cerrada; esto es, los esquemas de control con los que cuentan son proporcionados por el productor y el usuario no tiene acceso a ellos. La mayoría de estos algoritmos son el PD y el PID. Aquí se origina un problema de bajo desempeño, limitando al robot a tener aplicaciones más exigentes y abriendo la posibilidad de desarrollar algoritmos que superan en desempeño a dichos esquemas predeterminados.

Dada esta oportunidad, ha surgido una nueva tecnología de robots que cuentan con transmisión directa. Esta tecnología es de arquitectura abierta, permitiendo diseñar y evaluar nuevos algoritmos de control que superan a las versiones clásicas. Con ello, las limitaciones de los robots de arquitectura cerrada se evaden, dando lugar a estos nuevos sistemas mecatrónicos que pueden realizar aplicaciones más complicadas.

2.1. Robots de transmisión directa

Hablando de la estructura mecánica de un robot manipulador, podemos encontrar un gran número de configuraciones. Antes era muy común ver a robots con eslabones rígidos, utilizaban un sistema de engranajes y reductores, a esta estructura dada de manipuladores se les nombra como robots tradicionales. Si bien es cierto que un robot se construye en torno al uso específico que se requiere, el manejo de mecanismos con engranajes tiene diferentes desventajas, como las que se describen a continuación. Debido al fenómeno de fricción y el deterioro de los engranes se obtienen desgastes mecánicos del robot, así como mayor error de presunción al medir su posición actual. Surgen entonces, como solución a esos inconvenientes, los robots de transmisión directa. Dichos robots con ese tipo de tecnología han desplazado y dejado en la obsolescencia a los robots manipuladores tradicionales de engranajes (29).

La principal ventaja con la que cuenta esta tecnología, es la evasión de las pérdidas de energía. Esto es posible, gracias a sus actuadores de transmisión directa, la cual funciona como una fuente ideal de torque. Otra amenidad, es evadir la reducción de velocidad. Como se mencionó con anterioridad los engranes eran necesarios para la amplificación de poder de los motores, por el contrario, en este tipo de robots no es necesario colocar engranes. Además, se puede resaltar la reducción significativa del fenómeno de fricción. Por último, estos robots son de arquitectura abierta, con lo cual se consigue una brecha para la evaluación experimental de algoritmos de control.

2.1.1. Servomotores

La principal característica de los robots de transmisión directa se basa en que sus articulaciones son servomotores de transmisión directa. Sabiendo que un servomotor es un dispositivo imprescindible para la fabricación de un robot es necesario ver su configuración. Dicho sistema electromecánico cumple la función de ser un fuente de par ideal; es decir, el par que se pasa directamente a la salida se conserva sin cambios y el torque se transmite directamente a la carga (30). Un servomotor cuenta con los siguientes elementos dentro de su configuración:

- Motor de transmisión directa: Se constituye de un rotor y un estator, resalta el hecho de la ausencia de engranajes para el movimiento.

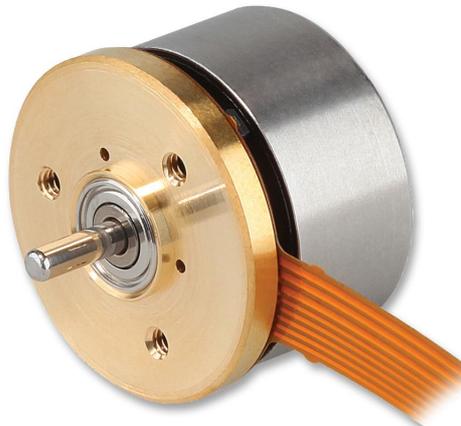


Figura 2.4: Motor de transmisión directa.

- Encoder relativo: También llamado como encoder incremental, es un sensor digital de posición basado en optoelectrónica para generar una salida cuyos pulsos son equivalentes a un ángulo de rotación. En la parte frontal, se encuentra un arreglo de diodos emisores de luz (LED). La luz de ellos viaja por los huecos del disco giratorio y los elementos fotosensibles detectan

los rayos que resultantes. El encoder relativo debe su nombre debido a que la posición obtenida es relativa a la posición final o previa. Este tipo de sensores cuentan con dos canales; A y B, para poder determinar la dirección de giro.

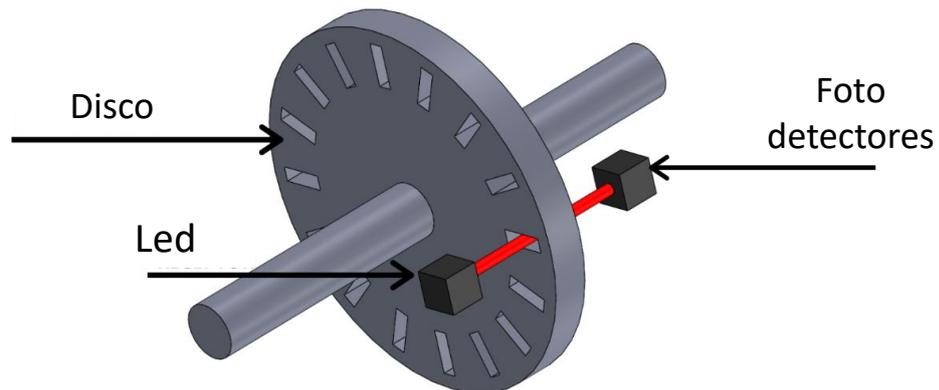


Figura 2.5: Encoder.

- Amplificador electrónico: Este elemento también se le conoce como amplificador de potencia o servo amplificador contiene un grupo de microprocesadores y electrónica de potencia. Su función consta en distribuir de manera eficiente la energía para el control del servomotor, la parte de potencia se encarga de acondicionar y acoplar la señal de voltaje de baja potencia proveniente de un sistema digital (31). Para un mejor rendimiento del amplificador es deseable una combinación de las etapas analógicas, de potencia y digitales, siendo esta última la encargada de enviar la señal de control.



Figura 2.6: Ejemplo de un amplificador.

Para poder evaluar de manera práctica los esquemas de control, es indispensable utilizar la configuración del servomotor en el modo de torque. Los otros modos de los servomotores; posición y velocidad, no cuentan con la capacidad de ejercer un toque que ayude a implementar reguladores puesto que, este tipo de configuraciones son de arquitectura cerrada.

El servomotor balancea las impedancias entre el torque virtual del algoritmo (el computado en la computadora) y el aplicado por los servomotores, a través del servo amplificador. Por lo tanto, existe una relación entre el torque aplicado al servomotor y el campo magnético. A este enlace se le llama: la ley fundamental de los servomotores. Dicha ley se establece como una ecuación que engloba las variables de voltaje v (el cual es el algoritmo de control aplicado al manipulador) y la ganancia k del servo amplificador. La ecuación tiene la siguiente forma (1):

$$\tau = kv \tag{2.1}$$

Los servo motores elegidos para el uso de robots manipuladores deben

cumplir con la ecuación (2.1). En caso contrario no deben formar parte de la estructura de un robot. Es importante considerar las limitaciones físicas de los servo motores, para evitar el fenómeno de saturación.

Sabemos que el torque proporcionado por el servomotor es finito, por lo tanto se puede concluir que, existe una cota dada por los propios límites físicos del servomotor. Debido a esto, los servomotores deben trabajar dentro de la región lineal o de lo contrario caeríamos en la zona de saturación. Al entrar en dicha área se obtienen múltiples problemas cuyas consecuencias son; dinámica no modelada (valores que no podemos estipular dentro del lazo cerrado de control) dentro del sistema, juegos mecánicos, vibraciones, daños irreversibles a la planta, etc. Finalmente el torque aplicado por el algoritmo de control será totalmente diferente al demandado debido a todas estas problemáticas descritas.

En la Figura 2.7 se puede apreciar como responde el servomotor de par mediante el torque aplicado en función del torque solicitado. Como se puede observar, la respuesta esta ubicada tanto en el primer cuadrante como en el tercero. Hablando del primer cuadrante, la zona lineal se da cuando el torque demandado es menor al torque máximo, por ende el torque solicitado es igual al aplicado. La zona de saturación nos indica el límite máximo de torque que puede proporcionar nuestro servomotor, esta se da cuando el torque máximo es menor al torque pedido. Por esta razón al diseñar algoritmos de control es necesario trabajar dentro de la zona lineal. Para lograr esto, las acciones de control deben estar acotadas en base a las limitaciones físicas del sistema. Análogamente se emplea el mismo principio para el tercer cuadrante considerando para el par aplicado y el solicitado el signo negativo.

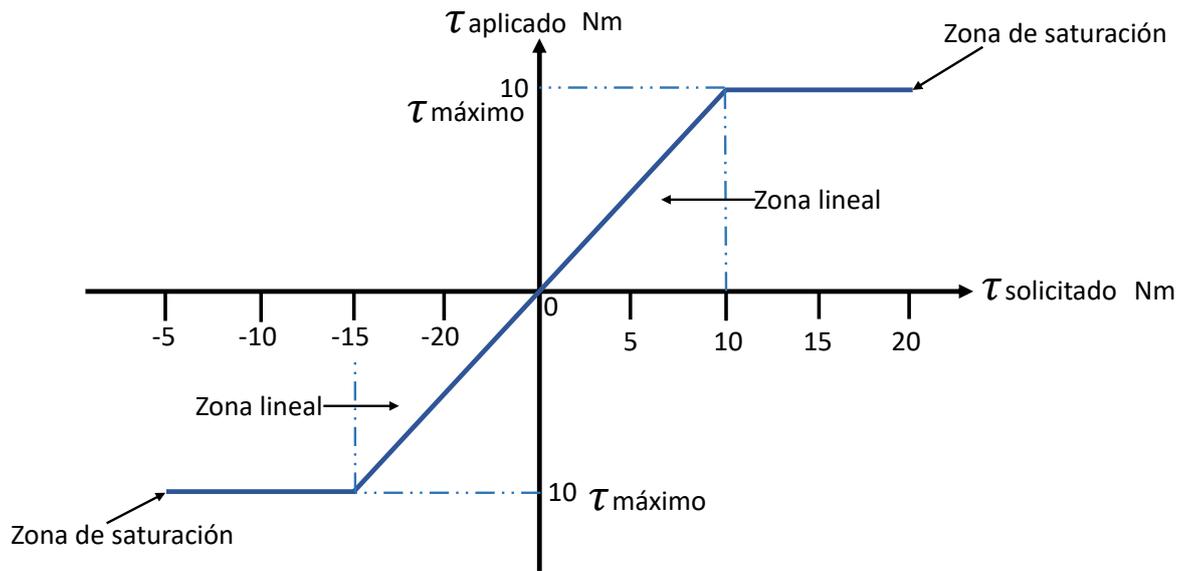


Figura 2.7: Región de trabajo del servomotor.

Una vez que conocemos los elementos de un robot manipulador, se describe la dinámica que los modela. Con el objetivo de estudiar y controlar dicha planta para implementar nuestros algoritmos de control diseñados.

2.2. Cinemática del robot manipulador

Los sistemas mecánicos, cuentan con el respectivo análisis cinemático que es de relevancia. Para llevar a cabo este análisis es loable estudiar de forma analítica la geometría del movimiento del robot manipulador. Esto puede lograrse Ubicando las partes inmersas al análisis dentro del espacio cartesiano omitiendo momentos o fuerzas. Existen dos categorías de cinemática; la directa y la inversa. La segunda busca recabar una descripción de manera analítica sobre la conducta de las variables articulares en base a las coordenadas finales del eslabón del manipulador (32). Mientras que la cinemática directa analiza los fenómenos

descritos con anterioridad.

Las articulaciones de un robot pueden realizar un movimiento lineal de traslación o rotacional. A las primeras se les denomina articulaciones prismáticas mientras que a las segundas rotacionales. Otra definición importante para la cinemática son los eslabones, que consisten en acoplamientos mecánicos al rotor y al estator de la próxima articulación. Finalmente el espacio de trabajo del robot reside en el lugar donde puede llevar a cabo los movimientos que quiera dependientes de su configuración.

2.2.1. Cinemática directa

Para poder instruirnos en la dinámica de un robot manipulador es indispensable averiguar la cinemática diferencial de primera fuente. Esta, se refiere al estudio analítico del movimiento del robot con respecto a un sistema cartesiano fijo $\sum(x, y, z)$, que relaciona los parámetros geométricos, las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$, de orientación $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ y principalmente las coordenadas articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. De manera matemática el vector se representa de la siguiente forma (1):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

Donde $\mathbf{f}_R(\mathbf{q})$ es una función continua en el vector de desplazamientos

articular o posiciones $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, n es el número de grados de libertad y la dimensión del vector de posiciones o desplazamiento articular, x, y, z representan las coordenadas asociadas al extremo final del robot mientras que por otro lado los ángulos de Euler están dados por θ, ϕ, ψ .

2.2.2. Cinemática inversa

La cinemática inversa es un problema no lineal y literalmente es la inversa de la ecuación (2.2). De manera matemática se expresa como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) \quad (2.3)$$

En resumen, la cinemática inversa define la configuración así como también las cifras de las variables articulares, que debe tener el manipulador para la posición y orientación de un punto elegido (33).

2.2.3. Jacobiano

Por último pero no menos importante tenemos al Jacobiano. Dicha herramienta nos ayuda a encontrar las singularidades de nuestro robot manipulador y relaciona las velocidades articulares, lineales y angulares (34),(35), así como también describir los nexos entre los torques resultantes del extremo final y la fuerza aplicada. Se dice que es la derivada con respecto al tiempo de la cinemáti-

ca directa (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x & y & z & \theta & \phi & \psi \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por ende:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v(\mathbf{q}) \\ J_w(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde el primer término relaciona la velocidad articular y la segunda la velocidad angular. Si se quieren diseñar algoritmos para el problema de control cartesiano, el Jacobiano es imprescindible en el diseño.

2.3. Dinámica del robot manipulador

El modelado de un robot manipulador es un tema de vital importancia para comenzar a diseñar estrategias control y lograr que se ejecute el movimiento deseado por el usuario, en resumen se puede decir que, el modelo dinámico de un robot, tiene como principal razón conocer la relación entre el movimiento del manipulador y las fuerzas que se le aplican (36) (37). Si se quieren explicar de manera contundente los fenómenos físicos que yacen en la estructura mecánica de un manipulador como lo son; fricción, fuerzas de Coriolis y centrípetas, pares gravitacionales y efectos inerciales el modelo dinámico permite describirlos mediante el uso de ecuaciones diferenciales no lineales.

Es posible obtener el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad empleando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

(38), (39). Un valor importante para obtener dicho esquema es el Lagrangiano. Después de analizarlo pasaremos a repasar la metodología de Euler-Lagrange en aras de obtener el modelo de cualquier robot manipulador sin importar el tipo de movimiento con el que cuente.

2.3.1. Lagrangiano

El Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un manipulador de n grados de libertad es definido como la resta de energías cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, entonces se tiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.6)$$

donde: $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ representan a los vectores de posición y velocidad articular. Se tiene que la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ tiene relación dependiente de la posición y velocidad articular, así mismo, la energía potencial (\mathcal{U}_q) únicamente depende del vector de posición.

Recordemos que la energía cinética tiene la siguiente estructura:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

Donde la matriz de inercia del manipulador $M(\mathbf{q})$ es simétrica y la energía potencial. En resumen, al considerar a un robot de cadena cinemática abierta con n grados de libertad, su respectiva energía total E se calcula sumando ambas energías; la energía cinética K y la energía potencial \mathcal{U} (40). El Lagrangiano L representa esta diferencia entre la energía cinética y energía potencial. Es indispensable si se quiere calcular las tan famosas ecuaciones de movimiento de

Euler-Lagrange para τ_i .

2.3.2. Ecuaciones de movimiento de Euler Lagrange

El modelo dinámico de un manipulador puede ser obtenido de diversas formas, sin embargo al utilizar las leyes de Newton-Euler y la mecánica Lagrangiana (Euler-Lagrange) podemos obtener una mejor representación (41). La principal ventaja de esta metodología es: a partir de la geometría y un método bien definido, podemos obtener la dinámica de cualquier robot en cadena abierta, donde sus ecuaciones se deducen de manera natural, en comparación con la segunda ley de Newton, etc. Para lograr obtener el modelo dinámico, primero se deben emplear los 4 pasos de la metodología de Euler-Lagrange:

- Paso 1: Se debe extraer la cinemática directa del centro de masa para cada uno de las articulaciones que contenga el robot manipulador. Tomando como referencia la ecuación (2.2), para el i -ésimo eslabón, la longitud l_{i-1} y los ángulos q_i y q_{i-1}

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = f_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_i, q_{i-1}) \quad (2.8)$$

- Paso 2: Calcular la cinemática diferencial del i -ésimo eslabón y deducir la rapidez lineal ($v^T v = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$).

$$v_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- Paso 3: Obtener el Lagrangiano (2.6), cuyo valor lo abordamos previamente así como el proceso de su obtención.
- Paso 4: Aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange e introducir a la ecuación el modelo de fricción.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.10)$$

donde:

- $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbf{R}^n$ y representa el vector de posiciones articulares.
- $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbf{R}^n$ y es el vector de velocidades articulares.
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n] \in \mathbf{R}^n$ que es el vector de pares aplicados donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i .
- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbf{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$, la fricción estática \mathbf{f}_e y la fricción de Coulomb.
- $t \in \mathbf{R}_+$ es el tiempo
- $n \in \mathbf{N}$ son los grados de libertad

Finalmente la ecuación que describe el modelo no lineal de un robot manipulador de n grados de libertad es la siguiente:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.11)$$

2.3.3. Modelo dinámico

Simplificando la ecuación (2.11) se obtiene la ecuación que es muy común de ver en artículos indexados:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.12)$$

Donde:

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, definida positiva y simétrica.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y coriolis.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de las fuerzas de gravedad.
- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector del fenómeno de fricción.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares o torque.

2.3.4. Fenómenos físicos del modelo dinámico

Los modelos físicos del modelo dinámico pueden o no estar presentes, sin embargo es importante conocer sus propiedades y las formas de representarlos. En el caso de los robots tenemos los fenómenos de inercia, coriolis, par gravitacional y fricción (viscosa, Coulomb y estática).

Efecto inercial

El efecto de inercia o efecto inercial se da con el cambio de movimiento del robot manipulador, principalmente dado por el giro de los motores (42). La forma habitual de tener en cuenta las inercias del rotor es agregar una matriz diagonal a la matriz de inercia del modelo dinámico de un manipulador de robot rígido mediante el empleo de la estructura de Lagrange (43). La matriz de inercia cumple con las siguientes propiedades (1):

- Es una matriz definida positiva $M(\mathbf{q}) > 0$
- Es una matriz simétrica $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T$
- Existe la matriz inversa $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- La matriz inversa es definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} > 0$
- La matriz inversa es simétrica $M(\mathbf{q})^{-1} = M(\mathbf{q})^{-T}$
- El fenómeno inercial de un robot manipulador cubre lo siguiente $\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \|\ddot{\mathbf{q}}\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercia.
- Para los robots que cuentan únicamente con articulaciones rotacionales existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

Fuerzas centrípetas y de Coriolis

Este tipo de fenómeno está presente en los robots manipuladores con rotación y se representa como una desviación de traslación a la par del movimiento

rotatorio. Se han buscado nuevas formulaciones de la matriz de Coriolis (44), pero sigue cumpliendo algunas propiedades (45):

- La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ no es única.
- La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ y la derivada de la matriz de inercia satisfacen:

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \equiv 0$$

Por ende la matriz resultante es antisimétrica.

- La derivada temporal de la matriz de inercia y fuerzas centrípetas satisface:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$$

Par gravitacional

El par gravitacional funge como la compensación de gravedad y cumple con las siguientes propiedades (46):

- Existe una una constante $k_g > 0$ tal que:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Fenómeno de fricción

Los efectos de fricción son particularmente indeseables para los robots industriales, ya que pueden inducir grandes errores de posicionamiento. Se ha

observado que la fricción puede causar un error del 50% en algunos manipuladores industriales (47). El principal comportamiento del fenómeno de fricción es oponerse al movimiento del robot manipulador y la característica disipativa de la fricción convierte la energía mecánica en térmica. Esto último satisface $\dot{q}f_f(\dot{q}) > 0$. De manera matemática se representa como (48):

$$f_f(\dot{q}, f_e) = B\dot{q} + F_c \text{signo}(\dot{q})$$

Donde $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb respectivamente. f_e simboliza la fricción estática y está representada por el vector que contiene los coeficientes de fricción de cada uno de los servomotores del manipulador $f_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$.

2.4. Descripción del problema

El problema a solucionar es el control de posición para un robot manipulador de 3 gdl. Se eligió esta planta debido a que se cuenta con ella de manera física dentro del laboratorio de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. A continuación se describe en que consiste el problema y la metodología para resolverlo.

2.4.1. Control de posición

El problema de control de posición o problema de regulación ha sido un problema persistente en el campo de la robótica (49). Este consiste en diseñar un regulador τ tal que el error de posición $\tilde{q}(t)$ y la velocidad de movimiento

$\dot{q}(t)$ convergen asintóticamente al punto de equilibrio $\forall t \geq 0$ sin importar las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$ y $\dot{q}(0)$; es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \forall t \geq 0 \quad (2.13)$$

Donde:

- $\tilde{q}(t)$ es el error de posición.
- $\dot{q}(t)$ es la velocidad del eslabón.

En la figura 2.8 se muestra el esquema de lazo cerrado de control de posición para el espacio articular del robot manipulador. El controlador impulsa al robot manipulador hasta alcanzar la posición deseada q_d . Observando la imagen podemos deducir que el error de posición \tilde{q} es la resta de la posición actual del robot q y la posición solicitada. q_d .

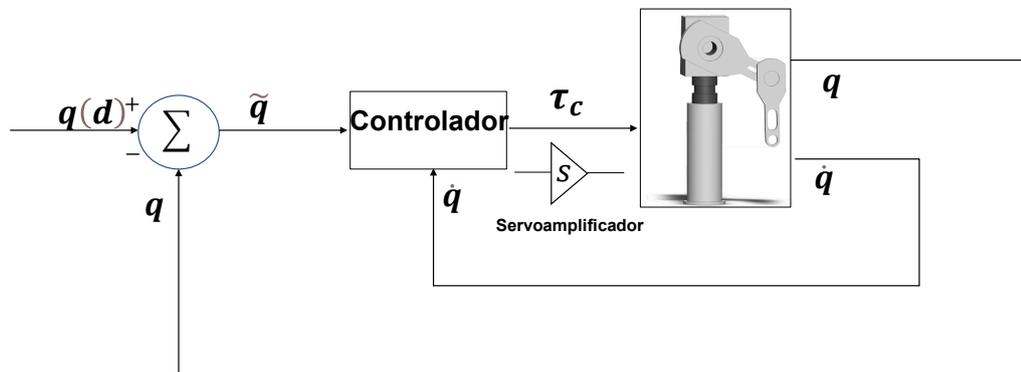


Figura 2.8: Diagrama esquemático de control de posición de robots manipuladores.

Para lograr diseñar el algoritmo de control se necesita una metodología que permita tener un desempeño alto. El regulador genera el atractor para llevar

a la articulación del robot al punto de equilibrio y no a vecindades locales. Como siguiente tema se describe una forma de diseñar algoritmos de control para reguladores llamada moldeo de energía.

2.5. Moldeo de energía

Para dar solución al problema de regulación mostrado en la ecuación (2.13), muchos investigadores han adoptado la técnica de moldeo de energía, donde demostraron que la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador y el control proporcional derivativo tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable (7). A partir de un moldeo artificial del gradiente de la energía potencial del robot $\nabla\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ se propone una función de Lyapunov que sea definida positiva; es decir: $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) > 0$. Esto con el fin de que su derivada sea semidefinida negativa $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq 0$, para poder demostrar estabilidad asintótica posteriormente. El esquema del moldeo de energía se puede ver en la Figura 2.9:

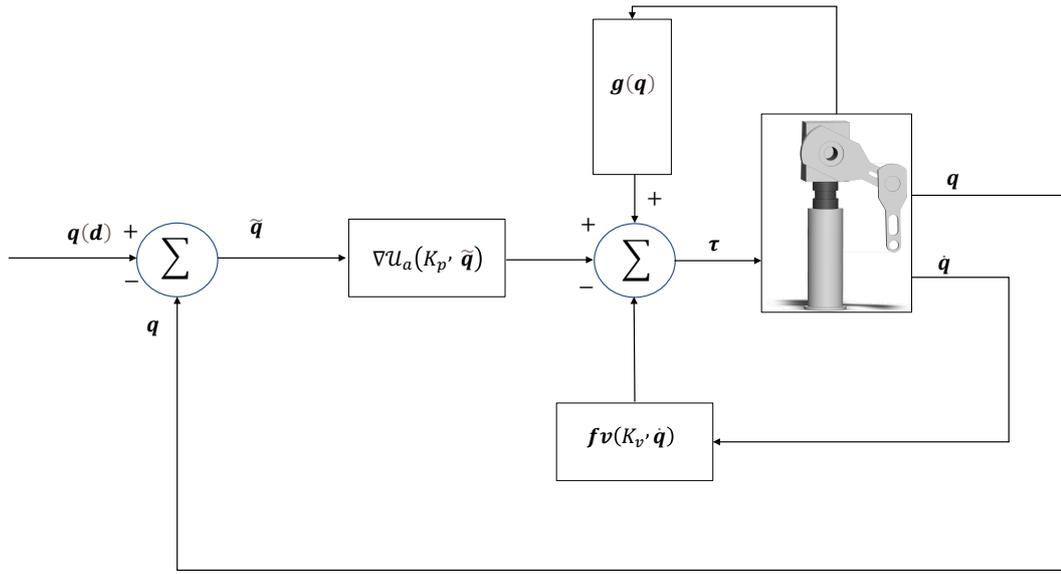


Figura 2.9: Técnica del moldeo de energía.

La siguiente ecuación describe el moldeo de energía:

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{q}) + \mathbf{g}(q) \quad (2.14)$$

Donde:

- $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) > 0$ es la energía potencial artificial.
- $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva.
- $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.
- $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{q})$ es una función disipativa: $\dot{q}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{q}) > 0$.
- Regla de diseño:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) \implies \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) < 0$$

Cabe resaltar que las ganancias son constantes.

2.6. Teoría de estabilidad de Lyapunov

Debido a que hay muchos sistemas que tienen dinámicas no lineales, es esencial analizar rigurosamente dichos sistemas y abordar cuestiones tales como la existencia de equilibrio, su estabilidad y la dinámica cualitativa (50). La teoría de estabilidad de Lyapunov nos ayuda bastante a lograr este objetivo. Sin importar el orden que tenga el sistema es posible conseguir la información necesaria acerca de la estabilidad del punto de equilibrio del sistema sin importar la respuesta de la ecuación diferencial. Con esto, la teoría asegura que la derivada temporal debe ser definida negativa hasta alcanzar el punto de equilibrio.

El método directo nos dice que al construir una función de energía continua que se pueda diferenciar y sea definida positiva, la variación temporal del punto de equilibrio es mayormente negativa o cero. Esto quiere decir que para toda condición inicial dentro del atractor el punto de equilibrio es estable de manera global. Por el contrario si la función resulta ser definida negativa, el punto de equilibrio es asintóticamente estable de manera global (51),(1).

El teorema se enfoca en estudiar los sistemas dinámicos que se definen como la siguiente ecuación (52):

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.15}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. El sistema definido en (2.6) se dice que es un sistema invariante en el tiempo. Para todo estado inaugural que se encuentre adentro del atractor, la energía presente del sistema en el área de atracción decae al pasar

el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio siempre y cuando el sistema tenga estado de equilibrio asintóticamente estable. No se debe confundir la estabilidad del sistema con la estabilidad del punto de equilibrio.

Entonces una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ para la ecuación (2.6) es una función de Lyapunov si la derivada de esta a lo largo de las trayectorias cumple con:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq \quad \forall t \geq 0 \quad (2.16)$$

2.6.1. Método directo de Lyapunov

Se supone que el estado final deseado es el origen del espacio de estados. Esto sigue siendo válido si se desea un punto de equilibrio no trivial, ya que el origen se puede colocar allí mediante una transformación de coordenadas adecuadas (53). Por lo tanto los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov son los siguientes (32),(1):

Estabilidad

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (2.6), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que su derivada temporal satisfaga (2.6).

Este teorema da sustento suficiente para estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. La conclusión del teorema se mantiene si $V(t, \mathbf{x})$ para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva globalmente en lugar de ser definida positiva localmente.

Estabilidad asintótica global

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (2.6), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ definida positiva tal que su derivada satisfaga:

- $\dot{V}(t, \mathbf{0}) \forall t \geq 0$.
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Lo que significa que la variable de estado $\mathbf{x}(t)$ cumple con:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \longrightarrow \mathbf{0} \quad (2.17)$$

2.7. Plataformas de trabajo

En esta sección, presentamos las herramientas de trabajo utilizadas para llevar a cabo la investigación.

2.7.1. Plataforma de simulación *Matlab*

Matlab es un entorno computacional para álgebra lineal, gráficas matemáticas, ecuaciones, simulaciones dinámicas, etc. El software puede ser obtenido mediante las instituciones educativas y su simplicidad de instalación en las computadoras lo hace de gran alcance para el desarrollo de temas.

Debido a la facilidad de programación aunado a la fácil aplicación de la teoría de robótica diversos códigos pueden ser implementados para el aprendizaje. Existe literatura para recrear experimentos diseñados en *Matlab* como por ejemplo en (54). A pesar de esto, la mayor parte de los escritos acerca de robóti-

ca presentan ejemplos con robots simples de dos enlaces o hasta tres para los cuales el análisis es manejable. Para un robot realista de seis ejes, los cálculos cinemáticos y dinámicos son complejos y puede ser difícil obtener información sobre un problema (55).

Por estas razones se escogió la interfaz de *Matlab* en aras de implementar las propuestas de algoritmos de control. Se desea ver las respuestas que tienen los diseños así como también los gráficos respectivos para poder interpretarlos de manera adecuada. Las respuestas obtenidas son muy parecidas debido a que la plataforma experimental que se tiene funciona con la tecnología de transmisión directa.

2.7.2. Plataforma experimental para robot manipuladores

Para poder llevar a cabo los experimentos es necesario un robot manipulador. La plataforma experimental llamada rotradi, ha sido diseñada y construida en la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Consiste en un robot de transmisión directa de 3gdl cuyo espacio de trabajo es tridimensional, cuenta con tarjetas electrónicas y programas para realizar las aplicaciones de automatización. Para fines del trabajo de tesis, cabe resaltar que la característica principal del rotradi es su arquitectura abierta; por lo cual, cualquier estrategia de control se puede validar experimentalmente incluyendo la propuesta hecha de los algoritmos de control. En la figura 2.10 se muestra el robot mencionado.



Figura 2.10: Robot experimental de transmisión directa de 3gdl.

Los tres eslabones rígidos del rotradi fueron maquinados en CNC y su material es aluminio 6061, para unirlos se hizo uso de servomotores de transmisión directa. Los motores encargados de formar las articulaciones del codo, hombro y base son los modelos DM1015-B, DM1200-A y DM1050-A respectivamente. Sus especificaciones las podemos observar en la siguiente tabla:

Articulación	Modelo	Encoder	Torque máximo
Codo	DM1015-B	2612440 $\frac{p}{rev}$	15 Nm
Hombro	DM1200-A	1015808 $\frac{p}{rev}$	150 Nm
Brazo	DM1050-A	1638400 $\frac{p}{rev}$	50Nm

Tabla 2.1: Especificaciones de los servomotores

La electrónica consta de una arquitectura de FPGA's, cuay función es leer los pulsos de los encoders incrementales. Tiene 3 convertidores digital-analógico de 12 bits, puertos I/O y 3 timers para programar el tiempo de muestreo de

2.5ms. Para la programación se tiene un lenguaje conocido, de mayor potencial, confiable y versátil, el lenguaje C. Despliega la información de posiciones y velocidades articulares en el momento lo cual es de gran ayuda para conocer el comportamiento del algoritmo de control en tiempo real. Todas las ventajas descritas previamente no serían posible de implementar en un robot industrial comercial. Entonces, lo que obtendremos será una representación mas fehaciente del control.

Diseño de algoritmos de control

En el presente capítulo se muestra la metodología que se empleó para diseñar desde cero nuestros reguladores y solucionar el problema de control de posición presentado. Primeramente se diseñó un algoritmo con ganancias constantes y posteriormente se formuló el concepto para ganancias variables. Se analiza el sistema de control en lazo cerrado y se realiza la demostración matemática de estabilidad asintótica del punto de equilibrio, así como la robustez paramétrica de los algoritmos. En la figura 3.1 se observa la secuencia de trabajo para llegar a los resultados.

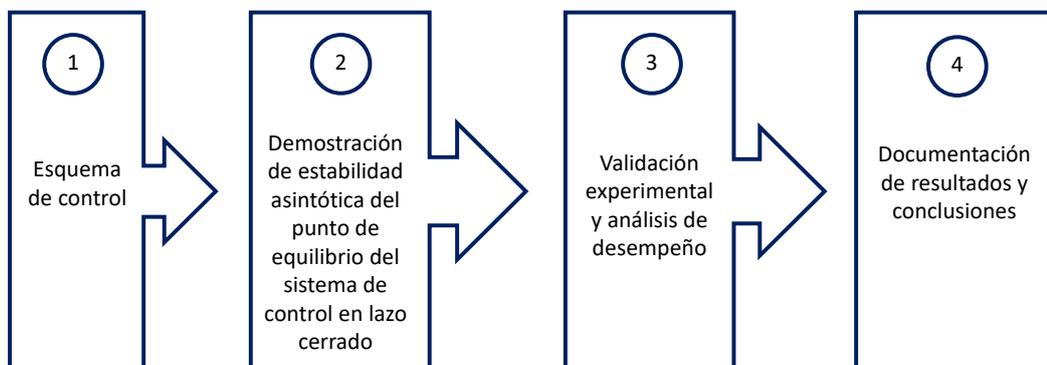


Figura 3.1: Secuencia del trabajo.

3.1. Ganancias constantes

Las ganancias constantes, como su nombre lo indica, son constantes y no dependen de ninguna variable como tal. Como sabemos, el algoritmo más conocido en la literatura es el PD (proporciona-derivativo). Este algoritmo originalmente emplea ganancias constantes para el sistema en lazo cerrado. La estructura que lo define más una compensación de gravedad esta dada de la siguiente manera (7):

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\boldsymbol{q}} + K_v \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \quad (3.1)$$

Donde:

- $\tilde{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de error de posicionamiento.
- $\dot{\boldsymbol{q}}$ es el vector de la velocidad.
- $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de la ganancia proporcional definida positiva.
- $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de la ganancia proporcional definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado de (3.1) tiene la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\boldsymbol{q}} \\ M(\boldsymbol{q})^{-1} [K_p \tilde{\boldsymbol{q}} - K_v \dot{\boldsymbol{q}} - C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \dot{\boldsymbol{q}} - B \dot{\boldsymbol{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Debido a que las ganancias proporcional y derivativa son matrices definidas positivas por diseño, colocamos un ejemplo de unas propuestas de ganancias constantes para las ganancias proporcional y derivativa respectivamente de

un robot de 3gdl:

$$K_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \frac{Nm}{grado} \quad ; \quad K_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{Nm \text{ grado}}{\text{segundo}} \quad (3.3)$$

La desventaja de utilizar ganancias constantes son:

- Las ganancias constantes no alcanzan a tener un alto desempeño.
- Existe una pérdida de tiempo en la sintonización manual de dichas ganancias.

3.2. Ganancias variables

A diferencia de su contraparte constante, las ganancias variables dependen de las variables de estados del error de posición y la velocidad. Para explicarlo de mejor manera tomaremos la ecuación (3.1) y la modificaremos:

$$\tau = K_p(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} + K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.4)$$

Como se puede observar en la ecuación (3.4) tenemos lo siguiente:

- $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de error de posicionamiento.
- $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de la velocidad.
- $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de la ganancia proporcional definida positiva dependiente del error de posición.

- $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de la ganancia proporcional definida positiva, dependiente del error de posición y la velocidad.

De igual manera el lazo cerrado de control cambia:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Por lo tanto las matrices quedan definidas en torno a esas variables, por ejemplo en un robot de 3 gdl tendríamos:

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p1}(\tilde{q}_1) & 0 & 0 \\ 0 & k_{p2}(\tilde{q}_2) & 0 \\ 0 & 0 & k_{p3}(\tilde{q}_3) \end{bmatrix} \frac{Nm}{grado} ; K_v = \begin{bmatrix} k_{v1}(\dot{q}_1) & 0 & 0 \\ 0 & k_{v2}(\dot{q}_1) & 0 \\ 0 & 0 & k_{v3}(\dot{q}_1) \end{bmatrix} \frac{Nm \text{ grado}}{s} \quad (3.6)$$

De las cuales por diseño k_{pi} y k_{vi} son mayores a 0; es decir $k_{pi} > 0$ y $k_{vi} > 0$.

La ventaja de las ganancias variables es que al ser dependientes del error de posición y la velocidad podemos tener un margen considerable de mejora en torno al error del algoritmo. Sin embargo, para sintonizar a la ganancia variable se debe de proponer una regla de sintonía o proponer un modo auto ajustable dependiendo mayormente del torque máximo del servomotor.

3.3. Familia de reguladores

Como vimos anteriormente un algoritmo de control puede ser propuesto ya sea con ganancias constantes o variables según sea la decisión del usuario. Por otra parte, la metodología de moldeo de energía nos permite proponer familias de funciones dependientes del error y la posición mediante el gradiente de la energía potencial artificial del robot (7). La función debe ser acotada y suave de tal manera que se asemeje a la figura 2.7 puesto que así se obtiene una sencilla programación, mejoramos el desempeño, se asegura un correcto funcionamiento de los servomotores sin saturarlos y necesitamos conocer solamente los parámetros del vector de compensación de gravedad. Además, para demostrar la estabilidad, la función propuesta otorga una ventaja matemática. Al añadir la función acotada a la ecuación del regulador con ganancias constantes (3.1) se obtiene:

$$\tau = K_p \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.7)$$

Donde:

- $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es la función acotada del término proporcional.
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es la función acotada del término derivativo.

3.3.1. Propuesta del diseño de algoritmos de control

De acuerdo a lo presentado previamente (24),(56),(7) las estructuras de control con ganancias variables tienen una ecuación matemática definida. Sin

embargo, en la ecuación (3.8) se presenta una alternativa diferente a lo mostrado en la literatura hoy en día:

$$\tau = K_p(\tilde{\mathbf{q}})f(\tilde{\mathbf{q}}) + K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})f(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.8)$$

Los elementos de dicha ecuación pueden ser propuestos en base a la metodología explicada previamente. En este caso, tenemos:

- $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es la función propuesta dependiente del error de posición, se sugiere que el comportamiento de dicha función sea acotada y suave.
- $K_p(\tilde{\mathbf{q}}) = k_p \cosh(f_p(\tilde{\mathbf{q}}))$ es la ganancia variable proporcional y $f_p(\tilde{\mathbf{q}})$ es la propuesta de una función Lipchitz suave.
- $f(\dot{\mathbf{q}})$ es la función propuesta dependiente la velocidad.
- $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = k_v \cosh(f(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))$ es la ganancia variable derivativa mientras que $f(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es la función propuesta dependiente del error de posición y la velocidad.

Ahora que hemos obtenido una nueva estructura de control procedemos a desarrollar dichos algoritmos con las funciones pensadas en aras de obtener respuestas favorables.

3.4. Algoritmo con ganancias constantes

Se propone un algoritmo de control de ganancias constantes que dependen de una función Lipchitz; suave y continua para entender como se diseña un

regulador de este estilo. Por lo tanto observamos la propuesta del regulador que incluye la respectiva función acotada y suave:

$$\tau = K_p \left(\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - K_v \left(\frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.9)$$

Para que la propuesta funcione de mejor manera buscamos que la función que depende de las variables de velocidad y error de posición este acotada. Se escogió a $f(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}$ y a $f(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})}$ debido a que su comportamiento es el siguiente:

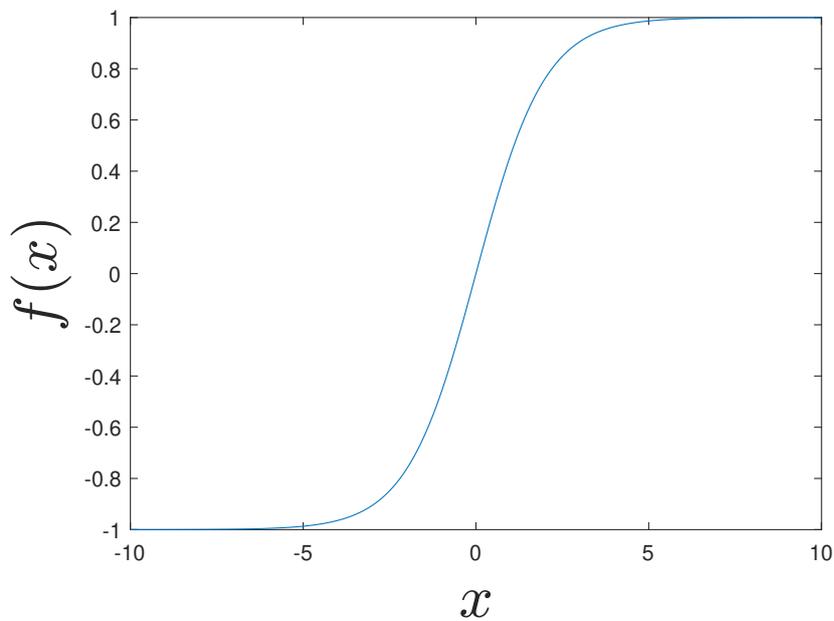


Figura 3.2: Perfil de la función acotada.

Al ser un robot de 3gdl de libertad el algoritmo de control se ve de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= k_{p1} \frac{\sinh(\tilde{q}_1)}{1 + \cosh(\tilde{q}_1)} - k_v \frac{\sinh(\dot{q}_1)}{1 + \cosh(\dot{q}_1)} + g(q) \\
 \tau_2 &= k_{p2} \frac{\sinh(\tilde{q}_2)}{1 + \cosh(\tilde{q}_2)} - k_v \frac{\sinh(\dot{q}_2)}{1 + \cosh(\dot{q}_2)} + g(q) \\
 \tau_3 &= k_{p3} \frac{\sinh(\tilde{q}_3)}{1 + \cosh(\tilde{q}_3)} - k_v \frac{\sinh(\dot{q}_3)}{1 + \cosh(\dot{q}_3)} + g(q)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde: $k_{p1} = 2.5$, $k_{p2} = 1$; $k_{p3} = 0.3$ son los respectivos valores basados a prueba y error para la parte proporcional mientras que $k_{v1} = 0.1$; $k_{v2} = 0.2$; $k_{v3} = 0.01$ es para la parte derivativa.

3.5. Algoritmos con ganancias variables

En base a (56) se proponen funciones Lipchitz para la propuesta del algoritmo de control. Se usa la definición de ganancias formadas dicha función; por lo cual se propone diversas versiones híbridas de control con ganancias variables. Estas están mostradas a continuación en su respectivo espacio para visualizar su estructura.

3.5.1. Algoritmo 1

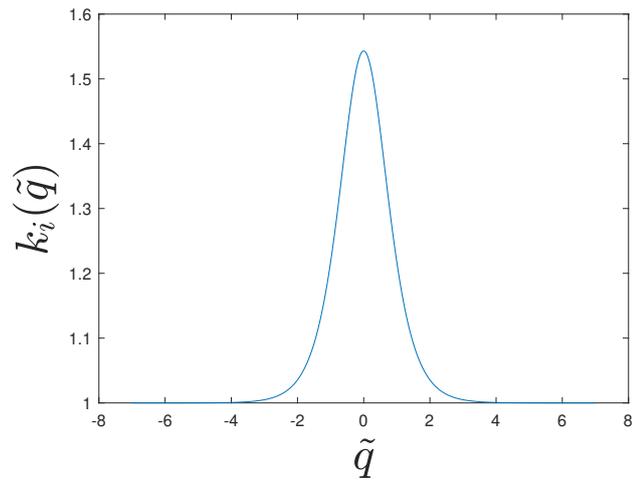
Para el primer algoritmo proponemos lo siguiente:

$$\tau = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}})}\right) \left(\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}\right) - k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + \cosh(\dot{\mathbf{q}})}\right) \left(\frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})}\right) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{3.11}$$

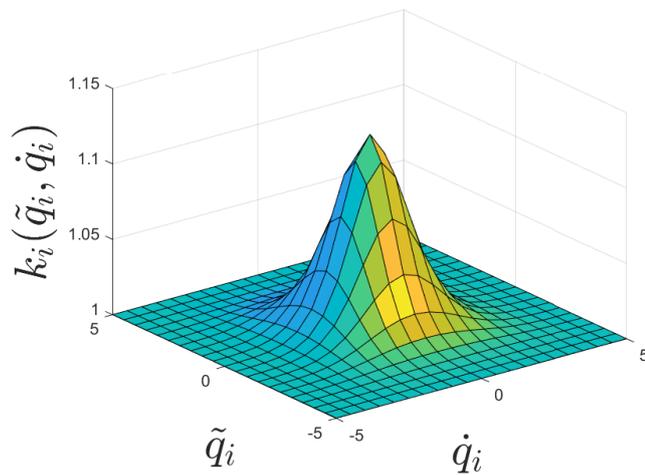
Donde:

- $f(\tilde{q}) = \frac{\sinh(\tilde{q})}{1+\cosh(\tilde{q})}$ es la función propuesta dependiente del error de posición.
- $K_p(\tilde{q}) = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})}\right)$ es la ganancia variable proporcional.
- $f(\dot{q}) = \frac{\sinh(\dot{q})}{1+\cosh(\dot{q})}$ es la función propuesta dependiente de la velocidad
- $K_v(\tilde{q}, \dot{q}) = k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})+\cosh(\dot{q})}\right)$ es la ganancia variable derivativa.

El perfil de la función acotada es el mismo que el visto en la figura 3.2, sin embargo los perfiles de la ganancia variable son diferentes. En la figura 3.3a se observa el comportamiento de la ganancia variable proporcional mientras que en la figura 3.3b se ve como es la forma de la ganancia derivativa:



(a) Ganancia variable proporcional.



(b) Ganancia variable derivativa.

Gráficamente sabemos que las funciones y las propuestas de ganancias variables están acotadas, de manera matemática se puede demostrar:

$$\begin{aligned}
 k_p(\tilde{\mathbf{q}}) &\leq \alpha \\
 k_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq \alpha_v \\
 f_p(\tilde{\mathbf{q}}) &\leq \{k_p|\tilde{\mathbf{q}}|
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Considerando que $f_p(\tilde{q}) = \frac{1}{\cosh(\tilde{q})}$ se deduce:

$$\cosh(\tilde{q}) \geq 1 \quad (3.13)$$

Entonces:

$$0 \leq \frac{1}{\cosh(\tilde{q})} \leq 1 \quad (3.14)$$

Para conocer el comportamiento de la ganancia variable $k_p(\tilde{q}) = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})}\right)$ tomamos ambos límites para evaluar k_p ; usando el límite inferior tenemos:

$$k_p(\tilde{q}) = k_p \cosh(0) = k_p(1) \quad (3.15)$$

Utilizando el límite superior:

$$k_p(\tilde{q}) = k_p \cosh(1) \approx k_p(1.54) \quad (3.16)$$

Con esto se puede establecer:

$$1 \leq k_p(\tilde{q}) \leq \beta \quad (3.17)$$

Siendo $\beta < \frac{3}{2}$ y $\beta > 0$, con $f_v(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{\cosh(\tilde{q}) + \cosh(\dot{q})}$ se usa una analogía similar:

$$\cosh(\dot{q}) \geq 1 \quad (3.18)$$

Entonces:

$$\cosh(\tilde{q}) + \cosh(\dot{q}) > 2 \quad (3.19)$$

Se puede concluir que:

$$0 \leq \frac{1}{\cosh(\tilde{q}) + \cosh(\dot{q})} \leq \frac{1}{2} \quad (3.20)$$

Para conocer el comportamiento de la ganancia variable $k_v(\tilde{q}, \dot{q})$ tomaremos primero el límite inferior:

$$k_v(\tilde{q}, \dot{q}) = k_v \cosh(0) = k_v(1) \quad (3.21)$$

Utilizando el límite superior:

$$k_v(\tilde{q}, \dot{q}) = k_v \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \approx k_v(1.12) \quad (3.22)$$

Los límites de la ganancia quedan como:

$$1 \leq k_v(\tilde{q}, \dot{q}) \leq \gamma \quad (3.23)$$

Siendo $\gamma < \frac{28}{25}$ y $\gamma > 0$. El lazo cerrado de la etapa de control, lo podemos mirar en la imagen subsecuente:

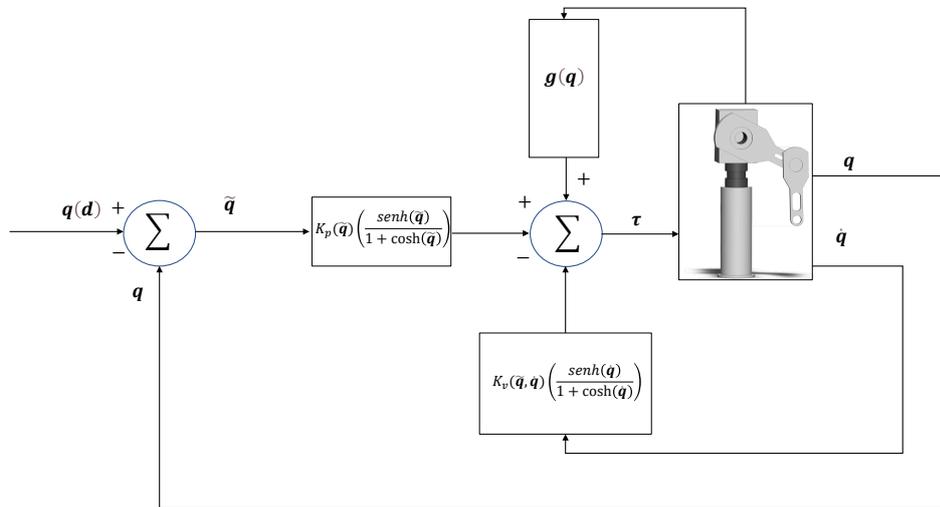


Figura 3.4: Lazo cerrado del sistema.

A partir del modelo dinámico del robot manipulador y la propuesta de ga-

nancias variables se construye la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left(\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1+\cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Siendo (3.24) la ecuación en lazo cerrado, por lo cual es importante demostrar la unicidad y la existencia del punto de equilibrio. Para llevar a cabo dicha demostración realizamos lo siguiente:

- En el primer elemento de la ecuación en lazo cerrado (3.24) notamos: $-\dot{\mathbf{q}} = -1\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva por lo tanto la inversa de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe, así como también es definida positiva
- $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $B\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- Las matrices de las ganancias proporcional $K_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y derivativa $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ son definidas positivas por definición.
- Por último, la propuesta de funciones dependientes del error de posición y la velocidad solo se hacen cero si dichas variables valen 0; es decir:

$$\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1+\cosh(\tilde{\mathbf{q}})} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = 0 \text{ y } \frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}})}{1+\cosh(\dot{\mathbf{q}})} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$$

En conclusión el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = 0 \in R^{2n}$ existe y es único.

3.5.2. Algoritmo 2

La estructura de este algoritmo propuesto se ve de la siguiente manera:

$$\tau = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})}\right) \frac{\arctan(\tilde{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\tilde{q})^2)}} - k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q}) + \cosh(\dot{q})}\right) \frac{\arctan(\dot{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\dot{q})^2)}} \quad (3.25)$$

Donde los valores representan:

- $f(\tilde{q}) = \frac{\arctan(\tilde{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\tilde{q})^2)}}$ es la función propuesta dependiente del error de posición.
- $K_p(\tilde{q}) = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})}\right)$ es la ganancia variable proporcional.
- $f(\dot{q}) = \frac{\arctan(\dot{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\dot{q})^2)}}$ es la función propuesta dependiente de la velocidad
- $K_v(\tilde{q}, \dot{q}) = k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q}) + \cosh(\dot{q})}\right)$ es la ganancia variable derivativa híbrida.

Los perfiles de las ganancias variables se ven en las figuras 3.3a y 3.3b respectivamente, mientras que el perfil de la función propuesta es similar al de la figura 3.2. Utilizando los mismos pasos que en el algoritmo 1 es posible construir la siguiente ecuación no lineal que incluye las ganancias variables propias:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p(\tilde{q}) \left(\frac{\arctan(\tilde{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\tilde{q})^2)} \right) - K_v(\tilde{q}, \dot{q}) \left(\frac{\arctan(\dot{q})}{\sqrt{1.5 + (\tanh(\dot{q})^2)} \right) - C(\mathbf{q}, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Siendo (3.26) la ecuación en lazo cerrado, por lo cual es importante demostrar la unicidad y la existencia del punto de equilibrio. Para llevar a cabo dicha demostración realizamos lo siguiente:

- En el primer elemento de la ecuación en lazo cerrado (3.26) notamos: $-\dot{\mathbf{q}} = -1\dot{\mathbf{q}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva por lo tanto la inversa de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe, así como también es definida positiva
- $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0 \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $B\dot{\mathbf{q}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- Las matrices de las ganancias proporcional $K_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y derivativa $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ son definidas positivas por definición.
- Por último, la propuesta de funciones dependientes del error de posición y la velocidad solo se hacen cero si dichas variables valen 0; es decir:

$$\left(\frac{\arctan(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{1.5+(\tanh(\tilde{\mathbf{q}})^2)}} \right) = 0 \leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = 0 \text{ y } \left(\frac{\arctan(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{1.5+(\tanh(\dot{\mathbf{q}})^2)}} \right) = 0 \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$$

En conclusión el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = 0 \in R^{2n}$ existe y es único.

3.5.3. Algoritmo 3

Este algoritmo de control tiene su forma como sigue:

$$\begin{aligned} \tau = & kpcosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}})}\right) \frac{\operatorname{asinh}(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\operatorname{atan}(\tilde{\mathbf{q}})^2)}} \\ & - kvcosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}})+\cosh(\dot{\mathbf{q}})}\right) \frac{\operatorname{asinh}(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\operatorname{atan}(\dot{\mathbf{q}})^2)}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Cuyas variables significan:

- $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\operatorname{asinh}(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\operatorname{atan}(\tilde{\mathbf{q}})^2)}}$ es la función propuesta dependiente del error de posición.

- $K_p(\tilde{\mathbf{q}}) = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}})}\right)$ es la ganancia variable proporcional.
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\text{asinh}(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\text{atan}(\dot{\mathbf{q}})^2)}}$ es la función propuesta dependiente de la velocidad
- $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{\mathbf{q}})+\cosh(\dot{\mathbf{q}})}\right)$ es la ganancia variable derivativa híbrida.

Los perfiles de las ganancias variables se ven en las figuras 3.3a y 3.3b respectivamente, mientras que el perfil de la función propuesta es similar al de la figura 3.2. De igual forma que en el algoritmo 1 y 2, expresamos de manera matemática la ecuación que describe a nuestro algoritmo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left(\frac{\text{asinh}(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\text{atan}(\tilde{\mathbf{q}})^2)} \right) - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \left(\frac{\text{asinh}(\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{3+(\text{atan}(\dot{\mathbf{q}})^2)} \right) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Siendo (3.28) la ecuación en lazo cerrado, por lo cual es importante demostrar la unicidad y la existencia del punto de equilibrio. Para llevar a cabo dicha demostración realizamos lo siguiente:

- En el primer elemento de la ecuación en lazo cerrado (3.26) notamos: $-\dot{\mathbf{q}} = -1\dot{\mathbf{q}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva por lo tanto la inversa de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe, así como también es definida positiva
- $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0 \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- $B\dot{\mathbf{q}} \leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0$
- Las matrices de las ganancias proporcional $K_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y derivativa $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ son definidas positivas por definición.

- Por último, la propuesta de funciones dependientes del error de posición y la velocidad solo se hacen cero si dichas variables valen 0; es decir:

$$\left(\frac{\operatorname{asinh}(\tilde{q})}{\sqrt{3+(\operatorname{atan}(\tilde{q})^2)}} \right) = 0 \leftrightarrow \tilde{q} = 0 \text{ y } \left(\frac{\operatorname{asinh}(\dot{q})}{\sqrt{3+(\operatorname{atan}(\dot{q})^2)}} \right) = 0 \leftrightarrow \dot{q} = 0$$

En conclusión el punto de equilibrio $[\tilde{q}, \dot{q}]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ existe y es único.

3.6. Estabilidad asintótica de Lyapunov

Cuando se expresa coloquialmente de que un sistema es estable, se hace referencia al comportamiento adecuado que pueda llegar a tener. Sin embargo, existe una gran diferencia de teoría al hablar del punto de equilibrio de un sistema. Sabemos que existen modelos dinámicos no lineales y su contraparte lineal, el punto de equilibrio es aquel vector $x_e \in \mathbb{R}^n$ de dicha ecuación donde las fuerzas del sistema encuentran un equilibrio; es decir la función es igual a cero.

Por lo tanto para demostrar estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación (3.8) basta con demostrar la existencia de ϵ en un rango dado, por ende proponemos una función candidata de Lyapunov mediante la siguiente ecuación:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \int_0^{\tilde{q}} [f(\sigma)]^T K_p(\sigma) d\sigma - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T M(q) \dot{q} \quad (3.29)$$

Donde $f(\sigma)$ engloba a las propuestas de funciones descritas en los algoritmos de control diseñados con ganancias variables. No obstante, también es importante conocer las cotas para dichas funciones, por lo tanto:

$$\sqrt{n}\mu_a, \sqrt{n}\mu_a \|\mathbf{x}\| \leq \|f(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{n}\gamma_a \sqrt{n}\gamma_a \|\mathbf{x}\|; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.30)$$

Siendo γ_a y μ_a las cotas superior e inferior respectivamente. Para los términos proporcional y derivativo se renombran como γ_{pa}, μ_{pa} y γ_{va}, μ_{va} . Para continuar con la demostración, utilizamos una propiedad mostrada en (19); Si existen constantes positivas α y β tales que, representan los límites superior e inferior de ciertas funciones continuamente integrables que satisfagan:

$$\alpha \geq k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \geq \beta; \forall \tilde{q}_i, \dot{q}_i \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\beta\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} f(\boldsymbol{\sigma})K_p(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2}\alpha\|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad (3.31)$$

Con lo cual podemos decir que ϵ_0 es una constante que satisface (3.32); entonces, la función candidata de Lyapunov (3.29) es definida positiva:

$$\frac{\sqrt{\beta\mu_a\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}} [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] > \epsilon_0 > 0 \quad (3.32)$$

Nótese que lo siguiente se satisface:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} &= \left| \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right| \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (3.33)$$

Utilizando la propiedad (3.31) y la expresión (3.30), conseguimos:

$$\int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} f(\boldsymbol{\sigma})K_p(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} \geq \frac{1}{2}\beta\|[f(\tilde{\mathbf{q}})]\|\|\tilde{\mathbf{q}}\| \geq \frac{1}{2}\beta\sqrt{n}\mu_{pa}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.34)$$

Además:

$$-\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \geq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}\|\tilde{\mathbf{q}}\|\|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (3.35)$$

En base a lo anterior, la función de Lyapunov está acotada inferiormente como:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \frac{1}{2}\beta\sqrt{n}\mu_{pa}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{1}{2}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}\|\dot{\mathbf{q}}\| - \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}\|\tilde{\mathbf{q}}\|\|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (3.36)$$

Reescribiendo la ecuación (3.36) en forma cuadrática:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta\sqrt{n}\mu_{pa} & \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \\ \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} & \lambda_{M(\mathbf{q})}^{min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} > 0 \quad (3.37)$$

Para que la ecuación (3.37) sea definida positiva ϵ_0 debe existir en el siguiente intervalo:

$$\frac{\sqrt{\beta\sqrt{n}\mu_{pa}\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}}[1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|] > \epsilon_0 > 0 \quad (3.38)$$

Para obtener la derivada de la función candidata de Lyapunov (3.29) sustituimos $\ddot{\mathbf{q}}$ y cancelamos términos obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} f(\tilde{\mathbf{q}}_1) \\ f(\tilde{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ f(\tilde{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} - \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|}\tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|[1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2}\tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & -\dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} f(\dot{\mathbf{q}}_1) \\ f(\dot{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ f(\dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
& + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & -\dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} f(\dot{\mathbf{q}}_1) \\ f(\dot{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ f(\dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} f(\dot{\mathbf{q}}_1) \\ f(\dot{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ f(\dot{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} \\
& - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} f(\tilde{\mathbf{q}}_1) \\ f(\tilde{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ f(\tilde{\mathbf{q}}_n) \end{bmatrix} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T] \dot{\mathbf{q}} \\
& + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Por propiedad (1) sabemos que; existe una constante k_c tal que satisface lo siguiente para todo $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \tag{3.42}$$

Por lo tanto empleando la propiedad (3.42), la ecuación (3.41) queda acotada superiormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{va} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_B^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\
&+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\max} \sqrt{n} \gamma_{va} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \epsilon_0 k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\
&+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{M(\dot{\mathbf{q}})}^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{M(\dot{\mathbf{q}})}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\|
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Entonces:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T [A] \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0 \tag{3.44}$$

Donde:

- $A_{11} = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa}$
- $A_{12} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[\lambda_{M(\dot{\mathbf{q}})}^{\min} - \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\max} \sqrt{n} \gamma_{va} - \lambda_B^{\max} \right]$
- $A_{21} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[\lambda_{M(\dot{\mathbf{q}})}^{\min} - \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\max} \sqrt{n} \gamma_{va} - \lambda_B^{\max} \right]$
- $A_{22} = \lambda_B^{\min} + \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{va} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} + \epsilon_0 k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{M(\dot{\mathbf{q}})}^{\max}$

Para que la ecuación (3.44) sea una función definida positiva el determinante de la matriz A debe ser positivo, dicha condición se satisface para cualquier

ϵ_0 existente en el siguiente intervalo:

$$\frac{\lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} \left[\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} \right]}{\lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} [\lambda_{K_p(\tilde{\mathbf{q}})}^{\min} \sqrt{n} \gamma_{pa} - \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}] + \frac{1}{4} [\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} \lambda_{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}^{\max} \sqrt{n} \gamma_{va} - \lambda_B^{\max}]^2} [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} > \epsilon_0 > 0 \quad (3.45)$$

En base a lo anterior $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función definida negativa y la propuesta candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva si ϵ_0 satisface (3.45) y (3.38). Más aún el valor específico de ϵ_0 no es necesario conocerlo, basta con probar su existencia y el rango donde yace para fines de estabilidad. Por lo tanto, según el método directo de Lyapunov, el origen de la ecuación del sistema de lazo cerrado $[(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es asintóticamente estable de manera global. Esto quiere decir que, ambas variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ convergen a cero asintóticamente cuando el tiempo va en aumento.

3.7. Robustez paramétrica los algoritmos de control

La robustez de los reguladores diseñados con ganancias variables, permiten hacerle frente a valores que afectan el control (coeficientes de fricción, centros de masas, inercias de los robots, etc.). Para poder asegurar que la propuesta del algoritmo de control es robusto se debe demostrar que el error esta acotado y no tiene relación con el modelo dinámico del robot analizado. Comenzamos con

lo siguiente:

$$\frac{1}{2}k_c\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} K_p(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2}k_{ci}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.46)$$

Como ya lo demostramos, la función propuesta de Lyapunov es mayor a 0 $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y su derivada es menor igual a 0 $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$. Por tanto la función es decreciente; es decir:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) > 0; t \geq 0 \quad (3.47)$$

Entonces la ecuación esta acotada superior de la siguiente forma:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \leq \frac{1}{2}\lambda_{M(\mathbf{q})(0)}^{max}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 + \frac{1}{2}k_{ci}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 - \epsilon\lambda_{M(\mathbf{q})(0)}^{max}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 \quad (3.48)$$

Utilizando (3.47)

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq \frac{1}{2}\lambda_{M(\mathbf{q})(t)}^{min}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \frac{1}{2}k_c\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\lambda_{M(\mathbf{q})(t)}^{max}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (3.49)$$

Realizando álgebra y reduciendo términos podemos describir a la norma euclidiana del error de posición como sigue a continuación:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{k_{ci}}{k_c}}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \quad (3.50)$$

Con esto se llega al resultado esperado para verificar que el error esta acotado. Aseguramos que los reguladores diseñados serán robustos

frente a los parámetros numéricos desconocidos de cualquier robot manipulador.

3.8. Regla de sintonía

La regla de sintonía es una ecuación matemática que se dicta en torno al torque máximo que puede ser otorgado por el servomotor del robot utilizado (56). La mayoría de autores sugieren utilizar entre el 80 % y 90 % del torque máximo para evadir la saturación de los servomotores. La propuesta que se da en este trabajo reside en la siguientes ecuación:

$$\begin{aligned}k_p &= \tau^{max} [\tanh(\sigma) - 0.01] \\k_v &= \frac{1}{2} (\tau^{max} [\tanh(\sigma) - 0.01])\end{aligned}\tag{3.51}$$

Se propuso la ecuación (3.51) debido a que la función $\tanh(x)$ esta acotada; por lo cual, si el usuario escoge por error una ganancia muy grande la misma regla impedirá una saturación. A su vez, si se selecciona un valor muy pequeño el torque no se aplicará haciendo que el usuario se fije en su implementación sin dañar al robot. Es válido sugerir un rango de valores para una respuesta deseada, en este caso se sugiere cualquier valor por encima de 1, es decir $\sigma > 1$. Para el correcto funcionamiento de la regla de sintonía, el algoritmo debe estar acotado de 1 a -1 . De no ser el caso, basta con proponer una nueva regla en torno a las necesidades de dicha función escogida.

RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos por medio de simulaciones y una implementación real del algoritmo de control en el robot manipulador. Las gráficas se discuten así como también se presenta una explicación para un mejor entendimiento.

4.1. Resultados de simulación

Con el fin de mostrar la funcionalidad de los reguladores propuestos con ganancias variables, implementamos el control en un robot de 3gdl. La finalidad del experimento es llevar a las articulaciones a las posiciones pedidas $[45, 45, 90]^T$ grados, partiendo de la posición de casa $[0, 0, 0]^T$ grados. En la tabla 2.1 se observan los torques máximos que se le pueden aplicar al robot manipulador. Gracias que el robot es un manipulador de transmisión directa podemos recrear un entorno parecido en la simulación, no obstante fue necesario obtener los parámetros numéricos del robot mediante identificación paramétrica como se indica en (1).

4.1.1. Algoritmo ganancias constantes

Primeramente analizaremos el resultado del algoritmo con ganancias constantes. Al implementar el diseño en *Matlab* se obtienen dos imágenes. En la figura 4.1 están los torques aplicados a las articulaciones del manipulador, mientras que en la figura 4.2 el error de posición:

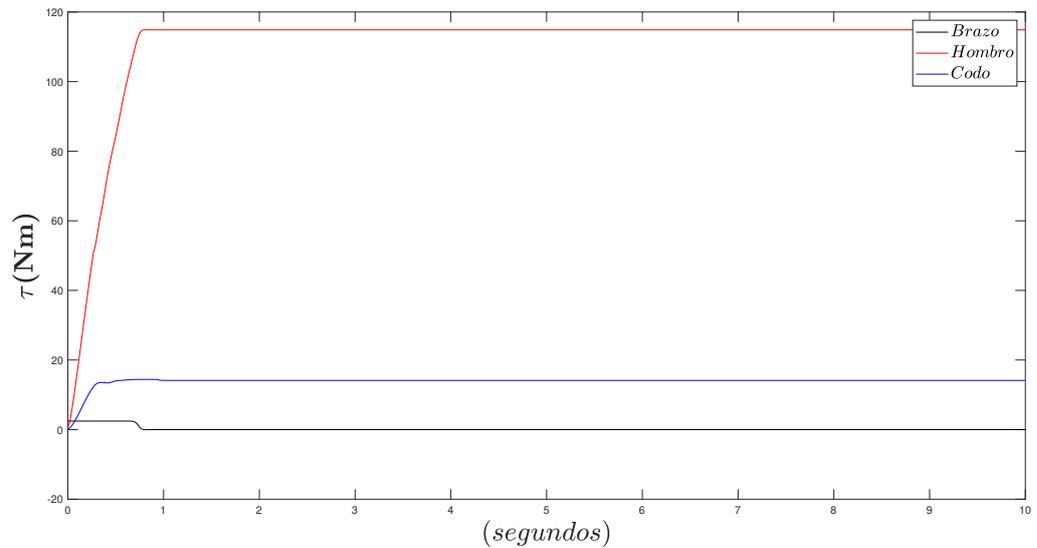


Figura 4.1: Torques aplicados.

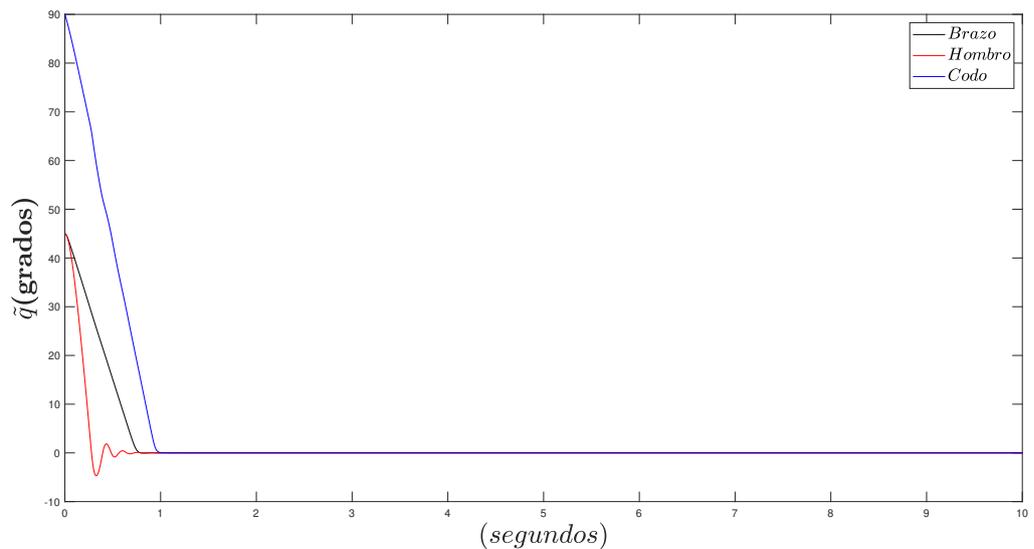


Figura 4.2: Error de posición de las articulaciones.

De primera instancia, en la figura 4.1 observamos y analizamos que no existe el fenómeno de saturación, el cual pudiera causar problemas en el control. Esto quiere decir que se inyecta el torque necesario para poder alcanzar el estado estable estacionario en cada eslabón del manipulador. Además la sintonía de las ganancias es adecuada para fines de no rebasar los límites físicos de dichos servomotores. En la figura 4.2 notamos una respuesta sub-amortiguada en la extremidad del hombro. Las respuestas del brazo y el codo son sobreamortiguadas ya que convergen al error de manera suave y constante. El tiempo en llegar al error en estado estable es de 1 segundo.

4.1.2. Algoritmo con ganancias variables 1

Para el primer algoritmo con ganancias variables graficamos en la figura 4.3 el torque que se le aplica a cada articulación. Por otra parte, mostramos el comportamiento del error conforme el tiempo va en aumento en la figura 4.4.

Obtenemos la siguiente respuesta implementada en el robot de 3gdl:

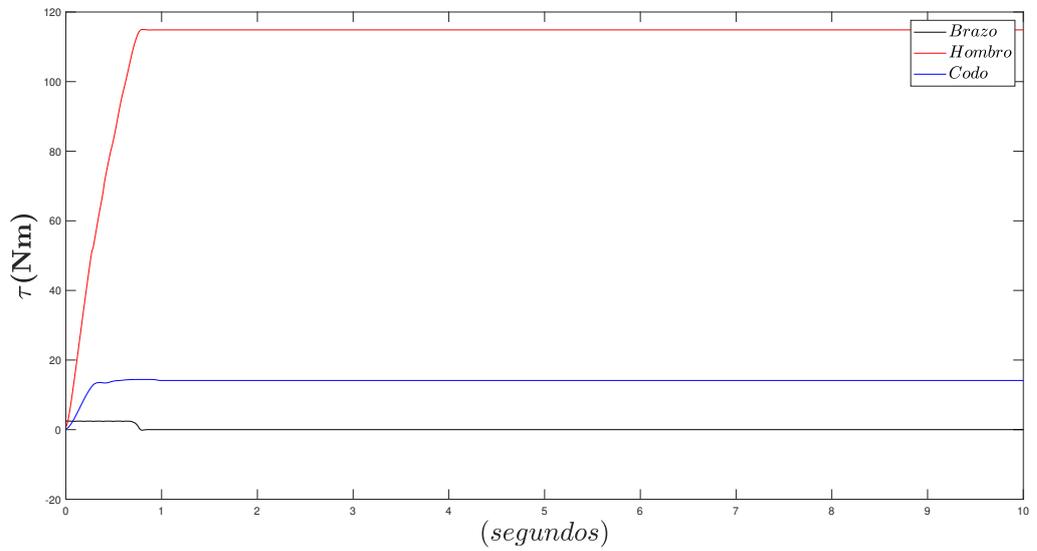


Figura 4.3: Torques aplicados.

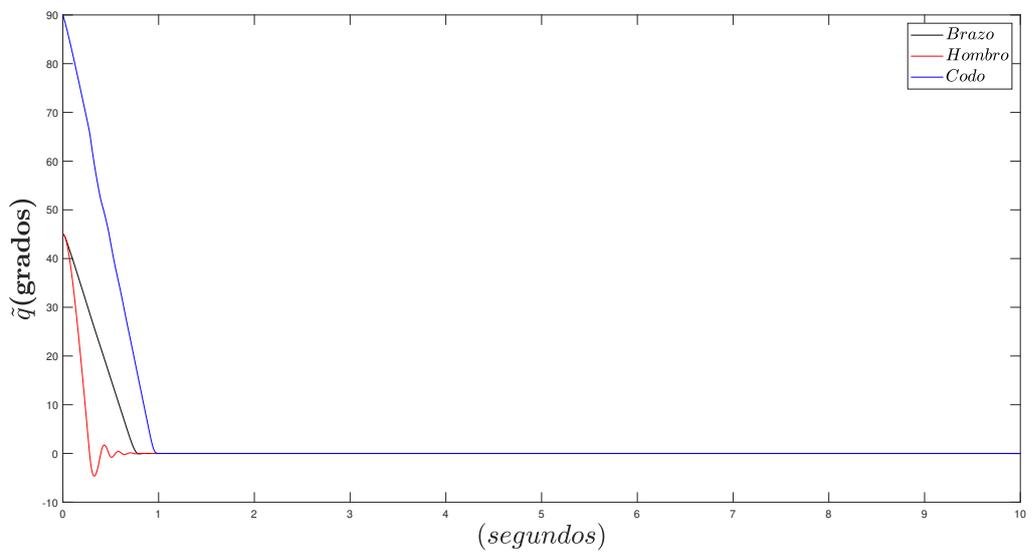


Figura 4.4: Error de posición de las articulaciones.

De la figura 4.3 se pueden analizar muchas cosas. En primer lugar el algoritmo de control permite inyectar la energía potencial artificial necesaria para

colocar a cada eslabón del manipulador en la posición deseada. En segundo lugar la saturación de los servomotores se evita, por lo cual el algoritmo de control con ganancias variables trabaja en la zona lineal. La figura 4.4 muestra una respuesta sub-amortiguada en la articulación del hombro, mientras que en el codo y el brazo es sobreamortiguada. El tiempo de respuesta del regulador es rápido ya que converge asintóticamente al punto de equilibrio en menos de 1 segundo. Sobre todo, lo más importante es que las tres articulaciones llegan al punto solicitado, lo cual quiere decir que para cualquier condición inicial se va a llegar a la posición requerida.

4.1.3. Algoritmo con ganancias variables 2

El siguiente algoritmo implementado es el visto en la ecuación 3.25. Dicho algoritmo mantiene la ganancia variable al igual que la primera propuesta mientras que la función dependiente del error de posición y la velocidad articular difiere. A continuación graficamos los torques que se aplican a cada uno de las articulaciones mientras se desarrolla el experimento. También se añade la gráfica del error de posición:

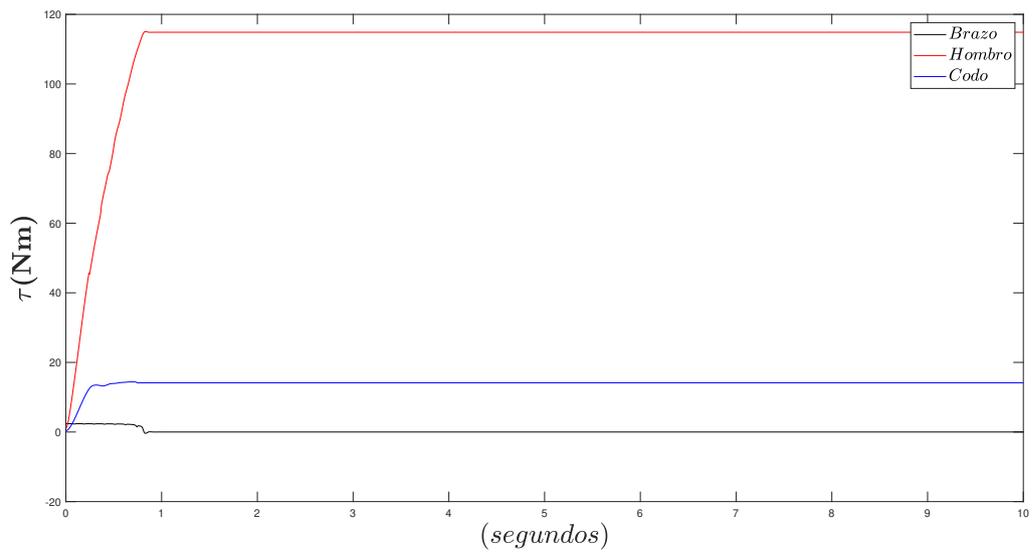


Figura 4.5: Torques aplicados.

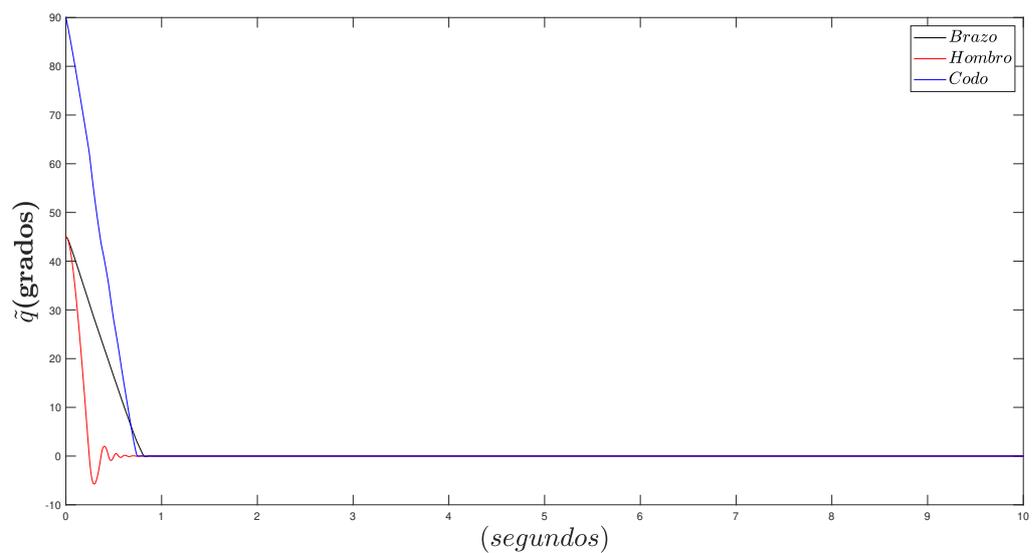


Figura 4.6: Error de posición de las articulaciones.

De la figura 4.5 podemos confirmar que la energía potencial artificial inyectada a los servomotores es la adecuada para evitar saturación y mantener una posición deseada. Dicha gráfica es de gran relevancia debido a que, ayuda a visualizar si no hemos sintonizado de manera adecuada las ganancias del

controlador o bien si el algoritmo de control no resuelve el problema de control de posición. En la segunda imagen 4.6 se presenta el error de posición de cada articulación, a diferencia de la gráfica 4.4 en la imagen se presenta una respuesta un poco mas tardía en la articulación del brazo. No obstante la respuesta es rápida y concisa puesto que se llega al punto solicitado en menos de 1 segundo. Con estos resultados llegamos a la certeza de que el regulador propuesto funciona y lo más importante es que resuelve el problema que estamos abordando en el trabajo de tesis.

4.1.4. Algoritmo con ganancias variables 3

El algoritmo final diseñado cambia en su estructura al tener una función dependiente de los valores de la variable de velocidad y error de posición. Al igual que las secciones predecesoras procedemos a graficar los torques que son suministrados a los eslabones del manipulador y posteriormente a mostrar los resultados de los errores de posición:

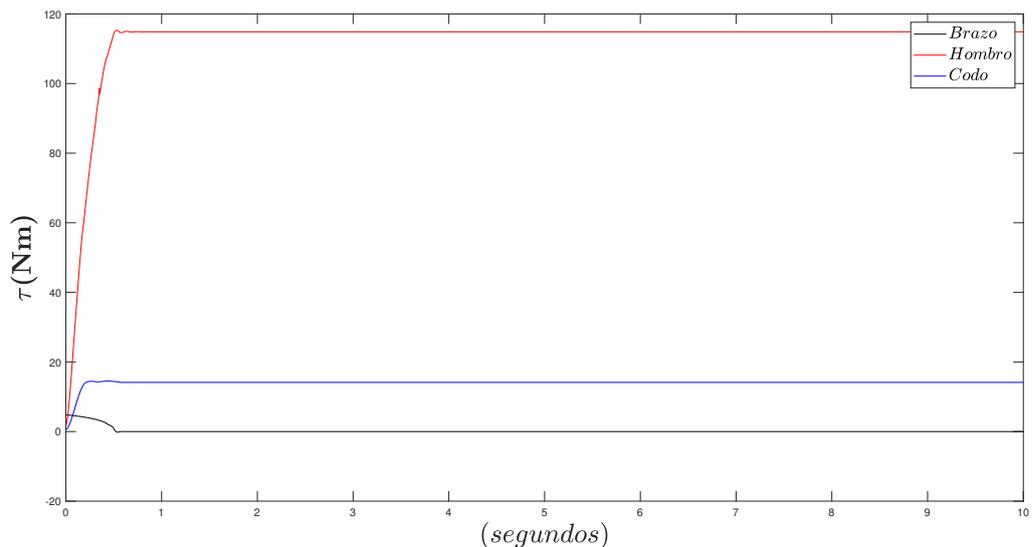


Figura 4.7: Gráfica de los torques suministrados a las articulaciones del robot.

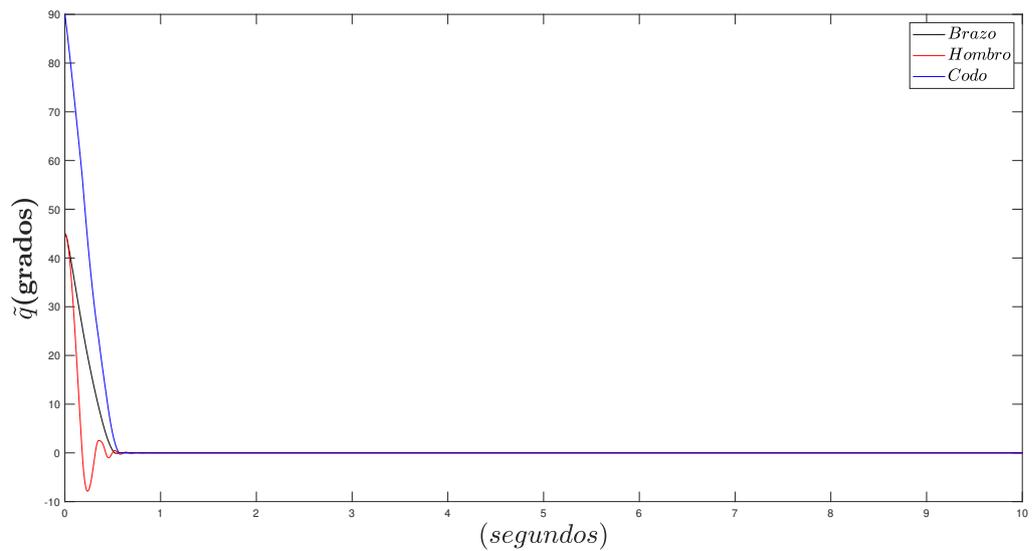


Figura 4.8: Error de posición de las articulaciones.

Al mirar la imagen 4.7 comprendemos que todas las articulaciones se mantienen en la zona de trabajo evitando problemas de saturación. La respuesta del brazo es positiva y luego deja de inyectar energía, sin embargo sabemos que las extremidades del manipulador se mantienen en su lugar. Esto se confirma visualizando la figura siguiente 4.8. Es muy gratificante ver que la respuesta de esta propuesta de control resulta ser más rápida que las propuestas anteriores así como también contra la de ganancias constantes. Más aun la respuesta del hombro es sub-amortiguada mientras que las del codo y el brazo son sobre amortiguadas sin dejar de converger al punto de equilibrio en menos de 1 segundo. Podemos aseverar que el regulador resuelve el control de posición de manera adecuada.

4.2. Robustez frente a perturbaciones

La perturbación externa es una señal que trata de sacar del punto de equilibrio a las articulaciones del robot manipulador. Cuando hablamos de que un algoritmo es robusto quiere decir que por mas incertidumbre paramétrica o ruido proveniente de otro lado el robot no se saldrá de la posición a la que ha llegado. La perturbación $\sigma(t) \in \mathcal{L}_2^e(0, T)$ la vamos a diseñar como sigue:

$$\mathcal{L}_2^e = \int_0^T \|\sigma(t)\|^2 dt < \infty \quad (4.1)$$

Por lo tanto, en el modelo dinámico del robot manipulador agregamos la perturbación $\sigma(t)$ como se muestra a continuación:

$$M(\dot{q})\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} = \tau + \sigma(t) \quad (4.2)$$

El vector de la perturbación ha sido escogido a priori con funciones armónicas para observar el comportamiento del controlador:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sinh(\pi t) \\ \frac{1}{2} \sinh(\pi t) \\ \frac{1}{5} \sinh(\pi t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Finalmente realizamos el experimento con valor en el tiempo de $T = 10s$ para analizar las respuestas de cada propuesta de regulador redactada en este trabajo.

4.2.1. Algoritmo con ganancias variables 1

Cuando simulamos la respuesta de un algoritmo de control podemos predecir su comportamiento en la planta real. En este caso, sabemos que la respuesta será muy parecida debido al tipo de manipulador con el que se cuenta. Sin embargo, es necesario observar, analizar y documentar las posibles vertientes que nos arroja la praxis. Al colocar la perturbación para interferir en el comportamiento del regulador resulta en esto:

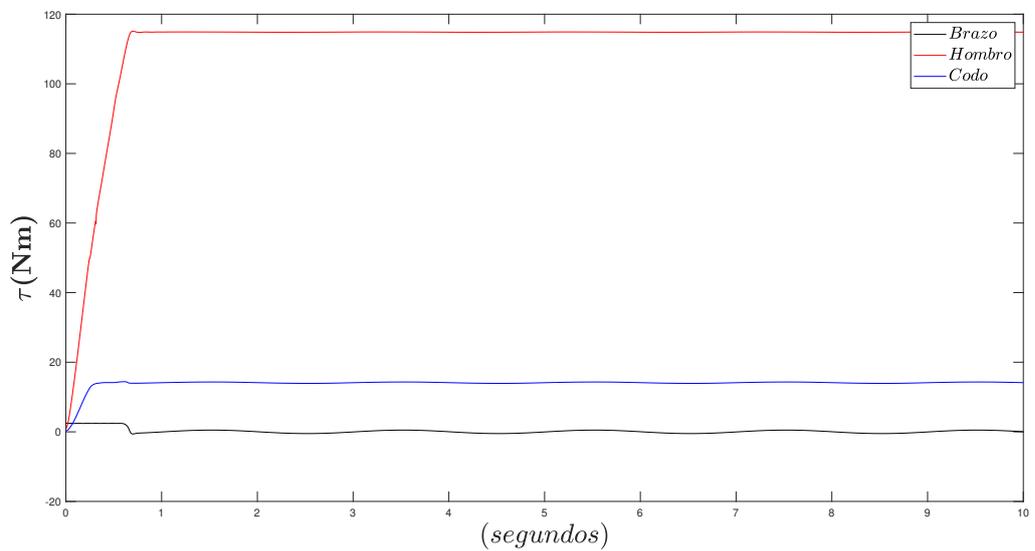


Figura 4.9: Gráfica de los torques suministrados aplicados con perturbación a los eslabones del robot.

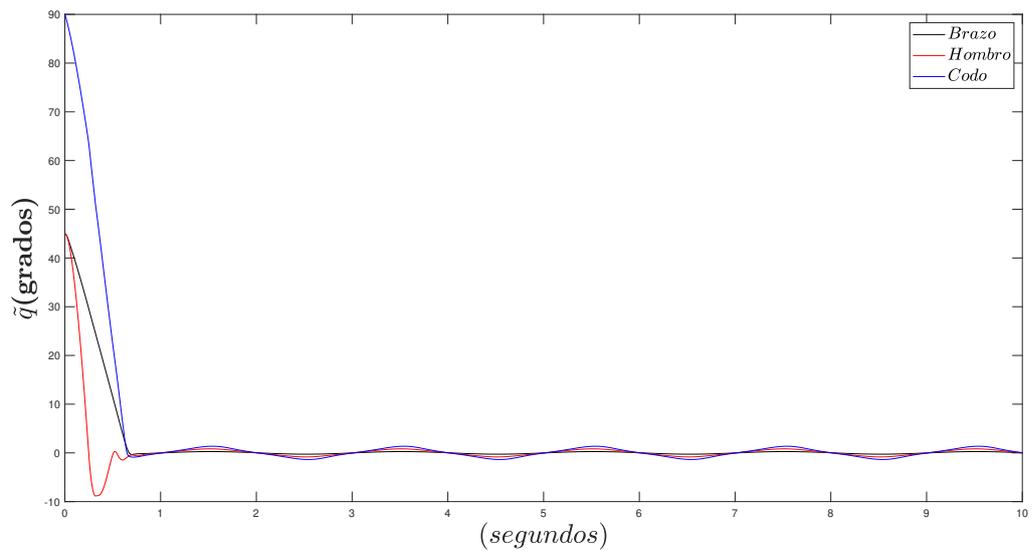


Figura 4.10: Error de posición de las articulaciones con una perturbación.

Del primer resultado visto en la figura 4.9 se confirma que a pesar de la perturbación los torque suministrados son suficientes y además no se trabaja fuera de la zona lineal. Como observamos, los rangos de la tabla 2.1 no son superados por lo que el algoritmo de control trabaja de manera correcta y responde bien ante las incertidumbres que pueda llegar a haber. En la imagen 4.10 observamos que la articulación del hombro cae a una posición negativa en grados para después regresar a un error constante. El sobre impulso con el que se aprecia, desaparece en menos de 1 segundo y de igual manera en un lapso corto se mantiene cerca de la vecindad del punto de equilibrio. Al verificar que la respuesta de este regulador es buena, podemos asegurar que el algoritmo de control es robusto frente a cualquier incertidumbre paramétrica y a señales externas que quieran afectar su desempeño.

4.2.2. Algoritmo con ganancias variables 2

Como se dijo en el inicio de esta sección, se espera que los valores del torque suministrado así como también el de la posición deseada no cambien cuando entra una perturbación al lazo de control. En caso de no suceder así, se vería graficado en la figura que arroja *Matlab*. En este caso, con esta segunda propuesta de regulador obtenemos lo siguiente:

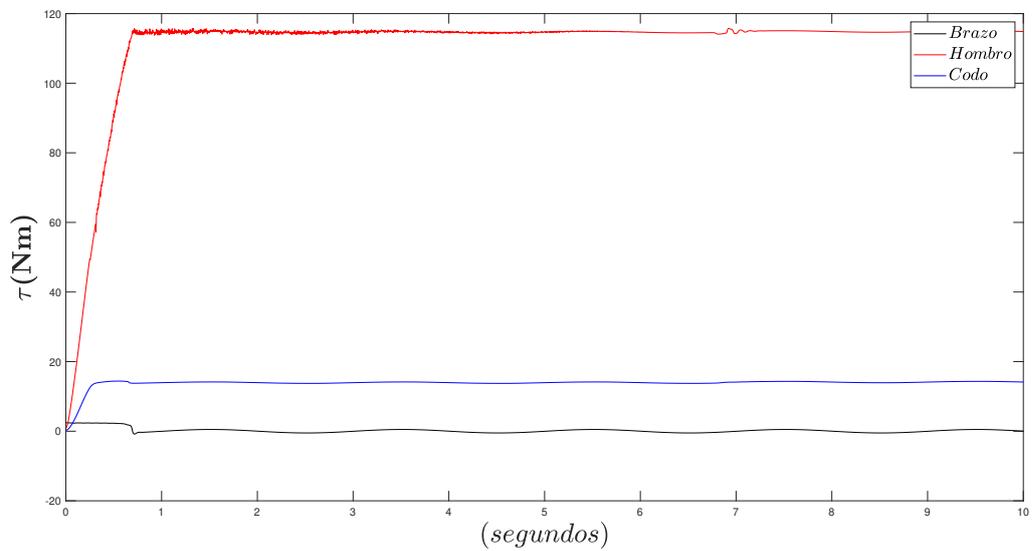


Figura 4.11: Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.

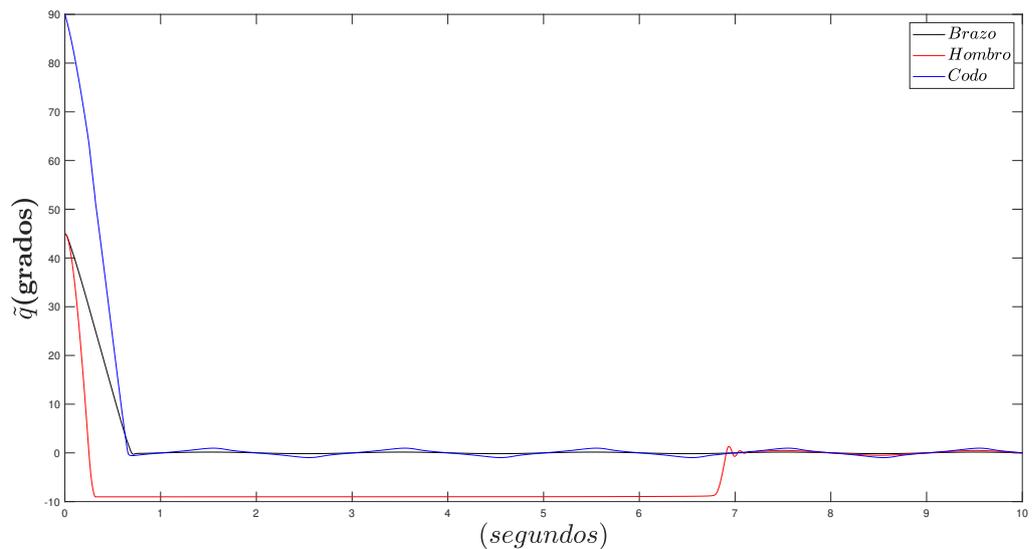


Figura 4.12: Error de posición de las articulaciones con una perturbación.

En la figura 4.11 visualizamos en la articulación del hombro a la línea roja con lo que pareciera ser ruido. Esto quiere decir que, la perturbación esta presente y trata de saturar al servomotor. Sin embargo, debido a que el regulador fue diseñado de tal manera que fuese robusto ante cualquier incertidumbre paramétrica, lo es para cualquier tipo de señales externas. Esto conlleva a que el torque suministrado se mantenga en la zona lineal de trabajo evitando algún inconveniente en nuestra plataforma experimental. En la imagen de los errores de posición 4.12 sucede algo muy interesante. Las líneas azul y negra que representan a el codo y el brazo respectivamente, no salen de su posición a pesar de que existe una fuerza que quiere sacar a ambas articulaciones del punto de equilibrio. Cuando analizamos la extremidad del hombro vemos que existe un error de posición, puesto que se manda al efector final a la posición de -10 , no obstante se corrige a los 6 s dejando por completo estático al hombro. El regreso a 0 tiene un sobre impulso demasiado corto ya que, desde donde empieza hasta donde termina es menos de 1 segundo.

4.2.3. Algoritmo con ganancias variables 3

De este algoritmo en particular se espera una respuesta muy buena frente a la perturbación por la forma de su comportamiento previo. Colocando la señal (4.2) y manteniendo las mismas ganancias que los reguladores estudiados con anterioridad para una futura comparación, sacamos los siguientes gráficos:

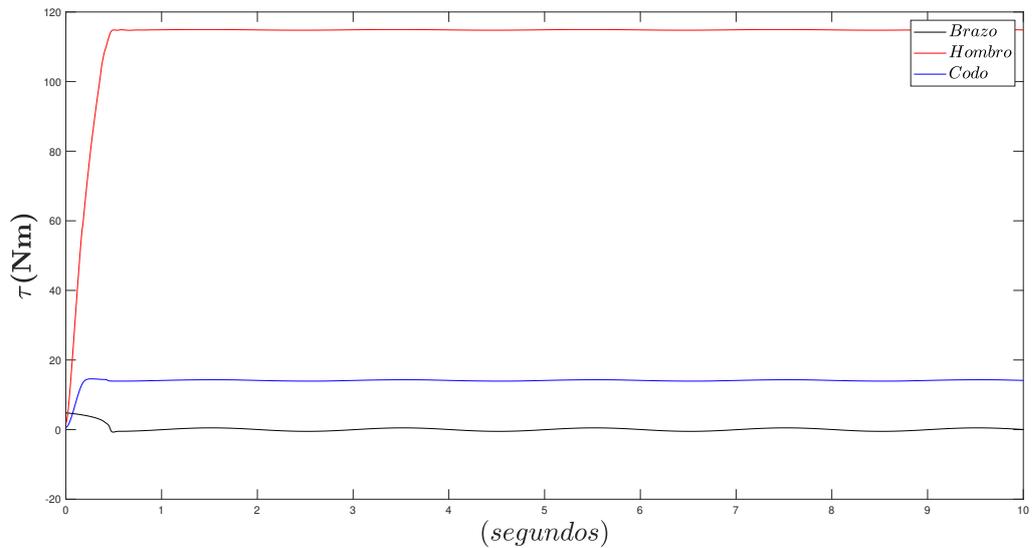


Figura 4.13: Gráfica de los torques suministrados con perturbación a las articulaciones del robot.

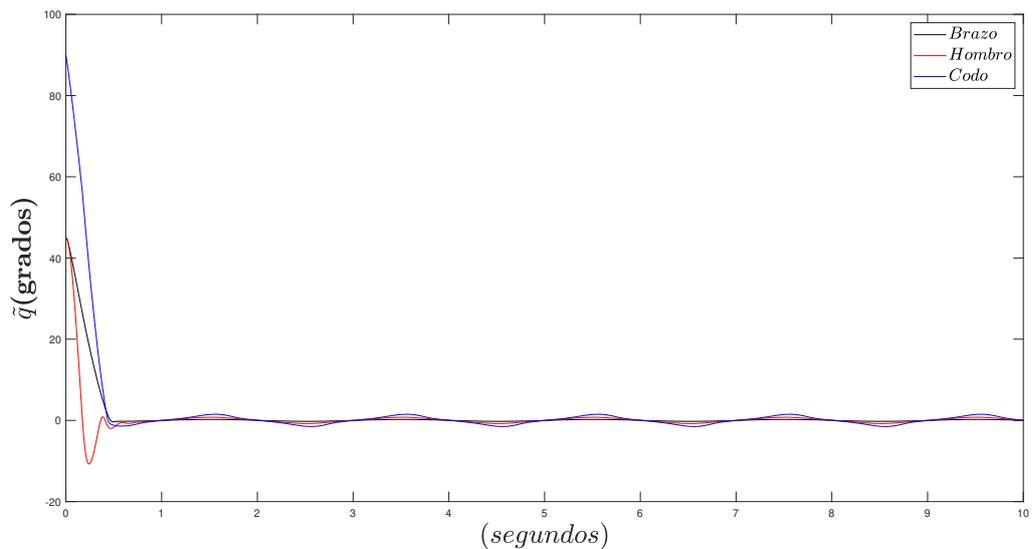


Figura 4.14: Error de posición de las articulaciones con una perturbación.

Es sorprendente que, en contraste con las figuras 4.11 y 4.9 no se note la señal de excitación persistente en los pares aplicados de la imagen 4.14. Esto nos indica que el control es muy robusto y además confiable debido a la seguridad de que el efector no se saldrá del punto de equilibrio por más que el tiempo transcurra. En la figura 4.14 notamos que las oscilaciones no tienen tanta altura; es decir su desviación del error es muy baja. La parte proporcional sigue manteniendo el impulso inyectado mientras que la parte derivativa consigue frenar la respuesta manteniendo el punto de equilibrio en estado oscilatorio estable.

4.3. Implementación real de un algoritmo de control

En aras de que el experimento no quede en simulación se implementó el algoritmo de ganancias constantes en el manipulador de 3gdl descrito en la res-

pectiva sección previa. Se llevaron a cabo tres implementaciones, cada una con una posición deseada diferente mientras que la matriz de ganancias se mantiene igual para todos los experimentos. El valor de cada ganancia se muestra a continuación:

$$K_{p1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \frac{Nm}{grado} ; \quad K_{p2} = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{bmatrix} \frac{Nm}{grado} ; \quad K_{p3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{Nm}{grado} \quad (4.4)$$

$$K_{v1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \frac{Nm \text{ grado}}{\text{segundo}} ; \quad K_{v2} = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \frac{Nm \text{ grado}}{\text{segundo}} ; \quad (4.5)$$

$$K_{v3} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{18}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{10} \end{bmatrix} \frac{Nm \text{ grado}}{\text{segundo}}$$

Una vez que conocemos el valor de las matrices de ganancias proporcional y derivativa respectivamente procedemos a reportar lo obtenido en los experimentos realizados. Cada uno ayuda a expandir los conocimientos acerca del problema de regulación y la respuesta real de un manipulador. Los datos arrojados por el robot son obtenidos mediante un archivo .dat, constan de 10 columnas con 4001 renglones donde cada valor representa un dato del experimento implementado real. El ejemplo podemos verlo en la siguiente tabla:

Variable	Valor inicial	Valor final
Tiempo real	0s	10s
\tilde{q}_1	0°	-0.00125°
\tilde{q}_2	0°	0.00002°
\tilde{q}_3	0°	-0.00421°
\dot{q}_1	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00057 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_2	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	0.00002 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_3	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00427 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
τ_1	0Nm	-0.00007Nm
τ_2	0Nm	16.55767Nm
τ_3	0Nm	0.06702Nm

Tabla 4.1: Valores recibidos del manipulador

La tabla 4.1 corresponde a los datos del experimento 1. Con ellos graficamos en *Matlab* los resultados y les podemos dar una interpretación adecuada.

4.3.1. Experimento 1

Para este primer experimento se desea colocar a las articulaciones del robot manipulador en los siguientes lugares: $[45^\circ, 45^\circ, 90^\circ]^T$, partiendo de la posición de casa $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$. Colocando en código los valores obtenidos del archivo .dat y parte de la tabla 4.1 obtenemos la gráfica de los pares aplicados 4.15, la velocidad en las articulaciones 4.16 y por último pero no menos importante el error de posición 4.17:

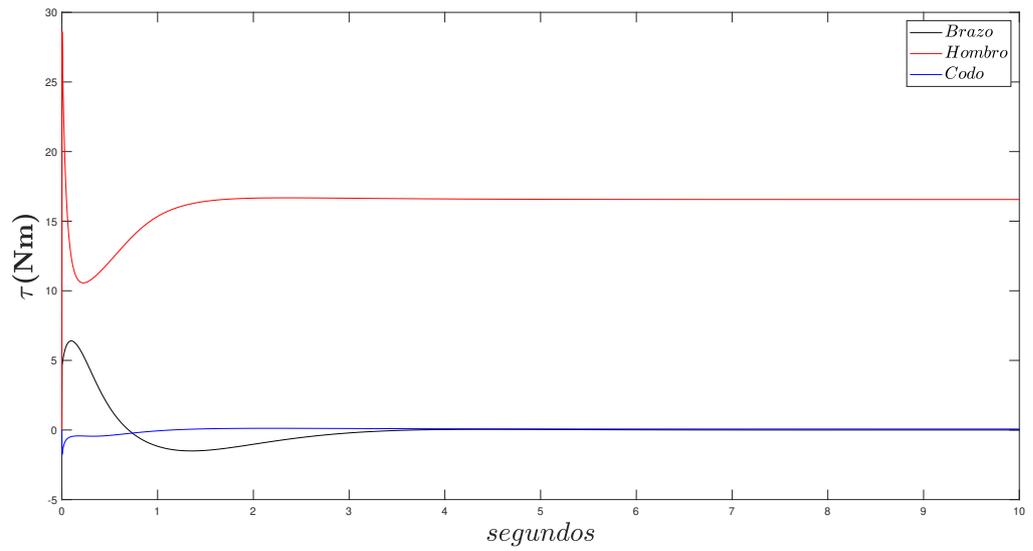


Figura 4.15: Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.

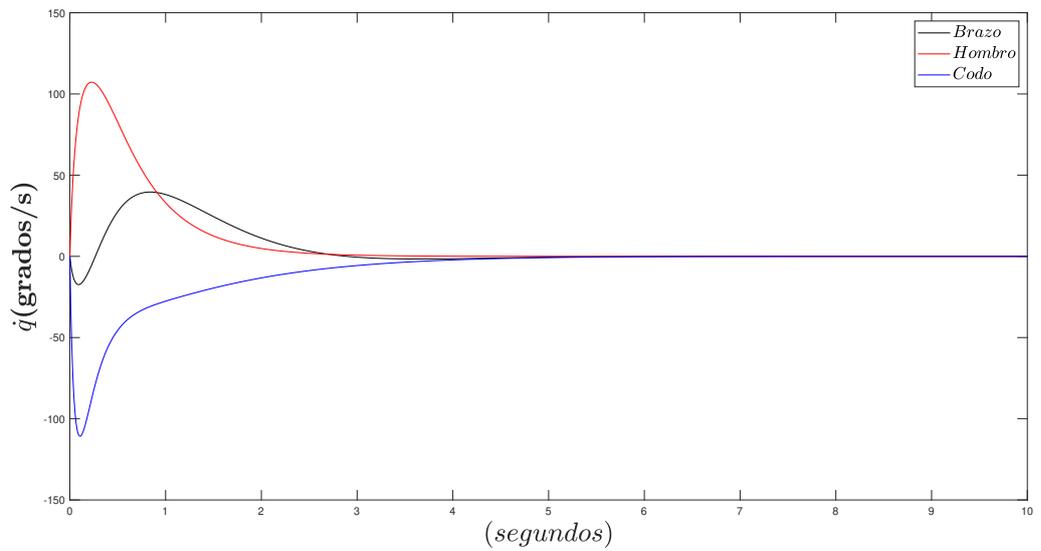


Figura 4.16: Gráfica de las velocidades en las articulaciones.

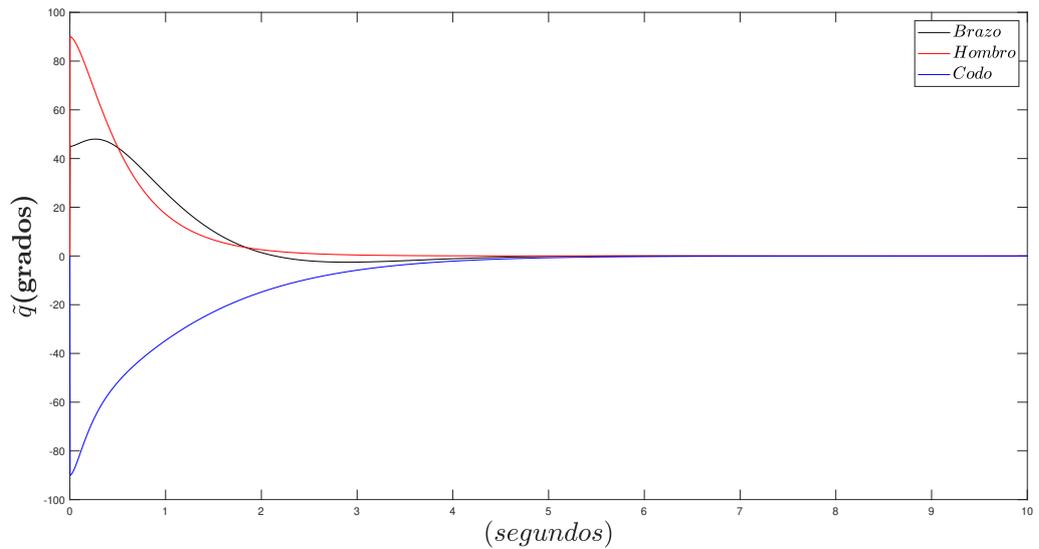


Figura 4.17: Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.

De las tres representaciones visuales presentadas anteriormente, podemos obtener buenas aseveraciones. En primer lugar, analizando el aspecto visto en 4.15 los torques aplicados a las articulaciones del robot manipulador son suficientes para darle el impulso necesario en aras de llegar al punto pedido. Es muy importante resaltar que ninguna extremidad supera al torque máximo físico de nuestro elementos dado por la tabla 2.1. Se observa que se establece el valor de torque constante a los 3 segundos de inicializado el experimento. Por otro lado, la gráfica 4.16 muestra que la velocidad converge a 0 en un lapso de 5 segundos. Esto significa que el robot va reduciendo su velocidad conforme el tiempo aumenta para llegar al punto de equilibrio y mantenerse en ese valor. En la figura 4.17 se observa como se llega a la posición deseada en un lapso de 5 segundos. La respuesta del algoritmo de control es suave, sin embargo es un poco lenta en comparación con su contraparte de ganancias variables, véase la figura 4.10. En base a los resultados obtenidos enfatizamos que el regulador diseñado resuelve el problema abordado.

4.3.2. Experimento 2

Primeramente debemos colocar nuestras posiciones deseadas las cuales son; $[45^\circ, 90^\circ, 0^\circ]^T$, partiendo de la posición de casa $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$. De igual manera que en el experimento previo, tenemos que colocar los valores recibidos del robot real y codificarlos en *Matlab*. A continuación se muestra la tabla donde se muestra el valor inicial y final de las variables correspondientes:

Variable	Valor inicial	Valor final
Tiempo real	0s	10s
\tilde{q}_1	0°	-0.00171°
\tilde{q}_2	0°	0.00001°
\tilde{q}_3	0°	-0.00062°
\dot{q}_1	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00084 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_2	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	0.00001 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_3	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00065 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
τ_1	0Nm	-0.00009Nm
τ_2	0Nm	17.58461Nm
τ_3	0Nm	1.09400 Nm

Tabla 4.2: Valores recibidos del manipulador

Ahora, graficando dichos valores de la tabla 4.2 y los archivos .dat conseguimos lo que se muestra a continuación:

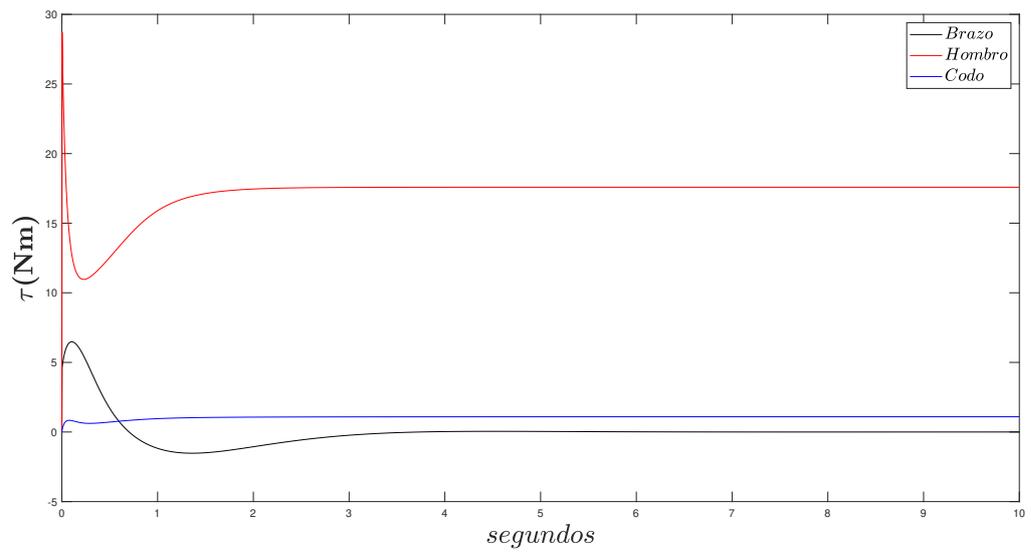


Figura 4.18: Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.

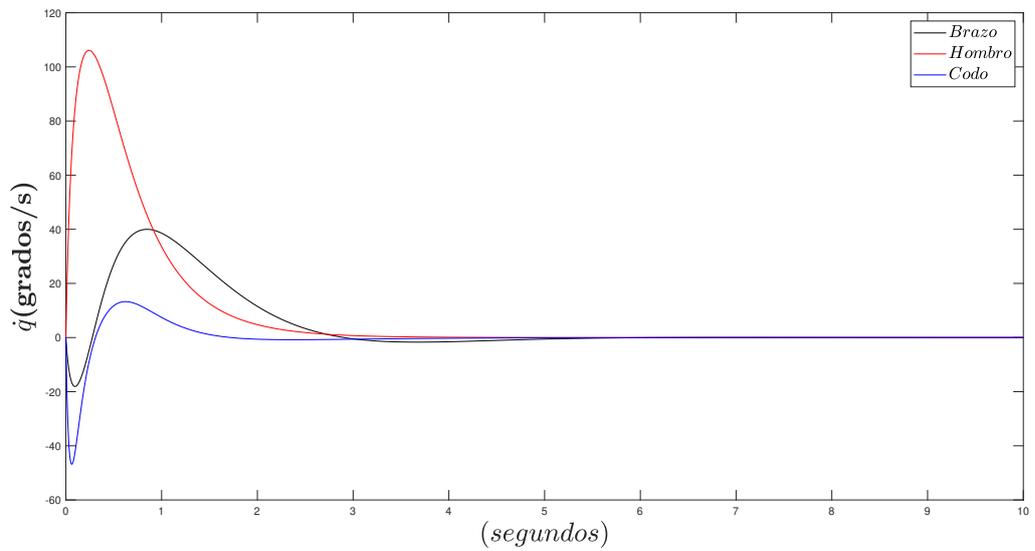


Figura 4.19: Gráfica de las velocidades en las articulaciones.

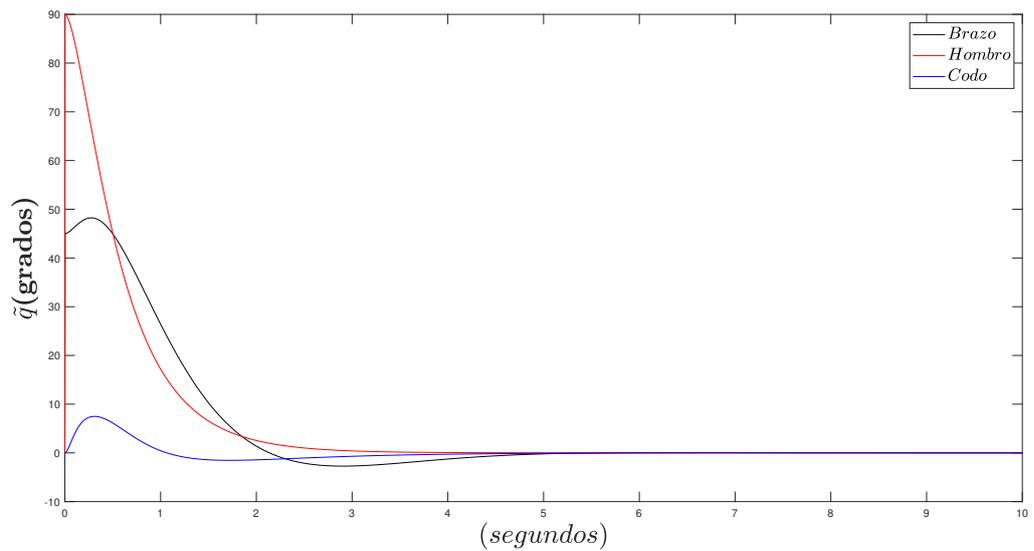


Figura 4.20: Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.

Como se puede apreciar en 4.18 existe una diferencia entre los pares aplicados con el experimento anterior. Esto se debe principalmente a las posiciones finales deseadas. En la articulación del brazo podemos visualizar un torque negativo, sin embargo recordemos que en base a la zona de trabajo de los servomotores 2.7 puede existir dicho par negativo siempre cuando este en la zona lineal de trabajo. De la segunda imagen podemos concluir que, al igual que la praxis previa, las articulaciones dejan de tener velocidad articular e un lapso de 4 segundos. El error de posición visto en la última figura 4.20 Observamos que la respuesta es suave. La respuesta del brazo y el codo son ligeramente parecidas, convergen al punto de equilibrio mas tarde que el hombro. Este último, tiene una respuesta sobre amortiguada debido a que su transición al estado estacionario es lenta pero concisa.

4.3.3. Experimento 3

La presente y última prueba se realiza con las siguientes posiciones deseadas $[45^\circ, 45^\circ, -90^\circ]^T$, partiendo de la posición de casa $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$. Se desea ver la respuesta del control al pedirle una posición negativa. En teoría, debe funcionar para cualquier posición por lo cual procedemos a tabular y colocar en el software los siguientes datos del .dat obtenidos presencialmente:

Variable	Valor inicial	Valor final
Tiempo real	0s	10s
\tilde{q}_1	0°	-0.00069°
\tilde{q}_2	0°	-0.00014°
\tilde{q}_3	0°	0.00329°
\dot{q}_1	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00014 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_2	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	-0.00016 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
\dot{q}_3	0 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$	0.00334 $\frac{\text{grados}}{\text{s}}$
τ_1	0Nm	-0.00006Nm
τ_2	0Nm	12.53006Nm
τ_3	0Nm	0.72630Nm

Tabla 4.3: Valores recibidos del manipulador

Ya que conocemos dichos valores, es imprescindible mostrarlos gráficamente para validar nuestra hipótesis y debatir los fenómenos físicos encontrados. A continuación mostramos los torques 4.21, la velocidad en las articulaciones 4.22 y finalmente los errores de posición 4.23:

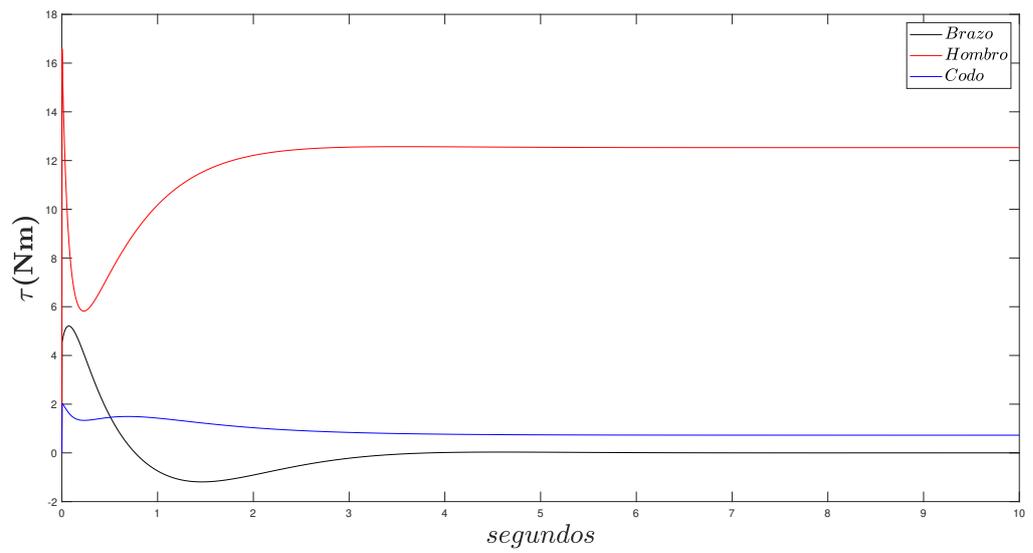


Figura 4.21: Gráfica de los pares aplicados con perturbación a las articulaciones del robot.

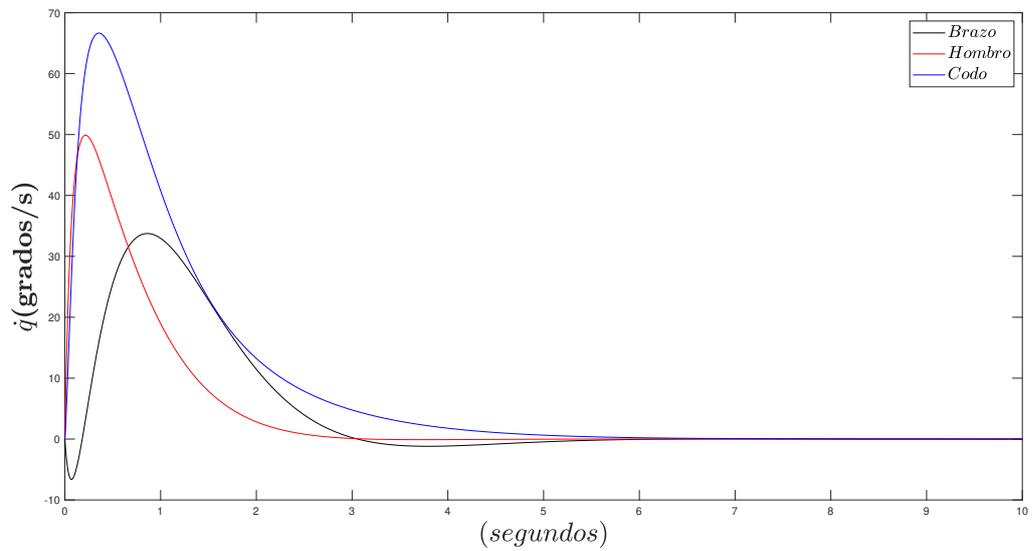


Figura 4.22: Gráfica de las velocidades en las articulaciones.

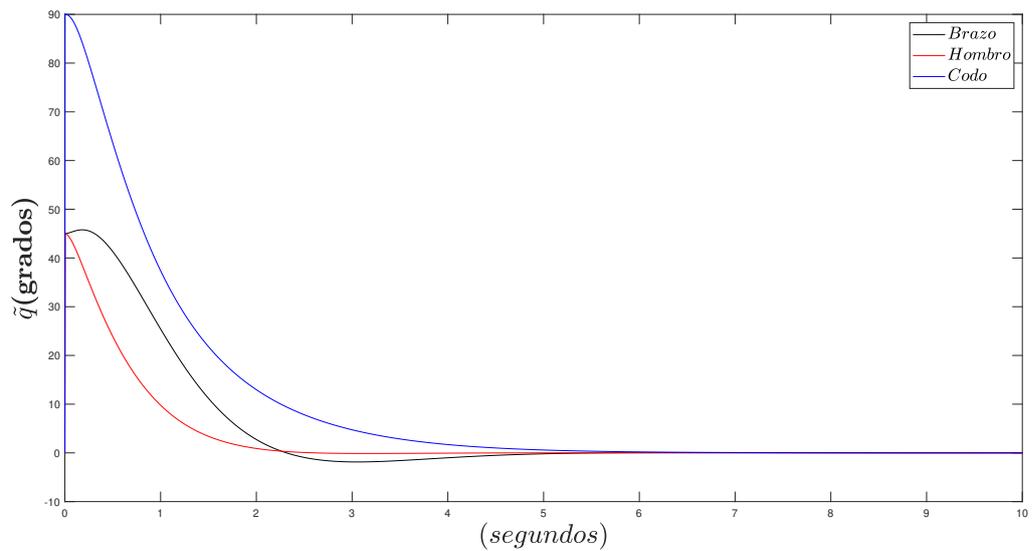


Figura 4.23: Gráfica de los errores de posición en las articulaciones.

Considerando todos los productos extraídos, se esperaba una reacción similar en cuanto este último experimento. De la gráfica de los pares aplicados 4.21 sabemos que no hay ningún inconveniente en cuanto a caer en la zona de saturación. Por consiguiente la energía aplicada es suficiente para llegar a la posición deseada, como se puede confirmar en 4.23. En esta mención previa, cabe resaltar las respuestas sobre amortiguadas de todas las articulaciones. Las tres se tardan un poco más en llegar al error en estado estable, para ser más exactos 6 segundos. Cambiando el orden un poco, finalmente analizamos la figura 4.22. En este esquema se observa como todas las articulaciones convergen al punto de equilibrio. A pesar de esto, no todas llegan a valer lo mismo en el instante de tiempo paralelo. Por lo tanto confirmamos que no importa la posición final el regulador funciona y resuelve el problema de regulación.

4.4. Norma \mathcal{L}_2

La norma \mathcal{L}_2 es un índice que ha sido utilizado ampliamente en el área de robótica para poder medir el desempeño de los algoritmos de control (19),(1). El algoritmo de control cuyo valor sea el mas chico tiene un mejor desempeño que los demás. Usualmente se maneja en porcentajes para enfocarnos mas en que tanto se mejora la respuesta de uno u otro regulador. Por ende, haremos uso de la norma tanto para validar o refutar la hipótesis como también para comparar entre los reguladores su respuesta. La matemática que nos ayuda a obtener el valor de la norma se rige por:

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{T} \|\tilde{q}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad (4.6)$$

Donde T representa el tiempo del experimento y σ la variable muda que podemos sustituir a conveniencia de ser necesario. Aplicando esta norma a todos los algoritmos de control obtenemos la siguiente respuestas en gráfica de barras para una mejor comprensión:

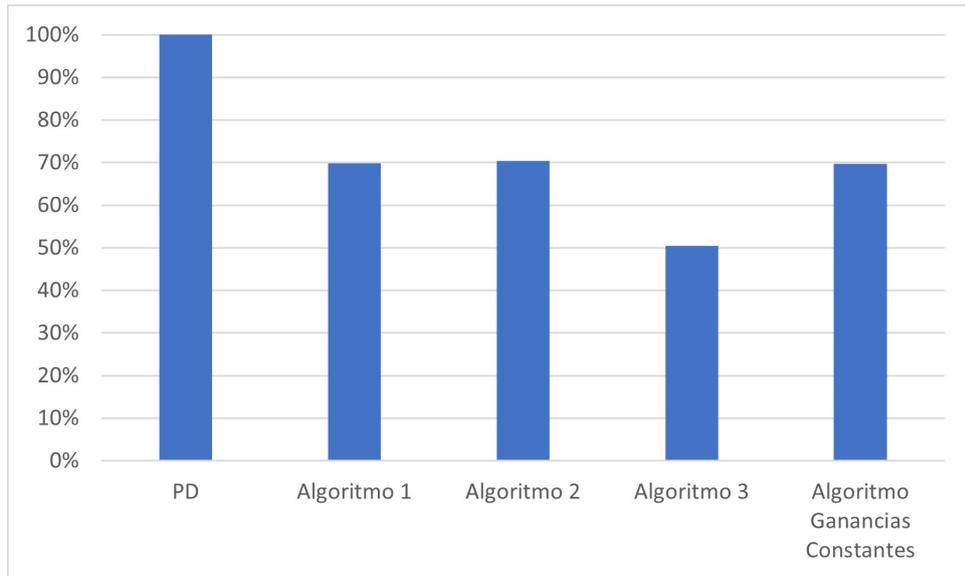


Figura 4.24: Análisis de desempeño empleando la norma \mathcal{L}_2

De la imagen 4.24 sacamos dos conclusiones esenciales de nuestro trabajo. La primera es que la hipótesis se cumple ya que si se supera en un 30 % el desempeño del clásico PD. En segundo lugar las ganancias variables si pueden llegar a tener una mejor respuesta que su contraparte constante. Ejemplo claro de esto es el algoritmo 3 en contraste con las ganancias constantes. El regulador cuyo desempeño es mejor por mucho, es el tercero con su 50 % de mejora. Obviamente, el algoritmo clásico del PD cuenta con el peor número de la norma ya que es el más alto. Esto no quiere decir que las demás propuestas no funcionan, ya que tienen un buen desempeño y además son robustos. Por lo cual, si es viable implementarlos en cualquier manipulador real.

CONCLUSIONES

Como primera conclusión aseguramos que, la propuesta desarrollada de control híbrido con ganancias variables explícitas si permite llegar a la posición deseada y tiene un índice de desempeño \mathcal{L}_2 superior del 30 % en comparación con su contraparte del control PD. Esto lo podemos comprobar con la gráfica 4.24 donde se asientan los resultados. Además, no importaron las condiciones iniciales así como tampoco las perturbaciones externas que pudieron colocar a los reguladores como robustos. De manera contundente probamos que los algoritmos de control resuelven el problema de regulación para los robots manipuladores. Más aún, se llegó a demostrar la estabilidad asintótica de manera global del punto de equilibrio mediante la teoría de Lyapunov y una función estricta propuesta.

Los objetivos fueron cumplidos en su totalidad, por lo cual, los resultados expuestos en esta investigación tienen relevancia. Esto debido a que, son una propuesta única cuyos resultados experimentales cuentan con una teoría base fuerte y es posible desarrollar nuevos algoritmos de control para cualquier interesado en el área. A raíz de los experimentos realizados en el manipulador real de transmisión directa tenemos más certeza de como es el comportamiento de los reguladores. Con su respuesta consideramos a los reguladores como altos en desempeño en comparación con el PD, usado en la industria y vigente en

nuestros días.

La propuesta de las ganancias variables proporcional y derivativa son una nueva perspectiva para la regulación de robots, con respecto a los algoritmos clásicos, donde se inyecta amortiguamiento a través del error y la velocidad. Es posible implementar reguladores diseñados, bajo el esquema propuesto en esta tesis, desconociendo cualquier parámetro numérico del robot. Es decir, no necesitamos realizar ninguna identificación paramétrica para obtener fricciones, longitudes de eslabones, etc. Además al realizar una modificación y aporte a la técnica de moldeo de energía es posible generar bastos esquemas de control. Se han demostrados las ventajas desarrolladas a través de esta propuesta.

Respecto a la sintonización de las ganancias, se ha colocado una regla de sintonía, fácil de implementar a simple vista pero difícil de diseñar, para personas que apenas van conociendo el mundo de control de robots manipuladores. Esto repercute en que los usuarios generen confianza para colocar sus propuestas de algoritmos sin el temor de saturar los servomotores o colocar una ganancia equivocada que pueda dañar al sistema. La regla matemática explícita también aporta interés en los programadores para generar sus propias reglas de diseño en base a la naturaleza del control. Añadiendo que, experimentando con los valores se pueden obtener diferentes respuestas deseadas sin saturar a los servomotores de nuestra plataforma experimental.

Una aportación muy importante es que garantizamos que las variables de estado convergen asintóticamente al punto de equilibrio sin esquemas externos. Con esto, nos referimos a que no es necesario colocar esquemas de control como; redes neuronales, lógica difusa, etc. que no yacen en la ecuación en lazo cerrado. Se desea como trabajo futuro, implementar los reguladores de ganancias variables en un manipulador real en aras de obtener más evaluaciones ex-

perimentales. Todo esto para compartir el conocimiento adquirido, expandiendo el área de instrumentación y control.

Referencias

F. Reyes, *Robótica-Control de robots manipuladores*. Alfaomega grupo editor, 2011.

J. Ruiz Quebrado, “Los robots en la industria,” 2007.

“Executive summary world robotics 2020 industrial robots,” *International Federation of Robotics*.

V. M. Hernández-Guzmán, R. Silva-Ortigoza, and R. V. Carrillo-Serrano, *Control Automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*. Colección CIDETEC, 2013.

M. Limón-Díaz, F. Reyes Cortés, and E. González-Galván, “Regulación saturada con ganancia variable derivativa de robots manipuladores,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 14, pp. 434–445, 10 2017.

F. L. Lewis, D. M. Dawson, and C. T. Abdallah, *Robot manipulator control: theory and practice*. CRC Press, 2003.

M. Takegaki and S. Arimoto, “A new feedback method for dynamic control of manipulators,” 1981.

J. G. Romero, A. Donaire, and R. Ortega, “Robust energy shaping control of mechanical systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 62, no. 9, pp. 770–780, 2013.

R. Ortega, A. Van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, “Energy-shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection,” in *Proceedings of the*

38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304), vol. 2, pp. 1646–1651, IEEE, 1999.

M. Jin, J. Lee, and N. G. Tsagarakis, “Model-free robust adaptive control of humanoid robots with flexible joints,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 2, pp. 1706–1715, 2016.

L. R. Kahn, “Analysis of a limiter as a variable-gain device,” *Electrical Engineering*, vol. 72, no. 12, pp. 1106–1109, 1953.

R. Monopoli and V. Subbarao, “A new algorithm for model reference adaptive control with variable adaptation gains,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 6, pp. 1245–1248, 1980.

C. B. Rene, T. M. S. Javier, M. H. German, and R. C. F. Ardul, “Algoritmo para obtención de índice de desempeño, en configuraciones de robots scara, cartesiano y antropomórfico.,” *Innovaciones en Mecatrónica*, p. 41.

M. W. Spong, “Seth. hutchinson, and m. vidyasagar,” *Robot modeling and control*, vol. 3, 2005.

F. G. Salas, V. Santibanez, and M. A. Llama, “Variable gains pd tracking control of robot manipulators: Stability analysis and simulations,” in *World Automation Congress 2012*, pp. 1–6, IEEE, 2012.

D. J. López-Araujo, A. Zavala-Río, V. Santibáñez, and F. Reyes, “A generalized global adaptive tracking control scheme for robot manipulators with bounded inputs,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 29, no. 2, pp. 180–200, 2015.

A. S. Ávila, “Control de robots manipuladores sujetos a saturaciones en accionamiento de par,” 2016.

E. M. L. Eduardo, B. A. J. Luis, and V. R. José, “Control de posición para robots manipuladores: Una nueva metodología de diseño,”

B. Sánchez-García, F. Reyes-Cortés, B. M. Al-Hadithi, and O. Félix-Beltrán, “Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators,” *Journal of Robotics and Control (JRC)*, 2021.

L. Aymerich-Franch and I. Ferrer, “The implementation of social robots during the covid-19 pandemic,” *arXiv preprint arXiv:2007.03941*, 2020.

Y. Shen, D. Guo, F. Long, L. A. Mateos, H. Ding, Z. Xiu, R. B. Hellman, A. King, S. Chen, C. Zhang, *et al.*, “Robots under covid-19 pandemic: A comprehensive survey,” *Ieee Access*, vol. 9, pp. 1590–1615, 2020.

J. Sifuentes-Mijares, V. Santibáñez, and J. L. Meza-Medina, “Nonlinear pid global regulators with selftuned pd gains for robot manipulators: theory and experimentation,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 43, no. 4, pp. 1–10, 2021.

F. Reyes-Cortés and B. M. Al-Hadithi, “An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability,” *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.

M. A. Limón-Díaz, F. Reyes-Cortés, and E. J. González-Galván, “Regulación saturada con ganancia variable derivativa de robots manipuladores,” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 14, no. 4, pp. 434–445, 2017.

A. O. Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2005.

F. Neri and E. Mininno, “Memetic compact differential evolution for cartesian ro-

bot control,” *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 5, no. 2, pp. 54–65, 2010.

A. Wahrburg, J. Bös, K. D. Listmann, F. Dai, B. Matthias, and H. Ding, “Motor-current-based estimation of cartesian contact forces and torques for robotic manipulators and its application to force control,” *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 15, no. 2, pp. 879–886, 2017.

A.-B. A. AL-Hussein, “Neural network-based adaptive control of robotic manipulator: Application to a three links cylindrical robot,” *Iraqi Journal for Electrical & Electronic Engineering*, vol. 13, no. 1, 2017.

J. C. Romero Aguirre, “Desarrollo de sistema de control para prototipo de robot antropomórfico,” 2019.

N. Matsui, T. Makino, and H. Satoh, “Autocompensation of torque ripple of direct drive motor by torque observer,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 29, no. 1, pp. 187–194, 1993.

R. Arcega and J. Adair, *Análisis y desarrollo de un servo amplificador para motores sin núcleo para medición de viscosidad*. PhD thesis, 2011.

R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.

J. Batista, D. Souza, L. Dos Reis, A. Barbosa, and R. Araújo, “Dynamic model and inverse kinematic identification of a 3-dof manipulator using rlspso,” *Sensors*, vol. 20, no. 2, p. 416, 2020.

S. A. Joshi and L.-W. Tsai, “Jacobian analysis of limited-dof parallel manipulators,” *J. Mech. Des.*, vol. 124, no. 2, pp. 254–258, 2002.

- H. Mochiyama and H. Kobayashi, "The shape jacobian of a manipulator with hyper degrees of freedom," in *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 99CH36288C)*, vol. 4, pp. 2837–2842, IEEE, 1999.
- P. Sanz, "Robotics: Modeling, planning, and control (siciliano, b. et al; 2009)[on the shelf]," *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 16, no. 4, pp. 101–101, 2009.
- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Force control*. Springer, 2009.
- M. V. and V. Potkonjak, *Dynamics of manipulation robots: Theory and application*. Springer-Verlag, 1982.
- K. R. Kozlowski, *Modelling and identification in robotics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- R. Kelly, V. S. Davila, and J. A. L. Perez, *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2005.
- K. S. Fu, R. C. Gonzalez, and C. G. Lee, "Control, sensing, vision and intelligence," *Robotics, McGraw, New York*, 1987.
- L. Sciavicco, B. Siciliano, and L. Villani, "Lagrange and newton-euler dynamic modeling of a gear-driven robot manipulator with inclusion of motor inertia effects," *Advanced robotics*, vol. 10, no. 3, pp. 317–334, 1995.
- W. Khalil and E. Dombre, *Modélisation identification et commande des robots*. Hermes, 1999.
- N. Van Quyen, N. P. Quang, *et al.*, "Dynamic model with a new formulation of coriolis/centrifugal matrix for robot manipulators," *Journal of Computer Science and Cybernetics*, vol. 36, no. 1, pp. 89–104, 2020.

- J. I. Mulero-Martínez, "Uniform bounds of the coriolis/centripetal matrix of serial robot manipulators," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 5, pp. 1083–1089, 2007.
- V. Santibanez, R. Kelly, A. Zavala-Rio, and P. Parada, "A new saturated nonlinear pid global regulator for robot manipulators," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 11690–11695, 2008.
- M. R. Kermani, M. Wong, R. V. Patel, M. Moallem, and M. Ostojic, "Friction compensation in low and high-reversal-velocity manipulators," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004*, vol. 5, pp. 4320–4325, IEEE, 2004.
- B. Bona and M. Indri, "Friction compensation in robotics: an overview," in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4360–4367, IEEE, 2005.
- E. Cruz-Zavala, E. Nuño, and J. A. Moreno, "Finite-time regulation of robots: a strict lyapunov function approach," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 13, pp. 279–284, 2018.
- D. Shevitz and B. Paden, "Lyapunov stability theory of nonsmooth systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 39, no. 9, pp. 1910–1914, 1994.
- H. K. Khalil, "Lyapunov stability," *Control Systems, Robotics and AutomatioN*, vol. 12, p. 115, 2009.
- S. Sastry, "Lyapunov stability theory," in *Nonlinear systems*, pp. 182–234, Springer, 1999.
- S. Vadali and E.-S. Kim, "Feedback control of tethered satellites using lyapu-

nov stability theory,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 4, pp. 729–735, 1991.

P. Corke, “Matlab toolboxes: robotics and vision for students and teachers,” *IEEE Robotics & automation magazine*, vol. 14, no. 4, pp. 16–17, 2007.

P. I. Corke and O. Khatib, *Robotics, vision and control: fundamental algorithms in MATLAB*, vol. 73. Springer, 2011.

B. S. García, F. R. Cortés, and B. M. Al-Hadithi, “Family of bounded regulators with variable gains and lyapunov asymptotic stability for robot manipulators,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 100, no. XXX, 2022.

ANEXOS PRODUCTOS DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

A. Artículo colocado en el buscador IEEE

R. E. García-Ferral, F. Reyes-Cortés and B. Sánchez-García, "Design of a control algorithm for a robot manipulator with constant gains," 2021 XVII International Engineering Congress (CONIIN), 2021, pp. 1-7, doi: 10.1109/CONIIN54356.2021.9634741.

Design of a control algorithm for a robot manipulator with constant gains

Publisher: IEEE

Cite This



Roman E. García-Ferral ; Fernando Reyes-Cortés ; Brandon Sánchez-García

All Authors

14

Full

Text Views



Abstract

Abstract:

Document Sections

I. Introduction

II. Robotic dynamics

III. Design of the control algorithm

IV. Results

V. Conclusions

This paper presents a new control algorithm of constant gains for a Proportional Derivative controller with gravity compensation. The problem of position control of manipulator robots in the joint space is solved with the proposed control algorithm. To abord the previously mentioned problem, the energy shaping technique is used. For the development of the algorithm, constant gains were used. The algorithm design is focused on three DOF robots as an experimental platform. The main characteristic of the proposed control scheme is that the algorithm generates bounded torques. The servo actuators of the robot are kept within their physical limits avoiding the saturation zone. To carry out the control structure, a Lyapunov function is proposed. It is shown that there is a point of equilibrium such that it is unique and stable based on the proposed function. To illustrate the performance of the design, simulations were made, and results are placed in the function of error. Designing and implementing control algorithms makes it possible to test performances in manipulative robots, giving the possibility of choosing one that meets the needs of the operators.

Authors

Figures

References

Keywords

Metrics

Published in: [2021 XVII International Engineering Congress \(CONIIN\)](#)

Date of Conference: 14-18 June 2021

INSPEC Accession Number: 21483738

Date Added to IEEE Xplore: 08 December 2021

DOI: [10.1109/CONIIN54356.2021.9634741](#)

Publisher: IEEE

▼ ISBN Information:

Electronic ISBN:978-1-6654-0724-3

Print on Demand(PoD)

ISBN:978-1-6654-0725-0

Conference Location: Queretaro, Mexico

B. Participación en CONIIN



CONiIN

XVII INTERNATIONAL ENGINEERING
CONGRESS

THE QUERÉTARO STATE UNIVERSITY THROUGH THE ENGINEERING
FACULTY GRANT THE PRESENT ACKNOWLEDGMENT TO:

Román Eduardo García Ferral, Fernando Reyes Cortés and Juvenal Rodríguez
Reséndiz

General Conference:

Design of a control algorithm for a robot manipulator with
constant gains

QUERÉTARO, MEX.
JUNE 2021



Dr. Manuel Toledano Ayala
PRINCIPAL
ENGINEERING FACULTY



Dr. Gonzalo Macías Bobadilla
GENERAL COORDINATOR CONIIN
ENGINEERING FACULTY

C. Participación en 15° Coloquio



“Regulador hiperbólico con ganancias variables: Diseño y simulación para el caso del péndulo-robot”

Román E. García-Ferral, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro Querétaro, México. rgarcia98@alumnos.uaq.mx
 Brandon Sánchez-García, Facultad de Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. brandon.sanchez@buaq.mx
 Fernando Reyes-Cortés, Facultad de Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. fernando.reyes@correo.buaq.mx
 Juvenal Rodríguez-Reséndiz, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro Querétaro, México. juvenal@uaq.edu.mx



Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema de regulación de robots manipuladores mediante la propuesta de un nuevo regulador hiperbólico diseñado con ganancias variables. Una de las ventajas del algoritmo propuesto es su implementación en diversos manipuladores evitando la saturación de sus actuadores. La estabilidad asintótica global del punto de equilibrio está garantizada desde el contexto del método directo de Lyapunov y el principio de invarianza de LaSalle. En aras de mostrar la funcionalidad y desempeño del algoritmo, se muestran resultados de simulación en un péndulo-robot. El índice de desempeño de la propuesta se muestra para poder realizar una comparación con otros algoritmos conocidos en la literatura. Desarrollar algoritmos de control permite aportar nuevas familias de funciones para un robot manipulador, así como también la posibilidad de obtener un desempeño alto. Esto último resulta de interés en el área de robótica ya que un regulador con alto desempeño genera un gran aporte para implementar estrategias de control.

Introducción

El problema de regulación en los robots manipuladores es una constante en el área de robótica en nuestros días. La regulación o también denominada control de posición escrita en diseñar un algoritmo de control que permita al robot manipulador llegar a la posición deseada. Al converger asintóticamente a la referencia ordenada no se toman en cuenta las condiciones iniciales, aunque fluya el tiempo. En términos generales no importa el punto inicial del robot manipulador, éste debe llegar al destino que se le ha indicado. No obstante, es necesario cuantificar el rendimiento del regulador diseñado debido a que los robots deben tener un buen desempeño por la variedad de tareas que realizan [1]. Otro de los problemas a abordar es la saturación de los servomotores en el robot manipulador. Cuando se tiene una planta se debe conocer las limitaciones físicas de ella y los servomotores de un robot manipulador no son la excepción. Una de las no linealidades más comunes dentro del área de los robots manipuladores es precisamente la saturación, la cual deteriora el desempeño del sistema de control aunado a que conduce a fallas mecánicas [2]. Más aún puede producir problemas en el control de trayectoria [4]. Es por este motivo que dentro del diseño del algoritmo se contempla el rango a trabajar del manipulador para evitar encontrar limitaciones en el actuador y provocar errores [5]. En los esquemas de control las ganancias juegan un rol importante para el rendimiento de un algoritmo. Muchos autores hacen uso de ganancias constantes para diversas técnicas, sin embargo, al ser un ajuste manual de ganancias se consume tiempo importante [5]. En base a toda la literatura revisada nace el interés de proponer un regulador cuyas ganancias sean variables para abordar el problema de regulación. Nuestras aportaciones se mencionan a continuación: Se utiliza un regulador hiperbólico con ganancias variables que cuenta con una versión híbrida donde el eje derivativo depende tanto de la velocidad como del error de posición. Como segundo punto se considera una dependencia del error de posición en la ganancia proporcional. Esto permite que, por medio de una regla de sintonía de las ganancias, la acotación del torque aplicado por el servomotor está garantizada. Debido a esto el péndulo-robot funcionará dentro de los límites prescritos por consiguiente la saturación se evita a toda costa. En aras de validar el desempeño y funcionalidad del regulador, los resultados de una simulación son presentados. Gracias a que se toma en consideración un péndulo-robot de transmisión directa cuyo motor es de tipo brushless en conjunto con un encoder superior a 1 millón de pasos por revolución, los resultados de la simulación obtenidos son muy similares a los que se pueden obtener por medio de la praxis.

Además, se ha considerado un nuevo modelo de fricción reportado en [16], el cual emula los fenómenos disipativos a través de funciones Lipchitz, que al mismo tiempo pertenecen a la ecuación en lazo cerrado, a diferencia del modelo clásico de LuGre. Esto nos permite realizar un análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio contemplando dichos fenómenos y resultados de simulación más precisos.

Dinámica del péndulo-robot



Figura 1. Péndulo-Robot.

Un péndulo robot es un tipo de manipulador que cuenta con un servomotor y una barra. El manipulador en cuestión está representado de manera gráfica en la Fig. 1 mediante un diseño para visualizar la plataforma de trabajo.

Considere el modelo dinámico de un péndulo-robot en Eq.1:

$$\tau = I_p \ddot{q} + mgl \sin(q) + b\dot{q} + \frac{f_c \sin^{2\alpha}(\dot{q}) + f_v \cos(\dot{q})}{1 + \sin^{2\alpha}(\dot{q})} \quad (1)$$

Donde: $q \in \mathbb{R}$ es la posición articular, $\dot{q} \in \mathbb{R}$ es la velocidad articular, $\ddot{q} \in \mathbb{R}$ es la aceleración articular, I_p es el momento de inercia del péndulo, m es la masa del péndulo, g es la constante de aceleración gravitacional, l representa el centro de masa del péndulo, b es el coeficiente de fricción viscosa, f_c es el coeficiente de fricción de Coulomb, f_v es el coeficiente de fricción de Stribeck.

Como se puede apreciar, la ecuación (1) incluye un nuevo modelo de fricción reportado en [6].

Metodología

El problema por solucionar es el control de posición. Este consiste en, diseñar un regulador $\tau \in \mathbb{R}$ de tal manera que el error de posición $\tilde{q} = q - q_d$ siendo q_d la posición deseada y la velocidad de movimiento del robot \dot{q} , convergen asintóticamente a cero cuando el tiempo tiende a infinito sin importar las condiciones iniciales $[\tilde{q}(0) \quad \dot{\tilde{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^2$, es decir la Eq. 2:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0 \quad (2)$$

Para dar solución al problema de control de posición descrito en (2), se ha diseñado un regulador hiperbólico con ganancias variables basándonos en la familia de funciones aportadas en [7], más una compensación de par gravitacional, como sigue

$$\tau = k_p(q) \left(\frac{\sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh(\tilde{q})} \right) - k_v(\dot{q}, \tilde{q}) \left(\frac{\sinh(\dot{q})}{1 + \cosh(\dot{q})} \right) + mgl \sin(q) \quad (3)$$

Siendo $k_p(\tilde{q}) > 0$ la ganancia proporcional variable y $k_v(\dot{q}, \tilde{q}) > 0$ la ganancia derivativa variable respectivamente.

Las ganancias variables que fueron diseñadas a partir de la definición presentada en [8], como se muestra a continuación en las Eq. 4 y 5:

$$k_p(\tilde{q}) = k_p \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\tilde{q})}\right) \quad (4)$$

$$k_v(\dot{q}, \tilde{q}) = k_v \cosh\left(\frac{1}{\cosh(\dot{q}) + \cosh(\tilde{q})}\right) \quad (5)$$

Mostramos a continuación el comportamiento de las ganancias variables diseñadas por medio de las Fig. 2 y 3.

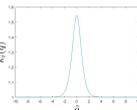


Figura 2. Comportamiento de la propuesta de ganancia variable proporcional.

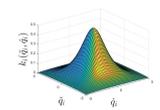


Figura 3. Comportamiento de la propuesta de ganancia variable derivativa.

presentado en [9] y un esquema hiperbólico Eq. 13 reportado en [10]. Estos algoritmos tienen sus ganancias constantes, las cuales fueron sintonizadas de manera manual:

$$\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + mgl \sin(q) \quad (11)$$

$$\tau = k_p \tanh(\tilde{q}) - k_v \tanh(\dot{q}) + mgl \sin(q) \quad (12)$$

$$\tau = k_p \frac{\sinh(\tilde{q}) \cosh(\dot{q})}{1 + \sinh^2(\tilde{q})} - k_v \frac{\sinh(\dot{q}) \cosh(\tilde{q})}{1 + \sinh^2(\tilde{q})} + mgl \sin(q) \quad (13)$$

Al pedirle al péndulo-robot la posición deseada este llega a su destino sin ningún problema. Obtenemos una respuesta subamortiguada en régimen transitorio y con un pico máximo atenuado, gracias a la acción de control derivativa a través del error de posición y la velocidad.

Más aún, mediremos su desempeño por medio de la norma L_2 e IAE. Aplicando estas dos normas a los algoritmos previos podemos compararlos mediante las siguientes gráficas vistas en las Fig. 4 y 5.

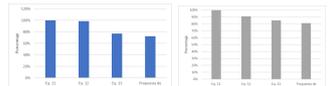


Figura 4. Gráfica de desempeño de la norma L_2 . Figura 5. Gráfica de desempeño de la norma IAE.

En base a lo visto en las Fig. 4 y 5 se llega a la conclusión de que el algoritmo propuesto tiene un mejor desempeño en contra de los algoritmos (11), (12) y (13).

Resultados

Para validar los resultados teóricos que se desarrollaron con anterioridad, se implementa el algoritmo de control con ganancias variables diseñado en (3) mediante el software *Matlab*® para verificar su funcionalidad. El experimento consiste en llevar al péndulo hacia la posición $q_d = \frac{\pi}{6}$ rad con las condiciones iniciales $[0 \text{ rad}, 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}]^T$, sin superar el torque máximo aplicado al servomotor; es decir $-15 \text{ Nm} \leq \tau_{\text{max}} \leq 15 \text{ Nm}$.

En torno a evaluar el desempeño, se implementan a nivel simulación en *Matlab*® los siguientes algoritmos conocidos en la literatura: PD clásico Eq. 11, el tangente hiperbólico Eq. 12

Conclusiones

El regulador propuesto es robusto frente a los parámetros numéricos del péndulo, así como también el algoritmo genera un atractor que permite al robot converger hacia la posición deseada. La respuesta del péndulo-robot nos indica que, utilizando esta propuesta de regulador, el tiempo en llegar al lugar colocado es más bajo. La propuesta de la ganancia derivativa variable es una nueva perspectiva para la regulación de robots, con respecto a los algoritmos clásicos, donde se inyecta amortiguamiento a través del error y la velocidad.

Referencias

[1] M. W. Spong and M. Vidyasagar, Robot Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1989.
 [2] Aviles, Jorge L. Barcelona. [3] Kelly, Rafael, Victor Santibáñez, [4] E. Arévalo, H. A. Taebi and A. [5] M. Jin, J. Lee, and N. B. [6] H. Hernández, Ernesto Daniel Rodríguez, et al. [7] F. Reyes, [8] Sánchez-García [9] R. Kelly, V. Santibáñez, and F. Reyes-Cortés, [10] F. Reyes-Cortés, F. López-García, J. C. [11] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C. [12] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C. [13] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C. [14] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C. [15] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C. [16] F. Reyes-Cortés, F. López-García, and J. C.

D. 1° Lugar en COTAER



COTAER 2021

La Facultad de Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones de la Universidad Veracruzana, Región Poza Rica-Tuxpan otorga el presente RECONOCIMIENTO a:

Román Eduardo García Ferral

Por haber obtenido el Primer Lugar en el 1er. Congreso de Tecnologías Aplicadas en Electrónica y Robótica en la modalidad de Difusión de trabajos de investigación con el póster:

Diseño e implementación de un controlador PI incremental

POZA RICA, VER. MEXICO
NOVIEMBRE 11, 2021



Dr. Miguel Ángel Rojas Hernández
DIRECTOR
FACULTAD DE INGENIERÍA EN

Dra. Xóchitl Siordia Vásquez
RESPONSABLE
CUERPO ACADÉMICO

E. Taller de ANSYS ELECTRONIC



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO



FACULTAD
DE INGENIERÍA



EDUCACIÓN
CONTINUA

Se otorga la presente
CONSTANCIA a:

ROMAN EDUARDO GARCÍA FERRAL

Por su participación en el

TALLER DE ANSYS ELECTRONICS

Impartido a través del Centro de Educación Continua
Del 11 al 12 de agosto del 2021.
Duración total de 8 horas.

FOLIO
CECFI-0802867/21



Dr. Manuel Toledano Ayala
DIRECTOR
FACULTAD DE INGENIERÍA



Ing. Guadalupe Murillo Flores
COORD. DEL CENTRO DE EDUCACIÓN CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERÍA

