Eduardo León Poceros

Diseño y evaluación de una Secuencia Didáctica que favorezca el aprendizaje de la jerarquía de operaciones y el desarrollo del sentido numérico con el uso del cuento con alumnos de primero de secundaria

2021

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Psicología

Análisis de las nociones de jerarquía de operaciones en futuros profesores de matemáticas de educación secundaria a través de una secuencia didáctica diseñada con un recurso literario.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestra en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta

Eduardo León Poceros

Dirigido por:

M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Querétaro, Qro. A noviembre, 2021

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Psicología

Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Análisis de las nociones de jerarquía de operaciones en futuros profesores de matemáticas de educación secundaria a través de una secuencia didáctica diseñada con un recurso literario.

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de Maestro en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta:

Eduardo León Poceros

Dirigido por:

M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Sinodales

Mtra. Norma Angélica Rodríguez Guzmán

Presidente

Mtra. Teresa de Jesús Valerio López

Secretario

Mtra. María del Sol Zamora Cárdenas

Vocal

Dra. Erika García Torres

Suplente

Mtra. Olivia Ávalos Esparza

Suplente

Centro Universitario Querétaro, Qro.

Noviembre, 2021. México.

Resumen

El presente proyecto de investigación estuvo enfocado en el tema de Jerarquía de Operaciones, que es central en la educación secundaria, que una vez adquirido, permitirá a los estudiantes comprender otros campos de las matemáticas como el álgebra y las funciones. A pesar de ser un tema de suma relevancia en los currículos oficiales de la SEP, su enseñanza privilegia la memorización encima de la reflexión y comprensión de las relaciones entre las operaciones y propiedades de los números naturales. Pero para que los alumnos de secundaria puedan adquirir este conocimiento desde otro enfoque de enseñanza, es necesario que los docentes perciban a la Jerarquía de Operaciones como un tema complejo que implica reflexión sobre las relaciones existentes entre los números y sus propiedades al operar, por lo tanto, es necesario enseñarse más allá de las prácticas memorísticas.

Por lo anterior, el objetivo general que nos planteamos a lo largo del proyecto fue diseñar y evaluar una secuencia didáctica para enseñar la Jerarquía de Operaciones que pudiera aplicarse a futuros profesores de matemáticas; propiciando la reflexión sobre las relaciones que se establecen entre los números y sus propiedades, construyendo nuevos conocimientos con un sentido y significado. Además, uno de nuestros objetivos específicos fue identificar los conocimientos y dificultades de los profesores, así como la evolución en sus procedimientos al inicio y al final de la secuencia. El estudio tuvo un enfoque metodológico cualitativo y se usó la ingeniería didáctica en sus cuatro fases (análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori).

Por otro lado, la *literatura* estuvo incluida en el diseño de la secuencia, al haber retomado el capítulo VII de la novela “El hombre que calculaba”. Esto no solo con el objetivo de atraer la atención y motivar a los alumnos, sino también a partir de la historia y sus personajes planteamos situaciones problemáticas a los que se enfrentarían los alumnos en cada una de las sesiones.

Palabras clave: Jerarquía de Operaciones, recurso literario, ingeniería didáctica y secuencia didáctica.

Abstract

This investigation project was focused on the topic of Hierarchy of Operations, which is central in secondary education, which once acquired will allow students to understand other fields of mathematics such as algebra and functions. Despite being a topic of great relevance in the official curricula of the SEP, its teaching privileges memorization over reflection and understanding of the relation between the operations and properties of natural numbers. But for secondary education students to be able to acquire this knowledge from another teaching approach, its necessary for teachers to perceive the Hierarchy of Operations as a complex topic that implies reflection on the relation between numbers and their properties when operating, therefore is necessary to teach it beyond mnemonics strategies.

Due the above, the general objective that we set ourselves throughout the project was to design and evaluate a didactic sequence to teach the Hierarchy of Operations that could be applied to future mathematics teachers; that would allow them to solve with their previous knowledge, encouraging reflection on the relation established between numbers and their properties, building new knowledge with meaning and significance. In addition, one of our specific objectives was to identify the teacher's knowledge and difficulties to be able to observe an evolution in their procedures at the beginning and at the end of the sequence. The study had a qualitative methodological approach and didactic engineering was used in its four phases (preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis).

On the other hand, *literature* was included in the design of the sequence, having taken up chapter VII of the novel "El hombre que calculaba". This not only with the aim of attracting attention and motivating the students, but also based on the story and its characters, we raised problematic situations that the students would face in each of the sessions.

Key words: Hierarchy of Operations, literary resource, didactic engineering and didactic sequence.

DEDICADO A

Los docentes:

Que con su valiosa labor contribuyen a la enseñanza de las matemáticas y con ello el fomento de mentes críticas.

Los alumnos:

Que con su inquietud de seguir explorando el mundo se cuestionan su entorno y lo transforman con sus conocimientos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo que me brindó mediante una beca para la realización de mis estudios de maestría.

Agradecimientos personales.

Para llegar a la culminación de un proyecto con la magnitud de la presente investigación, sólo es posible cuando más personas creen en él y apoyan para que se lleve a cabo. Por tal motivo quisiera agradecer en primera instancia a mi casa de estudios la **Universidad Autónoma de Querétaro** que me permitió una vez más concluir mis estudios.

Agradezco a mi directora de tesis la **Mtra. Norma** que confió en mí y que pudimos realizar este proyecto que sabíamos que no sería fácil al juntar nuestras dos pasiones, las matemáticas y la literatura, pero logramos encontrar la amalgama perfecta.

A mis sinodales la **Mtra. Sol, Mtra. Tere, Dra. Erika y Mtra. Olivia** les agradezco su tiempo que me brindaron, su escucha, su acompañamiento y sus aportes para la mejora de la tesis que sin duda me fueron de gran ayuda.

Quisiera ofrecer mi más sincero agradecimiento a los **futuros docentes de matemáticas** que accedieron a participar en la investigación con la mejor disposición y mostraron interés en seguir aprendiendo para con ello mejorar sus prácticas profesionales.

Uno de los apoyos principales que he tenido ha sido por parte de mi familia; a mi papá **José** y mi mamá **Carolina** quienes me han impulsado a seguir superándome y me apoyaron al tomar esta decisión de iniciar la maestría. A mis hermanos **Roberto** por estar conmigo y el haberme hecho tía a mitad de la maestría fue lo mejor que me pudo haber pasado y a **Isaac** que me echaste porras en cada cosa que hago. A mi tía **Ofe** que estuviste acompañándome en los días más estresantes en los que tenía que entregar la tesis y siempre me preguntabas cuántas hojas llevaba.

Mis amigas sin duda han sido un apoyo muy importante en este proceso. Te agradezco **Eli** por tu apoyo incondicional al escucharme y motivarme a seguir adelante en los días difíciles, por creer en mí y hasta el haberme dado hospedaje en tu casa cuando las clases eran presenciales, sin tu apoyo mesto no hubiera sido posible. A **Sol** que más allá de todos los compromisos y proyectos laborales en los que estamos juntas, hemos construido una

amistad muy bonita; te agradezco por tu escucha, por tus porras, por aguantarme cada vez que hacíamos planes resultaba que me salía un compromiso de la maestría y te adaptabas a mis tiempos (siempre nos pasaba y más en los días del sexposium) y por aquellos momentos de trabajo y distracción en la oficina.

A mi psicólogo **Leo** que si no hubiera sido por este acompañamiento mi salud mental se hubiera ido al pique, gracias por apoyarme en este proceso de muchas subidas, bajadas e incertidumbre.

A cada una de las personas que me brindaron su apoyo, una palabra de alivio, un abrazo y todo su cariño les estoy eternamente agradecida.

Contenido

Índice de tablas.

Índice de tablas

1. Introducción.

El presente escrito es el resultado de una investigación que buscó desarrollar una secuencia didáctica para favorecer el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones. Ya que, la comprensión de dicho contenido es indispensable para comprender otros más que se abordan en la secundaria, como lo es el álgebra. La Jerarquía de Operaciones es un convenio matemático que busca evitar confusiones en el tratamiento de algoritmos que contienen operaciones combinadas, indicando el orden en el que deben de resolverse, dependiendo de las propiedades de las operaciones y los números naturales, es decir, que este tema está estrechamente vinculado al sentido numérico.

En el planteamiento del problema analizamos algunos obstáculos que ha provocado la enseñanza tradicional en los aprendices, debido a que privilegia la memorización de pasos mediante acrónimos en los que cada letra representa una operación y el orden conforme aparecen, es como se sugiere que deben de resolverse aquellos algoritmos. También, existen otras representaciones que buscan "favorecer" su aprendizaje, por ejemplo, pirámides que muestran la prioridad que tienen algunas operaciones sobre otras. No obstante, algunos autores han cuestionado acerca de la efectividad de tales prácticas memorísticas, al poner en evidencia, que, en lugar de ayudar, en muchas ocasiones se logra obstaculizar el aprendizaje de los estudiantes, debido a que en algunos casos la jerarquía se "invierte" cuando hay operaciones de menor nivel jerárquico dentro de paréntesis y por tanto deben de resolverse primero, entre otros casos más.

Tales planteamientos nos llevaron a repensar las formas tradicionales de enseñanza, por lo que realizamos una búsqueda de otras estrategias que fueran más efectivas para favorecer el aprendizaje de dicho convenio. A partir de lo desarrollado por otros autores, encontramos que la reflexión de las relaciones que hay entre los números y las operaciones, les permite a los estudiantes encontrar una utilidad y un sentido a la Jerarquía de Operaciones. De esta manera nos planteamos como objetivo diseñar una secuencia didáctica que favoreciera el aprendizaje del tema en cuestión, privilegiando la reflexión y la interacción entre pares.

Además de la reflexión, decidimos incluir un elemento importante dentro de la secuencia, este fue el uso de una novela literaria, que en uno de sus capítulos presentaba una serie de ejercicios que dan pie a cuestionarse sobre la Jerarquía de Operaciones. A causa de la riqueza en su contenido matemático, nos pareció pertinente incluirlo y a partir de la trama y sus personajes principales plantear una serie de situaciones problemáticas que conduzca a los estudiantes poner a prueba sus conocimientos previos en lo que respecta a la Jerarquía de Operaciones.

Pero el aprendizaje de los alumnos de secundaria no sólo depende de ellos, sino también de las concepciones que tienen sus profesores al momento de enseñar los conceptos matemáticos, por tal motivo, nos pareció pertinente aplicar la secuencia didáctica a futuros profesores en educación matemática, con el objetivo de conocer sus concepciones en lo que respecta al tema en cuestión, y al mismo tiempo, brindarles la oportunidad de que sigan construyendo aprendizajes nuevos si es que no tienen consolidado el tema.

La metodología utilizada para este proyecto fue mediante la implementación de la ingeniería didáctica en sus cuatro fases: Análisis preliminares, Análisis a priori, Experimentación y Análisis a posteriori. En la primera fase investigamos bibliografía que nos revelara el origen epistemológico de la Jerarquía de Operaciones, así como la enseñanza tradicional y sus efectos; y las concepciones y obstáculos de los estudiantes al abordar el tema; en la segunda fase planteamos una serie de supuestos que nos ayudarían a predecir los posibles procedimientos de los estudiantes en el transcurso de la implementación. Estos supuestos los pudimos deducir a partir de los datos arrojados en la primera fase de la ingeniería didáctica; en la tercera fase diseñamos la secuencia didáctica y posterior a ello se implementó con los estudiantes; y por último en el Análisis a posteriori confrontamos los resultados obtenidos con lo que esperábamos que sucediera en el Análisis a priori.

Cabe mencionar que nuestra secuencia didáctica estuvo conformada de cinco sesiones, con una duración de una hora cada una de ellas; la implementación se realizó virtualmente a través de la plataforma Zoom, en sesiones sincrónicas con los estudiantes una vez por semana. Las Sesiones estuvieron divididas en tres momentos; el primero era introductorio al tema; en el segundo momento, se les presentaban el o los problemas para esa sesión, así como un espacio para que compartieran en plenaria sus procedimientos y, por último, se dispuso de un momento de reflexión y cierre de la sesión. Los detalles podrán consultarlo en el capítulo 5.

En el capítulo 6 se presentan los resultados de la investigación y se divide en dos partes; en la primera exponemos algunos procedimientos realizados por los estudiantes en cada una de las sesiones e hicimos el respectivo análisis contrastando los análisis a priori y a posteriori; en la segunda parte analizamos la estructura de la secuencia didáctica, así como los cambios que sugerimos hacer para su mejora. De los resultados obtenidos, pudimos dar cuenta que los alumnos tenían el entendido que existía un convenio matemático que indicaba el orden en que se realizan las operaciones, incluso sabían el nombre convencional de tal convenio. Sin embargo, en algunos casos sabían aplicar la jkerarquía, pero no lograban justificar del por qué se realizaba de tal manera. Es así como, pudimos identificar algunos temas que provocaron obstáculos en la mayoría de los estudiantes, tales como, las expresiones fraccionarias, las potencias y la notación científica. En el capítulo seis presentamos a detalle lo más relevante que sucedió en cada una de las sesiones.

En el entendido que la secuencia se implementó con futuros profesores, nos pareció de suma importancia que cuestionaran sus propios conocimientos con respecto a la Jerarquía de Operaciones y con ello puedan tener más elementos para poder mejorar sus prácticas profesionales. La presente investigación y nuestra secuencia didáctica sirven como antecedente para posteriormente pueda ser aplicada a estudiantes de nivel secundario.

1.1 Planteamiento del problema

El ingreso a la educación secundaria supone cambios de suma importancia debido a que; los contenidos de cada materia les exigirán mayor carga cognitiva a los estudiantes. No es la excepción para las clases de matemáticas. Los contenidos comienzan a complejizarse particularmente en el paso del estudio de la aritmética al álgebra.

Antes de comenzar el estudio formal del álgebra, el plan curricular está diseñado de tal manera que revisen algunos contenidos que les ayudarán a comprenderla. Uno de ellos es la

Jerarquía de Operaciones. Esta consiste, en un convenio matemático que indica el orden en que deben de operarse los números cuando en un mismo algoritmo hay más de una operación; por ejemplo, en el algoritmo $3 + 4 \text{ x } 9 - 5$, la jerarquía plantea que primero habría que resolverse la multiplicación de 4 por 9 y posteriormente la suma y la resta. Sin embargo, la enseñanza tradicional aborda este contenido desde la técnica de memorización de pasos, sin profundizar en el sentido que tiene seguir la Jerarquía de Operaciones.

El presente escrito es el resultado de una investigación en la que se diseñó una secuencia didáctica que favoreciera el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones y el desarrollo del sentido numérico con futuros profesores. Se buscó que ellos pudieran acceder a solucionar situaciones a partir de sus conocimientos previos para construir nuevos saberes. Dicha secuencia está diseñada de tal manera que la Jerarquía de Operaciones y el desarrollo del sentido numérico se construyan desde un paradigma alejado de la memorización y aplicación de técnicas sin sentido matemático[1].

A continuación, se presentan los resultados estadísticos obtenidos por Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2018), quien aplicó la prueba PLANEA en México los días 14 y 15 de junio de 2017 a un total de 131,662 alumnos de tercero de secundaria, de todas las entidades federativas y de todo tipo de escuelas como: secundarias comunitarias, telesecundarias, secundarias generales públicas, secundarias técnicas públicas y secundarias privadas.

La prueba PLANEA busca conocer en qué medida los estudiantes logran dominar un conjunto de aprendizajes clave que son esenciales al término de la educación básica secundaria, ya que se consideran fundamentales para la adquisición de nuevos conocimientos, son relevantes para el dominio del campo curricular y prevalecen con el

[1] Para construir un conocimiento matemático con un sentido se deben de considerar en dos niveles:
1. Nivel externo: ¿cuál es el campo de utilización de este conocimiento y cuáles son los límites de este campo
2. Nivel interno: ¿cómo y por qué funciona la herramienta?, por ejemplo, ¿cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado? (Charnay, 1994, p. 53).

En nuestro tema particular entendemos que los alumnos construyen con un sentido matemático la Jerarquía de Operaciones no solo cuando ubican el campo de aplicación de este conocimiento, sino, también cuando logran comprender la relación que hay entre las propiedades de los números y operaciones por las cuales el convenio funciona.

paso del tiempo a pesar de los cambios curriculares. La prueba está diseñada de acuerdo con los planes y programas de estudio de educación secundaria. Las áreas a evaluar en la prueba corresponden a: Lenguaje y Comunicación y Matemáticas.

Respecto a los conocimientos en el área de Lenguaje y Comunicación y Matemáticas; los resultados obtenidos se dividieron para cada área en cuatro niveles: dominio insuficiente, dominio básico, dominio satisfactorio y dominio sobresaliente. En el campo de las Matemáticas la prueba buscaba evaluar los aprendizajes esperados, dividiéndolos en tres ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; y análisis de la información. A nivel nacional, se obtuvo que 64.5% de los estudiantes están en el nivel I, es decir, en un nivel de dominio insuficiente, mientras que solamente un 5.1% se encuentra en un nivel sobresaliente de conocimientos. El primer eje en el que se centrará la atención para su análisis será el primero, es decir, sentido numérico y pensamiento algebraico, en el que se evaluaron las habilidades y conocimientos de los alumnos en números y sistemas de numeración, problemas aditivos, problemas multiplicativos, patrones y ecuaciones. En la tabla 1., se muestran a detalle los resultados de la evaluación para dicho eje.

Tabla 1. Resultados de la Prueba PLANEA 2017, Área de Matemáticas: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.

	Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Habilidades	Traducen a lenguaje algebraico una situación que se modela con una ecuación lineal. Sin embargo, tienen dificultades	Resuelven problemas con números decimales, de raíz cuadrada y de	Resuelven problemas con números fraccionarios de números naturales. Suman o restan	Resuelven problemas que combinan números fraccionarios y decimales y el uso de notación

	para emplear algoritmos aritméticos más elaborados y difíciles para el dominio del álgebra.	máximo común divisor.	expresiones algebraicas e identifican la ecuación cuadrática o el sistema de ecuaciones que modelan una situación.	científica. Multiplican expresiones algebraicas, calculan términos de sucesiones y resuelven problemas que implican una ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones.
Porcentaje	64.5%	21.7%	8.6%	5.1%

Nota. Información extraída del Informe de resultados por parte del INEE (2018).

En lo que respecta al sentido numérico y pensamiento algebraico, la gran mayoría de los alumnos pueden emplear algoritmos aritméticos sencillos, mientras que en el área del álgebra los estudiantes son capaces de traducir al lenguaje algebraico siempre y cuando implique una ecuación lineal, es decir, de primer grado. Los alumnos que están en un nivel de dominio sobresaliente tienen un sentido numérico más amplio, pues pueden resolver problemas combinando números fraccionarios, decimales y hacen uso de la notación científica, de igual manera, hacen un uso más amplio sobre la resolución de ecuaciones tanto lineales como cuadráticas. El bajo rendimiento escolar que aportan las pruebas estandarizadas ha hecho que diversos autores se cuestionen sobre las posibles razones por las que no se están obteniendo los resultados esperados en los alumnos, para fines de la investigación nos detendremos en el eje de sentido numérico y pensamiento algebraico.

Algunos autores han investigado sobre el desarrollo del sentido numérico en niños de primaria y adolescentes de secundaria. Yang (2005) afirma que en algunos problemas que les presentan a los alumnos, éstos los realizan aplicando de manera mecánica un algoritmo aprendido con anterioridad en la escuela, sin antes reflexionar la posibilidad de otros métodos de resolución más efectivos.

García (2014) por su parte, menciona que los estudiantes perciben a la aritmética como toda una serie de técnicas que el maestro les debe de explicar, cómo sumar, cómo restar, cómo multiplicar o cómo dividir. La actitud que adoptarán los estudiantes será una posición pasiva; por el contrario, si se les deja en libertad abordar los problemas haciendo uso de sus conocimientos previos, entonces ellos mismos podrán proponer estrategias, diversas formas de operar y manejar los números, construyendo conocimientos con significado. Cada vez que se tenga que resolver un problema que involucre números se puede hacer uso del sentido numérico.

El sentido numérico, Sánchez, Hoyos y López (2011), lo definen como los conocimientos, habilidades e intuiciones que una persona desarrolla acerca de los números; implica aplicar el conocimiento numérico de manera flexible, desarrollando estrategias útiles para manipular números, realizar operaciones y resolver problemas. Es decir, que un estudiante con sentido numérico es capaz de encontrar métodos efectivos de resolución a los problemas, hace uso flexible de los números, evalúa si su procedimiento es razonable o no y encuentra una utilidad a las matemáticas. Los mismos autores afirman que el desarrollo del sentido numérico empieza desde antes de iniciar la educación primaria y se continúa hasta el término de ésta; además reconocen que el sentido numérico puede facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico, el cual comienza de manera formal con el estudio del álgebra al iniciar la educación secundaria.

Por otro lado, en primero de secundaria dentro de los aprendizajes clave que propone la SEP (2017) en el eje de Número, álgebra y variación, hay un tema que es el de multiplicación y división, en el que los aprendizajes esperados son que los alumnos resuelvan problemas que impliquen la multiplicación con números decimales, fraccionarios y naturales, además de hacer uso de la Jerarquía de Operaciones. Este último tema es de suma importancia ya que se puede emplear en expresiones algebraicas como 2n +3, los alumnos tendrán que determinar que primero se resuelve la multiplicación de la literal por el dos y al final se le suma tres. El tener operaciones combinadas le exige al alumno no solamente hacer uso de los números, las operaciones, sus propiedades sino, le exige buscar estrategias efectivas de resolución; además se espera que atienda al uso convencional de la Jerarquía de Operaciones.

En lo que respecta a la Jerarquía de Operaciones, Headlam & Graham, (2009) identifican que desde la enseñanza tradicional se les presentan a los alumnos algunas estrategias mnémicas por medio de acrónimos, por ejemplo; PEMDAS (Parenthesis, Exponents, Multiplication, Division, Addition and Sustraction; que en español se refiere a Paréntesis, Exponentes, Multiplicación, División, Suma y Sustracción) que buscan ayudarles a memorizar el orden en que deben de realizarse las operaciones. No obstante, algunos autores consideran que el memorizar tales acrónimos no ayuda a los alumnos a entender del por qué funciona tal convenio (Lee, 2009; Ameis, 2011). Es por ello por lo que, algunas investigaciones han sugerido usar estrategias de aprendizaje alejadas a la memorización de pasos y que propicien la reflexión del funcionamiento del convenio de Jerarquía de Operaciones.

Desde hace algunos años la enseñanza de las matemáticas en México ha buscado construir aprendizajes con sentido e incentivar la reflexión; por tal motivo, a partir de la reforma educativa de 1993 se ha dado un impulso a la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo que los alumnos los resuelvan utilizando procedimientos propios; no se trata de enseñarles de entrada a resolver el problema, sino que ellos construyan estrategias personales haciendo uso de sus conocimientos previos (García, 2014, p.63). Desde esta perspectiva se le da la responsabilidad al alumno de crear sus propias estrategias de resolución a distintas situaciones problemáticas, lo cual abre la posibilidad a diversas formas de resolver un mismo problema en un mismo salón de clases, surgiendo una riqueza de conocimientos matemáticos.

En ocasiones la situación o el problema que se les presenta a los alumnos no resulta ser suficiente para propiciar el aprendizaje y es necesario recurrir al uso de algunos materiales que permitirán a los alumnos construir el conocimiento desde otras miradas. La SEP (2017) en su enfoque pedagógico de las matemáticas sugiere que es conveniente diversificar las situaciones o actividades que impliquen el uso de diferentes herramientas matemáticas o el uso de tecnologías; entre esas herramientas se sugiere incluir en las clases la calculadora.

Haciendo una revisión de materiales además de los mencionados por la SEP, encontramos que existen diversos recursos literarios en los que se incluyen temas matemáticos, algunos de ellos no tienen la intención explícita de enseñar matemáticas, pero consideramos que pueden ser utilizados en las aulas con tal fin. No obstante, tales recursos se les incluye poco o nada en las clases de matemáticas.

Macho (2017) considera que en el imaginario social se piensa de manera disociada a las matemáticas y la literatura, sin embargo, ambas pueden estar juntas, no son excluyentes una de otra. Es por ello por lo que podemos encontrar una variedad de materiales literarios con contenido matemático. Recientemente en algunas investigaciones se ha centrado el interés en incluir textos literarios como cuentos o novelas principalmente en la educación primaria con el objetivo de favorecer el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos, encontrando poca inclusión de tales recursos en la educación secundaria.

No obstante, nosotros consideramos que el texto literario por sí solo no puede llevar a la construcción de conceptos matemáticos a los alumnos, para cumplir ese fin es necesario la intervención del docente en el que se problematice algo de la trama que lleve al alumno a buscar soluciones desde sus saberes previos para la construcción de nuevos conocimientos. Por tal motivo, la secuencia didáctica que diseñamos retoma el uso de un recurso literario con contenido matemático, puesto que a partir de él diseñamos una situación problemática para cada una de las sesiones, con el objetivo no solo de atraer la atención de los alumnos y provocar motivación en ellos, sino también de confrontarlos a situaciones problemáticas que requieren el uso de estrategias matemáticas para poder resolverlas, de tal manera, que les permita construir nuevos conocimientos.

Retomando lo expuesto con anterioridad podemos establecer que el poco desarrollo del sentido numérico hace que los alumnos no reflexionen sobre los motivos para usar ciertos algoritmos o estrategias de resolución para determinados problemas, añadiendo la poca capacidad de manejar a los números y la forma de operarlos de forma flexible y creativa. Se ha observado que la enseñanza tradicional ha privilegiado las prácticas memorísticas en el tratamiento de algoritmos con operaciones combinadas. Retomando la propuesta de enseñanza de las matemáticas, según la SEP (2017) sobre diversificar el uso de herramientas tecnológicas en el salón de clases y de otros recursos con contenido matemático la práctica docente puede apoyarse con el uso de textos literarios en los que las matemáticas se hagan presentes, pues en algunas investigaciones se ha demostrado que el uso de éstos puede atraer a los alumnos, debido a que cuando se lee una narración se pone en juego la imaginación y los sentimientos del lector, por lo que se siente implicado dentro de la trama, provocando en él un interés por resolver la situación problema y con ello construir un conocimiento significativo (Marín, 2013).

1.2 **Justificación.**

Consideramos necesario plantear una intervención a través de una secuencia didáctica que apoyara a los alumnos a construir conocimiento y al mismo tiempo permitiera un espacio de interacción con otros y compartir sus procedimientos, adquiriendo nuevos conocimientos que se aparten de prácticas de memorización.

Haciendo una revisión a la enseñanza tradicional de la Jerarquía de Operaciones, que detallaremos más adelante en el capítulo de metodología, nos encontramos que su enseñanza radica en que los alumnos se aprendan los pasos en que se sigue la jerarquía, mediante estrategias mnémicas como acrónimos, resolviendo diversas situaciones desde la mecanización de procedimientos, sin embargo, tales prácticas obstaculizan su aprendizaje al no comprender el por qué en algoritmos como $(5+3)$x4, se resuelve primero la suma, provocando que los alumnos no tomen en cuenta los paréntesis como signos de agrupación y quieran resolver en primera instancia la multiplicación de 3 por 4; sólo por citar un ejemplo (Lee, 2007; Headlam & Graham,2009; Ameis, 2011, Lee et al, 2013); por lo tanto, para este tema requiere que el alumno ponga en juego sus conocimientos que tiene de los números y las relaciones entre sus propiedades, perder de vista la reflexión de estos aspectos, hace que los alumnos pierdan el sentido del convenio y no logren comprender del por qué funciona la Jerarquía de Operaciones.

Dado a lo anterior, consideramos necesario mejorar las situaciones problemáticas a las que enfrentamos a los alumnos para el abordaje de la Jerarquía de Operaciones, al ser un contenido importante que da entrada a otras áreas de las matemáticas como lo es la introducción al álgebra y el trabajo con las funciones (Headlam & Graham,2009); al comprender la jerarquía se puede dar entrada a resolver distintas expresiones matemáticas de diversa índole.

Es necesario que los alumnos se enfrenten a problemas desde sus conocimientos previos para a partir de ellos construir nuevos conocimientos con un sentido (García, 2014), de tal manera, cambiamos la forma tradicional en que percibimos las clases de matemáticas, al dejar de creer que el docente es el único que posee el saber; permitiendo que los alumnos construyan juntos el conocimiento en colaboración con otros estudiantes, teniendo un rol más activo en su proceso de aprendizaje.

Una de las maneras que encontramos para presentar los problemas matemáticos fue plantearlos desde el uso de un recurso literario, puesto que algunos autores consideran que la literatura puede atrapar a los aprendices y motivarlos a resolver los problemas (Blanco y Blanco, 2009; Marín, 2013) y al mismo tiempo, consideramos apoyar a disminuir la disociación que se hace desde el imaginario social entre las matemáticas y la literatura (Macho, 2017), permitiendo que los alumnos se percaten que algunos problemas o situaciones que podemos pronunciar desde un lenguaje retórico, es decir, por medio de las palabras o el lenguaje, podemos expresarlas y resolverlas mediante lenguaje matemático, tal como se hizo en un inicio a lo largo de la humanidad (Rojas, 2018).

Con el fin de mejorar las prácticas de enseñanza-aprendizaje, es necesario en un primer momento brindar oportunidades para mejorar las prácticas docentes o de quienes se están formando en la docencia. Carrión (2005) cuestiona las implicaciones que tendría el formar estudiantes que reciben desde una mala praxis la información, considerando si un profesor comete errores aritméticos de manera recurrente y tomando en cuenta el número de alumnos que son atendidos por dicho profesor en cada ciclo escolar, las consecuencias que ocasionaría para todo un país el formar un gran número de profesionistas con un aprendizaje construido en un ambiente de errores. Por tal motivo, es importante capacitar primero a los profesores para con ello puedan mejorar sus formas de enseñanza con sus alumnos. Considerando lo anterior, se tomó la decisión de implementar la secuencia didáctica con profesores en formación, buscando enriquecer su práctica docente. En un momento posterior, se espera que dicho trabajo pueda ser replicado en aulas de secundario con alumnos de ese nivel.

2 Preguntas y objetivos de investigación

Tomando en cuenta que la Jerarquía de Operaciones es un contenido importante que da pie a otros temas como el álgebra y las funciones, nos interesamos en buscar una forma de intervenir para favorecer suaprendizaje desde un enfoque distinto a la enseñanza tradicional y que se hiciera uso de un recurso literario. Nuestra **pregunta general** para propiciar la investigación fue:

- ¿Cómo favorecer el aprendizaje de la jerarquía de operaciones con el uso de un recurso literario?”

Partiendo de la pregunta general nos surgió la necesidad de pensar en un instrumento que favoreciera el aprendizaje del contenido matemático. Una vez que hayamos diseñado nuestra secuencia didáctica y estemos en la implementación, indagamos sobre las nociones que tienen los futuros profesores con respecto al tema y además las mejoras que se le pueden hacer al instrumento; nuestras **preguntas específicas** fueron las siguientes:

- ¿Cuáles son las nociones de los futuros maestros de matemáticas, acerca de la Jerarquía de Operaciones?
- ¿Qué mejoras se pueden hacer al instrumento para que cumpla con la meta de aprendizaje?

Desde nuestros cuestionamientos se desprenden nuestros objetivos que quisimos plantearnos con nuestra investigación; el **objetivo general** que rigió el presente proyecto fue:

- Diseñar una secuencia didáctica que permita a los alumnos abordar y construir el concepto de Jerarquía de Operaciones, por medio del uso de un recurso literario.

En nuestras preguntas específicas nos preguntamos sobre los procedimientos de los alumnos y sobre la evaluación de la secuencia didáctica; nuestros **objetivos específicos,** son los siguientes:

- Identificar y analizar las nociones previas sobre la Jerarquía de Operaciones, de los futuros maestros de matemáticas.
- Evaluar el instrumento, es decir, la secuencia didáctica, para que permita alcanzar las metas de aprendizaje planteadas.

3 Antecedentes

Una de las propuestas que tiene el presente estudio fue incluir recursos literarios para a partir de ellos enseñar contenidos matemáticos. Al respecto Macho (2017) nos menciona que en el imaginario social se piensa a la literatura y a las ciencias como disociadas; no obstante, se puede pensar a ambos campos como complementarios, es decir, todo aquello que no puede expresarse con palabras se puede explicar con lenguaje matemático y viceversa. Además de lo anterior, la autora realizó un análisis profundo a varios textos literarios, algunos de ellos considerados como literatura clásica, con el fin de localizar aquellos contenidos matemáticos que aparecían en la trama, encontrando que en varios de ellos aparece tal contenido tales textos fueron: El Quijote de la Mancha, Los Viajes de Gulliver, Tom Sawyer, La Isla Misteriosa, entre otros; encontrando que se hace mención de temas como: el Teorema de Pitágoras, el concepto de infinito, unidades de medida y sus conversiones, fracciones, criptografía y otros temas más. La autora sostiene que a través de la lectura se pueden aprender algunos datos matemáticos relevantes; sin embargo, consideramos que la lectura no basta para aprender y construir tales conceptos, sino es necesario crear a partir de estos textos un diseño específicamente didáctico para enseñar matemáticas.

Por lo anterior nos centramos en investigaciones y/o proyectos que hayan incluido recursos literarios con la firme intención de enseñar matemáticas; como lo es la investigación de Marín (2013) que tras varias intervenciones con niños de preescolar y primaria en las que incluía dentro de sus cuentos contenido matemático, llegó a la firme convicción que los cuentos al ser parte del contexto de los infantes pueden atraer su atención para aprender matemáticas. Tales hallazgos la llevaron a realizar un libro de cuentos que incluyan conceptos matemáticos para situarlos dentro de un contexto que sea cercano a los niños; y por el otro lado, dichos textos sirven como guía de trabajo para los docentes, ya que los cuentos están acompañados de algunas actividades con la intención de ser utilizadas específicamente para enseñar matemáticas.

Blanco y Blanco (2009) retoman como antecedente las investigaciones de Marín, para usar el cuento como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas, siendo los alumnos de secundaria su principal interés. En dicha investigación se tenía como objetivo no solamente intervenir directamente en el área de las matemáticas sino también, hacer incidencia en la comprensión lectora y habilidades comunicativas, ya que, en el currículum de su país, es decir, España, se sugiere que los alumnos tengan un buen uso del lenguaje matemático, el cual se puede desarrollar mediante aptitudes comunicativas.

En su investigación se trabajó con algunos cuentos que fueron incluidos dentro de una secuencia didáctica, enfocándose principalmente en el tema de fracciones. También una de las intenciones que se tenían en el proyecto, fue que los alumnos escribieran por sí solos una narración que incluyera dentro de su desarrollo un concepto matemático; encontrando que en casi todos los productos realizados por ellos se logró tal objetivo. De igual manera se encontró que había un interés manifiesto en la mayoría de los alumnos, gracias a que el cuento fungió como un elemento motivador para el aprendizaje.

Ramos (2016) realizó un proyecto, en una escuela general secundaria de la Ciudad de México, el cual consistía en hacer un vínculo con la literatura y la enseñanza de las matemáticas y conformar un círculo de lectores. En el proyecto participaron tres grupos de primero de secundaria en los que Ramos era el docente y les propuso a sus alumnos toda una serie de textos literarios con contenido matemático, cada alumno se acercaba a la lectura de tales textos a voluntad propia, ya que las intenciones del profesor era que la lectura se percibiera desde el placer y no como obligación. Posteriormente se les hizo una invitación a los padres de familia para formar un círculo de lectura literaria con matemáticas, a la reunión asistieron ocho mamás y dos papás, en el que acompañados de café y galletas se adentraron al mundo de las matemáticas, fue así como se consolidó el proyecto al que se le llamó “café literario”.

Los resultados que obtuvo Ramos (2016) de tal iniciativa fue que los padres de familia y los alumnos se interesaron más en los textos literarios y en contenidos de las matemáticas mismas. Además, el autor proponía como puntos de mejora para su intervención incluir más textos literarios y asignar más tiempo de intervención.

Entrando en materia al tema central de la presente investigación, es decir, la Jerarquía de Operaciones, retomamos una intervención realizada por Ameis (2001), quien es docente en una universidad de Canadá en la que tuvo a su cargo a futuros profesores de matemáticas, que ya habían visto con anterioridad el tema de la Jerarquía de Operaciones, sin embargo, se les había enseñado desde un enfoque tradicional memorístico; por tal motivo, Ameis decide hacer una breve intervención con sus estudiantes para propiciar la reflexión de tan importante convenio, pues considera que las percepciones que tengan los estudiantes con el tema generarán un impacto en los futuros alumnos de los en ese entonces docentes en formación.

Para comenzar con su intervención, Ameis les leyó a sus estudiantes diversas historias de “Rocky la ardilla”, a modo de ejemplificar y resumen, el relato presentado a sus estudiantes fue: Rocky la ardilla salió a recolectar bellotas, así que, puso 7 bellotas en un agujero debajo del haya, seguidas de dos pilas de 6 bellotas cada una en una hendidura en el viejo álamo. Ante el fragmento anterior los estudiantes debían de calcular el total de bellotas recolectadas por la ardilla y sustentando su resultado con una operación. Entre sus resultados Ameis encontró algunas dificultades en los estudiantes, como el recurrir a lo memorístico para resolver el problema sin tener éxito, errores al resolver problemas con operaciones combinadas y la falta de comprensión de ubicar la multiplicación y división en un mismo nivel de la jerarquía; y lo mismo para la suma y la resta.

Uno de los aportes que hizo Ameis con sus estudiantes para trabajar la reflexión de la Jerarquía de Operaciones; fue proponerles un triángulo presentado a manera de pirámide, dividido en 3 peldaños, ubicando en la punta al de mayor jerarquía (raíces y potencias) y en la base a la suma y la resta. Con tal instrumento los alumnos debían de ubicar a aquellos números que estaban entre dos operaciones de diferente nivel jerárquico y resolver la operación con mayor valor. A partir de exponer a sus alumnos a diferentes problemas por medio de las historias de Rocky la ardilla; logró ver en sus estudiantes una mayor comprensión del tema en cuestión.

Siguiendo la misma línea de investigaciones del uso de materiales didácticos para enseñar el concepto de Jerarquía de Operaciones; continuamos con una investigación realizada por Ávalos (2019) en San Luis Potosí, México; su propuesta fue el diseño de una secuencia didáctica dirigida a estudiantes de segundo grado de secundaria (14 mujeres y 15 hombres), con el objetivo de favorecer el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones haciendo uso de material lúdico. La secuencia didáctica estuvo conformada por 7 sesiones; en las que se incluyeron diversos juegos, como Loterías Jerárquicas, Rompecabezas Jerárquico y Twister Jerárquico, todos ellos fueron adaptaciones o algunos de ellos creaciones propias. Entre otros materiales incluidos en la implementación fue el uso de una calculadora científica y un fragmento del libro el hombre que calculaba, específicamente el capítulo VII. Cabe destacar que en el caso del recurso literario los alumnos no tuvieron acceso a la lectura de este, ya que la investigadora les contó de manera oral la historia y les planteó el problema matemático de encontrar los números del 0 al 10 usando cuatro cuatros.

Como resultado de la investigación, Ávalos (2019) obtuvo que el material lúdico favorece el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones y hace atractiva la clase a los alumnos. Tal afirmación la pudo constatar con los resultados que obtuvo al realizarles una prueba diagnóstica y los resultados de una prueba final.

De las investigaciones antes citadas, podemos dar cuenta que se ha llevado a las aulas diversos recursos literarios con el objetivo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos. No obstante, son pocas las intervenciones en las que se incluye a estos recursos como parte fundamental de una secuencia didáctica, pues se puede observar que en algunas investigaciones la literatura hace su aparición en un espacio breve de tiempo.

En lo que respecta al uso de la calculadora Headlam & Graham (2009), realizaron una investigación en la que incluían el uso de esta herramienta, puesto que ellos consideraron que los alumnos se acercan al lenguaje de las matemáticas a través del uso de este artefacto, además que pueden deducir el orden en que realiza las operaciones la calculadora. Para su estudio contemplaron hacer un pilotaje con jóvenes de Reino Unido y de Japón, con un rango etario que va de los 12 a los 14 años. Esta población la eligieron para analizar si los estudiantes recurrían a estrategias distintas debido a la educación que habían recibido en sus respectivos países.

En el estudio participaron 20 estudiantes que cursaban el octavo grado o lo correspondiente a segundo de secundaria en nuestro sistema escolar de 13 años; de la población japonesa participaron 33 estudiantes de 14 años. El desarrollo del estudio consistió en que los investigadores les presentaron a los alumnos una hoja de trabajo con una serie de ejercicios de operaciones combinadas que debían de resolver, en un primer momento no les permitieron el uso de la calculadora, pero para una segunda hoja de trabajo les permitieron el uso de una calculadora gráfica que trabajaba con un software gráfico que arrojaba una mayor visualización de los procedimientos.

Uno de los hallazgos relevantes de este estudio, fue que la calculadora les permitió a los estudiantes comprender y deducir el orden en que se realizaban las operaciones a partir de lo obtenido en la calculadora. Otro aspecto importante fue que los alumnos recurrían a estrategias mnémicas como el uso de PEMDAS (paréntesis, exponentes, multiplicación, división, adición y sustracción); que tiene la intención de ayudar al estudiante de memorizar el orden en que deben de operarse los números, contrario a lo esperado, algunos alumnos no podían resolver los problemas al no acordarse el significado de alguna de las letras; es por ello que los autores mencionan que el aprendizaje de estos recursos mnémicos pueden obstaculizar la adquisición de la Jerarquía de Operaciones, al dejar de lado la reflexión. Por otro lado, encontraron que la población de Reino Unido era más susceptible a usar recursos mnémicos que los japoneses.

Como pudimos observar en la presentación de investigaciones anteriores, existen distintas estrategias para enseñar la Jerarquía de Operaciones, que van desde el material concreto hasta algunas representaciones gráficas, pero además del apoyo de recursos didácticos, es necesario que este tema esté acompañado de reflexión al momento de su abordaje, puesto que en las investigaciones que han procedido de tal manera, los alumnos tienen avances en cuanto a su aprendizaje.

La última investigación que presentaremos se llevó a cabo en México, durante 1982 hasta el 2005 en dos ciudades de cada estado de la República Mexicana; en tal investigación participaron profesores de primaria, secundaria y bachillerato y de igual manera participaron estudiantes de secundaria, bachillerato y nivel universitario. El objetivo era encontrar los errores que tenían tanto los alumnos como los profesores al realizar algoritmos con operaciones combinadas. Para ello les presentaron a ambas poblaciones una hoja con 10 ejercicios que contenían operaciones combinadas, de distinto grado de dificultad (Carrión, 2005).

En los resultados obtenidos pudieron identificar que tanto profesores como alumnos tenían dificultades al resolver uno de los algoritmos $(2 + 2^2 x\ 3 - 2^2\ x\ 3\ \div 4)$, que incluye una suma, una resta, dos multiplicaciones, una división y dos potencias. Las causas de los errores que encontró Carrión (2005) para este ejercicio fue la falta comprensión del lenguaje de las matemáticas simbólicas, al no identificar cada una de las operaciones que contenía la expresión; también los participantes no ubicaron a la potencia como una operación y, por último, resuelven guiándose en la escritura de izquierda a derecha sin tomar en cuenta las operaciones y sus propiedades.

Lo que nos muestran los resultados anteriores es que la edad de las personas no influye en comprender de mejor manera la Jerarquía de Operaciones, pues varios de los adultos participantes tuvieron errores similares a los estudiantes, por lo tanto, tener una mayor edad no garantiza resolver con éxito este tipo de ejercicios.

Con base a las investigaciones que anteceden nuestro proyecto, nos percatamos que se puede usar la literatura con intenciones de enseñar matemáticas y que gracias a la diversidad de situaciones en las que se ha utilizado para tal fin, se puede hacer para cualquier tema o concepto matemático. En lo concerniente a la Jerarquía de Operaciones, pudimos dar cuenta que no hay una forma o método único de abordar el tema, no obstante, en las investigaciones anteriores, se ha mostrado que cuando se propicia un espacio para la reflexión y no sólo se espera que los alumnos memoricen una serie de pasos, éstos logran tener una mejor comprensión de la relación entre los números y sus propiedades y de las razones por las cuales es necesario llegar a establecer un convenio que dicte el orden en que deben de hacerse las operaciones, para con ello evitar confusiones.

Por tales motivos consideramos de suma relevancia el reflexionar sobre la Jerarquía de Operaciones, y al mismo tiempo que los alumnos puedan contrastar sus razonamientos con la calculadora, pues este artefacto funciona desde el lenguaje matemático convencional; y, por último, sabiendo que los adultos y alumnos pueden responder de manera similar a algunos problemas, diseñamos un recurso que fue aplicado con futuros profesores para en lo posterior pueda ser aplicado con alumnos de secundaria.

4 Marco teórico

En este apartado se muestra el contenido teórico que da sustento a la investigación, por lo que se ha decidido dividir el apartado en tres secciones: fundamentación teórica y metodológica, en él se expondrán las teorías en las que apoyaremos la investigación; en la segunda sección se desarrollarán los conceptos significativos de la parte de matemáticas y en la última sección se abordarán los conceptos significativos en relación a la literatura.

4.1 Fundamentación teórica y metodológica.

4.1.1 Teoría de las situaciones didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), fue escrita por Guy Brousseau en la década de los años ochenta, como parte de sus resultados de su tesis doctoral. Brousseau (2007), entiende como situación a un entorno manipulado por el docente en el que se pone en juego un saber matemático:

> La situación didáctica implica una interacción del estudiante con situaciones problemáticas, una interacción dialéctica, donde el sujeto anticipa, finaliza sus acciones y compromete sus conocimientos anteriores; los somete a revisión, los modifica, los complementa o los rechaza para formar concepciones nuevas. (Cabanne, 2006, p.9)

En dicha situación, de acuerdo con Brousseau (2007) define como triángulo didáctico a la relación entre profesor, alumno y saber; agregando posteriormente la noción de medio como parte de esa triangulación. Cada uno juega un rol importante, en el caso del docente, su actitud es de brindar pocas o casi ninguna ayuda a los alumnos que resolverán la situación. El papel del alumno es el principal en este entramado de elementos, ya que será él quien se enfrente a un saber matemático a través de un medio planeado por parte del docente. Es el alumno quien con sus saberes previos se enfrentará a tal medio y llegará a nuevos resultados. El medio se entenderá como aquellos textos, materiales, etc., que permiten el abordaje del saber, tales materiales son minuciosamente preparados por el profesor y pueden ser a través de objetos físicos o situaciones abstractas, como plantear una situación en la que no se use ningún recurso físico.

El conocimiento al que recurra o produzca en el alumno, deberá de aparecer por la interacción que tenga con el medio, de tal manera que surja sin la indicación implícita o explícita del docente (Fregona y Orús, 2011). Todas las situaciones implementadas en el aula se consideran situaciones didácticas, debido a que tienen la intención de enseñar algo a alguien, pero no todas las situaciones didácticas son situaciones a-didácticas; éstas últimas tienen que cumplir algunas condiciones para ser consideradas como tal (Chamorro, 2005):

- El alumno debe de poder entrever una respuesta al problema planteado.
- La estrategia de base debe de mostrarse insuficiente.
- Debe de existir un medio de validación de las estrategias.
- Debe de existir incertidumbre por parte del alumno en las decisiones.
- El medio debe de permitir retroacciones.
- La situación debe de ser repetible.
- El conocimiento buscado debe de aparecer como necesario para pasar de la estrategia base a la estrategia óptima.

Las situaciones a-didácticas permitirán que el alumno se involucre siendo responsable en la construcción de su propio conocimiento; el medio deberá estar diseñado de tal manera que el alumno tendrá que recurrir al saber a tratar para poder resolver de manera óptima el problema presentado en la situación.

Brousseau (2007) realizó una clasificación de las situaciones didácticas de acuerdo con las exigencias que le plantea el medio al alumno; situaciones de acción, situaciones de formulación, situaciones de validación y situaciones de institucionalización:

- Situaciones de acción: El alumno actúa sobre el medio en función de sus propias motivaciones; el medio responde o retroalimenta al alumno y éste al medio.
- Situaciones de formulación: Este tipo de situación involucra necesariamente a dos o más alumnos; el alumno comunica a otro lo descubierto en la fase acción involucrando necesariamente recursos lingüísticos.

- Situaciones de validación: Los esquemas de acción y formulación llevan a hacer una corrección; entre los dos o más alumnos involucrados deciden enfrentar juntos la situación, estableciendo una comunicación entre los alumnos.
- Situaciones de institucionalización: ya que los alumnos actuaron sobre el medio y las modificaciones de estrategias, el docente está encargado de introducir los conceptos necesarios y aclarar las dudas que tengan los alumnos.

En la teoría de las situaciones didácticas el error tomará un papel muy importante como parte del proceso de conocer, desde esta perspectiva no se trata de evitar que ocurran los errores o de ignorarlos, debido a que:

> Un obstáculo se manifiesta a través de errores, pero esos errores en un mismo sujeto están unidos entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, aunque no correcta, un conocimiento anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones. (Brousseau, 2007, p. 45)

Los errores u obstáculos serán la manifestación de una forma específica que tiene el alumno de razonar, es por ello por lo que cuando aparecen se deben de tomar en cuenta para analizar las estrategias que está utilizando el alumno para su resolución. Por lo tanto, el error no desaparece con el aprendizaje de un conocimiento nuevo, por el contrario, es constitutivo del saber.

4.1.2 Ingeniería didáctica y sus fases.

La ingeniería didáctica es denominada de esa manera, debido a que la forma de trabajo didáctico es equiparable con el trabajo de un ingeniero, quien para realizar un trabajo determinado se basa en conocimientos científicos (Artigue, 1995), al igual que el ingeniero que necesita de esos conocimientos, requiere de una metodología o forma específica de proceder para intervenir a determinadas situaciones; en la didáctica de las matemáticas es necesario además de la teoría una metodología para la investigación, la ingeniería didáctica es una metodología cuya validación se da de manera interna y consta de 4 fases:

- Análisis preliminares: Esta fase consiste en revisar; el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos que determinan su evolución. Lo anterior se hace atendiendo a los objetivos propios de la investigación.

- La concepción y análisis a priori: a partir de los datos que arroja el análisis preliminar, el cual se basa en un conjunto de hipótesis, las cuales serán confrontadas entre el análisis a priori y el a posteriori.

- Diseño de instrumentos y experimentación: Se realiza el diseño de la secuencia didáctica a realizar y se implementa con los alumnos.

- Análisis a posteriori y validación: a partir de la recogida de datos en la implementación que pudieron haber surgido dentro del aula o fuera de ella. Se confronta el análisis a priori con el análisis a posteriori y se fundamenta la validación.

Como ya mencionamos la ingeniería didáctica es una metodología para la investigación y la aplicamos en nuestro proyecto en sus 4 fases, en el capítulo 5 de metodología presentamos un análisis de cada una de las fases de la ingeniería didáctica aplicada a nuestro tema de investigación.

4.2 Jerarquía de Operaciones.

En algunas ocasiones encontramos en un mismo algoritmo diferentes operaciones que deben de llevarse a cabo, sin embargo, Balbuena, Block y García (2018), dicen que existe un convenio matemático llamado Jerarquía de Operaciones, el cual indica el orden en que deben de operarse los números y con ello evitar confusiones. El orden que reconocen los autores es el siguiente:

- Si en una expresión con varias operaciones hay paréntesis, se resuelve primero lo que hay dentro de ellos y en seguida se eliminan.

- En segundo lugar, se resuelven los exponentes y las raíces.
- Posteriormente se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
- Hasta en último lugar se resuelven las sumas y restas.
- Cuando hay dos o más operaciones con la misma jerarquía, se resuelven de izquierda a derecha.

En la última viñeta se hace mención del procedimiento de izquierda a derecha, empero autores como Ameis (2011) mencionan que resolver de esta manera no es un procedimiento propiamente matemático y lo que los alumnos deberían de comprender es que las operaciones que se encuentran en un mismo nivel jerárquico son operaciones inversas y siempre se llega al mismo resultado, por lo que no importa el orden en que se opere.

Los autores agregan que la línea de fracción, además de indicar división, funciona como un paréntesis, el resultado de arriba de la línea de fracción se divide entre el resultado de lo que está debajo, por ejemplo: $\frac{20+10}{2+4} = \frac{30}{6} = 5$. Siguiendo con el planteamiento de los paréntesis, los autores dicen, que éstos pueden ser usados para indicar multiplicación y no solo como signos de agrupación.

Algunos autores señalan que cuando se necesita agrupar algunas operaciones que ya tienen paréntesis (), será necesario agruparlas con corchetes [ ], y si es necesario volver a agrupar se colocan llaves {} o se usa la barra o vínculo tiene la misma función de agrupar (Baldor, 2007; Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón y Reyes, 2009). Los signos de agrupación antes mencionados, se utilizan para indicar que las cantidades encerradas deben de considerarse como un todo o como una sola cantidad, por ejemplo; en la expresión $a + (b - c)$, indica que la resta de b por menos c debería de sumarse con a (Baldor, 2005). En las expresiones que se usan signos de agrupación, se eliminarán en el mismo orden de aparición, primero paréntesis, después corchetes y al último las llaves (Balbuena, Block y García, 2018).

4.2.1 Jerarquía de operaciones y sentido numérico.

Definir sentido numérico suele ser una tarea un poco compleja, ya que no nos referimos a un concepto concreto en particular, sino más bien corresponde a una categoría que designa un cúmulo de habilidades o características que las personas con sentido numérico poseen, McIntosh, Reys & Reys (1992) definen al sentido numérico como una propensión y habilidad para usar números y métodos cuantitativos como un medio para comunicar, procesar e interpretar información. Consolida una expectativa que los números son útiles y que las matemáticas tienen cierta regularidad. García (2014), por su parte, define al sentido numérico como:

- Un conjunto de conocimientos, intuiciones y habilidades que desarrolla una persona acerca de los números.
- Es personal cada individuo desarrolla su propia red conceptual formada a partir de la comprensión que tiene de los números.
- Permite emplear los números con flexibilidad y creatividad al resolver operaciones o problemas
- Permite hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias numéricas propias.

De lo anterior nos interesa resaltar del sentido numérico como aquella capacidad propia que tienen los estudiantes para resolver un problema, por medio de sus conocimientos acerca de los números y las operaciones; por lo tanto, se esperaría que un alumno con un buen sentido numérico sea capaz de percatarse de las relaciones que hay entre las operaciones y las propiedades de los números naturales. Lee, Likwinko & Taylor-Buckner (2013) consideran necesario que los alumnos tengan conocimientos básicos sobre aritmética y tener un buen sentido numérico para comprender la efectividad de PEMDAS, es decir la Jerarquía de Operaciones, ya que la adición y la multiplicación comparten la propiedad conmutativa y asociativa, en el siguiente apartado hacemos una revisión sobre los números naturales y las propiedades al momento de operar.

4.2.2 Números naturales y operaciones básicas.

Los números naturales han estado presentes a lo largo de la historia desde que el humano empezó a contar. Los niños conocen a los números que sirven para contar {1, 2, 3, 4…} con la misma naturalidad con la que lo hicieron los primeros seres humanos, por ello se denominan números naturales (Freiberger y Thomas, 2017). No obstante, el cero es una incorporación reciente que apareció en India en el Siglo VII y aparece con entidad propia, así como los otros números.

Tales números, además de expresar cantidades, se pueden utilizar para realizar aritmética simple, es decir para realizar cálculos, usando sólo los naturales o los enteros positivos, de igual manera, se pueden hacer operaciones con los enteros negativos, pero para los objetivos de esta investigación nos centraremos en los números naturales. Las operaciones básicas son la suma, la resta, la multiplicación y la división:

- En la suma, los elementos reciben el nombre de sumandos y el resultado es suma o adición.
- La resta es la operación inversa de la suma, sus elementos son el minuendo, el sustraendo y la diferencia.
- La multiplicación es la representación de la suma de una misma cantidad varias veces, por ejemplo; 3 x 4 = 4 + 4 + 4= 12 o 4 x 3= 3 + 3 + 3 + 3= 12. Sus elementos reciben el nombre de factores y el resultado se le conoce como producto o multiplicación.
- En la división entre dos números naturales *a* y *b,* siendo *b* un número distinto a cero, consiste encontrar los números *p* y *r,* tales que al multiplicar *b* por *p* más *r* dará como resultado *a.* Siendo *a* el dividendo, *b* el divisor, *p* el cociente y *r* el residuo. Cuando en una división el residuo es cero, se dice que la división es exacta. La división puede representarse mediante diferentes símbolos, con una caja divisoria o galera (¬), por medio de dos puntos (9: 3), con el signo (÷) y mediante una fracción $\frac{24}{8}$ (Aguilar, et al., 2009).

Algunas operaciones comparten ciertas propiedades, tal es el caso de la suma y la multiplicación, que al mismo tiempo se cumplen cuando se operan números naturales o enteros, las propiedades son las siguientes:

- **Propiedad de cerradura en la suma:** si a y b son números enteros, entonces la suma de éstos dará como resultado otro entero.
- **Propiedad conmutativa en la suma:** si a y b son enteros entonces $a + b= b + a$.
- **Propiedad asociativa en la suma:** si a, b y c, son enteros, entonces $(a + b) + c= a + (b + c)$.
- **Existencia del neutro aditivo:** el número cero (0) satisface la igualdad de $a + 0= a$, para cualquier número entero.
- **Propiedad de cerradura en la multiplicación:** si a y b son números enteros, entonces su producto será un número entero.
- **Propiedad conmutativa en la multiplicación:** si a y b son números enteros, entonces $ab= ba$.
- **Propiedad asociativa en la multiplicación:** si a, b, y c son números enteros, entonces, $(ab)c= a(bc)$.
- **Existencia del neutro multiplicativo:** El número 1 satisface la igualdad de $a \times 1= a$, siendo a cualquier número entero.
- **Propiedad distributiva:** Esta propiedad la comparten la adición y la multiplicación; si a, b, y c son números enteros, entonces $a (b + c) = (ab) + (ac)$, (Oteyza, Lam, Hernández y Carrillo, 2007).

Las propiedades anteriores, no son compartidas entre todas las operaciones, es el caso de la división, dado que no es asociativa, pues $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$, tampoco es conmutativa, dado que $a \div b \neq b \div a$ (Oteyza et al. 2007)*;* por lo tanto, si en una misma expresión aparecen diferentes operaciones, habría que estar advertidos de tales propiedades porque si no se sigue el convenio de Jerarquía de Operaciones se pueden obtener diferentes resultados, especialmente en las operaciones que no son conmutativas.

4.2.3 Potenciación y radicación.

Aguilar et al. (2009) definen a la potenciación como la operación en la que una cantidad llamada base se debe de multiplicar por ella misma, cuantas veces indique el exponente, por ejemplo, a^n, en donde *a* es la base y *n* es el exponente, la letra *a* se multiplicará por sí misma *n* veces (*a x a x a ...n).* Trabajar con potencias no sólo simplifica el escribir la multiplicación desglosada, sino, también permite hacer los cálculos más eficientes, como el elevar 2 a la 50 potencia basta con escribir: $2^{50} = 1{,}125{,}899{,}906{,}842, 624$, (Freiberger y Thomas, 2017).

Por otro lado, la radicación permite encontrar un número que multiplicado tantas veces como indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual, recibe el nombre de radicando (Aguilar, et al. 2009).

Las matemáticas simbólicas constituyen en sí mismas un lenguaje independiente al lenguaje natural, esto quiere decir que cada uno de los signos que aparecen en una expresión están indicando algo en particular, dependerá del lector interpretar lo escrito. Carrión (2007) menciona que para leer una expresión numérica o una fórmula matemática es necesario que el lector pueda ver e interpretarla como dos objetos: como un número y como operación, es decir, que identifique que las operaciones producen números, por ejemplo, la expresión (2x5) se puede ver como el producto de dos por cinco, pero también como una forma de expresar al número 10.

Continuando con los planteamientos de Carrión (2007) con respecto a interpretar en una expresión los números y las operaciones, éstas últimas pueden ser de dos tipos las explícitas y las implícitas, por ejemplo, en la expresión 2^2, puede provocar dificultades para interpretarla como una operación debido a que en una operación explícita se involucran dos números y un símbolo como en 2x5, no obstante, en 2^2 hay una operación implícita, es decir el producto de dos por dos (2x2). Pero la expresión anterior puede ser interpretada a su vez como otra forma de representar al número 4.

4.2.4 Notación científica.

En el apartado anterior revisamos que las potencias permiten expresar números grandes con mayor facilidad e incluso a través de esta notación se pueden expresar números extremadamente diminutos; es así como encontramos la notación científica. En 1929, el matemático estadounidense Edward Kanser definió un googol como un número 1 seguido de cien ceros y en vez de escribir el número con un total de 101 dígitos, lo escribió como 10^{100} (Freiberger y Thomas, 2017).

La notación científica surge a partir de un principio de la aritmética, en el que cada que multiplicamos un número por diez, el número resultante es el original con un 0 añadido, si se multiplica un número por cien, el resultado será el número original añadiendo 2 ceros y así sucesivamente, por ejemplo 1 x 10 =10 o 1 x $10^2 = 1\, x$ 100= 100. Es así como se expresan los números en notación científica. La velocidad de la luz es aproximadamente de 300,000,000 metros por segundo, y en notación científica se expresa como, $3\, x10^8$. En la calculadora tal número puede aparecer como 3e8 o 3EX8, en donde las letras E indican que hay un error, esto se debe a la capacidad de cada calculadora, pues en algunas no tienen la capacidad de mostrar en la pantalla más de 15 dígitos.

Por otro lado, para expresar cantidades pequeñas, se utilizan exponentes negativos; por ejemplo, el radio de un átomo de hidrógeno puede escribirse como $5.29\, x\, 10^{-11}\, metros$, en vez de escribir 0.0000000000529 metros (Freiberger y Thomas, 2017).

4.3 Definición de literatura

Para los fines propios de la investigación además de centrar la atención en los conceptos matemáticos, se partirá de recursos literarios, por tal motivo se definirán aquellos conceptos que sean claves para los objetivos de la investigación. Kaufman y Rodríguez (1993) elaboran una clasificación de los textos, reconociendo siete tipos: literarios, periodísticos, de información científica, instruccionales, epistolares, humorísticos y publicitarios. La clasificación surge a partir de las intenciones que tiene el emisor: de informar, convencer, seducir, entretener, etc., teniendo en cuenta la función predominante que tengan los textos es como se van a categorizar.

De las anteriores clasificaciones, nos apoyaremos en los textos literarios, profundizando en la función comunicativa, la cual, tiene una intencionalidad estética, es decir que el autor toma recursos de la lengua con mayor libertad y originalidad para crear belleza (Kaufman y Rodríguez, 1993). El autor de textos literarios emplea un lenguaje figurado opaco, se pasa del "cómo se dice" al "qué se dice", en contraste de los textos informativos en los que su función comunicativa es describir cada uno de los elementos que se abordan en el texto, en la función literaria el mensaje se privilegia en sí mismo y no se tiene como propósito que se describan todos los elementos en el texto, ya que esos vacíos permitirán que los lectores los completen por medio de la imaginación. Dentro de los textos literarios podemos encontrar en la clasificación que las autoras proponen a: los cuentos, las novelas, obras de teatro y el poema (Kaufamn y Rodríguez, 1993).

De lo anterior podemos dar cuenta que los textos literarios conforman una variedad de textos, sin embargo, sólo nos concentramos en analizar la estructura del cuento y de la novela. Siguiendo a las mismas autoras el primero consta de tres momentos:

- Se comienza presentando un estado inicial de equilibrio.
- Posteriormente ocurre un conflicto que da lugar a una serie de episodios.
- Se cierra con la resolución del conflicto que permite la recuperación del equilibrio perdido.

Con respecto a la definición de novela, la estructura es similar que la del cuento, a diferencia que contiene mayor número de complicaciones, pasajes más extensos de descripciones y diálogos. Las acciones secundarias pueden adquirir mayor relevancia que pueden convertirse en algunos textos o unidades narrativas independientes (Kaufman y Rodríguez, 1993).

4.3.1 Literatura y matemáticas

Los cuentos y la literatura forman parte de la historia de la humanidad; a través de ellos se transmiten conocimientos y experiencias de generación en generación. En ellos también podemos encontrar las formas en cómo nuestros antecesores resolvieron diversos problemas (Bonilla, 2014), es por ello, que los textos forman parte primordial de cada cultura.

En edades muy tempranas los cuentos pueden ser una posibilidad de acceder al mundo y entrar en comunicación con los adultos de su entorno, sobre todo cuando los niños todavía no tienen elementos comunes o referencias para comunicarse con los adultos (Bonilla, 2014). Como podemos observar, los cuentos tienen una relevancia social muy importante e impacta al mismo tiempo en la subjetividad de las personas; pero estas narraciones pueden tener una función que vaya más allá del proceso de lectura, al tener la posibilidad de usar estos textos para varios propósitos, que van desde lo lúdico hasta en aras de enseñar algo. Para fines de nuestra investigación nos centramos en el aprendizaje de las matemáticas con el uso de la literatura.

Por otro lado, el conocimiento matemático para ser enseñado tiene que pasar por un proceso de matematización que significa convertir una experiencia de la vida cotidiana a un problema que pueda ser tratado desde el punto de vista matemático. Retomando a Freudenthal (1991) desde su enfoque de Educación Matemática Realista, plantea que las matemáticas deben de surgir a partir de una matematización (organización) de la realidad, entendiendo como realidad no sólo ubicar los problemas dentro de un contexto específico, sino ofrecer la oportunidad de que los alumnos puedan imaginar y razonar sobre esa realidad, para que a partir de ahí utilicen su sentido común y pongan en juego estrategias de cálculo aplicando modelos matemáticos para resolver el problema.

Las narraciones o cuentos al estar presentes en diferentes culturas, podemos decir que forman parte de la realidad de los niños, por lo tanto, algunos fragmentos de los textos pueden ser tomados como punto de referencia para trabajar contenidos matemáticos o para plantear problemas. Aunque los textos no hayan sido diseñados originalmente con tal intención, se puede enseñar matemáticas a partir de ellos (Blanco y Blanco, 2009), a través de la matematización de la literatura, es decir, organizarla a través del planteamiento de un problema para ser tratados matemáticamente. Bonilla (2014) considera que el planteamiento de un problema comparte la misma estructura de los cuentos, planteamiento, nudo y desenlace:

- Planteamiento: introduce al lector en una situación problemática y a la situación en la que se van a ver envueltos los personajes.

  Nudo: En esta fase está presente la creatividad, ya que el protagonista buscará la solución al problema. También se hacen explícitos los comportamientos que tienen los otros personajes para resolver el problema. Desde el punto de vista matemático también se pone en juego la creatividad del alumno porque debe de ahondar en las posibilidades diferentes, en la interpretación del problema y en la búsqueda de posibles soluciones. Cada uno de los datos proporcionados permite establecer relaciones entre ellos de tal manera que se pueda vislumbrar la solución, un ejemplo del nudo del problema se puede ver en el siguiente fragmento: "Si un tren que corre a 20 km cada hora se encuentra a 5 km de su destino y Juan está a 1 km del mismo va andando, recorriendo 1 km cada hora, quizá llegue antes para salvar a la princesa…" (Bonilla, 2014, pp. 128).

- Desenlace: En el cuento se llega a su fin cuando se resuelve la situación problemática, se describe el cómo se resolvió y acabó todo. En matemáticas se puede entender que se llegó a esta fase cuando se obtiene el resultado o conclusión del problema propuesto. El resultado deberá de entenderse más que un simple resultado y siempre debe de estar acompañado de una interpretación para dar sentido a lo estrictamente numérico.

Las razones por las que conviene llevar la literatura con intenciones didácticas son que, se contextualizan los conceptos, que desde la enseñanza tradicional de las matemáticas suelen enseñarse sin un contexto social relevante; también la literatura promueve la imaginación debido a que mientras se escucha o lee el texto, el lector necesita recrear el contexto y por lo tanto, lo imagina; y por último, las emociones se ven trastocadas al momento de leer, eso provoca que el alumno se sienta implicado dentro de la trama de la historia y pueda recordar un cuento durante toda su vida (Marín, 2013; Bonilla, 2014).

Los cuentos o la literatura se pueden implementar desde lo lúdico; ya que esta función puede impactar el aprendizaje. Por su parte Block, Carvajal y Martínez (1992) mencionan que un buen juego matemático es aquel que conserva un equilibrio entre los elementos lúdicos y los contenidos matemáticos en las actividades didácticas que se le proponen a los alumnos. Desde esta perspectiva un buen juego es divertido y al mismo tiempo contiene conceptos matemáticos, si se pierde uno de esos dos elementos deja de ser considerado un buen juego.

Para los objetivos de la investigación plantemos una secuencia de situaciones problemáticas siguiendo la matematización de la literatura, retomando los personajes y el contexto en el que se desarrolla la historia, de tal manera que los alumnos puedan dar solución al problema planteado a través de un tratamiento matemático. Retomando la Teoría de las Situaciones didácticas la literatura fue uno de los elementos que formaron parte del medio al cual se enfrentó el alumno. En el siguiente capítulo se detallarán las actividades propuestas de nuestra secuencia didáctica.

5 Metodología

5.1 Tipo de estudio y población.

El presente estudio tuvo un enfoque de tipo cualitativo; porque nos permitió conocer las nociones que tenían sobre la Jerarquía de Operaciones los participantes. La población a la que estuvo dirigida la investigación fueron estudiantes de la Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro “Andrés Balvanera” Unidad San Juan del Río en la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria

5.2 Tipo de muestra

Se convocaron 19 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación secundaria. En el transcurso de las sesiones, quedaron 12 alumnos, los cuales conformaron nuestra muestra. El tipo de muestreo fue de tipo de conveniencia, puesto que se tenía contacto con los estudiantes y las autoridades de la escuela nos permitieron realizar la investigación, sin mayor dificultad.

5.3 Ingeniería didáctica y sus fases

5.3.1 Análisis Preliminar.

En este apartado recabamos la información obtenida sobre la Jerarquía de Operaciones con el objetivo de entender a profundidad de dónde provienen los obstáculos que presentan los alumnos al momento de acercarse a este tema. Este apartado está dividido en tres partes:

- Análisis epistemológico
- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- Análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos

5.3.1.1 Análisis epistemológico

Las matemáticas como ciencia son un conjunto de conocimientos que se han ido consolidando a lo largo de la historia y han evolucionado para llegar a los conocimientos que hoy en día la sustentan. Por lo tanto, no es sorprendente pensar que las matemáticas actuales son muy distintas a cómo las concebían en la antigüedad. Rojas (2018) distingue tres etapas en la historia de las matemáticas que propiciaron a su vez, el desarrollo del álgebra; matemáticas retóricas, matemáticas anotadas o sincopadas y matemáticas simbólicas.

La primera etapa, siguiendo a Rojas (2018), consistió en que los problemas matemáticos y algebraicos se resolvían utilizando únicamente texto, sin usar símbolos o muy pocos; la razón de esto es que, en la antigüedad, los matemáticos disponían de muy pocos símbolos; por tanto, era común que los problemas se presentaran de la siguiente manera: *"tenemos tres cantidades en proporción continua. Multiplicamos cada una por la suma de las otras dos y agregamos los resultados".* Como se observa en el texto anterior el lenguaje retórico predominaba en el campo de las matemáticas, al presentar los problemas mediante un texto continuo[2].

La introducción de símbolos matemáticos en diferentes regiones de Europa y la apropiación de los números indoárabigos en las escuelas italianas, fueron transformando el lenguaje de las matemáticas y en especial de la aritmética; sin embargo, la obra de Diofanto en el siglo III titulada "La Aritmética", presentó un grado de dificultad en los problemas que se presentaban, como la resolución de ecuaciones de segundo y tercer grado, la formulación de conjeturas matemáticas muy generales. A consecuencia de esta revolución en el pensamiento matemático, Diofanto presenta en su obra una notación simbólica para algunas expresiones, ya no solamente hace uso de la aritmética retórica, más bien, crea una especie de híbrido entre la simbología y el texto, dando origen a la segunda etapa, es decir, a las matemáticas sincopadas o anotadas o también el álgebra anotada (Rojas 2018). Otras aportaciones importantes a la simbología de las matemáticas, especialmente aquellos símbolos que se presentan en la Jerarquía de Operaciones fue la siguiente:

[2] Entendiendo como un texto continuo a aquel que está organizado por oraciones que a su vez forman párrafos. Estos párrafos pueden formar secciones, capítulos o libros (Saulés, 2012)

- A Al-Hassar se le reconoce haber introducido la barra horizontal de división, por ejemplo $\frac{3}{4}$. La gran mayoría de su obra fue escrita en aritmética retórica. Fueron los árabes quienes introdujeron la línea para separar el numerador escrito arriba del denominador.
- William Oughtres utilizó por primera vez en 1631 la cruz para indicar multiplicación en su libro *"Clavis mathematicae".*
- Pierre Hérigone (1634, 1644) en su obra "*The Cursus mathematicus"* de seis volúmenes que escribió en latín y francés, hace una exhaustiva introducción a los símbolos, donde incluye al signo (+) para indicar "más" y (~) para indicar "menos", ya que (-) se usaba para representar una línea recta.
- James Hume (1635, 1636) en su obra "*Le traité d'algébre"* popularizó el uso de (+) para indicar más y (-) para indicar menos, ya para 1635, en Francia, se había consolidado el uso de ambos signos para más y para menos.
- René Descartes (1637) utiliza algunas literales para expresar variables; también empieza a utilizar exponentes con números indoárabigos y en la posición a como hoy en día los usamos, a excepción que en algunas ocasiones expresa aa para indicar a^2 e introdujo un nuevo símbolo para indicar igualdad, que probablemente representaba las dos primeras letras de la palabra *aequalis* "ȣ" (Cajori, 1993; Rojas 2018).

Por otro lado, el desarrollo de la geometría popularizó al mismo tiempo la notación algebraica. Europa estaba dividida en varias regiones a lo que hoy conocemos como Italia, Alemania, Francia y Reino Unido; pero fue en especial los franceses quienes aportaron un desarrollo en este campo; a partir de la obra "La Géométrie" publicada en 1637, por René Descartes (Rojas, 2018), ver figura 1.

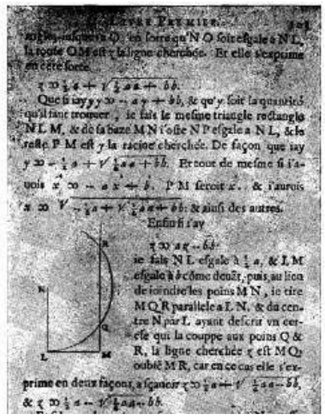


Figura no 1. Página de La Géométrie, de René Descartes en 1637

En la imagen observamos que Descartes ya utiliza gran parte de la simbología actual, pero tal simbología está acompañada de texto, considerando su matemática como sincopada.

Los signos de agrupación, en particular los paréntesis, a pesar de que su uso en la actualidad es muy frecuente, son un invento reciente en la historia de la escritura y de las matemáticas. Los paréntesis son pequeñas jaulas para capturar y retener objetos matemáticos. De hecho, antes de la llegada de la imprenta, los escritos tanto griegos como latinos, se escribían de manera continua sin utilizar símbolos para delimitar oraciones o para introducir pausas, ya que, los manuscritos eran leídos en voz alta. Poco a poco en la Edad Media se fueron introduciendo símbolos para separar palabras, oraciones, y se comenzó a usar el punto y la coma.

Si la llegada de los paréntesis a los textos escritos tardó un tiempo en introducirse, en matemáticas tardó un poco más de tiempo. En las matemáticas retóricas, que en la mayor parte era texto, no eran necesarios los paréntesis ya que un cálculo podía desarrollarse a través de palabras, por ejemplo, (3 + 4) x 2, se podía expresar como “la suma de 3 y 4 y el resultado multiplícalo por dos”. Para separar una expresión matemática de otra se comenzaron a utilizar una especie de subrayado y los paréntesis de forma simultánea, que fueron utilizados en el siglo XVI por matemáticos como Viete, Harriot y Descartes. No fue hasta el siglo XVIII que el uso de paréntesis se popularizó gracias a una publicación de

Leibniz en una revista científica y se les aceptó a usarlos como lo hacemos hoy en día. (Rojas, 2018).

Finalmente, con la aceptación de los diferentes símbolos para representar conceptos matemáticos, llegamos a las matemáticas simbólicas, las cuales tienen su propio lenguaje, por lo que ya no es necesario explicar con palabras las notaciones escritas, puesto que cada símbolo tiene su propio significado y quien sea experto en el manejo de tal lenguaje podrá traducirlo sin mayor dificultad. Este tipo de expresiones logran simplificar de sobremanera las matemáticas desplazando el uso necesario del lenguaje retórico o del discurso escrito, en este caso.

5.3.1.2 Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

En los planes de estudio estipulados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en el año 2006 se decidió incorporar el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico en la educación secundaria y en el 2009 dicho eje se incorporó para la educación primaria (García, 2014).

La palabra eje hace referencia a la dirección o rumbo de una acción, es decir, que los contenidos y la forma de abordarlos aspiran a desarrollar una habilidad en el alumno, por ejemplo, en el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico del plan de estudios del 2011, se centra en el estudio de la aritmética y del álgebra, lo cual implica que los alumnos sepan usar los números y las operaciones en distintos contextos y tengan capacidad de modelizar situaciones y resolverlas usando expresiones propias del lenguaje matemático (SEP, 2011). De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y para cada uno de esos temas hay una secuencia de contenidos o como hoy en día se les conocen como aprendizajes clave.

El plan y programa de estudio de 2017 que propone la SEP sigue la misma dinámica de dividir los aprendizajes en ejes, temas y contenidos. El ya mencionado programa sigue en vigor para el ciclo escolar 2019 -2020. Los tres ejes en los que se divide la asignatura de matemáticas son: Número, álgebra y variación; Forma, espacio y medida y Análisis de datos. El primer eje cambió de nombre, pasó de llamarse Sentido numérico y pensamiento algebraico a ser Número, Álgebra y Variación. Si consideramos lo que se había mencionado anteriormente de que el eje determinará la dirección a la que se dirigirán los aprendizajes, por lo tanto, la dirección de este nuevo eje tomará distintas vertientes. La orientación de este eje sigue apuntando de manera implícita hacia un desarrollo del sentido numérico y del pensamiento algebraico, agregando temas de proporcionalidad. Asimismo, incluye el estudio de la aritmética en primaria y secundaria, trabajando con números naturales, fraccionarios, decimales y enteros, las operaciones que se resuelven con ellos y las relaciones de proporcionalidad, además se espera que los estudiantes se apropien de los significados de las operaciones para que sean capaces de reconocer las situaciones y problemas en las que estas son útiles (SEP, 2017).

Headlam & Graham (2009) identifican que la enseñanza tradicional de la Jerarquía de Operaciones en varios países es a través de técnicas mnémicas para ayudar a la memorización en el orden en que deben de operarse los números, por medio del acrónimo BIDMAS que significa Brackets, Index, Division, Multiplication, Addittion, Sustraction (corchetes, exponente, división, multiplicación, adición y sustracción).

Siguiendo a los mismos autores, en Estados Unidos de América se usa el acrónimo PEMDAS, (Parenthesis, Exponents, Multiplication, Division, Addition, and Subtraction) cuya traducción al español sería, Paréntesis, Exponentes, Multiplicación, División, Adición y Sustracción. Por su parte Lee (2007) menciona que el PEMDAS puede obstaculizar el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones, debido a que los alumnos memorizan los pasos a seguir, sin comprender la relación existente entre los números y las operaciones; es decir, la falta de sentido numérico impide que los alumnos comprendan por qué funciona la Jerarquía de Operaciones.

En México, no encontramos que la enseñanza se base en la memorización de acrónimos para favorecer el "aprendizaje" de la sucesión de pasos para efectuar la Jerarquía de Operaciones; encontramos otro tipo de representaciones que tienen la intención de mostrarle al alumno de forma simplificada la serie de pasos a realizar siguiendo la jerarquía, pero, no están acompañadas de algún elemento que ayude al alumno a reflexionar sobre los motivos por los que se realiza de esta manera; ni tampoco se profundiza sobre los casos “excepcionales” en los que parece que la jerarquía se invierte (ver figura 2).

.

Figura no 2. Jerarquía de operaciones en un libro de texto para telesecundaria.

La imagen fue sustraída del libro de texto de primer grado de Secundaria, en Educación Telesecundaria en Cano, M., Ruíz, R., Córdoba, A. y Tlachy, M. (2019).

En la imagen anterior, se presenta la Jerarquía de Operaciones a manera de escalera en la que se señala con números el orden en que se deben de realizarse. A partir del segundo escalón se muestra en cada peldaño el conjunto de operaciones inversas que se encuentran en el mismo nivel de la jerarquía. No obstante, la imagen no está acompañada de otro tipo de elementos que ayuden al alumno a reflexionar sobre tal jerarquía, por tanto, su enseñanza se podría simplificar a la memorización de pasos, teniendo como consecuencia algunos errores u obstáculos en el aprendizaje, de los que hablaremos más adelante.

En los aprendizajes clave que propone la SEP (2017) para primero de secundaria, se contempla el estudio de la Jerarquía de Operaciones usando la suma, la resta la multiplicación y división con números naturales y enteros con la restricción de multiplicar y dividir números con signo y también evitar usar la potencia y la raíz cuadrada, ya que estos aprendizajes se contemplan para segundo grado. Sin embargo, consideramos que esta dosificación de los aprendizajes pueden ser un obstáculo de tipo didáctico para los alumnos debido a que en la Jerarquía de Operaciones se contemplan estas dos operaciones asignándoles un lugar dentro de la jerarquía.

5.3.1.3 Análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos.

Ameis (2011) identifica algunos errores que los alumnos llevan a cabo en la resolución de problemas en los que se presentan operaciones combinadas y también se mencionan algunas concepciones que nos ayudan a entender el porqué de la jerarquía:

Errores.

- El autor menciona que un error frecuente con respecto al uso de PEDMAS es que, en una representación fraccionaria de una división, en la cual encontramos una suma tanto en el numerador como en el denominador, ($\frac{25\ +\ 16}{5\ +\ 4}$ = 9). Un procedimiento común en los alumnos es que dividen el 25 entre 5, de igual manera dividen 16 entre 4 y los resultados de ambas divisiones los suman, teniendo como resultado 9. Esta idea es errónea, sin embargo, los alumnos tienen esta concepción ya que ellos tienen mecanizado que primero se realizan las divisiones antes que las sumas, ignoran que en este algoritmo la barra divisoria tiene la misma función que los signos de agrupación. Por lo tanto, la forma correcta de realizar este algoritmo es realizando la suma de 25 más 16, a la par se suma 5 más 4, quedando de la siguiente manera: $\frac{41}{9}$, finalmente se puede realizar la división de 41 entre 9, obteniendo 4.5555…
- Otro error frecuente es que los alumnos resuelven las operaciones de izquierda a derecha, no obstante, ese procedimiento no es una ley matemática. Por ejemplo, si tenemos el algoritmo 7 + 2 x 6, una manera incorrecta de proceder es sumando el 7 más el 2, dando como resultado 9, mismo que se multiplicaría por 6 teniendo un total de 54; como pudimos dar cuenta se resolvieron las operaciones en el orden de aparición de izquierda a derecha. Por el otro lado la forma correcta de resolverlo siguiendo la Jerarquía de Operaciones es ubicar que el 2 está entre una suma y una multiplicación, siendo esta última la de mayor nivel jerárquico, por tal motivo, se

resuelve en primera instancia 2 por 6 que es igual a 12 y por último se le suma 7, teniendo un total de 19.

5.3.2 Análisis a priori.

Ameis (2011) propone que hay que tomar en cuenta las siguientes reglas de la jerarquía de operaciones:

- **La multiplicación y la suma;** retomando el ejemplo anterior (7 + 2 x 6), se identifica cuál número está entre dos operaciones, en este caso el 2 está ente la +7 y x6, una vez identificado esto, la multiplicación tendrá prioridad sobre la suma. Si se resuelve primero la suma se estaría cometiendo un error en el cálculo.
- **La suma y la división;** igual al punto anterior en este caso se identifica al número que está entre dos operaciones y la división tendrá prioridad sobre la suma. Por ejemplo, en 4 + 10 ÷ 2, el 10 que está entre la suma y la división primero se resolvería 10 entre 2, dando 5 de resultado y después se le suma 4. Como se mencionó anteriormente un error sería resolver de izquierda a derecha, es decir, sumar 4 más 10, catorce y ese resultado dividirlo entre 2, siendo 7 un resultado erróneo.
- **La resta con la multiplicación y la división;** la multiplicación y la división tendrán prioridad sobre la resta siempre y cuando, un número esté entre una resta y una multiplicación o entre una resta y una división. Por ejemplo, en 10 – 4 x 2, el 4 está entre la resta y la multiplicación por 2, por tal motivo, se resuelve primero 4 por 2, dando 8, mismo que será sustraído de 10, dando como resultado final 2.
- **Misma prioridad para la adición y la sustracción;** hay que deconstruir la falsa creencia de los estudiantes de que la suma tiene mayor prioridad sobre la resta, una forma de comprobarlo es mediante el siguiente algoritmo, 5 -3 + 4= 2 + 4= 6 da el mismo resultado que 5 +4 -3= 9 – 3= 6.
- **Misma prioridad para la multiplicación y la división;** para entender esta propiedad, nos remitimos a que la división y la multiplicación son operaciones inversas, esto quiere decir que, para encontrar el resultado de una división, por

ejemplo, 30 ÷ 2= 15, lo podemos encontrar también con una multiplicación, mediante el inverso multiplicativo de (÷2), que en este caso sería $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la división anterior la podemos transformar a una multiplicación ($30x\ \frac{1}{2} = 15$) y en ambas nos dará el mismo resultado. Ahora se demostrará con otro ejemplo, 30÷2 x 15÷3 x 4= 300, las divisiones se transforman en una representación fraccionaria y al momento de multiplicar, se obtiene el mismo resultado, $30x\frac{1}{2}\,x\ 15\ x\ \frac{1}{3}\ x\ 4 = 300$. Por tales razones que cuando tenemos multiplicaciones y divisiones en el mismo algoritmo no importa el orden en que se resuelvan, siempre llegaremos al mismo resultado.

Por su parte Lee (2007) a partir de una investigación realizada con niños de primaria en la que implementó ejercicios con operaciones combinadas, pudo percatarse de una concepción que tenían estos niños al momento de resolver; ellos veían los problemas desde la idea de parte-todo, es decir en el algoritmo 10 – 2 x 3, ellos identificaban al 10 como si fuera el todo y la multiplicación 2 x 3 la identificaban como si fuera una parte de ese todo, por lo tanto, para encontrar la parte faltante habría que restarle 2 x 3 al todo que en este caso es 10.

Ávalos (2019) en una intervención realizada con alumnos de primero de secundaria en la que se abordaba la Jerarquía de Operaciones, encontró que algunos alumnos relacionaban los paréntesis como sinónimos de multiplicación y no como signos de agrupación.

5.3.2.1 Posibles procedimientos y errores.

Desde la literatura revisada (Ameis, 2011; Ávalos, 2019; Headlam & Graham 2009; Lee, 2007; Lee, Likwinko & Taylor-Buckner, 2013) estipulamos algunos supuestos de los posibles errores y procedimientos que harían los alumnos al llevar a cabo las actividades de la secuencia didáctica.

Posibles procedimientos:

- **Reconoce la función de operaciones inversas:** en este punto el alumno se ha percatado que las operaciones que están en el mismo nivel de la jerarquía están ahí porque son operaciones inversas; por lo tanto; no importa el orden en que se operen siempre se llegará al mismo resultado.
- **Reconoce los signos de agrupación:** reconoce que las operaciones que están dentro o sobre un signo de agrupación se resuelven primero sin importar que dichas operaciones sean las de menor orden jerárquico.
- **Opera de forma jerárquica:** establece las relaciones entre las propiedades de los números naturales y los signos de agrupación, realizando las operaciones en el orden establecido, tomando en cuenta los signos de agrupación y las operaciones inversas. Este procedimiento responde a una forma reflexionada de resolver dejando a un lado las justificaciones memorísticas.

Errores y dificultades:

- **Sin orden jerárquico:** en esta categoría entran aquellos procedimientos que los alumnos realizan las operaciones sin un orden jerárquico y que no han reflexionado sobre las propiedades de los números naturales.
- **PEMDAS:** en este tipo de procedimiento los alumnos resuelven en el siguiente orden; Paréntesis, Exponentes, Multiplicación, División, Adición y Sustracción; sin haber reflexionado sobre las relaciones entre los números y las operaciones.
- **De izquierda a derecha:** Algunos alumnos han aprendido que las operaciones de la misma jerarquía o las operaciones inversas se resuelven de izquierda a derecha, sin embargo, este no es un procedimiento matemático válido.
- **Sin signos de agrupación:** en este procedimiento los alumnos operan siguiendo el orden aprendido en cuanto a la Jerarquía de Operaciones sin tomar en cuenta los signos de agrupación tales como; paréntesis, corchetes, llaves y línea de fracción.

5.3.3 Diseño de la secuencia didáctica.

A partir del análisis a priori diseñamos una secuencia didáctica que favorezca el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones, tomando en cuenta los datos arrojados en los análisis preliminares. Ameis (2011) menciona que una historia o narración puede ayudar para enseñar matemáticas. Por tal motivo, la secuencia didáctica y los problemas están planteados a partir del libro "El hombre que calculaba" del autor Malba Tahan (2018); capítulo VII "Los cuatro cuatros"[3] (ver anexo 2).

A modo de resumen, el texto que presentamos narra la historia de dos personajes; Beremiz, quien es un prominente matemático y su acompañante, están caminando rumbo a Bagdad la capital de Irak y en el trayecto se enfrentan a diversos problemas matemáticos, a los cuales Beremiz siempre responde con astucia y de manera eficaz. En su recorrido llegan a un bazar en el que todos los artículos los vendían a 4 dinares; Beremiz observa que en la tienda hay un letrero que dice "los cuatro cuatros", lo que le recordó a un viejo dicho del cálculo que dice que con cuatro cuatros se puede formar cualquier número, es así como se dispone a explicar y formar los números del 0 al 10, usando operaciones combinadas y como ya se había mencionado, usando solamente cuatro cuatros, en la narración se incluyen los 11 procedimientos que llevó a cabo Beremiz. Posteriormente una de las personas que se encontraba en el bazar le pide ayuda para que le explique un problema al que no le había podido encontrar una solución. Dicho problema consistía en que el mercader había prestado 50 dinares y se lo iban pagando por pagos y para llevar un orden él escribía en dos columnas lo que le pagaban y lo que le restaba por pagar, pero se dio cuenta que si sumaba lo que restaba por pagar, en algunas ocasiones se excedía de los 50 dinares que había prestado, a lo que Beremiz explicó que los abonos y el resto son cantidades diferentes y por lo tanto, no siempre coinciden; ante esta respuesta el mercader se sorprendió y le agradeció por haberle ayudado a resolver el problema y como muestra de su agradecimiento le obsequia un turbante azul.

[3] El cuento con el que se trabajó se extrajo del Libro "El hombre que calculaba", del capítulo VII, el cual lleva por título: "*De nuestra visita al zoco de los mercaderes. Beremiz y el turbante azul. El caso de los cuatro cuatros. El problema de los cincuenta dinares. Beremiz resuelve el problema y recibe un obsequio".* Debido a la extensión del nombre del capítulo, se ha decidido que en el documento se haga referencia al cuento, reduciendo el nombre a "Los cuatro cuatros".

Con respecto a la matematización de la literatura retomamos algunos elementos de la narración anterior, (como el problema de los cuatro cuatros, los personajes y el contexto en el que se desarrolla la historia) y a partir de esos elementos planteamos cada una de las situaciones problemáticas, teniendo de esta manera el medio al que se enfrentarían los alumnos, dicho medio estuvo compuesto de fragmentos literarios, uso de la calculadora y los problemas a enfrentar, dicho procedimiento se llevó a cabo a lo largo de la secuencia didáctica.

La calculadora jugará un papel importante a lo largo de la secuencia, ya que, como mencionan Headlam & Graham (2009) ésta sigue la Jerarquía de Operaciones de manera convencional, permitiendo que los estudiantes comprueben sus razonamientos sobre el análisis de cada uno de los problemas; en caso de que los estudiantes no teclearan sus procedimientos usando la Jerarquía de Operaciones, la calculadora les cambiaría el resultado. En otras palabras, la calculadora desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) sirvió para brindar las retroacciones al alumno, cuando este último actúa sobre el medio y este medio responde, hace que el alumno se cuestione si su actuar fue el correcto o no y así poder hacer cambios en sus estrategias hasta que los alumnos recurran a la estrategia óptima que es usando la Jerarquía de Operaciones. Es por ello que la calculadora se usó en cada una de las sesiones.

En lo que respecta al diseño de la secuencia didáctica; si bien, en una secuencia cada propuesta nueva incluye a la anterior, el alumno se enfrenta con un nuevo problema en cada actividad. González Lemmi (2004), propone algunos elementos indispensables para el desarrollo de la secuencia didáctica:

- **Objetivo del maestro:** Son los aprendizajes que se esperan que el alumno desarrolle, por tal motivo, es que se les presenta a determinada situación y no a otra.
- **Objetivo del alumno:** El alumno se apropia de la actividad, internamente la hace suya, por tanto, desea finalizarla con éxito. Este tipo de objetivos pueden ser “ganar el juego”, “resolver el problema”, etc.

- **Contenidos:** Aunque en la resolución de determinados problemas los alumnos harán uso de varios contenidos escolares, en este apartado, el docente debe de especificar cuáles son los que se propone enseñar para determinada actividad.
- **Material didáctico:** Son los recursos materiales que serán necesarios que el alumno disponga para llevar a cabo la actividad.
- **Organización grupal:** Es una decisión importante el cómo se acomodará al grupo para que efectúen el problema, tomando en consideración el intercambio de ideas, la discusión, la reflexión, la explicación; para promover el debate, la argumentación, la validación de las respuestas, para llegar a acuerdos, etc. El grupo se puede dividir en parejas o en pequeños grupos.
- **Consigna:** La consigna debe de presentar un problema real para el alumno. Se debe de señalar lo que se espera que el alumno haga, pero no que le digan cómo hacerlo; conduciendo al alumno en que tome la responsabilidad de qué camino tomar.
- **Problemas matemáticos:** El docente reconoce los problemas a los que se enfrenta el alumno, esperando que la respuesta dada como solución sea el contenido propuesto a enseñar.
- **Procedimientos de resolución:** El docente debe de anticiparse, es decir, tomar en cuenta los procedimientos que resuelvan la situación, así como también los más primitivos. Esto con la intención de que el docente pueda intervenir de la mejor manera para hacer evolucionar los procedimientos de base, hacia la construcción de procedimientos expertos
- **Reflexión y cierre:** En primera instancia se abre un espacio para que los alumnos compartan el cómo resolvieron los problemas, propiciando a la socialización de procedimientos. En el cierre se llegan a acuerdos para las próximas ocasiones en que se juegue o se resuelva la situación. En este espacio también se pueden desarrollar las situaciones didácticas de validación y de institucionalización.

A continuación, en la tabla 2, se muestra a grandes rasgos el diseño de la secuencia didáctica, mostrando los contenidos a tratar para cada una de las sesiones, así como el respectivo objetivo del maestro, es decir, lo que se espera que aprendan los alumnos para tal sesión:

Tabla 2. Descripción de la secuencia didáctica.

Número de sesiones	Contenido a tratar	Objetivo del maestro
Sesión 1: Los cuatro cuatros	Expresiones con operaciones combinadas	Identificar los conocimientos previos de los estudiantes en el tratamiento de expresiones con operaciones combinadas.
Sesión 2: Conociendo jerarquías	• Uso de la Jerarquía de Operaciones en expresiones con línea de fracción e identificación de ésta como signo de agrupación. • Operaciones inversas (suma y resta).	Que los alumnos profundicen en sus conocimientos de la Jerarquía de Operaciones cuando una expresión contiene una línea fraccionaria y a su vez hay operaciones en el numerador. Y que analicen que cuando hay operaciones inversas si se cambia el orden de operar no se altera el resultado.
Sesión 3: El número más	• Identificar a	Identificar los

grande	las potencias dentro de la Jerarquía de Operaciones. • Operaciones inversas (multiplicación y división).	conocimientos de los alumnos sobre las potencias y si las ubican dentro de la Jerarquía de Operaciones. Que los alumnos identifiquen que cuando hay operaciones inversas en una misma expresión el resultado no se altera, aunque se cambie el orden de operar.
Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.	Construcción de un algoritmo en lenguaje simbólico a partir de una serie de pasos expresada en lenguaje natural.	Que los alumnos construyan un algoritmo a partir de una serie de pasos ya establecidos en la que les permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de sus compañeros.
Sesión 5: Igualando a 3	Construcción de un algoritmo de lenguaje natural a lenguaje simbólico.	Que los alumnos construyan un algoritmo dado que siempre se obtenga como resultado el número 3, sin encontrar resultados parciales en la calculadora.

En los siguientes apartados hacemos una breve descripción de cada una de ellas, haciendo énfasis en el objetivo del maestro, el contenido matemático, el problema matemático al que se enfrentan los alumnos y la consigna problematizadora en el Anexo 3 puede consultar los otros elementos que desarrollamos para cada actividad, a partir de lo dicho por González Lemmi (2004). De igual manera a los alumnos se les entregó en cada una de las sesiones, una hoja que las llamamos "hojas de evidencias". En ella se presentaba el problema a trabajar y también se asignó un espacio para que los alumnos escribieran sus procedimientos de resolución, mismos que fueron analizados posteriormente (Ver Anexo 4). La estructura de las hojas contenía los siguientes elementos:

- **Título:** En él se indicaba el número de la sesión, así como el nombre que le designamos a la misma.
- **Objetivo del alumno:** En esta parte le presentamos al alumno lo que esperábamos que él hiciera para la sesión correspondiente.
- **Volvamos al cuento:** En este apartado presentábamos un fragmento narrativo de nuestra autoría a partir de la sesión 2, en dónde a partir de los personajes y el contexto introducíamos un nuevo problema a resolver.
- **Reto:** En esta sección presentamos a los estudiantes la consigna problematizadora. Para algunas sesiones hubo dos situaciones problemáticas a enfrentar, por lo tanto, este apartado apareció dos veces para tales casos.
- **Para reflexionar:** Esta sección contuvo una serie de preguntas que ayudaba a los estudiantes a profundizar sobre lo visto durante la sesión y también algunas de ellas propiciaban la reflexión sobre el tema principal, es decir, la Jerarquía de Operaciones.

El objetivo general de la presente investigación fue diseñar una secuencia didáctica que favoreciera el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones, haciendo uso de un recurso literario, para su desarrollo. Se llevó a cabo con estudiantes universitarios de educación matemática durante 6 sesiones en total; cada una de ellas con una duración de una hora. La primera fue una sesión informativa, en ella se les explicó los objetivos de la investigación, se les aclararon sus dudas, se estableció el horario y se les entregó el consentimiento informado. En los 5 restantes se desarrollaron cada una de las sesiones de la secuencia didáctica.

La modalidad de intervención fue de manera virtual a través de la plataforma de Zoom, esta decisión se debió principalmente a la situación epidemiológica que se estaba viviendo a nivel mundial provocada por el virus SARS-CoV-2, que con el fin de evitar la propagación de dicho virus se tomaron algunas medidas sanitarias a nivel Nacional como la evitación de efectuar actividades presenciales, viéndose afectadas por estas medidas la educación. Por tal motivo, consideramos apropiado que la implementación de la secuencia didáctica se llevara a cabo de manera virtual. Otro motivo que nos llevó a tomar tal decisión fue que el diseño de nuestras actividades permitía que se llevaran a cabo a distancia, pues cada participante podía imprimir sus hojas de evidencia y resolverlas con apoyo de una calculadora científica que incluso podían consultar en línea; además que la aplicación de Zoom permite hacer pequeños grupos para aquellos momentos en que los alumnos trabajaron en equipos; de tal forma no se alteró la planeación tal como la habíamos pensado en un principio para una modalidad presencial.

Se programaron semanalmente una sesión síncrona con los estudiantes, para el desarrollo de cada una de las sesiones de la secuencia. Además, se abrió una clase en Clasroom, en la que cada alumno subía sus hojas de evidencias escaneadas después de haber tenido la sesión síncrona.

Cabe señalar que las 5 sesiones de implementación de la secuencia fueron videograbadas a través de la misma plataforma de Zoom, esto con la intención de complementar las evidencias escritas y que pudiéramos observar más a detalle los procedimientos y las reflexiones de los alumnos. Los vídeos nos fueron de utilidad para transcribir la información de nuestro interés a lo largo de las sesiones, misma que será presentada en pequeños fragmentos en el capítulo 6.

Cabe mencionar que distribuimos la sesión en tres tiempos: introducción, desarrollo y reflexión y cierre. En el primer momento se hizo para cada una de las sesiones, una breve contextualización de lo que se trataría la sesión, así como se retomaba lo trabajado en las sesiones anteriores, para con ello poder recordar lo más relevante de la sesión anterior que pudiera ayudarles en la sesión presente. En el momento de desarrollo el docente se encargó de dar lectura en voz alta a los fragmentos literarios que introducían al problema, mientras que los alumnos seguían la lectura en sus hojas de evidencia en el apartado de "**volvamos al cuento"**, posterior a la lectura el docente enunció la consigna problematizadora. Una vez que se presentaba el problema, el docente dividió al grupo en equipos de 3 a 4 personas y se les asignaba un tiempo considerable para que en equipo resolvieran los problemas; una vez transcurrido el tiempo designado, se habría un espacio de plenaria para que los alumnos compartieran sus procedimientos a sus compañeros.

Las razones por las que decidimos que los alumnos trabajaran en equipo fue para que en colaboración entre pares pudieran resolver los problemas y ayudarse entre ellos. Intentamos de que durante las 5 sesiones trabajaran en equipo los mismos alumnos, sin embargo, no fue posible llevar a cabo esta planeación, porque a lo largo de las sesiones se iban ausentando algunos alumnos, por tal motivo, nos vimos en la necesidad de redistribuir los equipos en cada una de las sesiones para que ninguno quedara incompleto. En este momento usamos la distribución en pequeños grupos de la plataforma Zoom, por lo que la reunión no se cortó y eso le permitió al docente poder integrarse en cada uno de los equipos para observar sus procedimientos y sobre todo intervenir ante las dificultades y errores de los estudiantes.

Durante el tiempo en que los alumnos trabajaron en equipo se esperó que se desarrollaran cada una de las Situaciones descritas en la TSD:

- La Situación de acción se presentaría cuando los alumnos tuvieran sus primeros acercamientos con el medio e intentaran resolver desde sus saberes previos la situación.
- La situación de formulación se presentaría cuando los alumnos estuvieran destruidos en equipos e intercambiaran lo que habían encontrado acerca de las interacciones y retroacciones del medio.

- Finalmente, en la situación de validación los alumnos corrigen sus errores y plantean una explicación de lo encontrado. Tal reflexión fue la que compartieron en el espacio de plenaria.
- Situación de institucionalización: estuvo a cargo por el docente en la última sesión de la secuencia.

En el último momento de las sesiones, es decir, el de reflexión y cierre, el docente retomó lo relevante en cuanto a procedimientos presentados por los alumnos, y al mismo tiempo, propiciaba la reflexión mediante preguntas que daban pie a lo que se trabajaría en las sesiones posteriores.

5.3.3.1 Sesión 1: Los cuatro cuatros

Para dar inicio al desarrollo de la secuencia didáctica, fue necesario que los alumnos tengan un acercamiento al texto del cual se desprendieron cada una de las actividades; pero antes de iniciar con la lectura, se hizo una contextualización geográfica, del lugar en el que se desarrollaba la historia, preguntando aspectos distintivos de la región, como el clima, el continente en el que se ubica, la vestimenta del país Irak, etc.

Objetivo del maestro: Que los estudiantes conozcan el texto a trabajar y al mismo tiempo, que el docente conozca los conocimientos previos de los alumnos al interpretar el lenguaje matemático y el uso de la Jerarquía de Operaciones.

Contenido matemático: Los alumnos se enfrentaron a expresiones que contenían distintas operaciones y signos matemáticos, haciendo uso de la Jerarquía de Operaciones.

Desarrollo de la actividad: Después de haber realizado el contexto geográfico con los estudiantes, el docente leyó en voz alta el capítulo VII; a todos los alumnos se les proporcionó una copia de este para que puedan seguir la lectura en voz baja. Como se mencionó con anterioridad, el protagonista del texto presentó 11 procedimientos para encontrar los números del 0 al 10, usando cuatro cuatros como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Procedimientos hechos por Beremiz del 0 al 10.

Procedimiento	Descripción
44 – 44= **0**	Se hizo una concatenación uniendo dos pares de cuatros y se restaron.
$\frac{44}{44}$= **1**	Consta de una expresión fraccionaria que a su vez expresa una división del numerador entre el denominador, usando dos concatenaciones
$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=\mathbf{2}$	Se realizó una suma de dos expresiones fraccionarias que cada una dan como resultado uno, al dividir el numerador entre el denominador.
$\frac{4+4+4}{4}$= **3**	El procedimiento contiene una expresión fraccionaria, haciendo primero la suma del numerador, ya que la línea fraccionaria hace la función de signos de agrupación. Posteriormente se realiza la división del numerador entre el denominador.
$4+\frac{4-4}{4}=\mathbf{4}$	La expresión consta de una suma de un número entero y una expresión fraccionaria. En la fracción se realiza como en el procedimiento anterior la resta del numerador, obteniendo una división de cero entre 4, por lo tanto, ese término se reduce a cero, quedando como resultado sumar cero más 4.
$\frac{4\ x\ 4+4}{4}$= **5**	Nuevamente se recurre al uso de expresiones fraccionarias, resolviendo en primer lugar la multiplicación (siguiendo la jerarquía de operaciones) de 4 por 4 sumándole otros 4 para obtener 20 y finalmente dividirlo entre 4.
$\frac{4+4}{4}$ +4= **6**	En primer lugar, se presenta una expresión fraccionaria en la que se resuelve la suma y posteriormente se divide entre 4, obteniendo como resultado 2, y luego se le suma 4.

$\frac{44}{4} - 4 =$ **7**	Se unieron dos cuatros para formar el número 44 y mediante una expresión fraccionaria se dividió tal número entre 4, obteniendo como resultado 11 al cual se le resta 4.
$4 + 4 + 4 - 4 =$ **8**	Se realizó la suma de tres cuatros, para obtener el número 12 para restarle 4 y así obtener 8.
$4 + 4 + \frac{4}{4} =$ **9**	Se realizó la suma de dos cuatros, para obtener el número ocho y posteriormente se le suma el cociente de 4 entre 4, que es 1, formando de esta manera el número 9.
$\frac{44-4}{4} =$ **10**	En una expresión fraccionaria, se realizó la resta de 44 menos 4, para obtener 40 y realizar la división de tal número entre 4, formando así el 10.

Nota: Tomado de Tahan (2018). La descripción de los procedimientos se tomó del mismo texto, aunque se añadió más información que no había sido explicitada.

Posterior a la lectura, se les presentó a los estudiantes la **Consigna problematizadora:** "Analicen cada uno de los procedimientos que hizo Beremiz para encontrar los números del 0 al 10 y expliquen en su hoja de evidencia qué creen que fue lo que hizo". Los alumnos debían de interpretar los procedimientos que había realizado el protagonista del texto, comprobando sus resultados con la calculadora como herramienta verificadora.

5.3.3.2 Sesión 2. Conociendo jerarquías

De esta sesión en adelante en las hojas de evidencias en el apartado de las narraciones ("Volvamos al cuento") fue creado por nosotros, usando los protagonistas del texto y el contexto en el que se encontraban siguiendo con ello el proceso de matematización de la literatura, la razón de este procedimiento se debe a que el capítulo VII es muy breve, por lo tanto, no fue posible el extenderlo a lo largo de las 5 sesiones, es así, como optamos por crear pequeños fragmentos como continuidad de la historia; para que la parte narrativa estuviera siempre presente.

Los **contenidos matemáticos** que se abordaron en esta sesión fueron la línea de fracción como signos de agrupación y la suma y la resta como operaciones inversas. El **Objetivo de maestro** es el siguiente: Que los estudiantes profundicen en el uso de la Jerarquía de Operaciones cuando hay una línea fraccionaria. Que analicen que cuando hay operaciones inversas y si se cambia el orden de operar, los resultados no cambian.

Con el análisis de la línea fraccionaria se buscó que los alumnos confrontaran sus ideas previas de que la multiplicación y la división, se resuelven siempre antes que la suma y la resta; al analizar aquellos procedimientos contenidos en el texto en los que en algunos casos se resolvieron primero las sumas y las restas y posteriormente la división, esto debido a la función de agrupación de la línea fraccionaria cuando hay operaciones en el numerador, se deben de resolver en primer lugar las operaciones en el numerador y al final se obtiene el cociente.

En esta sesión se les presentaron dos problemas a los alumnos, el primero que vamos a describir es el que corresponde a la línea de fracción, pues, fue el primero que se les presentó. La **consigna problematizadora:** Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados.

Desarrollo de la actividad: En primer lugar, se les leyó en voz alta el fragmento que introducía al problema. En este apartado se le cuestionaba al protagonista, a Beremiz, acerca de cómo había obtenido ciertos números. Los alumnos describieron lo que ellos creían que hizo Beremiz poniendo especial atención a la expresión fraccionaria y haciendo la comprobación en sus calculadoras, a lo cual tenían que recurrir a usar signos de agrupación para indicar el lugar que ocupa la línea fraccionaria.

En el segundo problema para esta sesión, se trabajaron las operaciones inversas como la suma y la resta. Para introducir al problema, se presentó nuevamente un pequeño fragmento de narración en que se le cuestionaba a Beremiz, por qué cuando se cambiaba el orden de resolver las sumas y las restas al analizar el procedimiento del número 8, el resultado no cambiaba. La **consigna problematizadora** para este problema fue**:** "Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre".

5.3.3.3 Sesión 3. El número más grande.

Esta sesión estuvo diseñada de tal manera, que los alumnos reflexionaran acerca del lugar que ocupan las potencias, dentro de la Jerarquía de Operaciones. También se esperaba que los alumnos reflexionaran nuevamente de las operaciones inversas, en este caso, multiplicaciones y divisiones y al mismo tiempo, contrastar un algoritmo que no contiene operaciones inversas. A lo concerniente a las potencias los **objetivos del maestro** a trabajar durante esta sesión fueron:

- Identificar los conocimientos que tienen los alumnos sobre las potencias; y si es que los alumnos las utilizan para resolver el problema.
- Identificar los conocimientos de los alumnos al ubicar las operaciones mencionadas en la Jerarquía de Operaciones.

Con el fin de propiciar el uso de las potencias, se les planteó el problema de encontrar el número más grande que se pueda formar usando cuatro cuatros y símbolos matemáticos, tal problema se introdujo a partir de la pregunta de uno de los mercaderes a Beremiz en el que querían saber si con 4 cuatros se podía formar el número más grande y cuál sería ese número. La **consigna problematizadora** fue**:** "usando 4 cuatros, es decir, no más y no menos; y haciendo uso de operaciones y símbolos matemáticos, ayuden a Beremiz a encontrar el número más grande, usen calculadora para comprobar sus resultados".

La actividad fue planteada a manera de juego y de competencia, retomando las posibilidades lúdicas que permiten las narraciones. El tiempo que se le destinó a que los alumnos encontraran su número, fueron 20 minutos; pasado este tiempo, cada equipo compartieron su número en plenaria a todos los alumnos; y lo compararon con los otros equipos. Entre los alumnos debían determinar si cada equipo había seguido la consigna, es decir si los demás respetaron la cantidad de cuatros que debía usarse y si los resultados eran los correctos para calcular determinado número; en caso de que encontraran un error, debían de reflexionar al respecto. Entre todos los estudiantes debían de determinar al equipo ganador.

En esta sesión la calculadora además de ser utilizada como herramienta verificadora, les apoyaría a encontrar su número, la razón de esto es porque algunos números no son fáciles de hallar de manera manual como por ejemplo, 44^{44}; si los alumnos realizaban este tipo de operaciones sin ninguna ayuda, se tardarían mucho tiempo en resolverlo, se perdería la concentración en el tema de Jerarquía de Operaciones porque los alumnos se enfocarían en resolver la operación y posiblemente encuentren errores en el cálculo. Por tales motivos, se les permitió a los alumnos utilizar este instrumento como apoyo en la resolución de las operaciones.

Después de que los alumnos encontraron el número más grande se les planteó el problema de analizar dos algoritmos, uno de ellos contenía únicamente multiplicaciones y divisiones; el otro estaba conformado por operaciones que no son inversas, sumas y multiplicaciones. El **Objetivo para el maestro:** Que los alumnos analicen en qué casos el resultado cambia cuando se cambia el orden en que se opera. Por otra parte, la **consigna problematizadora,** fue “analicen los siguientes algoritmos y cambien el orden en que se resuelven las operaciones, ¿qué es lo que sucede?

En el caso de operaciones con el mismo nivel jerárquico no importa el orden en que se operen siempre dará el mismo resultado, debido a que son operaciones inversas, por el contrario, cuando hay operaciones de distinto nivel jerárquico en una misma expresión, si se cambia el orden en que se realizan las operaciones el resultado será distinto, ya que no son operaciones inversas y, por lo tanto, tienen propiedades diferentes; en tal caso es importante establecer la Jerarquía de Operaciones. Los algoritmos que fueron analizados por los alumnos son los siguientes: $(4 \times 4 \times 4 \div 4)$ y $(44 + 4 \times 4)$.

5.3.3.4 Sesión 4. Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Para el desarrollo de esta sesión se retomó una adivinanza matemática en la que se piensa uno o dos números y se deben de operar de determinada manera para obtener un número específico. **El contenido matemático** que se propuso trabajar en la presente sesión, fue que los alumnos expresaran mediante un algoritmo la sucesión de pasos dichas en lenguaje natural en la adivinanza. El **objetivo del maestro** consistió en que los alumnos construyeran un algoritmo que les permita encontrar el mes de cumpleaños y la edad de alguno de sus compañeros. Con la actividad los alumnos hicieron uso de la Jerarquía de Operaciones de tal manera que el algoritmo se correspondiera con la adivinanza.

La adivinanza se presentó mediante un fragmento de texto en el que los alumnos seguían la serie de pasos, obteniendo como resultado un número de 3 o 4 dígitos, las dos últimas cifras de la derecha corresponden a la edad y el resto es el mes de nacimiento de la persona:

> Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:
>
> -Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.
>
> Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

A partir del fragmento anterior; la **consigna problematizadora** fue: “lean con atención el proceso que siguió Beremiz para encontrar el mes de cumpleaños y la edad de cualquier persona, construyan una sola expresión o algoritmo que atienda a las instrucciones de Beremiz. Comprueba con la calculadora tus resultados”. El reto consiste en que los alumnos hagan uso de sus conocimientos de Jerarquía de Operaciones, de tal manera que acomoden los signos de agrupación que les permita encontrar el resultado esperado. Los alumnos usaron la calculadora científica para verificar su algoritmo; para esta sesión les permitimos a los alumnos que teclearan la calculadora encontrando resultados parciales, en la siguiente sesión una variable didáctica consistirá en restringir el uso de resultados parciales.

5.3.3.5 Sesión 5. Igualando a 3

Retomando lo mencionado en la sesión anterior, la actividad a desarrollar es que los alumnos encuentren el algoritmo de otra adivinanza, pero que en la comprobación tecleen en la calculadora sin encontrar resultados parciales, dicha consigna juega un papel de variable didáctica a la sesión anterior. **El objetivo del maestro** fue que los alumnos encontraran un algoritmo en el que su resultado siempre sería 3, haciendo uso de la Jerarquía de Operaciones y de signos matemáticos.

La serie de pasos se les brindó a partir de un fragmento de texto:

> Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:
>
> -Escuchen con atención: “piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.
>
> Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Cabe mencionar que el fragmento anterior además de presentar el problema a trabajar en la sesión, en este momento se realizó el final de la historia al mencionar que el protagonista y su acompañante continuaban con su camino. **La consigna problematizadora** fue**: “**Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales”.

Los **contenidos matemáticos** son la confrontación entre una expresión dicha en lenguaje natural y el lenguaje matemático simbólico, atendiendo al uso de la simbología convencional.

Finalmente, en esta sesión se llevó a cabo la situación de **institucionalización** por parte del docente. Después de que los alumnos en el transcurso de las 5 sesiones trabajaron, analizaron y aprendieron cosas acerca de la Jerarquía de Operaciones; es importante que el docente aclare algunas dudas e introduzca los conceptos trabajados a lo largo de la secuencia. Para ello el docente presentó unas diapositivas en Power Point para introducir los conceptos más relevantes, principalmente el de Jerarquía de Operaciones. Al final de la sesión se les proporcionó una encuesta para que los alumnos nos vertieran sus comentarios e impresiones de la secuencia, así como posibles cambios al instrumento, dicha encuesta será presentada en el apartado 6.3.

5.3.4 Fase 3: Experimentación

En esta fase de la ingeniería se llevó a cabo la experimentación en el transcurso de seis semanas, del 17 de febrero al 24 de julio del año 2021, con las especificaciones ya dichas anteriormente en el apartado 5.3.3. En el capítulo 6 se exponen los resultados obtenidos y presentamos la última fase de la ingeniería didáctica al controntar los análisis a priori con los a posteriori.

5.4 Consideraciones éticas

La presente investigación, buscó en todo momento intervenir desde los principios éticos, para salvaguardar los derechos humanos y la dignidad de cada uno de nuestros participantes; guardando sus datos en el anonimato, para evitar implicaciones que afecten su integridad física o psicológica.

De igual manera se respetó la participación voluntaria de nuestros estudiantes, al proporcionarles un consentimiento informado (ver Anexo 1 el formato en blanco) que al ser mayores de edad tenían la facultad plena para autorizar su participación, en el estudio, al conocer la información necesaria y los propósitos de este; del mismo modo se respetó que los estudiantes pudieran retirarse del estudio en cualquier momento que lo considerasen necesario, sin que se les perjudicara de ninguna manera por tomar tal decisión.

6 Resultados

El presente capítulo está dividido en dos apartados: análisis a posteriori y evaluación de la secuencia didáctica. En el primer apartado se presentan los procedimientos realizados por los alumnos en cada sesión, atendiendo a uno de nuestros objetivos específicos que busca analizar las nociones previas de los estudiantes sobre la Jerarquía de Operaciones, contrastando lo obtenido con el análisis a priori. En el segundo apartado se hace el análisis que corresponde a nuestro segundo objetivo específico de evaluar en sí mismo el diseño de la secuencia en cuanto a la pertinencia de las actividades propuestas las consignas, el manejo del tiempo y el uso de materiales didácticos.

6.1 Análisis a posteriori

A partir de los posibles procedimientos y errores y dificultades que planteamos en el análisis a priori en el apartado 5.3.2.1., se hizo el análisis a posteriori contrastando con nuestros supuestos del análisis a priori. Lo que presentamos en este primer apartado son fragmentos de las transcripciones que obtuvimos durante las sesiones, así como también, algunas fotografías de los procedimientos de los estudiantes que tomamos de sus hojas de evidencias. Es importante aclarar que los nombres de los estudiantes que usamos se cambiaron con el fin de mantener la confidencialidad de datos personales y no afectar la dignidad de los participantes; con respecto al investigador aparecerá bajo la denominación de docente, por el rol que desempeñó durante la implementación.

6.1.1 Resultados de la sesión 1

A partir de lo trabajado en la sesión, surgieron algunas reflexiones por parte de los alumnos muy interesantes con respecto a los temas de: fracciones, uso de paréntesis, uso de la calculadora y Jerarquía de Operaciones. Comenzaremos la presentación de procedimientos en torno a lo reflexionado sobre las fracciones.

Los alumnos consideraron que algunos procedimientos para encontrar los números 4 $(4+\frac{4-4}{4})$, 5 $(\frac{4x4+4}{4})$, 6 $(\frac{4+4}{4}+4)$, 7 $(\frac{44}{4}-4)$, 9 $(4+4+\frac{4}{4})$ y 10 $(\frac{44-4}{4})$ pueden ser complicados para los alumnos de secundaria, ya que contiene expresiones fraccionarias, cuando el docente les preguntó a los alumnos sobre las dificultades que tuvieron al analizar los procedimientos del 0 al 10, manifestaron lo siguiente:

> **Alumna[4]:** bueno pues yo siento que en general lo más complicado, puede llegar a ser lo de las fracciones, porque la mayoría no sabe trabajar con fracciones, incluso estando en secundaria, porque en las prácticas que nosotros tuvimos, no sabían cómo se hacían operaciones con fracciones, entonces siento en ese aspecto eso podría generar más conflicto para ellos, incluso para niveles más abajo.
>
> (…)
>
> **Natalia:** Concuerdo con mi compañera para conocer el número 4, pero también con el número 2, porque ahí son dos fracciones ($\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2$), 4 entre 4, entonces los estudiantes tienen un poco de dificultad en ese sentido porque a lo mejor no darán a conocer que 4 entre 4 es uno y luego lo confunden a que es cero y ahí es que se confunden un poquito, y también respecto a lo que decía Karla de que en algunos casos se les dificulta la operación de división y que deben de llevar un orden, por ejemplo en nuestro caso para conocerlo de manera manual, primero fue sumar los numeradores y ya teniendo un solo número ya lo dividíamos entre el denominador, pero hay algunos casos en los que se les dificulta eliminando el denominador por un numerador y ya no queda fracción.

En el análisis que hicieron los alumnos de los procedimientos, estaba implícito que comprobaran lo que pensaron con la calculadora, al hacer este proceso, algunos encontraron algunas discrepancias del resultado obtenido por la calculadora y el resultado esperado; por tanto, los alumnos atribuyeron que tales diferencias se debían a la falta del uso de paréntesis, de tal manera justificaron que haciendo un buen uso de estos signos se encontraría el resultado esperado. Enseguida, presentamos lo dicho por los alumnos al respecto:

[4] En este caso no se le designa al nombre porque no pudimos determinar de qué alumna se trataba, ya que tenía su cámara apagada y en la grabación tampoco se puede ver su nombre. Esta etiqueta servirá para aquellos casos en los que ocurrió tal situación y cabe señalar que cada que aparezca tal denominación se puede tratar de alumnas diferentes.

> **Luisa:** para hacerlo en la calculadora hay que tomar en cuenta que es importante poner los paréntesis porque si lo hacen, así como se hizo manual sin tomar en cuenta los paréntesis te sale otro resultado, entonces para que te salga el resultado que te salió manual usa los paréntesis.
>
> (…)
>
> **Docente:** ¿por qué se dieron cuenta que era importante usar los paréntesis?, ¿qué pasaba si no los usaban?
>
> **Luisa:** daba otro resultado… era como si hicieras otra operación y no te daba el resultado que te daba al hacerlo manual, te cambiaba la operación, retomando lo de la Jerarquía de Operaciones te lo cambiaba.
>
> (…)
>
> **Karla:** yo quiero complementar un poco lo que dijo Luisa, en el caso de nosotros que utilizamos la calculadora si ponemos toda la operación completa, nos sale un resultado diferente, o sea al colocar por ejemplo para conocer al 10, 44 – 4 ÷ 4 así completa, nos sale 43, pero por ejemplo si ponemos primero 44 - 4 es 40 entre 4 ya nos da 10, pero a lo que nos referimos es que si colocamos toda la operación ahí si nos sale otro resultado, en cambio si hacemos paso por paso ya nos va a ir saliendo y por eso mencionábamos lo de los paréntesis.

En el fragmento anterior podemos dar cuenta que los alumnos hacen una distinción entre realizar las operaciones a mano o como ellos mencionan “manual” que realizarlas con la calculadora sin percatarse que los algoritmos analizados en el texto de los 4 cuatros están escritos en un lenguaje matemático simbólico, de igual manera la calculadora trabaja bajo este mismo lenguaje, con reglas establecidas.

Con respecto al uso de los paréntesis en la resolución con la calculadora se observó que los alumnos se percataron que en algunas ocasiones los resultados que obtenían cambiaban al momento de digitarlo en la calculadora, atribuyendo dichos cambios a una inadecuada colocación o ausencia de los signos de agrupación:

- “Podemos encontrarnos con que al momento de colocarlo en la calculadora estos obtengan números distintos debido a que se debe llevar un orden al momento de colocarlo en una calculadora que no proceda la información como nosotros”
- “Los números 5 y 6, al hacerse en calculadora cambia el resultado. Se (sic.) importa el uso de paréntesis.
- “Cuando se resolvió por medio de calculadora nos percatamos que en ocasiones el resultado era otro y se debía de implementar el uso de paréntesis para que no se modificara el resultado deseado”.
- “La calculadora no toma en cuenta el orden en que se realizan dichas operaciones, es decir, estos ejercicios requieren que el alumno conozca o tenga conocimientos previos sobre la Jerarquía de Operaciones ya que si no tiene algún saber previo es muy probable que suceda lo mismo que al usar un dispositivo electrónico. Es decir, también obtenga un resultado distinto”.
- “Si cambiamos el orden al agregar (sic.) completo en la calculadora no coincidía, esto se debe a la Jerarquía de Operaciones… Cabe mencionar que, si la operación cambia en la calculadora, será necesario colocarle paréntesis”.

Como se puede observar las alumnas anteriores fueron sensibles a los posibles cambios en los resultados al no usar paréntesis e incluso, destacan la importancia de tales signos, sin embargo, no explican el cómo se deben de usar dichos signos, es decir no ejemplifican en qué posición se deberían de colocar. Del mismo modo sus justificaciones de su uso sólo las identifican cuando se usa la calculadora, como si sólo fuera relevante usarlos al momento de pasar un procedimiento escrito a la calculadora.

. Es interesante resaltar la importancia que hacen los alumnos al uso de los paréntesis, esto se debe a que no han advertido que en la escritura de un algoritmo cuando hay una línea fraccionaria ésta hace la función de un signo de agrupación únicamente cuando contiene operaciones en el numerador o denominador, y para obtener el resultado esperado en la calculadora es necesario indicarle la agrupación, por lo tanto, a falta de una tecla para indicar la línea fraccionaria en la gran mayoría de las calculadoras, se puede sustituir por paréntesis o cualquier otro signo de agrupación.

Por otra parte, la gran mayoría de alumnos se percataron que el protagonista del texto combinó operaciones matemáticas y cuatro cuatros; otros alumnos más argumentaron que para obtener los resultados de la manera en cómo se obtuvieron era necesario seguir un orden específico, en ese tenor hicieron mención del concepto de “Jerarquía de Operaciones”, el cual fue usado por los alumnos para explicar el orden en que se deben de operar los números, a partir de sus hojas de evidencias:

- “El tema que se aborda durante el cuento es la Jerarquía de Operaciones ya que se debe seguir ese orden para llegar al resultado correcto”.
- “Considero que se modificaría el orden de las operaciones existiría un cambio en el resultado ya que el orden de las operaciones es colocado de esta manera, ya que cuenta con una intención específica”.
- “Al efectuar operaciones combinadas debes de seguir la Jerarquía (orden) de Operaciones”.
- “¿Qué orden debo de seguir cuando hay varias operaciones? Realizar las multiplicaciones antes que las demás operaciones”.
- “La Jerarquía de Operaciones, la cual menciona que lo primero que se resuelve es la multiplicación y la división y después la sumas y restas”.

Las respuestas anteriores dan cuenta de sus conocimientos previos acerca de la Jerarquía de Operaciones que establece un orden en cómo se deben de realizar las operaciones, aunque no todos los alumnos explicitaban dicho orden, reconocieron su existencia. En otras respuestas surgieron algunas expresiones que están más del lado de la memorización, tales como “primero se resuelven las multiplicaciones y divisiones”, ya que no logran explicar del por qué está establecido ese orden, es decir, al parecer no evidencian dentro de sus explicaciones una reflexión detrás de esta forma de realizar operaciones.

Hubo dos respuestas que llamaron nuestra atención, ya que, para explicar la Jerarquía de Operaciones, tomaron una propiedad de las operaciones como la suma y la multiplicación, haciendo referencia a que el orden de los factores no altera el producto, sin embargo, este principio sólo es aplicable para las dos operaciones antes mencionadas. Los alumnos expresaron lo siguiente:

- “La Jerarquía de Operaciones nos menciona que primero se resuelven las operaciones como son potencias y raíces, después división y multiplicación y finalmente sumas y restas y recordemos que el orden de los factores no altera el producto”.
- “La Jerarquía de Operaciones nos menciona que se resuelven las operaciones como multiplicación, división y posterior, sumas y restas. De igual el orden de los factores no altera el producto”.

La Jerarquía de Operaciones está estrechamente relacionada con las propiedades de los números naturales, de tal manera que algunas operaciones no son conmutativas como la resta y la división, el orden de operar sí altera el resultado; por tal motivo los matemáticos realizaron el convenio de Jerarquía de Operaciones para establecer un orden específico para evitar confusiones en los resultados.

6.1.1.1 Confrontación entre análisis a priori y a posteriori

Tal como lo habíamos previsto el tema que salió dentro de la discusión y que retomaron varios estudiantes fue el de Jerarquía de Operaciones. Cabe mencionar que el docente sólo introdujo el texto a trabajar para situar en contexto el desarrollo de la secuencia didáctica, pero en ningún momento les mencionó el tema matemático que se quería abordar, ni tampoco les dio explicación previa alguna, ya que el objetivo era que los alumnos dieran luz a sus conocimientos previos, sin ninguna instrucción previa.

Los alumnos reconocieron que para resolver este tipo de análisis debían de hacer uso de la Jerarquía de Operaciones; fueron sensibles a los cambios de resultados al momento de llevarlos a la calculadora, sin embargo, no dieron mayor explicación de tales cambios. La gran mayoría de sus explicaciones se centraban desde la memorización, pues ellos decían, por ejemplo, que las multiplicaciones se resolvían antes que las sumas; sin una reflexión del por qué ocurría esto en relación con el sentido numérico y las propiedades de los números naturales, tal como lo mencionan los autores Ameis (2011) y Headlam & Graham (2009).

Otro aspecto importante en relación a sus conocimientos de los números y sus propiedades fue que recurrieron a algunos principios de aritmética para explicar la Jerarquía de Operaciones, sin embargo tales explicaciones no eran apropiadas para justificar el tema en cuestión; nos estamos refiriendo a la frase "el orden de los factores no altera el producto", la afirmación anterior es aplicable para la multiplicación, en su propiedad conmutativa, la cual establece que no importa el orden en que se resuelvan las multiplicaciones, el producto o resultado siempre será el mismo; tal propiedad no es compartida por todas las operaciones así como mencionan los autores Oteyza et al.(2007), por ello, cuando tenemos operaciones con diferentes propiedades sí importa el orden en que se operen los números, ya que se obtendrían otros resultados. Es aquí dónde podemos decir que la afirmación anterior no es aplicable para todos los casos; por lo tanto, podemos entender que, en la bibliografía revisada, los autores no hacían mención de que los alumnos podían recurrir a este tipo de explicaciones. Con lo observado en esta sesión podemos añadir a posibles errores que pueden presentar los alumnos esta afirmación.

Por otro lado, las fracciones causaron algunas complicaciones a los alumnos; si bien, ya estábamos advertidos que la línea de fracción les causaría ciertas dificultades como lo decía Ameis (2011), nos percatamos que los significados que le puedan dar los alumnos a tal representación les conflictuaba poder discernir cuando la fracción funcionaba como una división del numerador entre el denominador y cuando hacía la función de representar una cantidad en sí misma, podemos explicar esta dificultad a partir de lo dicho por Carrión (2007) cuando menciona que para interpretar una expresión hay que distinguir cuando los objetos matemáticos fungen como número o como operación.

El uso de paréntesis fue un tema que surgió en los estudiantes y esto ocurría en el momento que pasaban sus procedimientos en la calculadora, se percataban de algunos cambios en el resultado; buscando una forma de solucionar, los alumnos explicaban que se debía de hacer uso de los paréntesis, sin embargo, no lograban explicar cómo hacerlo. Rojas (2018) la función de los paréntesis es para separar o poner a parte algunas operaciones, dando mayor jerarquía a las operaciones que contienen. Lee (2007) mencionaba que los alumnos separan una misma expresión en distintas partes, por ejemplo, reconocen que cuando hay una multiplicación, los dos números que están rodeando al signo de por, son un conjunto y las otras operaciones están aparte.

Los alumnos con quienes trabajamos reconocían la existencia de los paréntesis, pero no identificaron que esos signos de agrupación tienen la función de separar como dice Rojas (2018) y de poner aparte un conjunto de operaciones (Lee, 2007). La falta de construcción de significado a tales signos obstaculiza la comprensión de la Jerarquía de Operaciones.

6.1.2 Resultados de la sesión 2

Como ya se mencionó en la metodología, para esta sesión se esperaba que los alumnos trabajaran el análisis de procedimientos hechos por Beremiz que contenían expresiones fraccionarias y el análisis de operaciones inversas sumas y restas. Lo más relevante de esta sesión giró en torno a tres ideas principales:

- La confrontación de las nociones previas de los alumnos de que la división o la multiplicación siempre se resuelven antes que las sumas y restas a excepción de cuando hay operaciones de menor jerarquía agrupadas en una línea fraccionaria a lo que los alumnos denominaron como "inversión de la jerarquía".
- Los alumnos identificaron que cuando hay operaciones en el numerador se resuelven en primer lugar esas operaciones y después la división, sustituyendo la línea fraccionaria con paréntesis, reflexionando sobre su colocación para cumplir su función de agrupación.
- Distinción cuando en una fracción hay operaciones implícitas y explícitas para saber si pueden simplificarse.

En la parte introductoria de la sesión el docente les preguntó a los alumnos sobre lo que ellos sabían del concepto de Jerarquía de Operaciones, y decidió compartir su pantalla para que entre todos la definieran, en seguida presentamos sus comentarios expresados:

> **Docente:** entonces en qué consiste esta jerarquía si quisiéramos describirla ¿qué me sugieren que ponga? vamos a armarla entre todos

Luisa: que es el orden en que se realizan las operaciones según el signo aritmético que contenga.

Docente: ¿alguien más que quiera ayudarle a su compañera? Hablan de un orden, ¿qué orden se tiene que seguir?

Javier: se inicia por los paréntesis, en consecutivo hacia abajo es raíces y potencias luego multiplicación, división y se termina con suma y resta.

Alumna: y también podríamos agregar que además del uso de paréntesis también hay llaves y corchetes.

Alumna: que también dentro de esos signos de agrupación también llevan un orden

Docente: ajá, ¿cómo es ese orden?

Alumna: creo que primero son los corchetes y luego las llaves y luego los paréntesis.

Luisa: primero son las llaves, luego los corchetes y hasta el último paréntesis, pero se empieza con las llaves.

Docente: y a ver, otra cosa importante; la Jerarquía de Operaciones ¿cuándo la debo de aplicar? o sea, ¿cuándo tengo qué…? o sea, ¿las mismas operaciones? o ¿cuándo tengo que aplicar a la jerarquía operaciones?

Luisa: Entre las operaciones que se va a encontrar el resultado pues contiene tanto los paréntesis, las raíces o solamente puede contener las operaciones básicas aritméticas

Docente: cuando hay combinación de operaciones ¿verdad? y decías…

Luisa: cuando hay combinación de operaciones junto con paréntesis y raíces o potencias, sin embargo, también se aplica cuando sólo existen operaciones básicas aritméticas.

Del párrafo anterior podemos dar cuenta que los estudiantes reconocen a la Jerarquía de Operaciones como una serie de pasos a seguir, sin establecer relación alguna entre las propiedades de las operaciones y la jerarquía. La falta de reflexión propicia algunos obstáculos en su comprensión pues los alumnos tenderán a querer seguir el orden tal como se lo aprendieron sin tomar en consideración algunas excepciones en que se resuelven primero operaciones de menor jerarquía, como lo es con los signos de agrupación incluyendo la línea fraccionaria. A continuación, presentamos un fragmento por un alumno que expresa que la jerarquía se invierte cuando analiza los procedimientos que contienen línea fraccionaria hechos por Beremiz, este tipo de justificación fue frecuente en los alumnos debido a que han aprendido la Jerarquía de Operaciones desde la memorización de pasos, teniendo como consecuencia que quieran resolver las multiplicaciones y divisiones primero antes que las sumas o restas cuando están agrupadas:

Alan: pues a simple vista se ve que primero hace las operaciones de arriba y después hace la división o sea primero hace la suma-resta y después la división sería como al revés de la Jerarquía de Operaciones

Docente: ok, ¿por qué al revés?

Alan: porque según la Jerarquía de Operaciones primero se debe de resolver las fracciones ¿no?, pero aquí primero resuelve las sumas y después resuelve la fracción

Docente: ¿la fracción?

Alan: digo la división

Otro procedimiento encontrado fue la importancia que dieron los alumnos de colocar los signos de agrupación para sustituir la línea fraccionaria. En contraste con lo encontrado en la sesión 1, los alumnos identifican que las operaciones agrupadas entre paréntesis se resuelven primero y deducen el lugar en que deben de colocarse tales signos para obtener el resultado esperado:

Javier: Pues mi compañera Natalia descubrió lo del 4; decía que donde tenemos el 4 menos 4 lo agrupamos en un paréntesis, por Jerarquía de Operaciones primero se tendría que resolver esa operación y tenderíamos cero sobre 4 y al lado del más 4; (4-4)/4+4 entonces ese cero sobre 4 lo podríamos agrupar en otro paréntesis para efectuar una división se elimina el paréntesis y ahora ya nos quedan 4 más 0 nos daría 4; (0/4)+4 = 4.

Docente: estaba escuchando que estaban comentando algo de que cuando tienen una línea fraccionaria ponen algunas cosas entre paréntesis ¿por qué se dieron cuenta de eso?

(…)

Natalia: para mantener un orden e incluir dentro de la Jerarquía de Operaciones el uso del paréntesis y que éste lleva un orden; o sea que tendrían que resolver primero lo que está en los paréntesis y les da el resultado que es 0

Docente: ok, aunque ahí los paréntesis no están explícitos ¿verdad?

Natalia: no, los tomamos como para que hubiera un orden, pero pues como tal no viene explícito

Docente: igual creo que nada más para contrastar lo que ustedes piensan, no sé si ya lo comprobaron con la calculadora.

Karime: ¡ya lo comprobé! [teclea en su calculadora 4 + (4 - 4) ÷ 4 y obtiene como resultado 4].

En las hojas de evidencias de los alumnos encontramos algunos algoritmos con el uso de paréntesis para sustituir la línea fraccionaria. En la figura 3, podemos observar que la alumna colocó unos paréntesis de más para el número 5, ya que la multiplicación de 4 x 4, siguiendo con la Jerarquía de Operaciones se realizará primero, de tal manera que no es necesario usar estos signos para agrupar tal operación, pero sí es necesario que estén agrupados en un mismo paréntesis la multiplicación y la suma (4 x 4 +4), para que por jerarquía se resuelva primero la multiplicación y posteriormente se realice la suma, y posterior a ello el resultado sea dividido finalmente entre 4, obteniendo el número 5. De igual manera se puede observar que la alumna hace el desarrollo de los algoritmos al mismo tiempo que va eliminando los signos de agrupación.

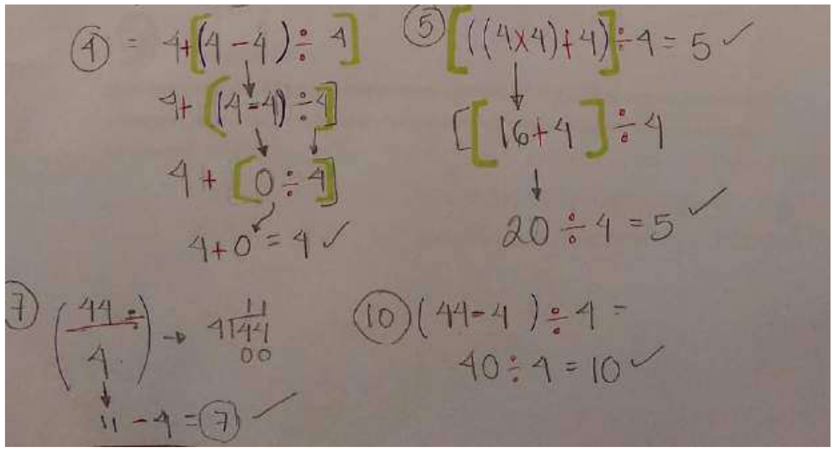
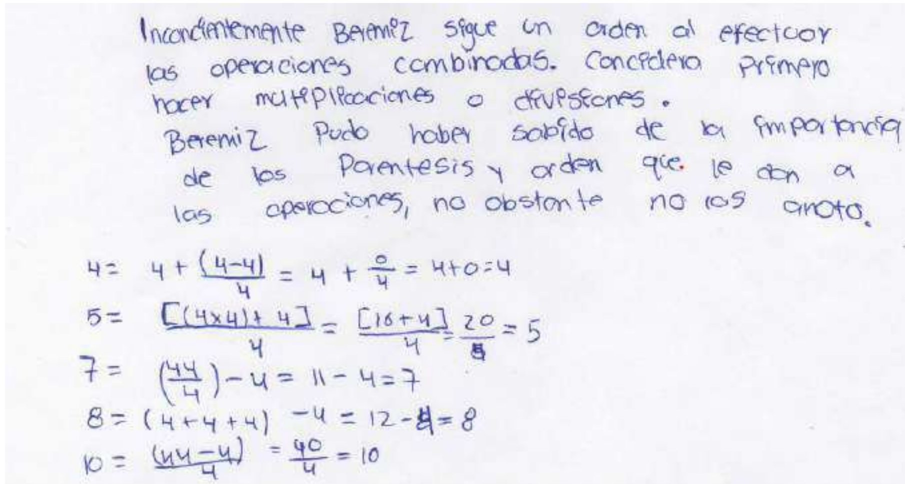


Figura no 3. Uso de paréntesis y corchetes

En la figura 4, el alumno expresa que para obtener el resultado esperado es necesario incluir los paréntesis, pero que el protagonista de la narración olvidó colocarlos. Esta explicación es muy interesante ya que el alumno se da cuenta de la necesidad de ocupar paréntesis, pero por el otro lado, no ha advertido que la línea de fracción está haciendo la función de agrupar y que por tal motivo no es necesario colocarlos; eso explicaría la ausencia de éstos, pues no son necesarios colocarlos al menos en el lenguaje simbólico de las matemáticas.



Incondientemente Beremiz sigue un orden al efectuar las operaciones combinadas. Concidera primero hacer multiplicaciones o divisiones.
Beremiz pudo haber sabido de la importancia de los parentesis y orden que le dan a las operaciones, no obstante no los anoto.

$$4 = 4 + \frac{(4-4)}{4} = 4 + \frac{0}{4} = 4+0=4$$

$$5 = \frac{[(4\times4)+4]}{4} = \frac{[16+4]}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$7 = \left(\frac{44}{4}\right) - 4 = 11 - 4 = 7$$

$$8 = (4+4+4) - 4 = 12 - 4 = 8$$

$$10 = \frac{(44-4)}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Figura no 4. Falta de paréntesis, “el protagonista no los anotó”.

Siguiendo con las reflexiones en torno de la línea fraccionaria una alumna recurre al uso de los paréntesis y al mismo tiempo, menciona que a su entender en el caso de que los procedimientos presenten una línea de fracción, en primera instancia se resuelven las operaciones que se encuentran en el numerador para posteriormente realizar la división. Por tal motivo, ella coloca los paréntesis en donde considera que deberían de ir, es decir en donde se realiza la agrupación; no obstante, en los procedimientos para obtener el 4 y el 7, coloca los paréntesis a manera de multiplicación, como se utilizan en álgebra, al estar juntos, por lo que se cambiaría el resultado y no obtendría lo que ella espera.

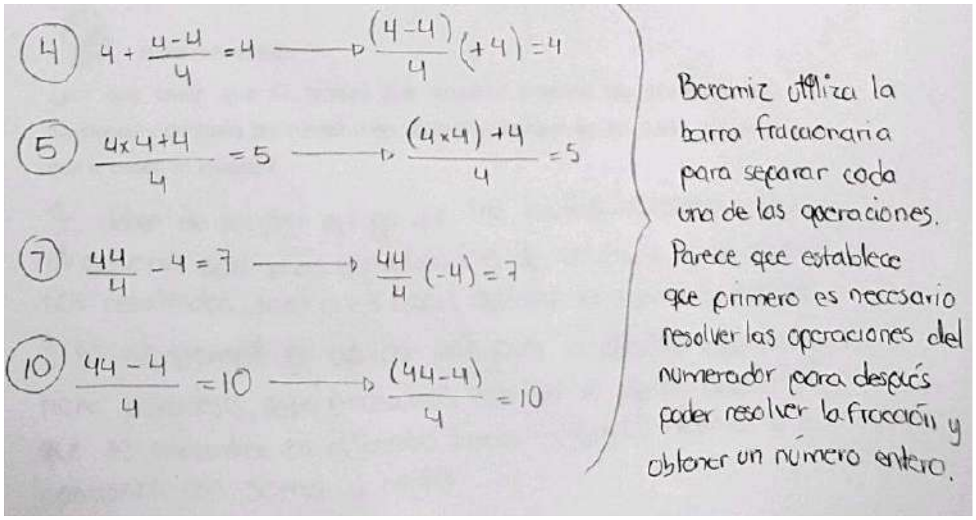


Figura no 5. Se resuelven primero las operaciones del numerador.

Aunado al comentario anterior, la alumna expresa que, en el caso de tener operaciones en el numerador, primero se resuelven las operaciones de esa parte y después la división, pero no da mayores explicaciones del por qué sucede esto:

> Si se tiene una fracción que presenta en el numerador una operación y no un número entero lo primero que se debe hacer es resolver dicha operación y después proceder a dividir el numerador entre el denominador y obtener el resultado.

La alumna Jessica, hace referencia al igual que los comentarios anteriores sobre resolver las operaciones del numerador y sobre el uso de los paréntesis, añadiendo la discrepancia de resultados al ella hacerlo de forma manual y al comprobarlo con la calculadora. A pesar de que varios alumnos se percataron de estas discrepancias, no explicaban lo que hacía la calculadora para obtener un resultado diferente, ni daban mayor explicación de la Jerarquía de Operaciones:

> En el número 5 tuvo que primero realizar las operaciones del numerador haciendo la multiplicación y luego la suma quedándole una fracción que por ende realiza la división para encontrar el número, pero debería de colocarse los corchetes y paréntesis ya que si Beremiz hubiera puesto los paréntesis en donde correspondían

ya que esto es importante al momento de resolver debido a que si se resuelve en calculadora sale un resultado diferente (ver figura 6).

Ejemplo del número 5

Beremiz coloca la operación así:

4 * 4 + 4 / 4= 17

((4*4) + 4) / 4= 5

Figura no 6. Diferentes resultados

En las 3 imágenes anteriores los alumnos coinciden en que primero deben de resolverse las operaciones que se encuentran en el numerador para posteriormente continuar con la división; aunque para esta sesión no han logrado comprender que la línea fraccionaria hace la función de signo de agrupación y esa es la razón por la cual se resuelven en primera instancia las operaciones del numerador.

Siguiendo con el tema de fracciones, llamó la atención de los estudiantes y al mismo tiempo les provocó algunas confusiones, como el hecho de discernir de en qué casos se pueden simplificar de inmediato y en qué otros es necesario resolver las operaciones que contengan en el numerador, a continuación, presentamos la conversación entre dos alumnas:

Luisa: estamos tan acostumbrados a cambiar las fracciones a números decimales que no observamos las fracciones como un número fraccionario, sino que nada más tendemos a cambiarlo a decimal o a números enteros y ese es el problema. En este caso pues la explicación que se podría dar es que primero se realizan las operaciones de la parte del numerador que es donde sí se puede aplicar la Jerarquía de Operaciones y ya después se realiza la división, por ejemplo para el 5 ($\frac{4\ x\ 4+4}{4} =$ 5) ¿cómo voy a dividir el 4 entre el 4 por 4 más 4? entonces ese es el problema o la solución que le que le podríamos dar; no tanto bueno sí es una solución pero es más un problema a tratar con cada uno de los estudiantes para que entiendan que son números fraccionarios y no números que se tienen que pasar a decimal

Docente: ok, muy bien y las demás, ¿qué piensan de eso? está muy interesante

Karla: o sea si se habla primero de Jerarquía de Operaciones se confundiría mucho a los estudiantes partiendo de eso; porque ellos se van a ir primero por el tema de la división que es lo que comentaba Luisa, entonces también se tendría que hablar sobre que primero se hace la parte de arriba de la fracción o de la división porque por ejemplo; la del 7 ($\frac{44}{4} - 4$) pues sí primero se hace la división (44 ÷4) y ya después se le resta el resultado; pero en la del 5 ($\frac{4\ x\ 4+4}{4} = 5$) se parte de la multiplicación luego la suma y luego la división. En la del número 4 ($4 + \frac{4-4}{4} = 4$) no podrían empezar por la división, aunque el resultado es un poco lógico para nosotros para ellos no.

Retomando el último comentario de Karla ella menciona que en algunos casos se hace la división primero como lo es para hallar al número 7, en cambio para los números 4 y 5 se resuelven primero las operaciones del numerador. Es importante destacar que la expresión $\frac{44}{4}$ está representando una operación implícita marcada por la línea fraccionaria de dividir el 44 entre 4 y es la única operación que encontramos en tal expresión, por lo tanto se realiza primero la división; por otro lado, en $\frac{4\ x\ 4+4}{4}$ encontramos una operación implícita que es la división del numerador entre el denominador y algunas otras explícitas que son muy evidentes por sus signos, pero para realizar la división primero debe de procederse a realizar las operaciones del numerador y al tener operaciones de diferente nivel jerárquico se debe de seguir el orden establecido en la Jerarquía de Operaciones, realizando primero el producto y después las sumas.

Como observamos en la presentación de resultados para esta sesión, la discusión se concentró en la primera situación que se les planteó a los alumnos, por tanto, ya no fue posible trabajar la segunda situación que se tenía planeada para analizar las operaciones inversas durante la sesión síncrona.

6.1.2.1 Confrontación entre análisis a priori y a posteriori 2

A partir de lo observado reafirmamos la pertinencia de la situación propuesta de que los alumnos analizaran los procedimientos con la línea fraccionaria, pues, en la sesión 1 pasaron de largo lo que ocurría en estos casos, es decir, lograron explicar lo que hizo el protagonista, pero no se habían percatado de las excepciones en que se aplicaba la regla o serie de pasos ya antes memorizada.

Los alumnos expresaron que en algunos casos la Jerarquía de Operaciones parecía que se invertía, el motivo de dichas expresiones radica en la concepción de la Jerarquía de Operaciones, en donde se resuelven primero la división antes que las sumas o las restas. Tal como lo habíamos previsto en el análisis a priori, los alumnos tuvieron dificultades en identificar a la línea de fracción como un signo de agrupación, cambiando la percepción tradicional que se tiene de la jerarquía.

En el mismo tenor, hubo procedimientos en que los alumnos consideraban reducir términos, esto quiere decir, trataron de dividir algunos numeradores entre los denominadores, como en nuestras situaciones planteamos el uso de cuatros únicamente, si dividían un 4 del numerador entre otro 4 del denominador, se obtendría como resultado 1, es decir, los términos se reducirían a uno. Así como lo había expresado Ameis (2011), este tipo de procedimientos son comunes cuando los alumnos tratan de aplicar la Jerarquía de Operaciones a como dé lugar, sin tomar en cuenta algunas otras funciones de la simbología actual del lenguaje matemático que está implícito; por tal motivo, comprendemos que al no ser evidente este tipo de significaciones, a los alumnos les puede provocar ciertas dificultades y errores.

Adicionando a la bibliografía revisada, nos gustaría hacer mención que cuando los alumnos se percataron que para llevar sus procedimientos a la calculadora debían de agrupar ciertas operaciones, los alumnos tenderán a usar paréntesis, sin embargo, en ese nuevo descubrimiento que están haciendo, es factible que los coloquen en algunos lugares no muy pertinentes; por ejemplo, si tienen una multiplicación y una suma “4 x 4+4”, sabemos que por jerarquía la multiplicación tiene mayor prioridad por encima de la suma; no obstante, los alumnos colocaban los paréntesis para agrupar la multiplicación y luego otros paréntesis para agrupar los primeros junto con la suma “((4 x 4) + 4)”, siendo los primeros innecesarios, por la misma Jerarquía de Operaciones.

6.1.3 Resultados de la sesión 3

En esta sesión el énfasis estaba puesto en que los alumnos incluyeran a la potencia dentro de la Jerarquía de Operaciones, además se esperaba que reflexionaran que cuando en una misma expresión hay únicamente operaciones inversas (multiplicación-división), no importa el orden en que se resuelvan las operaciones, ya que se llegará al mismo resultado esto se debe a las propiedades de los números naturales y está relacionado con el sentido numérico. Lo más relevante de la sesión fue:

- La discusión por parte de los alumnos de no considerar como números naturales a las expresiones en notación científica debido al punto decimal.
- Las potencias como la estrategia más utilizada por los estudiantes para encontrar el número más grande.
- La identificación que en operaciones inversas no se altera el resultado cuando se cambia la forma de operar, por el contrario, en algoritmos con operaciones no inversas, atribuyendo los cambios de resultados a las propiedades de las operaciones.

En el momento en que el docente dijo la consigna al grupo un alumno le preguntó si se podía usar cualquier operación como las potencias, a lo que el docente se limitó a contestarle que podían usar las operaciones que quisieran. Esta duda del alumno provocó que el grupo pensara en otras operaciones que no tenían contempladas.

En el equipo 1, optaron en elevar el número 4 a la 444, sin embargo, la discusión era en considerar si el número que habían obtenido era natural o no, ya que la calculadora se los proporcionó en notación científica y al ellos ver un punto decimal se confundieron, justificando que el número obtenido no era un número natural. Esta discusión fue general en el grupo y hubo más equipos que sostenían argumentos similares que presentaremos más adelante, por el momento presentamos al equipo 1:

> **Alan:** pues yo pensé en las potencias, 4 elevarlo a la 444 pero bueno al hacerlo con la calculadora, no sé porque me da: 2.063651E +267.

> **Docente:** está en notación científica ¿te acuerdas de que la notación científica es una forma de expresar así (a lo que se refería el docente era que los números naturales con muchos dígitos se pueden representar en una forma simplificada)? Y te pone todos los lugares que están después del punto decimal.

> **Alan:** gracias.

En el fragmento anterior se observa que el alumno no era sensible a encontrar un resultado expresado en otra expresión que no fuera sin el punto decimal. Por otro lado, en la conversación anterior el docente hubiera aprovechado en preguntar más al alumno sobre su resultado que había obtenido, en lugar de explicar de inmediato el concepto de notación científica. Además, lo que el alumno había obtenido no era un resultado en dicha expresión sino, lo que indicaba la letra "E" significa error, esto sucede cuando la calculadora no puede procesar la escritura del número en la pantalla, por su capacidad de dígitos tal como lo mencionan Freiberger y Thomas (2017).

Cuando se abrió el espacio en plenaria, para que cada equipo compartiera sus procedimientos más equipos hablaron "del punto decimal", al generarles confusión y no saber si el resultado que habían obtenido era un número decimal o un número natural.

> **Karla:** al principio nos confundimos un poco; pero ya luego investigamos y sacamos nuestros resultados

> **Docente:** ¿En qué se confundieron?

> **Karla:** Karime y yo habíamos hecho operaciones, pero por ejemplo la que yo hice (4^{444}) me daba como resultado 3.88 por 10 a la 10 bueno con más números, pero ya después estuvimos investigando y vimos que un número natural no es decimal

entonces ya las dos opciones de los números más grandes que teníamos ya no funcionaban entonces tuvimos que buscar otro.

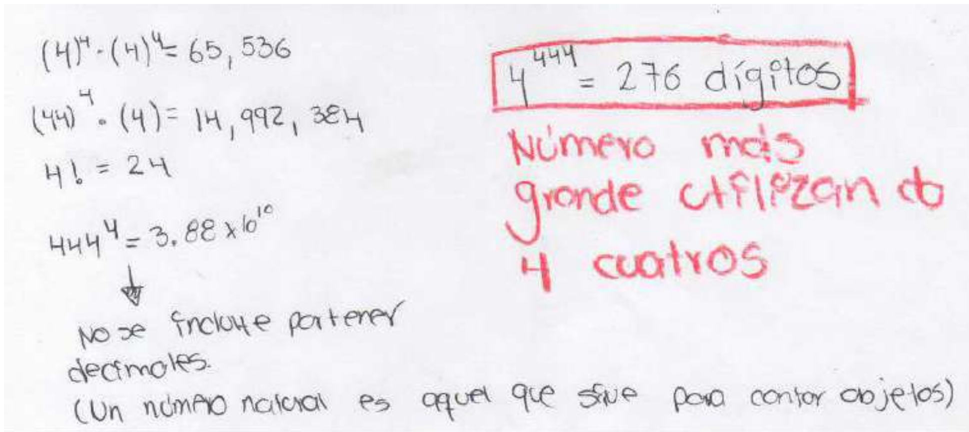


Figura no 7. El número más grande. Números naturales y números decimales.

Continuando con la discusión del punto decimal en la figura 7 se observa que un alumno descarta al número 444 elevado a la cuarta potencia por estar en una representación que incluye el punto decimal y aunque elige un número mayor la justificación escrita se centra en el punto decimal, además el alumno no se percató que en la expresión dada por la calculadora había dos operaciones de distinto nivel jerárquico, por un lado, la multiplicación de 3.88 por 10^{10} y por el otro, la operación implícita de 10 elevado a la décima potencia; en dicha expresión la potencia es la que tiene mayor prioridad, por tanto, se resuelve primero y posteriormente, se opera la multiplicación, obteniendo de esta manera 3.88 multiplicado por 10,000,000,000, recorriéndose el punto diez lugares hacia la derecha dejando al número como uno natural 38,800,000,000.

En el equipo 1 los alumnos se decidieron por elegir 4 elevado a la 444 potencia, pero para no tener una expresión con punto decimal recurrieron a una calculadora en línea específica para calcular potencias.

Alan: en conclusión, nosotros elegimos el 4 elevado a las 444

Docente: ¿y cuánto les dio?

Alan: ahí tuvimos un poco de problemas porque el resultado nos daba en notación científica, sin embargo, en internet buscamos una calculadora de potencias, pero nos sale un resultado un poco largo tiene 270 dígitos (ver figura 8).

Docente: ¿270?

Alan: sí

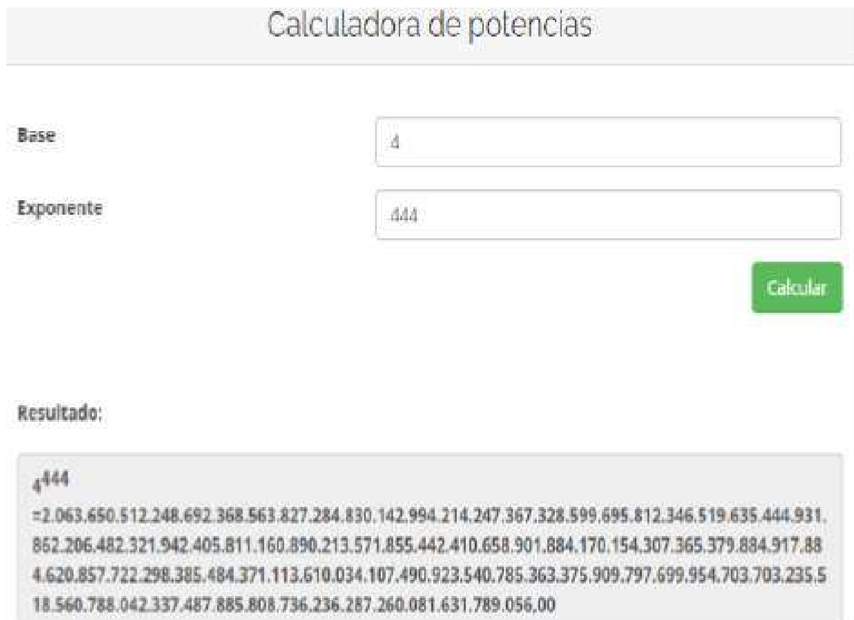


Figura no 8. El número más grande

Por otro lado, el equipo 3, elevaron el 4 a la potencia 444, igual que el equipo uno. No obstante, obtuvieron una diferencia de 6 en la cantidad de dígitos del resultado. Aunque ambos equipos calcularon el mismo número, por esa diferencia que habían encontrado pensaban que un número era más grande que otro, pero esa diferencia, puede ser por el tipo de calculadoras que usaron.

Luisa: pues nosotros encontramos el mismo número que el equipo 1, 4 elevado a la potencia 444, pero el resultado que nos dio a nosotros fue 2.06365051 a la potencia 267.

Docente: pero ¿era la potencia por 10 a la 267?

Luisa: sí, entonces al sacarla de la notación científica encontramos que el número contiene 276 dígitos

Docente: muy parecido al equipo 1.

Después de haber expuesto cada uno de los equipos, los alumnos deberían de elegir quién encontró el número más grande, pero estaban confundidos en decidir si lo habían encontrado el equipo 1 o el 3, a lo que el docente intervino para aclarar que ambos encontraron el mismo resultado, pero la variación de dígitos puede ser por las calculadoras utilizadas.

En seguida mostramos lo obtenido en el segundo reto de cambiar el orden de operar en dos algoritmos distintos, uno de ellos con operaciones inversas multiplicaciones y divisiones ($4 \times 4 \times 4 \div 4$); y el otro con operaciones de distinto nivel jerárquico una suma y una multiplicación ($44+4\times4$). En el fragmento de a continuación el alumno comparte que en el primer algoritmo obtuvo el mismo resultado en todos sus intentos de cambiar el orden de las operaciones (ver figura 9 de su procedimiento obtenido de su hoja de evidencia):

Javier: Cuando estaba resolviendo la primera operación obtuve como resultado 16

Docente: ¿en todas?

Javier: sí, o sea primero resolví dividiendo 4 entre el 4 del de la izquierda y luego por este último 4 y me dio 16, luego inicie multiplicando 4 por 4 luego 16 por 4 obtuve 64 y luego solo dividí entre 4 y me dio 16 otra vez y la última forma en que en que lo resolví fue multipliqué primero los dos cuatros del centro, eso lo dividí entre el 4 y el último lo por 4 y me dio 16

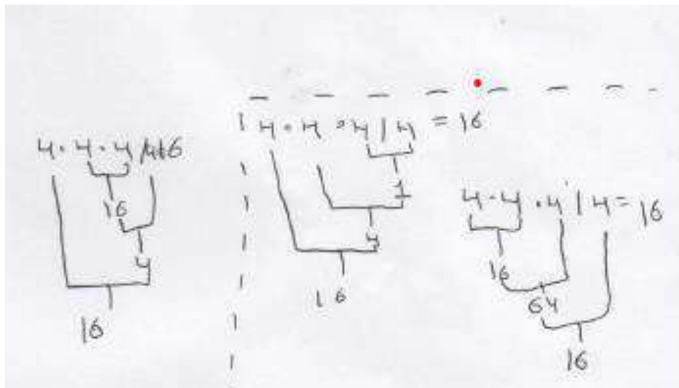


Figura no 9. Operaciones inversas.

En el algoritmo que contenía operaciones que no son inversas los alumnos se percataron que cuando se cambia el orden de operar se alteran los resultados y plantearon algunas hipótesis para explicar lo sucedido, argumentando que las propiedades de las operaciones es lo que interviene en que haya cambio o no de resultados:

> **Docente:** entonces ¿qué está pasando aquí? Si se dieron cuenta Javier lo hizo de muchas maneras y normalmente lo que veníamos diciendo todas estas sesiones es que la Jerarquía de Operaciones es importante, que hay que seguir un orden y hay que hacerlas de cierta manera. Pero aquí vimos que él hizo todo un "revoltijo" de operaciones, no siguió ningún orden y al contrario todas le dio el mismo resultado. Entonces ¿qué pasa aquí con la jerarquía? o sea ¿sí hay o no hay? o ¿qué es lo que está pasando en este primer caso? no sé si alguien más le paso algo similar que hizo todo un "revoltijo" y al final le daba el mismo resultado.
>
> **Karla:** yo también hice, así como Javier, cambié la multiplicación en medio, luego al final, luego la división al principio, en medio, al final o sea en la primera sí de cualquier forma que la hice me dio 16 en la que si me cambió fue en la otra.
>
> **Docente:** y entonces ¿qué pasa ahí?, ¿hay o no hay jerarquía o qué pasa? no sé, estoy con esa intriga.

Docente: Karla ya que abriste tu micrófono ¿quieres compartirnos lo que hiciste en el segundo problema?

Karla: sí en el segundo, primero la puse, así como tal en mi calculadora y me dio 180; pero después ya al cambiarla yo hice primero la suma y me dio 8 y a ese 8 lo multipliqué por el 44 y me dio 352 (ver figura 10).

Docente: siguiendo la Jerarquía de Operaciones clásica el resultado son 180 ¿no?, ¿alguien más hizo algún otro procedimiento y que le haya dado otro resultado diferente al que hizo Karla?, entonces ¿qué está pasando aquí? o sea parece que al menos aquí en donde tenemos puras multiplicaciones y puras divisiones no importa cómo las resolvamos siempre nos va a dar el mismo resultado; pero cuando tenemos una multiplicación y otra operación como la suma o probablemente la resta; ahí parece que sí nos cambia mucho el resultado entonces, ¿qué cosa estará provocando que esto pase de esta forma? (…) ¿qué cosa de las operaciones tiene que ver en esto?, ¿habrá alguna propiedad o algo de las operaciones? que se les ocurra para que esto pase entonces ¿qué piensan al respecto?

Karime: yo pienso que sí tiene que ver con las propiedades de las operaciones, porque **si multiplico algo, con una división me puede dar el mismo resultado** y viceversa a lo mejor con una división si lo multiplico me puede dar ese mismo resultado; entonces como que, de esa propiedad, se hace **una relación**. Pero en la multiplicación y la suma, sí se podría, pero a lo mejor en este caso siguiendo la Jerarquía de Operaciones no se cumple o al menos no en todos los ejemplos como este; pero en el primero sí. Yo creo que tiene que ver con esa propiedad de las multiplicaciones y las divisiones y en la otra no son iguales; porque casi siempre decimos que es la suma y la resta y en esa a lo mejor se podría cumplir esa propiedad. De hecho, lo dice así la jerarquía, es la división y la multiplicación; la suma y la resta; y lo mismo podría pasar con la raíz y la potencia.

Docente: o sea en la Jerarquía de Operaciones colocamos multiplicación y división juntas como dice Karime suma y resta juntas; ¿por qué es así? tenemos que preguntarnos ¿por qué las colocamos de esa manera juntas? Hablaban de una relación, Karime nos decía que parece que se relacionan estas dos que igual **con una multiplicación puedo sacar el resultado de una división y con una división puedo sacar el resultado de una multiplicación** también viceversa y entonces

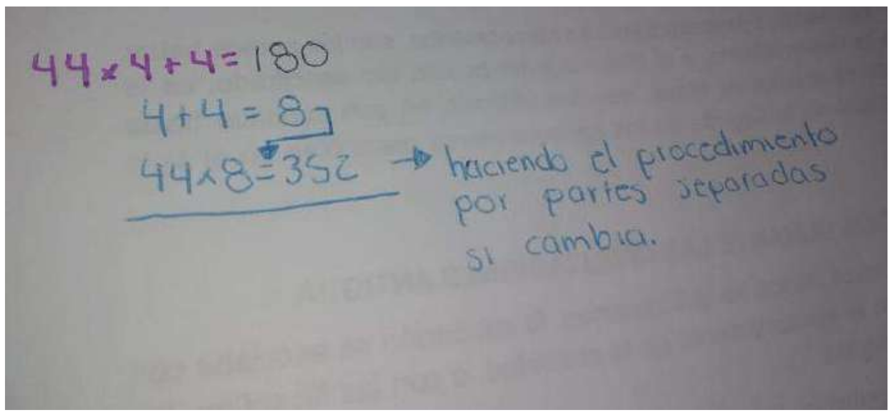


Figura no 10. Realizando operaciones con diferente nivel jerárquico.

habría que ver qué papel están teniendo ahí.

En la conversación anterior la alumna Karla se percata de que en algunos casos si se cambia el orden en que se realizan las operaciones los resultados cambian; sin embargo, no logra llegar a una explicación del por qué ocurre esto. Karime completó lo que comentaba su compañera acerca de ese cambio en el resultado y planteó como una posible hipótesis que algunas propiedades de las operaciones pueden estar interviniendo en dicho cambio; lo que la alumna describe a que hay una relación entre las operaciones en lenguaje matemático podríamos expresarlo como operaciones inversas; retomando su ejemplo en el que expresa que el resultado de una multiplicación se puede obtener por medio de una división y viceversa. Lo expresado por la alumna es más próximo a la razón por la que se establece la Jerarquía de Operaciones; no obstante, no fue un hecho evidente para todos los alumnos, a pesar de haberse dado cuenta que en el segundo algoritmo el resultado cambia cuando se cambia el orden en el que se resuelven las operaciones.

Otro aspecto que faltó de considerar por los alumnos son las propiedades de las operaciones que algunas son compartidas como la conmutatividad por la multiplicación y la suma, pero al no ser compartidas por todas las operaciones es importante considerar el orden convencional establecido por la Jerarquía de Operaciones debido a que en las operaciones como la división y la resta que no son conmutativas se altera el resultado cuando se cambia el orden de operar.

6.1.3.1 Confrontación entre análisis a priori y a posteriori 3

Autores como Lee, Likwinko & Taylor-Buckner (2013) mencionan que los alumnos necesitan saber sobre aritmética para poder comprender la Jerarquía de Operaciones, puesto que este último se relaciona directamente con el sentido numérico. Posterior a la aplicación de esta sesión reafirmamos lo que mencionan los autores, debido a que esta actividad fue confrontadora a las ideas previas que los alumnos tenían acerca de los números naturales.

En primera instancia en el análisis a priori habíamos contemplado que los alumnos tuvieran ciertas dificultades al usar las potencias o ubicarlas dentro de la jerarquía de operaciones, inclusive, hablando de los estudiantes de primero de secundaria, era probable que este conocimiento no saliera a flote en primer lugar, por la dosificación de los aprendizajes clave por parte de la SEP (2017), que contempla tal contenido para segundo de secundaria.

Sin embargo, nos sorprendió lo que encontramos en esta sesión, es que los alumnos ya tenían conocimientos de las potencias, por ser estudiantes de nivel profesional, pero, cuando aplicaban sus procedimientos a la calculadora, dependiendo de la capacidad de éstas, los resultados los expresaba en notación científica, recurriendo al uso del punto decimal. Este tipo de representación confrontó a los alumnos al no poder ubicar al número que obtenían en sus pantallas como uno natural, pues afirmaban que un número natural es aquél que sirve para contar objetos y que, por tanto, no puede llevar punto.

García (2014) menciona que en la manera en cómo aprenden los alumnos la aritmética se les enseña a los números naturales, decimales y fracciones, como números separados, creando la percepción en los alumnos que no hay relación alguna entre ellos. Los números naturales, decimales y las fracciones pertenecen al conjunto de números racionales, es decir, aquellos que se pueden expresar a través de una fracción, sabiendo esto, no es de extrañarse que un número natural lo podamos expresar en forma fraccionaria e incluso como un número decimal como lo es en el caso de la notación científica. Conocer las relaciones que hay entre las clasificaciones de los números, tiene que ver con el sentido numérico, al ver que son un conjunto y no están separados; por lo tanto, a los estudiantes no les fue evidente percibir tales relaciones.

A partir de lo encontrado en la sesión, podríamos agregar a los referentes teóricos que el enfrentar a los alumnos a usar las potencias de la manera en que lo hicimos, sin restricciones, les permite no solamente reflexionar acerca de dicha operación o el algoritmo que se lleva a cabo, sino, también es una oportunidad de poder trabajar distintas representaciones de los números como la notación científica, el cual es un tema que se aborda precisamente en la educación secundaria; estar advertidos sobre su uso y su significado, puede mejorar las prácticas de enseñanza.

Siguiendo la misma línea del uso y conocimientos sobre las operaciones y los números, en la segunda actividad trabajada en la sesión, se intentó llevar a los alumnos a reflexionar acerca de las operaciones inversas. Este tema es uno de los motivos por los que se establece la Jerarquía de Operaciones, he ahí su relevancia de propiciar la reflexión del tema.

Los estudiantes se dieron cuenta que en algunos casos si se cambiaba el orden en que se realizaban las operaciones, se obtenían resultados diferentes, y en cambio, en otros el resultado se mantenía sin importar el orden de resolución; lo primero sucede cuando en una misma expresión hay operaciones que no son inversas, pues se van realizando sucesivas transformaciones de los números, pero lo segundo sucede cuando en una expresión hay operaciones inversas, siempre se llegará al mismo resultado, no importa el orden en que se opere.

Las expresiones que usaban los estudiantes para explicar los cambios de resultado y el mantenimiento de estos, con frases como “hay una relación entre operaciones”, “están en el mismo nivel jerárquico” o “si multiplico algo con una división me puede dar el mismo resultado”; hacían referencia las operaciones inversas, que tienen una estrecha relación entre ellas, no es que no haya entre las otras, pero como ya se había mencionado, las operaciones inversas nos llevan al mismo resultado (Ameis, 2011).

Consideramos indispensable guiar las reflexiones de los estudiantes para que les sea evidente que en la Jerarquía de Operaciones es necesario seguir el convenio matemático para evitar confusiones, al darse cuenta de las relaciones que existen entre las operaciones.

6.1.4 Resultados de la sesión 4

Los procedimientos y reflexiones que se hicieron presentes durante la sesión fueron los siguientes:

- A los alumnos les surgió la duda de ¿cómo saber cuál es el número más grande? A partir de lo trabajado en la sesión anterior.
- Identificación que en una potencia la base no necesariamente tiene que ser grande para llegar a un número mayor, sino más bien el número del exponente tiene que ser mayor para llegar a un número grande.
- Los alumnos identifican que la calculadora trabaja bajo la Jerarquía de operaciones y se preocupan por acomodar signos de agrupación en el uso de la calculadora.
- Determinan que los signos de agrupación ayudan a poner por aparte algunas operaciones y que en la Jerarquía de Operaciones se resuelven primero lo que contienen los signos de agrupación.
- Uso de literales para representar en las variables en la construcción de su algoritmo.

En la parte introductoria de la sesión se abrió con el docente preguntando acerca de lo que se había visto en la sesión anterior; y hubo una intervención por parte de una alumna de una duda que ella tenía y resultó ser bastante interesante. Su duda giraba en torno a poder saber qué número es más grande que otro; en su comentario vuelve a hacer mención sobre los números “decimales”, que como analizábamos en la sesión anterior en realidad no se trataba de estos números, sino de expresiones simplificadas del número:

> **Camila:** la clase pasada estuvimos viendo que con los 4 cuatros, qué número podíamos hacer, que fuera el mayor; y bueno estuvimos trabajando en equipos y ya después yo haciendo mis hojitas de manera individual, me saltó una duda porque sí hubo un número que me salió ahora sí que muy mayor pero luego me salió con el punto decimal y también era un número muy mayor; entonces ahí entré en dilema de qué número era mayor, si el decimal o el otro número que me había salido entonces si lo puse ahí en mis hojas como reflexión y como un cuestionamiento de saber **¿qué será mayor? o ¿qué será menor?, ¿cuál de los dos números será mayor o menor?**, pero eso sí me causó un conflicto (ver figura 11).

> **Docente:** ok muchas gracias, y justo con esto que decía Camila, por ejemplo, a muchos les salía un número y habría que preguntarse si realmente el número que le salía si era un número decimal o qué cosa era; porque algunos más bien les daba en notación científica y no es que ahí fuera un número decimal, sino más bien era otra forma de representar un número natural por medio de la de la notación científica (...) y también ahora habría que preguntarnos **¿cómo poder saber cuándo un número es más grande y cuando un número es más pequeño?**, con esto que nos compartía Camila ¿en qué nos tenemos que fijar?, ¿cómo poder saber que un número es más grande que otro? Eso lo voy a lo voy a anotar para que lo vayamos reflexionando.

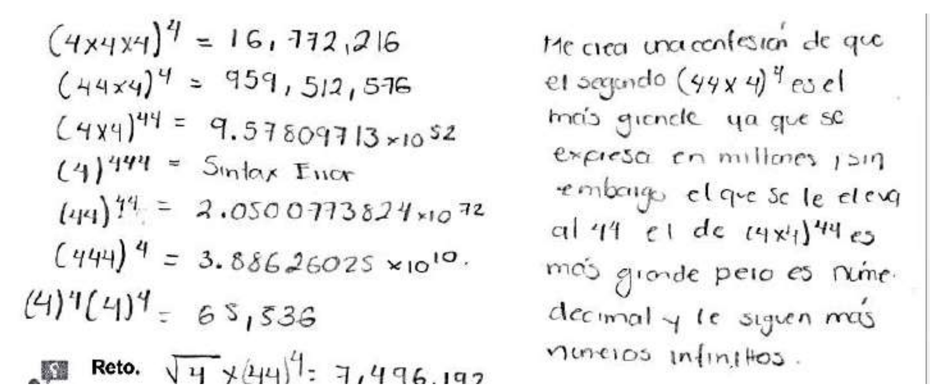


Figura no 11. ¿cuál número es el más grande?

Los cuestionamientos que se hace la alumna a primera vista parecieran cosa menor, pero, consideramos que para poder decidir qué número es mayor que otro, es importante tomar en cuenta algunos aspectos que están relacionados con el sentido numérico; como el saber que en los números naturales la cantidad de cifras determina su magnitud, por tanto, a mayor cantidad de cifras mayor será su magnitud; y también para poder responder a la pregunta se puede realizar una resta, lo cual se abordó en la última sesión, durante la situación de formalización. Otro comentario que nos resultó interesante en la introducción fue el que una alumna se preguntara sobre el elevar ciertos números a determinada potencia:

> **Natalia:** Lalo yo tengo un comentario. Para cuando nosotros estábamos descubriendo el número más grande, al menos yo, cuando estaba haciendo la tarea me di cuenta de que cuando poníamos 44 con la potencia 44 (44^{44}), pues si nos salía un número grande porque se estaba elevando, pero cuando poníamos 4 a la potencia 444 (4^{444}) no salía un número grande y aunque se mencionaba como en notación científica sabemos que era un número natural y que nos había dado el número más grande que nosotros habíamos podido sacar. Entonces aquí lo que yo pude observar es de que a pesar de que ambos estaban elevados con una potencia, nos arrojó el número más grande cuando colocábamos el (4^{444}) es decir que el 4 se iba a multiplicar por sí mismo 444 veces. Fue lo que más me dio curiosidad porque de manera lógica uno podría decir que es más grande elevar a la potencia 44 al

número 44, que al ser el número 44 más grande que 4, por lógica pensaríamos que debe de ser un número mayor pero pasa lo contrario cuando elevamos el 4 a la potencia 444 o sea eso fue lo que más me dio curiosidad; y ya después pude entender que no es necesario que sea un número grande y luego ya después elevarlo, sino que al número que se esté elevando es el que debe de ser mayor, para que nos pueda dar ese número que queremos.

La reflexión anterior en torno a las potencias, es interesante, ya que la alumna descubre que para obtener un número mayor con el uso de la potencia, no necesariamente la base tiene que ser mayor que el exponente; sino, en el número que ella escogió se percató que el número más grande que encontró fue cuando colocó un número menor en la base y como exponente un número mayor, obteniendo de esta manera un número grande, atribuyéndolo a que la base se multiplicó por sí misma más veces que en 44^{44}.

Como mencionamos en la metodología el problema a enfrentar fue que a partir de una serie de pasos se adivinaba el mes de cumpleaños y la edad de alguno de sus compañeros, y al mismo tiempo, debían de expresar en un solo algoritmo todos los pasos a seguir para obtener el resultado esperado, de tal manera que pudieran acomodar en un algoritmo distintas operaciones matemáticas y signos de agrupación.

En esta sesión los alumnos tuvieron algunas dificultades al hacer su algoritmo. El docente se percató de las dificultades cuando se integró a cada uno de los equipos para escuchar sus procedimientos; la gran mayoría de los alumnos entendieron que ellos tendrían que construir un nuevo algoritmo, en vez de la propuesta original que era que los alumnos construyeran un algoritmo, pero a partir de los pasos que se indicaba en el texto; por lo tanto, nos dimos cuenta que la consigna no había sido clara y se perdió en algunos instantes el foco de la actividad, cuando los alumnos estaban más concentrados en inventarse un nuevo algoritmo y no construirlo a partir de la serie de pasos ya establecida.

Un procedimiento que llamó la atención fue que los alumnos recurrieron al uso de signos de agrupación como llaves, corchetes y paréntesis para colocar su algoritmo en la calculadora, ya que en la serie de pasos que se les propuso en el problema, no se hacía explícito el uso de dichos signos de agrupación, por lo tanto, los alumnos tenían que descubrirlo. El siguiente fragmento fue extraído mientras trabajaban por equipos:

Docente: Chicos, ¿cómo van?

Camila: vamos bien, pero es que no sabemos cómo acomodar los corchetes y paréntesis, porque no nos sale la operación como tal, entonces estamos viendo cómo acomodar los corchetes

Docente: ok, ¿por qué llegaron a esa conclusión de usar corchetes y llaves?

Camila: bueno a mí no se me habían ocurrido las llaves y los corchetes, a mí nada más se me había ocurrido los paréntesis, Karime y Luisa comentaron que podrían agregarse corchetes y llaves, para que se unieran e hicieran un conjunto, pero pues no tenemos una calculadora que tenga llaves o corchetes para verificar si sí o si no

Docente: creo que hay algunas que te permiten que vayas poniendo en lugar de llaves, vayas poniendo muchos paréntesis, igual no sé si así si les dé

Camila: no, ¿aquí en la calculadora científica?

Docente: Sí

Camila: sí, pero no sale, nos da otro resultado.

Docente: ok, habría que ver si les falta algo en la cuestión de la acomodación

Karla: si yo creo que pudiera ser esa parte, a lo mejor algo lo estamos poniendo mal o algo nos falta y es lo que está afectando al resultado.

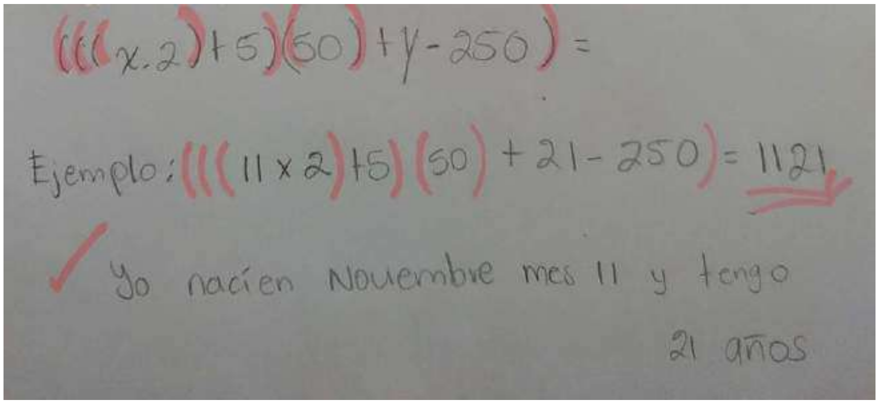


Figura no 12. Uso de paréntesis.

En la figura 12 podemos observar que lo que tuvieron que hacer fue deducir el lugar en el que colocarían los paréntesis; pero también se observa que hay algunos paréntesis de más, cuando agrupan la multiplicación del mes (x) por dos, puesto que siguiendo la Jerarquía de Operaciones primero se resolvería tal operación y posteriormente la suma, siendo innecesarios colocarlos en esa parte, pero es correcto que la suma esté agrupada con la multiplicación, así como se muestra en la figura 13, realizado ese procedimiento por otra alumna.

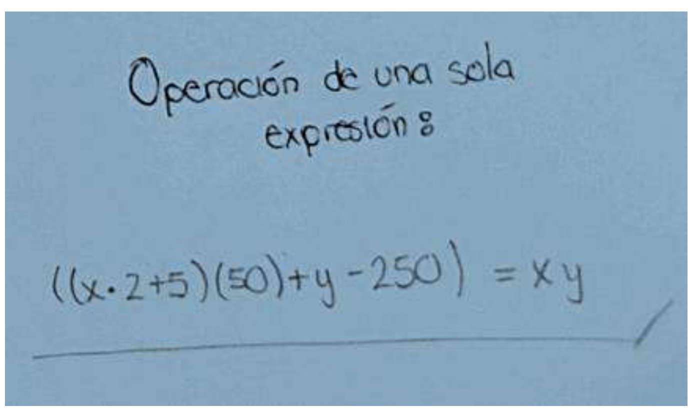


Figura no 13. Operación de una sola expresión.

Para completar las reflexiones que tuvieron los alumnos sobre la construcción de un algoritmo, la Jerarquía de Operaciones y la calculadora, retomamos lo que escribieron en sus hojas de videncia en el apartado “para reflexionar”, donde respondieron a las preguntas; ¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿Cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo? Las respuestas que obtuvimos fueron las siguientes:

- Lo que hicimos fue utilizar signos de agrupación para crear el algoritmo utilizando la “Jerarquía de Operaciones”. Las operaciones fueron las mismas que usó Beremiz en el cuento, lo que hicimos en la calculadora fue poner de igual manera los signos de agrupación en una calculadora en línea “científica” usando la Jerarquía de Operaciones.
- Con el uso de paréntesis se pudo formular un solo algoritmo o expresión, así como el uso de literales que corresponderían a la edad y el mes, y lo más importante el uso de operaciones básicas suma, resta y multiplicación que nos ayudaron a cumplir el objetivo.
- La manera que sí funciona es agregando paréntesis en las operaciones dadas por Beremiz, la calculadora sigue la Jerarquía de Operaciones.
- Use paréntesis, resolvía primeo los numero dentro de los mismos.

El penúltimo comentario nos pone en evidencia lo que ahora piensan los alumnos sobre la Jerarquía de Operaciones; en contraste con la primera sesión los alumnos aseguraban que la calculadora no seguía tal jerarquía o cuando su resultado se les cambiaba al momento de pasarlo a la calculadora mencionaban la importancia de usar paréntesis, pero no explicaban cómo colocarlos. A partir de los comentarios nos percatamos que los alumnos ya pueden reconocer que la calculadora funciona a partir de la Jerarquía de Operaciones; que es importante el uso de paréntesis para agrupar varias operaciones y cuando se usan estos signos de agrupación, primero se resuelve lo que está dentro de ellos.

Un conocimiento que fue recurrente en la mayoría de los estudiantes fue el uso de variables para la construcción de su algoritmo; a cada variable le asignaron una literal, por ejemplo, el mes lo representaron con la letra “x” y a la edad le asignaban la letra “y”, o también usaron otras letras como la “e” y la “m” respectivamente, en seguida mostramos algunas ideas que dejaron en sus hojas de evidencias:

- Para acomodarlas, fue necesario utilizar paréntesis y utilizar unas incógnitas para representar las edades y los meses.
- Se utilizaron expresiones algebraicas, y se tuvo que ir descifrando las operaciones que eran las correctas a realizar.
- Primero, lo hice sin usar literales y ahí iba viendo qué necesitaba para que diera el resultado acertado, ya que supe cuáles eran los resultados, utilicé las literales.

Debido al grado en el que se encuentran estos estudiantes, fue recurrente el uso de variables, por los conocimientos que ya tienen sobre el álgebra; hubo alumnos que no hicieron explícito el uso de literales, pero en la construcción de sus algoritmos, los incluyeron. Es muy probable que este tipo de representaciones no las usen con frecuencia los alumnos de primero de secundaria, ya sea porque todavía no han tenido algún acercamiento al álgebra o quizá algunos alumnos no sean expertos en la materia y recurran a otras representaciones.

Para llegar a la adquisición de la simbología convencional que se hace principalmente en álgebra, los alumnos pasan por 4 fases de representación las cuales son:

- **Palabras que apoyan las figuras:** este tipo de representaciones pueden contener dibujos o diagramas. Los esquemas pueden ir o no acompañados de expresiones verbales ya sea habladas o escritas para representar algo en particular.
- **Sólo palabras:** es una expresión verbal que se escribe únicamente con palabras del idioma usual, sin hacer uso de símbolos salvo de los números, puesto forman parte de nuestro mundo simbólico.
- **Palabras y símbolos:** Son expresiones híbridas que contienen palabras del lenguaje usual y símbolos matemáticos. Esta fase es de suma relevancia para comenzar la transición a las representaciones meramente simbólicas. Por ejemplo, para representar los lados desconocidos de un rectángulo se puede representar como, el largo (unidades) x 2 + ancho (unidades) x 2 + 4.

- **Sólo símbolos:** este tipo de expresiones no contienen palabras, con frecuencia contienen sólo letras u otros símbolos como □ junto con símbolos matemáticos siguiendo las convenciones establecidas en cuanto al orden, la posición y la orientación. También podemos encontrar abreviaturas de palabras, por ejemplo, para longitud podemos encontrar la expresión long o "l" (Mason, Graham, Pimm y Growar, 1985).

De cualquier manera, que representen, para esta actividad la consideramos como válida, ya que nuestro objetivo no es concentrarnos en el álgebra, sino en la Jerarquía de Operaciones.

Durante la plenaria, uno de los equipos recurrió también al uso de las variables para representar la edad y el mes, además, usaron otros otras variables para obtener los resultados parciales que iban obteniendo para que a su vez fueran multiplicados, sumados o hacerles cualquier otra operación:

> **Javier:** Pensamos hacerlo por medio de expresiones algebraicas, entonces para el mes establecimos la variable (x), y para nuestra edad la variable (y), e íbamos a tener R_1 y R_2 que es resultado 1 y resultado 2. (ver figura 11).
>
> **(…)**
>
> **Javier:** primero, lo hice por partes, no encontraba la forma de combinar todas las operaciones, entonces primero fue poner (x) más 2 por 5 (*multiplica el mes por dos y súmale cinco*)[5] eso me daba como resultado R_1, después en otra operación puse R_1 por 50 más (y), me daba como resultado R_2 (*al resultado multiplícalo por cincuenta y súmale tu edad*), y la última operación era R_2 menos 250 (*ahora debes de restarle 250*), entonces poniendo mis datos si me funcionó, sí me dio mi mes de nacimiento y mi edad.

[5] Colocamos entre paréntesis y en cursivas, la parte del problema que el alumno estaba representando.

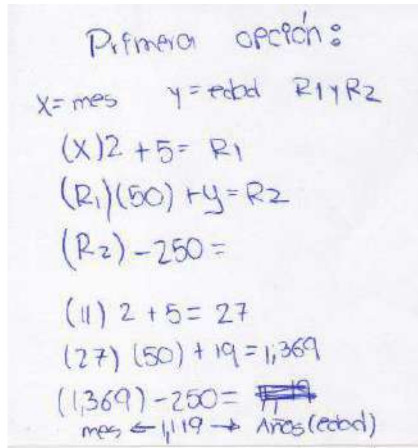


Figura no 14. Algoritmo con variables y resultados parciales.

En la figura anterior el alumno fue representando el algoritmo encontrando resultados parciales, hasta llegar al resultado esperado. Lo que nos parece relevante resaltar es que en los resultados de la siguiente sesión presentamos el algoritmo del mismo alumno y observamos un cambio al no usar resultados parciales, viendo así, una evolución en sus procedimientos.

6.1.5 Confrontación entre análisis a priori y a posteriori 4.

Tiene sentido aplicar la Jerarquía de Operaciones en las matemáticas simbólicas, ya que en las retóricas donde la narración es predominante, habiendo una ausencia de signos, es innecesario aplicar la Jerarquía de Operaciones, pues basta con mencionar el orden en que quieres realizar los algoritmos (Rojas, 2018). En esta sesión lo que se esperaba del alumno, fue que hiciera un cambio de representación de un lenguaje matemático sincopado a uno simbólico, y para llegar a ello, habría que tomar en cuenta los significados de los signos y de las operaciones.

Los aparatos tecnológicos están construidos de tal manera, que sigan las convenciones matemáticas. La calculadora trabaja siguiendo la Jerarquía de Operaciones, por ello para poder usarla de manera adecuada, será necesario que el alumno tenga conocimientos de este convenio para que obtenga lo que desea; es así como decidieron usar los paréntesis para poder agrupar, separar y dar prioridad a las operaciones, que en otros momentos no la tendrían.

Mencionamos nuevamente que cuando los alumnos están descubriendo el uso de los signos de agrupación tienden a agrupar de más; para que este procedimiento fuera desapareciendo el acompañamiento e intervenciones por parte del docente al cuestionar a los alumnos en aquellos casos en que se ocupaban paréntesis no necesarios, fue fundamental para obtener algoritmos más cercanos al lenguaje simbólico convencional.

Otro conocimiento del que hicieron uso los estudiantes fue el uso de variables para representar cantidades desconocidas, este conocimiento lo atribuimos a su experiencia y acercamiento que han tenido con el álgebra simbólica, que incluye este tipo de representaciones. Para acercarse a ese lenguaje matemático creemos necesaria la aparición de los resultados parciales, para poder vislumbrar las operaciones y procedimientos que están relacionados, y así, poder colocarlos en una sola expresión.

En las matemáticas o el álgebra simbólica, los distintos signos sustituyeron al lenguaje retórico, de tal manera, que basta con colocar una serie de simbología para poder describir procesos o procedimientos; para poder llegar a ello, es necesario que el alumno aprenda a colocar tal simbología, su significado y relaciones.

6.1.6 Resultados de la sesión 5

Los procedimientos y reflexiones más destacadas que pudimos localizar en esta sesión fueron:

- Los alumnos recurren con mayor frecuencia a usar algoritmos con una línea fraccionaria para indicar una división a un conjunto de operaciones. De igual manera colocan paréntesis para separar la parte del numerador y denominador en la calculadora.

- Los alumnos le dan importancia al uso paréntesis, especialmente en los casos en los que el resultado de la operación agrupada se seguirá operando posteriormente.
- Colocan los paréntesis poniendo especial atención al lugar para situarlos.
- Presentan sus algoritmos construidos que satisface la adivinanza, pero también indican el tratamiento de tal algoritmo.

El problema matemático por enfrentar en esta sesión fue similar a la anterior, a partir de una serie de pasos ya dichos antes debían de encontrar una sola expresión que sin importar el número que se introdujera el resultado siempre será 3; la variable didáctica que contemplamos fue que los alumnos tenían que comprobar su procedimiento con la calculadora, pero esta vez, debían de teclearlo en una sola expresión, es decir, sin encontrar resultados parciales. El docente les pidió a los alumnos que compartieran lo que planeaban hacer para resolver el problema y expresaron lo siguiente:

> **Docente:** Antes de irnos a trabajar en equipos, compartan un poquito de qué es lo que piensan (…) a ver, díganme, cómo lo están pensando, ¿cómo se les ocurre resolverlo?
>
> **Javier:** bueno, pues yo inicié haciendo un algoritmo como el de la vez pasada, utilizando variables para ver si puedo obtener el resultado que se solicita
>
> **Docente:** ok muy bien y además de usar variables, ¿sería necesario usar algunas otras cosas?, ¿algunos signos?, ¿sería importante que utilizarás algo así?
>
> **Javier:** si los signos que me permitan operar y que me dé el resultado 3, **también paréntesis para poder separar algunas operaciones.**
>
> **Docente:** entonces ahí está una idea; de volver a usar paréntesis que fue un procedimiento bastante recurrente en la sesión pasada (…), a ver si solo con paréntesis basta o sería necesario agregar otros signos ¿no?
>
> **Natalia:** yo primero voy a hacer un ejemplo, voy a pensar en un número y voy a hacer como una comprobación para ver si me sale el resultado 3, luego voy a aplicar

lo que lo que dice Javier, de crear el algoritmo con símbolos, algo así como algebraico y utilizar a lo mejor paréntesis y las operaciones

Docente: eso me parece bastante interesante que para ver si sí funciona o no, primero tenemos que probarlo con uno o dos números para después pasarlo a lenguaje matemático

Karla: pues yo estoy haciendo algo similar a lo que dijo Natalia, ya lo hice y estaba comprobando si sí daba el resultado y lo hice con dos números diferentes para ver si funciona y ya también estoy haciendo algo parecido a lo que algunos de mis compañeros hicieron la pasada.

Como vimos en el fragmento anterior algunos alumnos estaban convencidos que habría que agrupar algunas operaciones para obtener los resultados que esperaban; en algunos casos colocaban unos paréntesis que no eran necesarios. En uno de los equipos, las alumnas habían construido el siguiente algoritmo (ver figura 15). Además, se destaca el uso de la línea fraccionaria para expresar que el resultado obtenido de las operaciones del numerador será dividido entre 2.

$$\frac{(((x+5)(2))-4)}{2} - x = 3$$

Figura no 15. Primera propuesta de algoritmo.

El docente observó lo que habían hecho las alumnas y consideró que algunos paréntesis no eran necesarios colocarlos, después de tal intervención las alumnas deciden cambiar su algoritmo y lo explican más adelante, en seguida se muestra un fragmento de la conversación:

Docente: me parece muy interesante lo que hicieron, igual no sé en la parte de arriba (numerador), habría que considerar sí todos los paréntesis que pusieron son necesarios, yo siento que a lo mejor unos pueden estar de más, pero no sé.

Karla: todos son necesarios porque, por ejemplo; yo lo hice al principio nada más con dos paréntesis y me marcaba como error matemático, y puse los 3 paréntesis del inicio y ya me dio y también quité uno de los dos, e igual me marca error matemático. Al menos los que están afuera por así decirlo, de la expresión siento que separan lo que sería la división entre el dos.

Docente: los dos del extremo, ¿verdad?

Karla: si, están haciendo una función de separar todo lo que está en el numerador por lo que está en el denominador

Docente: claro, cuando lo pasas a la calculadora si le tienes que especificar, como tú dices, esos dos paréntesis grandes. Mi duda era por los segundos paréntesis, el que está envolviendo **(**(x + 2) (2)**)**

Alumnas: sí

Docente: no sé si pueda estar demás

Las alumnas deciden modificar su procedimiento, quitando un par de paréntesis y descubrieron que también obtenían la respuesta esperada (ver figura 16). Algo que consideramos importante de destacar es que la alumna Karla menciona que colocaron dos paréntesis en los extremos del numerador y aunque no son necesarios colocarlos en una expresión escrita porque la línea fraccionaria en sí misma hace esa función de agrupamiento, ellas deciden dejarlos para pasar su procedimiento en la calculadora, puesto como ya habíamos mencionado en esa herramienta sí es necesario indicarle la separación.

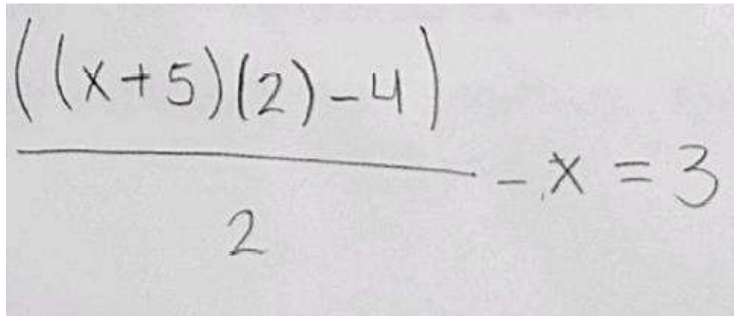


Figura no 16. Segundo intento de algoritmo.

En el espacio de plenaria, las alumnas deciden compartir paso por paso del cómo le hicieron para colocar los paréntesis para llegar al algoritmo que se muestra en la figura16:

> **Luisa:** la forma en la que lo encontramos fue separando cada una de las operaciones; la primera operación que nos marcaba; el número que piensas, nosotros la pusimos como x y después a ese número se le sumaba 5 entonces lo primero que hicimos fue establecer esa incógnita (escribe x+5), después para separarlo de la siguiente operación que era la multiplicación, lo separamos con paréntesis, de esta forma [escribe (x+5)] y ya después colocamos el dos, pero como el dos lo seleccionamos como un término independiente por eso también lo pusimos entre paréntesis porque después de esta operación seguía otra [escribe (x+5)(2)], y entonces ahora sí ya le agregamos el menos 4 [escribe (x+5)(2) -4], después para no seguir colocando tantos paréntesis, lo ubicamos como si fuera fracción entonces lo dividimos entre 2 [escribe $\frac{(x+5)(2)-4}{2}$] y después como todavía nos faltaba colocar el restarle nuestro propio número lo que hicimos fue colocar los paréntesis de afuera para que esta operación se separara del menos x que era el número que habías pensado [escribe $\frac{((x+5)(2)-4)}{2} - x = 3$]. Cuando lo hicimos de manera manual y también lo hicimos de en la calculadora nos dio.

Todos los algoritmos que construyeron los alumnos fueron muy similares al de la figura anterior, por lo que la discusión no se centró en el acomodo del algoritmo, ya que todos habían llegado al mismo. La discusión ahora estuvo centrada en analizar el uso de los paréntesis, aunque en la sesión anterior estuvieron trabajando también con estos signos, en esta última sesión reflexionaron sobre el sentido que tiene usarlos:

> **Docente:** ¿Qué hubiera pasado sino colocaran los paréntesis, así como le hicieron?
>
> **Natalia:** Yo siento que al menos en la calculadora hubiera un cambio en el resultado, la verdad, no aplicamos sin los paréntesis, pero al menos yo siento que hubiera un cambio por el orden que hubiera dado el resultado porque si hay multiplicación o si hay suma o si hay otra operación pues primero se hubiera ido por la división o primero se hubiera ido por equis suma o por cualquier resta entonces ya ahí alteraría el resultado y no nos daría 3. En cambio, nosotras desde un principio lo hicimos manual, sabíamos qué orden deben de llevar las operaciones para que nos fuera dando el resultado. Porque en cada operación nos dan un resultado y ese resultado se debía de dividir o se debía de sumar o se debía de restar; entonces fue por ello por lo que íbamos aplicando los paréntesis. En cambio, cuando lo poníamos en la calculadora, y había un error de nuestra parte al quitar un paréntesis o al no agregar una operación o un paréntesis o lo que fuera en la calculadora nos marcaba error.
>
> **Docente:** acuérdense que igual la calculadora sigue ciertas Jerarquías de Operaciones entonces, si no lo ponen de cierta manera se va resolviendo de maneras diferentes (…).
>
> **Luisa:** yo quiero decir algo, con respecto a lo de los paréntesis
>
> **Docente:** sí, adelante
>
> **Luisa:** es importante cómo ponerlos, porque cuando vas haciendo las operaciones ahí mismo del problema te dice que requieres del resultado; por ejemplo, “el número que pensaste más 5”, para poder avanzar a la siguiente operación y lo que nos brindan los paréntesis es que nos separan por resultados sin tener que estar tecleando el igual en la calculadora; por eso es importante que los coloquemos, porque así nos van separando los resultados y al resultado es al que se le modifica la

siguiente operación y si no se colocan pues se sigue de corrido entonces no te va dando un resultado y no se trabaja sobre el resultado que te está pidiendo y por eso nos dan la última operación y el resultado final.

(…)

Docente: ¿qué descubrieron con el uso de los paréntesis?

Natalia: al menos yo cuando estaba en prepa y en secundaria, me acuerdo de que me decían que los paréntesis hacían la función de separar operaciones, pero no le daba mucha importancia o supiera todo lo que sé ahorita en este momento; que sí es una gran ayuda al momento de como decía Luisa de separar operaciones cuando se ocupe ese resultado, y se sigue alterando o se sigue estableciendo otro tipo de operaciones ya con ese resultado que se está produciendo. También, tiene mucho que ver con la Jerarquía de Operaciones en el hecho de que, si queremos establecer un resultado, los paréntesis nos sirven mucho el separarlo o el crear un orden. La verdad, ya le puede encontrar más importancia, porque antes nada más era como una regla de; "*tienes que usarlos porque te va a servir para tal cosa*", pero no una verdadera razón; **y ahorita ya le encuentro una razón ya más fundamentada por decirlo** así.

Docente: está muy interesante esta parte de que normalmente nos dicen muchas cosas de cómo usar esto de los paréntesis, pero ahora sí verlo con un sentido; con otra perspectiva, ¿alguien más?

Karla: a mí me pasó algo similar a lo que Natalia comentaba; porque, al menos yo, como que no le encontraba mucho sentido al usar paréntesis y todas estas cosas como que decía de; *"eso para qué, no tiene sentido y cosas así"*, y ya me di cuenta de que sí tiene un sentido y para algo están ahí; y ahorita fue como que todo eso se reafirmó y como que me quedaron claras más cosas.

El sentido que le encontraron las alumnas del fragmento anterior al uso de paréntesis fue de la función de separar las operaciones, separar los resultados e incluir las operaciones dentro de una jerarquía; precisamente en este último punto, en la figura 17, podemos observar el desarrollo del algoritmo que siguió una alumna; que mediante flechas indicaba el orden en que se iban resolviendo las operaciones.

.

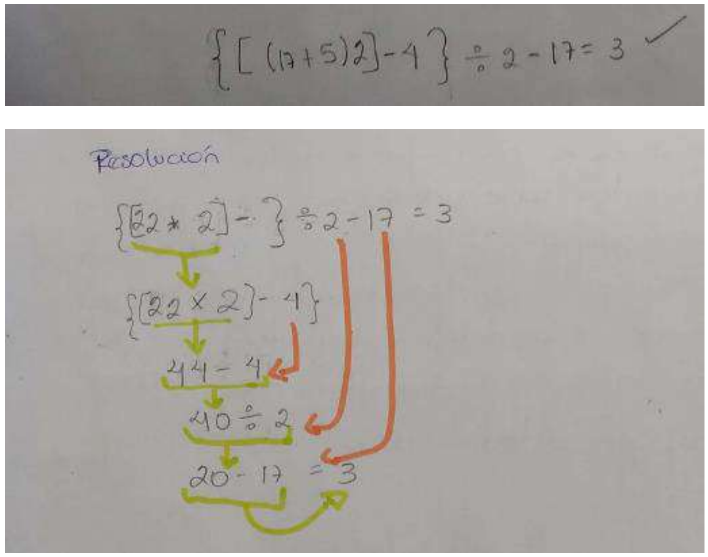


Figura no 17. Desarrollo del algoritmo, con flechas.

En el procedimiento anterior la alumna especificó el orden que se sigue cuando se colocan los paréntesis. Por otra parte, el alumno Javier desarrolló un algoritmo, pero él lo hizo de una manera más cercana al lenguaje matemático convencional (ver figura 18), pues él no recurre a símbolos no matemáticos para hacer el tratamiento del algoritmo. Los dos procedimientos de estas figuras sirven de complemento al hablar del uso y sentido que tiene en matemáticas el usar estos signos.

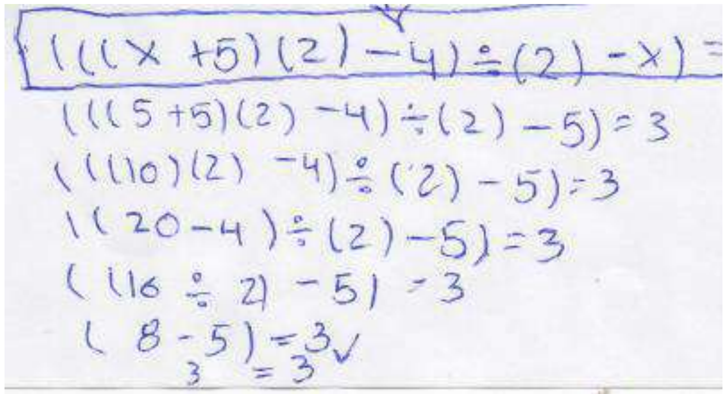


Figura no 18. Desarrollo del algoritmo, cuando x vale 5.

Al ser la sesión 5, la última con la que se intervino, en los últimos 20 minutos que quedaban, el docente abrió el espacio de institucionalización o Situación de Institucionalización, retomando lo que habían trabajado los alumnos en las sesiones anteriores y aclarando algunas dudas que no se habían resuelto antes:

- El docente habló sobre el convenio de Jerarquía de Operaciones que está establecido que primero se resuelven lo que está dentro de los paréntesis y se eliminan, después las potencias y raíces, luego las multiplicaciones y divisiones y al último las sumas y restas.
- También el docente profundizó sobre la función que tienen los paréntesis al agrupar las operaciones. De igual manera, les aclaró que cuando hay una línea de fracción y hay operaciones ya sea en el numerador o en el denominador, la línea de fracción hace una función de signos de agrupación, al resolver en primer lugar las operaciones que se encuentren en el numerador, denominador o ambos.
- Les comentó que cuando hay operaciones inversas que son las operaciones que están en el mismo nivel de la jerarquía, no importa el orden en el que se opere siempre se llegará al mismo resultado; por lo tanto, resolverlas de izquierda a derecha no es un procedimiento matemático.
- Por último, les explicó la duda que había surgido en la sesión 4, acerca de cómo saber qué número es más grande que otro, comentándoles que mediante una resta se puede saber cuál es el mayor, retomando la forma en que se suman y restan los números enteros. Cuando hay un número entero positivo y otro número entero

negativo, se restan sus valores absolutos y queda el signo del de mayor valor absoluto (ver figura 19).

Figura no 19. Obteniendo el número más grande mediante una resta.

Cabe señalar que en las hojas de evidencia para los alumnos (ver anexo 4) en el espacio de reflexión se presentaron cuatro preguntas, ¿qué descubrí a lo largo de las sesiones?, ¿de qué me va a servir lo que aprendí?, ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?, Al responder tales preguntas, los alumnos dieron a conocer sus aprendizajes y algunas opiniones con respecto a la dinámica de las sesiones. Un tema que sobresalió fue el uso del recurso literario, al haber encontrado una forma diferente de enseñar matemáticas y poder usar tal estrategia en sus prácticas:

- A lo largo de estas sesiones descubrí más maneras de llevar las matemáticas a algo relacionado con cuentos, así mismo me quedó más claro de lo que yo ya tenía el que las matemáticas no son aburridas y siempre hay maneras de hacerlas didácticas, divertidas y entretenidas.
- La importancia que tiene el uso de cuentos en la didáctica de las matemáticas me servirá más para aprender contenidos matemáticos y para mi práctica docente.
- Esto que aprendí me va a servir como método de enseñanza didáctica para mis futuros alumnos, creo que el uso de los cuentos puede ser una gran herramienta para que ellos comprendan mucho mejor un tema que a simple vista puede parecer complicado.
- Descubrí que enseñar matemáticas, apoyándonos de cuentos es una forma más atractiva y que podría ayudar con los alumnos de primer grado de Secundaria.

- Esta actividad me va a servir como estudiante y como futuro docente. Aprendí este tema a más profundidad y ahora tengo ideas de cómo enseñar este tema en las aulas.

A partir de las reflexiones de los alumnos reafirmamos lo que mencionan los autores sobre el impacto que tiene usar literatura para la enseñanza de las matemáticas, de igual manera el proceso de matematización permitió que los estudiantes contextualizaran el concepto de Jerarquía de Operaciones, esto lo podemos constatar cuando hacen mención de que la intervención les aportó herramientas para enseñar algunos conceptos.

Un aspecto que les llamó la atención en relación con la Jerarquía de Operaciones fue el uso de paréntesis mencionaron lo siguiente:

- Que llevan un orden y que al tener paréntesis se resuelve del paréntesis más interior hacia el exterior.
- Que realmente el uso de los paréntesis es de gran importancia, pero se debe saber identificar **dónde se van a colocar cada uno de ellos** ya que si no esto puede afectar el resultado al que queremos llegar. Así como también que la resolución por Jerarquía de Operaciones no siempre se va a seguir, ya que los paréntesis van a afectar dicha jerarquía. Que con un simple número y operaciones matemáticas puedes formar una serie de números que podría ser infinita si sabes ordenarlos de la manera correcta.
- Que primero, se tienen que resolver aquellas operaciones que están dentro de corchetes, llaves o paréntesis. Después las multiplicaciones y divisiones. Por ultimo las sumas y restas.
- Comprendí la importancia de los paréntesis y corchetes ya que al tener estos una operación aritmética se respeta el orden y se obtiene el resultado correcto. Primero se deben ejecutar las operaciones agrupadas en paréntesis, luego las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones en orden en el que aparecen, y finalmente las sumas y restas en orden en el que están en la operación numérica.

En relación con todo lo que respecta la Jerarquía de Operaciones, a continuación, presentamos aquellos aspectos que más llamaron su atención del concepto:

- Descubrí que muchas veces puede o no cambiar el orden de la jerarquía y se afecta el resultado mientras las operaciones sean de diferente “nivel”.
- Que la Jerarquía de Operaciones conlleva que conozcas las propiedades de los números naturales en las que pareciera que la jerarquía no está presente pero sí lo está como en el caso de las operaciones inversas, aunque cambies el orden de las operaciones seguirá siendo el mismo resultado y ello nos lo explica el uso de operaciones inversas.
- Las líneas fraccionarias cumplen la función de un paréntesis.
- Consideraba que al tener operaciones combinadas de un mismo nivel era necesario iniciar de izquierda a derecha. Este procedimiento no es matemático.
- El nuevo saber que la línea que nos indica una fracción puede servir como un paréntesis.

6.1.6.1 Confrontación entre análisis a priori y a posteriori 5

Evidentemente se esperaba que al término de esta secuencia hubiera un cambio en la conceptualización de la Jerarquía de Operaciones, el cual sí se pudo percibir en esta sesión. En primer lugar, los estudiantes fueron capaces de representar en un algoritmo, usando signos matemáticos lo que estaba escrito en lenguaje sincopado, de tal manera que el algoritmo cumpliera con lo dicho por medio de palabras y unos cuantos signos.

Algunos temas que provocaron dificultades en los estudiantes, y que, al mismo tiempo, fueron relevantes en su aprendizaje fueron: la Jerarquía de Operaciones, la línea de fracción y los paréntesis. En el primer tema reconocen que hay un orden para realizar las operaciones, pero hay casos en que por jerarquía se resuelven primero otras operaciones, lo que los llevó a reflexionar, la función de los paréntesis dentro de la Jerarquía de Operaciones.

Precisamente el uso de paréntesis fue un tema que comentaron mucho los alumnos, pero paradójicamente les provocó dificultades en sus primeros usos. Un aspecto que llamó nuestra atención gira en torno a la construcción del uso de los paréntesis con mayor sentido, al descubrir que servían para agrupar algunas operaciones; no obstante, no todos los alumnos llegaron a esta formalización. De igual manera por medio del uso de paréntesis rompieron en cierta medida con sus hipótesis de que primero se resuelven las multiplicaciones y divisiones, antes que cualquier otra, al poder ubicar que primero se resuelven las operaciones que estén contenidas en los signos de agrupación.

Con respecto a la línea de fracción hubo algunos comentarios que hacían alusión a que tal signo hacía la función de paréntesis, aunque fueron pocos los alumnos que llegaron a tal formalización nos hacen pensar en que es un concepto que puede ser complicado de adquirir para los estudiantes, por lo que será necesario que se siga con la reflexión.

Al término de la secuencia didáctica, retomamos el planteamiento de Lee (2007), sobre cuestionar el uso de estrategias mnémicas para favorecer el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones, ya que puede obstaculizar su aprendizaje. En el transcurrir de las sesiones pudimos percatarnos que los estudiantes no usaron algún acrónimo, sin embargo, al momento de realizar las operaciones recurrían a aplicar una serie de pasos que ya habían memorizado con anterioridad sin saber del por qué se opera de tal manera, por lo tanto, sus argumentos carecían de reflexión, teniendo como consecuencia la falta de comprensión al seguir la Jerarquía de Operaciones y algunas concepciones erróneas que se mantuvieron al término de la secuencia.

Rescatamos lo dicho por los autores Lee, Likwinko & Taylor-Buckner, (2013), la Jerarquía de Operaciones implica que los alumnos dispongan de un conocimiento amplio sobre aritmética y sentido numérico; por lo tanto consideramos pertinente plantear una secuencia didáctica que les haga entrar con sus conocimientos previos, para ir evolucionando a otros más complejos y haciendo que el alumno sea el responsable de su propio aprendizaje al encontrarle sentido a esas redes conceptuales tan complicadas. Finalmente queremos agregar que el haber implementado la secuencia, enriquece nuestra mirada al tener en cuenta otros procedimientos que no se habían contemplado en el análisis a priori.

6.2 Evaluación del instrumento

Con el objetivo de hacer una evaluación al diseño de la secuencia didáctica decidimos enfocar dicho análisis a la consigna, el tiempo estimado para la realización de cada actividad y las actividades propuestas. De nuestro primer rubro a evaluar nos interesa saber si la consigna fue clara, lo cual lo pudimos observar al momento en que los alumnos realizaban las actividades, es decir, si había correspondencia entre lo que les habíamos pedido y lo que hicieron, cumpliendo así con el objetivo de la situación. Lo que evaluamos del tiempo, fue sí el tiempo brindado a los alumnos para resolver las actividades les permitía concluirlas sin mayor inconveniente para que los alumnos pudieran reflexionar sobre los problemas sin verse presionados por el tiempo; y, por último, en caso de que la consigna o las actividades propuestas las modifiquemos, de igual modo la información presentada en las hojas de evidencia tendrá que ser cambiada.

6.2.1 Análisis de la Sesión 1

En la tabla 4 presentamos a manera de resumen cada uno de los elementos que nos interesó evaluar del diseño de la secuencia didáctica. Para esta sesión no hubo cambios ni en la consigna, ni en los problemas presentados, ni en el tiempo destinado para la realización de la actividad, debido a que la sesión se desarrolló en tiempo y forma de acuerdo con lo planeado.

Tabla 4. Análisis de la sesión 1

Rubro por evaluar	¿Se realizaron cambios?	Comentarios
La Consigna	No	Los alumnos entendieron la consigna y realizaron lo que les pedimos.
Los Problemas presentados	No	El problema de analizar cada uno de los procedimientos realizados por Beremiz, consideramos que fue adecuado a manera de introducción de la secuencia didáctica.
El tiempo destinado para la realización de las actividades.	No	El tiempo estimado fue adecuado, ya que las actividades de lectura y de resolución del problema pudieron llevarse a cabo sin exceder el tiempo de la sesión.

Como mencionamos no se hizo cambio alguno en el desarrollo de la sesión, no obstante, consideramos necesario realizar algunos ajustes en la dosificación de la información presentada en la hoja de evidencia; la estructura de esta última contenía dos apartados distintos que no se presentaron en las otras hojas de evidencia, tales apartados son: *un poco de geografía* y *sobre el cuento*. En el primer apartado se incluyó como su nombre lo dice, una breve contextualización geográfica a través de preguntas dirigidas al alumno con el fin de que reflexionara sobre el país en el que se desarrolla la historia y algunos otros datos relevantes en cuanto a su población. En el segundo apartado se incluyó un breve resumen de la novela "el hombre que calculaba", seguida de la biografía del autor.

En lo que respecta al contexto geográfico consideramos que algunas preguntas pueden ser ambiguas, por ejemplo: "¿sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona (Irak)?" y "¿cómo es la vestimenta?"; creemos que pueden causar confusión; si retomamos la primera, los alumnos pudieron contestar muchas cosas; pero queríamos que la respuesta fuera el gentilicio o el nombre coloquial que reciben las personas que viven en el conjunto de países de la Península Arábiga, es decir "árabes"; la segunda pregunta consideramos que se puede acotar a preguntar características propias del tipo de vestimenta que no se comparte con el de otros países o regiones; la pregunta podría reformularse al preguntar ¿qué distingue a la vestimenta de las personas árabes?

En las respuestas que se obtuvieron por parte de los alumnos, en el apartado de contextualización geográfica, las respuestas no distaron de lo que queríamos propiciar a que nos contestaran, puesto que se contestaron entre todos durante la sesión síncrona y fueron guiados por el docente; pero para evitar confusiones sugerimos hacer adecuaciones. En los apartados en los que se habla sobre la novela y el autor, consideramos simplificarlos, para hacer la lectura más amigable, en el anexo 6 se incluyen las hojas de evidencia modificadas.

6.2.2 Análisis de la Sesión 2

En esta sesión realizamos pocos cambios, principalmente a la distribución de los problemas, puesto que originalmente teníamos pensado que se trabajaran dos temas: las operaciones inversas (suma y resta) y la línea fraccionaria como signo de agrupación; pero a falta de tiempo decidimos separar cada uno de los problemas para sesiones independientes, en la siguiente tabla se muestran los cambios realizados.

Tabla 5. Análisis de la sesión 2

Rubro por evaluar	¿Se realizaron cambios?	Comentarios
La Consigna	No	Los alumnos entendieron la consigna y realizaron lo que les pedimos.
Los Problemas presentados	No	La estructura de los dos problemas presentados consideramos adecuada, sin embargo, consideramos adecuado llevarlas a cabo en momentos diferentes para propiciar una mejor reflexión en los estudiantes.
El tiempo destinado para la realización de las actividades.	Sí	El tiempo destinado a cada actividad fue de 20 minutos los cuales no fueron suficientes para realizar ambas actividades, por lo que sólo pudios llevar a cabo el primer problema correspondiente a la línea fraccionaria en la sesión síncrona.

En lo que respecta a las hojas de evidencia, se realizaron algunos cambios en la redacción del fragmento literario en el apartado de volvamos al cuento.

Análisis de la Sesión 3

Al igual que en la sesión anterior se contempló trabajar dos temas a través de dos situaciones: el uso de las potencias, así como, el lugar que ocupaban en la Jerarquía de Operaciones y analizar las operaciones inversas (multiplicaciones y divisiones). No obstante, el tiempo para llevarse a cabo en la sesión síncrona sí fue suficiente, pero consideramos realizarse por separado, en la siguiente tabla se muestran los cambios.

Tabla 6. Análisis de la sesión 3.

Rubro por evaluar	¿Se realizaron cambios?	Comentarios
La Consigna	No	Los alumnos entendieron la consigna y realizaron lo que les pedimos.
Los Problemas presentados	No	El primer problema consistió en formar el número más grande con cuatro cuatros. En el segundo problema analizaron dos algoritmos y cambiaron el orden de operar.

El tiempo destinado para la realización de las actividades.	Sí	Se había destinado en un inicio 20 minutos para el desarrollo de cada una de las actividades, a pesar de haber sido suficiente consideramos separarlas para no coartar el espacio de reflexión en cada una.

De acuerdo con lo observado de incluir dos problemas en una misma sesión decidimos aumentar una sesión a la secuencia didáctica destinada a trabajar las dos actividades relacionadas a las operaciones inversas que se abordaron en la sesión 2 y 3, en el apartado 6.3 se profundizará sobre esta modificación.

6.2.3 Análisis de la Sesión 4

A diferencia de las sesiones anteriores en la presente, los alumnos tuvieron dificultades al comprender la consigna, puesto que esperábamos que construyeran un algoritmo a partir de una serie de pasos para poder adivinar el mes de cumpleaños y la edad de sus compañeros, tales pasos los incluimos en el apartado de "volvamos al cuento" en sus hojas de evidencias, pero por el contrario los alumnos entendieron que debían de construir un algoritmo completamente nuevo provocando conflictos al momento de resolver el problema. En la siguiente tabla presentamos un resumen de las modificaciones realizadas.

Tabla 7. Análisis de la sesión 4

Rubro por evaluar	¿Se realizaron cambios?	Comentarios
La Consigna	Sí	La consigna presentada fue: Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento. Consideramos que la expresión de "construye un algoritmo" puede provocar confusiones. Por tal motivo modificamos la consigna a: Encuentra un algoritmo o una sola

		expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu resultado.
Los Problemas presentados	No	El problema presentado lo consideramos adecuado para que los alumnos escriban una expresión de lenguaje sincopado a lenguaje simbólico, haciendo uso de la Jerarquía de Operaciones.
El tiempo destinado para la realización de las actividades.	No	El tiempo estimado fue adecuado, ya que las actividades de lectura y de resolución del problema pudieron llevarse a cabo sin exceder el tiempo de la sesión.

6.2.4 Análisis de la Sesión 5

Como ya se mencionó en la sección de metodología, para la sesión 5 se planificó como una variable didáctica de la sesión 4 al restringirles el uso de encontrar resultados parciales para animarlos a encontrar un algoritmo que en una sola expresión no importa el número que se opere el resultado será 3. Se esperaba de igual manera que los alumnos hagan un cambio de un lenguaje sincopado a un lenguaje matemático simbólico.

Las modificaciones realizadas para esta sesión fueron muy pocas, pues no tuvimos inconveniente alguno durante su desarrollo. Tomando en cuenta la confusión provocada en los estudiantes en la sesión anterior consideramos modificar la consigna también para la presente, esto para evitar dificultades en ellos, aunque cabe mencionar que durante su implementación no tuvimos un inconveniente en la comprensión de la consigna. En la tabla siguiente mencionamos a manera de resumen los cambios realizados.

Tabla 8. *Análisis de la sesión 5*

Rubro por evaluar	¿Se realizaron cambios?	Comentarios
La Consigna	Sí	Nuevamente decidimos cambiar la expresión de “construye un algoritmo” por “encuentra un algoritmo”, para que los alumnos no interpreten que tienen que

		crear una nueva adivinanza.
Los Problemas presentados	No	El problema tal como lo presentamos lo consideramos pertinente para que los estudiantes pongan en práctica sus conocimientos sobre la Jerarquía de Operaciones.
El tiempo destinado para la realización de las actividades.	No	El tiempo estimado fue adecuado y se pudo llevar a cabo el problema propuesto, así como la institucionalización presentada por el docente.

6.3 Consideraciones adicionales a la secuencia didáctica

En el apartado de la metodología se mencionó sobre la aplicación de un cuestionario de 6 preguntas abiertas para conocer las impresiones de los alumnos a nuestra secuencia didáctica y con sus comentarios, pudieran aportarnos comentarios de mejora al instrumento. Las preguntas realizadas fueron las siguientes:

1. ¿Te gustó la propuesta didáctica para la enseñanza de las Matemáticas a través del uso de cuentos hecha por el investigador para abordar el tema de Jerarquía de Operaciones?
2. ¿Qué opinas del uso de cuentos como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas?
3. Además de Jerarquía de Operaciones ¿en qué otro tema matemático piensas que se podría utilizar esta estrategia didáctica del uso de cuentos?
4. De las actividades planteadas en este taller; ¿en alguna en especial harías un cambio o modificación?; comenta qué es lo que harías
5. ¿Crees pertinente plantear estas actividades a los jóvenes de primero de secundaria?
6. ¿Qué comentarios generales darías sobre el taller y las actividades implementadas?

Las preguntas se les hicieron a los 12 miembros de nuestra muestra, pero sólo respondieron la encuesta 11 alumnos, se desconocen los motivos por los cuales un alumno no respondió a las preguntas. De las respuestas obtenidas de la pregunta 1 y 6, nos interesaba conocer sus impresiones de la intervención. En la pregunta 1 *"¿Te gustó la propuesta didáctica para la enseñanza de las Matemáticas a través del uso de cuentos hecha por el investigador para abordar el tema de Jerarquía de Operaciones?*", los 11 alumnos respondieron que nuestra intervención había sido de su agrado y agregaron algunos comentarios adicionales que nos parece relevantes incluirlos:

- Si, además de que estaría interesante conocer otros cuentos o hasta poder desarrollar uno para abordar este u otros temas.
- Si, la propuesta es innovadora ya que hace que el estudiante no lo vea de manera teórica, sino que expanda sus conocimientos tanto en lo teórico como en la vida cotidiana
- Claro fue muy enriquecedora ya que nos permitió conocer un libro más que trate sobre las matemáticas por lo tanto nos vamos enriqueciendo de cultura literaria y es muy interesante también conocer nuevos escenarios, autores y la razón por las cuales el libro fue escrito, ya que todo esto lo abordamos en la primera sesión.
- Sí, ya que se me hicieron muy interesantes y entretenidas para presentárselas a los alumnos.
- Pues a mí me parecieron todas las clases como algo para reflexionar y tomar aun un poco de lógica.
- Que fue un taller muy atractivo y que en lo personal me dejo bastante conocimiento respecto a los temas y a las maneras de aplicar los cuentos en las clases que en un futuro voy a impartir.
- Me parecieron agradables e interesantes las sesiones y que se aborda un tema que al inicio no encontrábamos un objetivo y una utilización más allá de resolver operaciones de manera inconsciente pero conforme avanzaban las sesiones se encontraba una verdadera intención por aprender y descubrir la importancia de la Jerarquía de Operaciones y de todo lo que va implícito como es el uso de paréntesis y cómo puede favorecer o afectar este uso en la calculadora, además el uso de un cuento con relación a los temas es para mí un plus para poderlo abordar en los

jóvenes considerándolo didáctico y atractivo, no me queda más que felicitar por el desarrollo del taller y agradecer por los nuevos conocimientos adquiridos.

De los comentarios anteriores de los alumnos podemos dar cuenta que el uso del recurso literario les pareció una propuesta innovadora, interesante y un buen recurso para poder atraer la atención de los estudiantes. Otro aspecto que se mencionó en los comentarios fue el espacio que se propició para la reflexión, al percibir que las sesiones se alejaron de las dinámicas de las clases en la enseñanza tradicional, en la que el docente es el único que transmite el saber y los alumnos se limitan a recibir la información de manera pasiva; en nuestra intervención los estudiantes nos hacen ver que el haber trabajado en equipos les fue de gran ayuda. Un último punto para mencionar fue que percibieron la implementación como una oportunidad para poder enriquecer sus prácticas como futuros profesores de matemáticas en educación secundaria.

Complementando el tema del uso del cuento o del recurso literario en las clases de matemáticas se les preguntó sobre sus impresiones de usar este recurso dentro de las clases de matemáticas, a continuación, presentamos algunas respuestas complementarias a los comentarios anteriores:

- Me pareció muy interesante, al menos en lo personal me interesaba seguir leyendo el cuento. Considero que es un buen recurso para enseñar este tema ya que los estudiantes de secundaria podrán aprender la historia del tema.
- Considero que es una estrategia o metodología atractiva para introducir a los alumnos. También no sólo se engloba aritmética, sino álgebra básica.
- Considero que es una excelente manera de abordar temas y captar la atención de los alumnos, se deja de lado un poco el método tradicional y se busca generar interés en lo que se va a enseñar.
- Me parece interesante, ya que se supone que el cuento se relaciona más con la materia de español y así se incluyen distintas asignaturas en matemáticas.

Nuevamente surgió el tema de interesar al alumno por medio de la lectura; del mismo modo, en el último comentario, nos resulta interesante que la alumna le llamó la intención que se haya usado literatura en las clases de matemáticas, apuntando a la disociación de percibir a las matemáticas y a la lengua como constructos de conocimientos separados, por lo tanto, nuestra propuesta busca hacer esa brecha menos amplia.

En la pregunta 3 "*Además de Jerarquía de Operaciones ¿en qué otro tema matemático piensas que se podría utilizar esta estrategia didáctica del uso de cuentos?*", los alumnos sugirieron varios temas como la geometría, expresiones algebraicas, fracciones, problemas con operaciones o usos de números y teorema de Pitágoras. Estos temas sugeridos nos confirman lo que nosotros creemos, nuestra convicción que las matemáticas y distintos temas se pueden trabajar con el uso de la literatura.

En la pregunta 4 "*De las actividades planteadas en este taller; ¿en alguna en especial harías un cambio o modificación?; comenta que es lo qué harías*", la mayoría de los alumnos respondieron que no harían cambios; y la parte restante de los alumnos, nos sugirieron hacer cambios en incluir más juegos, más cuentos e inclusive se comentó el incluir un material audiovisual. Las propuestas nos parecen interesantes, aunque salen un poco de nuestro alcance, al menos para la realización de este proyecto de investigación. Por otro lado, únicamente una persona comentó que la consigna de la sesión 4 no había sido clara y que habría que hacer modificaciones; esto confirma en cierta medida lo que ya habíamos analizado al respecto.

En la pregunta 5 *"¿Crees pertinente plantear estas actividades a los jóvenes de primero de secundaria?*", todos los alumnos coincidieron en que la propuesta es adecuada para tal población, agregando algunos comentarios, haciendo alusión a que las actividades ayudaría a los alumnos a una mejor comprensión del tema e interés por aprender al hacer uso de la literatura.

A partir de los análisis que realizamos y tomando en cuenta las opiniones de los estudiantes, consideramos necesario hacer algunas adecuaciones a la secuencia. Tomando en consideración que algunas sesiones contenían dos situaciones problemáticas a resolver, por lo tanto, hubo casos, en los cuales no se pudieron resolver lo ya antes planeado o cuando sí se implementó, la discusión no se extendió por la presión de tener que pasar a la siguiente actividad; decidimos separar las sesiones con tal peculiaridad; teniendo como resultado un total de 6 sesiones, presentando la siguiente distribución:

- La sesión 1, no se modificó y el objetivo de aprendizaje estaría encaminado a identificar los conocimientos previos de los estudiantes.
- La sesión 2, ahora estaría orientada a trabajar la reflexión de las operaciones inversas, entonces, aquí se conglomeran las actividades propuestas originalmente en la sesión 2 y 3.
- La sesión 3, se modificaría al dejar únicamente la reflexión acerca de la línea fraccionaria como signo de agrupación.
- Ahora la sesión 4, se trabajaría el buscar el número más grande para reflexionar el tema de las potencias y su orden en la Jerarquía de Operaciones.
- La sesión 5, sería la construcción del algoritmo para adivinar el mes y la edad de uno de sus compañeros, encontrando resultados parciales en la calculadora. El objetivo sería el mismo al original; que los alumnos hagan uso de sus conocimientos de la Jerarquía de Operaciones.
- La sesión 6, consistirá en la construcción de un algoritmo que sin importar el número que se piense siempre dará como resultado el número 3, sin encontrar resultados parciales en la calculadora.

Con los ajustes anteriores esperamos que la secuencia didáctica permita a los alumnos tener una mayor comprensión del tema al revisar cada subtema en cada sesión. El tiempo por sesión no lo modificamos, tomando en cuenta que, en caso de implementarse con estudiantes de secundaria, el tiempo que contemplan para las clases de matemáticas es de una hora; para no interferir con la administración del tiempo de las instituciones, decidimos dejarlo como se tenía previsto, siempre y cuando se implemente con grupos reducidos como lo fue en este proyecto, para poder destinar el tiempo necesario para que los alumnos participen y reflexionen acerca del tema.

7 Conclusiones

La investigación propuesta tuvo como objetivo general el diseñar una secuencia didáctica que favoreciera el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones con el uso de la literatura. El progreso de los estudiantes lo analizamos a partir de sus procedimientos realizados en cada una de las sesiones, es por ello por lo que nuestro primer objetivo específico estuvo centrado en analizar sus nociones. En nuestra implementación nos percatamos que los temas que causaron mayor dificultad en los estudiantes fue el uso de la línea de fracción como signo de agrupación, la notación científica y los signos de agrupación, a continuación, mencionamos a detalle las dificultades encontradas.

7.1 Dificultades en los estudiantes.

En los siguientes apartados se exponen las observaciones realizadas con respecto a sus dificultades

7.1.1 Línea fraccionaria como signo de agrupación.

Las sesiones 1 y 2 estuvieron dedicadas a que los alumnos analizaran los procedimientos hechos por el protagonista de la novela, aunque la sesión 2 estuvo destinada a que los alumnos analizaran los algoritmos con expresiones fraccionarias, no obstante, desde la primera sesión los estudiantes reflexionaron sobre este tema.

Una de las dificultades que tienen los estudiantes al interpretar este tipo de algoritmos es que no reconocieron que la línea de fracción hace la función de signos de agrupación cuando contiene operaciones en el numerador y como consecuencia tenemos dos posibilidades de dificultades:

1) Que los alumnos quieran dividir algunos números del numerador entre los del denominador, porque han aprendido que se hace primero la división representada en una fracción, tal como lo menciona Ameis (2011).

2) Que los alumnos tengan que distinguir cuando una fracción está fungiendo como operación o como número, Carrión (2007).

En 6 de las 11 hojas de evidencias recibidas encontramos que los estudiantes identifican que en los procedimientos realizados por Beremiz se operan en primer lugar las operaciones que se encuentran en el numerador y posterior a ello se obtiene el cociente del numerador entre el denominador. Este descubrimiento que hicieron los alumnos les hizo cuestionarse sobre sus conocimientos previos en que se resuelve primero la división y explicaron que en algunos casos la Jerarquía de Operaciones se invierte; estos errores son similares a los obtenidos por Ameis (2011) cuando menciona que las estrategias memorísticas obstaculizan el aprendizaje de la Jerarquía de Operaciones y los alumnos tienden a resolver en primera instancia las operaciones como la división y la multiplicación.

En relación con la última idea del párrafo anterior, en la sesión 2 obtuvimos una conversación entre algunas alumnas que manifestaron su dificultad para discernir en qué momentos se puede realizar la división de inmediato entre el numerador y el denominador y en qué otros casos hay que resolver otras operaciones antes de realizar la división. Por un lado, esta dificultad se puede explicar desde la tendencia de querer resolver la división para seguir la serie de pasos que han memorizado (Ameis, 2011), pero también se puede explicar desde el planteamiento de Carrión (2007) que para interpretar una expresión escrita el alumno tiene que diferenciar si la expresión hace la función de número o de operación, por lo tanto, las dificultades de los estudiantes son consistentes con la investigación de Carrión (2007).

7.1.2 La notación científica.

En la sesión 3 para que los alumnos encontraran el número más grande, la estrategia óptima era hacer uso de las potencias; debido al acomodo de los números los alumnos obtuvieron cifras con una gran cantidad de dígitos que excedía la capacidad de mostrarlo en la calculadora, por tal motivo en algunos de sus dispositivos electrónicos encontraron los números expresados en notación científica. De acuerdo con Freiberger y Thomas (2017) la notación científica permite representar de una manera simplificada números extremadamente grandes y pequeños.

Retomando nuevamente la investigación realizada por Carrión (2005) a estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, así como a docentes de estos mismos niveles, se encontró que los participantes tuvieron complicaciones en interpretar a la potencia como una operación. Esta misma dificultad se presentó en nuestra investigación en algoritmos como 3.88 x 10^{10} cuando los alumnos no identificaron las operaciones tanto explícitas (multiplicación entre 3.88 y el resultado de la potencia de 10^{10}) como implícitas (la potencia de 10^{10}) que contenía. De igual manera pudimos observar que los estudiantes en la segunda sesión mencionaron el orden convencional de las potencias en la Jerarquía de Operaciones, pero al momento de resolver algoritmos como el anterior no resolvieron la potencia antes que la multiplicación, tal obstáculo los llevó a descartar números grandes por no haber interpretado las expresiones correctamente.

7.1.3 Signos de agrupación

El uso de los signos de agrupación provocó dificultades en los estudiantes, pero al mismo tiempo fue un tema que pudieron adquirir con un mayor sentido. En todas las sesiones utilizaron estos signos, no obstante, en nuestra planeación habíamos diseñado que, en las últimas sesiones, es decir, la 4 y la 5 se reflexionara al respecto.

En lo que respecta a la línea fraccionaria los alumnos tuvieron dificultades al identificarla como un signo de agrupación. En las primeras dos sesiones se percataron que en algunos casos se resuelven en primer lugar algunas operaciones de menor jerarquía, sin advertir que se realiza de esta manera porque en la Jerarquía de Operaciones se establece que las operaciones agrupadas se resuelven primero; en las expresiones presentadas a los estudiantes las operaciones del numerador se encontraban agrupads. Estos hallazgos son consistentes con lo dicho por Amies (2011) al mencionar que la línea fraccionaria y el signo de radical provoca confusiones en los estudiantes, por tal motivo, él considera importante que se haga énfasis en los estudiantes que tales signos tienen la misma función que los paréntesis, corchetes o llaves.

7.2 Nociones de los estudiantes sobre la Jerarquía de operaciones.

Siguiendo con el análisis de nuestro objetivo específico acerca de identificar las nociones previas que tenían los estudiantes sobre la Jerarquía de Operaciones en este apartado expondremos lo que encontramos, al mismo tiempo identificamos una evolución en sus nociones, de tal manera también analizaremos si el objetivo general se cumplió, es decir, si el diseño de la secuencia didáctica que realizamos favoreció la adquisición de la Jerarquía de Operaciones.

En las primeras sesiones nos percatarnos que los alumnos identificaron que en los algoritmos que contenían operaciones combinadas debían de hacer uso de la Jerarquía de Operaciones la cual la describieron como un orden específico para resolver las operaciones, sin embargo, en sus explicaciones no justificaron los motivos por los que se realiza de esta manera y únicamente se limitaron a enunciar la secuencia de pasos a seguir, tales hallazgos son consistentes con lo expresado por Lee, Licwinko & Taylor-Buckner (2013) que hacen mención a que los alumnos tienden a memorizar la secuencia de pasos sin comprender las relaciones entre los números y las operaciones que explican las razones de su funcionamiento, incluyendo la falta de comprensión en los casos en los que el orden no siempre se sigue como lo plantean la sucesión de pasos.

Por otro lado, la Jerarquía de Operaciones es un convenio matemático que en caso de no seguirse se pueden obtener diferentes resultados en un mismo algoritmo. Los alumnos fueron sensibles a los cambios de resultados que obtenían cuando comprobaban sus hipótesis planteadas en la calculadora desde la primera sesión, aunque en primera instancia no comprendieron las razones de dichos cambios.

Tal como lo mencionamos en la metodología la calculadora se utilizó durante cada una de las sesiones de la secuencia didáctica, cumpliendo una doble función, como herramienta verificadora (García, 2014) y a modo de que pudieran deducir el orden de la Jerarquía de Operaciones, así como lo plantean Headlam & Graham (2009). En relación con el planteamiento de los últimos autores la calculadora les permitió a los alumnos tener una mejor comprensión a cerca del orden en que calculadora iba operando, de igual manera, les ayudó a identificar el lugar que ocupaban los signos de agrupación y el uso de tales signos para sustituir la línea fraccionaria, a partir de las reflexiones realizadas por los alumnos se acercaron a utilizar los signos desde la convencionalidad del lenguaje matemático, más adelante se hablará un poco más al respecto.

En las primeras sesiones los alumnos hacían referencia a que la calculadora no seguía la Jerarquía de Operaciones en aquellos casos en los que los resultados obtenidos por medio de este artefacto no coincidían con lo esperado, de tal manera que nos pareció pertinente que los estudiantes hicieran uso de dicha herramienta a lo largo de la secuencia didáctica para propiciar que los alumnos dedujeran el orden de operar en la Jerarquía de Operaciones.

En relación con lo anterior los estudiantes habían tenido dificultades en los algoritmos en que se resolvía en primer lugar aquellas operaciones de menor jerarquía como la suma o la resta y esto se debía a que en la mayoría de los casos las operaciones estaban agrupadas mediante una línea fraccionaria como ya lo mencionamos anteriormente, a ello los alumnos expresaron que en algunos casos la Jerarquía de Operaciones se invertía en algunos casos.

Otro aspecto que nos pareció relevante trabajar con respecto a la Jerarquía de Operaciones fue que en aquellos algoritmos que contengan únicamente operaciones inversas un procedimiento al que se recurre desde la enseñanza tradicional es el de resolver de izquierda a derecha, sin embargo, de acuerdo con Ameis (2011) este procedimiento no es matemático debido a que en las operaciones inversas no importa el orden en que se opere siempre se llegará al mismo resultado. En la sesión 3 los estudiantes hicieron mención que algunas operaciones estaban estrechamente relacionadas como la suma y la resta o la multiplicación y la división, esta observación que tuvieron los estudiantes les permitió explicar las razones por las cuales en la Jerarquía de Operaciones se enuncian las operaciones inversas en el mismo nivel jerárquico, esto nos hace pensar que el reflexionar a detalle sobre estas operaciones no sólo permite deducir el orden de operar en algoritmos que las contengan, sino también propicia la comprensión de la Jerarquía de Operaciones.

De acuerdo con Rojas (2018) las matemáticas simbólicas son en sí mismas un lenguaje, por lo tanto, no es necesario acompañar de texto los algoritmos, pues cada signo indica algo en particular. Para poder acercar a los alumnos a este lenguaje convencional, pues como hicimos mención anteriormente la Jerarquía de Operaciones cobra sentido en las matemáticas simbólicas, los alumnos tradujeron en las últimas dos sesiones un problema en lenguaje sincopado a lenguaje simbólico.

En ambas sesiones los alumnos construyeron sus algoritmos y para la última sesión 11 alumnos de 12 escribieron un algoritmo utilizando los signos de manera convencional desde el lenguaje matemático simbólico. Las representaciones de dicho algoritmo fueron de dos maneras distintas:

- De manera horizontal: En este tipo de expresiones los alumnos representaron la sucesión de operaciones en un mismo reglón, por ejemplo, $[(x + 5)(2) - 4] \div 2 - \mathrm{x} = 3$
- Con línea fraccionaria: En dicha expresión los alumnos sustituyeron el signo de división (÷) por el de la línea fraccionaria para indicar que la suma, la multiplicación y una de las restas se dividen entre 2, por ejemplo, $\frac{(x+5)(2)-4}{2} - x = 3$, en algunos casos los alumnos colocaron otros signos para agrupar las operaciones del numerador para indicarle a la calculadora el orden adecuado.

En los algoritmos anteriores había uso convencional de los signos, pues los alumnos fueron más cuidadosos en colocar los signos de agrupación. En contraste con las primeras sesiones en que afirmaban que la calculadora no seguía la Jerarquía de Operaciones para explicar el cambio de resultados, en las últimas sesiones los alumnos se percataron que los signos de agrupación les ayudaban a separar algunas operaciones y que el convenio de Jerarquía de Operaciones contempla que en primer lugar se resuelven las operaciones agrupadas. De acuerdo con lo planteado con Headlam & Graham (2009) en nuestra investigación la calculadora les permitió a los estudiantes deducir el orden de la Jerarquía de Operaciones y el lugar adecuado para colocar los signos de agrupación, agregando a lo anterior consideramos que los espacios proporcionados para incentivar la reflexión en los estudiantes ayudaron a entender la Jerarquía de Operaciones.

Por otro lado, los algoritmos de la última sesión 4 de los 11 procedimientos entregados los alumnos explicitaron el proceso que seguía la calculadora para resolver el algoritmo, indicando el orden de resolución al quitar los paréntesis de las operaciones resueltas, a partir de este desarrollo podemos observar que los estudiantes han comprendido la forma en que se opera en algoritmos con operaciones combinadas. De los 7 alumnos restantes no podemos afirmar que no hayan comprendido el desarrollo, sin embargo, al no tener su procedimiento explicitado no podemos afirmar lo mismo que con los 4 alumnos.

Derivado al análisis presentado de las nociones de los estudiantes en cada una de las sesiones podemos afirmar que nuestro objetivo general se cumplió, debido a los cambios de procedimientos hechos por los alumnos, de tal manera podemos afirmar que la secuencia didáctica que diseñamos favorece la adquisición de la Jerarquía de operaciones. También, consideramos que los cambios al diseño de la secuencia nos permitirán alcanzar de mejor manera el objetivo general. En el siguiente apartado expondremos la inclusión de la literatura que también fue parte de nuestro objetivo general.

7.3 Uso de la literatura en la secuencia didáctica.

El diseño de la secuencia didáctica incluyó un recurso literario que fue el capítulo VII de la novela “El hombre que calculaba”. El fragmento literario fue utilizado de diversas maneras a lo largo de la secuencia, a continuación, presentamos su función para cada sesión:

1. En la primera sesión el recurso literario fungió para contextualizar el concepto matemático que trabajamos a lo largo de la secuencia a partir de la matematización de la literatura realizada por el autor de la obra literaria.
2. A partir de la segunda sesión los fragmentos literarios fueron realizados por los investigadores. Se siguió el mismo procedimiento para la sesión 2 y 3 de matematizar la literatura al presentar problemas que estuvieran relacionadas a la

trama de la lectura y que pudieran resolverse únicamente mediante procedimientos matemáticos.

3. En las sesiones 4 y 5 los fragmentos literarios, además de ser utilizados para presentar los problemas matemáticos a tratar, sirvieron como punto de referencia para que a partir de ellos los alumnos tradujeran lo expresado en lenguaje sincopado a un lenguaje matemático simbólico, al hacer uso de las convenciones matemáticas.

De lo anterior podemos dar cuenta que a pesar de que la literatura estuvo presente en el desarrollo de la secuencia didáctica las funciones que cumplió fueron distintas. Para responder a una de nuestras preguntas que dirigía la investigación sobre cómo incluir la literatura afirmamos que no hay una única manera ya que, la literatura fue usada:

1. Para contextualizar el tema a tratar.
2. Como medio que contenía los problemas.
3. Para reflexionar acerca del transitar de un sistema de representación a otro.

Una de las razones más importantes por las que nos decidimos por incluir este tipo de recursos en el diseño de la secuencia didáctica, fue que las narraciones forman parte del contexto de los niños y adolescentes (Marín, 2013; Bonilla, 2014) por tales motivos pueden ser utilizados en los salones de clases con objetivos meramente didácticos, de igual manera Marín (2013) plantea que un cuento atrae la tención de los estudiantes, ya que se trastocan las emociones y se sienten implicados en la trama. En nuestra investigación los alumnos manifestaron agrado por la secuencia didáctica ya que la literatura les llamó su atención, lo cual es consistente con lo dicho por Marín (2013). Siguiendo a Blanco y Blanco (2009) los autores afirman que comúnmente los cuentos son pensados para trabajarlos con niños pequeños, no obstante, proponen que también pueden ser utilizados con estudiantes de secundaria; en nuestra investigación observamos que los textos también fueron atractivos para personas adultas, por lo tanto, consideramos que la edad no es un factor que pueda determinar la pertinencia para trabajar con la literatura.

Además, nuestra propuesta les ayudó a los futuros profesores a tener ideas para trabajar con sus futuros estudiantes temas matemáticos usando la literatura. Tal amalgama coadyuva a cuestionar la disociación tradicional que se hace entre las matemáticas y la literatura, así como lo dice Macho (2017) con el propósito de poner sobre la mesa que ambos campos forman parte de nuestra cultura y nos ayudan a entender de mejor manera el mundo, por tal razón, todo aquello que no puede ser expresado con matemáticas se puede expresar con palabras y viceversa.

7.4 Aportes y limitaciones del estudio.

En el presente estudio se diseñaron una serie de actividades que se pueden implementar para favorecer la Jerarquía de Operaciones, además cada una de ellas se realizaron a partir de la ingeniería didáctica, identificando los efectos de la enseñanza tradicional, la epistemología de la Jerarquía de Operaciones y errores y obstáculos más frecuentes de los estudiantes. Los elementos anteriores nos permitieron diseñar de mejor manera cada una de nuestras actividades con el fin de que se produjeran aprendizajes significativos.

La secuencia didáctica aquí presentada puede ser un antecedente a futuras investigaciones ya sea para la mejora de las prácticas docentes o para favorecer la adquisición de la Jerarquía de Operaciones en estudiantes de nivel secundario. De igual manera la secuencia de actividades contribuye a que los docentes tengan a su disposición otras propuestas de intervención para ser aprovechadas en las aulas con su alumnado.

Otra ventaja importante es que la implementación de la secuencia didáctica puede adaptarse a una modalidad virtual y a una presencial, ya que no contiene actividades que únicamente sean posibles de aplicarse en una modalidad u otra. No obstante, en la investigación sólo la implementamos en modalidad virtual, por lo tanto, queda todavía por saber los efectos y la utilidad de la secuencia didáctica en la modalidad presencial.

8 Referencias

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas.* México: Pearson Educación.

Ameis, J. A. (2011). The truth about PEDMAS. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *16*(7), 414-420.

Artigue, M. (1995). Ingniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L., *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (págs. 33 - 59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávalos, H. (2019). Material Lúdico para favorecer el manejo de la jerarquía de operaciones básicas en un grupo de segundo de secundaria. San Luis Potosí: Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luís Potosí.

Balbuena, H. Block, D. y García, S. (2018). *Matemáticas I. Secundaria. Conecta más.* Ciudad de México: SM.

Baldor, A. (2005). *Álgebra* (4ta. Edición). México: Grupo Editorial Patria.

Blanco, B. (2009). Cuentos de matemáticas como recurso en la enseñanza secundaria obligatoria. En revista innovación educativa, no. 19.

Block, D., Fuenlabrada, I., Carvajal, A. y Martínez, P. (1992). Los números y su representación: propuestas para divertirse y trabajar en el aula. En Libros del rincón. México: SEP.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del zorzal.

Bonilla, F.J. (2014). El cuento y la creatividad como preparación a la resolución de problemas matemáticos. *Edma: 0-6 Educación matemática en la infancia,* 3(1), 117-143.

Cabanne, N. (2006). *Didáctica de las matemáticas: ¿Cómo enseñar? ¿Cómo aprender?* Buenos Aires: Bonum.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations. Two Volumes Bound as one.* New York: Dover Publications, INC.

Cano, M., Ruíz, R., Córdoba, A. y Tlachy, M. (2019). *Matemáticas. Telesecundaria. Primer grado*. SEP: México.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* 11(1), 19-57.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil.* Madrid: Pearson Educación.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En, Parra, C., y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones.* Paidós: México.

Freiberger, M. y Thomas, R. (2017). *Matemáticas. 100 conceptos.* Españpa: Librero.

Fregona, D., y Orús, P. (2011). *Las nociones del medio y la situación.* En La noción de medio en la Teoría de Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas (pp. 21 – 61). Argentina: Libros del zorzal.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China Lectures, Dordrecht: Kluwer

García, S. (2014). *Sentido numérico*. Materiales para apoyar la practica educativa. México: INEE.

González Lemmi, A. (2004). “Planificación de secuencias didácticas”. En: *Enseñar matemática. Números, formas, cantidades y juegos.* Sáiz, Irma (et al). No.56. Ediciones Novedades Educativas. Serie 0 a 5. La educación en los primeros años. Pp 87-107.

Headlam, C., & Graham, T. (2009). Some initial findings from a study of children"s understanding of the order of operations. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics (37-42).*

INEE. (2018). *Planea: resultados nacionales 2017, 3° de secundaria, Lenguaje y comunicación y Matemáticas.* México: INEE.

Kaufman, A. y Rodríguez, M. (1993). *La escuela y los textos*. Argentina: Santillana.

Lee, J. E. (2007). Talking about Order of Operations. *From the Learning of Mathematics, 27* (3), 25-26.

Lee, J. K., Lickwinko, S., & Taylor-Buckner, N. (2013). Exploring mathematical reasoning of the order of operations: Rearranging the procedural component PEMDAS. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *4*(2), 73-78.

Macho, M. (2017). Aprendizaje de las matemáticas desde la literatura. *Voces de la educación*, 2(2), pp. 83-93

Malba, T. (2018). *El hombre que calculaba*. México: Noriega editores.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Growar, N. (1985). *Rutas hacia el algebra, raíces del álgebra.* Colombia: the open university.

McIntosh, Reys, B. & Reys, R. (1992). A proposed framework for examning number sense. *For the learning of mathematics*, 2 - 8.

Marín, M. (2013). *Cuentos para aprender y enseñar matemáticas en educación infantil*. Madrid: Narcea.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C. y Carrillo, A. (2007). *Álgebra. Tercera edición.* México: Pearson Educación.

Ramos, F. (2016). *Secundaria, literatura y matemáticas en la escuela*. En revista entre maestr@s. Publicación trimestral de la Universidad Pedagógica Nacional, vol. 16, núm. 57 verano 2016.

Rojas, R. (2018). *El lenguaje de las matemáticas. Historias de sus símbolos.* México: Fondo de Cultura Económica.

Saulés, S. (2012). *Leer… ¿PARA QUÉ? La competencia lectora desde PISA.* México: INEE.

Sánchez, E. Hoyos, V. y López, G. (2011). Sentido numérico y pensamiento algebraico. En SEP, *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas.* (págs. 37-58). México: SEP.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011 Guía para el maestro. Educación básica, secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

SEP. (2017). *Matemáticas. Educación secundaria: Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* Ciudad de México: SEP.

Yang, D.-C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. Educational studies, 317-333.

Anexos

Anexo no 1. Formato en blanco del consentimiento informado.

A 19 de febrero de 2021, Santiago de Querétaro, Querétaro.

A quien corresponda:

Por medio de la presente se le informa que el Lic. Eduardo León Poceros llevará a cabo una investigación, como parte de su plan de estudios de la Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas de la Facultad de Psicología en la Universidad Autónoma de Querétaro.

La investigación tiene como objetivo analizar cómo aprenden los alumnos de primer grado de secundaria ciertos conceptos matemáticos, a través del uso de la literatura. Las actividades para realizar durante la investigación serán: la lectura de un cuento y la resolución de algunos problemas matemáticos, de igual manera se espera que los estudiantes analicen la propuesta del investigador, la factibilidad de su aplicación y realicen sugerencias de mejora.

La intervención se llevará a cabo por medio de una plataforma virtual, debido a la contingencia por el COVID-19, salvaguardando de esta manera la integridad de los participantes. El proyecto consta de 5 sesiones de trabajo más una sesión de introducción y cada una de las sesiones se programarán una vez por semana

Para la obtención de los datos de la investigación se grabarán todas las sesiones en formato audiovisual, guardando la identidad de los alumnos, con el fin de recabar toda la información necesaria para los fines y objetivos de la investigación. Cabe resaltar que el compromiso ético de la Universidad es mantener en todo momento en confidencialidad la información e imagen personal de los estudiantes prohibiendo la publicación de estos en redes sociales o cualquier otra plataforma electrónica, así mismo, se prohíbe la retransmisión o distribución por cualquier medio, ya que los videos obtenidos solo serán usados con fines de la investigación.

Sin más por el momento quedo ante cualquier duda o aclaración.

Lic. Eduardo León Poceros
Investigador
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas
Universidad Autónoma de Querétaro
Celular personal: 427 306 95 32
Correo electrónico: eduardo.leon.p92@hotmail.com

Carta de consentimiento informado

Yo ___________________________________ alumno de la *Licenciatura Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria de* ____ autorizo de manera voluntaria mi participación en la investigación de matemáticas y cuentos, luego de haber conocido y comprendido en su totalidad los objetivos sobre dicho proyecto y en el entendido que:

- Mi participación no tendrá un beneficio adicional sobre la manera de ser evaluado en la materia *de matemáticas*.
- No habrá ninguna sanción en el caso de no aceptar la invitación.
- El alumno podrá retirarse del estudio solamente cuando él o ella lo considera conveniente, sin que le perjudique su forma de ser evaluado en la materia.
- No haré ningún gasto adicional, ni recibiré remuneración alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos y videos obtenidos, el producto de la participación del alumno se le asignará un número de folio. Por lo que se prohíbe la publicación de dichos materiales en medios de difusión no autorizados.
- Las grabaciones solo serán usadas como material de recolección de datos para el investigador y su comité.
- Los resultados de la investigación serán publicados únicamente de manera escrita, teniendo como producto la elaboración de un trabajo de tesis.

Lugar y fecha: ___________________________________

Nombre y firma del alumno:

____

____

_______________________	_______________________
Lic. Eduardo León Poceros	M.D.M. Norma Angélica Rodríguez Guzmán
Investigador	Asesora del proyecto

Anexo no 2. El hombre que calculaba. Capítulo VII

Capítulo VII: De nuestra visita al zoco de los mercaderes. Beremiz y el turbante azul. El caso de "los cuatro cuatros". El problema de los cincuenta dinares. Beremiz resuelve el problema y recibe un bellísimo obsequio.

Días después, terminado nuestro trabajo diario en el palacio del visir, fuimos a dar un paseo por el zoco y los jardines de Bagdad.

La ciudad presentaba aquella tarde un intenso movimiento, febril y fuera de lo común. Aquella misma mañana habían llegado a la ciudad dos ricas caravanas de Damasco.

La llegada de las caravanas era siempre un acontecimiento puesto que era el único medio de conocer lo que se producía en otras regiones y países. Su función era, además, doble por lo que respecta al comercio porque eran a la vez que vendedores, compradores de los artículos propios del país que visitaban. Las ciudades con tal motivo, tomaban un aspecto inusitado, lleno de vida.

En el bazar de los zapateros, por ejemplo, no se podía entrar; había sacos y cajas con mercancías amontonadas en los patios y estanterías. Forasteros damascenos, con inmensos y abigarrados turbantes, ostentando sus armas en la cintura, caminaban descuidados mirando con indiferencia a los mercaderes. Se notaba un olor fuerte a incienso, a *kif* y a especias. Los vendedores de legumbres discutían, casi se agredían, profiriendo tremendas maldiciones en siríaco.

Un joven guitarrista de Mosul, sentado en unos sacos, cantaba una tonada monótona y triste:

Qué importa la vida de la gente
si la gente, para bien o para mal,
va viviendo simplemente
su vida.

Los vendedores, a la puerta de sus tiendas, pregonaban las mercancías exaltándolas con elogios exagerados y fantásticos, con la fértil imaginación de los árabes.

—Este tejido, miradlo, ¡Digno del Emir...!

—¡Amigos: ahí tenéis un delicioso perfume que os recordará el cariño de la esposa...!

—Mira, ¡Oh jeque!, estas chinelas y este lindo caftán que los *djins* recomiendan a los ángeles.

Se interesó Beremiz por un elegante y armonioso turbante azul claro que ofrecía un sirio medio corcovado, por 4 dinares. La tienda de este mercader era además muy original, pues todo allí –turbantes, cajas, puñales, pulseras, etc.– era vendido a 4 dinares. Había un letrero que decía con vistosas letras:

Los cuatro cuatros

Al ver a Beremiz interesado en comprar el turbante azul, le dije:

–Me parece una locura ese lujo. Tenemos poco dinero, y aún no pagamos la hostería.

–No es el turbante lo que me interesa, respondió Beremiz. Fíjate en que esta tienda se llama *"Los cuatro cuatros"*. Es una coincidencia digna de la mayor atención.

–¿Coincidencia? ¿Por qué?

–La inscripción de ese cartel recuerda una de las maravillas del Cálculo: empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera...

Y antes de que le interrogara sobre aquel enigma, Beremiz explicó mientras escribía en la arena fina que cubría el suelo:

–¿Quieres formar el cero? Pues nada más sencillo. Basta escribir:

$$44 - 44$$

Ahí tienes los cuatro cuatros formando una expresión que es igual a cero.

Pasemos al número 1. Esta es la forma más cómoda:

$$\frac{44}{44}$$

Esta fracción representa el cociente de la división de 44 por 44. Y este cociente es 1.

¿Quieres ahora ver el número 2? Se pueden utilizar fácilmente los cuatro cuatros y escribir:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

La suma de las dos fracciones es exactamente igual a 2. El tres es más fácil. Basta escribir la expresión:

$$\frac{4 + 4 + 4}{4}$$

Fíjate en que la suma es doce; dividida por cuatro da un cociente de 3. Así pues, el tres también se forma con cuatro cuatros.

–¿Y cómo vas a formar el número 4? –le pregunté–.

–Nada más sencillo –explicó Beremiz–; el 4 puede formarse de varias maneras diferentes. He ahí una expresión equivalente a 4:

$$4 + \frac{4 - 4}{4}$$

Observa que el segundo término

$$\frac{4 - 4}{4}$$

es nulo y que la suma es igual a cuatro. La expresión escrita equivale a:

$$4 + 0, \text{ o sea } 4.$$

Me di cuenta de que el mercader sirio es-cuchaba atento, sin perder palabra, la explicación de Beremiz, como si le interesaran mucho aquellas expresiones aritméticas formadas por *cuatro cuatros.*

Beremiz prosiguió:

—Quiero formar por ejemplo el número 5. No hay dificultad. Escribiremos:

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

Esta fracción expresa la división de 20 por 4. Y el cociente es 5. De este modo tenemos el 5 escrito con *cuatro cuatros.*

Pasemos ahora al 6, que presenta una forma muy elegante:

$$\frac{4 + 4}{4} + 4$$

Una pequeña alteración en este interesante conjunto lleva al resultado 7:

$$\frac{44}{4} - 4$$

Es muy sencilla la forma que puede adoptarse para el número 8 escrito con cuatro cuatros:

$$4 + 4 + 4 - 4$$

El número 9 también es interesante:

$$4 + 4 + \frac{4}{4}$$

Y ahora te mostraré una expresión muy bella, igual a 10, formada con cuatro cuatros:

$$\frac{44 - 4}{4}$$

En este momento, el jorobado, dueño de la tienda, que había seguido las explicaciones de Beremiz con un silencio respetuoso, observó:

—Por lo que acabo de oír, el señor es un eximio matemático. Si es capaz de explicarme cierto misterio que hace dos años encontré en una suma, le regalo el turbante azul que quería comprarme. Y el mercader narró la siguiente historia:

Presté una vez 100 dinares, 50 a un jeque de Medina y otros 50 a un judío de El Cairo.

El medinés pagó la deuda en cuatro partes, del siguiente modo: 20, 15, 10 y 5, es decir:

Pagó	20	y	quedó	debiendo	30
"	15		"	"	15
"	10		"	"	5
"	5		"	"	0
Suma	50			Suma	50

Fíjese, amigo mío, que tanto la suma de las cuantías pagadas como la de los saldos deudores, son iguales a 50.

El judío cairota pagó igualmente los 50 dinares en cuatro plazos, del siguiente modo:

Pagó	20	y	quedó	debiendo	30
"	18		"	"	12
"	3		"	"	9
"	9		"	"	0
Suma	50			Suma	51

Conviene observar ahora que la primera suma es 50 —como en el caso anterior—, mientras la otra da un total de 51. Aparentemente esto no debería suceder.

No sé explicar esta diferencia de 1 que se observa en la segunda forma de pago. Ya sé que no quedé perjudicado, pues recibí el total de la deuda, pero ¿cómo justificar el que esta segunda suma sea igual a 51 y no a 50 como en el primer caso?

—Amigo mío, explicó Beremiz, esto se explica con pocas palabras. En las cuentas de pago, los saldos deudores no tienen relación ninguna con el total de la deuda. Admitamos que la deuda de 50 fuera pagada en tres plazos, el primero de 10; el segundo de 5; y el tercero de 35. La cuenta con los saldos sería:

Pagó	10	y quedó	debiendo	40
"	5	"	"	35
"	35	"	"	0
Suma	50		Suma	75

En este ejemplo, la primera suma sigue siendo 50, mientras la suma de los saldos es, como veis, 75; podía ser 80, 99, 100, 260, 800 o un número cualquiera. Sólo por casualidad dará exactamente 50, como en el caso del jeque, o 51, como en el caso del judío.

El mercader quedó muy satisfecho por haber entendido la explicación de Beremiz, y cumplió la promesa ofreciendo al calculador el turbante azul que valía cuatro dinares.

Anexo no 3. Planeación de Secuencia didáctica para el maestro

Sesión 1: Los cuatro cuatros

Objetivo del maestro: Que los estudiantes conozcan el cuento a trabajar y al mismo tiempo, que el docente conozca los conocimientos previos de los alumnos al interpretar el lenguaje algebraico y el uso de la jerarquía de operaciones.

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Materiales:

- Una copia del capítulo VII de el hombre que calculaba (p. 35-38)
- Hoja para el alumno
- calculadora

Desarrollo de la actividad.

Introducción (15 minutos):

El docente dará contexto sobre el lugar en el que se desarrolla el cuento, ya que los protagonistas se encuentran en el país de Irak y se dirigen hacia la capital de tal país, es decir, Bagdad.

Las preguntas con las que el docente abrirá la sesión son: ¿En qué continente se encuentra Irak? ¿Cómo se imaginan que viven ahí las personas? ¿Cómo es el clima por allá? ¿Qué relación saben que hay entre los árabes y las matemáticas?

Cuando los alumnos hayan respondido las preguntas de manera oral, el docente presentará el libro de la siguiente forma: El autor del libro “El hombre que calculaba fue un escritor brasileño llamado Malba Tahan, quien también fue profesor de matemáticas; sus libros se caracterizan por ser literatura matemática”.

Posteriormente se procederá a la lectura del cuento en voz alta por parte del docente, mientras cada alumno estará siguiendo la lectura en silencio con la copia del cuento que le fue proporcionada al inicio de la sesión. La lectura se detendrá en la página 37, una vez que Beremíz, quien es protagonista del cuento, presentó los procedimientos para encontrar los números del 0 al 10.

Desarrollo (40 minutos):

Una vez leído hasta la página indicada, el docente dividirá el grupo en equipos de 3 a 4 integrantes, y se llevará a cabo una reflexión de los procedimientos realizados por Beremiz. La **consigna** que dirá el docente es: "Analicen cada uno de los procedimientos que hizo Beremiz para encontrar los números del 0 al 10 y expliquen en su hoja de evidencia qué creen que fue lo que hizo".

Una vez hecho este análisis el docente abrirá un espacio de plenaria en el que cada equipo compartirá las conclusiones a las que llegaron.

Posteriormente se hará una comprobación de lo que ellos pensaron. La **consigna** para esta segunda parte será: "ahora comprueben con la calculadora si sus procedimientos son los adecuados para obtener los números deseados".

Del mismo modo, el docente abrirá un espacio para que compartan en plenaria lo que obtuvieron una vez que teclearon en la calculadora lo que habían pensado en la primera parte.

Reflexión y cierre (15 minutos):

Con el objetivo de cerrar la sesión y al mismo tiempo provocar en los estudiantes reflexiones que los lleven a pensar a profundidad sobre el tema, el docente les hará las siguientes preguntas; ¿Lograste comprobar si Beremíz estaba en lo cierto? ¿Cómo lo hiciste? ¿Por qué crees que en la calculadora te dio un resultado diferente? ¿qué teclas tienes que apretar en la calculadora par que el resultado sea el que esperas? ¿En qué orden debes de apretar las teclas para que tu resultado coincida con lo que esperas? ¿De qué otra manera puedes llegar al mismo resultado? ¿crees que ocurra algo si cambiamos el orden en el que se escribió en la calculadora?

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del maestro: Que los estudiantes profundicen en el uso de la jerarquía de operaciones cuando hay una línea fraccionaria. Que analicen que cuando hay operaciones inversas y se cambia el orden de operar, los resultados no cambian.

Objetivos específicos del maestro:

- Confrontar las ideas memorizadas de los alumnos en la que primero se resuelven las multiplicaciones y divisiones, posterior a ello se resuelven las sumas y restas.
- Dirigir las reflexiones a las propiedades de los números naturales, así como las operaciones inversas.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Materiales:

- Hoja de evidencia para el alumno
- Calculadora

Introducción (5 minutos):

El docente les preguntará a los estudiantes lo que recuerdan que se hizo en la sesión anterior, retomando también, algunos puntos relevantes ocurridos en dicha sesión, tales como; si hubo discrepancias entre los procedimientos que pensaban y sus comprobaciones en la calculadora, si en la sesión anterior alguien mencionó el tema de jerarquía de operaciones, retomar lo que se dijo al respecto y preguntarles a cerca de qué reflexiones tuvieron después de la primera sesión.

Desarrollo (45 minutos):

Se trabajará en los mismos equipos que se hicieron en la sesión anterior; para que los alumnos profundicen sobre algunos procedimientos realizados por Beremiz. El docente les pedirá que saquen su hoja de trabajo para esta sesión y leerá un fragmento adicional del cuento. Posteriormente les dará la siguiente **consigna:** "ahora fíjense en cómo obtuvo Beremiz, el número 4, el 5, el 7, y el 10, y expliquen cómo creen que le hizo, usen la calculadora si es necesario para comprobar sus procedimientos".

En esta parte el docente quiere que reflexionen sobre la línea fraccionaria que aparece en dichos procedimientos, ya que no siempre es evidente para los alumnos que tal línea tiene la misma función que los signos de agrupación, es decir, paréntesis, corchetes y llaves; con lo que se busca romper también con las lógicas aprendidas de forma memorística que suponen se debe de resolver primero siempre una multiplicación o división y hasta el último las sumas y las restas. Es probable que muchos alumnos den la respuesta correcta y realicen bien el procedimiento, y, sin embargo, no sepan los motivos de dicho procedimiento.

Se abrirá un espacio en plenaria para que los equipos comparen sus resultados y procedimientos, para ponerlos en discusión con el objetivo de llegar a un acuerdo en común.

Reflexión y cierre (10 minutos):

El docente abrirá un espacio para que los estudiantes sigan reflexionando sobre lo visto en la sesión por medio de las siguientes preguntas: ¿qué se dieron cuenta sobre la línea fraccionaria?, ¿hay o no jerarquía de operaciones cuando se resuelven primero las sumas o restas antes que las multiplicaciones o divisiones?, ¿para qué existirá la jerarquía de operaciones?, ¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas?

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del maestro: Que los alumnos construyan nuevos conocimientos en relación a la jerarquía de operaciones y de las propiedades de los números naturales.

Objetivos específicos del maestro:

- Identificar los conocimientos que tienen los alumnos sobre las potencias y raíces; y si es que los alumnos las utilizan para resolver el problema.
- Identificar los conocimientos de los alumnos al ubicar las operaciones mencionadas en la jerarquía de operaciones.

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas**.**

Materiales:

- Hoja de evidencia para el alumno
- Calculadora

Desarrollo de la actividad.

Introducción (5 minutos):

El docente comenzará la sesión, retomando lo más relevante de la sesión anterior; les preguntará a los alumnos qué es lo que recuerdan, qué fue importante y a qué conclusiones llegaron o si se habían dado cuenta de alguna regularidad de la jerarquía de operaciones.

Desarrollo (45 minutos):

Los alumnos tendrán a la mano su hoja de trabajo para esta sesión, en ella se introduce con una extensión del cuento, en la que se narra que algunos mercaderes que habían escuchado anteriormente a Beremiz, demuestre que con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural y para ello le piden que encuentre el número más grande posible.

El grupo estará dividido en pequeños equipos, los mismos que se formaron para las sesiones anteriores. La consigna será: "usando 4 cuatros, es decir, no más y no menos; y haciendo uso de operaciones y símbolos matemáticos, ayuden a Beremiz a encontrar el número más grande, usen calculadora para comprobar sus resultados".

En esta sesión es probable que algunos alumnos pongan en marcha los conocimientos que tienen sobre las potencias y raíces, sobretodo la primera operación, ya que para obtener un número lo más grande posible, se puede hacer uso de potencias. Es probable que algunos alumnos no recurran a esta operación para llevar a cabo la actividad, ya que, la SEP no contempla la enseñanza de potencias y raíces para primer grado de secundaria, sino se contempla en segundo de secundaria.

Aquellos equipos que hayan resuelto el problema haciendo uso de potencias, se enfrentarán al reto de saber si esta operación se puede ubicar dentro de la Jerarquía de Operaciones, y si pueden ubicar su lugar que ocupa en dicha jerarquía.

Una vez que hayan transcurrido 25 minutos, el docente abrirá un espacio en el que cada equipo compartirá en plenaria lo que encontraron, explicando los procedimientos que llevaron a cabo y las operaciones que les ayudaron a llegar a su resultado. Los demás equipos determinarán si sus compañeros están en lo correcto o no, es decir, si el número que encontraron cumple con lo acordado y si la forma de operar los números es la correcta; por lo tanto, los alumnos serán quienes determinen qué equipo encontró el número más grande y así encontrar a un ganador.

Reflexión y cierre (10 Minutos):

El docente propiciará un espacio para que los alumnos reflexionen sobre lo ocurrido en la sesión, a partir de unas preguntas que realizará de forma oral al grupo; tales como: aquellos que no encontraron un número grande, ¿qué pudieran mejorar de su procedimiento?, ¿Creen que exista una operación que les ayude a formar un número grande?, ¿con cuál operación encontraron el número más grande?, ¿creen que las potencias ocupen un lugar en la jerarquía de operaciones? ¿Y cuál sería ese lugar?, ¿Qué operación es inversa a las potencias? ¿Qué se dieron cuenta de la jerarquía de operaciones?

Sesión 4: igualando a 3.

Objetivo del maestro: Que los alumnos construyan un algoritmo que adivine el número que piense uno de sus compañeros, respetando la jerarquía de operaciones.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Materiales:

- Hoja de evidencia para el alumno
- Calculadora

Desarrollo de la actividad:

Introducción (5 minutos).

El docente les preguntará a los alumnos sobre lo trabajado en la sesión anterior, retomará los puntos o ideas más relevantes sobre lo que los alumnos observaron de la jerarquía de operaciones.

Desarrollo (45 minutos).

En esta sesión se retomarán a los personajes del cuento trabajado anteriormente y se les pedirá a los alumnos que escuchen con atención la adivinanza hecha por Beremiz, la cual pretende calcular el número que haya pensado alguno de los espectadores. El grupo se dividirá nuevamente en pequeños equipos de 3 o 4 personas (serán los mismos de las sesiones anteriores) y les pedirá que saquen su hoja de trabajo para dicha sesión. Una vez organizados en equipos el docente les dirá la siguiente **consigna:** “escuchen con atención los pasos que siguió Beremiz para calcular el número que haya pensado algún otro compañero cuyo resultado será siempre 3, construyan un solo algoritmo con operaciones y signos matemáticos que corresponda a la adivinanza”.

El docente les dará 30 minutos para los alumnos construyan su algoritmo y comprueben; transcurrido ese tiempo se abrirá un espacio en plenaria, en el que cada equipo compartirá su algoritmo con su debida explicación del porqué llegaron a tal resultado. A partir de las explicaciones hechas por los alumnos, se llegará a un acuerdo de los equipos que hayan encontrado el algoritmo que funcione con la adivinanza.

Reflexión y cierre:

Se propiciará un espacio de reflexión a partir de lo trabajado en la sesión a partir de algunas preguntas; ¿tuvieron dificultad para construir el algoritmo?, ¿si se invirtiera el orden de las operaciones, seguiría dando el mismo resultado?; ¿cómo tuvieron que teclear en la calculadora para que les diera el algoritmo?

Sesión 5: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del maestro: Que los alumnos encuentren un algoritmo que permita encontrar el mes de cumpleaños y la edad de alguno de sus compañeros. Que el alumno ponga en práctica sus conocimientos que tiene de la Jerarquía de Operaciones y de las operaciones inversas.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Materiales:

- Hoja de evidencia para el alumno
- Calculadora

Desarrollo de la actividad:

Introducción (5 minutos).

El docente comenzará la sesión haciendo una recapitulación de lo trabajado en la sesión anterior, retomando al mismo tiempo la información más relevante de dicha sesión.

Desarrollo (40 minutos).

El docente les pedirá a los alumnos que se remitan a su hoja de trabajo que corresponda a la sesión 5. El docente leerá junto con los alumnos el último fragmento de la historia, el cual está contenido en la hoja del alumno. Para esta sesión la historia continúa en que Beremiz menciona una serie de operaciones matemáticas y pasos para adivinar el mes cumpleaños y la edad de cualquier persona.

El grupo estará distribuido nuevamente en equipos de 3 a 4 personas. El docente les dirá la siguiente **consigna:** "lean con atención el proceso que siguió Beremiz para encontrar el mes de cumpleaños y la edad de cualquier persona, construyan una sola expresión o algoritmo que atienda a las instrucciones de Beremiz. Comprueba con la calculadora tus resultados, digitando todo el algoritmo en una sola exhibición".

Transcurridos 20 minutos el docente abrirá un espacio en plenaria en el que cada equipo explicará su procedimiento a seguir y el algoritmo elegido. Entre todos los equipos se decidirá cuáles son los algoritmos que cumplen con el objetivo.

Cierre y reflexión (5 minutos).

El docente propiciará la reflexión mediante los siguientes cuestionamientos; ¿Qué dificultades tuvieron para encontrar el algoritmo?, ¿cómo explicarían la jerarquía de operaciones en dicho algoritmo?; ¿en qué casos es importante se aplica la jerarquía de operaciones?

Debido a que esta es la última sesión, el docente realizará un cierre del espacio proporcionado mediante el siguiente cuestionamiento ¿qué aprendí a lo largo de las sesiones; ¿en qué creo que me va a servir lo que ahora sé?

Institucionalización (5 minutos).

El docente les proporcionará los conceptos sobre la jerarquía de operaciones, así como la explicación del por qué funciona así y de las propiedades de las operaciones inversas. Así mismo, se aclarará que en el caso de expresiones en las que contengan operaciones de la misma jerarquía, éstas no se resuelven de izquierda a derecha, ya que no es un procedimiento matemático adecuado, sino, no importa el orden siempre y cuando las operaciones sean inversas, debido a las propiedades de los números naturales.

Anexo no 4. Formato de hojas de trabajo para el alumno

Sesión 1: Los 4 cuatros

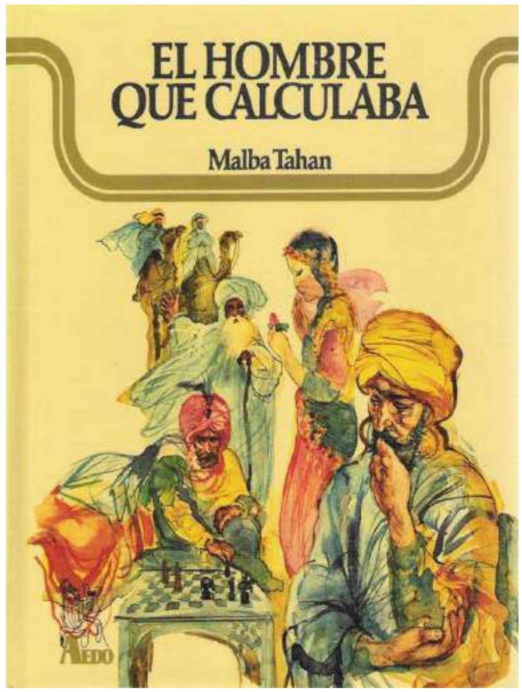
Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? ______________________________. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? ____
¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona? ____
¿cómo es la vestimenta? ____
¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? ____

¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? ____
____.

Imagen 1



Fuente: Portada de “El hombre que calculaba”.

Sobre el cuento:

El libro consta de 34 capítulos en los que se narra la historia de Beremiz Samir, un cuidador de ovejas. Cierto día, conoce a un bagdalí, el cual le invita en su camino a Bagdad, aconsejándole que su habilidad para calcular le podría dar mucho dinero. Y así fue. Durante el trayecto iban encontrando diferentes problemas matemáticos que “el calculador” resolvía con gran precisión dejando boquiabiertos a sus oyentes por la simpleza de los resultados. Poco a poco, sus proezas le dieron fama en la sociedad, tanto que fue perseguido por el envidioso Tara.

¿Quién es Malba Tahan?

Es el autor del “Hombre que calculaba”, su nombre era Julio César de Mello Souza mejor conocido con el pseudónimo Malba Tahan. Nació el 6 de mayo de 1895 en Río de Janeiro, Brasil, murió el 18 de junio de 1974 en Recife, Pernambuco.

Julio César de Mello se enamoró de la cultura árabe desde su infancia, al leer “Las mil y una noches”. Sin embargo, fue en 1919, a los 23 años, que él se introdujo en el estudio de la lengua y la cultura árabe.

Se graduó como profesor en la Escuela Normal y luego como ingeniero en la Escuela Nacional de Ingeniería. Creó la mistificación literaria que llamó Malba Tahan, a través de la cual publicó numerosas obras, incluido el célebre "El hombre que calculaba" que fue publicado por primera vez en 1938 y estuvo en la lista de los libros más vendidos, con el cual trajo aventuras en escenarios árabes típicos junto con atractivas soluciones de problemas de álgebra y aritmética.

Firmando como Malba Tahan o como Prof. Mello e Souza, escribió varios libros didácticos y enseñanza de las matemáticas. Fue principalmente el precursor y fundador de una nueva forma de enseñar matemáticas, así como el popularizador más destacado de la disciplina.

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registra lo que encontraste.

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7, el 8 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, “con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

> -Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes
>
> -Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: “piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

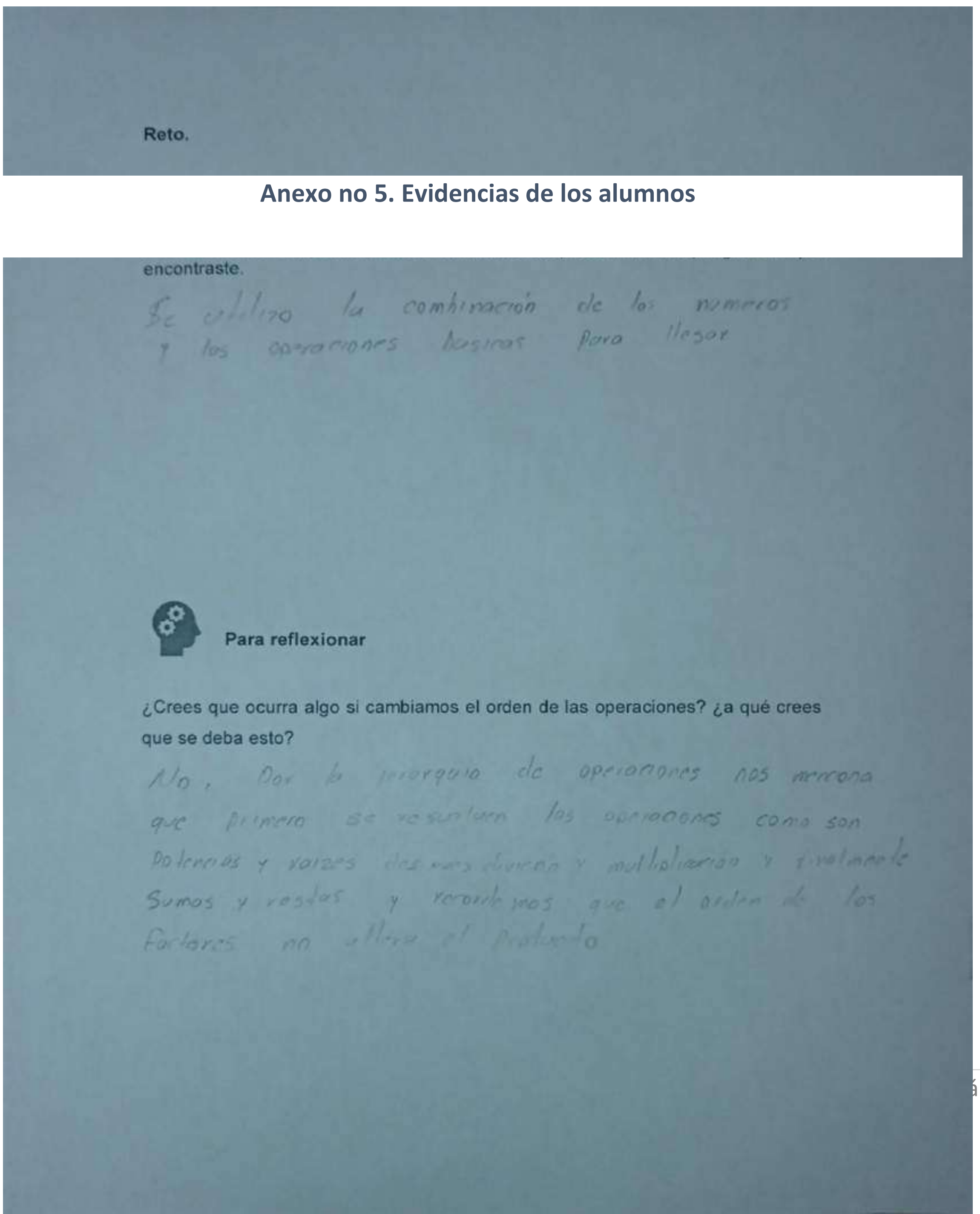
Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

Anexo no 5. Evidencias de los alumnos

Sesión 1.


Reto.

encontraste.

Se utilizo la combinación de los numeros y las operaciones basicas para llegar

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

No, por la jerarquia de operaciones nos menciona que primero se resuelven las operaciones como son potencias y raizes despues division y multiplicación y finalmente sumas y restas y recordemos que el orden de los factores no altera el producto

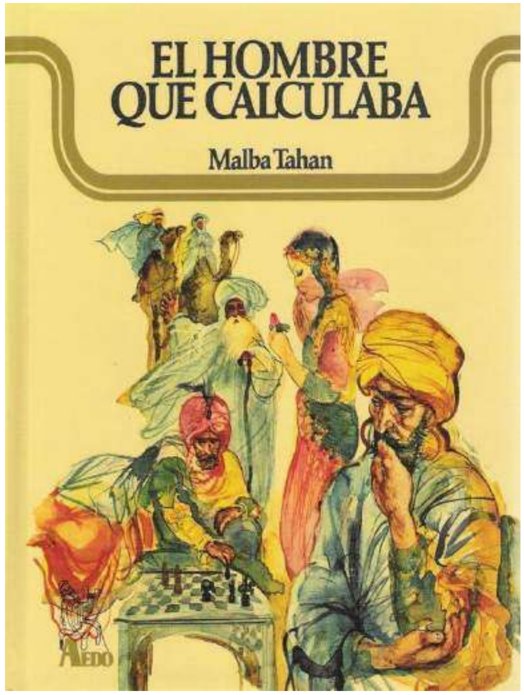
Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizadospor Beremiz.

Un poco de geografía:

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? _Si, asiático_. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? _Un clima desértico_ ¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona?
Si, iraquí ¿cómo es la vestimenta? _Se usa una túnica que cubre hasta sus piesy un velo que cubra su cabeza_ ¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? _Hijab_ ¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? _No estoy segura, pero sé que fueron de los primeros en hacer uso de temas de las matemáticas_.

Imagen 1



Fuente: Portada de “El hombre que calculaba”.

Sobre el cuento:

El libro consta de 34 capítulos en los que se narra la historia de Beremiz Samir, un cuidador de ovejas. Cierto día, conoce a un bagdalí, el cual le invita en su camino a Bagdad, aconsejándole que su habilidad para calcular le podría dar mucho dinero. Y así fue. Durante el trayecto iban encontrando diferentes problemas matemáticos que “el calculador” resolvía con gran precisión dejando boquiabiertos a sus oyentes por la simpleza de los resultados. Poco a poco, sus proezas le dieron fama en la sociedad, tanto que fue perseguido por el envidioso Tara.

¿Quién es Malba Tahan?

Es el autor del “Hombre que calculaba”, su nombre era Julio César de Mello Souza mejor conocido con el pseudónimo Malba Tahan. Nació el 6 de mayo de 1895 en Río de Janeiro, Brasil, murió el 18 de junio de 1974 en Recife, Pernambuco.

Julio César de Mello se enamoró de la cultura árabe desde su infancia, al leer “Las mil y una noches”. Sin embargo, fue en 1919, a los 23 años, que él se introdujo en el estudio de la lengua y la cultura árabe.

Se graduó como profesor en la Escuela Normal y luego como ingeniero en la Escuela Nacional de Ingeniería.

Creó la mistificación literaria que llamó Malba Tahan, a través de la cual publicó numerosas obras, incluido el célebre "El hombre que calculaba" que fue publicado por primera vez en 1938 y estuvo en la lista de los libros más vendidos, con el cual trajo aventuras en escenarios árabes típicos junto con atractivas soluciones de problemas de álgebray aritmética.

Firmando como Malba Tahan o como Prof. Mello e Souza, escribió varios libros didácticos y enseñanza de las matemáticas. Fue principalmente el precursor y fundador de una nueva forma de enseñar matemáticas, así como el popularizador más destacado de la disciplina.

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registralo que encontraste.

0. Para obtener el cero lo que se realizo es 44-44 ya que al hacer esta resta el resultado es 0.
1. Para el numero uno la manera más sencilla por decir es generar un entero y lo que se puede es aplicar dicha fracción para que se obtenga ese uno.
2. En este número se realiza algo similar a el anterior ya que de igual manera se hacen dos números enteros, que en este caso sería cuatro cuartos lo cual es iguala uno, p
3. La obtención del número tres se realizo es sumar tres veces el cuatro lo cual da un resultado de 12 y al esto dividirlo entre 4 da 3.
4. En el resultado del 4 se buscó eliminar 3 de los 4 o que estas den un 0 para a ese cero sumarle el cuatro restante.
5. Para conseguir como resultado el numero 5 se hace de manera en que primero se multiplica 4*4 (lo cual da 16) y sumarle 4 (se obtiene 20) y esto lo divide entre 4 y da el resultado deseado que en este caso es el 5.
6. El número seis se obtiene partiendo de una suma de 4+4 que es igual a ocho y la cual se divide entre 4 dando como resultado 2 y a ese sumarle el ultimo 4 (el ultimo 4 se pude poner al inicio o al final).
7. Las operaciones que se deben realizar para tener como resultado el número sietees empezar por dividir 44 entre 4 y da como resultado once y a ello restarle 4 y así conseguir el

siete.

8. En este resultado se suman tres veces el 4 para obtener 12 como resultado y a este restarle 4 y conseguir el numero deseado.

9. Para obtener el nueve como resultado se debe hacer una suma de 4 más 4 más cuatro cuartos (que es igual a uno) y así se tiene el 9 como resultado.

10. Por último para calcular el número diez primero se necesita hacer una resta de 44 menos 4 para así conseguir como resultado cuarenta y este dividirlo entre 4 y tener el 10 como resultado final.

Una vez analizados todos los procedimientos que se redactan en el cuento, se obtienen exactamente los resultados que deben de ser desde el 0 al 10, lo que hizopara calcular cada número fue prestar atención a cuál era el resultado que se necesitaba obtener para de ahí ir buscando dicho resultado con diferentes operaciones, como lo son sumas, restas, divisiones, multiplicaciones e implementarel uso de fracciones.

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?En algunos casos no, porque no cambiaría. Considero que para los alumnos de secundaria sería un poco difícil realizar la actividad por el uso de fracciones ya que algunos aún no están completamente familiarizados con el tema. Para algunos casos se obtienen otros resultados y esto pasa por que se altera el orden entonces al hacer esto dan resultados muy diferentes del que se espera obtener.

Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? sí, en Asia. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? Seco, desierto, árido

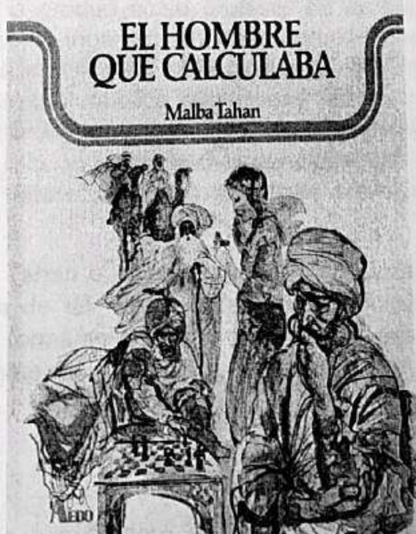
¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona? Irakies

¿cómo es la vestimenta? Usan tunicas y las mujeres se cubren todas menos ojos

¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? Turbantes

¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? Se han relacionado desde la geometria.

Imagen 1



Fuente: Portada de "El hombre que calculaba".

Sobre el cuento:

El libro consta de 34 capítulos en los que se narra la historia de Beremiz Samir, un cuidador de ovejas. Cierto día, conoce a un bagdalí, el cual le invita en su camino a Bagdad, aconsejándole que su habilidad para calcular le podría dar mucho dinero. Y así fue. Durante el trayecto iban encontrando diferentes problemas matemáticos que "el calculador" resolvía con gran precisión dejando boquiabiertos a sus oyentes por la simpleza de los resultados. Poco a poco, sus proezas le dieron fama en la sociedad, tanto que fue perseguido por el envidioso Tara.

¿Quién es Malba Tahan?

Es el autor del "Hombre que calculaba", su nombre era Julio César de Mello Souza mejor conocido con el pseudónimo Malba Tahan. Nació el 6 de mayo de 1895 en Río de Janeiro, Brasil, murió el 18 de junio de 1974 en Recife, Pernambuco.

Julio César de Mello se enamoró de la cultura árabe desde su infancia, al leer "Las mil y una noches". Sin embargo, fue en 1919, a los 23 años, que él se introdujo en el estudio de la lengua y la cultura árabe.

Se graduó como profesor en la Escuela Normal y luego como ingeniero en la Escuela Nacional de Ingeniería. Creó la mistificación literaria que llamó Malba Tahan, a través de la cual publicó numerosas obras, incluido el célebre "El hombre que calculaba" que fue publicado por primera vez en 1938 y estuvo en la lista de los libros más vendidos, con el cual trajo aventuras en escenarios árabes típicos junto con atractivas soluciones de problemas de álgebra y aritmética.

Firmando como Malba Tahan o como Prof. Mello e Souza, escribió varios libros didácticos y enseñanza de las matemáticas. Fue principalmente el precursor y fundador de una nueva forma de enseñar matemáticas, así como el popularizador más destacado de la disciplina.

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registra lo que encontraste.

★ $44 - 44 = 0$

★ $44 \div 44 = 1$

★ $4/4 + 4/4 = 2$

★ $\frac{4+4+4}{4} = 3$

★ $4 + \frac{4-4}{4} = 4$

★ $\frac{4 \times 4 + 4}{4} = 5$

★ $\frac{4+4}{4} + 4 = 6$

Al hacerse en calculadora cambia el resultado.
Se importa el uso de los parentesis

★ $\frac{44}{4} - 4 = 7$

★ $4+4+4-4 = 8$ → Solo efectúa 2 operaciones por lo que cuando se usa la calculadora obtenemos un resultado congruente

★ $4 + 4 + \frac{4}{4} = 9$

Para reflexionar

★ $\frac{44-4}{4} = 10$

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

Sí ocurre algo, ya que cambia el orden de las operaciones y se obtendría un resultado diferente.

trigonometria

Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? Asia. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? desertico y seco

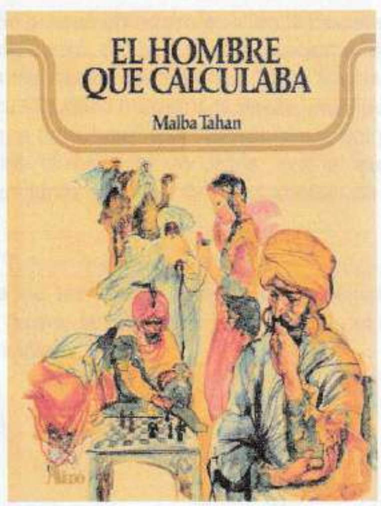
¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona? La mayoria es tunica con turbante

¿cómo es la vestimenta? Como tipo arabes hijab

¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? Turbante (iraki)

¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? se desarrolla el Algebra y trigonometria.

Imagen 1



Fuente: Portada de "El hombre que calculaba".

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registra lo que encontraste.

Solo realizo operacionés utilizando el numero 4, convino operaciones como; suma, resta y división para poder obtener los resultados

• Para resolver algunos problemas se utilizo la combinacion de numero y operaciones basicas para llegar al resultado

•

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

• No cambiaria por que la jerarquia de operaciónes nos menciona que se resuelven las operaciones como multi, divicion y posterior sumas y restas. De igual el orden de los factores no altera el producto

• Si, cambiamos el orden al comenzarlo agregar completo en la calculadora no coincidia. esto se debe a la jerarquia de operaciónes

• Nota: La jerarquia de operaciónes lleva un orden El orden es indiferente al poder encontrarnos con multiplicacion y una division, entre una resta y suma el orden queda par.

Cabe mencionar que si la operacion cambia en la calculadora sera necesario colocarle parentesis.

…ite es 1.
? Se pue-
…atros y es-

…cciones es exacta-
es más fácil. Basta

$\frac{4+4}{4}$

suma es doce; dividida
ente de 3. Así pues, el
con cuatro cuatros.
…rmar el número 4? –le

llo –explicó Beremiz–;
de varias maneras dife-
…resión equivalente a 4:

$\frac{4-4}{4}$

…undo término

-4

a es igual a cuatro. La
…ale a:

o sea 4.

…e el mercader sirio es-

cuchaba atento, sin perder palabra, la explicación de Beremiz, como si le interesaran mucho aquellas expresiones aritméticas formadas por *cuatro cuatros.*

Beremiz prosiguió:

–Quiero formar por ejemplo el número 5. No hay dificultad. Escribiremos:

$$\frac{\overset{16}{4 \times 4} + 4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Esta fracción expresa la división de 20 por 4. Y el cociente es 5. De este modo tenemos el 5 escrito con *cuatro cuatros.*

Pasemos ahora al 6, que presenta una forma muy elegante:

$$2+4=6 \qquad \frac{4+4}{4} + 4 = \frac{8}{4} + 4$$

Una pequeña alteración en este interesante conjunto lleva al resultado 7:

$$\frac{44}{4} - 4 = 11 - 4 = 7$$

Es muy sencilla la forma que puede adoptarse para el número 8 escrito con cuatro cuatros:

$$\underbrace{4+4}_{8} + \underbrace{4-4}_{0} = 8$$

El número 9 también es interesante:

$$\underbrace{4+4}_{8} + \frac{4}{4} = 8+1=9$$

Y ahora te mostraré una expresión muy bella, igual a 10, formada con cuatro cuatros:

$$\frac{44-4}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

En este momento, el jorobado, dueño de la tienda, que había seguido las explicaciones de Beremiz con un silencio respetuoso, observó:

–Por lo que acabo de oír, el señor es un eximio matemático. Si es capaz de explicarme cierto misterio que hace dos años encontré en una suma, le regalo el turbante azul que quería comprarme. Y el mercader narró la siguiente historia:

Presté una vez 100 dinares, 50 a un jeque de Medina y otros 50 a un judío de El Cairo.

El medinés pagó la deuda en cuatro partes, del siguiente modo: 20, 15, 10 y 5, es decir:

Pagó	20	y quedó	debiendo	30
"	15	"	"	15
"	10	"	"	5
"	5	"	"	0
Suma	50		Suma	50

Fíjese, amigo mío, que tanto la suma de las cuantías pagadas como la de los saldos deudores, son iguales a 50.

El judío cairota pagó igualmente los 50 dinares en cuatro plazos, del siguiente modo:

Pagó	20	y quedó	debiendo	30
"	18	"	"	12
"	3	"	"	9
"	9	"	"	0
Suma	50		Suma	51

...edio corcovado, por 4 dinares. La tienda ...ste mercader era además muy original, ...s todo allí —turbantes, cajas, puñales, pul-...ras, etc.— era vendido a 4 dinares. Había ...n letrero que decía con vistosas letras:

Los cuatro cuatros

Al ver a Beremiz interesado en comprar el turbante azul, le dije:

—Me parece una locura ese lujo. Tenemos poco dinero, y aún no pagamos la hostería.

—No es el turbante lo que me interesa, respondió Beremiz. Fíjate en que esta tienda se llama *"Los cuatro cuatros"*. Es una coincidencia digna de la mayor atención.

—¿Coincidencia? ¿Por qué?

—La inscripción de ese cartel recuerda una de las maravillas del Cálculo: empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera...

Y antes de que le interrogara sobre aquel enigma, Beremiz explicó mientras escribía en la arena fina que cubría el suelo:

—¿Quieres formar el cero? Pues nada más sencillo. Basta escribir:

$$44 - 44 = 0$$

Ahí tienes los cuatro cuatros formando una expresión que es igual a cero.

Pasemos al número 1. Esta es la forma más cómoda:

$$\frac{44}{44} = 1$$

Esta fracción representa el cociente de la división de 44 por 44. Y este cociente es 1.

¿Quieres ahora ver el número 2? Se pueden utilizar fácilmente los cuatro cuatros y escribir:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$$

La suma de las dos fracciones es exactamente igual a 2. El tres es más fácil. Basta escribir la expresión:

$$\frac{4 + 4 + 4}{4} = 3$$

Fíjate en que la suma es doce; dividida por cuatro da un cociente de 3. Así pues, el tres también se forma con cuatro cuatros.

—¿Y cómo vas a formar el número 4? —le pregunté—.

—Nada más sencillo —explicó Beremiz—; el 4 puede formarse de varias maneras diferentes. He ahí una expresión equivalente a 4:

$$4 + \frac{4 - 4}{4} = 4$$

Observa que el segundo término

$$\overset{0}{\frac{4 - 4}{4}} = 4$$

es nulo y que la suma es igual a cuatro. La expresión escrita equivale a:

$$4 + 0, \text{ o sea } 4.$$

Me di cuenta de que el mercader sirio es-

cuchaba atento, cación de Bere mucho aquellas das por *cuatro c* Beremiz pros —Quiero forr No hay dificultad

Esta fracción 4. Y el cociente el 5 escrito con Pasemos ah forma muy elega

Una pequeña conjunto lleva al

Es muy senci tarse para el n cuatros:

4

El número 9 t

Y ahora te

Miércoles D 24 M Febrero 02 A 2021

CAJA POPULAR EZEQUIEL MONTES
S.C. de A.P. de R.L. de C.V.

Matecuentos

Capitulo 7

"Los cuatro cuatros"

Con cuatro cuatros podemos formar cualquier operación

$$44 - 44 = 0 \qquad \frac{44}{44} = 1$$

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{16+16}{16} = \frac{32}{16} = 2 \qquad \frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$4 + \frac{4-4}{4} = 4$$

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = \frac{16+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

antes se llamaba Mesopotamia.

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? Asiático. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? Seco

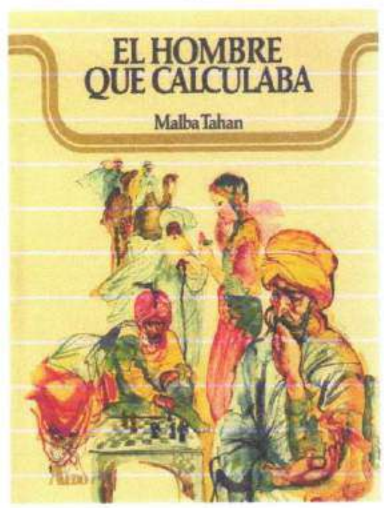
¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona? [illegible] Arabes

¿cómo es la vestimenta? Usan tunicas

¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? Turbantes

¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? Porque inicio aquí el algebra y gran parte de las matematicas del sistema numeracional que hoy en día usamos y conocemos.

Imagen 1



Fuente: Portada de “El hombre que calculaba”.

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registra lo que encontraste.

Para resolver las situaciones que se presento se utilizo una combinación de los 4 cuatros y una combinación de operaciones basicas para llegar a obtener el resultado de los numeros del 0 al 10.

$44-44=0$

$44 \overline{)44}$ o $\frac{44}{44}=1$

$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2$

$\frac{4+4+4}{4}=3$

$4+\frac{4-4}{4}=4$

$\frac{4\times4+4}{4}=5$

$\frac{4+4}{4}+4=6$

$\frac{44}{4}-4=7$

$4+4+4-4=8$

$4+4+\frac{4}{4}=9$

$\frac{44-4}{4}=10$

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

orden

No cambiaria, porque la jerarquia de operaciones nos menciona que se resuelven primero las operaciones como multiplicación, división, parentesis, y despues sumas y restar y de igual manera se recuerda que el orden de los factores no altera el producto.

Equipo 1
Alexis
Brenda
Andy Vega
José Osmar

Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

La siguiente historia se desarrolla en el país de Irak ¿sabes en qué continente se ubica dicho país? En el continente Asiatico. ¿Cómo te imaginas que es el clima de allá? Creo que es un clima seco y árido

¿Sabes cómo se les llama a las personas que viven en esa zona? No conozco como se les llama a las personas que viven en Irak

¿cómo es la vestimenta? Visten con túnicas y turbantes

¿sabes cómo se llama la prenda que lleva en la cabeza el hombre de la imagen 1? Turbantes

¿sabes cuál es la relación de los árabes con las matemáticas? Pues son conocidos por estudiar y aportar contenidos referentes a la Aritmetica y al Algebra.

Imagen 1

Fuente: Portada de "El hombre que calculaba".

Reto: Analizar cada uno de los procedimientos de Beremiz.

Número 0

$44 - 44 = 0$

No hay mucha complejidad para dar con el resultado deseado.

Número 1:

$\frac{44}{44} = 1$

Puede ser un poco confuso si no se conoce realmente el resultado de dividir un número por el mismo dando como resultado incorrecto el 0.

Número 2:

$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$

lo mismo puede suceder que en el caso anterior confundiendo el resultado de 1 por 0.

Número 3:

$\frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

En este caso no suele haber mucha dificultad para conocer el resultado deseado. Solo en el caso de conocer bien como resolver mediante fracciones

Número 4:

$4 + \frac{4-4}{4} = 4 + \frac{0}{4} = 4+0 = 4$

No hay dificultad para conocer el resultado deseado en el Número 4, 5, 6 y 7 Solo en el caso de un procedimiento erroneo en fracciones

Número 5:

$\frac{4 \times 4 + 4}{4} = \frac{16+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$

Número 6

$\frac{4+4}{4} + 4 = \frac{8}{4} + 4 = 2+4 = 6$

Número 7:

$\frac{44}{4} - 4 = 11 - 4 = 7$

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

4 $\quad 4+\frac{4-4}{4}=4 \longrightarrow \frac{(4-4)}{4}(+4)=4$

5 $\quad \frac{4\times4+4}{4}=5 \longrightarrow \frac{(4\times4)+4}{4}=5$

7 $\quad \frac{44}{4}-4=7 \longrightarrow \frac{44}{4}(-4)=7$

10 $\quad \frac{44-4}{4}=10 \longrightarrow \frac{(44-4)}{4}=10$

Beremiz utiliza la barra fraccionaria para separar cada una de las operaciones. Parece que establece que primero es necesario resolver las operaciones del numerador para después poder resolver la fracción y obtener un número entero.

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

En la operación que da como resultado 8 no hay ningún problema ya que las operaciones que ahí se muestran (suma y resta) son del mismo "nivel" de jerarquía para hacer la operación Sin embargo, en caso de que no se contenga el mismo "nivel" de jerarquía, el resultado si se modifica, por lo que es importante seguir el orden de la jerarquía de operaciones

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Se deben de resolver así ya que las multiplicaciones y las divisiones son más complicadas de resolver, y al obtener sus resultados, será más fácil aplicar la suma y resta. Y no, no siempre se aplica así, pues si nuestra operación tiene parentesis, será necesario, resolverla de los parentesis que se encuentren en el centro hacia afuera, incluso si se comienza con suma y resta.

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

Para resolverlo hacemo uso de la jerarquia de operaciones para poder resolverlos sin que afecte nuestro resultado

Tambien hacemo uso de los parentesis en la calculadora

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Si cambiamos el orden pero se sume haciendo uso de la jerarquia de operaciones el resultado sera el mismo. Sin embargo si lo escribimos de corrido en la calculadora el resultado cambia

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte? Si lo marca la jerarquia de operaciones

03/03/21

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

$\frac{32}{4}$

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

1- Numero 4: hizo una linea fraccionaria.

2- Numero 5 = Se baso en el Alrevez jerarquia Primero hacer la multiplicacion y luego suma, que es 20 y posteriormente Division Alrevez

con

3- Numero 7 = primero suma y despues resta.

4- Numero 10 = Se va a la resta y despues a la division.

Alrevez

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

No cambia simplemente es un orden de la jerarquia.
Solo ocurre el cambio por el parentesis en nuestra calculadora
Aparte al cambiar el orden de suma y de resta este no va a cambiar por que nos encontramos en el mismo nivel de jerarquia (≠)

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Pienso que primero son operaciones fuertes dificiles por asi decirlo, para al final solo somar el resultado.

En casos de orden puede que si aun que seria poco ilogico hacerlo de manera invertida.

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento 8

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

Al encontrar el 4 utilizo una línea fraccionaria

En el numero 5 tuvo que primero realizar las operaciones del numerador haciendo la multiplicación y luego la suma quedándole una fracción que por ende realiza la división para encontrar el número, pero debería de colocarse los corchetes y paréntesis ya que si Beremiz hubiera puesto los paréntesis en donde correspondían ya que esto es importante al momento de resolver debido a que si se resuelve en calculadora sale un resultado diferente.

Ejemplo del número 5

Beremiz coloca la operación así:

4 * 4 + 4 / 4= 17

((4*4) + 4) / 4= 5

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Si cambia el resultado de algunas y otras no como es el caso de el número 8.

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Yo creo por que primero debe comenzar con las sumas, restas y multiplicaciones dependiendo de el orden de la operación y de los corchetes y paréntesis.

Considero que hay casos que se invierten y otros que no tal es el caso del número 5 en donde se inicia con resolver la multiplicación y también otro ejemplo es en la operación para encontrar el número 4 debido a que se realiza primero la resta.

Alumno: López Nieto José de Jesús
Equipo: No. 1

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

Inconcientemente Beremiz sigue un orden al efectuar las operaciones combinadas. Considera primero hacer multiplicaciones o divisiones.
Beremiz pudo haber sabido de la importancia de los parentesis y orden que le dan a las operaciones, no obstante no los anotó.

$$4 = 4 + \frac{(4-4)}{4} = 4 + \frac{0}{4} = 4+0=4$$

$$5 = \frac{[(4\times4)+4]}{4} = \frac{[16+4]}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$7 = \left(\frac{44}{4}\right) - 4 = 11 - 4 = 7$$

$$8 = (4+4+4) - 4 = 12 - 4 = 8$$

$$10 = \frac{(44-4)}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

A mayor número de operaciones combinadas y un mal uso de la jerarquía de operaciones el resultado será erroneo.

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Al cambiar el orden el resultado cambia. No puede tener razon, no en todos los casos se obtiene el mismo resutado.

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Mi punto de vista es que el orden nunca va a cambiar y desconozco porqué se establecio en ese orden.

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

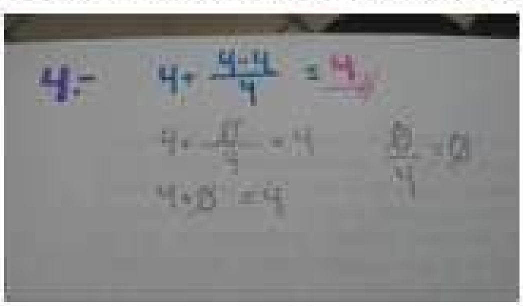
Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

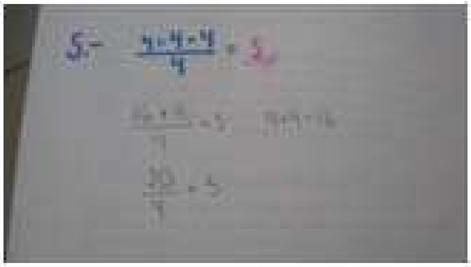
Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.



PASO 1:
Lo primero que se hace es la resta que se ve en la imagen que es 4 menos 4 lo cual da como resultado 0.

PASO 2:
Una vez realizada la resta se hace la división de 0 entre 4 lo cual da cero como resultado.

PASO 3:
Por último se puede realizar la suma de 4 más 0 aunque sea solo para confirmar el resultado que es 4.



PASO 1:
Lo primero que se realizó es la multiplicación de 4 por 4 y que da como resultado 16.

PASO 2:
Después de la multiplicación se realiza la suma de 16 más 4.

PASO 3:
Lo último por hacer es la división de 20 entre 4 y que nos da 5 de resultado.

PASO 1:
Se hace la división de 44 entre 4 que da como resultado 11.

PASO 2:
Una vez obtenido el resultado de la división se realiza la resta de 11 menos 4 para así obtener el 7 como resultado.

PASO 1:
Lo primero que se realiza para obtener como resultado el número 10 es la resta de 44 menos 4 que nos da 40.

PASO 2:
A el número 40 que nos dio como resultado de la resta antes realizada se le dividirá entre 4 para así obtener el número 10.

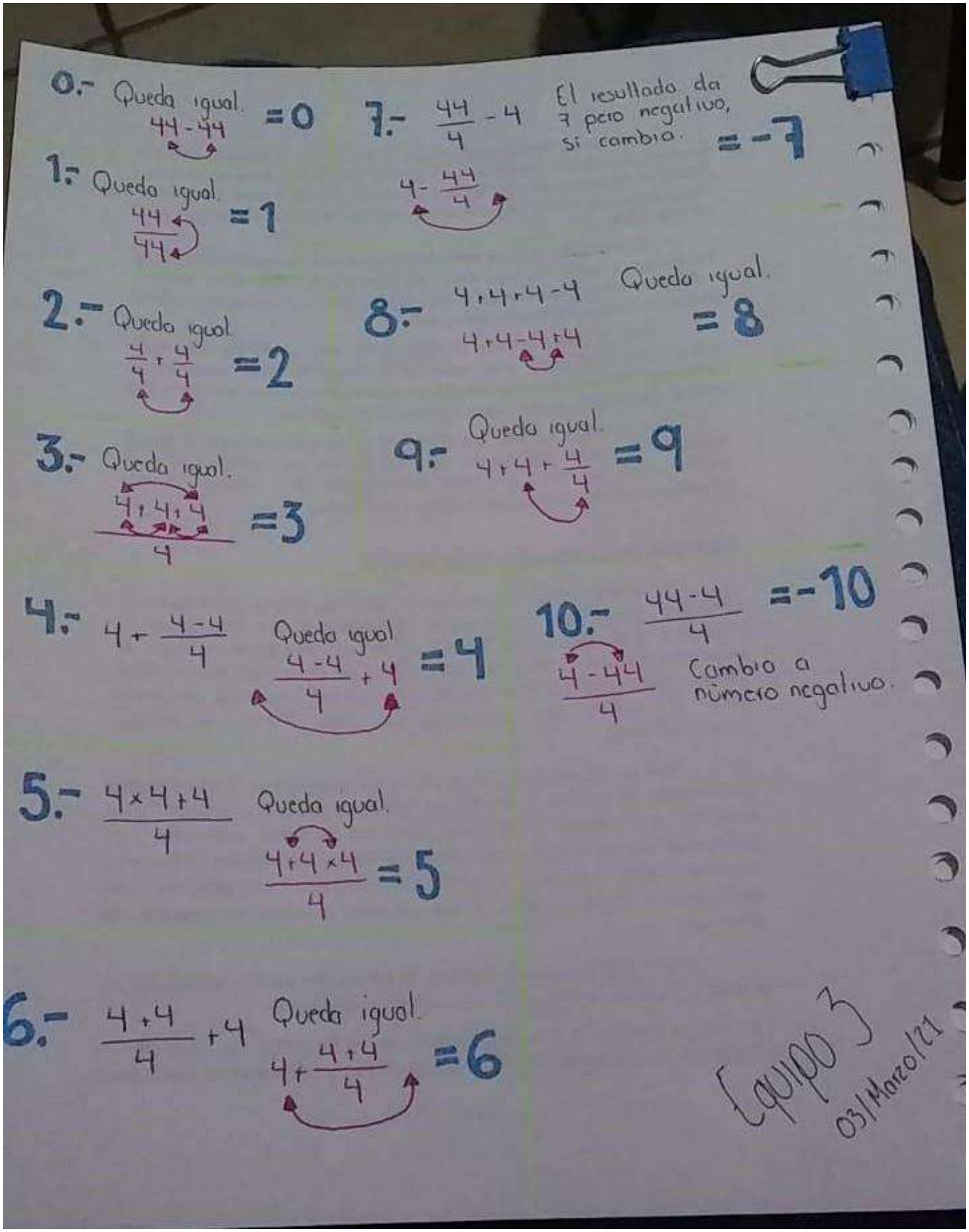
Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?


0.- Queda igual. 44-44 =0
1.- Queda igual. 44/44 =1
2.- Queda igual 4/4+4/4 =2
3.- Queda igual. (4+4+4)/4 =3
4.- 4+(4-4)/4 Queda igual (4-4)/4+4 =4
5.- (4×4+4)/4 Queda igual. (4+4×4)/4 =5
6.- (4+4)/4+4 Queda igual. 4+(4+4)/4 =6
7.- 44/4-4 El resultado da 7 pero negativo, si cambio. 4-44/4 =-7
8.- 4+4+4-4 Queda igual. 4+4-4+4 =8
9.- Queda igual. 4+4+4/4 =9
10.- (44-4)/4 =-10 (4-44)/4 Cambio a número negativo.
Equipo 3
03/Marzo/21

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

Para que se pueda dar el resultado se debe de seguir el siguiente orden:

Numero 4: primero resolviendo lo que se encuentra en la fracción $\frac{(4-4)}{4} = \frac{0}{4} = 0$ lo que nos da como resultado 0 y posteriormente lo sumamos por 4.

Numero 5: Nuevamente resolvemos lo que se encuentra en la fracción en el numerador $\boxed{4 \times 4 + 4}$ $4 \times 4 = 16 + 4 = 20$ y luego dividimos $\frac{20}{4} = 5$ de esta manera puede darnos el resultado

Numero 7: Para este procedimiento primero dividimos lo que se encuentra en la fracción $\frac{44}{4} = 11$ y luego lo restamos por -4 y como resultado nos da 7

Numero 10: Para que nos de como resultado debemos de resolver la operación que se encuentra en el numerador de la fracción $44 - 4 = 40$ y luego lo resolvemos por medio de división, la fracción $\frac{40}{4} = 10$

Como colocar en calculadora las operaciones de manera correcta

$4+\left(\frac{(4-4)}{0}\right)$	$\frac{[(4 \times 4)+4]}{4}$
$\left(\frac{44}{4}\right)-4$	$\frac{(44-4)}{4}$

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado?

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

1 $44+44=88$

2 $44\times44=1936$

3 $4\times4+4\times4=$
$16+16=32$

4 $4-\frac{4+4}{4}=4-\frac{8}{4}$
$4-2=2$

5 $\frac{4\div4-4}{4}=\frac{1-4}{4}$
$\frac{-3}{4}=-0.75$

6 $\frac{4\div4}{4}-4$
$\frac{?}{4}-4=0-4=-4$

7 $44\times4-4=$
$176-4=172$

8 $4-4-4+4=$
$-12+4=-8$

9 $4-4-4\times4$
$4-4-16$
$0-16=16$

10 $\frac{44+4}{4}=\frac{48}{4}=12$

En los casos cambio completamente el resultado

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Porque los resultados en estas operaciones peden influir en el cambio de resultados correctos y para nos pece dar un resultado grande o muy pequeño y despues sera modificado unicamente por operaciones cortas de resolver.

Equipo 1

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

$4+(4-4)\div 4 = 4$ ✓

$((4\times 4)+4)\div 4 = 5$ ✓

$\left(\frac{44}{4}\right) - 4 = 7$ ✓

$(44-4)\div 4 = 10$

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

4 $= 4+[(4-4)\div 4]$

$4+[(4-4)\div 4]$

$4+[0\div 4]$

$4+0=4$ ✓

5 $[((4\times 4)+4]\div 4 = 5$ ✓

$[[16+4]\div 4$

$20\div 4 = 5$ ✓

7 $\left(\frac{44\div}{4}\right) \rightarrow 4\overline{)44}$ 11 00

$11-4 = 7$ ✓

10 $(44-4)\div 4 =$

$40\div 4 = 10$ ✓

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado? Porque tanto las sumas como restas se encuentran en el mismo nivel dentro de la Jerarquía de Operaciones así que no afecta si realizamos una antes que la otra.

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Al realizar la operación teniendo en cuenta otro orden el resultado es el mismo, ya que no afecta el orden de los factores, mientras sean operaciones básicas que se encuentren en el mismo nivel.

$$\underbrace{-\cancel{4}+\cancel{4}}+4+4=8$$

$$0+4+4=8$$

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte? Siempre se lleva un orden, es el principio de la Jerarquía, además porque sino se sigue dicho orden los resultados pueden ser distintos al esperado.

Sesión 2: Conociendo jerarquías. EQUIPO 3

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

- Para el #4 lo que hizo fue restarle a 4 – 4 para obtener 0 que al dividir entre 4 nuevamente dio 0 y por ultimo le sumo 4, esto le dio como resultado 4 enteros. Es decir, hizo uso de resta y fracción para obtener un numero nulo y obtener posteriormente el que el buscaba.
- Para el #5 lo que hizo fue resolver primeramente lo del numerador, es decir, (4x4)=20 + 5= 25 y ya que se tiene el número entero ahora si resolvió la fracción 25/4 por el que llego a 5.
- Para el #7 resolvió la fracción 44/4 ya que no se debe realizar otra operación en ella porque tanto en el numerador como en el denominador tiene # entero, se obtiene 11 y se le restan 4 que le da como resultado 7.
- Para el #10 nuevamente presenta una fracción sin embargo se resuelve primero la operación del numerador para obtener un numero entero, es decir, 44-4 que al restarlo nos da 40 y ahora se procede a resolver la división de 40/4 que como resultado se obtiene 10.

Si se tiene una fracción que presenta en el numerador una operación y no un numero entero lo primero que se debe hacer es resolver dicha operación y después proceder a dividir el numerador entre el denominador y obtener el resultado.

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado? Por los signos que se tienen y porque los números que se están manejando en este caso son los mismos, 4 entonces al tener un positivo y un negativo igual, estos se cancelan.

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

- 4+4+4-4= 8 ya que 4+4+4=12-4=8
- 4-4+4+4= 8 ya que 4-4=0+4+4=8
- 4+4-4+4= 8 ya que 4+4=8-4=4+4=8
- -4+4+4+4=8 ya que -4+4=0+4+4=8
- Esto quiere decir que sin importar el lugar siempre será como si se eliminara un 4 positivo con el 4 negativo, y por lo tanto se obtendrá 8.

Si creo que el mercader tenga razón ya que sin importar en qué orden se coloquen los números con su respectivo signo, siempre se llegara al mismo resultado.

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Va a depender de la manera en que estén expresados ya que si dentro de una división o fracción se tiene una operación que contenga suma y/o resta esta se debe realizar primero para encontrar un numero entero que es el que posteriormente se va a utilizar o si se tiene una multiplicación de dos números que se deben obtener de una suma o resta, esta de igual manera debe resolverse primero y después proceder a multiplicar. Va a depender de el orden de las operaciones o como se expresen en la operación.

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

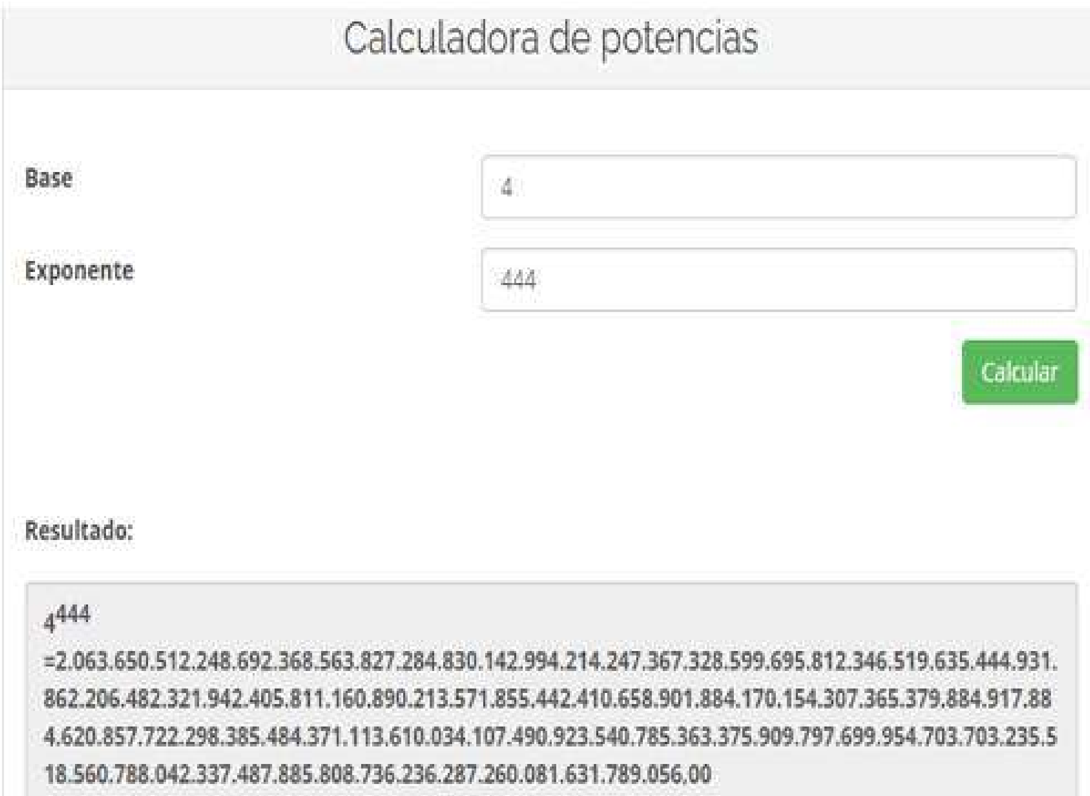
Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

4^{444}

Cuatro elevado a la potencia 444, nuestro resultado tiene más de 270 digitos, utili una aplicación para saberlo

Calculadora de potencias

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/potencias/



Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

$(4 \cdot 4) + (4 \cdot 4)$

Si cambiamos el orden con lo que lo resolvemos el resultado no se ve afectado

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Utilizando [illegible] y combinaciones de numeros aunque si cambiamos el resultado el resultado si se ve afectado

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$4+4+4+4=\underline{16}$, $4\times4+4\times4=\underline{80}$,

$\frac{4}{4}\times4+4\times4=\underline{20}$, $4\times4\times4\times4=\underline{256}$,

$4^4+4^4=\underline{65536}$, $4\times4=16^4=65536\times4=\underline{262144}$

$4^2=16\times4=64^4=\underline{16777216}$

$4^{444}=$ Cantidad grande

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

$44 * 4 + 4 = 180$

$4 + 44 \times 4 = 180$

$\underbrace{44+4}_{1} \underbrace{\times 4}_{2} = \underline{192}$

$4 * 4 * 4 / 4 = 16$

$4 / 4 \times 4 \times 4 = 16$

$4 \times 4 / 4 \times 4 = 16$

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Con la operacion de potencia el cuatro lo debemos elevar a 444 y de aqui optendremos un resultado grande con 264

En el casi tercer lugar

Si hay jerarquia en toda la operacion que realizamos con los companeros.

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$(4 \times 4 \times 4)^4 = 16,772,216$

$(44 \times 4)^4 = 959,512,576$

$(4 \times 4)^{44} = 9.57809713 \times 10^{52}$

$(4)^{444} =$ Sintax Error

$(44)^{44} = 2.0500773824 \times 10^{72}$

$(444)^4 = 3.88626025 \times 10^{10}$.

$(4)^4(4)^4 = 65,536$

Me crea una confesión de que el segundo $(44 \times 4)^4$ es el más grande ya que se expresa en millones, sin embargo el que se le eleva al 44 el de $(4 \times 4)^{44}$ es más grande pero es núme. decimal y le siguen más numeros infinitos.

Reto. $\sqrt{4} \times (44)^4 = 7,496,192$.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

Si, por ejemplo en el de $(44\times4)^4$, si primero en la calculadora ponemos los exponentes o más bien se eleva primero y luego pones la operación, es decir, anotalo de esta manera $\boxed{\wedge 4(44\times4) \quad 0}$ le das igual en la calculadora automaticamente te marca Sintax Error, esto se debe a que primero debes resolver los parentesis por el orden de jerarquización para así poder elevar el resultado a esa potencia, de lo contrario, no se sabe que numero es.

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Yo digo que $(44\times4)^4$ o $(4\times4)^{44}$.

Y la colocaría en el 2 nivel donde hay o resuelven potencias y parentesis. y en el nivel 1, en donde se resuelven ya los parentesis.

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

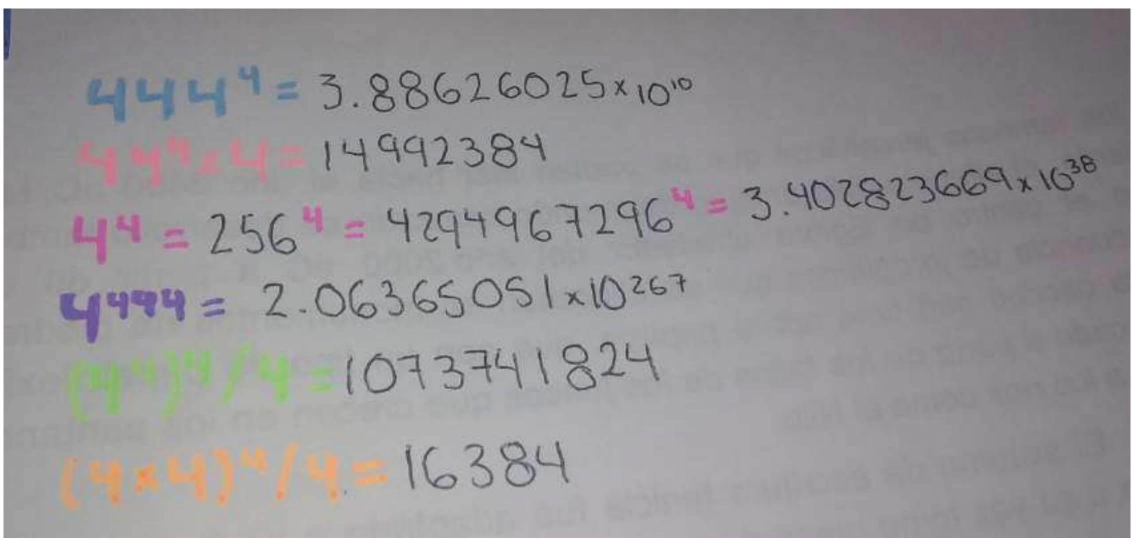
Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

> -Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes
>
> -Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

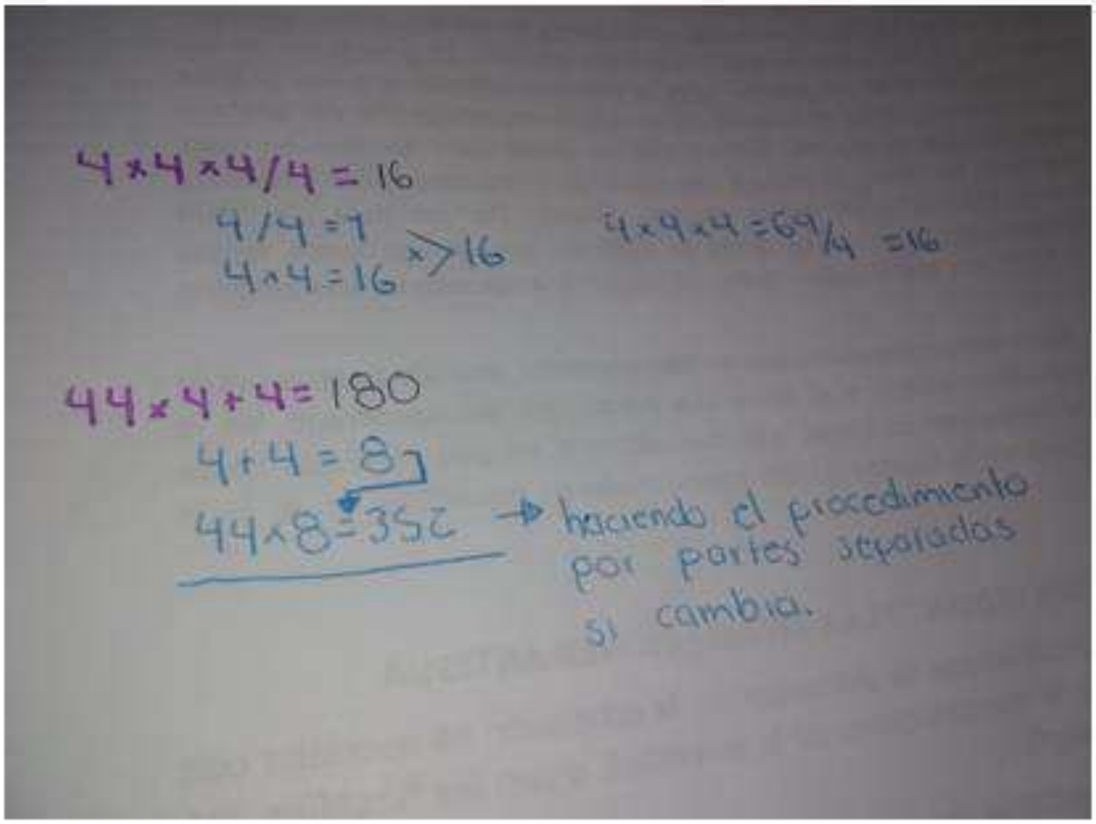
Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.



Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.



Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

> -Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes
>
> -Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$4^{444}=$
2.063.650.512.248.692.368.563.827.284.830.142.994.214.247.367.328.599.695.812.346.519.635.444.931.862.206.482.321.942.405.811.160.890.213.571.855.442.410.658.901.884.170.154.307.365.379.884.917.884.620.857.722.298.385.484.371.113.610.034.107.490.923.540.785.363.375.909.797.699.954.703.703.235.518.560.788.042.337.487.885.808.736.236.287.260.081.631.789.056,00

https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/potencias/

Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

Si cambian debido a que se están utilizando diferente las operaciones aritméticas tal y como se ve en el ejemplo:

44*4+4= 180

44+4*4= 192

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Con potencia elevando el 4 a la potencia 444. Pues sería la primera operación ya que es la única.

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$444 \times 4 = 1776$

$44 \times 44 = 1936$

$444^4 = 3.88626025e10$

$44^{44} = 2.05077382e72$

$4^{444} = 2.06365051e267$

Aunque posee un punto, es un número natural, ya que la potencia que tiene ayuda recorrerlo y que contenga 276 dígitos
Por lo que es el numero más grande que se puede encontrar

Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

A veces se altera, pero a veces no.

1 $\underbrace{\underbrace{44\cdot4}_{176}+4}_{180}=180$

2 $\underbrace{44\cdot\underbrace{4+4}_{8}}_{352}=352$

3 $4\cdot4\cdot4\,/\,4=16$

16

4

16

4 $4\cdot4\cdot4\,/\,4=16$

1

4

16

5 $4\cdot4\cdot4\,/\,4=16$

16

64

16

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

★ Se puede llegar al número más grande con la operación de potencias colocando el número mas pequeño (4) como base y el número más grande (444) como exponente

★ Como la primer operación, ya que siempre se comienza por potencias y raíces.

★ Yo opino que no.

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

Números natural = Enteros

$$[(44^{4})] \times 4 = 14,992.38$$

$$[(4^{4})\,4^{4}] \div 4 = 1,073,741,824$$

Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

$4\cdot 4\cdot\left(\frac{4}{4}\right)$

$4\cdot 4\cdot 1 = 16$

$16\cdot \frac{4}{4} = 16 \div 1 = 16$

$4\cdot 4\cdot 4 = \frac{64}{4} = 16$

$44(4)+4$

$44\cdot 4 = 176 + 4 = 180$

$44(4+4)$

$44\cdot 8 = 352$

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Con potencias.

✓ Relación de las Operaciones,

$(\times)(\div)$ si ✓ Los niveles de Jerarquia

$(\times)(+)$ NO

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$44 \times 44 = \underbrace{1936}$

$444 \times 4 = \underbrace{1776}$

$(4+4)^{4})^{4} =$

$((8)^{4})^{4} =$

$(32)^{4} = \underbrace{128}$

$(444)^{4} = 3e\,886260.2496^{10}$

$(44)^{44} = 2.0507738272$

$(4)^{444} = \underbrace{2.06365051^{267}}_{276 \text{ digits}}$

Realizamos primeramente operaciones básicas pero encontrábamos números pequeños entonces utilizamos las potencias pero llegamos a la conclusión de tomar como operación para encontrar el número más grande con $(4)^{444}$.

Reto.

Retomo algún procedimiento hecho x estedo y cambio el orden de las operaciones y observa lo que ocurre ¿se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones

$4+4\times\underbrace{4\times4}$ | $4-\underbrace{4\div4}\div4$ | $4+\underbrace{4\div4}+4$
$4+4\times16$ | $4-\underbrace{4\div1}$ | $4+1+4$
$4+64$ | $4-4$ | 9
68 | 0 |

$4-\underbrace{4\div4}+4$ | $\underbrace{4\times4}+4-4$ | $\underbrace{4\div4}+4+4$
$4-1+4$ | $16+4-4$ | $1+4+4$
$8-1$ | $20-4$ | 9
7 | 16 |

En algunos casos suele repetirse el resultado y en otros no sucede

Para reflexionar

¿Con cual operación pueden llegar al numero mas grande con 4 cuatros?
Considero que con potenciar el numero 4 por da como resultado el numero mas grande posible ya que se multiplica este numero 4^4^4 veces por si mismo logrando asi un numero extenso

¿En que lugar colocarias a esa operación en la jerarquia de operaciones?
En la primera ya que al resolver esta operación puede apartar el resultado de manera que no se altera o modifique

¿Hay o no jerarquia en las operaciones que tienen la misma jerarquia?
Considero que si existe un orden o una jerarquia al realizar cualquier operación

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

> -Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes
>
> -Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

44x44= 1936

444x4= 1776

(4x4x4)^4= 16,777,216

4^{444}= 2.0636505122E267 278 dígitos

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

Con una potencia 4^{444}= 2.0636505122E267. Yo la colocaría en primer lugar ya que en la jerarquía de operaciones si tuviéramos potencia, multiplicación, división, suma y resta, esta iría primero.

La mayor parte del tiempo se debe respetar la jerarquía si es que la hay para obtener el resultado deseado.

Sesión 2: Conociendo jerarquías.

Equipo 1

Objetivo del alumno: Que los alumnos encuentren la forma en que Beremiz realizó para obtener los números 4, 5, 7, 8 y 10.

Volviendo al cuento

Una vez que Beremiz expuso el cómo encontró los números del 0 al 10 usando 4 cuatros; algunos de los mercaderes que estaban cerca le cuestionaron sobre algunas inquietudes que tenían sobre cómo había obtenido algunos números, ya que ellos todavía no lograban entender lo que Beremiz había hecho.

Uno de los mercaderes le preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver cuando hay una línea fraccionaria y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hice para obtener los números 4, 5, 7 y 10? –preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo?

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 4, el 5, el 7 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

4 En el numero 4, primero lo que hice fue resolver las operaciones del numerador (4-4), el resultado es 0, nos queda (0/4)+4, se resuelve la división del numerador por el denominador y nos da como resultado 0 y a ese cero se le suma 4.

5 se parte de la multiplicación que está en el numerador (4×4)=20 +4= 24 y se divide por el denominador y el resultado es 5

7 se tiene que resolver primero la división **44/4** da 11 y a eso se le resta 4

10 resolvemos la parte del numerador 44-4 =40, entre 4 da como resultado 10

Retomando el cuento

Después de que Beremiz explicara nuevamente el cómo le había hecho para obtener los números anteriores, surgió otra pregunta:

- Admirable Beremiz, tengo una duda, ¿por qué en el número 8 si cambiamos el orden en cómo se realizan las sumas y las restas, nos sigue dando el mismo resultado? Principalmente por las operaciones que se tienen, al recordar la jerarquía estas, están en el mismo nivel, así que no importa el orden.

Reto.

Cambia el orden en que se realizaron las operaciones y observa qué es lo que ocurre, ¿crees que ese mercader tenga razón?

Para reflexionar

¿por qué creen que se tengan que resolver primero las multiplicaciones y divisiones y después las sumas y las restas? ¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

Sesión 3: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo al cuento:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, es decir, Beremiz, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, "con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

-Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes

-Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para comprobar tus resultados.

$(4)^4 \cdot (4)^4 = 65,536$

$(44)^4 \cdot (4) = 14,992,384$

$4! = 24$

$444^4 = 3.88 \times 10^{10}$

↓

No se incluye por tener decimales.

$\boxed{4^{444} = 276 \text{ dígitos}}$

Número más grande utilizando 4 cuatros

(Un número natural es aquel que sirve para contar objetos)

Reto.

Retoma algún procedimiento hecho por ustedes y cambia el orden de las operaciones y observa lo que ocurre. ¿Se altera el resultado? Registra tus procedimientos y reflexiones.

$44 \cdot 4 + 4 = 180$

$\underbrace{44 \cdot 4}_{\times} = 176$

$\underbrace{176 + 4}_{+} = 180$

$44 \cdot 4 + 4 = 352$

$\underbrace{4 + 4} = 8$

$\underbrace{44 \times 8} = 352$

$4 \cdot 4 \cdot 4 / 4 = 16$

16

4

16

$4 \cdot 4 \cdot 4 / 4 = 16$

1

4

16

$4 \cdot 4 \cdot 4 / 4 = 16$

16

64

16

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?, ¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?, ¿hay o no jerarquía en las operaciones que tienen la misma jerarquía?

- 4^{444} = 276 dígitos → Número más grande
- En exponentes y raíces
- No, pero se ha acordado comenzar de izquierda a derecha.

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

x = Mes

y = Edad

$x \cdot 2 = R_1$

$R_1 + 5 = R_2$

$R_2 \cdot 50 = R_3$

$R_3 + y = R_4$

$R_4 - 250 = R_F$

Operación de una sola expresión:

$((x \cdot 2+5)(50)+y-250) = xy$

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

- ☆ Para acomodarlas, fue necesario utilizar paréntesis y utilizar unas incógnitas para representar los edades y los meses.
- ☆ Parentesis y los signos de operaciones básicas
- ☆ Al colocar los parentesis, siguió el orden que se iba indicando, mostrando los resultados y continuando con la siguiente operación

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

X= mes

Y= edad

R1=resultado 1

R2=

X*2+50+y=r2

R2-250

((x*2+5)(50)+y-250)=xy

((10*2+5)(50)+21-250)=1021

Al utilizar la calculadora se obtiene el resultado deseado, es decir primeramente el mes y posteriormente la edad. En mi caso obtuve 1021.

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

Se utilizaron expresiones algebraicas, y se tuvo que ir descifrando que operaciones eran las correctas para realizar y que el resultado obtenido fuera el que nosotros deseábamos, se intentó hacer primeramente la operación por partes y posteriormente se juntó para que esto fuera más factible.

Los paréntesis, con el uso de paréntesis se pudo formular un solo algoritmo o expresión, así como el uso de literales que corresponderían a la edad y el mes, y lo más importante el uso de operaciones básicas suma, resta y multiplicación que nos ayudaron a cumplir el objetivo.

Tal cual como se presentó, es decir, tomando como ejemplo mis datos, **((10*2+5)(50)+21-250)=1021** (donde el 10 es el mes y el 21 mi edad), considero que primeramente resolvió el 10*2+5 para obtener 25, posteriormente se multiplico por 50 es decir, 25(50)=1250, a este resultado se sumaron los 21 que sería igual a 1271 y por último se restaron los 250, 1271-250 que nos da como resultado final 1021. Los primeros dos dígitos corresponden al mes y los 2 últimos a la edad.

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

7
× 4
28
× 9

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

11
× 2
22
+ 5
27
× 50
1350
+ 21
1371
− 250
$\underbrace{11}_{\text{mes}}\underbrace{21}_{\text{edad}}$

11
× 5
55
+ 6
61
× 4
244
+ 9
253
× 5
1265
+ 30
1295
− 165
11/30

− 1130
9
11/21

11
× 5
55
+ 6
61
× 4
244
+ 9
253
× 5
1265
+ 22
1277
− 0055
12/22

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

lo primero que hice fue asociar los numeros con el primer problema. pero en si me salio la revoltura y el ~~ea~~ mes y el dia.

Los simbolos que me ayudaron fue la resta, la suma y el numero de mi mes.

El orden siguio la calculadora, fue empezar por la suma y posteriormente la resta, asi como sigue con la multiplicacion.

1 9 MAR. 2021

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

m= x

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

mes= x
edad= y

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

((((3)(2)+5(50)+19-250)

Marzo
3x2=6+5=11

11 x 50 = 550 + 19 = 569 − 250 = 319

③ ((x*2+5)(50)+y-250)=319

① (((x*2)+5)(50)+y-250)

11x2=22+5=27

27 x 50 = 1350 − 250 = 1100

Hubo 3 algoritmos diferentes.

Fue complejo ya que por el acomodo de parentesis en ocasiones salia otro resultado.

11x2=22+5=27 x50= 1350 + 21 = 1371 − 250 = 1121

② [(x)(2)]+5(50)+y - 250
(R)(50)+19-250 = 319
27(50)+21 -250=

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

Al principio fue complejo el acomodar más que nada
~~[illegible]~~ signos de agrupación.
Los acomodamos en el orden que iba dicho enunciado
solo que al momento de poner variables como "x" se puede
confundir con el signo de multiplicación entonces una de dos
se cambia la variable o se sustituye por los signos de
agrupación que es el parentesis que multiplica)
Los símbolos que me ayudaron fueron los de agrupacion
que fueron paréntesis, de suma, resta.
La calculadora lo que hizo 1ro. fue hacer las opera
cion por jerarquía de operaciones entre parentesis
desde las más complejas a las más fáciles
y las resolvio aunque en la calcu se pone
todo ~~el~~ algoritmo.

José de Jesús

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

Primera opción:

x = mes y = edad R_1 y R_2

$(x)2 + 5 = R_1$

$(R_1)(50) + y = R_2$

$(R_2) - 250 =$

$(11)\,2 + 5 = 27$

$(27)(50) + 19 = 1{,}369$

$(1{,}369) - 250 =$ ~~1119~~

mes ← 1,1'19 → Años (edad)

Opción dos:

$[(x \cdot 2 + 5)(50) + y - 250] =$

$[(11) \cdot 2 + 5 (50) + (19 - 250] = 1{,}119$ ✓

José de Jesús

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

- El resultado final se obtuvo a base de prueba y error convinando las expresiones algebraicas planteadas.
- Paréntesis, multiplicación, suma y resta.
- Solo acepto paréntesis.

$$((x \cdot 2+5)(50)+y-250)=1{,}119$$

mes edad ✓

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

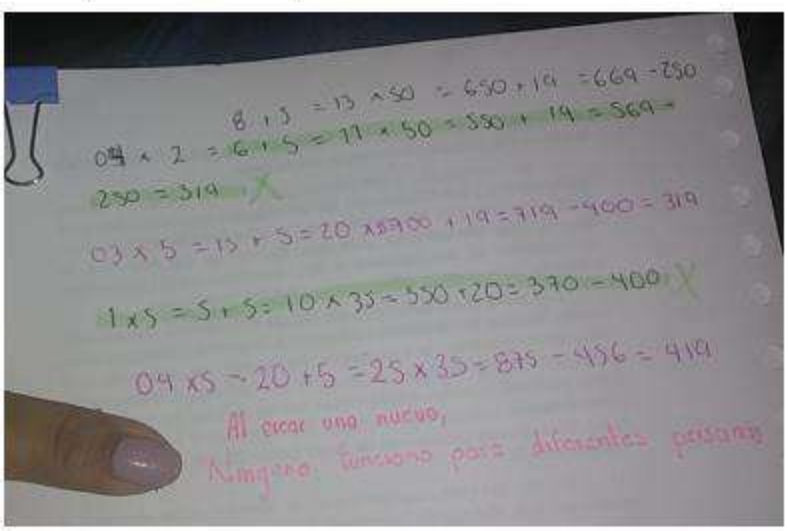
Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplícalo por 2 y suman 5 al resultado; después, multiplícalo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.



Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

La manera que si funciona es agregando parentesis en las operaciones dadas por Beremiz.

La calculadora sigue la jerarquia de operaciones

Eq. 2

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero. 17-Mar-2021

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

$$(((x \cdot 2)+5)(50)+y-250)=$$

Ejemplo: $(((11 \times 2)+5)(50)+21-250)=\underline{1121}$

Yo nací en Noviembre mes 11 y tengo 21 años

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

Lo que hicimos fue utilizar "signos de agrupación" para crear el algoritmo utilizando la "Jerarquía de Operaciones" Las operaciones fueron las mismas que usó Beremiz en el cuento.
Lo que hicimos en la calculadora fue poner de igual manera los signos de agrupación en una cálculadora en línea "científica", usando la "Jerarquía de Operaciones".

17-03-2021

¿Cómo saber si un número es más grande que otro?

Notación Científica número más grande

Números Natural.

$4^{(444)}$ El número que se esta elevando es el "más grande" El que pudiera ayudar a encontrar el número más grande.

Lista.

$$\left(\left[\left(x(2)\right)+5\right](50)\right)+y-250=$$

$$\{[x\cdot 2]+5\ (50)\}+y-250=$$

"PRINCIPIOS DE LA SUMA Y PRODUCTO".

"Misma Jerarquía".

Nove ×2 R +5 R ×50 R + Edad R (+250) 3 4

(xx) (##)

Ed # mes nac

¿Equipos?

$3\times 2=6+5=11\times 50=550$

$550+19=568=(3)(9)$

Mes Día

$$((x \cdot 2) + \cdot 50) + y - 250 =$$

$$[(11 \cdot 2) + \cancel{5}(5\,0)] + y - 250 =$$

22

27

"Ejemplo Carol"

$$(((3 \cdot 2) + 5)\ 50) + 19 - 250) = 319$$

4 21

Algoritmo para calcular la edad y mes

$$(((3 \cdot 2) + 5)(50) + 19 - 250) = 319$$

$$(((11 \times 2) + 5)\ (50) + 21 - 250) = 1121$$

x

Sesión 4: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros.

Volviendo al cuento:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona. Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir esa operación que satisfacía a la adivinanza.

$((2x+5)(50))+y-250=$

ecuación basada en el algoritmo de Beremiz.

$(M+3)(50)+E-100$ ← ecuación basada en algoritmo para saber mi edad

$(1+3)(50)+20-100=$

$(4)(50)+20-100=$

$200+20-100=$

$220-100=\underline{120}$

Reto.

Construye un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu procedimiento.

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?, ¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?; ¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

1. Se realizó una sola expresión con ayuda del uso de los paréntesis para acomodar las diferentes operaciones.
2. Los paréntesis y operaciones básicas; suma, resta, multiplicación
3. El orden que se llevó fue de izquierda a derecha conforme se encontraban las operaciones en la ecuación y se logró por medio de los paréntesis o paso por paso

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

$$\frac{(((x+5)(2))-4)}{2} - x = 3$$

Con la calculadora si da el resultado de 3 siempre

$$\frac{((x+5)(2)-4)}{2} - x = 3$$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

* Descubrí que muchas veces puede o no cambiarse el orden de la jerarquía y se afecta el resultado mientras las operaciones sean de diferente "nivel"

* Puede aportar a mi formación docente.

* Que llevan un orden y que al tener parentesis se resuelve del parentesis más interior hacia el exterior.

* Que los números naturales son positivos, reales y enteros.

Sesión 5: Igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

$$((x+5)(2)-4)/(2)-x$$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

1) Cada una de las sesiones se fue enfocando a la jerarquía de operaciones por lo cual ese fue el aprendizaje clave que aprendí
2) Todo conocimiento nuevo es útil sin embargo la jerarquía de operaciones es un herramienta que puede ser útil en distintos aspectos de la vida.
3) Primero que nada, conozco que es y cómo se constituye además de las características de estas.
4) De las propiedades de los números comprendí mas que nada la propiedad distributiva la cual tenía noción de ella, pero no la tenía bien conceptualizada.

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

3

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

Numero pensé:3

$(x+5)(R \times 2)(R-4)(R/2)($

3 $\quad \frac{(((x+5)(2))-4)}{2} - x = 3$

$\frac{((x+5)(2)-4))}{2} - x = 3$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

Durante la sesion descubri mi desarrollo de ir ejecutando problemas, tener logica

Para en el futuro saber aplicarlo a los niños (tomar estrategias)

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

Forma manual:

x = número a pensar $x=5$

$\boxed{[((x+5)2-4)/2-x]=3}$

$[((5+5)2-4)/2-5]=3$

$[((10)2-4)/2-5]=3$

$[((20)-4)/2-5]=3$

$[(16)/2-5]=3$

$[(16)/2-5]=3$

$[8-5]=3$

$[3]=3$ ✓

$[((3+5)2-4)/2-3]=3$

$[((8)2-4)/2-3]=3$

$[(16-4)/2-3]=3$

$[(12)/2-3]=3$

$[6-3]=3$

$[3]=3$ ✓

calculadora:

$\boxed{(((x+5)(2)-4)\div(2)-x)=3}$

$(((5+5)(2)-4)\div(2)-5)=3$

$(((10)(2)-4)\div(2)-5)=3$

$((20-4)\div(2)-5)=3$

$((16\div 2)-5)=3$

$(8-5)=3$ ✓

$3=3$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

Pregunta 1:

Descubrí que enseñar matemáticos apoyandonos de cuentos, es una forma más atractiva y que podría ayudar con los alumnos de primer grado de secundaria.

Pregunta 2:

El compromiso de un docente es estar en constante actualización, tomando, cursos, talleé, etc., Por lo tanto, lo que aprendí en estas sesiones se incluyen a mi bagaje de conocimientos que algún día aplicare en mi práctica profesional.

Pregunta 3:

- Las lineas fraccionarias cumplen la función de un paréntesis.
- La jeraqcía de operaciones es un convenio matemático
- Conciderabq que al tener operaciones de combinadas de un mismo nivel era necesario iniciar de izquierda a derecha. Este procedimiento no es matemático.

Pregunta 4: Un número natural siempre debe ser entero.

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

\# numero pensado. $\quad$ x = # numero pensado

$(((x+5)2)-4)/2-x=3$ $\quad$ # que pense

Número pensado : 11+5=16 x 2 = 32 - 4 = 28 ÷ 2 = 14 - 11 = 3.

$$\boxed{[(x+5)*2-4]/2-x=3}$$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

Descubrí que las matematicas pueden ser muy divertidas

Pues de lo que me sirvio todo esto, ya que como maestra de primaria me servira porque se puede implementar o adecuar a los niños para enseñar y adecuarlo a su nivel o grado de dificultad.

La jerarquia de operaciones es el orden en el que se va resolviendo un conjunto de operaciones (algoritmo)

Bueno manejar los números naturales es más sencillo pero complicado cuando hay numeros decimales, fraccionarios ya que cambian el orden a su posición

Eq.4

24/03/2021

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

$\{[(17+5)\,2]-4\}\div 2-17=3$ ✓ $\quad \dfrac{((x+5)(2)-4)}{2}-x=3$

$(((x+5)\,2)-4)\div 2-x=3$ ✓

$\{[(17+5)2]-4\}\div 2-17=3$ ✓

Resolución

$\{[22 * 2] - \} \div 2 - 17 = 3$

$\{[22 \times 2] - 4\}$

$44 - 4$

$40 \div 2$

$20 - 17 = 3$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales? Descubrí que la Jerarquía de operaciones es más que solo un orden al momento de hacer o resolver operaciones.

* Institucionalización *

Que todo el proceso tiene un por qué, que el llevar a cabo la jerarquía de operaciones implica en que resultado deseas obtener o que algoritmo quieres obtener y lograr un objetivo, en este caso que nos dieran como resultado la edad de un compañero o un número en específico siempre. Aprendí que tiene más utilidad y e importaba de lo que pensaba al inicio del curso.

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

$(2)+5\times(2)-4\div 2-(2)=3$

$7\times 2=14-4=10\div 2=5-2=3$

ALGORITMO

$\frac{((x+5)(2)-4)}{2}-x$ ó $\frac{(x+5(2)-4}{2}-x$

Si colocamos de esta manera en la calculadora nos dava 3

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

La importancia que tiene el uso de parentesis, la jerarquia de operaciones y el uso de ventanas en la didactica de las matematicas.

Me servira para aprender mas sobre los contenidos matemáticos y para mi practica docente.

Ahora se verdaderamente lo que es la jerarquia de operaciones y las propiedades de los números naturales.

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, ¿De qué me va a servir lo que aprendí? ¿Ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

- Que realmente el uso de los paréntesis es de gran importancia pero se debe saber identificar donde se van a colocar cada uno de ellos ya que si no esto puede afectar el resultado al que queremos llegar. Así como también que la resolución por jerarquía de operaciones no siempre se va a seguir, ya que los paréntesis van a afectar dicha jerarquía. Que con un simple número y operaciones matemáticas puedes formar una serie de números que podría ser infinita si sabes ordenarlos de la manera correcta.
- Esto que aprendí me va a servir como método de enseñanza didáctica para mis futuros alumnos, creo que el uso de los cuentos puede ser una gran herramienta para que ellos comprendan mucho mejor un tema que a simple vista puede parecer complicado.
- Sé de la jerarquía de operaciones que primero se resuelve lo que hay dentro de paréntesis, corchetes y llaves para poder eliminarlos, después se resuelven potencias y raíces, después multiplicaciones y divisiones y por último sumas y restas. También que esta jerarquía podemos ajustarla a nuestras necesidades según lo que queramos obtener, colocando los paréntesis corchetes y llaves necesarias en los lugares correctos y por último que la línea de fracción además de para indicar división, funciona como un paréntesis.
- Que son tomados en cuenta como números positivos, enteros y reales.

Sesión 5: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

Decidimos agregar paréntesis para poder encontrar el numero 3 como resultado.

(((x+5)2)-4) /2-x=3

Comprobé con este número para verificar si obtenía como resultado el numero 3.

(((17+5)2)-4) (/2)-x=3

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, de qué me va a servir lo que prendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

Durante las sesiones descubrí la importancia de la jerarquía de operaciones en operaciones ya que esta nos permite obtener un orden al momento de resolver y obtener el resultado correcto.

Esta actividad me va a servir como estudiante y como futuro docente. Aprendí este tema a más profundidad y ahora tengo ideas de cómo enseñar este tema en las aulas.

Aprendí que la jerarquía de operaciones es una regla que estipula el orden en que deben ser realizadas las operaciones en una expresión numérica con operaciones múltiples (sumas, restas, divisiones, multiplicaciones, potencias, raíces).

Además, comprendí la importancia de los paréntesis y corchetes ya que al tener estos una operación aritmética se respeta el orden y se obtiene el resultado correcto. Primero se deben ejecutar las operaciones agrupadas en paréntesis, luego las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones en orden en el que aparecen, y finalmente las sumas y restas en orden en el que están en la operación numérica.

Sesión 5: Igualando a 3.

Objetivo del alumno: Construir un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en un solo algoritmo, sin encontrar resultados parciales.

Volviendo al cuento:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales.

Registra tus procedimientos.

Un número (x) $+5 = ?\cdot 2 = ?-4 = ?/2 = ? - x = 3$

$3+5=8\cdot 2=16-4=12/2=6-3=3$

$5+5=10\cdot 2=20-4=16/2=8-5=3$

$\boxed{\frac{(((x+5)(2))-4)}{2} - x = 3 \quad \frac{((x+5)(2)-4)}{2} - x = 3}$

$\frac{(((3+5)(2))-4)}{2} - 3 = 3 \qquad \frac{((3+5)(2)-4)}{2} - 3 = 3$

$\frac{(((\text{[illegible]}+5)(2))-4)}{2} - \text{[illegible]} = 3 \qquad \frac{((\text{[illegible]}+5)(2)-4)}{2} - \text{[illegible]} = 3$

$\frac{((9+5)(2)-4)}{2} - 9 = 3$

$\frac{(((9+5)(2))-4)}{2} - 9 = 3$

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?, ¿de qué me va a servir lo que aprendí? ¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?, ¿y de las propiedades de los números naturales?

A lo largo de estas sesiones descubrí más maneras de llevar las matemáticas a algo relacionado con cuentos, así mismo me quedo mas claro de lo que yo ya tenia el que las matemáticas no son aburridas y siempre hay maneras de hacerlas didácticas, divertidas y entretenidas.
Todo esto que aprendí ya desde este momento me está sirviendo un ejemplo claro que al tener un acercamiento con mi sobrino pude hacer que practicara un poco el cálculo mental y se entretuviera en el sentido de leer y hacer operaciones y todo lo que esto implica, para el momento en que esté laborando me servirá para hacer mis clases más atractivas y poder mostrar que las matemáticas se relacionan con mas cosas y no solo con el tema de realizar operaciones y ya.
Yo ya tenía conocimiento de la jerarquía de operaciones, pero ahora me di cuenta que hay ocasiones en las cuales no se aplica esta jerarquía, algunos son casos especiales y otros no. Fortalezco mi conocimiento de la jerarquía de operaciones y también encontré de qué manera en un futuro voy a poder trabajar con ellas y como me reafirman mis conocimientos previos.
En el aspecto de las propiedades de los números naturales no tuve tanto conflicto ya que era algo que no tenía tan olvidado como la jerarquía de operaciones, en el aspecto de que esto si tenia mas una nocion de como trabajarlos a comparacion de que si no recordaba completamente de cómo emplear la jerarquía de operaciones.

Anexo no 6. Formato de hojas para el alumno modificadas

Sesión 1: Los 4 cuatros

Objetivo del alumno: Conocer el cuento e interpretar los procedimientos realizados por Beremiz.

Un poco de geografía:

La historia se desarrolla en el país de Irak, Beremiz junto con su acompañante emprendieron un viaje para llegar a la capital de dicho país ¿sabes cuál es la capital de Irak? ______________________________

De la historia, ¿cómo te imaginas que es el clima en ese país?

____

¿Cómo te imaginas a los personajes?

____

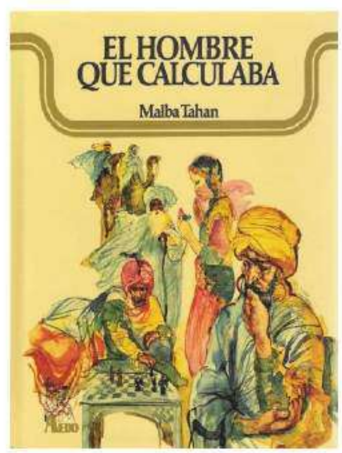
¿Sabes en qué continente está Irak?

____

En la imagen de la derecha se muestra la portada de "El hombre que calculaba", ¿sabes cómo se llama la prenda que tienen en la cabeza los hombres?

____

¿Sabes cuál es la relación entre los árabes y las matemáticas?



Sobre el Autor:

¿Quién es Malba Tahan?

Julio César de Mello y Souza mejor conocido con su pseúdonimo Malba Tahan. Nació en Río de Janeiro (1895-1974).

Se graduó de profesor en la Escuela Normal y luego de ingeniero en la Escuela Nacional de Ingeniería.

Malba Tahan se enamoró de la cultura árabe en su infancia cuando leyó "Las mil y un noches".

Reto.

Analizar cada uno de los procedimientos que realizó Beremiz para obtener los números del 0 al 10 y redactar lo que tú crees que hizo para calcular cada número. Posteriormente comprueba con la calculadora tus procedimientos y registra lo que encontraste.

Para reflexionar

¿Crees que ocurra algo si cambiamos el orden de las operaciones? ¿a qué crees que se deba esto?

Sesión 2: Conociendo las operaciones

Objetivo del alumno: Resolver el reto y conocer más acerca de las operaciones básicas.

Volviendo a la historia.

Después de que Beremiz explicó lo de los 4 cuatros, el acompañante del hombre que calculaba le preguntó sobre una duda:

-Admirable maestro, me quedé pensando sobre el procedimiento para encontrar el número 8 con los cuatro cuatros, si cambio el orden de las sumas y restas, me sigue dando el mismo resultado, ¿por qué ocurre esto?

¡Reto!

Analiza el algoritmo para obtener el número 8 del capítulo anterior y cambia el orden para hacer las sumas y restas y describe lo que ocurre.

¿Pasa lo mismo en la siguiente operación: (4 x 4 x 4 ÷ 4)? Cambia de igual manera el orden de realizar las operaciones y escribe lo que ocurre.

Ahora, ¿y en esta operación pasa lo mismo (4 + 4 - 4 x 4)?

¿Qué crees que pasa en los casos en los que cambias la forma de operar y te sigue dando el mismo resultado?

____

____

Para comprobar tu hipótesis anterior, realiza varias operaciones similares a las de los ejercicios anteriores y comprueba o rechaza tu hipótesis. Registra tus procedimientos.

¿Qué dirías para ayudarle a Beremiz para explicar los casos en los que a pesar de cambiar el orden de hacer las operaciones el resultado no cambia?

¿En qué casos si cambias el orden de hacer las operaciones, el resultado sí se altera?

Para reflexionar.

¿por qué crees que en algunos casos el resultado se altera si cambias el orden de hacer las operaciones y en otros casos no?

Cuando se obtiene dos resultados diferentes ¿cuál sería el correcto? ¿cómo saberlo?

Sesión 3: Conociendo jerarquías.

Objetivo del alumno: Encontrar una explicación sobre los procedimientos de Beremiz para obtener los números 3, 4, 5,6, 7, 9, 10

Volviendo a la historia

La reunión con los mercaderes se extendió más de lo que tenían planeado, pues estos estaban ávidos por seguir aprendiendo sobre los misterios de las matemáticas y Beremiz como buen maestro, se mantenía animoso a seguir compartiendo sus conocimientos. Los mercaderes seguían teniendo dudas y en esta ocasión uno de los mercaderes preguntó:

- ¿Pero cómo debemos de resolver las operaciones cuando hay una línea de fracción y tenemos operaciones en el numerador o denominador?
- ¡Es verdad! ¿cómo le hizo para obtener los números 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 10? – preguntó otro mercader-.
- ¿podría explicarnos cómo le hizo? – replicó el mercader.

Reto.

Fíjate nuevamente en cómo Beremiz obtuvo el número 3, el 4, el 5, el 6, el 7, el 9 y el 10; y ayúdale a explicar el cómo le hizo. Utiliza calculadora para comprobar tus resultados. Registra tus procedimientos.

¿Por qué crees que para obtener los números 3 y 6 se hicieron primero las sumas?

¿En el número 5 qué fue lo que se hizo primero?

¿Qué crees que ocurre en cuando tenemos una fracción y hay operaciones en el numerador y/o denominador?, ¿Qué debemos de hacer?

Para reflexionar

¿Crees que primero las multiplicaciones y las divisiones se resuelven antes que las sumas y las restas?

¿siempre es así o hay casos en los que el orden se invierte?

¿Cuándo resolvemos primero las sumas o restas?

¿Qué es lo que se resuelve primero cuando en una fracción hay operaciones en el denominador o numerador? ¡por qué se resuelve así?

Sesión 4: El número más grande

Objetivo del alumno: Encontrar el número más grande que se pueda formar usando 4 cuatros y operaciones matemáticas.

Volviendo a la historia:

Asombrados de las habilidades matemáticas que disponía el hombre que calculaba, los mercaderes estaban intrigados en comprobar el clásico dicho del cálculo, “con 4 cuatros se puede formar cualquier número natural.

> -Estimado Beremiz estamos intrigados en saber si con cuatro cuatros se puede formar cualquier número- replicó uno de los mercaderes
>
> -Quedamos asombrados de sus habilidades para calcular del 0 al 10 y ahora nos preguntamos en saber cuál será el número más grande que podamos formar con sólo 4 cuatros- argumentó uno de ellos

Beremiz al ver la inquietud de aquellos hombres interesados en descubrir los secretos que guarda la aritmética, les invitó a que reflexionaran para encontrar el número natural más grande posible.

Reto.

Ayuda a Beremiz a encontrar el número natural más grande, usando 4 cuatros y símbolos matemáticos. Usa la calculadora para encontrar el número y para comprobar tus resultados.

Algunos de tus compañeros quizá utilizaron la expresión 4^4 para encontrar el número más grande, ¿Qué significa la expresión 4^4?

¿Qué operación se realiza en 4^4?

En la siguiente expresión: $4 \times 4 + 4^4$; en qué orden se realizan las operaciones? ¿por qué?

Para reflexionar.

¿Con cuál operación pueden llegar al número más grande con 4 cuatros?

¿En qué lugar colocarías a esa operación en la jerarquía de operaciones?

¿Qué se hace en las potencias?

¿Cuál es la operación inversa de las potencias?

Sesión 5: Adivina el mes de cumpleaños y la edad de tu compañero.

Objetivo del alumno: Hacer un algoritmo o una sola expresión que permita adivinar el mes de cumpleaños y la edad de mis compañeros, a partir de la serie de pasos de Beremiz.

Volviendo a la historia:

Beremiz recordó una serie de pasos a seguir para encontrar el mes y el día de cumpleaños de cualquier persona y les dijo a quienes lo escuchaban:

-Primero tienen que pensar en el mes en el que nacieron, ahora multiplíquenlo por 2 y sumen 5 al resultado; después, multiplíquenlo por 50, y ahora súmale tu edad, ahora debes de restarle 250 y el resultado será de 3 o 4 dígitos, en el que las dos cifras de la derecha son la edad y las restantes son el número del mes de nacimiento de la persona.

Los mercaderes se impresionaron con el reto y querían descubrir el algoritmo que cumplía la adivinanza. ¡Ayuda a los mercaderes a encontrar el algoritmo!

Reto.

Encuentra un algoritmo o una sola expresión retomando los pasos dichos por Beremiz que te permita calcular el mes y la edad de tus compañeros del equipo. Usa calculadora para verificar tu resultado. Registra tus procedimientos.

¿Cómo le hiciste para hacer tu algoritmo?

Así como escribiste tu algoritmo en tu hoja, ¿funcionó cuando lo escribiste en la calculadora?, ¿obtuviste el resultado esperado?

Si no obtuviste lo que esperabas ¿qué crees que puedas mejorar en tu algoritmo?

Para reflexionar.

¿Cómo le hiciste para acomodar diferentes operaciones en una sola expresión?

¿Qué símbolos u operaciones te ayudaron a lograr tu cometido?

¿cuál fue el orden que siguió la calculadora para resolver tu algoritmo?

Sesión 6: igualando a 3.

Objetivo del alumno: Hacer un algoritmo que obedezca a la adivinanza hecha por Beremiz en el que el resultado sea siempre 3. Comprueba tu resultado con la calculadora, digitando en una sola expresión sin encontrar resultados parciales.

Volviendo a la historia:

Cada que Beremiz continuaba la conversación con los mercaderes de su alrededor más se acordaba de problemas matemáticos y de interesantísimos acertijos. En esta ocasión, les dijo a los mercaderes:

-Escuchen con atención: "piensen un número, súmenle 5, multipliquen el resultado por 2, a lo que quedó réstenle 4, el resultado divídanlo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, el resultado siempre será 3.

Cuando el enigma fue resuelto Beremiz y su acompañante continuaron su camino rumbo a Bagdad.

Reto:

Encuentra un algoritmo o una sola expresión que obedezca a la adivinanza dicha por Beremiz, utiliza, símbolos y operaciones matemáticas. Verifica con la calculadora tecleando en una sola exhibición, sin encontrar resultados parciales. Registra tus procedimientos.

¿Cuál fue el algoritmo que encontraste?

¿Qué se tiene que tomar en cuenta para que la calculadora siga el orden que nosotros queremos para que la adivinanza se cumpla?

Para reflexionar:

¿Qué descubrí a lo largo de las sesiones?

¿De qué me va a servir lo que prendí?

¿ahora qué es lo que sé de la jerarquía de operaciones?