

ING. SEBASTIÁN
FUENTES CASTRO

ACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE BARRÉ DE SAINT-VENANT
Y GREEN Y AMPT PARA MODELAR EL RIEGO POR GRAVEDAD

2021



Universidad Autónoma de Querétaro Facultad de Ingeniería

Acoplamiento de las ecuaciones de Barré de
Saint-Venant y Green y Ampt para modelar el
riego por gravedad

Tesis

Que como parte de los requisitos para
obtener el Grado de

Maestro en Ciencias (Hidrología Ambiental)

Presenta

Ing. Sebastián Fuentes Castro

Dirigida por:

Dr. Carlos Alberto Chávez García

Querétaro, Qro. a Julio de 2021



Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Ciencias

Acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Green y Ampt para modelar el riego por gravedad

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de Maestro en Ciencias (Hidrología Ambiental)

Presenta

Ing. Sebastián Fuentes Castro

Dirigido por:

Dr. Carlos Alberto Chávez García

Sinodales:

Dr. Carlos Alberto Chávez García
Presidente

Dr. Carlos Fuentes Ruiz
Secretario

Dr. José Antonio Quevedo Tiznado
Vocal

Dr. Josué de Jesús Trejo Alonso
Suplente

Dr. M. Alfonso Gutiérrez López
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Julio, 2021
México

DEDICATORIA

A mis padres Marcelo y Araceli.

A mis hermanos Paula, Marcel y Arantxa.

IN MEMORIAN

Mis entrañables amigos

Jose Carlos B. R.

Daniel Zaid B. R.

Jose Luis M. R.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Carlos Alberto Chávez García por transmitirme parte de su vasto conocimiento, por la amistad brindada y por enseñarme a ser mejor persona.

Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz por todo el apoyo brindado para enriquecer y mejorar la calidad del documento y por su disposición a aclarar dudas.

Al Dr. José Antonio Quevedo Tiznado por aceptar ser mi sinodal y la disposición mostrada en esta investigación.

Al Dr. Josué de Jesús Trejo Alonso por sus enseñanzas como profesor y por su disposición a ayudar.

Al Dr. M. Alfonso Gutiérrez López por sus acertados comentarios y sugerencias, así como el apoyo proporcionado a lo largo de la maestría.

A mis compañeros del posgrado en quienes encontré buenos amigos.

A la Universidad Autónoma de Querétaro y en especial a la Facultad de Ingeniería por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo recibido durante el desarrollo de la maestría.

RESUMEN

La principal característica del riego por gravedad es la forma en la que se distribuye el agua en el perfil del suelo y por lo tanto, son necesarios estudiar y desarrollar metodologías para el estudio del proceso. En este trabajo se presenta una solución numérica del modelo hidrodinámico de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant para el flujo superficial, acopladas a la ecuación de Green y Ampt para modelar el flujo subsuperficial. Mediante la optimización de los parámetros de conductividad hidráulica a saturación y la presión de succión en el frente de humedad, parámetros característicos de la ecuación de Green y Ampt, se obtiene el gasto de riego óptimo necesario para un valor máximo de uniformidad. La solución de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant se aproximan utilizando un esquema Lagrangiano en diferencias finitas.

Palabras clave: modelo hidrodinámico, flujo superficial, flujo subsuperficial, esquema Lagrangiano, conductividad hidráulica a saturación, presión de succión en el frente de humedad.

SUMMARY

The main characteristic of gravity irrigation is the way in which water is distributed in the soil profile and therefore, it is necessary to study and develop methodologies for the study of the process. A numerical solution of the hydrodynamic model of the Barré de Saint-Venant equations for surface flow, coupled to the Green and Ampt equation to model subsurface flow is presented. By optimization the parameters of saturated hydraulic conductivity and suction on the wetting front, characteristic parameters of the Green and Ampt equation, the optimal irrigation expenditure necessary for a maximum value of uniformity is obtained. The solution of the Barré de Saint-Venant are approximated using a Lagrangian scheme in finite differences.

Keywords: hydrodynamic model, surface flow, subsurface flow, Lagrangian scheme, saturated hydraulic conductivity, suction on the wetting front.

ÍNDICE

RESUMEN.....	1
SUMMARY.....	ii
ÍNDICE.....	iii
ÍNDICE DE CUADROS.....	v
ÍNDICE DE FIGURAS.....	vi
1. INTRODUCCIÓN.....	- 7 -
2. OBJETIVOS	- 10 -
2.1. Objetivo general.....	- 10 -
2.2. Objetivos particulares.....	- 10 -
3. HIPÓTESIS	- 10 -
4. ANTECEDENTES	- 11 -
4.1. Fases del riego por gravedad.....	- 11 -
4.2. Descripción del flujo de agua a superficie libre	- 12 -
4.2.1. Ecuaciones de Barré de Saint-Venant.....	- 12 -
4.2.2. Modelo de cero inercia.....	- 13 -
4.2.3. Modelo de la onda cinemática	- 13 -
4.2.4. Modelo hidrológico o balance de volumen.....	- 14 -
4.3. Descripción del flujo del agua en el suelo	- 15 -
4.3.1. Relaciones de masa y volumen de los medios porosos	- 15 -
4.3.2. La infiltración.....	- 18 -
4.3.2.1. Ecuación de Richards.....	- 19 -
4.3.2.2. Ecuación de Green y Ampt.....	- 20 -
4.3.2.3. Solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero	- 21 -
4.3.2.4. Ecuación de Kostiakov-Lewis	- 23 -
4.4. Modelos numéricos para el riego por gravedad	- 23 -
4.4.1. Modelo hidrológico o balance de volumen.....	- 24 -
4.4.1.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	- 24 -

4.4.1.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora.....	- 24 -
4.4.2. Modelo de la onda cinemática	- 25 -
4.4.2.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	- 25 -
4.4.2.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora.....	- 25 -
4.4.3. Modelo de cero inercia.....	- 26 -
4.4.3.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	- 26 -
4.4.3.2. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards.....	- 26 -
4.4.4. Modelo hidrodinámico completo	- 27 -
4.4.4.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática.....	- 27 -
4.4.4.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora.....	- 28 -
4.4.4.3. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards.....	- 28 -
5. DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL MODELO HIDRODINÁMICO	- 29 -
5.1. Solución numérica para la fase de avance.....	- 34 -
5.1.1. Primer nivel de tiempo	- 36 -
5.1.2. Niveles subsecuentes de tiempo	- 38 -
5.2. Solución numérica para la fase de almacenamiento	- 46 -
5.3. Solución numérica para la fase de consumo.....	- 47 -
5.4. Solución numérica para la fase de recesión.....	- 48 -
6. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL GASTO ÓPTIMO DE RIEGO.....	- 49 -
7. APLICACIONES	- 52 -
7.1. Suelo con perfil homogéneo de humedad.....	- 52 -
7.2. Suelo con presencia de manto freático somero	- 62 -
8. CONCLUSIONES.....	- 66 -
9. LITERATURA CITADA.....	- 68 -

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 7-1. Valores optimizados del ejemplo tomado de la literatura.....	- 54 -
Cuadro 7-2. Tiempo de cómputo para diferentes pasos de tiempo (Δt).....	- 61 -
Cuadro 7-3. Tiempo de cómputo para diferentes pasos de tiempo (Δt) con manto freático somero.	- 64 -

Dirección General de Bibliotecas UAO

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4-1. Fases del riego superficial (Fuente: elaboración propia).	- 12 -
Figura 4-2. Composición del suelo (Fuente: elaboración propia).....	- 16 -
Figura 5-1. Disposición de las celdas de cálculo para las fases de avance, almacenamiento, consumo y recesión (Fuente: elaboración propia).....	- 34 -
Figura 5-2. Matriz de la solución numérica para el N intervalo durante el avance.....	- 39 -
Figura 7-1. Curvas de tirante/infiltración para diferentes valores de n de Manning. ...	- 53 -
Figura 7-2. Curva de avance de los datos medidos y los obtenidos con la optimización de los parámetros.	- 54 -
Figura 7-3. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados.....	- 55 -
Figura 7-4. Comparación entre los datos medidos, los simulados por el modelo con parámetros optimizados y los obtenidos por Saucedo <i>et al.</i> (2016).....	- 56 -
Figura 7-5. Evolución del tirante en diferentes puntos de la melga.....	- 57 -
Figura 7-6. Curvas de avance para diferentes tiempos.	- 58 -
Figura 7-7. Curvas de avance y lámina infiltrada con espaciamiento de 20 m. -	59 -
Figura 7-8. Curvas de avance con diferentes gastos.....	- 59 -
Figura 7-9. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados a diferentes pasos de tiempo (Δt).....	- 61 -
Figura 7-10. Evolución de la lámina infiltrada en un riego por melgas con manto freático somero.	- 63 -
Figura 7-11. Perfiles de flujo cada 20 minutos de un riego por melgas con manto freático somero.	- 63 -
Figura 7-12. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados a diferentes pasos de tiempo (Δt).....	- 65 -

1. INTRODUCCIÓN

La agricultura consume alrededor del 70% del total de agua dulce disponible en el planeta para garantizar los alimentos necesarios que la población requiere para su subsistencia. Con el incremento desmedido de la población, el agua destinada para las actividades agrícolas seguirá aumentando, por tal motivo se debe hacer un uso eficiente del agua para mejorar la capacidad de producción de alimentos mediante el aporte a los cultivos por medio del suelo para satisfacer las necesidades hídricas que no fueron cubiertos con la precipitación.

En México, el área con infraestructura que permite el riego es de aproximadamente 6.5 millones de hectáreas, de las cuales 3.3 millones corresponden a 86 distritos de riego (DR) y los 3.2 millones restantes a más de 40 mil unidades de riego (UR). Los DR consideraron la tecnología prevaeciente en la época de su creación para la aplicación del agua por gravedad en las parcelas, pero el deterioro de la infraestructura acumulado en varias décadas, por la insuficiencia de recursos económicos para su conservación y mejoramiento, propiciaron una baja en la eficiencia global del manejo del agua (CONAGUA, 2018).

La aplicación desmedida de agua en los cultivos llega a provocar inundaciones en algunas zonas de las parcelas, principalmente en las cabeceras de los surcos o melgas, aunado a esto, las pérdidas por percolación profunda y coleos significan un grave problema debido al flujo en la entrada de la parcela. Chávez y Fuentes (2019) muestran que los volúmenes de agua utilizados históricamente para el Distrito de Riego 085 provocan una baja uniformidad de distribución del agua y la principal causa de esto es que no cuentan con un correcto diseño del gasto óptimo a utilizar, necesario para aplicar un volumen de agua acorde al cultivo establecido y obtener la máxima uniformidad a lo largo de la melga o surco, sin embargo, esto se presenta en la mayoría de los DR del territorio mexicano.

La complejidad del riego por gravedad aconseja, en primer lugar, realizar pruebas de riego y después un estudio teórico basado en modelos matemáticos que simulen las condiciones posibles mediante un algoritmo de optimización no lineal que obtenga los valores de la conductividad hidráulica a saturación del suelo y el valor de la succión para simular la dinámica del agua en el suelo. Lo anterior nos ayudará a conocer la cantidad de agua que realmente está siendo utilizada por los cultivos establecidos en las parcelas para así poder evaluar la eficiencia de aplicación, eficiencia de uniformidad y eficiencia de requerimiento.

En los últimos años se han visto grandes avances en el mejoramiento de los modelos que simulan el riego por gravedad, esto debido al desarrollo tecnológico y computacional para poder hacer una simulación más eficiente de éstos. Los modelos matemáticos han mejorado la calidad del diseño ya que permiten considerar diversas combinaciones de gasto y pendientes. No obstante, es necesario evaluar los cambios temporales y espaciales de las características del suelo, entre y durante los riegos.

Se han desarrollado varias técnicas con diferentes niveles de complejidad para modelar matemáticamente los procesos del riego por gravedad. La mayoría de estas técnicas se fundamenta en que el movimiento superficial puede ser simulado mediante la aplicación de los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, conocidas como ecuaciones de Barré de Saint-Venant (1871), mientras que el flujo subsuperficial o infiltración puede ser modelado siguiendo dos enfoques: el primero que está basado en las observaciones empíricas y directamente tratados como tales, resultando leyes de infiltración como la de Kostiakov (1932); y el segundo que viene del principio de conservación de la masa, que conduce a una ecuación de continuidad y la ley de Darcy (1856).

Debido a la heterogeneidad de los suelos agrícolas y la complejidad de sus características hidrodinámicas, la caracterización de sus propiedades, así como la de sus efectos en los procesos de infiltración y flujo superficial del agua, requieren

la utilización de parámetros que muestren condiciones o comportamientos representativos para cierta zona en específico, por lo que este estudio se rige bajo la hipótesis de la homogeneidad del suelo en una parcela de cultivo.

Diferentes estudios en el campo de la modelación del riego por gravedad solo se han centrado en la fase en la que se aporta el gasto de agua en la cabecera de la parcela y esta fluye por el efecto de la gravedad hasta la parte final de la misma. Al acoplar la ecuación de Green y Ampt (1911) a las ecuaciones de Barré de Saint-Venant se pretende producir resultados satisfactorios en cuanto a la modelación completa del riego por gravedad, ya que la ecuación de infiltración utilizada representa adecuadamente el proceso de infiltración, pero la obtención de sus parámetros genera cierta incertidumbre, en específico la conductividad hidráulica a saturación (K_s) y la presión de succión en el frente de humedecimiento (h_f). Estos valores se pueden obtener a partir de tablas que hay en la literatura, que resultan ser valores promedio en función de la textura del suelo, por lo cual, en ocasiones no necesariamente son representativos del fenómeno a representar. La obtención de estos valores depende, en la mayoría de las veces, de la experiencia del modelador.

Cuenta tenida de lo expuesto anteriormente es claro que se debe resolver el acoplamiento numérico de las ecuaciones diferenciales involucradas en el riego por gravedad. Las ecuaciones de Barré de Saint-Venant han sido resueltas numéricamente con simplificaciones a la ecuación de cantidad de movimiento, sin embargo, la ecuación de infiltración utilizada por la mayoría de los investigadores es una ecuación empírica. En consecuencia, nos proponemos resolver las ecuaciones diferenciales de Barré de Saint-Venant mediante el acoplamiento numérico de una ecuación de infiltración con un esquema Euleriano-Lagrangiano mediante el método de diferencias finitas.

Con la finalidad de efectuar calibraciones del modelo y verificar su aplicabilidad se utilizan datos reportados en la literatura relacionados con pruebas de riego efectuadas en Tabasco y el Estado de México, México.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

- Modelar las fases del riego por gravedad mediante el acoplamiento numérico de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Green y Ampt.

2.2. Objetivos particulares

- Aplicar una técnica de optimización para estimar los parámetros de la ecuación de Green y Ampt acoplado a las ecuaciones de Barré de Saint-Venant a partir de datos de avance de una prueba de riego, mediante la solución del problema inverso.
- Modelar la fase de avance en un suelo con manto freático somero acoplando una solución analítica a las ecuaciones de Barré de Saint-Venant.
- Validar el ajuste de parámetros con datos experimentales de pruebas de riego.

3. HIPÓTESIS

El acoplamiento numérico de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Green y Ampt permitirán conocer la variación de las características hidrodinámicas del suelo en el tiempo y en el espacio para diseñar un gasto óptimo en el riego por gravedad.

4. ANTECEDENTES

El riego por gravedad es uno de los métodos más comunes utilizados para aplicar agua en cultivos de todo el mundo, con la principal desventaja que la productividad del agua es baja en este tipo de riego (Adamala *et al.*, 2014). Sin embargo, es importante conocer las fases que la componen para tener un mejor panorama de todo lo que conlleva el fenómeno.

4.1. Fases del riego por gravedad

En el riego por gravedad continuo se distinguen tres fases en el movimiento superficial del agua. La primera comienza cuando se aporta el caudal de agua en el cauce seco hasta que la onda de agua alcanza la parte final del mismo, se le conoce como fase de avance. La segunda comienza desde el arribo de la onda al final del cauce hasta que se suspende el aporte de agua, se le conoce como fase de almacenamiento. Finalmente, la tercera fase conocida como recesión está compuesta por dos subfases, una es la recesión vertical que comienza a partir de la suspensión del aporte hasta que el tirante en la cabecera del cauce desaparece y la otra es la recesión horizontal que comienza a partir de la desaparición del tirante en la cabecera y termina cuando el tirante en la parte final del cauce desaparece (Fuentes *et al.*, 2012).

Es importante conocer las fases que presenta el riego por gravedad, ya que hoy en día el riego juega un papel muy importante en el ciclo hidrológico y el conocimiento preciso sobre sus fases puede ayudar a programar y pronosticar en la gestión de los recursos hídricos (Valipour *et al.*, 2015).

Los tiempos que transcurren desde que inicia la aplicación del agua al cauce hasta que culmina cada una de las fases se denominan: tiempo de avance (T_a) para la fase de avance, tiempo de riego (T_r) para la fase de almacenamiento, tiempo de

consumo (T_{fc}) para la fase de consumo y tiempo de recesión (T_{fr}) para la fase de recesión (Rendón *et al.*, 2012).

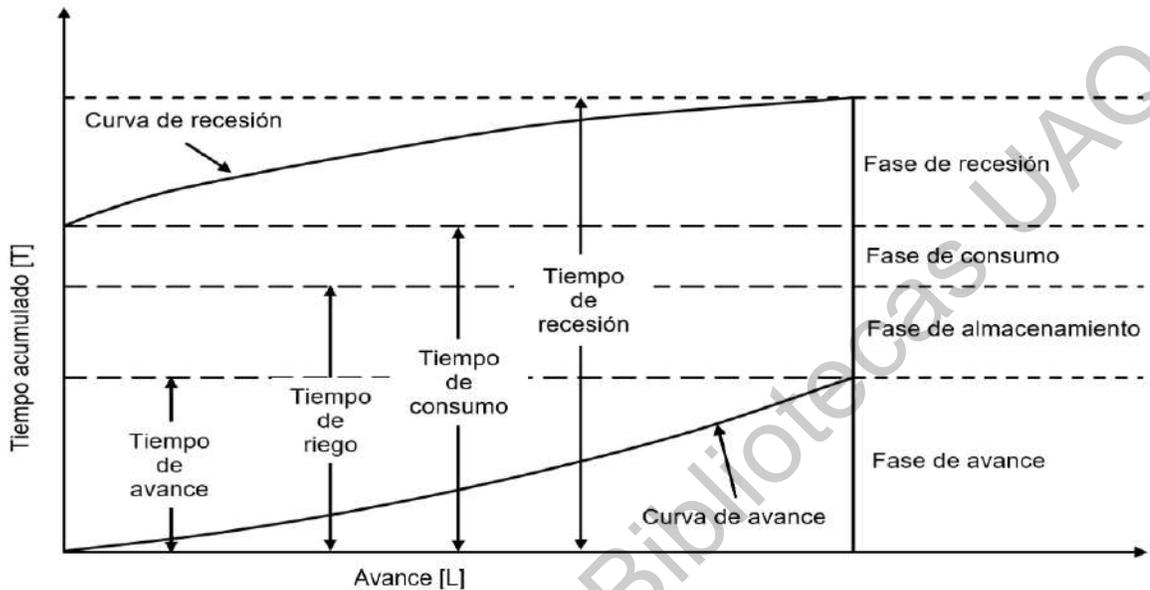


Figura 4-1. Fases del riego superficial (Fuente: elaboración propia).

4.2. Descripción del flujo de agua a superficie libre

Los modelos matemáticos de riego por gravedad incluyen la conservación de masa o también la conservación de masa y la ecuación de cantidad de movimiento, es decir, las ecuaciones de Barré de Saint-Venant.

4.2.1. Ecuaciones de Barré de Saint-Venant

El flujo de agua sobre la superficie es modelado mediante las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, que resultan de la aplicación de las leyes de conservación de masa y de cantidad de movimiento. La ecuación de continuidad se escribe como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = W \quad (4.1)$$

mientras que la ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(J - J_0) = \lambda \frac{WQ}{A} \quad (4.2)$$

donde Q es el caudal volumétrico; x es la coordenada espacial en la dirección principal del movimiento del agua en la melga; t es el tiempo; A es el área hidráulica; W es un volumen de salida; J_0 es la pendiente topográfica; J la pendiente de fricción; h es el tirante de agua; g es la aceleración gravitacional; U es la velocidad media; λ es un parámetro adimensional definido como $\lambda = U_{ix}/U$, donde U_{ix} es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración, la cual generalmente es despreciada.

4.2.2. Modelo de cero inercia

El modelo de cero inercia se obtiene eliminando los términos inerciales de la ecuación (4.2) de cantidad de movimiento, lo cual resulta en la siguiente ecuación (Valipour *et al.*, 2015):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = J - J_0 \quad (4.3)$$

de tal forma que las ecuaciones (4.1) y (4.3) constituyen el modelo de cero inercia.

4.2.3. Modelo de la onda cinemática

El modelo de la onda cinemática resulta de eliminar la variación del tirante en el espacio de la ecuación (4.3), obteniéndose la ecuación:

$$J = J_0 \quad (4.4)$$

lo cual establece la igualdad entre la pendiente de fricción y la pendiente topográfica, criterio que es válido para gastos pequeños y pendientes suaves, algo que ocurre en el riego por gravedad. En el modelo de onda cinemática se parte del supuesto que el flujo es permanente y uniforme (Becerra y Tafur Hermann, 2006).

4.2.4. Modelo hidrológico o balance de volumen

Si se ignora la ecuación de cantidad de movimiento y se utiliza solamente la versión integral de la ecuación de continuidad, ecuación (4.1), se obtiene el modelo hidrológico o balance de volumen. La versión integral de la ecuación de continuidad puede escribirse como:

$$Q_u t = \int_0^{x_f} [h(x,t) + I(x,t)] dx \quad (4.5)$$

donde $I(x,t)$ y $h(x,t)$ son la lámina infiltrada y el tirante de agua en función de la posición x y el tiempo de avance t , definido como el tiempo que lleva el aporte de agua en la cabecera del cauce con un gasto unitario Q_u , x_f es la posición del frente de avance al tiempo t .

En el riego por gravedad es común asumir que la lámina infiltrada es una función solamente del tiempo de contacto (τ) del agua con el suelo en el punto x , definido por $\tau(x,t) = t - t_x$, donde t es el tiempo total de avance y t_x es el tiempo de llegada de la onda de avance al punto x . Estudios previos como el de Rendón *et al.* (2012) sugieren que el tirante de agua sobre la superficie del suelo se tome como un valor medio (\bar{h}). Estas dos suposiciones mencionadas anteriormente constituyen el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938), que se resuelve numéricamente utilizando la regla de los trapecios con pasos de tiempo Δt constantes.

Aunque el modelo hidrodinámico es el más preciso, el de la onda cinemática se aplica más que otros, debido a sus simplificaciones y menor tiempo de ejecución por computadora, este modelo es más simple que el hidrodinámico y el de cero inercia, y más preciso que el de balance de volumen. Por lo tanto, la mayoría de los métodos de riego se simulan utilizando la onda cinemática.

Las ecuaciones de Barré de Saint-Venant en su forma completa simulan el riego por gravedad mejor que sus simplificaciones como lo son: los modelos cero inercia, onda cinemática y balance de volumen. Los resultados indican que no existe variación significativa y, por lo tanto, la onda cinemática y cero inercia pueden usarse cuando no se requiere una precisión muy alta (Valipour *et al.*, 2015).

4.3. Descripción del flujo del agua en el suelo

4.3.1. Relaciones de masa y volumen de los medios porosos

El suelo está compuesto de tres fases: sólida, líquida y gaseosa, cuya proporción y composición depende de la naturaleza del suelo y de las condiciones ambientales (humedad, temperatura, etc.). La fase sólida, que generalmente es la dominante, está compuesta de minerales o partículas de roca y materia orgánica, mientras que la fase líquida está constituida por el agua del suelo y la fase gaseosa, incluido el vapor de agua, ocupa los espacios de los poros que no están ocupados por el agua.

En la Figura 4-2 son mostradas las principales variables volumétricas y de masa que caracterizan al suelo a nivel macroscópico. Las relaciones que se muestran a continuación presentan un alto grado de relevancia para el manejo comprensible de las propiedades de los suelos ya que el completo dominio de su significado y sentido físico mejoran la modelación del riego por gravedad.

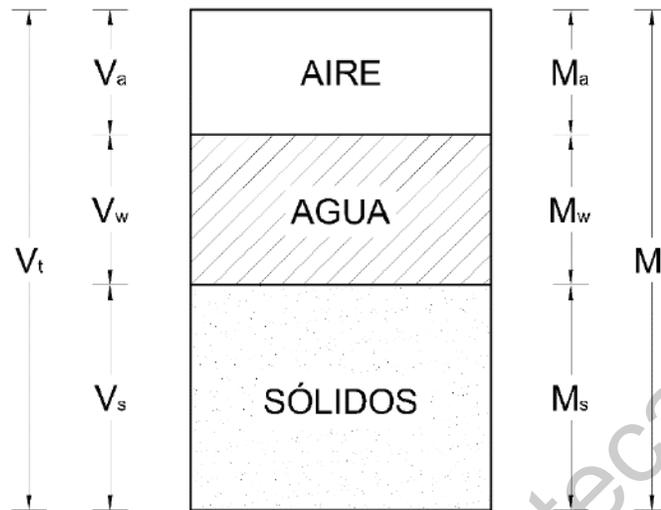


Figura 4-2. Composición del suelo (Fuente: elaboración propia).

donde V_t es el volumen total del suelo; V_s es el volumen de los sólidos; V_w es el volumen del agua; V_a es el volumen de aire; M_t es la masa total del suelo; M_s es la masa de los sólidos; M_w es la masa de agua; M_a es la masa de aire.

Siguiendo la notación de la Figura 4-2, el volumen total de los sólidos (V_t) es igual a la suma del volumen de los sólidos (V_s) y el volumen del vacío (V_v):

$$V_t = V_s + V_v \quad (4.6)$$

Se define la porosidad volumétrica, o simplemente porosidad del medio, como la fracción que ocupa el volumen vacío con respecto al volumen total.

$$\phi = \frac{V_v}{V_t} \quad (4.7)$$

La porosidad representa el parámetro más importante para describir el medio poroso como el suelo, su determinación es fundamental porque constituye el medio por el cual el agua fluye en el suelo. Un método más práctico de determinar el valor de la porosidad es a partir de la densidad del suelo.

Retomando la Figura 4-2, la masa del suelo seco (M_t) está compuesta únicamente por la masa de los sólidos (M_s) ya que la masa del aire (M_a) y del agua (M_w) es despreciable. Se define la densidad total del suelo seco o densidad total (ρ_t), también llamada densidad aparente, como:

$$\rho_t = \frac{M_t}{V_t} \quad (4.8)$$

La densidad de los sólidos (ρ_o) será igual a la densidad de las partículas del cuarzo:

$$\rho_o = 2.65 \text{ g/cm}^3 .$$

La relación entre la porosidad total del suelo y sus dos densidades se escribe de la siguiente manera:

$$\phi = 1 - \frac{\rho_t}{\rho_o} \quad (4.9)$$

El contenido volumétrico de agua o contenido de humedad (θ) es el volumen de agua (V_w) contenido en el espacio poroso. Debido al interés de explicar el movimiento del agua, se define el contenido volumétrico de agua como:

$$\theta = \frac{V_w}{V_t} \quad (4.10)$$

Por lo tanto, queda claro que se cuenta con la siguiente desigualdad: $0 \leq \theta \leq \phi$.

Para estimar el contenido volumétrico de agua, la variable de acceso, generalmente, es el contenido gravimétrico de humedad (ω) definido por $\omega = M_w/M_t$, cuya relación con el contenido volumétrico de humedad es la siguiente:

$$\theta = \left(\frac{\rho_t}{\rho_w} \right) \omega \quad (4.11)$$

donde $\rho_w = M_w/V_w$ es la densidad del agua.

Es importante denotar que en un suelo aparentemente saturado con agua, generalmente queda atrapado una cierta cantidad de aire. Rogowski (1971) argumenta que el contenido volumétrico de humedad a saturación puede ser tomado como $\theta_s = 0.9\phi$. Debido al aire atrapado, el contenido volumétrico de humedad a saturación (θ_s) rara vez alcanza la saturación del espacio total de poros (Haverkamp *et al.*, 2016). Sin embargo, para fines de esta investigación, θ_s será tomado como la porosidad total (ϕ): $\theta_s \approx \phi$.

4.3.2. La infiltración

La infiltración se refiere al movimiento de agua en el suelo desde su superficie a través de los poros del suelo, producido principalmente por la acción de la fuerza de gravedad. El agua en el frente de avance del patrón de humedecimiento se mueve hacia las zonas más secas del suelo bajo la influencia de gradientes de potencial de presión. Existen diferentes modelos cuya base va desde el empirismo como la ecuación de Kostiakov (1932) hasta los fundamentos mecánicos más complejos, como el modelo de Richards (1931).

4.3.2.1. Ecuación de Richards

La descripción del proceso de infiltración del agua en el suelo puede efectuarse teniendo como base la ecuación de Richards (1931), que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad con el campo de velocidades calculado conforme a la ley de Darcy y que en su forma tridimensional, sin tener en cuenta la extracción de agua por las plantas, se escribe como (Saucedo *et al.*, 2012):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.12)$$

donde ψ es el potencial de presión del agua en el suelo expresado como la altura de una columna equivalente de agua (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo); $C(\psi) = d\theta/d\psi$ es denominada la capacidad específica de humedad del suelo, $\theta = \theta(\psi)$ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua y es una función de ψ conocida como curva característica de humedad o curva de retención del agua; $K = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica que en un suelo parcialmente saturado es una función del potencial de presión; el potencial gravitacional es asimilado a la coordenada espacial z orientada positivamente hacia abajo, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es el operador gradiente; x , y son las otras dos coordenadas espaciales y t es el tiempo.

La ecuación de Richards (1931) describe el flujo de agua en un medio poroso no saturado con resultados precisos, Fuentes *et al.* (2020) desarrollaron una solución en diferencias finitas de esta ecuación, aplicada a los problemas de transferencia de agua durante y después de un evento de riego por gravedad para observar fenómenos de infiltración, evaporación, transpiración y percolación.

4.3.2.2. Ecuación de Green y Ampt

La ecuación de Green y Ampt (1911) se establece a partir de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy con las siguientes hipótesis: a) el perfil de humedad inicial en una columna de suelo es uniforme $\theta = \theta_0$; b) la presión del agua en la superficie del suelo es hidrostática: $\psi = h \geq 0$, donde h es el tirante de agua; c) existe un frente de humedecimiento bien definido caracterizado por una presión negativa: $\psi = -h_f < 0$, donde h_f es la succión en el frente de humedecimiento; d) la región entre la superficie del suelo y el frente de humedecimiento está completamente saturada (flujo en pistón): $\theta = \theta_s$ y $K = K_s$, donde K_s es la conductividad hidráulica a saturación. La combinación de estas hipótesis, de la ecuación de continuidad y de la ley de Darcy, permiten obtener la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$V_i = \frac{dl(t)}{dt} = K_s \left(1 + \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_0)}{l} \right) \quad (4.13)$$

Si el tirante de agua se considera independiente del tiempo, $h = \bar{h}$, la ecuación (4.13) se integra analíticamente con la condición inicial $l = 0$ en $t = 0$, resultando:

$$l = K_s t + \lambda_{ga} \ln \left(1 + \frac{l}{\lambda_{ga}} \right) \quad ; \quad \lambda_{ga} = (\bar{h} + h_f)(\theta_s - \theta_0) \quad (4.14)$$

donde \bar{h} es tomado como el tirante medio.

La ecuación de Green y Ampt, fue deducida para un modelo demasiado simple del perfil de humedad, el de un perfil en forma de pistón. Sin embargo, esta ecuación se usa con mayor frecuencia debido a su sencillez y a los pocos parámetros que requiere para simular la infiltración, además del menor costo numérico y computacional, comparada con la ecuación de Richards.

4.3.2.3. Solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero

En determinados casos o zonas agrícolas de riego se cuenta con la particularidad de un manto freático somero que afecta en la velocidad a la onda del frente de avance cuanto más cercano sea la posición inicial del manto freático en relación con la superficie del suelo (Saucedo *et al.*, 2003). Sin embargo, está claro que la ecuación de Green y Ampt no representa esta condición debido a que el perfil de humedad no es constante a lo largo de la columna semi-infinita de suelo.

Fuentes *et al.* (2010) dedujeron una solución analítica de la ecuación de Richards utilizando una adecuación de las hipótesis de Green y Ampt para describir la infiltración del agua en un suelo con un manto freático somero a una profundidad P_f . La distribución de la humedad inicial es lineal: $\theta_i(z) = \theta_o + (\theta_s - \theta_o)(z/P_f)$, de modo que el contenido de humedad en la superficie del suelo es $\theta_i(0) = \theta_o$ y en la superficie del manto freático es $\theta_i(P_f) = \theta_s$. La succión en el frente de humedecimiento es una función lineal del contenido de humedad en el frente, de modo que $h_f[\theta_i(0), \theta_s] = h_f$ y $h_f[\theta_i(P_f), \theta_s] = 0$. La lámina infiltrada queda definida por:

$$I(t) = \int_0^{z_f(t)} [\theta_s - \theta_i(z)] dz \quad (4.15)$$

es decir:

$$I(t)/I_M = 1 - [1 - z_f(t)/P_f]^2 \quad ; \quad I_M = \frac{1}{2} \Delta\theta P_f \quad (4.16)$$

donde I_M es la lámina infiltrada máxima.

El modelo de infiltración para un perfil de suelo con un manto freático somero queda definido por:

$$\frac{dl}{dt} = K_s \left[1 + \frac{h + h_f (1 - z_f / P_f)}{z_f} \right] ; \quad z_f = P_f \left(1 - \sqrt{1 - l / l_M} \right) \quad (4.17)$$

Para el caso en el que el tirante de agua es independiente del tiempo, $h = \bar{h}$, la integración de la ecuación (4.17) con la condición $l = 0$ en $t = 0$ conduce a la ecuación de infiltración siguiente, cuando $h_f \neq P_f$:

$$K_s t = \begin{cases} \frac{P_f}{P_f - h_f} l - \frac{2 P_f (\bar{h} + P_f) (\bar{h} + h_f) l_M}{(P_f - h_f)^3} \\ \ln \left[1 + \frac{P_f - h_f}{\bar{h} + h_f} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{l}{l_M}} \right) \right] \\ + \frac{2 P_f (\bar{h} + h_f) l_M}{(P_f - h_f)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{l}{l_M}} \right) \end{cases} \quad (4.18)$$

y cuando $h_f = P_f$ se tiene:

$$K_s t = \frac{P_f l_M}{\bar{h} + P_f} \left[\frac{l}{l_M} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{l}{l_M} \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \right] \quad (4.19)$$

Se debe notar que la ecuación (4.19) se reduce a la ecuación de infiltración de Green y Ampt, ecuación (4.14), cuando $P_f \rightarrow \infty$. En efecto, considerando que $l_M = 1/2 \Delta \theta P_f$, en este límite se tiene $1 - (1 - l/l_M)^{1/2} \cong l/2l_M = l/\Delta \theta P_f$. El tercer término es del orden de $1/P_f$ y tiende a cero; en el segundo término el argumento del logaritmo tiende a $1 + l/\Delta \theta (\bar{h} + h_f)$ y su coeficiente a $\Delta \theta (\bar{h} + h_f)$; finalmente, en el primer término, el coeficiente de l tiende a la unidad. Tomando en cuenta la definición $\lambda_{ga} = \Delta \theta (\bar{h} + h_f)$, se deduce la ecuación de Green y Ampt.

4.3.2.4. Ecuación de Kostiakov-Lewis

Kostiakov (1932) propuso un modelo para determinar la lámina infiltrada mediante una función potencial de un solo término, cuya variable independiente es el tiempo:

$$I(t) = kt^a \quad (4.20)$$

donde $I(t)$ es la infiltración acumulada en una columna de suelo; k y a son parámetros de ajuste y t es el tiempo. Esta ecuación presenta principalmente dos desventajas: i) no contiene ninguna variable de carácter físico, por lo tanto no puede ser ajustada para diferentes condiciones de campo en donde se presente una influencia marcada en el proceso de infiltración y ii) para tiempos largos de riego, como normalmente sucede en el riego por gravedad, la ecuación predice velocidades de infiltración que tienden a cero, lo cual no es necesariamente correcto para cualquier condición de flujo. Para remediar la última de las limitaciones, se introduce un término lineal en el tiempo y se obtiene una forma modificada denominada ecuación de Kostiakov-Lewis (Walker y Skogerboe, 1987):

$$I(t) = kt^a + f_0 t \quad (4.21)$$

donde el término f_0 representa la velocidad de infiltración en los tiempos largos.

4.4. Modelos numéricos para el riego por gravedad

Es posible distinguir diferentes modelos para el riego por gravedad dependiendo de la aproximación que utilizan para describir tanto el flujo del agua a superficie libre como el flujo del agua en el suelo, además de tener en cuenta los métodos numéricos utilizados para su implementación y las fases del riego que son capaces de simular. A continuación se presentan los modelos que tienen mayor difusión.

4.4.1. Modelo hidrológico o balance de volumen

4.4.1.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

Lewis y Milne (1938) utilizaron la ecuación de Kostiakov-Lewis (Walker y Skogerboe, 1987) para el cálculo de la lámina infiltrada necesaria para resolver la forma integral de la ecuación de conservación de masa. La solución numérica para el flujo libre a superficie libre se obtiene utilizando una aproximación en diferencias finitas haciendo uso de un paso de tiempo constante.

Akbari *et al.* (2018) desarrollaron y validaron un software denominado “*EDOSIM (Evaluation, Design and Optimization of Surface Irrigation Model)*” como un modelo de simulación y optimización para sistemas de riego, con la solución propuesta por Lewis y Milne (1938) del modelo hidrológico, mediante la aplicación de 20 algoritmos metaheurísticos, sin embargo, los valores de la infiltración los calcularon a partir de la ecuación empírica de Kostiakov-Lewis.

4.4.1.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora

Una mejora en la descripción del flujo del agua en el suelo es realizada por Rendón *et al.* (1997), quienes utilizaron la ecuación de Green y Ampt para describir el flujo del agua en el suelo. El modelo desarrollado permite simular las cuatro fases del riego, tanto para melgas como para surcos. En una comparación entre el modelo hidrológico y el modelo hidrodinámico completo para riego por melgas realizada por Castanedo *et al.* (2013) se observa que existen diferencias en los perfiles de flujo, lo cual genera divergencia en la distribución final de la lámina infiltrada y por lo tanto en el gasto óptimo de riego, esta última crece conforme se incrementa el contenido de arcilla en el suelo.

4.4.2. Modelo de la onda cinemática

4.4.2.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

En combinación con el modelo de la onda cinemática se utiliza generalmente la ecuación de Kostiaikov-Lewis para describir el flujo del agua en el suelo (Chen, 1970; Smith, 1972; Walker y Humpherys, 1983).

El modelo de Walker y Humpherys (1983) es de los que mayor difusión han tenido y fue desarrollado para describir solamente tres fases del riego por surcos: avance, almacenamiento y recesión, debido a que en el modelo de onda cinemática no es posible incorporar la fase de consumo, asociada a la recesión vertical. Además, dado que en dicho modelo no es posible incorporar condiciones de frontera aguas abajo que alteren el flujo aguas arriba, se hace necesario considerar un surco o una melga con extremo final abierto.

4.4.2.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora

A partir del modelo de la onda cinemática, integrado a la ecuación de infiltración de Green y Ampt, González-Camacho *et al.* (2010) estimaron los parámetros de infiltración con datos de avance de pruebas de riego, obtenidos en campo, mediante la solución numérica del problema inverso avance-infiltración para surcos cerrados, el error relativo de la eficiencia de aplicación y el coeficiente de uniformidad fue de 8%, entre los datos simulados y los experimentales de una parcela del Colegio de Postgraduados, Montecillo, México.

Chávez y Fuentes (2018) disminuyeron los tiempos de riego optimizando parámetros de la ecuación de Green y Ampt (K_s y h_f) a partir de la fase de avance, almacenamiento y recesión de 197 pruebas de riego y de las propiedades del suelo de las parcelas analizadas.

4.4.3. Modelo de cero inercia

4.4.3.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

Strelkoff y Katopodes (1977) desarrollaron una solución numérica del modelo de cero inercia para la modelación del riego por melgas, que tiene como base un esquema lagrangiano en diferencias finitas, mientras que para describir el flujo del agua en el suelo se adopta la ecuación de Kostiakov-Lewis. El modelo desarrollado permite describir las fases de avance, consumo y recesión. Los resultados proporcionados son evaluados haciendo uso de datos experimentales obtenidos en Arizona, Estados Unidos.

Elliott *et al.* (1982) desarrollaron un modelo matemático para la fase de avance del riego por surcos modificando el análisis propuesto por Strelkoff y Katopodes (1977) de cero inercia para el riego por melgas. Hicieron una comparación mediante datos de campo y el modelo propuesto, donde observaron una eficiente adaptación, sin embargo, es evidente que el proceso de modelado no introduce los errores significativos por los términos de aceleración, lo cual significa que para surcos extremadamente largos (>300 m) los datos no se ajustan correctamente.

4.4.3.2. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards

Zerihun *et al.* (2005a, 2005b) presentaron el desarrollo de un modelo de transporte de solutos superficial-subsuperficial acoplado al riego por melgas, mediante la solución del modelo de cero inercia acoplado a la ecuación de Richards. Una solución numérica de la ecuación de advección-dispersión promediada por área, forma el componente de transporte de soluto de superficie, para la solución del modelo superficial utilizaron el esquema de diferencias finitas implícito de Preissmann (Liggett y Cunge, 1975), la ecuación de Richards es resuelta mediante el software denominado “HYDRUS-1D”.

4.4.4. Modelo hidrodinámico completo

4.4.4.1. Leyes de infiltración sin base físico-matemática

El modelo presentado por Sakkas y Strelkoff (1974) permite describir solamente la fase de avance del riego por melgas. Utilizaron una aproximación basada en el método de las características para obtener una solución numérica del problema, las ecuaciones características se resolvieron utilizando un algoritmo predictor-corrector, el cual consiste en el método de Euler como predictor y la regla trapezoidal como el corrector. Muestran una comparación entre los datos experimentales y los simulados por su solución, sin embargo, ambas series no muestran homogeneidad, situación que se atribuye a la variabilidad de la infiltración a lo largo de la melga y a los cambios de rugosidad que pueden existir en campo, este último debido a la textura y estructura del suelo.

Katopodes y Strelkoff (1977) presentaron un modelo que permite describir tres fases del riego por melgas (avance, consumo y recesión), haciendo uso de la ecuación de Kostiakov para describir el flujo de agua en el suelo y las ecuaciones de Barré de Saint-Venant en su forma completa (modelo hidrodinámico) para describir el flujo en la superficie de la melga. Utilizaron el método de las características para resolver el modelo hidrodinámico, teniendo en cuenta un esquema de malla móvil. El sistema de ecuaciones obtenida con diferencias finitas lo resolvieron utilizando la técnica de Newton-Raphson. Los resultados proporcionados por el modelo se compararon con los obtenidos en pruebas de campo y comprobaron que aunque muestran resultados confiables, no representan de manera adecuada las variables proporcionadas por el sistema suelo.

Gillies y Smith (2015) desarrollaron un software denominado “SISCO” que simula el modelo hidrodinámico y la ecuación de infiltración de Kostiakov-Lewis, calibra y optimiza los parámetros empíricos de esta ecuación de infiltración, necesarios para el riego por gravedad.

4.4.4.2. Leyes de infiltración con base físico-matemática e hipótesis simplificadora

Saucedo *et al.* (2015) presentaron un modelo de riego por melgas basado en la aplicación de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant para describir el flujo del agua sobre el suelo, y la ecuación de Green y Ampt para representar el flujo del agua en el suelo. La aproximación se realiza utilizando un esquema lagrangiano en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, mientras que la ecuación de Green y Ampt se resuelve numéricamente usando un método de diferencias finitas. Saucedo *et al.* (2016) desarrollaron un método para realizar la estimación de parámetros de infiltración de la ecuación de Green y Ampt, a partir de datos de avance de una prueba de riego. La estimación de los parámetros hidrodinámicos de conductividad hidráulica a saturación y presión en el frente de humedad se realiza aplicando el método Levenberg-Marquardt. El modelo así obtenido, permite el ajuste de los parámetros hidrodinámicos a partir de datos de pruebas de avance de riego por melgas y de la textura del suelo.

4.4.4.3. Ley de infiltración conforme a la ecuación de Richards

Saucedo *et al.* (2012) modelaron las cuatro fases del riego por melgas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, con forma de momentum completa, con la ecuación de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional, respectivamente. La aproximación se realiza utilizando un esquema euleriano-lagrangiano en diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, mientras que la ecuación de Richards es integrada en el espacio utilizando elementos finitos y en el tiempo mediante una aproximación en diferencias finitas implícitas.

5. DESARROLLO DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL MODELO HIDRODINÁMICO

En el riego por melgas las variables de diseño son el ancho y el gasto de riego. En cambio, en surcos, la única variable de diseño es el gasto de riego, dado que el espaciamiento depende del cultivo.

Considerando lo anterior, se puede definir el gasto de riego unitario, (q_0) como:

$$q_0 = \frac{Q_g}{P} \quad (5.1)$$

donde Q_g es el gasto de riego de la melga o del surco y P es el perímetro mojado de la melga o del surco. Para el caso de la melga se puede considerar el perímetro de mojado igual al ancho de la misma (B), pero en surcos depende de la sección transversal y del espaciamiento (E).

En melgas, una vez obtenido el gasto de riego unitario, la amplitud del tendido se puede obtener como:

$$B' = \frac{Q_a}{q_0} \quad (5.2)$$

donde Q_a es el gasto de riego que maneja el usuario en su parcela, el cual puede variar entre 10 y 120 l/s. En este caso es evidente que $Q_a \approx Q_g$

En surcos, el gasto de riego Q_g , se obtiene directamente de la ecuación (5.1):

$$Q_g = q_0 P \quad (5.3)$$

El número de surcos que se pueden regar simultáneamente (N_s), se obtiene como:

$$N_s = \frac{Q_a}{Q_g} \quad (5.4)$$

En el riego por melgas se presentan las relaciones geométricas siguientes: a) el área hidráulica $A = Bh$, donde B es el ancho de la melga y h el tirante de agua sobre la superficie del suelo; b) el caudal es $Q = Bq$, donde q es el caudal por unidad de ancho; c) el perímetro mojado $P = B + 2h$, d) el radio hidráulico $R_h = A/P = h/(1 + 2h/B)$. Puesto que el ancho de una melga es generalmente mucho más grande que el tirante de agua, las ecuaciones del movimiento se simplifican considerablemente, ya que se puede suponer que $P \approx B$ y $R_h \approx h$.

En una melga la relación entre su ancho y el tirante de agua permite considerar las ecuaciones correspondientes al escurrimiento sobre una superficie de ancho infinito (Woolhiser, 1975):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + V_1 = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h^2} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(J - J_o) + \lambda \frac{q}{h^2} V_1 = 0 \quad (5.6)$$

donde x es la dirección principal del movimiento; t es el tiempo; $q(x,t) = U(x,t)h(x,t)$ es el caudal por unidad de ancho de melga o caudal unitario; $U = U(x,t)$ es la velocidad media en una sección transversal; $h = h(x,t)$ es el tirante del agua sobre la superficie del suelo; $J_o = -\partial Z/\partial x$ con Z la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba, asimilada generalmente a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño; $J = J(x,t) = -\partial h_{fr}/\partial x$ es la pendiente de fricción, h_{fr} siendo la carga de fricción; g

es la aceleración gravitacional; $V_i = V_i(x,t) = \partial l(x,t)/\partial t$ es la velocidad de infiltración, es decir el volumen de agua infiltrado en la unidad de tiempo por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga y $l = l(x,t)$ es el volumen infiltrado por unidad de superficie de suelo o lámina infiltrada.

El segundo y tercer término de la ecuación se reescriben como sigue:

$$\frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial t} + 2 \frac{q}{h^2} \frac{\partial q}{\partial x} + \left(g - \frac{q^2}{h^3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + g(J - J_o) + \lambda \frac{q}{h^2} V_i = 0 \quad (5.7)$$

En Fuentes *et al.* (2004) se ha demostrado que las variables hidráulicas en la cabecera de la melga y en los tiempos muy cortos evolucionan conforme a los límites: el tirante $\lim_{t \rightarrow 0} [h(0,t)t^{-\alpha}] = \sigma$, el gasto $\lim_{t \rightarrow 0} [q(0,t)t^{-\gamma}] = C_q$, la lámina infiltrada $\lim_{t \rightarrow 0} [l(0,t)t^{-\beta}] = S$, la pendiente del perfil de agua sobre la superficie del suelo $\lim_{t \rightarrow 0} [t^\delta \partial h(0,t)/\partial x] = -C_p$, la fuerza unitaria de fricción $\lim_{t \rightarrow 0} [f_f(0,t)t^\eta] = C_f$. Así mismo se demuestran las relaciones $\beta = \alpha$, válido en las melgas, $\delta = \gamma - 2\alpha + 1$, válido en canales tanto impermeables como permeables (melgas), y $\eta - \alpha - 1 + \gamma = 0$. Si la ley de infiltración es proporcionada conforme a la ecuación de Richards se requiere que $\beta = 1/2$ y $\gamma \leq 3/4$ para que el límite asociado con la fuerza de fricción exista. La sustitución de los comportamientos referidos en la ecuación de cantidad de movimiento y la consideración de las relaciones mencionadas, permite evidenciar que dicha ecuación presenta una singularidad cuando $t \rightarrow 0$. En consecuencia, es conveniente utilizar la siguiente forma de la ecuación de cantidad de movimiento en el acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Green y Ampt en el riego por gravedad, la cual resulta de multiplicar la ecuación (5.7) por h^3 :

$$h^2 \frac{\partial q}{\partial t} + 2hq \frac{\partial q}{\partial x} + (gh^3 - q^2) \frac{\partial h}{\partial x} + gh^3 (J - J_o) + \lambda qhV_i = 0 \quad (5.8)$$

El acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant con la ecuación de Richards (o alguna de sus soluciones analíticas) se realiza con esquemas numéricos. Las posibles inestabilidades de los esquemas numéricos pueden ser atribuidas, al menos parcialmente a la utilización de una ley de resistencia hidráulica no compatible con las ecuaciones, como la ley de Manning-Strickler (Fuentes *et al.*, 2004). Por lo tanto, esta ley no puede ser considerada una ecuación constitutiva en el fenómeno del riego por gravedad cuando se utilizan las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Green y Ampt.

De acuerdo con Fuentes *et al.* (2012), la ley de resistencia al flujo en potencia que debe ser utilizada es la siguiente:

$$U = k \frac{g^d}{\nu^{2d-1}} R_h^{3d-1} J^d \quad (5.9)$$

donde U es la velocidad media; R_h es el radio hidráulico; J es la pendiente de fricción; g es la aceleración gravitacional; ν es el coeficiente de viscosidad cinemática del agua; k es un factor adimensional que incluye los efectos de la rugosidad de la superficie del suelo y el exponente d de esta ecuación tiene una interpretación fractal, el límite inferior corresponde a la ley de Chézy haciendo $d = 1/2$ y el superior, a la ley de Poiseuille cuando $d = 1$.

La ley de Manning-Strickler fue establecida en régimen permanente para justificar algunos datos experimentales. Manning dejó fija la potencia $d = 1/2$ y recalculó la potencia del radio hidráulico obteniendo aproximadamente $2/3$. Si se toma este valor de la potencia del radio hidráulico en la ley fractal de resistencia $3d - 1 = 2/3$ el valor de la potencia de la pendiente de fricción es de $d = 5/9$ (Fuentes *et al.*, 2012), que sustituyendo en la ecuación (5.9) se tiene:

$$U = k \frac{g^{5/9}}{v^{1/9}} R_h^{2/3} J^{5/9} \quad (5.10)$$

y haciendo $n = v^{1/9} / \text{kg}^{5/9}$:

$$U = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{5/9} \quad (5.11)$$

Considerando que $R_h \approx h$ la expresión resultante de la ecuación (5.11) para el caudal unitario ($q = Uh$) es la siguiente:

$$q = \frac{1}{n} h^{5/3} J^{5/9} \quad (5.12)$$

Para resolver el acoplamiento aquí planteado, se utiliza un esquema Euleriano-Lagrangiano (Strelkoff y Katopodes, 1977; Saucedo *et al.*, 2015;) expresado en diferencias finitas para la discretización de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, en donde de igual manera se acopla la ecuación de infiltración de Green y Ampt. La disposición de las celdas de cálculo para las fases de avance, almacenamiento, consumo y recesión se muestran en la Figura 5-1.

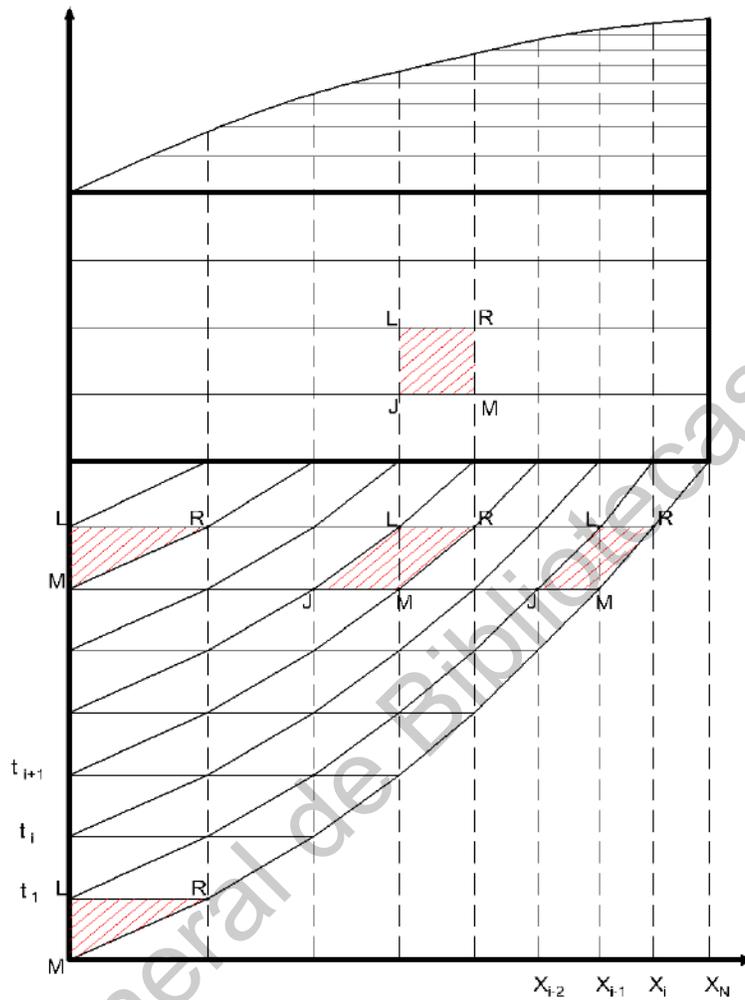


Figura 5-1. Disposición de las celdas de cálculo para las fases de avance, almacenamiento, consumo y recesión (Fuente: elaboración propia).

5.1. Solución numérica para la fase de avance

Para establecer las condiciones iniciales y de frontera para la fase de avance se tiene:

$$q(x,0) = 0 \quad \text{y} \quad h(x,0) = 0 \quad (5.13)$$

$$q(0,t) = q_0, \quad q(x_f,t) = 0 \quad \text{y} \quad h(x_f,t) = 0 \quad (5.14)$$

La forma discreta de la ecuación de continuidad es:

$$\begin{aligned}
 & [\omega q_L + (1-\omega)q_J] \delta t - [\omega q_R + (1-\omega)q_M] \delta t \\
 & - [\theta h_L + (1-\theta)h_R + \theta I_L + (1-\theta)I_R] (x_R - x_L) \\
 & + [\theta h_J + (1-\theta)h_M + \theta I_J + (1-\theta)I_M] (x_M - x_J) \\
 & - [\omega(h_L + I_L) + (1-\omega)(h_J + I_J)] (x_L - x_J) \\
 & + [\omega(h_R + I_R) + (1-\omega)(h_M + I_M)] (x_R - x_M) = 0
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

mientras que la ecuación de cantidad de movimiento es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & 2\bar{h}\bar{q} [\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J)] \delta t \\
 & + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) [\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J)] \delta t \\
 & + \bar{h}^2 \{ [\theta q_L + (1-\theta)q_R] (x_R - x_L) - [\theta q_J + (1-\theta)q_M] (x_M - x_J) \} \\
 & + g\bar{h}^3 (\bar{J} - J_o) [\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J)] \delta t \\
 & + \lambda \delta t \bar{q} \bar{h} \{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R] (x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M] (x_M - x_J) \} = 0
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Se consideran las siguientes hipótesis para la ecuación de cantidad de movimiento:

i) las derivadas en el tiempo se calculan como una celda euleriana y ii) se toman en cuenta los coeficientes medios para el cálculo de la pendiente de fricción media.

Los factores de peso en el tiempo y el espacio se denotan como ω y θ respectivamente. Los valores medios de gasto y tirante se calculan teniendo en cuenta todos los valores extremos de cada celda de cálculo:

$$\bar{q} = \omega [(1-\theta)q_R + \theta q_L] + (1-\omega) [(1-\theta)q_M + \theta q_J] \tag{5.17}$$

$$\bar{h} = \omega [(1-\theta)h_R + \theta h_L] + (1-\omega) [(1-\theta)h_M + \theta h_J] \tag{5.18}$$

En consecuencia, la pendiente de fricción media en cada celda se calcula como:

$$\bar{J} = \left[\frac{\bar{q}n}{\bar{h}^{5/3}} \right]^{9/5} \quad (5.19)$$

5.1.1. Primer nivel de tiempo

En este paso, la primera celda es triangular, por lo tanto, los subíndices J, M y R de las variables son iguales a cero debido a la disposición de celda presentada. De tal forma que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, ecuaciones (5.15) y (5.16), quedan expresadas de la siguiente manera:

Continuidad

$$\omega q_L \delta t - \theta (h_L + l_L) (x_R - x_L) = 0 \quad (5.20)$$

Cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} -2\bar{h}\bar{q}\omega q_L \delta t - \omega h_L (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2) \delta t + \bar{h}^2 \theta q_L (x_R - x_L) \\ + g\bar{h}^3 (\bar{J} - J_o) \omega (x_R - x_L) \delta t + \lambda \delta t \bar{q} \bar{h} \theta l_L (x_R - x_L) = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Las expresiones correspondientes a la aplicación del método de Newton-Raphson utilizando los dos primeros términos de una serie de Taylor, permite obtener las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento “linealizadas”:

$$\frac{\partial R_c}{\partial h_L} \delta h_L + \frac{\partial R_c}{\partial x_R} \delta x_R = -R_c \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial h_L} \delta h_L + \frac{\partial R_m}{\partial x_R} \delta x_R = -R_m \quad (5.23)$$

donde R_c y R_m representan el lado izquierdo de la forma discreta de la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento respectivamente.

Por conveniencia se reescriben las ecuaciones (5.22) y (5.23) para simplificar los términos:

$$A\delta h_L + B\delta\delta = -Rc \quad (5.24)$$

$$C\delta h_L + D\delta\delta = -Rm \quad (5.25)$$

También se tiene que:

$$h_L^{n+1} = h_L^n + \delta h_L^n \quad (5.26)$$

$$x_R^{n+1} = x_R^n + \delta\delta^n \quad (5.27)$$

La forma explícita de las derivadas de la ecuación de continuidad se muestra a continuación:

$$A = -\theta(x_R - x_L) \quad (5.28)$$

$$B = -\theta(h_L + l_L) \quad (5.29)$$

y para la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} C = & -2\omega^2\theta\delta t\bar{q}_L - (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\ & -3\omega^2\theta g\delta t\bar{h}^2 h_L + 2\omega\theta^2\bar{h}_L(x_R - x_L) \\ & -3\omega^2\theta\delta t g J_0 \bar{h}^2(x_R - x_L) + \lambda\omega\theta^2\bar{q}_L(x_R - x_L) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$D = \theta\bar{h}^2\bar{q}_L + \omega\delta t g\bar{h}^3 [\bar{J} - J_0] + \theta\lambda\bar{q}_L l_L \quad (5.31)$$

Como la solución es iterativa, se empieza asumiendo un par de valores iniciales para h_L y x_R . Los valores de Rc y Rm se calculan a partir de las ecuaciones (5.20) y (5.21) respectivamente, mientras que los valores de δh_L y $\delta\delta$ se obtienen mediante el algoritmo de eliminación de Gauss. Los nuevos valores de δh_L y $\delta\delta$ son utilizados en las ecuaciones (5.26) y (5.27) para encontrar iterativamente los

nuevos valores de h_L y x_R . Las iteraciones continúan hasta que ambas correcciones, δh_L y $\delta\delta$, se reduzcan al 0.01% de los valores corregidos, es decir, hasta que:

$$|\delta h_{i-1}| < 0.0001 h_L \quad (5.32)$$

$$|\delta\delta| < 0.0001 x_R \quad (5.33)$$

5.1.2. Niveles subsecuentes de tiempo

Después del primer intervalo de tiempo y continuando con la fase de avance, la solución numérica integra una o más celdas oblicuas y una celda triangular al inicio. Se deben resolver $2N+2$ ecuaciones algebraicas lineales, donde N es el número de celdas (y el número de pasos de tiempo transcurridos). Utilizando el esquema numérico de la Figura 5-1, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento linealizadas para las celdas oblicuas son:

$$\frac{\partial R c_i}{\partial h_L} \delta h_L + \frac{\partial R c_i}{\partial q_L} \delta q_L + \frac{\partial R c_i}{\partial h_R} \delta h_R + \frac{\partial R c_i}{\partial q_R} \delta q_R = -R c_i \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial R m_i}{\partial h_L} \delta h_L + \frac{\partial R m_i}{\partial q_L} \delta q_L + \frac{\partial R m_i}{\partial h_R} \delta h_R + \frac{\partial R m_i}{\partial q_R} \delta q_R = -R m_i \quad (5.35)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ es el número de celda.

La variable δq_R de la última celda es sustituida por la variable $\delta\delta$ que denota la corrección a la posición del frente de avance de la onda, las expresiones correspondientes para la última celda son:

$$\frac{\partial R c_N}{\partial h_L} \delta h_L + \frac{\partial R c_N}{\partial q_L} \delta q_L + \frac{\partial R c_N}{\partial x_N} \delta\delta = -R c_N \quad (5.36)$$

La Figura 5-2 representa un sistema de ecuaciones linealizadas que pueden ser resueltas por cualquiera de los diferentes procedimientos eficientes. El esquema numérico aquí propuesto utiliza el algoritmo de Preissman de doble barrido para solucionar la matriz pentadiagonal (Walker y Skogerboe, 1987). El primer barrido del procedimiento inicia resolviendo la ecuación (5.38) para δh_{i-1} y se obtiene el siguiente resultado:

$$\delta h_{i-1} = \frac{-Rc_i - A_i T_i - C_i \delta q_i - D_i \delta h_i}{A_i S_i + B_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (5.42)$$

Posteriormente, la ecuación (5.42) se sustituye en la ecuación (5.39) y se resuelve para δq_i , teniendo:

$$\delta q_i = \frac{(U_i D_i - H_i) \delta h_i - Rm_i - E_i T_i + U_i (Rc_i + A_i T_i)}{G_i - U_i C_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (5.43)$$

La ecuación (5.43) también puede ser escrita como:

$$\delta q_i = S_{i+1} \delta h_i + T_{i+1} \quad ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (5.44)$$

donde:

$$U_i = \frac{E_i S_i + F_i}{A_i S_i + B_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (5.45)$$

$$S_{i+1} = \frac{U_i D_i - H_i}{G_i - U_i C_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (5.46)$$

$$T_{i+1} = \frac{-Rm_i - E_i T_i + U_i (Rc_i + A_i T_i)}{G_i - U_i C_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (5.47)$$

Las ecuaciones (5.45), (5.46) y (5.47) constituyen el barrido hacia adelante del algoritmo. Se considera que $S_1 = 0$ debido a que se asume que la descarga es

independiente del área y $T_1 = 0$ ya que representa el cambio de gasto en la cabecera de la melga. Al finalizar el barrido hacia adelante los valores de S_{i+1} y T_{i+1} son conocidos, lo que permite el cálculo de $\delta\delta$ cambiando la variable δq_i por $\delta\delta$ en la ecuación (5.44):

$$\delta\delta = S_{i+1}\delta h_i + T_{i+1} \quad ; \quad i = N \quad (5.48)$$

Después de calcular las incógnitas se realiza un barrido hacia atrás, iniciando con la ecuación (5.42) de la siguiente manera desde $i = N$ hasta $i = 1$:

$$\delta h_{i-1} = \frac{-Rc_i - A_i T_i - C_i \delta\delta - D_i \delta h_i}{A_i S_i + B_i} \quad ; \quad i = N \quad (5.49)$$

también se tiene que:

$$\delta h_{i-1} = \frac{-Rc_i - A_i T_i - C_i \delta q_i - D_i \delta h_i}{A_i S_i + B_i} \quad ; \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (5.50)$$

$$\delta q_i = S_{i+1}\delta h_i + T_{i+1} \quad ; \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (5.51)$$

Una vez que se han obtenido los valores para $\delta\delta$ y los vectores δh y δq , se utilizan las siguientes ecuaciones recursivas para calcular los nuevos valores de los vectores x , h y q .

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \delta h_i \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (5.52)$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \delta q_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.53)$$

$$x_N^{n+1} = x_N^n + \delta\delta \quad (5.54)$$

El criterio de convergencia preseleccionado para avanzar en el tiempo es cuando los valores de los residuales de la ecuación de continuidad (Rc) y los residuales en

la ecuación de cantidad de movimiento (Rm) en la iteración actual es menor que una tolerancia especificada (aquí se usa 1×10^{-5}). Otro criterio seleccionado puede ser cuando el valor de $\delta\delta$ es menor a un valor preseleccionado.

Las entradas del sistema matricial relacionadas con la solución de la forma discreta de la ecuación de continuidad para el caso de la primera celda son:

$$A = -\theta(x_R - x_L) \quad (5.55)$$

$$B = \omega\delta t \quad (5.56)$$

$$C = (\omega + \theta - 1)(x_R - x_L) \quad (5.57)$$

$$D = -\omega\delta t \quad (5.58)$$

para las celdas interiores se tiene:

$$A = -\omega(x_L - x_J) - \theta(x_R - x_L) \quad (5.59)$$

$$B = \omega\delta t \quad (5.60)$$

$$C = (\omega + \theta - 1)(x_R - x_L) \quad (5.61)$$

$$D = -\omega\delta t \quad (5.62)$$

y para la última celda:

$$A = -\omega(x_L - x_J) - \theta(x_R - x_L) \quad (5.63)$$

$$B = \omega\delta t \quad (5.64)$$

$$C = (\omega + \theta - 1)(x_R - x_L) \quad (5.65)$$

$$D = -\theta(h_L + l_L) \quad (5.66)$$

Las entradas del sistema matricial relacionadas con la solución de la forma discreta de la ecuación de cantidad de movimiento para el caso de la primera celda son:

$$\begin{aligned}
 E &= 2\omega^2\theta\bar{q}(q_R - q_L)\delta t - (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 &+ 3\omega^2\theta g\delta t\bar{h}^2(h_R - h_L) \\
 &+ 2\omega\theta\bar{h}[\theta q_L + (1-\theta)q_R](x_R - x_L) \\
 &- 3\omega^2\theta\delta t g J_0\bar{h}^2(x_R - x_L) \\
 &+ \lambda\omega\theta\bar{q}[\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L)
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
 F &= -2\omega\delta t\bar{q}\bar{h} + 2\omega\theta\bar{h}[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)q_M]\delta t \\
 &- 2\omega\theta\delta t\bar{q}[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)h_M] \\
 &+ \theta\bar{h}^2(x_R - x_L) + \omega^2\theta\delta t\frac{\bar{J}}{qd}g\bar{h}^3(x_R - x_L) \\
 &+ \lambda\omega\theta\bar{h}\{[\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - (1-\theta)I_M(x_M - x_J)\}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
 G &= 2\omega^2(1-\theta)\bar{q}(q_R - q_L)\delta t + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 &+ 3\omega^2(1-\theta)g\delta t\bar{h}^2(h_R - h_L) \\
 &+ 2\omega(1-\theta)\bar{h}[\theta q_L + (1-\theta)q_R](x_R - x_L) \\
 &- 3\omega^2(1-\theta)\delta t g J_0\bar{h}^2(x_R - x_L) \\
 &+ \lambda\omega(1-\theta)\bar{q}[\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L)
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
 H &= 2\omega\delta t\bar{h}\bar{q} + 2\omega^2(1-\theta)\bar{h}(q_R - q_L)\delta t \\
 &- 2\omega^2(1-\theta)\delta t\bar{q}(h_R - h_L) \\
 &+ (1-\theta)\bar{h}^2(x_R - x_L) + \omega^2(1-\theta)\delta t\frac{\bar{J}}{qd}g\bar{h}^3(x_R - x_L) \\
 &+ \lambda\omega(1-\theta)\bar{h}[\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L)
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

para las celdas interiores se tiene:

$$\begin{aligned}
 E = & 2\omega\theta\bar{q}\delta t \left[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J) \right] - (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 & + 3\omega\theta g\delta t\bar{h}^2 \left[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J) \right] \\
 & + 2\omega\theta\bar{h} \left\{ [(1-\theta)q_R + \theta q_L](x_R - x_L) - [(1-\theta)q_M + \theta q_J](x_M - x_J) \right\} \\
 & - 3\omega\theta\delta t g J_0 \bar{h}^2 \left[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J) \right] \\
 & + \lambda\omega\theta\bar{q} \left\{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M](x_M - x_J) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

$$\begin{aligned}
 F = & -2\omega\delta t\bar{q}\bar{h} + 2\omega\theta\bar{h} \left[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J) \right] \delta t \\
 & - 2\omega\theta\delta t\bar{q} \left[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J) \right] \\
 & + \theta\bar{h}^2 (x_R - x_L) + \omega\theta\delta t \frac{\bar{J}}{\bar{q}d} g\bar{h}^3 \left[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J) \right] \\
 & + \lambda\omega\theta\bar{h} \left\{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M](x_M - x_J) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

$$\begin{aligned}
 G = & 2\omega(1-\theta)\bar{q} \left[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J) \right] \delta t + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 & + 3\omega(1-\theta)g\delta t\bar{h}^2 \left[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J) \right] \\
 & + 2\omega(1-\theta)\bar{h} \left\{ [\theta q_L + (1-\theta)q_R](x_R - x_L) - [\theta q_J + (1-\theta)q_M](x_M - x_J) \right\} \\
 & - 3\omega(1-\theta)\delta t g J_0 \bar{h}^2 \left[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J) \right] \\
 & + \lambda\omega(1-\theta)\bar{q} \left\{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M](x_M - x_J) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}
 H = & 2\omega\delta t\bar{h}\bar{q} + 2\omega(1-\theta)\bar{h} \left[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J) \right] \delta t \\
 & - 2\omega(1-\theta)\delta t\bar{q} \left[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J) \right] \\
 & + (1-\theta)\bar{h}^2 (x_R - x_L) + \omega(1-\theta)\delta t \frac{\bar{J}}{\bar{q}d} g\bar{h}^3 \left[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J) \right] \\
 & + \lambda\omega(1-\theta)\bar{h} \left\{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M](x_M - x_J) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Para la última celda se escribe:

$$\begin{aligned}
 E = & 2\omega\theta\bar{q}\delta t[-\omega q_L - (1-\omega)q_J] - (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 & + 3\omega\theta g\delta t\bar{h}^2[-\omega h_L - (1-\omega)h_J] \\
 & + 2\omega\theta\bar{h}[\theta q_L(x_R - x_L) - \theta q_J(x_M - x_J)] \\
 & - 3\omega\theta\delta t g J_0 \bar{h}^2[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J)] \\
 & + \lambda\omega\theta\bar{q}[\theta l_L(x_R - x_L) - \theta l_J(x_M - x_J)]
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}
 F = & -2\omega\delta t\bar{q}\bar{h} + 2\omega\theta\bar{h}[-\omega q_L - (1-\omega)q_J]\delta t \\
 & - 2\omega\theta\delta t\bar{q}[-\omega h_L - (1-\omega)h_J] \\
 & + \theta\bar{h}^2(x_R - x_L) + \omega\theta\delta t\frac{\bar{J}}{\bar{q}d}g\bar{h}^3[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J)] \\
 & + \lambda\omega\theta\bar{h}\{\theta l_L(x_R - x_L) - \theta l_J(x_M - x_J)\}
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}
 G = & 2\omega(1-\theta)\bar{q}[-\omega q_L - (1-\omega)q_J]\delta t + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)\omega\delta t \\
 & + 3\omega(1-\theta)g\delta t\bar{h}^2[-\omega h_L - (1-\omega)h_J] \\
 & + 2\omega(1-\theta)\bar{h}[\theta q_L(x_R - x_L) - \theta q_J(x_M - x_J)] \\
 & - 3\omega(1-\theta)\delta t g J_0 \bar{h}^2[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J)] \\
 & + \lambda\omega(1-\theta)\bar{q}[\theta l_L(x_R - x_L) - \theta l_J(x_M - x_J)]
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$H = \theta\bar{h}^2q_L + \omega\delta t g \bar{h}^3(\bar{J} - J_0) + \theta\lambda\bar{q}\bar{h}l_L \tag{5.78}$$

En las formas discretas se consideró un factor de peso en el espacio $\theta = 1/2$ para las celdas interiores (Strelkoff y Katopodes, 1977; Elliott *et al.*, 1982;) y para la última celda y el primer nivel de tiempo se utilizó $\theta = \pi/4$, deducido a partir del análisis para los tiempos cortos del acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards presentado por Fuentes (1992). El factor de peso en el tiempo se tomó como $\omega = 0.60$ (Strelkoff y Katopodes, 1977; Elliott *et al.*, 1982; Tabuada *et al.*, 1995).

Los factores de peso y espacio aquí utilizados han sido probados por otros autores con excelentes resultados en cuanto a convergencia, y menor inestabilidad numérica para resolver las ecuaciones de Barré de Saint-Venant. Sin embargo, dada la naturaleza de la solución aquí planteada (esquema implícito), en trabajos futuros se recomienda realizar un amplio análisis de sensibilidad para encontrar los parámetros idóneos, y el papel que juega cada uno de ellos en los resultados finales de la solución.

5.2. Solución numérica para la fase de almacenamiento

Las condiciones límite para la fase de almacenamiento son las siguientes

$$q(0,t) = q_0 \quad \text{y} \quad q(L,t) = 0 \quad (5.79)$$

donde L es la longitud de la melga y q_0 el gasto en la cabecera de la melga.

La forma discreta de la ecuación de continuidad para las fases de almacenamiento, consumo y recesión es la siguiente:

$$\begin{aligned} & [\omega q_L + (1-\omega)q_J] \delta t - [\omega q_R + (1-\omega)q_M] \delta t \\ & - [\theta h_L + (1-\theta)h_R + \theta I_L + (1-\theta)I_R] (x_R - x_L) \\ & + [\theta h_J + (1-\theta)h_M + \theta I_J + (1-\theta)I_M] (x_M - x_J) = 0 \end{aligned} \quad (5.80)$$

mientras que la forma discreta de la ecuación de cantidad de movimiento guarda semejanza para las cuatro fases del riego:

$$\begin{aligned}
& 2\bar{h}\bar{q}[\omega(q_R - q_L) + (1-\omega)(q_M - q_J)]\delta t \\
& + (g\bar{h}^3 - \bar{q}^2)[\omega(h_R - h_L) + (1-\omega)(h_M - h_J)]\delta t \\
& + \bar{h}^2 \{ [\theta q_L + (1-\theta)q_R](x_R - x_L) - [\theta q_J + (1-\theta)q_M](x_M - x_J) \} \\
& + g\bar{h}^3 (\bar{J} - J_o)[\omega(x_R - x_L) + (1-\omega)(x_M - x_J)]\delta t \\
& + \lambda \delta t \bar{q} \bar{h} \{ [\theta I_L + (1-\theta)I_R](x_R - x_L) - [\theta I_J + (1-\theta)I_M](x_M - x_J) \} = 0
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Debido a que en la última celda se tiene un tirante nulo en la punta de la onda al inicio de la fase de almacenamiento, se utiliza el tirante que se tiene en un punto anterior en el espacio para avanzar los perfiles de flujo.

Una vez que el tirante en el extremo final de la melga es diferente de cero. El perfil de flujo se calcula con los valores del nivel de tiempo anterior.

5.3. Solución numérica para la fase de consumo

La fase de consumo o de recesión vertical comienza una vez que se tiene en el dominio de solución una cantidad de agua que permite disponer de una lámina media igual a la lámina de riego, y termina en el momento en que se consume el agua en la cabecera de la melga, iniciando la fase de recesión horizontal. Para modelar esta fase se utilizan las aproximaciones de la fase de almacenamiento en su etapa cuasi-estacionaria (Saucedo *et al.*, 2012).

Las condiciones límites para la fase de consumo son las siguientes:

$$q(0,t) = 0 \quad \text{y} \quad q(L,t) = 0 \tag{5.82}$$

5.4. Solución numérica para la fase de recesión

La fase de recesión es modelada siguiendo la misma metodología que las fases anteriores con las condiciones límites siguientes:

$$q(0,t)=0 \quad \text{y} \quad q(L,t)=0 \quad (5.83)$$

Los algoritmos desarrollados fueron programados en el lenguaje Visual Basic.NET utilizando el entorno de desarrollo integrado Visual Studio 2019 ® y la compilación se realizó en un ordenador con procesador Intel ® Core™ i7-4710 CPU @ 2.50 GHz y 32 GB de memoria RAM.

6. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL GASTO ÓPTIMO DE RIEGO

La representación analítica del gasto de óptimo de riego depende de la longitud de la melga, propiedades hidrodinámicas y constantes de humedad del suelo para obtener altos valores del coeficiente de uniformidad (Fuentes y Chávez, 2020):

$$q_{\text{opt}} = \alpha_u K_s L \quad ; \quad \alpha_u = \frac{q_o}{K_s} = \frac{\ell_n}{K_s \tau_n} \quad (6.1)$$

donde L es la longitud de la melga; ℓ_n es la lámina neta de riego; τ_n es el tiempo necesario para infiltrar la lámina neta; q_o es el gasto unitario de riego y α_u es un parámetro sin dimensiones.

El comportamiento extremo de α_u se deduce del comportamiento extremo de la lámina infiltrada. En tiempos muy cortos $I = S\sqrt{t}$, donde S es la sorbilidad, y por lo tanto $\tau_n = \ell_n^2 / S^2$, es decir $\alpha_u = S^2 / (K_s \ell_n)$. En los tiempos largos $I \sim I_o + K_s t$, donde I_o es la ordenada al origen que depende de S y K_s , y en el modelo de Green y Ampt del logaritmo del tiempo, por lo tanto $\alpha_u \sim \ell_n / (\ell_n - I_o)$. De lo anterior se infiere que los límites:

$$\lim_{\ell_n \rightarrow 0} \alpha_u = \infty \quad ; \quad \lim_{\ell_n \rightarrow \infty} \alpha_u = 1 \quad (6.2)$$

deben ser satisfechos por la función general $\alpha_u(\ell_n)$.

Una función analítica de infiltración es obtenida a partir del modelo de Parlange *et al.* (1982) deducido de la ecuación de Richards suponiendo que la difusividad hidráulica tiende a comportarse como una densidad de Dirac y de una relación entre la difusividad hidráulica y la conductividad hidráulica. El modelo con el efecto de la carga de agua sobre la superficie del suelo es el siguiente (Parlange *et al.*, 1985):

$$I(t) - K_0 t = \frac{K_s h \Delta \theta}{q_s(t) - K_s} + \frac{S^2}{2\beta(K_s - K_0)} \ln \left[1 + \beta \frac{K_s - K_0}{q_s(t) - K_s} \right] ; \quad q_s = \frac{dI}{dt} \quad (6.3)$$

donde $\Delta \theta = \theta_s - \theta_0$ es la capacidad de almacenamiento del suelo; h es el tirante de agua sobre la superficie del suelo; K_0 es la conductividad hidráulica a la presión inicial y S la sorbilidad, que puede ser calculada con la expresión propuesta por Parlange (1975):

$$S^2 = \int_{\psi(\theta_0)}^0 [\theta_s + \theta(\psi) - 2\theta_0] K(\psi) d\psi \quad (6.4)$$

y β es un parámetro de forma definido por Fuentes (1989):

$$1 - \frac{1}{2}\beta = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_s} \left[\frac{K(\theta) - K_0}{K_s - K_0} \right] \left(\frac{\theta_s - \theta_0}{\theta - \theta_0} \right) D(\theta) d\theta}{\int_{\theta_0}^{\theta_s} D(\theta) d\theta} \quad (6.5)$$

El modelo clásico de Green y Ampt se deduce haciendo $\beta \rightarrow 0$ en la ecuación (6.3) y despreciando la conductividad hidráulica inicial, la integración de la ecuación con la condición $I = 0$ y $t = 0$ con tirante nulo, se escribe como:

$$K_s t = I - \frac{S^2}{2K_s} \ln \left(1 + \frac{2K_s I}{S^2} \right) ; \quad h_f = \frac{S^2}{2K_s \Delta \theta} \quad (6.6)$$

La relación entre el tiempo óptimo de riego y la lámina neta de riego se deduce de la ecuación anterior:

$$\tau_n = \frac{1}{K_s} \left[\ell_n - \frac{S^2}{2K_s} \ln \left(1 + \frac{2K_s}{S^2} \ell_n \right) \right] \quad (6.7)$$

La introducción de la ecuación (6.7) en la ecuación (6.1) proporciona la fórmula para calcular el gasto unitario óptimo en función de la longitud de la melga, la lámina neta y los parámetros característicos de la infiltración que representan las fuerzas capilares, la sorbilidad y las fuerzas gravitacionales, la conductividad hidráulica a saturación y un parámetro de forma de las características hidrodinámicas (Fuentes y Chávez, 2020):

$$q_{\text{opt}} = \alpha_u K_s L \quad ; \quad \alpha_u = \frac{\ell_n}{\ell_n - \frac{S^2}{2K_s} \ln \left(1 + \frac{2K_s}{S^2} \ell_n \right)} \quad (6.8)$$

Se debe notar que $K_s L = q_m$ representa el gasto unitario mínimo necesario para que el agua arribe a la parte final de la melga.

7. APLICACIONES

Para validar la solución numérica del modelo hidrodinámico completo con el acoplamiento de Green y Ampt se corrieron los algoritmos utilizando datos de una prueba de avance para un suelo con perfil homogéneo de humedad. Adicionalmente, se reemplazó la ecuación de Green y Ampt por la solución analítica de manto freático somero y este acoplamiento se validó con datos de una prueba de avance en un suelo con presencia de manto freático somero.

7.1. Suelo con perfil homogéneo de humedad

Para este punto, se tomaron los datos de una prueba de riego realizada en un suelo franco-arenoso (Fuentes, 1992): gasto total de aporte en la entrada de la melga $Q = 0.032 \text{ m}^3/\text{s}$, ancho de la melga $B = 10 \text{ m}$, gasto unitario de aporte en la entrada $q_0 = 0.0032 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, longitud de la melga $L = 100 \text{ m}$, pendiente de la melga $J_0 = 0.002 \text{ m}/\text{m}$, contenido volumétrico de humedad inicial $\theta_0 = 0.2749 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, contenido volumétrico de humedad a saturación $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, parámetro adimensional asociado con la extracción de cantidad de movimiento debido a la infiltración $\lambda = 2$. En la ley de resistencia hidráulica, ecuación (5.12), se utilizó $d = 1$ y a partir del valor del tirante normal se calculó k .

La inestabilidad numérica no es reportada en la literatura, sin embargo el trabajo propuesto por Saucedo *et al.* (2005) la elimina, ya que toma en cuenta hipótesis simplificadoras en la ecuación de cantidad de movimiento y utiliza un esquema explícito, donde resuelve solo una vez el sistema para adelantar los perfiles de flujo.

En la Figura 7-1 se presentan los perfiles del frente de avance simulados para diferentes valores del coeficiente n , tomando en cuenta que $d = 5/9$, que de acuerdo con Chávez y Fuentes (2018) el valor de $n = 0.05$ es para parcelas con el primer

riego y $n = 0.03$ para riegos de auxilio; mientras que el programa WinSRFR recomienda valores de $n = 0.10$ para cultivos de granos pequeños y $n = 0.25$ para cultivos de alta densidad (Bautista *et al.*, 2009). Aunado a esto, se observa que el aumento de los valores de n es directamente proporcional al tirante, lo cual afecta significativamente a la reducción de la inestabilidad numérica presentada en las primeras celdas de cálculo en la escala de dibujo.

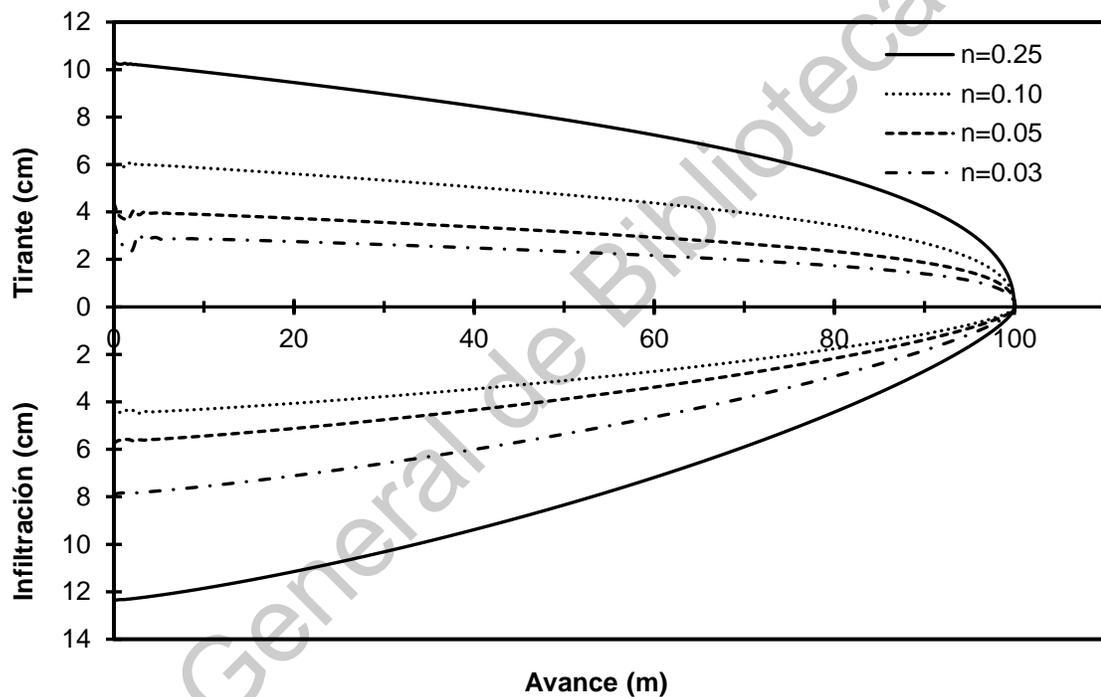


Figura 7-1. Curvas de tirante/infiltración para diferentes valores de n de Manning.

Una vez mostrada la inestabilidad generada por la ecuación de Manning modificada se procedió con los cálculos posteriores utilizando $d = 1$ correspondiente a la ley de Poiseuille, esto debido a que se cuenta con un flujo laminar y también para guardar concordancia con los datos reportados en la literatura.

Con los datos de la prueba de avance (Figura 7-2), se utilizó un algoritmo de optimización no lineal (Levenberg-Marquardt (Moré, 1978)) para obtener los valores de K_s y h_f (Cuadro 7-1). El cálculo de los valores optimizados inicia a partir de datos que están en función de la textura del suelo, que de acuerdo a lo presentado por Saucedo *et al.* (2013) para un suelo franco-arenoso, se ajustó correctamente el valor de K_s . Con respecto al valor de h_f , no se tiene una medida de comparación debido a que es un valor característico de la ecuación de Green y Ampt.

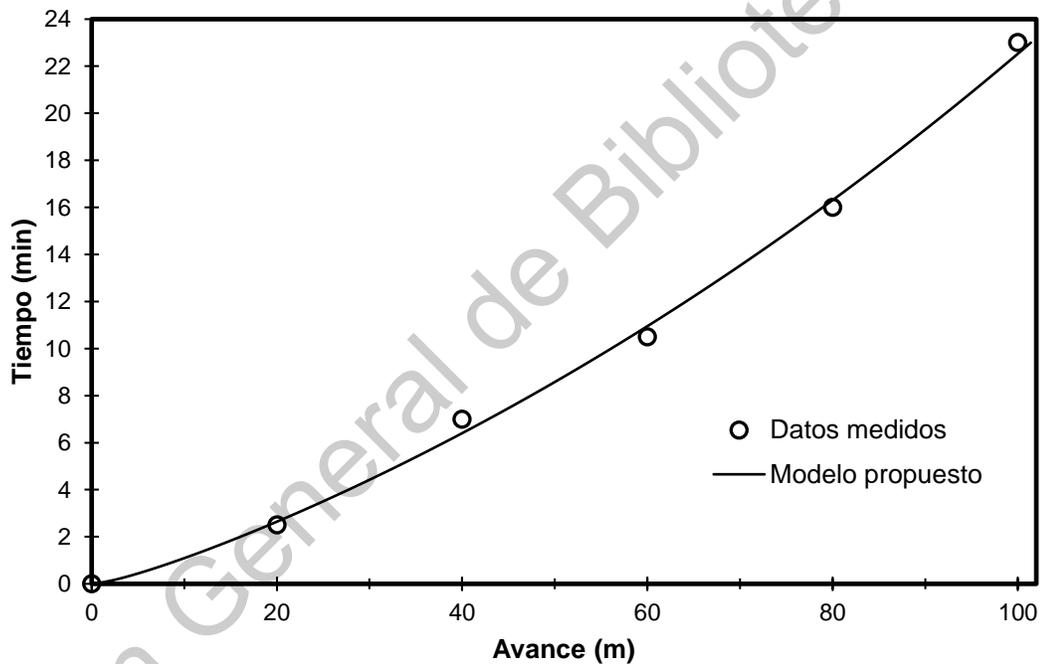


Figura 7-2. Curva de avance de los datos medidos y los obtenidos con la optimización de los parámetros.

Cuadro 7-1. Valores optimizados del ejemplo tomado de la literatura.

K_s (cm/h)	h_f (cm)	R^2
1.54	38.00	0.9978

En la Figura 7-2 se observa el buen ajuste de los datos medidos de la fase de avance y los obtenidos por el modelo propuesto al optimizar los parámetros de K_s y h_f mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt, por lo que se puede decir que el modelo propuesto es correcto y su funcionamiento queda verificado.

El modelo aquí propuesto arroja un $R^2 = 0.9978$, lo cual representa un buen ajuste del modelo a los datos medidos, mismo que puede verse en la Figura 7-3. Los resultados obtenidos de la optimización de parámetros apoyan la hipótesis de que los parámetros hidrodinámicos de conductividad hidráulica a saturación y presión en el frente de humedad varían en el tiempo y en el espacio.

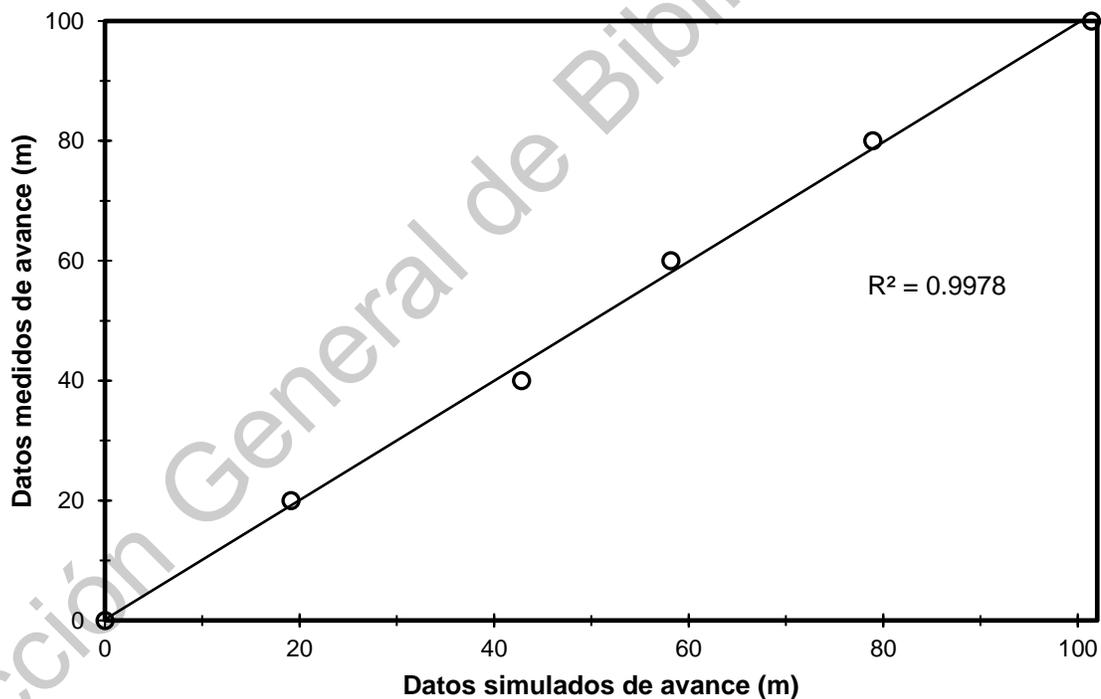


Figura 7-3. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados.

Adicionalmente se hace una comparación de resultados de la prueba de avance con el modelo presentado por Saucedo *et al.* (2016). En la Figura 7-4 se muestran los datos medidos, los simulados con el modelo de Saucedo *et al.* (2016) y por el modelo aquí propuesto. En la misma figura se observan ajustes idóneos para ambos modelos, sin embargo se aprecia que con el modelo aquí desarrollado la curva se va ajustando mejor conforme aumenta la longitud de avance del frente de onda, mientras que el modelo propuesto por Saucedo *et al.* (2016) se va alejando para coincidir exactamente con el último punto de la melga. Es de importancia hacer notar que para resolver el acoplamiento, de las ecuaciones aquí planteadas, Saucedo *et al.* (2016) usaron un esquema explícito ($R^2 = 0.997$), mientras que en este trabajo se utilizó un esquema implícito ($R^2 = 0.9978$). De esta manera se puede corroborar que aunque el tiempo de cómputo es mayor para resolver el sistema (para el mismo paso de tiempo), los resultados obtenidos disminuyen el error de predicción.

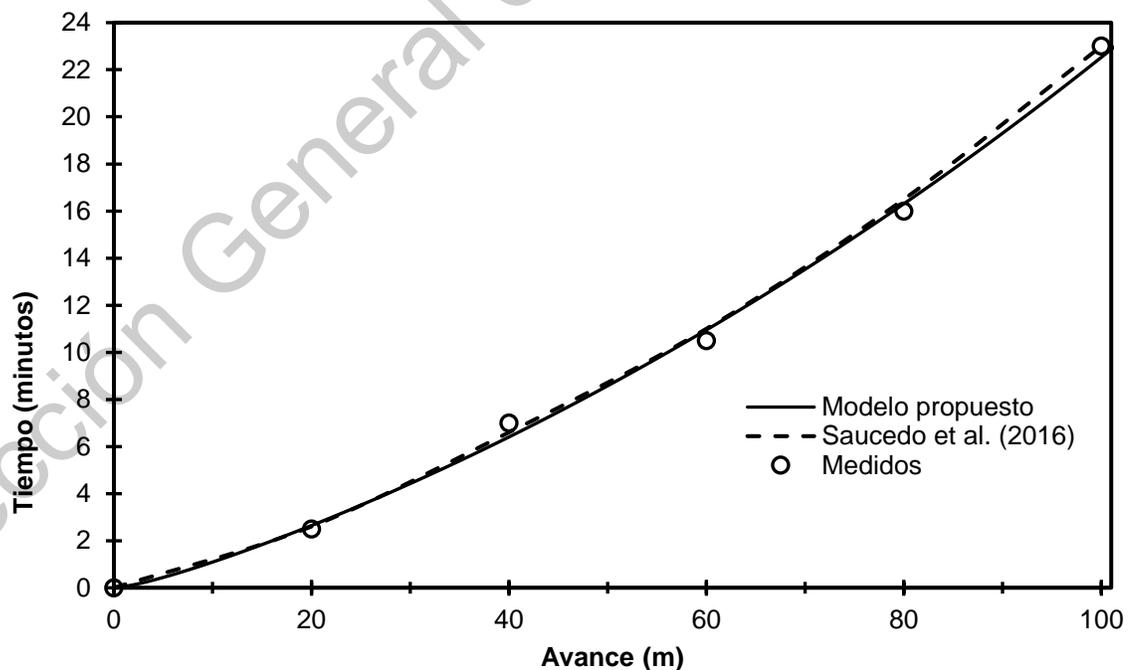


Figura 7-4. Comparación entre los datos medidos, los simulados por el modelo con parámetros optimizados y los obtenidos por Saucedo *et al.* (2016).

En la Figura 7-5 se muestra la evolución del tirante en diferentes puntos a lo largo de la melga, así como la lámina infiltrada. Se observa que el flujo superficial y subsuperficial siguen la misma tendencia en cualquier localización de la melga. Haciendo énfasis en el flujo superficial, se observa que existe un comportamiento asintótico, en donde llegan a un punto de estabilidad comparable al tirante normal.

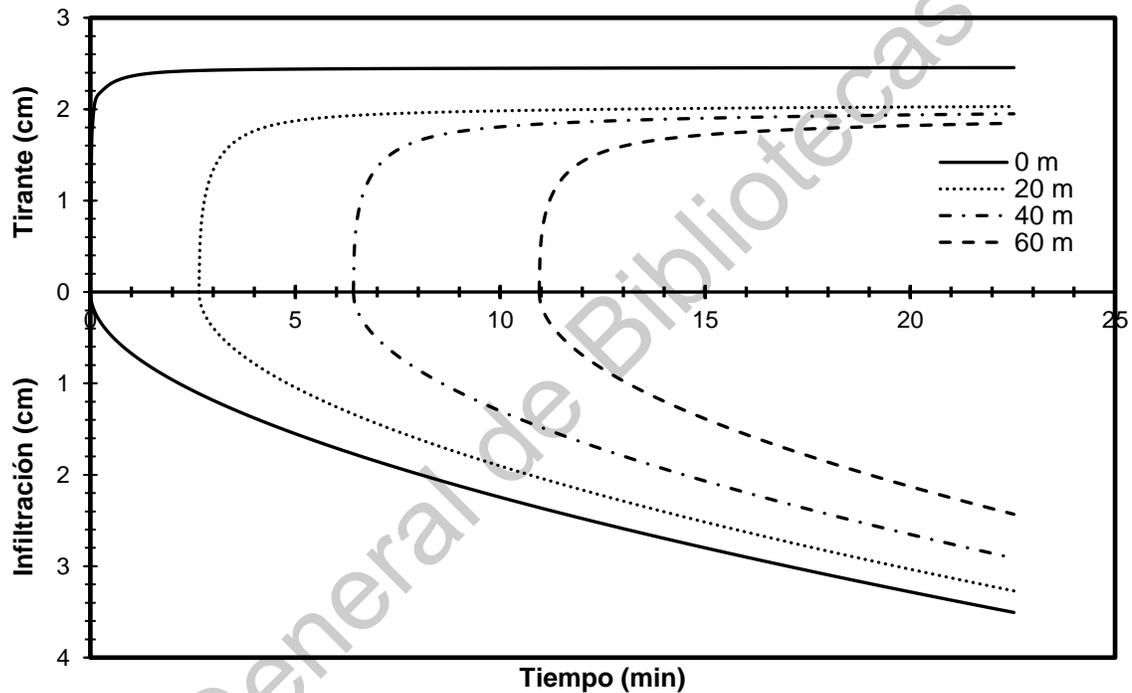


Figura 7-5. Evolución del tirante en diferentes puntos de la melga.

Con los valores optimizados de la prueba de riego (Cuadro 7-1) se procedió a calcular el gasto óptimo de riego con la ecuación (6.8) obteniendo un valor de $q_0 = 0.001223 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. En la Figura 7-6 se muestran las curvas de avance/infiltración para diferentes tiempos; se debe tomar en cuenta que se tiene un tirante normal de 2 cm.

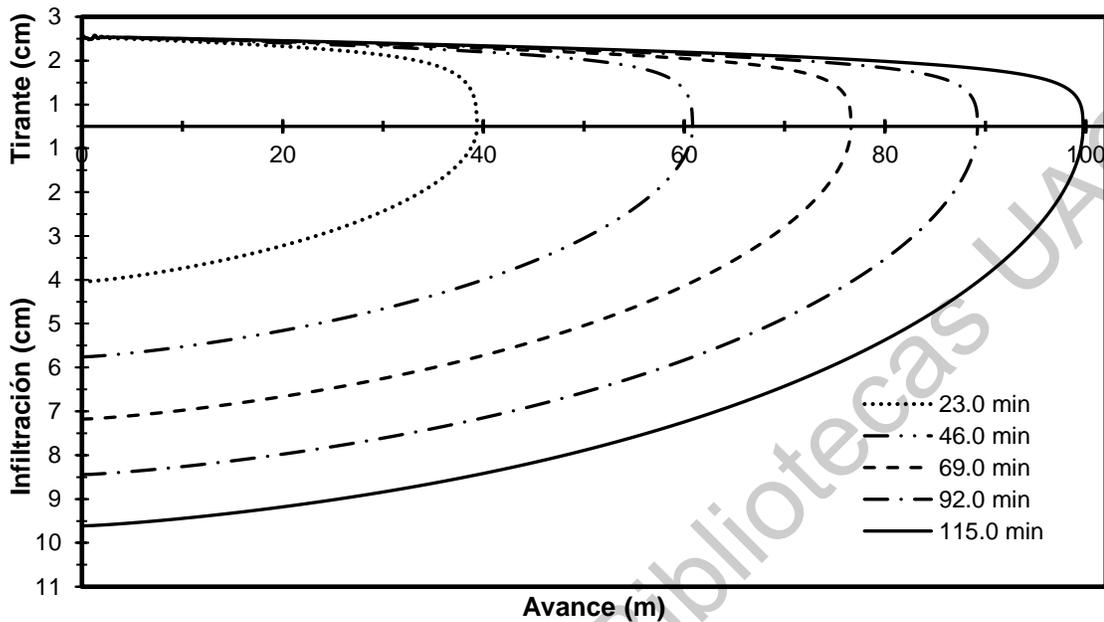


Figura 7-6. Curvas de avance para diferentes tiempos.

En la Figura 7-7 se muestran las láminas infiltradas y la variación del tirante con espaciamiento de 20 m para el gasto óptimo calculado. El cálculo del gasto óptimo de riego debe de realizarse con extrema precaución, ya que un valor diferente puede originar excesos o pérdidas en el perfil del suelo. En la Figura 7-8 se observa como una variación de 1.5 l/s en el gasto de entrada puede modificar significativamente el volumen de agua infiltrada, esto se debe a que con caudales más pequeños el agua en la superficie tiene una menor velocidad, lo que provoca que el tiempo de contacto del agua con el suelo sea mayor e incremente la lámina o volumen de agua infiltrada.

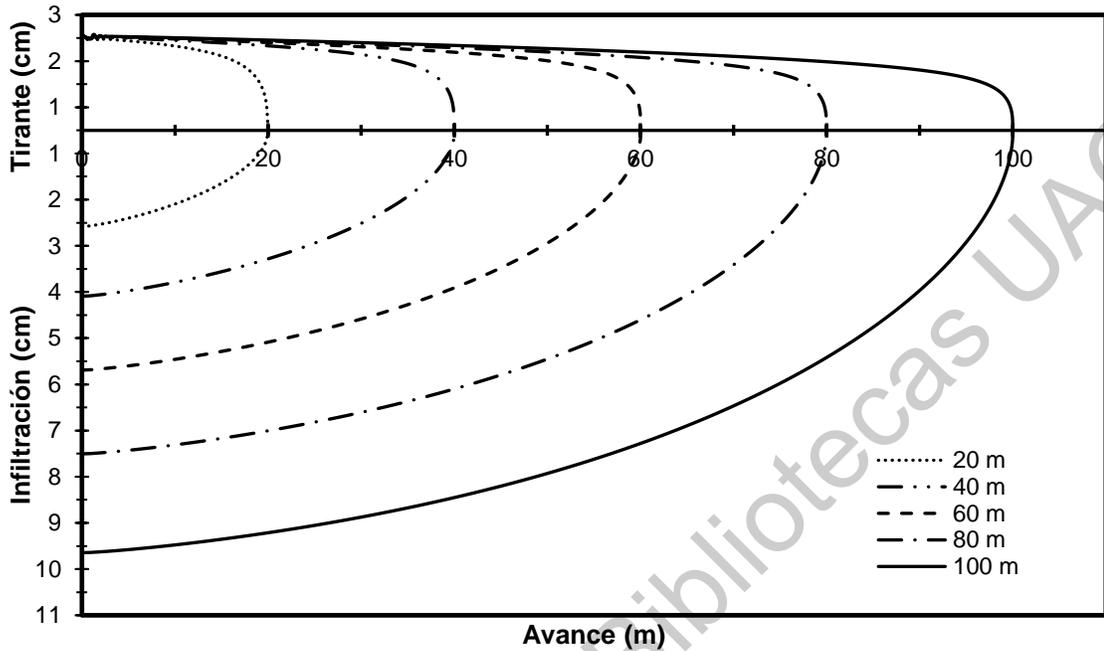


Figura 7-7. Curvas de avance y lámina infiltrada con espaciamiento de 20 m.

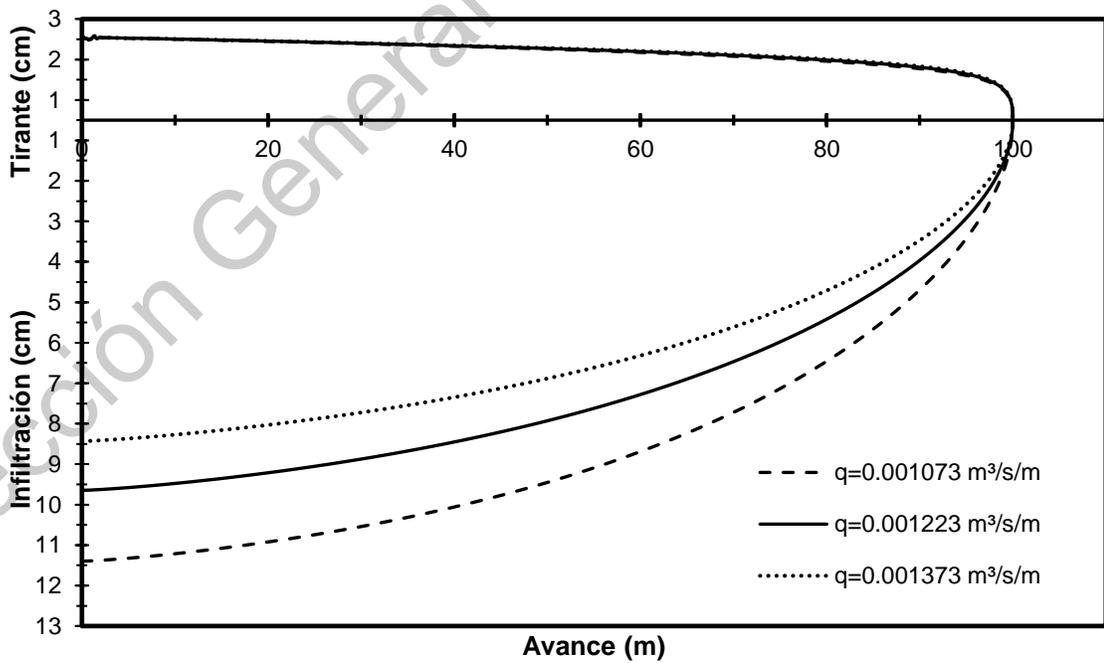


Figura 7-8. Curvas de avance con diferentes gastos.

El tiempo de cómputo empleado para resolver el problema inverso fue de 16 minutos y para el problema directo de 4.70 minutos. No obstante que el tiempo de cómputo que requiere Saucedo *et al.* (2016) para simular el problema directo (23 segundos) es menor que el tiempo que aquí se requiere (4.70 minutos), en el esquema implícito aquí utilizado se resuelven a la vez varios puntos, en general, todos los puntos de un Δt , mientras que para el esquema explícito se va calculando punto por punto. Además, aunque el esquema aquí planteado requiere de mayor costo computacional, los resultados obtenidos se ven reflejados en un menor error en la estimación de los parámetros y simulación de la fase de avance con respecto a los datos medidos en campo.

Una vez identificado que una de las limitaciones de este modelo es el tiempo de cómputo requerido para obtener la solución (directa o inversa), se procedió a realizar las mismas simulaciones aumentando la discretización temporal y los resultados son mostrados en el Cuadro 7-2. Los comparativos de los datos medidos y los resultados obtenidos con el modelo pueden verse en la Figura 7-9.

Es de importancia hacer notar que no existe diferencia para los diferentes Δt aquí estudiados, por lo tanto, para cuestiones de diseño es posible utilizar $\Delta t = 10s$ para aumentar la velocidad de procesamiento y con esto dar una respuesta rápida del proceso avance/infiltración en cada parcela de riego. Se recomienda utilizar Δt más pequeños para cuestiones de investigación, ya que se requiere minimizar los errores y observar el fenómeno a detalle con la finalidad de brindar soluciones con investigaciones de alto impacto para la sociedad.

Cuadro 7-2. Tiempo de cómputo para diferentes pasos de tiempo (Δt).

Δt (s)	Tiempo de cómputo (min)	R^2
1.0	4.70	0.9978
1.5	2.10	0.9978
2.0	1.16	0.9978
5.0	0.21	0.9978
10.0	0.06	0.9978

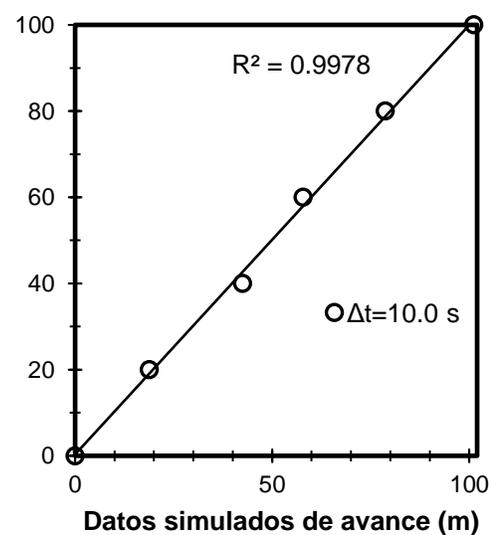
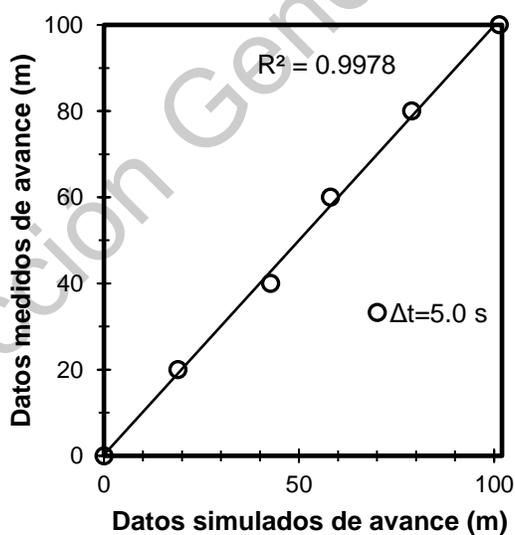
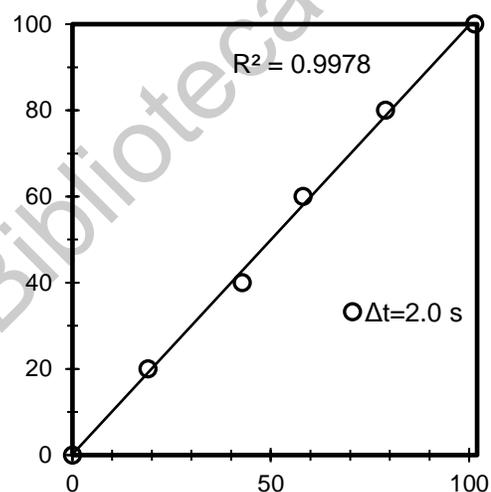
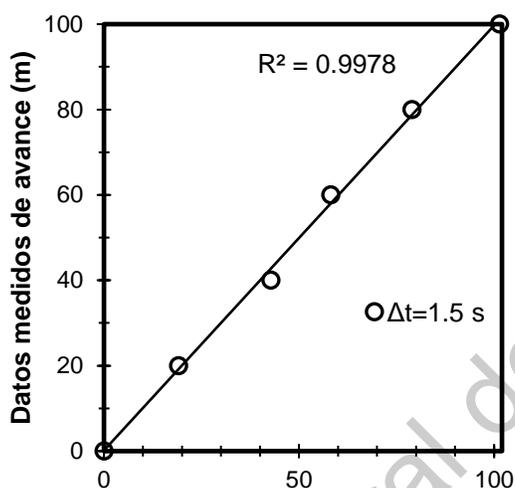


Figura 7-9. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados a diferentes pasos de tiempo (Δt).

7.2. Suelo con presencia de manto freático somero

Mediante el acoplamiento numérico de la solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero propuesto por Fuentes *et al.* (2010) al modelo desarrollado en este trabajo, se realizó una simulación con la información reportada por Pacheco (1994) de un suelo arcilloso con manto freático somero localizado en La Chontalpa, Tabasco, México: gasto total de aporte en la entrada de la melga $Q = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$, ancho de la melga $B = 10.5 \text{ m}$, gasto unitario de aporte en la entrada $q_0 = 0.001428 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, longitud de la melga $L = 100 \text{ m}$, pendiente de la melga $J_0 = 0.00085 \text{ m}/\text{m}$, contenido volumétrico de humedad inicial $\theta_0 = 0.4386 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, contenido volumétrico de humedad a saturación $\theta_s = 0.5245 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, profundidad del manto freático $P_f = 0.5 \text{ m}$, parámetro adimensional asociado con la extracción de cantidad de movimiento debido a la infiltración $\lambda = 0$. En la ley de resistencia hidráulica, ecuación (5.12), se utilizó $d = 1$ y a partir del valor del tirante normal se calculó k .

La evolución de la lámina infiltrada en el suelo se calculó con la ecuación (4.16) (Figura 7-10) donde se observa que después de 36 minutos de iniciado el riego el suelo llega a su punto máximo de infiltración. Una vez que el suelo llega a ese punto máximo, ya no es capaz de almacenar más agua, por lo tanto se considera un suelo completamente saturado.

Los perfiles de avance y lámina infiltrada se muestran en la Figura 7-11, donde se puede observar que la infiltración sobre todo punto de la melga está limitada por la infiltración máxima calculada (Figura 7-10). También se muestra que a partir de la tercera curva (39 min) cierta región del suelo ya alcanzó el punto máximo de saturación, motivo por el cual el suelo ya no puede almacenar más agua. Dada la complejidad para obtener las raíces en la solución analítica, el tiempo empleado para este proceso fue de 55 minutos, sin embargo, como se mencionó con

anterioridad, se puede aumentar la discretización temporal para tener resultados confiables en un menor tiempo.

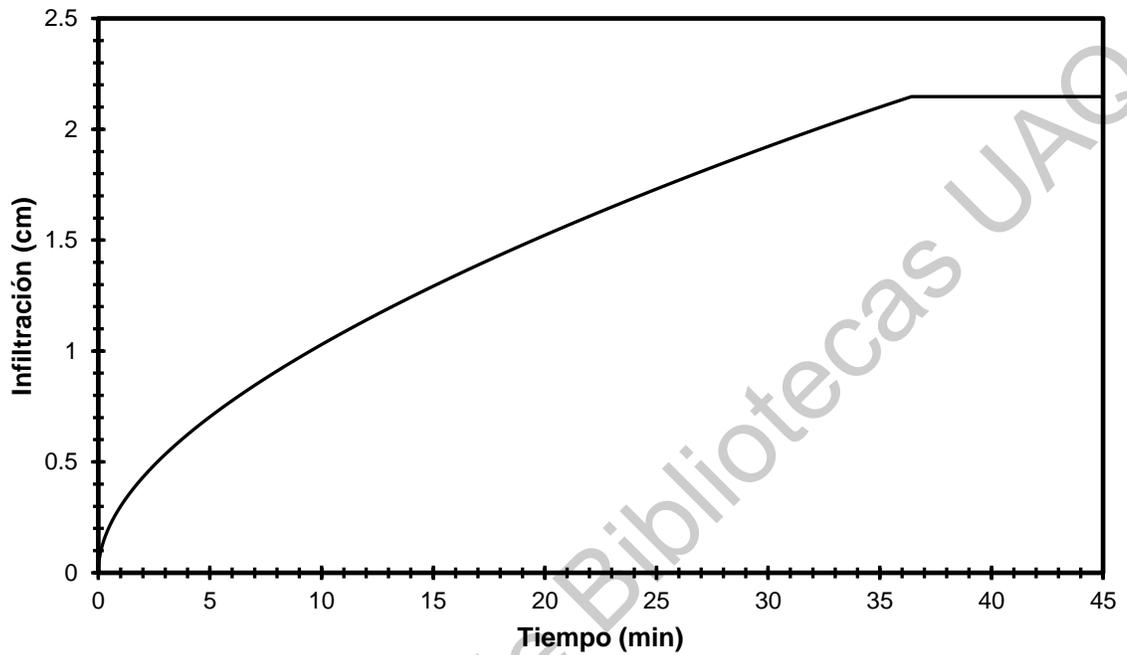


Figura 7-10. Evolución de la lámina infiltrada en un riego por melgas con manto freático somero.

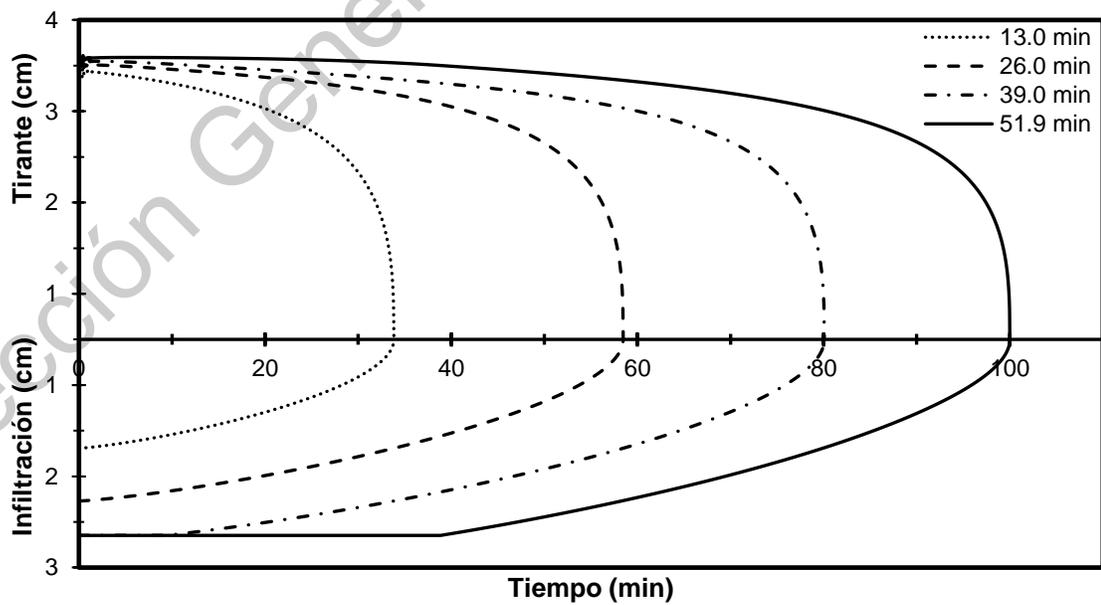


Figura 7-11. Perfiles de flujo cada 20 minutos de un riego por melgas con manto freático somero.

De acuerdo con lo presentado en el Cuadro 7-3 se nota que no existe diferencia para los diferentes Δt aquí estudiados, por lo tanto, para cuestiones de diseño se recomienda utilizar $\Delta t = 10s$ para aumentar la velocidad de procesamiento y con esto dar una respuesta rápida del proceso avance/infiltración en cada parcela de riego en donde se encuentre un manto freático somero. Los datos fueron comparados usando una simulación con un $\Delta t = 1s$, para observar si aumentando el Δt se perdía precisión, caso que no ocurrió debido al buen ajuste que presentan los datos, como se muestra en la Figura 7-12. Se recomienda utilizar Δt más pequeños para cuestiones de investigación, ya que se requiere minimizar los errores y observar el fenómeno a detalle con la finalidad de brindar soluciones con investigaciones de alto impacto para la sociedad.

Cuadro 7-3. Tiempo de cómputo para diferentes pasos de tiempo (Δt) con manto freático somero.

Δt (s)	Tiempo de cómputo (min)	R^2
1.0	55.0	
1.5	14.5	1.0
2.0	8.2	1.0
5.0	1.3	1.0
10.0	0.3	1.0

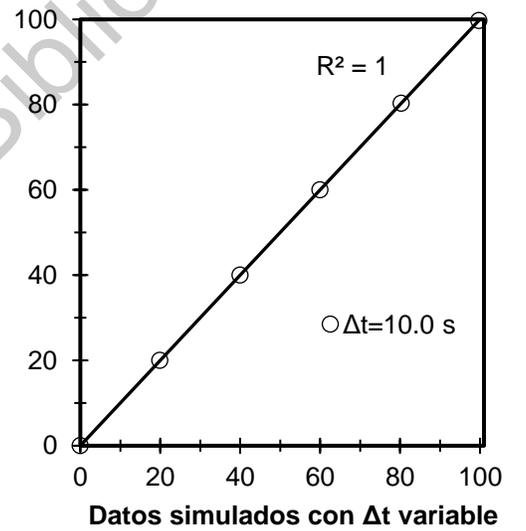
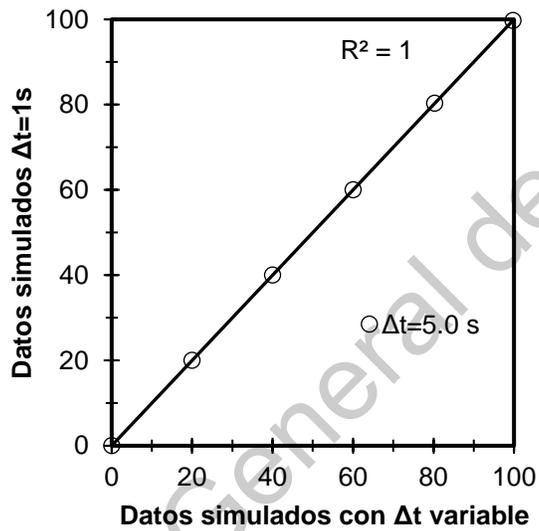
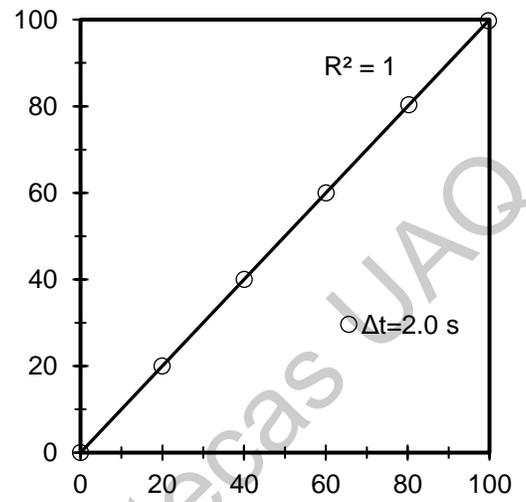
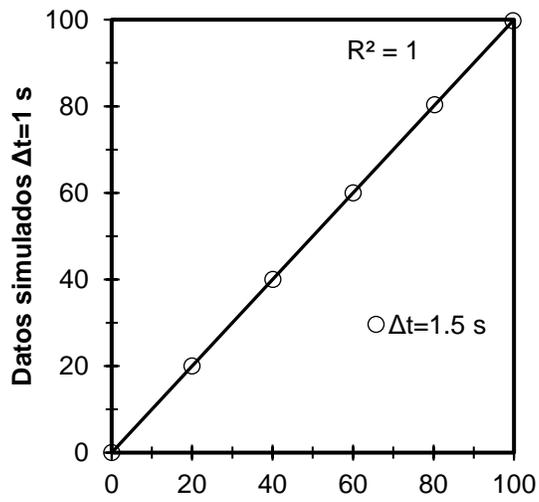


Figura 7-12. Relación entre los datos medidos y los simulados por el modelo con parámetros optimizados a diferentes pasos de tiempo (Δt).

8. CONCLUSIONES

Se implementó una solución numérica de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant acopladas a la ecuación de Green y Ampt que permite describir las fases de avance del riego por melgas. La solución propuesta del modelo utiliza un esquema Lagrangiano en diferencias finitas el acoplamiento numérico interno se resuelve a partir del método de Newton-Raphson. La evaluación del modelo en la simulación de la fase de avance reveló que éste se ajusta bien con las mediciones de campo.

El modelo aquí utilizado para calcular los parámetros hidrodinámicos del suelo, necesarios para obtener el gasto de riego óptimo, a través de la solución del problema inverso mediante el algoritmo de optimización de Levenberg-Marquardt, mostró excelentes resultados. Este gasto se permite aplicar una lámina de riego uniforme, con pérdidas de agua nulas por coleos y mínimas por infiltración profunda (percolación).

De acuerdo con la solución obtenida, se observó la sensibilidad en las primeras celdas de cálculo del coeficiente n , donde a mayor valor de éste, la inestabilidad se reducía considerablemente hasta desaparecer en escala de dibujo. De importancia hacer notar que la ley de resistencia hidráulica brinda la facilidad de estudiar y analizar las pruebas de riego en melgas con tiradas muy grandes, lo que nos da opción de utilizarla para diferentes regímenes de flujo.

El acoplamiento numérico de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant con la solución analítica para un suelo con manto freático somero, permite analizar el efecto de éste en el proceso de infiltración, relacionado con la lámina máxima que puede almacenar el suelo y al cultivo más apto para establecerse con esta característica, igualmente como afecta al proceso de la onda de avance en la superficie.

El tiempo de cómputo necesario para resolver el problema directo o inverso es mayor al que se necesita para el método explícito en el mismo paso de tiempo ($\Delta t = 1 \text{ s}$), sin embargo, es compensado al tener una mayor precisión en los datos simulados con los datos medidos, mismo que se refleja en una disminución del error. Adicionalmente, el modelo aquí propuesto tiene la ventaja de que si aumentamos el Δt , la velocidad de cómputo disminuye en 98.80% y los resultados de los datos medidos contra los simulados son excelentes.

Finalmente, la solución aquí mostrada puede ser utilizada con excelentes resultados para diseñar y modelar el riego por gravedad, ya que las ecuaciones de infiltración utilizadas para un perfil de humedad inicial constante y con presencia de manto freático somero, utilizan parámetros característicos del suelo (K_s y h_f). Lo anterior lo hace un modelo robusto eficiente en contraste con otros modelos reportados en la literatura que utilizan ecuaciones de infiltración sin base física como la de Kostiakov y Kostiakov-Lewis (Walker, 2005; Gillies y Smith, 2015; Bautista *et al.*, 2016). Adicionalmente, facilita el cálculo del gasto óptimo para hacer un uso eficiente del agua en sistemas de riego por gravedad.

9. LITERATURA CITADA

- Adamala, S., Raghuwanshi, N. S., y Mishra, A. (2014). Development of Surface Irrigation Systems Design and Evaluation Software (SIDES). *Computers and Electronics in Agriculture*, 100(January), 100–109. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2013.11.004>
- Akbari, M., Gheysari, M., Mostafazadeh-Fard, B., y Shayannejad, M. (2018). Surface irrigation simulation-optimization model based on meta-heuristic algorithms. *Agricultural Water Management*, 201(January), 46–57. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2018.01.015>
- Barré de Saint-Venant, A. J. C. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 73, 147–154 y 237–240.
- Bautista, E., Albert J. Clemmens, Strelkoff, T., y Schlegel, J. (2009). Modern analysis of surface irrigation systems with WinSRFR. *Agricultural Water Management*, 96(7), 1146–1154. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2009.03.007>
- Becerra, A., y Tafur Hermann, H. (2006). HYDRAULIC SIMULATION SOFTWARE OF THE IRRIGATION BY FURROWS USING THE KINEMATICS WAVE MODEL (PART I: Theoretical foundation). *Dyna*, 73(149), 107–117.
- Castanedo, V., Saucedo, H., y Fuentes, C. (2013). Comparación entre un modelo hidrodinámico completo y un modelo hidrológico en riego por melgas. *Agrociencia*, 47(3), 209–223.
- Chávez, C., y Fuentes, C. (2018). Optimización del riego por surcos mediante una fórmula analítica y su impacto en la reducción del agua aplicada. *Agrociencia*, 52(4), 483–496.
- Chávez, C., y Fuentes, C. (2019). Design and evaluation of surface irrigation systems applying an analytical formula in the irrigation district 085, La Begoña, Mexico. *Agricultural Water Management*, 221(August 2018), 279–285. <https://doi.org/10.1016/j.agwat.2019.04.027>

- Chen, C. (1970). Surface irrigation using kinematic-wave method. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 96(1), 39–46.
- CONAGUA. (2018). *Estadísticas del Agua en México* (p. 306). Comisión Nacional del Agua.
- Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. En *Recherche* (p. 647). Dalmont, Paris.
- Elliott, R. L., Walker, W. R., y Skogerboe, G. V. (1982). Zero-inertia modeling of furrow irrigation advance. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 108(3), 179–195.
- Fuentes, C. (1989). Teoría de la infiltración unidimensional: 2. La infiltración vertical. *Agrociencia*, 78, 119–153.
- Fuentes, C. (1992). *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Universidad Joseph Fourier.
- Fuentes, C., y Chávez, C. (2020). Analytic Representation of the Optimal Flow for Gravity Irrigation. *Water*, 12(10), 2710. <https://doi.org/10.3390/w12102710>
- Fuentes, C., Chávez, C., y Zataráin, F. (2010). Una solución analítica de la infiltración en un suelo con manto freático somero: Aplicación al riego por gravedad. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 1(3), 39–49.
- Fuentes, C., De León Mojarro, B., y Hernández-Saucedo, F. R. (2012). Capítulo 1: Hidráulica del Riego por Gravedad. En C. Fuentes y L. Rendón (Eds.), *Riego por gravedad* (1st Ed., pp. 1–60). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Fuentes, C., De León Mojarro, B., Saucedo, H., Parlange, J.-Y., y Antonino, A. C. (2004). El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica. *Ingeniería Hidráulica en México*, 19(2), 65–75. <http://repositorio.imta.mx/handle/20.500.12013/755>
- Fuentes, S., Trejo-Alonso, J., Quevedo, A., Fuentes, C., y Chávez, C. (2020). Modeling Soil Water Redistribution under Gravity Irrigation with the Richards Equation. *Mathematics*, 8(9), 1581. <https://doi.org/10.3390/math8091581>
- Gillies, M. H., y Smith, R. J. (2015). SISCO: surface irrigation simulation, calibration and optimisation. *Irrigation Science*, 33(5), 339–355.

<https://doi.org/10.1007/s00271-015-0470-8>

- González-Camacho, M. J., Muñoz-Hernández, B., Acosta-Hernández, R., y Mailhol, J. C. (2010). Modelo de la onda cinemática adaptado al riego por surcos cerrados/Kinematic wave model adapted to irrigation with closed-end furrows. *Agrociencia*, 40(6), 731–740.
- Green, W. H., y Ampt, G. A. (1911). Studies on Soil Physics. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), 1–24. <https://doi.org/10.1017/S0021859600001441>
- Haverkamp, R., Debionne, S., Angulo-Jaramillo, R., y De Condappa, D. (2016). Soil properties and moisture movement in the unsaturated zone. *The Handbook of Groundwater Engineering: Third Edition*, 149–190. <https://doi.org/10.1201/9781315371801>
- Katopodes, N. D., y Strelkoff, T. (1977). Hydrodynamics of border irrigation-complete model. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 103(3), 309–324.
- Kostiakov, A. N. (1932). On the dynamics of the coefficient of water percolation in soils and the necessity of studying it from the dynamic point of view for the purposes of amelioration. *Trans. Sixth Comm. Int. Soc. Soil Sci.*, 1, 7–21.
- Lewis, M. R., y Milne, W. E. (1938). Analysis of border irrigation. *Agricultural Engineering*, 19(6), 262–272.
- Liggett, A. J., y Cunge, J. A. (1975). Numerical method of solution of the unsteady flow equations. En *Unsteady Flow in Open Channels* (Vol. 1, pp. 89–182). Water Res. Publ.
- Moré, J. J. (1978). The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory. En *Numerical analysis* (pp. 105–116). <https://doi.org/10.1007/BFb0067700>.
- Pacheco, P. (1994) Comparación de los métodos de riego por surcos y por melgas y alternativas de diseño en el cultivo del arroz (*Oryza sativa* L). Tesis de Maestría en Ciencias. Montecillo, México: Centro de Hidrociencias, Colegio de Postgraduados.
- Parlange, J.-Y. (1975). On Solving the Flow Equation in Unsaturated Soils by Optimization: Horizontal Infiltration. *Soil Science Society of America Journal*, 39(3), 415–418. <https://doi.org/10.2136/sssaj1975.03615995003900030019x>

- Parlange, J.-Y., Haverkamp, R., y Touma, J. (1985). Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil Science*, 139(4), 305–311.
- Parlange, J.-Y., Lisle, I., Braddock, R. D., y Smith, R. E. (1982). The three-parameter infiltration equation. *Soil Science*, 133(6), 337–341. <https://doi.org/10.1097/00010694-198206000-00001>
- Rendón, L., Fuentes, C., y Magaña, G. (1997). Diseño del riego por gravedad. En *Manual para diseño de zonas de riego pequeñas* (pp. 1–86). Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Rendón, L., Saucedo, H., y Fuentes, C. (2012). Capítulo 7: Diseño del Riego por Gravedad. En C. Fuentes y L. Rendón (Eds.), *Riego por gravedad* (1st Ed., pp. 324–357). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318–333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- Rogowski, A. S. (1971). Watershed Physics: Model of the Soil Moisture Characteristic. *Water Resources Research*, 7(6), 1575–1582. <https://doi.org/10.1029/WR007i006p01575>
- Sakkas, J. G., y Strelkoff, T. (1974). Hydrodynamics of Surface Irrigation—Advanced Phase. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 100(1), 31–48.
- Saucedo, H., Fuentes, C., y Zavala, M. (2005). El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 2. Acoplamiento numérico para la fase de avance en el riego por melgas. *Ingeniería Hidráulica en México*, 20(2), 109–119.
- Saucedo, H., Fuentes, C., y Zavala, M. (2012). Capítulo 6: Modelación del Riego por Gravedad con las Ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards. En C. Fuentes y L. Rendón (Eds.), *Riego por gravedad* (1st Ed., pp. 267–320). Universidad Autónoma de Querétaro.
- Saucedo, H., Pacheco, P., Fuentes, C., y Zavala, M. (2003). Efecto de la posición del manto freático en la evolución del frente de avance en el riego por melgas. *Ingeniería Hidráulica en México*, 18(4), 119–126.

- Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. (2015). Diseño de riego por melgas empleando las ecuaciones de Saint-Venant, y Green y Ampt. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 6(5), 103–112.
- Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. (2016). Estimación de parámetros de infiltración a partir de mediciones de avance de riego por melgas empleando las ecuaciones de Saint-Venant, y Green y Ampt. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 7(1), 117–124.
- Saucedo, H., Zavala, M., Fuentes, C., y Castanedo, V. (2013). Gasto óptimo en riego por melgas. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 4(3), 135–148.
- Smith, R. E. (1972). Border irrigation advance and ephemeral flood waves. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 98(2), 289–307.
- Strelkoff, T., y Katopodes, N. D. (1977). Border-Irrigation Hydraulics With Zero Inertia. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 103(3), 325–342.
- Tabuada, M. A., Rego, Z. J. C., Vachaud, G., y Pereira, L. S. (1995). Modelling of furrow irrigation. Advance with two-dimensional infiltration. *Agricultural Water Management*, 28(3), 201–221. [https://doi.org/10.1016/0378-3774\(95\)01177-K](https://doi.org/10.1016/0378-3774(95)01177-K)
- Valipour, M., Sefidkouhi, M. A. G., y Eslamian, S. (2015). Surface irrigation simulation models: a review. *International Journal of Hydrology Science and Technology*, 5(1), 51. <https://doi.org/10.1504/ijhst.2015.069279>
- Walker, W. R., y Humpherys, A. S. (1983). Kinematic-Wave furrow irrigation model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 109(4), 377–392.
- Walker, W. R., y Skogerboe, G. V. (1987). *Surface irrigation. Theory and practice*. Prentice-Hall.
- Woolhiser, D. A. (1975). Simulation of unsteady overland flow. En K. Mahmood y V. Yevjevich (Eds.), *Unsteady flow in open channels* (Vol II, pp. 485–508). Water Resources Publications Fort Collins.
- Zerihun, D., Furman, A., Warrick, A. W., y Sanchez, C. A. (2005a). Coupled Surface-Subsurface Flow Model for Improved Basin Irrigation Management. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 131(2), 111–128. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2005\)131:2\(111\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2005)131:2(111))

Zerihun, D., Furman, A., Warrick, A. W., y Sanchez, C. A. (2005b). Coupled Surface–Subsurface Solute Transport Model for Irrigation Borders and Basins. I. Model Development. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 131(5), 396–406. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2005\)131:5\(396\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2005)131:5(396))

Dirección General de Bibliotecas UAQ