Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias (Instrumentación y Control Automático)

Análisis de estabilidad y modelado de un péndulo invertido con ruedas.

T E S I S

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias
(Instrumentación y Control Automático)

P R E S E N T A:

Ing. Omar Núñez Anguiano

D I R E C T O R:

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán

Centro Universitario, Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, Qro.

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ciencias (Instrumentación y Control Automático)

Análisis de estabilidad y modelado de un péndulo invertido con ruedas.

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de:

Maestro en Ciencias
(Instrumentación y Control Automático)

P R E S E N T A:

Ing. Omar Núñez Anguiano

D I R E C T O R:

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán

Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán — Firma
Presidente

Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano — Firma
Secretario

M. en C. Moisés Agustín Martínez Hernández — Firma
Vocal

Dr. Juvenal Rodríguez Reséndiz — Firma
Suplente

Dr. Suresh Thenozhi — Firma
Suplente

Dr. Manuel Toledano Ayala — Firma
Director de la Facultad

Dr. Juan Carlos A. Jáuregui Correa — Firma
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario, Universidad Autónoma de Querétaro, Santiago de Querétaro, Qro.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y MODELADO DE UN PÉNDULO INVERTIDO CON RUEDAS.

TESIS

QUE COMO PARTE DE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
(INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL AUTOMÁTICO)

P R E S E N T A:

ING. OMAR NÚÑEZ ANGUIANO

D I R E C T O R:

DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN

DR. VÍCTOR MANUEL HERNÁNDEZ GUZMÁN
PRESIDENTE

DR. ROBERTO VALENTÍN CARRILLO SERRANO
SECRETARIO

M. EN C. MOISÉS AGUSTÍN MARTÍNEZ HERNÁNDEZ
VOCAL

DR. JUVENAL RODRÍGUEZ RESÉNDIZ
SUPLENTE

DR. SURESH THENOZHI
SUPLENTE

CENTRO UNIVERSITARIO, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, SANTIAGO DE QUERÉTARO, QRO.

Resumen

En este trabajo, se calcula el modelo dinámico de un péndulo invertido con ruedas considerando las restricciones no holonómicas correspondientes y todos los grados de libertad. Para esto, primero obtenemos el mecanismo cinético y las energías potenciales y luego empleamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico del mecanismo rígido. Después de eso, establecemos las restricciones no holonómicas y las aplicamos al modelo dinámico del mecanismo rígido que ya hemos obtenido. Se verifica que el modelo dinámico obtenido satisface las propiedades fundamentales: la matriz de inercia es simétrica y positiva definida, la derivada del tiempo de la matriz de inercia y la matriz de Coriolis satisface una condición conocida, etc. También se diseña un controlador que permite que el péndulo permanezca invertido mientras alcanza la orientación deseada y la velocidad deseada. Esto se realiza asegurando la estabilidad de Lyapunov y una cota última. El esquema de control diseñado también permite resolver la tarea de control propuesta, incluso si el mecanismo se ve obligado a subir cuando el piso tiene pendientes constantes diferentes de cero.

Palabras clave: Modelo dinámico, ecuaciones Euler-Lagrange, restricciones no holonómicas, estabilidad de Lyapunov

Abstract

In this work, it is computed the dynamical model of a wheeled inverted pendulum by considering the corresponding nonholonomic constraints and all of the degrees-of-freedom. For this, we first obtain the mechanism kinetic and potential energies and then we employ the Euler-Lagrange equations to obtain the dynamical model of the rigid mechanism. After that, we establish the nonholonomic constraints and we apply them to the dynamical model of the rigid mechanism that we have already obtained. It is verified that the obtained dynamical model satisfies the fundamental properties: the inertia matrix is symmetric and positive definite, the time derivative of the inertia matrix and the Coriolis matrix satisfies a well-known condition, etc. It is also designed with a controller that allows the pendulum to remain inverted while reaching the desired orientation and the desired velocity. This is performed by ensuring Lyapunov stability and ultimate boundedness. The designed control scheme also allows solving the proposed control task even if the mechanism is forced to climb when the floor has a different from zero constant slopes.

Keywords: Dynamic model, Euler-Lagrange equations, nonholonomic constraints, Lyapunov's stability

Dedicado
a mi familia

Agradecimientos

"Soy un instrumento de Dios. Él me sostiene mientras realizo sus designios, me rompe como un vaso, y finalmente me hace crecer con la raíz de un árbol."

Agradezco a la fuerza divina que nos creó, dueña y fuente de todo conocimiento sustento, sin la cual podríamos imaginar ser testigo y participes del magnífico y asombroso acto de conocer, hacer y crear ciencia y tecnología en este privilegiado universo que vivimos.

Un infinito agradecimiento a mis padres, por todo su amor, apoyo, paciencia y confianza para impulsarme y brindarme todas las herramientas para mi crecimiento personal y profesional durante cada etapa de mi vida, por su incondicional motivación que me han dado en todo momento, con el objetivo de superar mis metas y expectativas y lograr la realización de cada uno de mis sueños.

Así como un enorme agradecimiento a Adriana Urieta Avalos, por permanecer conmigo en cada noche de estudio, tener la paciencia y cariño durante estos años de mi vida académica, y permanecer ante la complijidad de la distancia y el tiempo.

Agradezco de forma especial a mi director de tesis, Dr. Víctor Manuel Hernández Guzmán, por su colaboración y dedicación en el desarrollo de ésta tesis, así como la oportunidad de haber formado parte de su grupo de investigación, y de la enseñanza de los amplios conocimiento brindados.

A mis sinodales, Dr. Roberto Valentín Carrillo Serrano y Dr. Moisés Agustín Martínez Hernández por sus sugerencias y comentarios respecto a esta tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por haberme brindado el apoyo finaciero durante mis estudios, y a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) por facilitarme sus instalaciones para mis estudios de posgrado.

Glosario

$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales.
$\mathbb{R}_+$	Conjunto de números reales positivos.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto vectorial de dimensión n.
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Conjunto matricial de dimensión $m \times n$.
q	Vector de coordenadas articulares dado por (2.1) en un sistema de n grados de libertado.
$\dot{q}$	Primera derivada del vector de coordenadas articulares.
$\ddot{q}$	Segunda derivada del vector de coordenadas articulares.
$L(q,\dot{q})$	Lagrangiano.
$T(q,\dot{q})$	Energía cinética.
$U(q)$	Energía potencial.
m_i	i-ésima masa del eslabón.
$\hat{g}^T$:	Vector aceleración de gravedad.
r_{ci}	Vector de coordenadas del centro de masa.
$\bar{F}$	Fuerza aplicada sobre un eslabón.
$\bar{d}$	Distancia recorrida por el eslabón bajo la influencia de la fuerza $\bar{F}$.
$M(q)$	Matriz de inercia.
$C(q,\dot{q})$	Matriz de coriolis.
$g(q)$	Matriz de aceleración.
$B(q)$	Matriz de pares aplicados.
τ_i	Par de control (Vector).
$A(q)$	Matriz de restricciones no holonómicas.
$S(q)$	Matriz de nulidad para aplicación restricciones no holonómicas a un sistema.
$v(q)$	Vector de coordenadas articulares aplicando restricciones no holonómicas.
$SO(n)$	Matriz de rotación de $n \times n$.
$g(q)$	Matriz de aceleración.
$R_{x,\theta}$	Matriz de rotación sobre eje x.
$R_{y,\theta}$	Matriz de rotación sobre eje y.
$R_{z,\phi}$	Matriz de rotación sobre eje z.
R^{-1}	Inversa de la matriz de rotación.
R^T	Transpuesta de la matriz de rotación.
$\dot{R}$	Derivada de la matriz de rotación.
$S(\omega(t))$	Matriz antisimétrica de un vector único $w(t)$.
$w(t)$	Vector de velocidad angular giratorio con respecto al marco de referencia.

J_v	Manipulador Jacobiano o Jacobiano de velocidades lineales.
J_w	Manipulador Jacobiano o Jacobiano de velocidades angulares.
v	Vector de velocidades lineales.
w	Vector de velocidades angulares.
I	Tensor de inercia.
t	Tiempo.
t_0	Tiempo inicial.
ε	Espacio de convergencia.
δ	Espacio de convergencia donde $\delta < \epsilon$.
$V(t, x)$	Función candidata de Lyapunov.
$E(x, y, z)$	Marco de referencia inercial.
$V(x_v, y_v, z_v)$	Marco de referencia del cuerpo del vehículo.
$P(x_p, y_p, z_z)$	Marco de referencia del cuerpo del péndulo.
b	Distancia de O a O_w donde O es el punto intermedio entre los centros de las ruedas.
R	Radio de las ruedas.
x	Posición en el eje x.
y	Posición en el eje y.
α	Ángulo de inclinación del péndulo, es decir, ángulo entre z y z_p.
θ	Ángulo de de orientación del vehículo, es decir, ángulo entre x y x_v.
I_{wa}	Momento de inercia de una rueda sobre su eje.
I_{wd}	Momento de inercia de una rueda sobre el diámetro.
M_w	Masa de la ruedas.
ϕ_r	Ángulo de rotación de las ruedas derecha.
ϕ_l	Ángulo de rotación de las ruedas izquierda.
ν	Velocidad de desplazamiento longitudinal.

Índice general

Índice de figuras

Prefacio

Este presente trabajo de tesis, es desarrollado para obtener el grado de estudio de maestría en ciencias (Instrumentación y control automático), sus bases principales están cimentadas en el desarrollo de estrategias de control para sistemas no lineales, utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov propuesta en 1893, sin embargo, su teoría comenzó a tener relevancia después de los años 60's. La estructura de este presente trabajo de tesis se divide en 5 capítulos, en los cuales, dichos capítulos son distribuidos de forma meticulosa para que el lector comprenda la metodología empleada.

El capítulo 1 de este trabajo de tesis, se centra en explicarle al lector la importancia del modelado matemático de los sistemas. También se amplía una breve reseña histórica con las aportaciones más destacadas en el área de control. De igual forma, se resumen los antecedentes actuales realizados en investigaciones sobre el péndulo invertido con ruedas.

En el capítulo 2, se realiza una explicación de los conceptos y definiciones que se deben de comprender para realizar el modelado matemático del sistema. De igual forma, se brinda al lector un preámbulo sobre la teoría de control moderna en robots. Para ello, resulta apropiado tener conocimientos básicos en calculo, álgebra lineal, dinámica de robots, entre otras definiciones matemáticas. En las primeras secciones de este capítulo se busca introducir al lector en el área de control y lo que implica el diseño de controladores para sistemas no lineales, y sistemas subactuados.

En secciones siguientes, se muestran las ecuaciones de Euler-Lagrange, junto a algunas demostraciones que resultan útiles en el modelado de sistema. Otra sección está destinada a la explicación de las restricciones no holonómicas y el método general para incluir restricciones no holonómicas en los sistemas Euler-Lagrange. Se han incluido secciones donde se estudian matrices de rotación y el Jacobiano del manipulador, dada la utilidad que tendrá en el presente trabajo. Finalmente, en la última sección se redactan teoremas y definiciones útiles del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

El capítulo 3 muestra el modelado dinámico del sistema, en la primera sección se establecen los marcos de referencia, las constantes del sistema y las variables de estado a considerar. En una segunda sección se describen las restricciones no holonómicas utilizadas y las implicaciones de dichas restricciones dentro del modelo dinámico. Finalmente, en la última sección se describe el procedimiento empleado para aplicar las restricciones no holonómicas en el sistema Euler-Lagrange.

Por su parte, el capítulo 4, se realiza el diseño del controlador en lazo cerrado. El controlador del sistema se divide en dos subsistemas, como una estrategia para proponer más fácil funciones candidatas de Lyapunov en el análisis de estabilidad. También con ayuda de las definiciones del capítulo 2 se obtienen las funciones de Lyapuniov y las condiciones que debe de cumplir. Además, el capítulo 4 muestra el análisis de estabilidad, donde con ayuda de ciertos teoremas y definiciones del capítulo 2 se demuestra la estabilidad local del sistema. Además, hay una sección con diversas simulaciones de condiciones a las cuales puede someterse el robot.

Finalmente, en el capítulo 5 se redactan todos los resultados y conclusiones obtenidas durante la investigación. Se agrega una sección con el trabajo futuro a realizar y las posibilidades de estudio y aprendizaje de estos sistemas.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los pasos más importantes dentro de la ingeniería de control es el modelado matemático del sistema que se desea controlar. Existe un balance, entre una buena representación matemática (Patete et al., 2011), es decir, el modelo matemático, que capture la dinámica del sistema real y la sencillez de representación. Dicho balance se debe mantener para lograr que el objetivo de control se cumpla a través de un diseño relativamente simple.

Cabe resaltar que la teoría de control moderno abrió las puertas a diferentes campos que generan diversas ramas del control automático como: Control lineal, control no lineal, control óptimo, control robusto, control adaptable, control jerárquico y control inteligente. Para el caso de esta tesis, nos enfocaremos en el control de no lineal, que es un área particularmente con alto nivel de matemáticas, como ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En donde los principios de superposición, la respuesta en frecuencia, las transformaciones de Laplace y Fourier, las reglas del lugar de las raíces, polos y ceros, y una solución analítica general no existen.

De esta manera, se ha generado en los últimos años un gran interés sobre las aplicaciones científicas e industriales que se pueden lograr por parte de los sistemas no lineales y su control. Se han motivado una serie de estudios por parte de los investigadores para indagar en el comportamiento de los sistemas mecánicos subactuados. Con la finalidad de desarrollar algoritmos de control que estabilicen sistemas similares como, barcos, vehículos acuáticos, helicópteros, aeronaves, satélites, o robots humanoides, que son sistemas subactuados. Las razones principales de estudio son:

- La dinámica del sistema.
- Reducir costos en el diseño.
- Propósitos prácticos.
- Mejoras en los actuadores del sistema.
- Crear sistemas no lineales artificiales complejos con el propósito de mejorar el control de sistemas subactuados de alto orden.

Por tales motivos, los péndulos invertidos han formado parte de un conjunto de banco de pruebas completo e interesante para la ingeniería de control y teoría de control, algunos de ellos se muestran en la Figura 1.1. Uno de los más estudiados de esta familia, debido a su complejidad, es el denominado péndulo invertido sobre el carro. Este consiste en un péndulo que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un vehículo o sistema móvil, que se mueve sobre una guía horizontal bajo la acción de una fuerza F (Aracil y Gordillo, 2010), está fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición del péndulo. El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento a menos que se aplique una fuerza de control adecuada (Ogata, 1996).

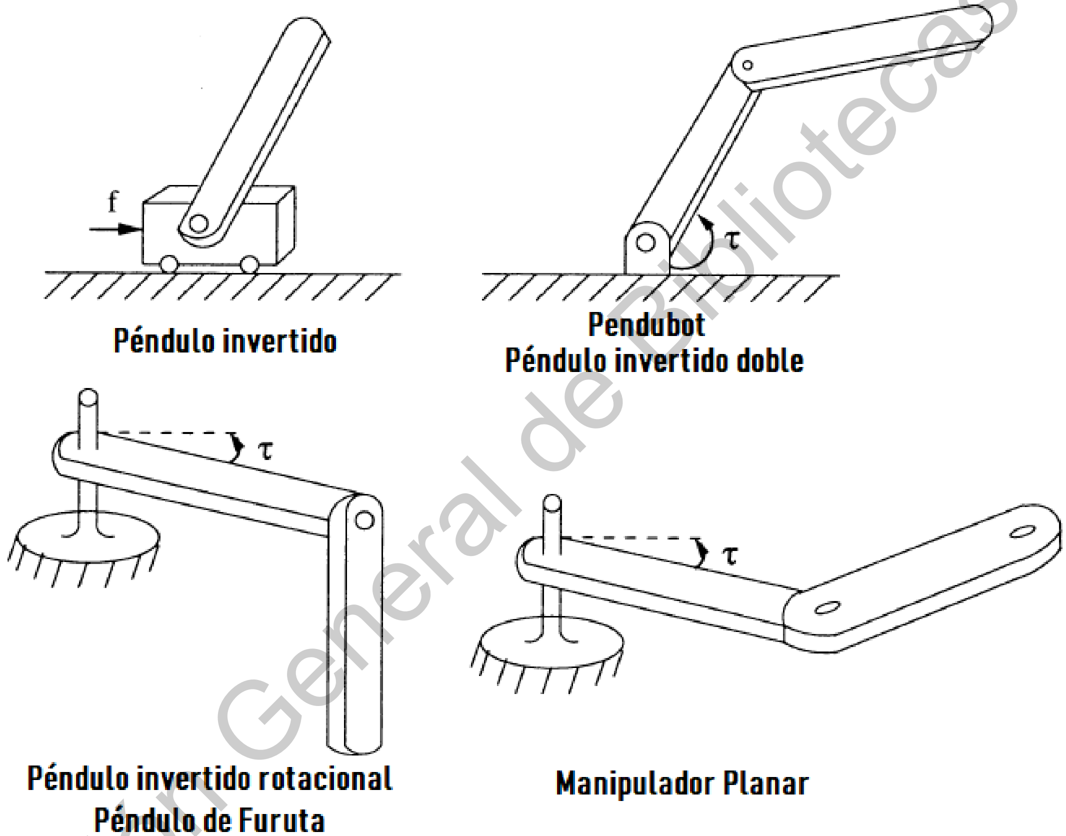


Figura 1.1: Familia de péndulos invertidos (Fantoni y Lozano, 2001).

1.1. Antecedentes

Desde antes de los años 70's, se han estudiado la familia de péndulos invertidos, debidos a que presentan una complejidad y análisis matemático por las características de inestabilidad, esto por ser parte de un conjunto de sistemas subactuados y por ser sistemas completamente no lineales. A continuación, se hace una breve reseña de alguno de los autores que han realizado y contribuido con su estudio.

Uno de los trabajos más antiguos, que muestra el panorama histórico de amplio campo de la teoría de control, fue escrito por Otto Mayr (Mayr, 1970), el cual describe detalladamente el control de diversos mecanismos de la edad media, de igual forma los creados en años posteriores. Una de las máquinas más antiguas que desarrolló el estudio de la teoría de control, fue el regulador de velocidad centrífugo para el control de velocidad, ver Figura 1.2 (Ogata, 2010), de una máquina de vapor, creado por James Watt en 1788 (Ogata, 1996, 2003).

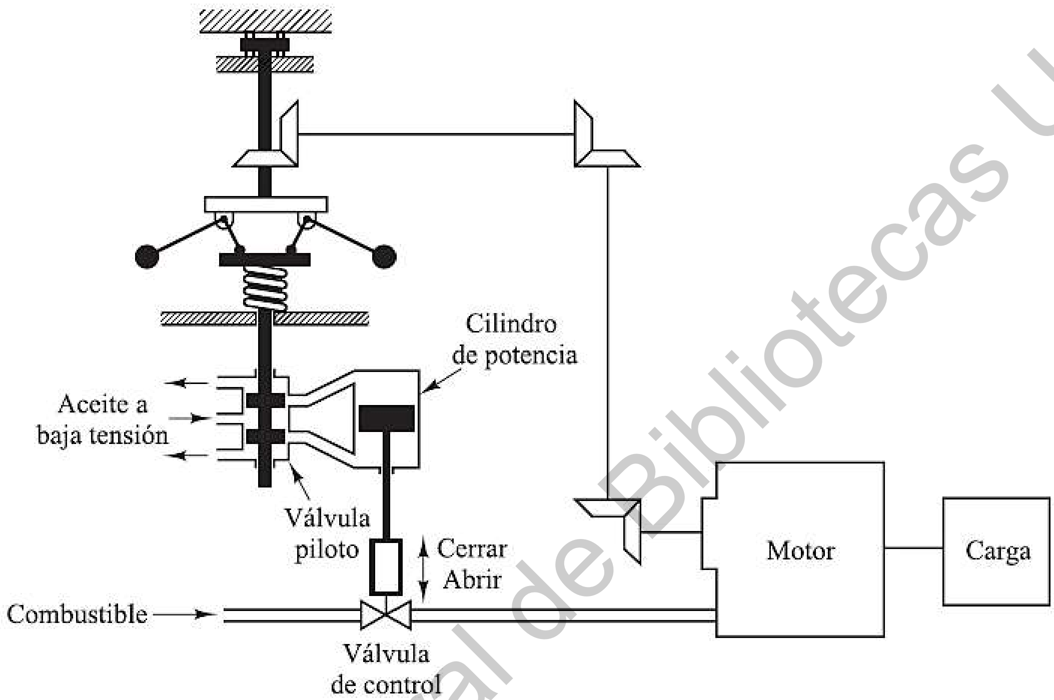


Figura 1.2: Regulador de velocidad centrífugo de James Watt, desarrollado en 1788 (Ogata, 2010).

Esto dio paso al primer estudio de estabilidad en control automático, realizado por J. C. Maxwell, donde desarrolló las ecuaciones diferenciales del regulador centrífugo de Watt, linealizando dichas ecuaciones cercas del punto de equilibrio, permitiendo estudiar el efecto de los parámetros en la estabilidad del sistema, mostrando por primera vez que un sistema es estable si las raíces tienen parte real negativa (Maxwell, 1868). Posterior a eso el investigador E. J. Routh, propuso una técnica numérica para determinar cuando la ecuación característica tiene raíces con parte real negativa, sistema lineal estable, sin necesidad de realizar operaciones matemáticas laboriosas, esto es conocido actualmente como criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz (Ogata, 1996, 2003; Ogata y Yang, 2002; Routh, 1877).

Tomando en cuenta el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, presenta una desventaja debido a que sólo aplica para una cantidad finita de términos. Debido a esto, en 1893 el ruso, Aleksandr M. Lyapunov desarrolló un elegante estudio utilizando la notación general de energía y la ecuación no lineal de movimiento, el cual es uno de los trabajos más relevantes en la teoría de control, donde propone un caso general para conocer la estabilidad del sistema (Lyapunov, 1992; L. Chernousko et al., 2008; Craig, 2006). Realizando una clasificación completa de los casos en que el origen es un punto de equilibrio estable, asintóticamente o en inestable; sin necesidad de solucionar el sistema, el cual apareció en la literatura de control hasta 1958.

Posteriormente, H. Nyquist, en 1932, creó la teoría de regeneración para el diseño de amplificadores estables basándose en un teorema de variable compleja (Nyquist, 1932; Ogata, 2003; Ogata y Yang, 2002; Dorf et al., 2005), dando lugar al conocido criterio de estabilidad de Nyquist. El criterio de Nyquist determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado partiendo de la respuesta en frecuencia en lazo abierto y los polos en lazo abierto (Dorf et al., 2005; Kuo, 1996), permitiendo determinar la estabilidad del sistema en lazo cerrado gráficamente a partir de curvas de respuesta en lazo abierto.

Un trabajo similar fue el estudiado por H. W. Bode en 1940, que investigó la estabilidad en lazo cerrado usando el margen de magnitud y fase, por medio de gráficas de respuesta en frecuencia de una función compleja (Bode, 1940; Bode et al., 1945). Otra gran contribución en el área de control fue hecha por W. R. Evans en 1948, proponiendo un enfoque para diseñar sistemas de control en sistemas lineales desarrollando técnicas y reglas para encontrar la ecuación característica por medio de un método gráfico, actualmente llamado método del lugar geométrico de las raíces, donde se representan las raíces de la función de transferencia para los parámetros del sistema, mostrando claramente la contribución que tiene cada polo o cero en lazo abierto a las posiciones de los polos en lazo cerrado (Ogata, 1996; Dorf et al., 2005; Ogata y Yang, 2002; Ogata, 2003; Kuo, 1996).

Por parte de sistemas en tiempo discreto, R. Bellman aplicó programación dinámica al control discreto, demostrando que la forma natural de solucionar problemas de control óptimo es por medio de un retraso en el tiempo, en 1957 (Bellman, 1966; Bertsekas et al., 1995). Por otro lado, se desarrolló el principio máximo de Pontryagin, que soluciona problemas de control utilizando el cálculo variacional creado por Euler en el siglo XVII (Pontryagin, 2018; Boltyanskiy et al., 1986).

Finalmente, R. E. Kalman, en 1960, hizo público el trabajo de Lyapunov acerca del control de sistemas no lineales en el dominio del tiempo (Kalman y Bertram, 1960), de igual manera, abordo el control óptimo proporcionando el diseño de ecuaciones para el regulador cuadrático lineal (LQR, por sus siglas en ingles Linear–quadratic regulator) (Kalman et al., 1960). De sus trabajos más importantes fue el filtrado óptimo y la teoría de estimación de parámetro, lo cual hoy se conoce como filtro Kalman, que puede ser empleado en tiempo continuo o discreto (Kalman, 1960).

Lo anterior es un resumen del panorama histórico de la teoría de control a lo largo de los últimos años. A continuación, empezaremos ver las técnicas de control y su relación con control. Primero debemos de definir que el área de control se divide en dos subáreas, la teoría de control clásica, se utiliza el modelo matemático junto con herramientas matemáticas, como los métodos de Transformación de Laplace y Fourier y la descripción externa de los sistemas. Generalmente, estudia sistemas de una entrada y una salida, y la teoría de control moderno que basa su diseño en el dominio del tiempo y principalmente es utilizado el modelo en espacio de estado que permite representar sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas.

Los investigadores del Laboratorio de Electrónica Industrial del Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), construyeron un prototipo de un vehículo de dos ruedas basado en un péndulo invertido llamado Joe, al cual le colocaron pesos en el péndulo para simular el peso de un ser humano en baja escala (Grasser et al., 2002). Anderson en el 2003, construyó un robot de balanceo sobre dos ruedas denominado nBot (Anderson, 2003). En el mismo año Ooi, como proyecto de titulación de carrera en la escuela de ingeniería Mecánica de la Universidad de Western Australia, realizó la construcción de un péndulo invertido sobre dos ruedas (Ooi, 2003).

Entre los tipos de control que han sido propuestos para el control de sistemas subactuados se encuentran los métodos basados en el moldeo de energía. Existen dos métodos de diseño del control por moldeo de energía: el Lagrangiano Controlado, presentado en (Bloch et al., 2000) y el IDA-PBC, propuesto en (Ortega et al., 2002). Una característica que comparten ambas metodologías es la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales para obtener una ley de control válida. Recientemente, en (Donaire et al., 2015), los autores proponen un método basado en moldeo de energía y linealización parcial para el control de sistemas mecánicos subactuados que no requiere resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Los sistemas mecánicos subactuados, aquellos que tienen un menor número de entradas de control que grados de libertad, son utilizados comúnmente en laboratorios de pregrado y posgrado para el estudio de control. Esto debido al reto que representa el controlar un sistema donde no todas las coordenadas son manipuladas directamente por las entradas de control. Ejemplo de un sistema subactuado es el robot autobalanceable (Sadeghian y Masoule, 2016), el cual también posee una dinámica no lineal, por lo que es un sistema atractivo para validar diferentes esquemas de control. Algunos trabajos reportados en la literatura sobre el control de este mecanismo pueden ser encontrados en (Yuan, 2016; Sadeghian y Masoule, 2016; Xu et al., 2013).

De manera más reciente se han hecho investigaciones como Gandarilla, que realizó el control de equilibrio basado en pasividad de asignación de interconexión y amortiguación (IDA-PBC) para conducir un robot de equilibrio automático restringido a dos grados de libertad, incluida la dinámica de los actuadores (Gandarilla et al., 2017, 2019).

También, y como parte fundamental en el desarrollo de esta investigación, dada la competencia de "Robouaq edición 2019" del congreso "CONIIN2019" , propuso la categoría de "robot balancín autónomo" en su primera edición, donde se diseñó un circuito, tal que, el robot debía de subir una pendiente, en tal caso, ninguno de los competidores logró completar el trayecto, dada la dificultad que presentaba la pendiente, que era de $25°$, ver Figura 1.3, y debido a que nunca se había realizado un estudio de este robot dentro de la misma universidad, ni mucho menos, se conocía la complejidad del mismo.

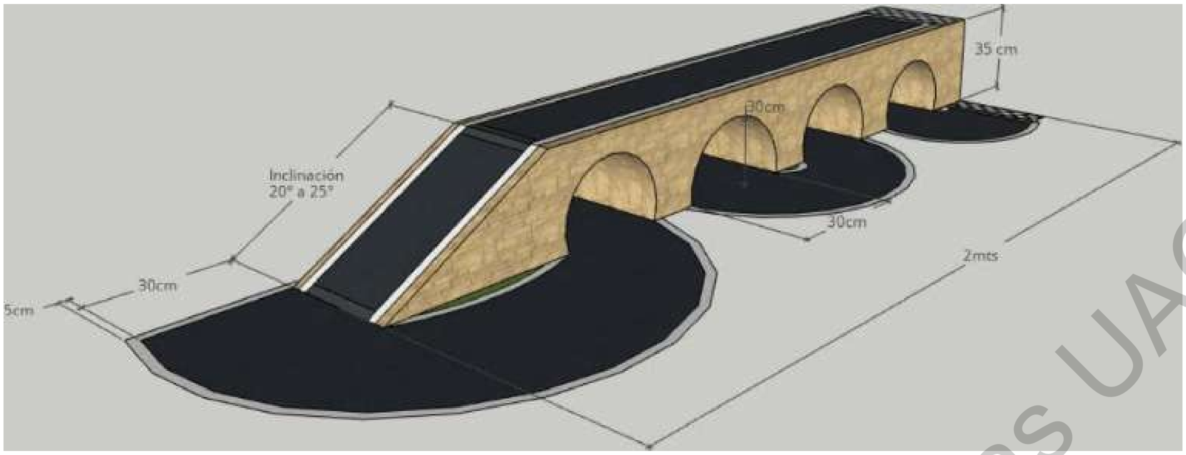


Figura 1.3: Maqueta de la pista de la categoría de ”robot balancín autónomo” de ”Robouaq edición 2019”.

1.2. Descripción del Problema

El péndulo invertido con ruedas es conocido por ser uno de los problemas más importantes y clásicos de la teoría de control y control aplicado. El sistema se compone de un vehículo sobre el cual se monta un péndulo que puede girar libremente, el cual, debe moverse para compensar el desplazamiento del péndulo y mantenerlo en equilibrio. Además de esto se está tomando en cuenta el desplazamiento libre en el espacio, lo cual vuelve aún más complejo el sistema. De igual forma cumplen tres características muy importantes, las cuales, son el motivo principal de caso de estudio, su complejidad matemática y análisis.

La primera característica que cumple es ser un sistema completamente no lineal, debido a que combina dos sistemas que son no lineales (Fantoni y Lozano, 2001), uno es el péndulo invertido y otro un vehículo con 2 ruedas. La segunda, es la inestabilidad propia de un sistema, esto no implica ser un sistema no lineal ni que la solución crezca hasta el infinito, sino que el sitema no es estable dentro de un espacio (Hernández-Guzmán et al., 2013; Hernández-Guzmán y Silva-Ortigoza, 2018). La tercera característica del sistema, es que pertenece a la familia de sistemas subactuados, que tienen más grados de libertad que actuadores (A y García, 2012). Generalmente se controlan los grados de libertad con ausencia de un actuador, con otros que pertenecen a otra articulación del mecanismo.

Normalmente en los trabajos de investigación y artículos de divulgación científica se encargan de realizar la experimentación en base al modelo matemático de la literatura, donde estos realizan la estabilidad del sistema considerando únicamente cuatro grados de libertad. Sin embargo, para complejidad del trabajo de tesis presente se pretende hacer el modelado completo con los 6 grados de libertad del sistema. Los cuales, están compuesto por la posición en el plano, es decir, una posición con coordenadas (x, y), un ángulo θ de referencia con respecto al plano, los ángulos de giro de las llantas ϕ_r para la llanta derecha y ϕ_l para la llanta izquierda, y finalmente, el ángulo de inclinación α del péndulo invertido, ver Figura 1.4.

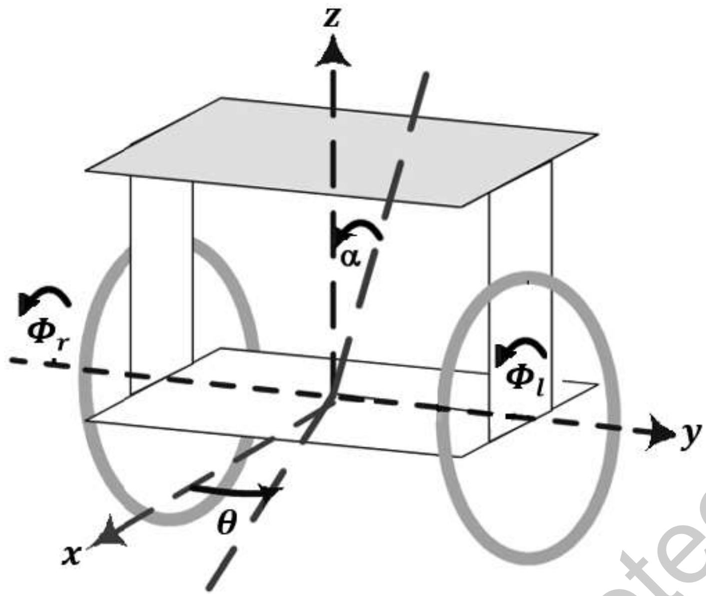


Figura 1.4: Diagrama esquemático de un péndulo invertido sobre dos ruedas.

1.3. Justificación

Muchos sistemas de control de la vida real, tales como: robots móviles, robots caminantes, robots nadadores, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue vertical, helicópteros, proyectiles, vehículos submarinos, barcos, buques de superficie, etc. Son ejemplos de sistemas mecánicos subactuados (Acosta, 2010), cuyo control está ligado al sector industrial; puesto que han ayudado considerablemente a la mejora de la calidad de los productos fabricados, al aumento de la eficiencia de los procesos, minimización del consumo de energía, entre otros. Convirtiéndose la ingeniería de control en una parte medular para el avance de la ingeniería y la ciencia (Ogata y Yang, 2002).

Con respecto a péndulos invertidos con ruedas se tienen diversos ejemplos de aplicaciones en sectores como: aeroespacial, biomecánica y transporte (Block et al., 2007). Por ejemplo, en la industria aeroespacial se requiere el control subactuado o activo de un cohete para mantenerlo en la posición vertical invertida durante su tiempo de despegue, donde el ángulo de inclinación del cohete es controlado por medio de la variación del ángulo de la aplicación de la fuerza de empuje, colocada en la base de dicho cohete.

Por otro lado, en la industria biomecánica el péndulo invertido es frecuentemente utilizado para modelar bípedos caminantes, tal como el robot humanoide Asimo de Honda mostrado en la Figura 1.5 (Chestnutt et al., 2005; Sakagami et al., 2002; Westervelt et al., 2018). En los robots bípedos la pierna de apoyo en contacto con el suelo a menudo se modela como un péndulo invertido, mientras que la pierna en movimiento se comporta como un péndulo que oscila libremente (Chestnutt et al., 2005; Westervelt et al., 2018), como el caso del péndulo invertido sobre dos ruedas, suspendido de la cadera del humanoide.
Las razones principales de estudio de desarrollar algoritmos de control que estabilicen siste-

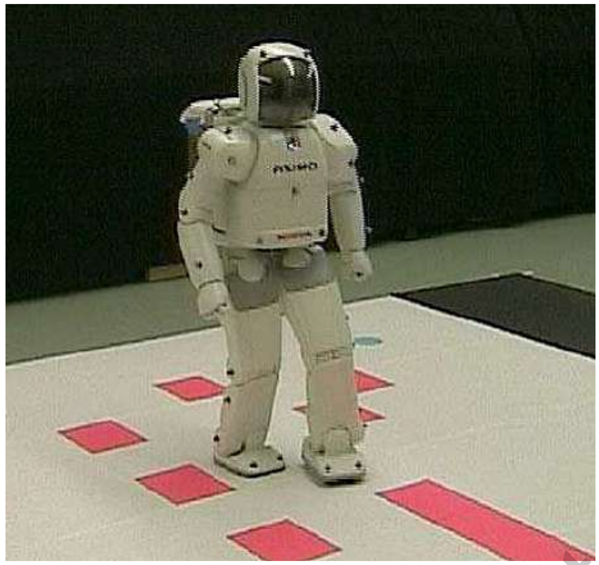


Figura 1.5: Robot humanoide Asimo de Honda (Chestnutt et al., 2005).

mas como, barcos, vehículos acuáticos, helicópteros, aeronaves, satélites, o robots humanoides (Spong y Vidyasagar, 2008; Westervelt et al., 2018; Craig, 2006) son:

- La dinámica del sistema.
- Reducir costos en el diseño.
- Propósitos prácticos.
- Mejoras en los actuadores del sistema.
- Crear sistemas no lineales artificiales complejos con el propósito de mejorar el control de sistemas subactuados de alto orden.

1.4. Hipótesis y Objetivo

1.4.1. Hipótesis

Un péndulo invertido con ruedas puede ser controlado y estabilizado utilizando todos sus grados de libertad mediante un controlador lineal.

1.4.2. Objetivo

Realizar el modelado matemático y el diseño de un controlador que permita al sistema la estabilidad en vertical en su posición y el movimiento de una trayectoria longitudinal.

Objetivos Particulares

1. Realizar el modelado matemático utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.
2. Desarrollar un controlador que se adapte a las necesidades del sistema.
3. Realizar el análisis de estabilidad.
4. Obtener un sistema que por lo menos cumpla la condición de ser estable.
5. Probar el controlador del robot dada una trayectoria.

Capítulo 2

Fundamentación Teórica

En este capítulo se aborda en desarrollo amplio de todos los conceptos y definiciones que se deben de comprender para realizar el modelado matemático del sistema y de igual manera se da un preámbulo sobre la teoría de control moderna en robots. Por ello, resulta apropiado y de utilidad tener conocimientos básicos en calculo, álgebra lineal, comprensión de la dinámica de robots, entre otras definiciones matemáticas. En las primeras secciones se busca introducir al lector en el área de control y lo que implica el diseño de controladores para sistemas no lineales, y sistemas subactuados. Las secciones siguientes abordan las ecuaciones de Euler-Lagrange, junto a algunas demostraciones que resultaran de ayuda en la parte del modelado del sistema. También se agrega una sección sobre las restricciones no holonómicas y el método general para incluir restricciones no holonómicas en los sistemas Euler-Lagrange. Se ha incluido secciones sobre matrices de rotación y el manipulador Jacobiano, dada la utilidad que se tendrá en el presente trabajo. Finalmente, en la última sección se redactan, los teoremas y definiciones útiles de la estabilidad de Lyapunov.

El estudio de la teoría de control ha sido una parte importante en el avance de la ciencia e ingeniería particularmente contribuyendo con un desarrollo integral de los procesos industriales y de manufactura (Gutiérrez Frías, 2009). El diseño de la teoría de control nace a partir de la necesidad de disminuir y hacer eficientes los procesos, para ello se lleva acabo el diseño de los sistemas pilotos o también conocidos como plataformas experimentales. Esencialmente, las operaciones industriales que son el control de variables físicas como presión humedad, temperatura, viscosidad, flujo, velocidad, posición, entre otros (Kuo, 1996).

2.1. ¿Qué implica el control de robots?

La interacción entre la robótica y la ingeniería eléctrica, mecánica e hidráulica, generan conjuntamente, el área del control automático. De esta interacción emerge lo que llamamos control de robots (Kelly et al., 2006). Hablando libremente, el control del robot consiste en estudiar cómo hacer que un robot manipulador realice una tarea y en materializar los resultados de este estudio en un prototipo de laboratorio. A pesar de los numerosos robots comerciales existentes, el diseño de control de robots sigue siendo un campo de estudio intensivo entre constructores de robots y centros de investigación (Spong y Vidyasagar, 2008).

Algunos especialistas en control automático podrían argumentar que los robots industriales de hoy en día ya pueden realizar una variedad de tareas complejas y, por lo tanto, a primera vista, la investigación sobre el control de robots ya no está justificada. Sin embargo, la investigación sobre el control de robots no solo es un tema interesante en sí mismo, sino que también ofrece importantes desafíos teóricos y, lo que es más importante, su estudio es indispensable en tareas específicas que los robots comerciales actuales no pueden realizar (Reyes, 2011). Como regla general, el diseño del control puede dividirse aproximadamente en los siguientes aspectos:

- Familiarización con el sistema físico bajo consideración.
- Modelado.
- Especificaciones de control.

2.1.1. Familiarización con el sistema físico

De manera general, durante esta etapa se deben determinar las variables físicas del sistema cuyo comportamiento se desea controlar. Estos pueden ser temperatura, presión, desplazamiento, velocidad, etc. Estas variables se denominan comúnmente salidas del sistema (Craig, 2006; Baturone, 2005). Además de esto, también debemos identificar claramente las variables que están disponibles y que influyen en el comportamiento del sistema y, más particularmente, en sus resultados. Estas variables se denominan entradas y pueden corresponder, por ejemplo, a la apertura de una válvula, voltaje, par, fuerza, etc. En el caso particular de los manipuladores de robots, existe una amplia variedad de salidas cuyo comportamiento uno puede desear controlar.

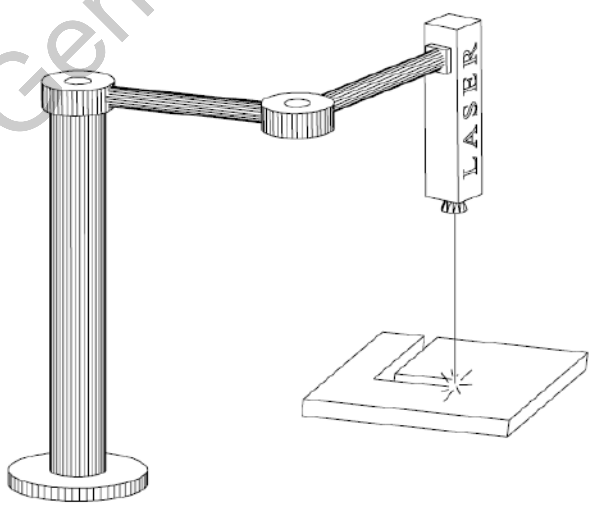


Figura 2.1: Robot moviéndose libremente (Spong y Vidyasagar, 2008).

Para los robots que se mueven libremente en su espacio de trabajo, es decir, sin interactuar con su entorno, véase la Figura 2.1, por ejemplo, los robots utilizados para pintar, recoger y colocar, cortar con láser. La salida que se controlará puede corresponder a las posiciones conjuntas y las velocidades conjuntas o, alternativamente, la posición y orientación del efector final, también llamado herramienta final.

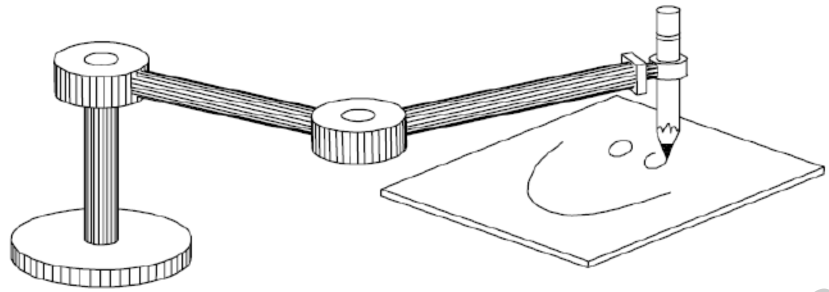


Figura 2.2: Interacción de un robot con su entorno (Spong y Vidyasagar, 2008).

Para robots como el que se muestra en la Figura 2.2 (Spong y Vidyasagar, 2008) que tienen contacto físico con su entorno, para realizar tareas que implican pulido, desbarbado de materiales, ensamblaje de alta calidad, la salida y puede incluir los pares y fuerzas ejercidos por la herramienta final sobre su entorno.

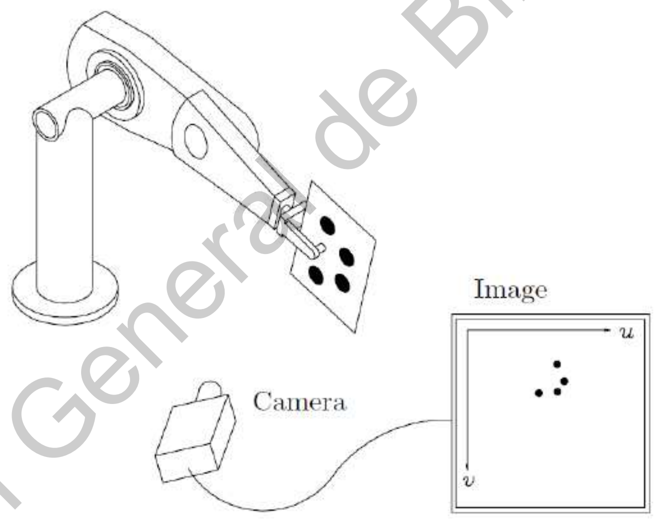


Figura 2.3: Sistema robótico con cámara en mano (Spong y Vidyasagar, 2008).

La Figura 2.3 muestra un manipulador que sostiene una bandeja marcada, y una cámara que proporciona una imagen de la bandeja con marcas (Spong y Vidyasagar, 2008; Balafoutis y Patel, 2012). La salida en este sistema puede corresponder a las coordenadas asociadas a cada una de las marcas con referencia a una pantalla en un monitor. La Figura 2.4 muestra un manipulador cuyo efector final tiene una cámara conectada para capturar el paisaje de su entorno. En este caso, la salida puede corresponder a las coordenadas de los puntos que representan las marcas en la pantalla y que representan objetos visibles del entorno del robot.

Por otro lado, las variables de entrada, es decir, aquellas que pueden modificarse para afectar la evolución de la salida, son básicamente los pares y las fuerzas aplicadas por los actuadores

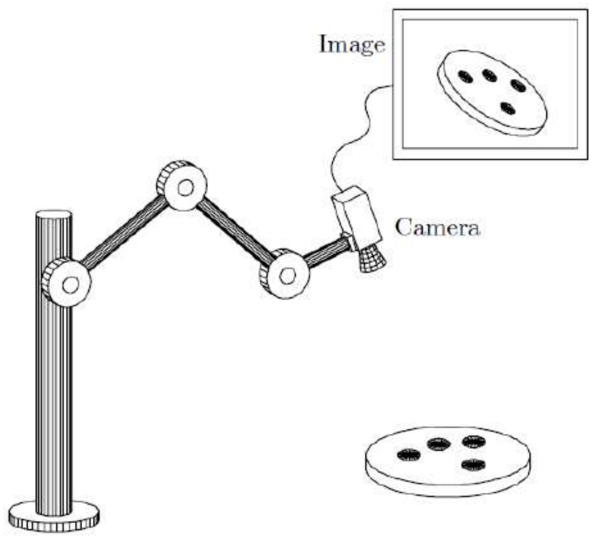


Figura 2.4: Sistema robótico con cámara fija (Spong y Vidyasagar, 2008).

sobre las articulaciones del robot. En la Figura 2.5 mostramos el diagrama de bloques correspondiente al caso en que las salidas son las posiciones y velocidades conjuntas.

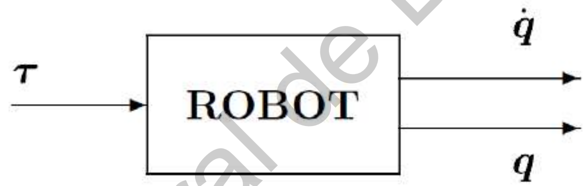


Figura 2.5: Representación de las entradas y salidas de un robot (Reyes, 2011).

Mientras τ es la entrada, $\dot{q}$ y q son las salidas del sistema. En este caso, observe que para los robots con n articulaciones, uno tiene, en general, $2n$ salidas y n entradas.

2.1.2. Especificaciones de control

Durante la última etapa de diseño, se procede a dictar las características deseadas para el sistema de control mediante la definición de objetivos de control tales como:

- Estabilidad.
- Regulación, control de posición.
- Seguimiento de trayectoria, control de movimiento.
- Optimización.

La propiedad más importante en un sistema de control, en general, es la estabilidad. Este concepto fundamental de la teoría del control consiste básicamente en la propiedad de un sistema de seguir trabajando en un régimen o de cerca para siempre.

Normalmente se utilizan dos técnicas de análisis en el estudio analítico de la estabilidad de los robots controlados. El primero se basa en la llamada teoría de la estabilidad de Lyapunov. El segundo es la llamada teoría de estabilidad de entrada-salida. Ambas técnicas son complementarias en el sentido de la teoría de Lyapunov, es el estudio de la estabilidad del sistema utilizando una descripción de variables de estado, mientras que, en la segunda, estamos interesados en la estabilidad del sistema desde una perspectiva de entrada-salida (Craig, 2006; Liao et al., 2007).

2.2. Sistemas no lineales

Los sistemas no lineales representan sistemas cuyo comportamiento no puede ser expresado como la suma de los comportamientos que describen el funcionamiento del sistema. Formalmente, un sistema físico, matemático o de otro tipo, es no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento son no lineales (Malinietski, 2005; Balafoutis y Patel, 2012). El comportamiento de sistemas no lineales no está sujeto al principio de superposición, como un sistema lineal, esto hablando matemáticamente.

En diversas ramas de las ciencias la no linealidad es la responsable de comportamientos complejos y, frecuentemente, impredictibles o caóticos (Olfati-Saber, 2001). La no linealidad frecuentemente aparece ligada a la autointeracción, el efecto sobre el propio sistema del estado anterior del sistema (Fantoni y Lozano, 2001). En física, biología o economía la no linealidad de diversos subsistemas es una fuente de problemas complejos, en las últimas décadas la aparición de los ordenadores digitales y la simulación numérica ha disparado el interés científico por los sistemas no lineales, ya que muchos sistemas han podido ser investigados de manera más o menos sistemática.

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado (Slotine, 1984). La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento.

La teoría y la práctica del control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, civil y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles (Khalil, 2002). Las ventajas del control eficiente en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los materiales de desecho y desgaste de los actuadores de los sistemas, mayores niveles de seguridad y reducción de la contaminación.

2.2.1. Control de sistemas no lineales

Existe una amplia literatura dedicada a la investigación de sistemas no lineales, en algunos casos realizan linealización del sistema, realizan aproximación utilizando de ciertos métodos como algoritmo difuso y control óptimo, mientras, otros establecen restricciones al modelo matemático para solucionarlo. Es cierto que existe una amplia gama de controladores en la literatura, sin embargo, es bastante evidente que hay una infinidad de ejemplos inexplorados para realizar control de un sistema no lineal, tal que, las técnicas actuales de control para estos determinados sistemas son insuficientes hasta ahora.

2.3. Sistemas subactuados

Los sistemas mecánicos subactuados, aquellos que tienen un menor número de entradas de control que grados de libertad, son utilizados comúnmente en laboratorios de pregrado y posgrado para el estudio de control, esto debido al reto que representa el controlar un sistema, como la ecuación mostrada en la Definición 2.3.1 (Fantoni y Lozano, 2001), donde no todas las coordenadas son manipuladas directamente por las entradas de control. Ejemplo de un sistema subactuado es el robot autobalanceable (Sadeghian y Masoule, 2016), el cual también posee una dinámica no lineal, por lo que es un sistema atractivo para validar diferentes esquemas de control. Algunos trabajos reportados en la literatura sobre el control de este mecanismo pueden ser encontrados en (Xu y Özgüner, 2008; Xu et al., 2013; Yuan, 2016; Sadeghian y Masoule, 2016; Gandarilla et al., 2017, 2019; Fantoni y Lozano, 2001; A y García, 2012).

Definición 2.3.1 *(Sistema Subactuados) Considere los sistemas que se pueden escribir como*

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + G(q)u$$

donde es el vector de estado de coordenadas generalizadas independientes, $f(\cdot)$ es el campo vectorial que representa la dinámica de los sistemas, $\dot{q}$ es el vector de velocidad generalizada, G es la matriz de entrada y u es un vector de entradas de fuerza generalizadas. La dimensión de q es define como los grados de libertad de la ecuación anterior. Se dice que el sistema está subactuado, sí las fuerzas generalizadas externas no pueden ordenar aceleraciones instantáneas en todas las direcciones en el espacio de configuración, es decir, rango$(G) < \dim(q)$.

Entre los tipos de control que han sido propuestos para el control de sistemas subactuados se encuentran los métodos basados en el moldeo de energía. Existen dos métodos de diseño del control por moldeo de energía: el Lagrangiano Controlado, presentado en (Bloch et al., 2000), propuesto en (Bloch et al., 1997). Por su parte en (Ortega et al., 2002), se propone la estabilización de sistemas, un ball and beam y un péndulo invertido con rueda, no activos mediante interconexión y asignación de amortiguamiento con la caracterización de estos, para los cuales IDA-PBC produce un controlador estabilizador suave. Concluyendo que la clase se da en términos de solubilidad de dos ecuaciones diferenciales parciales que corresponden a las etapas de conformación de energía cinética y potencial del diseño, con lo que logran ser asintóticamente estables ambos sistemas.

Una característica que comparten ambas metodologías es la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales para obtener una ley de control válida. Recientemente, en (Donaire et al., 2015), los autores proponen un método basado en moldeo de energía y linealización parcial para el control de sistemas mecánicos subactuados que no requiere resolver ecuaciones diferenciales parciales. Algunos ejemplos de sistemas subactuados son los robots móviles no holonómicos (A y García, 2012), robots bípedos, vehículos submarinos, manipuladores con estructura flexible, misiles, satélites, cohetes espaciales, entre otros (Westervelt et al., 2018; Balafoutis y Patel, 2012). Sin embargo, los sistemas subactuados más populares son los de tipo pendular, entre ellos se encuentra: el péndulo invertido simple, el péndulo de Furuta, el péndulo con rueda inercial y el acrobot.

Estos son frecuentemente usados en centros de investigación para el estudio de técnicas de control; así como de forma educativa para experimentación y aplicación de conceptos teóricos asociados al control automático. Ciertamente estos sistemas no tienen una aplicación funcional, debido a que su único propósito de ejercer como sustitutos de algún sistema con aplicaciones que tiene similitud a otros sistemas reales, como los mencionados anteriormente.

Control de sistemas subactuados

Esta temática ha ocasionado bastante interés a los problemas de control relacionados con los sistemas subactuados y se han propuesto variedad de estrategias de control para resolverlos, tales como; control back-stepping (Seto y Baillieul, 1994), control adaptable (Kanellakopoulos et al., 1991), control difuso o inteligente (Li et al., 2004; Brown y Passino, 1997), control híbrido (Fierro et al., 1999), control por modos deslizantes (Xu y Özgüner, 2008; Slotine, 1984), control basado en energía o pasividad (Fantoni y Lozano, 2001; Fantoni et al., 2000; Lozano et al., 2000), entre otros.

2.3.1. Modelo Dinámico

En general, una representación matemática del sistema se realiza mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, que permiten determinar la relación de las variables de entrada con las variables de salida. El modelo matemático del sistema se obtiene típicamente a través de una de las dos técnicas siguientes.

- Analítico: Este procedimiento se basa en las leyes físicas del movimiento del sistema. Esta metodología tiene la ventaja de producir un modelo matemático tan preciso como se desee.

- Experimental: este procedimiento requiere una cierta cantidad de datos experimentales recopilados del propio sistema. Por lo general, uno examina el comportamiento del sistema bajo señales de entrada específicas. El modelo obtenido es en general más impreciso que el modelo analítico, ya que depende en gran medida de las entradas y del punto de operación. Sin embargo, en muchos casos tiene la ventaja de ser mucho más fácil y rápido de obtener.

En ciertas ocasiones, en esta etapa se procede a una simplificación del modelo del sistema a controlar para diseñar un controlador relativamente simple. Sin embargo, dependiendo del grado de simplificación, esto puede provocar un mal funcionamiento del sistema controlado general debido a fenómenos físicos potencialmente descuidados (Ogata y Yang, 2002; Bertsekas et al., 1995; Yuan, 2016; Baturone, 2005; Kim et al., 2005; Muhammad et al., 2011). La capacidad de un sistema de control para hacer frente a los errores debidos a una dinámica descuidada se conoce comúnmente como robustez. Por lo tanto, uno típicamente está interesado en diseñar controladores robustos (Westervelt et al., 2018; Spong y Vidyasagar, 2008; Reyes, 2011).

En otras situaciones, después de la etapa de modelado, uno realiza la identificación paramétrica. El objetivo de esta tarea es obtener los valores numéricos de diferentes parámetros físicos o cantidades involucradas en el modelo dinámico. La identificación puede realizarse a través de técnicas que requieren la medición de entradas y salidas al sistema controlado. El modelo dinámico de los manipuladores de robots generalmente se deriva en forma analítica, es decir, utilizando las leyes de la física. Debido a la naturaleza mecánica de los manipuladores de robots, las leyes de la física involucradas son básicamente las leyes de la mecánica.

2.4. Modelado dinámico de robots rígidos

Robots de n grados de libertad, como el caso de los péndulos invertidos. Las posiciones de los eslabones, variables de unión o grados de libertad se agrupan en el vector:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.4.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sean las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

donde $L(q,\dot{q})$ es conocido como el Lagrangiano, que está definido en (2.3), (Spong y Vidyasagar, 2008).

$$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q) \tag{2.3}$$

donde $T(q,\dot{q})$ es la energía cinética y $U(q)$ es la energía potencial del sistema. La energía potencial $U(q)$ no tiene una forma especial, pero siempre puede calcularse y está representada por (2.4):

$$U(q) = \sum_{i=1}^{n} U(q_i) = -m_i\, \hat{g}^T\, r_{ci} \tag{2.4}$$

donde m_i es la masa del eslabón, i, $\hat{g}$ es un vector constante que representa la aceleración de la gravedad, dado en términos de las componentes de aceleración en las direcciones cartesianas x, y y z (Craig, 2006; Balafoutis y Patel, 2012). El valor de dichas componentes depende de las convenciones hechas al momento de modelar el robot (Spong y Vidyasagar, 2008). Finalmente, r_{ci} representa la posición del centro de masa del eslabón i expresada en términos de sus componentes cartesianas x, y y z. En una cadena cinemática abierta, como es el caso de robots manipuladores seriales, r_{ci} sólo depende de las posiciones de los eslabones 1 hasta i, es decir:

$$r_{ci} = r_{ci}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

por lo que también se puede escribir:

$$U(q_i) = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Es conveniente señalar que la energía potencial del eslabón i siempre se puede calcular como:

$$U(q_i) = \bar{F} \cdot \bar{d}$$

donde $\bar{F}$ es la fuerza aplicada sobre el eslabón y $\bar{d}$ es la distancia recorrida bajo la influencia de la fuerza $\bar{F}$. La energía potencial es la energía que se obtendría si, bajo el efecto de la gravedad, $\bar{F}$, el eslabón recorriera una distancia, $\bar{d}$, hasta alcanzar el punto seleccionado como referencia cero. Por tanto, se puede concluir:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= m_i\, \hat{g}^T \\ \bar{d} &= -r_{ci} \end{aligned}$$

Nótese que r_{ci} representa la distancia medida desde el punto de referencia hasta el centro de masa de eslabón i, mientras que $\bar{d}$ es la distancia medida desde el centro de masa del eslabón i hasta el punto de referencia. Esto explica el signo de la última expresión. Todo esto también explica la expresión en (2.4).

Por otro lado, $T(q, \dot{q})$ tiene una forma particular de calcularse en forma matricial, esto debido al término cuadrático de la velocidad, es decir, que la energía cinética $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, debido a que $\dot{q}$ es un vector de velocidades, $T(q, \dot{q})$ se escribe como se muestra en (2.5).

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^T\, M(q)\, \dot{q} \tag{2.5}$$

donde $M(q)$ es una matriz nxn, simétrica y definida positiva.

Matriz definida positiva

Sea una matriz positiva A simétrica de nxn definida positiva sí y sólo sí:

1. Todos los eigenvalores de A son positivos, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

2. Si todos los determinantes de la matriz son positivos, $det_n(A) > 0$, a estos determinantes se les conoce como *lending principal minors* de A.

Los enunciados anteriores se pueden resumir en:

$$\begin{aligned} T(q,\dot{q}) &\quad > 0, \quad \forall\, \dot{q} \neq 0 \\ T(q,\dot{q}) &\quad = 0, \quad \text{solo sí } \ \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (2.2) se puede escribir matricialmente como:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \tag{2.6}$$

Observe que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\,\dot{q}^T\ M(q)\ \dot{q}\right] = M(q)\ \dot{q}$$

es notable que únicamente depende de $T(q,\dot{q})$ debido a que $U(q)$ de (2.3), no depende de $\dot{q}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = M_i^T(q)\ \dot{q} \tag{2.7}$$

donde $M(q)_i$ es la columna i de la matriz $M(q)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} M_i^T(q)\ \dot{q} \\ &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{dM_i^T(q)}{dt}\,\dot{q} \\ &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\left[\frac{dM_i^T(q)}{dt}\ \dot{q} + \dot{q}^T\ \frac{dM_i(q)}{dt}\right] \\ &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dM_i(q)}{dt}\right)^T\ \dot{q} + \dot{q}^T\ \frac{dM_i(q)}{dt}\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

como:

$$\frac{dM_i(q)}{dt} = \frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\ \dot{q} \tag{2.9}$$

Tomando en cuenta (2.9), la sustituimos en (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\ \dot{q}\right)^T\ \dot{q} + \dot{q}^T\ \frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\ \dot{q}\right] \\ &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\left[\dot{q}^T\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T + \dot{q}^T\ \frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right]\dot{q} \\ &= M_i^T(q)\ \ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T + \frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right]\dot{q} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T\ \frac{\partial M(q)}{\partial q_i}\dot{q} - \frac{\partial U(q)}{\partial q} \tag{2.11}$$

Arreglando de forma matricial (2.6), utilizando (2.10) y (2.11):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial L}{\partial q} =& M_i^T(q)\,\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T+\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right]\dot{q}\\
&-\left[\frac{1}{2}\dot{q}^T\,\frac{\partial M(q)}{\partial q_i}\dot{q}-\frac{\partial U(q)}{\partial q}\right]\\
=& M_i^T(q)\,\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T+\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}-\frac{\partial M(q)}{\partial q_i}\right]\dot{q}\\
&+\frac{\partial U(q)}{\partial q}\\
=& M(q)\,\ddot{q}+C(q,\dot{q})\,\dot{q}+g(q)=\tau
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
C(q,\dot{q})\,\dot{q} &= \begin{bmatrix} c_1(q,\dot{q})\\ c_2(q,\dot{q})\\ \vdots\\ c_n(q,\dot{q})\end{bmatrix}\dot{q},\quad c_i(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^T\,\bar{C}_i(q),\quad i=1,2,\ldots,n\\
\bar{C}_i(q) &= \left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T+\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}-\frac{\partial M(q)}{\partial q_i}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

por lo tanto:

$$
M_i(q) = \begin{bmatrix} m_{i1}(q)\\ m_{i2}(q)\\ m_{i3}(q)\\ \vdots\\ m_{in}(q)\end{bmatrix},\; q=\begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix},\; \frac{\partial M_i(q)}{\partial q}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_n}\\
\frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_n}\\
\frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_n}
\end{bmatrix},
$$

$$
\left(\frac{\partial M_i(q)}{\partial q}\right)^T = \begin{bmatrix}
\frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_1}\\
\frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_2}\\
\frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_3} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_3} & \cdots & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_3}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial m_{i1}(q)}{\partial q_n} & \frac{\partial m_{i2}(q)}{\partial q_n} & \frac{\partial m_{i3}(q)}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial m_{in}(q)}{\partial q_n}
\end{bmatrix},
$$

$$
\frac{\partial M(q)}{\partial q_i} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial M_{11}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{12}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{13}(q)}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial M_{n1}(q)}{\partial q_i}\\
\frac{\partial M_{21}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{22}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{23}(q)}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial m_{2n}(q)}{\partial q_i}\\
\frac{\partial M_{31}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{32}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{33}(q)}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial M_{3n}(q)}{\partial q_i}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial M_{n1}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{n2}(q)}{\partial q_i} & \frac{\partial M_{n3}(q)}{\partial q_i} & \cdots & \frac{\partial M_{nn}(q)}{\partial q_i}
\end{bmatrix}
$$

Finalmente $g(q)$:

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \tag{2.14}$$

Es evidente que el elemento $C_{kj}(q, \dot{q})$ de la matriz cuadrada de nxn $C(q, \dot{q})$ se puede escribir como:

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \dot{q}^T \begin{bmatrix} c_{1jk}(q, \dot{q}) \\ c_{2jk}(q, \dot{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

entonces:

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]$$

donde i, j y k son conocidos como los símbolos de Christoffel del primer tipo. Nótese que el vector

$$\begin{bmatrix} c_{1jk}(q, \dot{q}) \\ c_{2jk}(q, \dot{q}) \\ \vdots \\ c_{njk}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

representa a la columna j de la matriz $\bar{C}_k(q)$ de (2.13), es decir, el símbolo de Christoffel $c_{ijk}(q)$ representa el elemento i de la columna j de la matriz $\bar{C}_k(q)$.

2.4.2. Propiedades del modelo de robots rígidos

Propiedades de $M(q)$

1. La matriz $M(q)$ es de nxn, simétrica y definida positiva. La matriz $M^{-1}(q)$ existe y es simétrica y definida positiva.

2. Para robots provistos únicamente con uniones rotativas, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{\text{max}}(M(q)) \leq \beta, \quad \forall\ q \in \mathbb{R}^n$$

   Una manera de calcular β es:

$$\beta \geq n \left(\max_{i,j,q} |M_{ij}(q)| \right)$$

3. Para robots provistos únicamente con uniones rotativas, existe una constante $k_M > 0$ tal que:

$$\|M(x)\, z - M(y)\, z\| \leq k_M \|x - y\| \|z\|, \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

   Una manera de calcular k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left(\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right)$$

4. Para robots provistos únicamente con uniones rotativas, existe una constante k_N tal que:

$$\|M(x)\ y\| \leq k_N \|y\|, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$$

Propiedades de $C(q, \dot{q})$

1. Para un manipulador dado, la matriz $C(q, \dot{q})$ puede no ser no única pero el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es único.

2. $C(q, 0) = 0, \forall\ q \in \mathbb{R}^n$

3. Para robots provistos únicamente con uniones rotativas, existe una constante k_c tal que:

$$\|C(q, x)\ y\| \leq k_c \|x\| \|y\|, \quad \forall\ x, y, q \in \mathbb{R}^n$$

4. La matriz $C(q, \dot{q})$ cuando está definida en (2.15), es decir, usando los símbolos de Christoffel, se relacionan con la matriz de inercia $M(q)$ como sigue:

$$x^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})\right] x = 0, \quad \forall\ x, q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

quiere decir que la matriz $\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ es antisimétrica. De manera equivalente, la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica y también es cierto que:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})$$

independientemente de como se exprese $C(q, \dot{q})$ siempre se cumple:

$$\dot{q}^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})\right] \dot{q} = 0, \quad \forall\ q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

Esto se demuestra, considerando el elemento kj de la matriz $\dot{M}(q)$ está dado como:

$$\dot{M}_{kj}(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Por otro lado, de (2.15):

$$C_{kj}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j,k}(q)\ \dot{q}_i$$

Entonces, el elemento N_{kj} de la matriz $N = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
N_{kj} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i - 2\sum_{i=1}^{n} c_{i,j,k}(q)\ \dot{q}_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} - 2c_{i,j,k}(q)\right] \dot{q}_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} - 2\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k}\right]\right]\right] \dot{q}_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} - \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j}\right] \dot{q}_i \\
N_{jk} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ji}(q)}{\partial q_k}\right] \dot{q}_i
\end{aligned}$$

Debido a que la matriz $M(q)$ es simétrica, se concluye:

$$N_{kj} = -N_{jk}$$

es decir, la matriz $N = \dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})$ es antisimétrica. Observe que $N_{jj} = 0 \;\; \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$. Por otra parte, de (2.15):

$$\begin{aligned} C_{kj}(q,\dot{q}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_{i,j,k}(q)\ \dot{q}_i \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \tfrac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \tfrac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i \\ C_{jk}(q,\dot{q}) &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\partial M_{jk}(q)}{\partial q_i} + \tfrac{\partial M_{ji}(q)}{\partial q_k} - \tfrac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j}\right]\dot{q}_i \end{aligned}$$

por lo tanto, el elemento C_{kj} de la matriz $C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q})$ es:

$$C_{kj}(q,\dot{q}) + C_{jk}^T(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

donde se usa el hecho de que $M(q)$ es simétrica. Recuerde que el elemento C_{kj} de la matriz $\dot{M}(q)$ es:

$$\dot{M}_{kj}(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

es decir, se cumple la tercera propiedad de $M(q)$. Nótese que todo lo demostrado en esta parte requiere que $C(q,\dot{q})$ esté expresada en términos de los símbolos de Christoffel.

Propiedades de $g(q)$

Hay que tomar en cuenta que:

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ \vdots \\ g_n(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U(q)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial U(q)}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

donde $U(q)$ es la energía potencial total del robot.

1. La siguiente matriz es simétrica:

$$\frac{\partial g(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g_2(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial g_n(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial g_n(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U(q)}{\partial^2 q_1} & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_2 \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_n \partial q_1} \\ \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial^2 q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_n \partial q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_1 \partial q_n} & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_2 \partial q_n} & \cdots & \frac{\partial^2 U(q)}{\partial^2 q_n} \end{bmatrix}$$

debido a:

$$\frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q_k \partial q_j}$$

es una condición satisfecha por toda función escalar $U(q)$ que sea dos veces continuamente diferenciable, es decir, $U(q)$ es continua.

2. Para robots que solo tienen uniones rotativas, el vector $g(q)$ es Lipschitz lo cual significa que existe una constante $k_g > 0$ tal que:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Una manera sencilla de calcular k_g es evaluando su derivada parcial:

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right)$$

que satisface

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\|$$

3. Para robots que solo tienen uniones rotativas, existe una constante $k_h > 0$ tal que:

$$\|g(q)\| \leq k_h, \quad \forall\, q \in \mathbb{R}^n$$

2.5. Restricciones no Holonómicas

Sea Q el espacio de configuración de un sistema dado y sea $q = (q_1, ..., q_n)^T \in Q$ denota el vector de coordenadas generalizadas que definen la configuración del sistema.

Definición 2.5.1 *(Sistemas Holonómicos) Un conjunto de restricciones $k < n$*

$$h(q) = h(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.16}$$

es llamado holonómico, donde h_1 es un mapeo suave de $Q \longmapsto \mathbb{R}$

Un robot es holonómico si todas las restricciones a las que está sometido son integrables en las restricciones posicionales de la forma (2.16). Considere la siguiente restricción lineal en las velocidades:

$$a_1(q)\, \dot{q}_1 + a_2(q)\, \dot{q}_2 + \ldots + a_n(q)\, \dot{q}_n = 0 \tag{2.17}$$

Suponga que se puede escribir:

$$a_1(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q_1}, \quad a_2(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad , a_n(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q_n} \tag{2.18}$$

Entonces, la restricción anterior (2.17) se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial h(q)}{\partial q_k}\, \dot{q}_k = \frac{dh(q)}{dt} = 0$$

que al integrar implica que $h(q) = C$, donde C se es una constante. En este caso se dice que la restricción (2.17) es holonómica, porque puede ser integrada. Por otro lado, si no existe una función $h(q)$ que pueda ser obtenida mediante integración de la restricción (2.17), no es posible reducirlos mediante ecuaciones de restricción, entonces se denominan que dicha restricción es no holonómica. Con sistemas no holonómicos, las coordenadas generalizadas no son independientes entre sí (Spong y Vidyasagar, 2008; Spong et al., 2005).

Definición 2.5.2 *(Sistemas no Holonómicos) Por otro lado, cuando no es posible reducirlos aún más por medio de ecuaciones de la restricción de la forma* (2.16)*, se denominan no holonómicos. Con sistemas no holonómicos, las coordenadas generalizadas no son independientes entre sí.*

Entonces, sí un sistema Euler-Lagrange como en (2.6) está sometido a restricción, las configuraciones que puede alcanzar el sistema están restringidas a una subvariedad, es decir, un subespacio no lineal, por lo que las ecuaciones (2.16) puede ser evaluadas en $h(q) = C$ para obtener un modelo matemático simplificado que generalmente queda expresado en términos de un número más reducido de variables.

2.6. Sistemas Euler-Lagrange sometidos a restricciones no Holonómicas

Se considerarán sistemas Euler-Lagrange que están sometidos a m restricciones no holonómicas, las cuales pueden expresarse de manera matricial como:

$$A(q)\,\dot{q} = 0 \tag{2.19}$$

Nótese que el i-ésimo renglón de la matriz $A(q) \ \in \mathbb{R}^{mxn}$, representado por A_i, constituye la i-ésima restricción no holonómica. Para incluir las restricciones (2.16) en las ecuaciones de Euler-Lagrange, (2.6), se procede del siguiente modo. Se considera que las m restricciones ejercen fuerzas generalizadas externas, $\bar{\tau}_i$ sobre el sistema Euler-Lagrange. Estas fuerzas de restricción deben ser conservativas, es decir, no deben realizar trabajo sobre el sistema, esto significa que:

$$T = \bar{\tau}_i \cdot \bar{d} = 0$$

donde T es el trabajo, $\bar{\tau}_i$ es la fuerza aplicada por la restricción i y $\bar{d}$ es la distancia generalizada recorrida bajo la influencia de la fuerza $\bar{\tau}_i$. La condición (2.16) significa que la dirección en que se mueve el sistema Euler-Lagrange debe ser perpendicular a $\bar{\tau}_i$, es decir:

$$\bar{\tau}_i \cdot \dot{q} = 0$$

y de acuerdo a (2.19) esto implica que la fuerza generalizada ejercida por la restricción i, $\bar{\tau}_i$, debe de ser paralela al i-ésimo renglón de $A(q)$. Por tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.6) deben modificarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} &= \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \ldots + \bar{\tau}_m + \tau \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} &= A^T(q)\,\lambda + \tau \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde:

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]^T$$

por lo que las λ_i son escalares que tienen que ver con la magnitud de la fuerza generalizada ejercida por la restricción i.

2.7. Método general para incluir las restricciones no Holonómicas en la dinámica de sistemas Euler-Lagrange

Se supone un sistema Euler-Lagrange con coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$ sometido a m restricciones no holonómicas, linealmente independientes representadas como (2.19), donde $A(q) \in \mathbb{R}^{mxn}$ tiene un rango m. Entonces existen $n-m$ vectores linealmente independientes de n dimensiones, $S_i(q)$, tales que:

$$A(q)\ S_i(q) = 0 \tag{2.21}$$

es decir, existe una matriz $S(q)$ de nx$(n-m)$ tal que:

$$A(q)\ S(q) = 0 \tag{2.22}$$

Observe: $S_i(q)$ es la i-ésima columna de $S(q)$. Multiplicando la expresión anterior por un vector $v(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ se obtiene:

$$A(q)\ S(q)\ v(t) = 0 \tag{2.23}$$

Comparando (2.24) con (2.19), es evidente que se puede escribir:

$$\dot{q} = S(q)\ v(t) \tag{2.24}$$

Por lo tanto, considere el modelo dinámico del sistema Euler-Lagrange sometido a las m restricciones, utilizando (2.12) y (2.20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} &= M(q)\ \ddot{q} + C(q,\dot{q})\ \dot{q} + g(q) \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} &= A^T(q)\ \lambda + \tau \end{aligned}$$

obteniendo:

$$M(q)\ \ddot{q} + C(q,\dot{q})\ \dot{q} + g(q) = A^T(q)\ \lambda + B(q)\ \tau \tag{2.25}$$

donde $B(q) \in \mathbb{R}^{nxr}$, con r número de entradas. Derivando (2.24):

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\ v(t) + S(q)\ \dot{v}(t) \tag{2.26}$$

Premultiplicando por $S^T(q)$ se obtiene:

$$S^T(q)\left[M(q)\ \ddot{q} + C(q,\dot{q})\ \dot{q} + g(q) = A^T(q)\ \lambda + B(q)\ \tau\right]$$

Usando (2.22), sabemos que $A(q)\ S(q) = 0$, entonces $S^T(q)\ A^T(q) = 0$, entonces, (2.22) resulta como:

$$S^T(q)\left[M(q)\ \ddot{q} + C(q,\dot{q})\ \dot{q} + g(q) = B(q)\ \tau\right]$$

Sustituyendo (2.24) y (2.26) en (2.25):

$$S^T(q)\left[M(q)\left[\dot{S}(q)\ v(t) + S(q)\ \dot{v}(t)\right] + C(q,\dot{q})\ S(q)\ v(t) + g(q) = B(q)\ \tau\right]$$

Es decir, para obtener el modelo dinámico se utiliza (2.27):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S(q)\ v(t) \\ \bar{M}(q)\ \dot{v}(t) + \bar{C}(q,\dot{q})\ v(t) + \bar{g}(q) &= \bar{B}(q)\ \tau \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) =& S^T(q)\ M(q)\ S(q) \\ \bar{C}(q,\dot{q}) =& S^T(q)\left[M(q)\ \dot{S}(q) + C(q,\dot{q})\ S(q)\right] \\ \bar{g}(q) =& S^T(q)\ g(q) \\ \bar{B}(q) =& S^T(q)\ B(q) \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.7.1. Propiedades de matrices de sistemas Euler-Lagrange con restricciones no Holonómicas

Las matrices anteriores cumplen las siguientes propiedades:

1. $\bar{M}(q)$ es definida positiva y simétrica. Esto se demuestra directamente de su definición: $\bar{M}(q) = S^T(q)\ M(q)\ S(q) \ \in \mathbb{R}^{(n-m)\text{x}(n-m)}$ es definida positiva porque $S(q)$ es una matriz de rango $n-m$.

2. La matriz $\dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q})$ es antisimétrica. Esto se demuestra del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q}) =& \dot{S}^T(q)M(q)S(q) + S^T(q)\dot{M}(q)S(q) + S^T(q)M(q)\dot{S}(q) \\ & -2S^T(q)\left[M(q)\ \dot{S}(q) + C(q,\dot{q})\ S(q)\right] \\ =& \dot{S}^T(q)M(q)S(q) + S^T(q)\dot{M}(q)S(q) - S^T(q)M(q)\dot{S}(q) \\ & -2S^T(q)\ C(q,\dot{q})\ S(q) \\ =& \dot{S}^T(q)\ M(q)\ S(q) - \left[\dot{S}^T(q)\ M(q)\ S(q)\right]^T \\ & +S^T(q)\left[\dot{M}(q) - 2C(q,\dot{q})\right] S(q) \end{aligned} \tag{2.29}$$

la cual es antisimétrica porque $\dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q})$ lo es y porque dada cualquier matriz D, entonces $D - D^T$ es antisimétrica.

2.8. Matrices de Rotación

Gran parte de la cinemática de robots está interesada con el establecimiento de varios sistemas coordenados para representar la posición y orientación de un objeto rígido y con la transformación entre estos sistemas coordenados (Spong et al., 2005). Por ello, la geometría del espacio tridimensional y el movimiento rígido juegan un papel importante con todos los aspectos de manipulación en robots.

Antes de desarrollar representaciones para puntos y vectores, es recomendable distinguir entre los dos enfoques fundamentales del razonamiento geométrico: el enfoque sintético, que razona directamente sobre la geometría de las entidades, por ejemplo, puntos o líneas, y el enfoque analítico, representa estas entidades mediante coordenadas o ecuaciones, y el razonamiento se realiza a través de manipulaciones algebraicas.

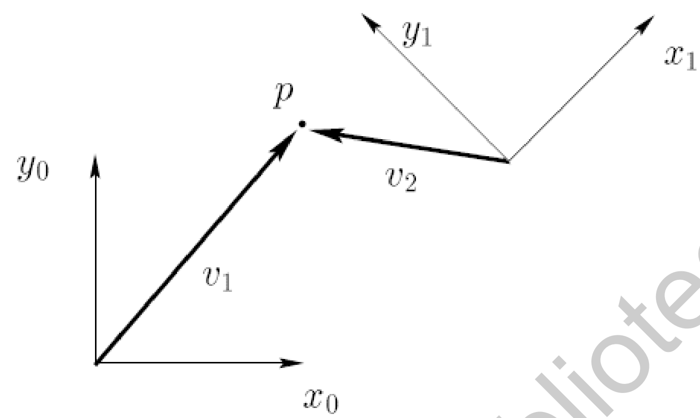


Figura 2.6: Dos marcos de referencia coordenados, en un punto p y dos vectores v_1, v_2 (Craig, 2006).

Usando el enfoque sintético en la Figura 2.6, sin asignar coordenadas a puntos o vectores, se puede decir que, x_0 es perpendicular a y_0, o $\vec{v_1}$x$\vec{v_2}$ que define un vector que es perpendicular al plano que contiene a $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$, en este caso, en dirección señalando la página. En robótica, normalmente se usa el razonamiento analítico, ya que las tareas del robot a menudo se definen en un espacio de trabajo cartesiano, utilizando las ordenadas cartesianas (Craig, 2006). Por supuesto, para asignar coordenadas es necesario especificar un marco de referencia de coordenadas.

Considere nuevamente la Figura 2.6. Podríamos especificar las coordenadas del punto p con respecto al marco de referencia $o_0x_0y_0$ o al cuadro $o_1x_1y_1$. En el primer caso, podríamos asignar a p el vector de coordenadas $(a_0, b_0)^T$, y en el último caso $(a_1, b_1)^T$. Para que el marco de referencia siempre sea claro, adoptaremos una notación en la que se utilice un superíndice para denotar el marco de referencia. Por lo tanto, escribiríamos:

$$p^0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad p^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Geométricamente, un punto correspondiente a una localización específica en el espacio. Destacamos, que $p \neq p_0$ y $p \neq p_1$, es decir, p es una entidad geométrica, un punto en el espacio, mientras que p_0 y p_1 son vectores de coordenadas que representan la ubicación de este punto en el espacio con respecto a los marcos de coordenadas $o_0x_0y_0$ y $o_1x_1y_1$, respectivamente. Dado que el origen de un sistema de coordenadas es solo un punto en el espacio, podemos asignar coordenadas que representan la posición del origen de un sistema de coordenadas con respecto a otro, por ejemplo, en la Figura 2.6.

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad o_0^1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

En los casos en que solo hay un marco de coordenadas único, o en los que el marco de referencia es obvio, a menudo se omite el superíndice. Este es un ligero abuso de la notación, y se aconseja tener en cuenta la diferencia entre la entidad geométrica llamada p y cualquier vector de coordenadas particular asignado para representar p. El primero es invariable con respecto a la elección de los sistemas de coordenadas, mientras que el segundo obviamente depende de la elección de los marcos de coordenadas.

Mientras que un punto corresponde a una ubicación específica en el espacio, un vector especifica una dirección y una magnitud. Los vectores se pueden usar, por ejemplo, para representar desplazamientos o fuerzas. Por lo tanto, mientras que el punto p no es equivalente al vector $\vec{v_1}$, el desplazamiento desde el origen o_0 hasta el punto p viene dado por el vector $\vec{v_1}$. El término vector se utiliza para referirnos a lo que a veces se denominan vectores libres, es decir, vectores que no están limitados a ubicarse en un punto particular del espacio. Según esta convención, está claro que los puntos y los vectores no son equivalentes, ya que los puntos se refieren a ubicaciones específicas en el espacio, pero un vector se puede mover a cualquier ubicación en el espacio. Según esta convención, dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud.

Cuando asignamos coordenadas a vectores, se usa la misma convención de notación usada al asignar coordenadas a puntos. Por lo tanto, $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son entidades geométricas invariables con respecto a la elección de los sistemas de coordenadas, pero la representación por coordenadas de estos vectores depende directamente de la elección del marco de coordenadas de referencia. Para realizar manipulaciones algebraicas utilizando coordenadas, es esencial que todos los vectores de coordenadas se definan con respecto al mismo marco de coordenadas de referencia. Por ejemplo, una expresión de la forma $v_1^1 + v_2^2$ no tendría sentido geométricamente. Por lo tanto, vemos una clara necesidad, no solo de un sistema de representación que permita expresar puntos con respecto a varios sistemas de coordenadas, sino también de un mecanismo que nos permita transformar las coordenadas de puntos que se expresan en un sistema de coordenadas en las coordenadas apropiadas con respecto a algún otro marco de coordenadas.

2.8.1. Rotación en el plano

Para representar la posición relativa y la orientación de un cuerpo rígido con respecto a otro, se adjuntan rígidamente marcos de coordenadas a cada cuerpo, y luego se especifican las relaciones geométricas entre estos marcos de coordenadas (Spong y Vidyasagar, 2008).

La Figura 2.7 muestra dos cuadros de coordenadas, obtenidos del marco de referencia $o_1x_1y_1$ girando el marco $o_0x_0y_0$ por un ángulo. La forma más obvia de representar la orientación relativa de estos dos cuadros es simplemente especificar el ángulo de rotación. Sin embargo existen dos desventajas inmediatas para tal representación, presentando una discontinuidad

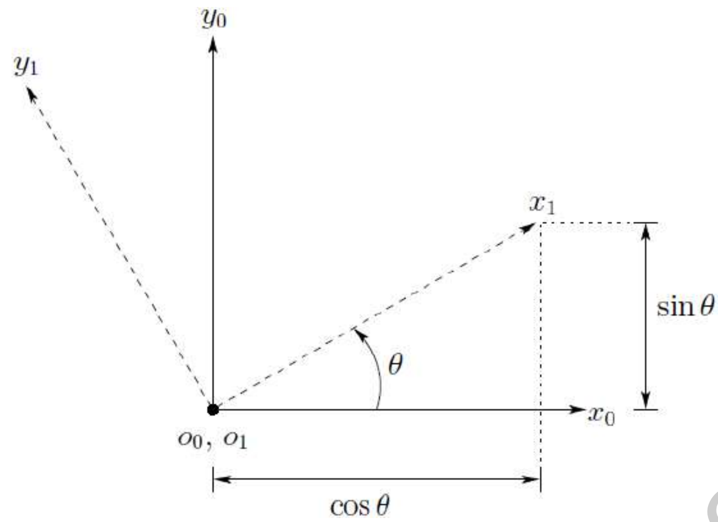


Figura 2.7: El marco de coordenadas de referencia $o_1x_1y_1$ está orientado en ángulo con respecto a $o_0x_0y_0$ (Craig, 2006).

en el mapeo desde la orientación relativa al valor de en una vecindad de $\theta = 0$. En particular, para $\theta = 2\pi - \epsilon$, hay pequeños cambios en la orientación produciendo grandes cambios en el valor de θ, es decir, una rotación por ϵ que causa un ángulo θ con respecto a cero. En segundo lugar, esta elección de representación no se adapta al caso tridimensional. Una forma menos obvia de especificar la orientación es, relacionar los vectores de coordenadas para los ejes del marco $o_1x_1y_1$ con respecto al marco de coordenadas $o_0x_0y_0$. En particular, podemos construir una matriz de la forma:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & | & y_1^0 \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

Una matriz en esta forma se llama matriz de rotación (Spong y Vidyasagar, 2008). Las matrices de rotación tienen una serie de propiedades especiales, que discutiremos a continuación. En el caso bidimensional, es sencillo calcular las entradas de esta matriz. Como se ilustra en la Figura 2.7.

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad y_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

resultando

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Tenga en cuenta que hemos seguido utilizando la convención de notación de permitir que el superíndice denote el marco de referencia. Por lo tanto, R_1^0 es una matriz cuyos vectores de columna son las coordenadas de los ejes del marco $o_1x_1y_1$ expresados en relación con el marco $o_0x_0y_0$. Aunque hemos derivado las entradas para R_1^0 en términos del ángulo, no es necesario que lo hagamos. Un enfoque alternativo, y que se adapta muy bien al caso tridimensional, es construir la matriz de rotación proyectando los ejes del marco $o_1x_1y_1$ sobre los ejes de coordenadas del marco $o_0x_0y_0$ (Spong y Vidyasagar, 2008). Recordando que el producto escalar de dos vectores unitarios da la proyección de uno sobre el otro, obtenemos:

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}, \quad y_1^0 = \begin{bmatrix} y_1 \cdot x_0 \\ y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Combinando las matrices (2.32), en la forma (2.30), se obtiene:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las columnas de R_1^0 especifican la dirección de los cosenos de los ejes de coordenadas de $o_1x_1y_1$ en relación con los ejes de coordenadas de $o_0x_0y_0$. Por ejemplo, la primera columna $(x_1 \cdot x_0, x_1 \cdot y_0)^T$ de R_1^0 especifica la dirección de x_1 en relación con el marco $o_0x_0y_0$. Hay que tener en cuenta que los lados derechos de estas ecuaciones se definen en términos de entidades geométricas, y no en términos de sus coordenadas. Observando la Figura 2.7 se puede ver que este método de definición de la matriz de rotación por proyección da el mismo resultado que se obtuvo en la ecuación (2.31).

Si, en cambio, quisiéramos describir la orientación del marco $o_0x_0y_0$ con respecto al marco $o_1x_1y_1$, es decir, si deseáramos usar el marco $o_1x_1y_1$ como marco de referencia, construiríamos una matriz de rotación de la forma:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 & y_0 \cdot x_1 \\ x_0 \cdot y_1 & y_0 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

Entonces, dado que el producto interno es conmutativo, es decir, que $x_i \cdot y_j = y_j \cdot x_i$, podemos decir que:

$$R_0^1 = \left(R_1^0\right)^T$$

En un sentido geométrico, la orientación de $o_1x_1y_1$ con respecto al marco $o_1x_1y_1$ es la inversa de la orientación de $o_1x_1y_1$ con respecto al marco $o_1x_1y_1$. Algebraicamente, usando el hecho de que los ejes de coordenadas son siempre mutuamente ortogonales, se puede ver fácilmente que

$$\left(R_1^0\right)^T = \left(R_1^0\right)^{-1}$$

Dicha matriz se dice que es ortogonal. Los vectores columna de R_1^0 son de longitud unitaria y mutuamente ortogonales. También se puede mostrar que $det\ \{R_1^0\} = \pm 1$. Todas las matrices de rotación tienen las propiedades de ser matrices ortogonales con $det\ \{R\} = +1$. Es habitual referirse al conjunto de todas las matrices de rotación de nxn por el símbolo $SO(n)$

2.8.2. Rotación en el espacio tridimensional

La técnica de proyección descrita anteriormente se adapta muy bien al caso tridimensional. En tres dimensiones, cada eje del cuadro $o_1x_1y_1z_1$ se proyecta sobre el cuadro de coordenadas $o_0x_0y_0z_0$. La matriz de rotación resultante está dada por:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$$

Como fue el caso de las matrices de rotación en dos dimensiones, las matrices en esta forma son ortogonales, con un $det\ \{R\} = +1$. En este caso, las matrices de rotación en el espacio tridimensional pertenecen al grupo $SO(3)$.

Suponga que el marco $o_1x_1y_1z_1$ se gira a través de un ángulo alrededor del eje z_0, y se desea encontrar la matriz de transformación resultante R_1^0. Tenga en cuenta que, por convención, el sentido positivo del ángulo viene dado por la regla de la mano derecha; es decir, una rotación positiva de grados alrededor del eje z avanzaría un tornillo roscado a la derecha a lo largo del eje z positivo (Craig, 2006).

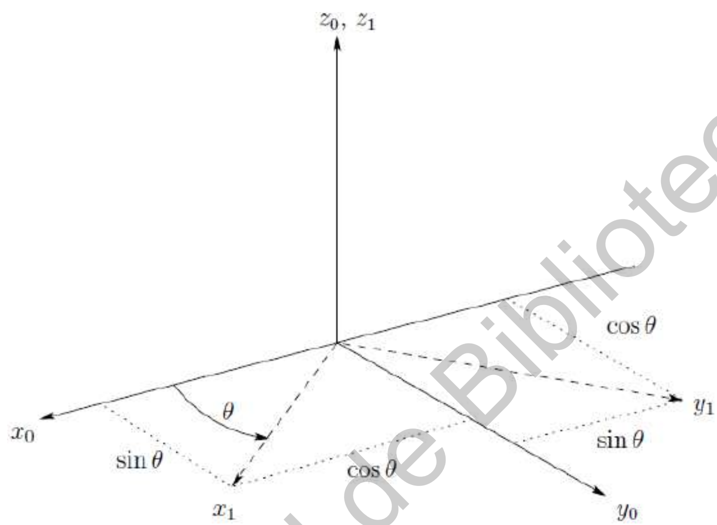


Figura 2.8: Rotación sobre el eje z (Craig, 2006).

De la Figura 2.8 vemos que:

$$\begin{array}{llll} x_1 \cdot x_0 & = \cos(\theta) & y_1 \cdot x_0 = -\sin(\theta) \\ x_1 \cdot y_0 & \quad = \sin(\theta) & y_1 \cdot y_0 \end{array}$$

y todos los demás productos de punto son cero. Así, la transformación R_1^0 tiene una forma particularmente simple en este caso, a saber:

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

2.8.3. Matrices de rotación básicas

La transformación (2.33) se llama matriz de rotación básica sobre el eje z. En este caso, nos resulta útil utilizar la notación más descriptiva $R_{z,\theta}$, en lugar de R_1^0 para denotar la matriz (2.33), (Spong y Vidyasagar, 2008). Es fácil verificar que la matriz de rotación básica $R_{z,\theta}$ tenga las propiedades:

$$\begin{gathered} R_{z,0} = I \\ R_{z,\theta}\ R_{z,\phi} = R_{z,\theta+\phi} \end{gathered} \tag{2.34}$$

que juntas implican

$$R_{z,\theta}{}^{-1} = R_{z,-\theta} \tag{2.35}$$

De manera similar, las matrices de rotación básicas que representan rotaciones sobre los ejes x y eje y se dan como:

$$R_{x,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$R_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

las cuales, cumplen analógicamente (2.34) y (2.35).

2.8.4. Propiedades de las matrices de rotación

Toda matriz de rotación R de $n \times n$ tiene las siguientes propiedades, para $n = 2, 3$.

1. $R \in SO(n)$
2. $R^{-1} \in SO(n)$
3. $R^{-1} = R^T$
4. Las columnas y filas de R son mutuamente ortogonales.
5. Cada columna y cada fila de R es un vector unitario.
6. $det\ \{R\} = 1$

Para proporcionar una intuición geométrica adicional para la noción de la inversa de una matriz de rotación, tenga en cuenta que en el caso bidimensional, la inversa de la matriz de rotación correspondiente a una rotación por ángulo que también se puede calcular fácilmente simplemente construyendo la matriz de rotación para una rotación por el ángulo θ.

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^T$$

2.8.5. Transformación rotacional

La Figura 2.9 muestra un objeto rígido S al que se adjunta un marco de coordenadas $o_1x_1y_1z_1$. Dadas las coordenadas p^1 del punto p, es decir, las coordenadas de p con respecto al marco $o_1x_1y_1z_1$, deseamos determinar las coordenadas de p en relación con un marco de referencia fijo $o_0x_0y_0z_0$.
Las coordenadas $p^1 = (u, v, w)^t$ satisfacen la ecuación

$$p = ux_1 + vy_1 + wz_1 \tag{2.38}$$

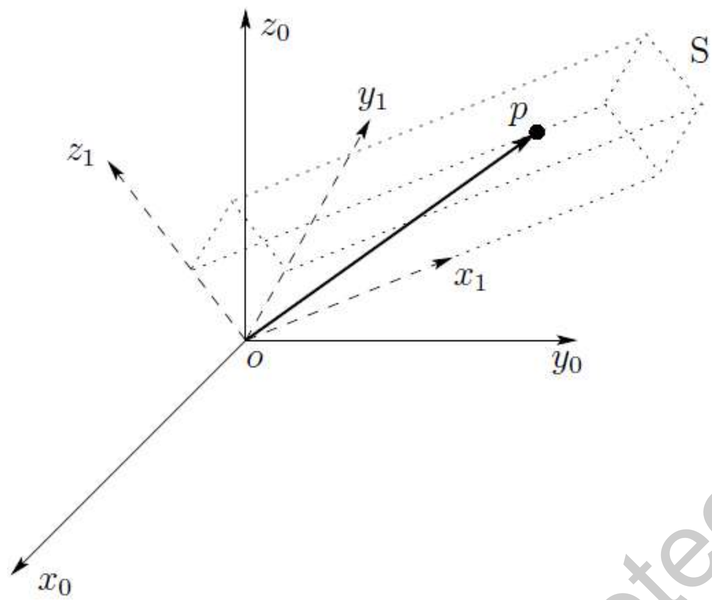


Figura 2.9: Marco coordenado unido a un cuerpo rígido.

De manera similar, podemos obtener una expresión para las coordenadas p^0 proyectando el punto p sobre los ejes de coordenadas del marco $o_0x_0y_0z_0$, dando:

$$p^0 = \begin{bmatrix} p \cdot x_0 \\ p \cdot y_0 \\ p \cdot z_0 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Combinando las ecuaciones (2.38) y (2.39), obtenemos.

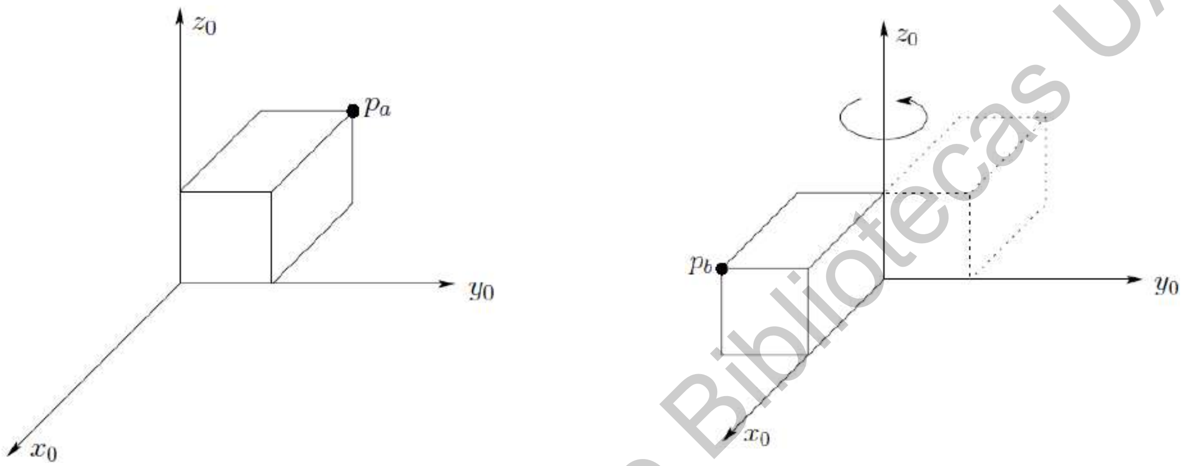
$$\begin{aligned} p^0 &= \begin{bmatrix} (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot x_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot y_0 \\ (ux_1 + vy_1 + wz_1) \cdot z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ux_1 \cdot x_0 + vy_1 \cdot x_0 + wz_1 \cdot x_0 \\ ux_1 \cdot y_0 + vy_1 \cdot y_0 + wz_1 \cdot y_0 \\ ux_1 \cdot z_0 + vy_1 \cdot z_0 + wz_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pero la matriz en esta ecuación final es simplemente la matriz de rotación R_1^0, que conduce a

$$p^0 = R_1^0 \, p^1 \tag{2.40}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación R_1^0 puede usarse no solo para representar la orientación del marco de coordenadas $o_1x_1y_1z_1$ con respecto al marco $o_0x_0y_0z_0$, sino también para transformar las coordenadas de un punto de un marco a otro. Por lo tanto, si un punto dado se expresa en relación con $o_1x_1y_1z_1$ por las coordenadas p^1, entonces $R_1^0 \, p^1$ representa el mismo punto expresado en relación con el marco $o_0x_0y_0z_0$.

Se ha visto cómo se pueden usar las matrices de rotación para relacionar la orientación de un marco a otro marco y para asignar representaciones de coordenadas a puntos y vectores. Por ejemplo, dado un punto p en el espacio, mostrando como se puede usar una matriz de rotación para derivar coordenadas para p con respecto a diferentes marcos de coordenadas cuyas orientaciones están relacionadas por una matriz de rotación. También podemos usar matrices de rotación para representar movimientos rígidos que corresponden a la rotación pura.



(a) Marco coordenado del cuerpo rígido (Craig, 2006).

(b) Rotación de marco coordenado del cuerpo rígido (Craig, 2006).

Figura 2.10: El bloque en 2.10b se obtiene girando el bloque en 2.10a por π sobre el eje z_0 (Craig, 2006).

Considere la Figura 2.10, una esquina del bloque en la Figura 2.10a está ubicada en el punto p_a en el espacio. La Figura 2.10b muestra el mismo bloque después de que ha sido girado alrededor de z_0 por el ángulo π. En la Figura 2.10b, la misma esquina del bloque se encuentra ahora en el punto p_b en el espacio, es posible derivar las coordenadas para p_b dadas solo las coordenadas para p_a y la matriz de rotación que corresponde a la rotación sobre z_0. Para ver cómo se puede lograr esto, imagine que un marco de coordenadas está unido rígidamente al bloque en la Figura 2.10a, de modo que coincida con el marco $o_0x_0y_0z_0$. Después de la rotación por π, el marco de coordenadas del bloque, que está rígidamente unido al bloque, también se rota por un ángulo π. Si denotamos este marco girado por $o_1x_1y_1z_1$, obtenemos

$$R_1^0 = R_{z,\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el marco de coordenadas local $o_1x_1y_1z_1$, el punto p_b tiene la representación de coordenadas p_b^1. Para obtener sus coordenadas con respecto al cuadro $o_0x_0y_0z_0$, simplemente aplicamos la ecuación de transformación de coordenadas (2.40), dando

$$p_b^0 = R_{z,\pi}\, p_b^1$$

El aspecto clave a tener en cuenta es que las coordenadas locales, p_b^1, de la esquina del bloque no cambian a medida que el bloque gira, ya que se definen en términos del propio marco de coordenadas del bloque. Por lo tanto, cuando el marco del bloque está alineado con el marco de referencia $o_0x_0y_0z_0$, es decir, antes de que se realice la rotación, las coordenadas $p_b^1 = p_a^0$, ya que antes de que se realice la rotación, el punto p_a coincide con la esquina del bloque. Por lo tanto, podemos sustituir p_0 en la ecuación anterior para obtener

$$p_b^0 = R_{z,\pi}\, p_a^0 \tag{2.41}$$

Esta ecuación nos muestra cómo usar una matriz de rotación para representar un movimiento de rotación. En particular, si el punto p_b se obtiene girando el punto p_a según lo definido por la matriz de rotación R, entonces las coordenadas de p_b con respecto al marco de referencia están dadas por

$$p_b^0 = R\, p_a^0 \tag{2.42}$$

Este mismo enfoque puede usarse para rotar vectores con respecto a un marco de coordenadas.

2.8.6. Composición de rotaciones: Rotación con respecto al marco de coordenadas actual

Es importante conocer la composición de las rotaciones. Recordando que la matriz R_1^0 en la ecuación (2.40), representa una transformación rotacional entre los cuadros $o_0x_0y_0z_0$ y $o_1x_1y_1z_1$. Supongamos que ahora agregamos un tercer marco de coordenadas $o_2x_2y_2z_2$ relacionado con los marcos $o_0x_0y_0z_0$ y $o_1x_1y_1z_1$ por transformaciones rotacionales (Spong y Vidyasagar, 2008). Un punto dado p puede ser representado por coordenadas especificadas con respecto a cualquiera de estos tres marcos: p^0, p^1 y p^2. La relación entre estas representaciones de p es:

$$p^0 = R_1^0\, p^1 \tag{2.43}$$

$$p^1 = R_2^1\, p^2 \tag{2.44}$$

$$p^0 = R_2^0\, p^2 = R_1^0\, R_2^1\, p^2 \tag{2.45}$$

donde cada R_j^i es una matriz de rotación, y la ecuación (2.43) seguido directamente de sustituir la ecuación (2.42) en la ecuación (2.41). Nótese que R_1^0 y R_2^0 representan rotaciones relativas al marco $o_0x_0y_0z_0$, mientras R_2^1 representa una rotación relativa al marco $o_1x_1y_1z_1$. De la ecuación (2.43) podemos inmediatamente inferir la identidad (2.44).

$$R_2^0 = R_1^0\, R_2^1 \tag{2.46}$$

La ecuación (2.44) es la ley de composición para transformaciones rotaciones. Establece que, para transformar las coordenadas de un punto p desde su representación p^2 en el marco $o_2x_2y_2z_2$ a su representación p_0 en el marco $o_0x_0y_0z_0$, primero podemos transformar sus coordenadas p^1 en el marco $o_1x_1y_1z_1$ usando R_2^1 y luego transformar p^1 en p^0 usando R_1^0.

Podemos también interpretar la ecuación (2.44) de la siguiente manera. Suponga inicialmente que los tres marcos de coordenadas coinciden, Primero rotamos el marco $o_2x_2y_2z_2$ en relación con $o_0x_0y_0z_0$ de acuerdo con la transformación R_1^0. Entonces, con los marcos $o_1x_1y_1z_1$ y $o_2x_2y_2z_2$ coincidentes. Rotamos $o_2x_2y_2z_2$ con relación a $o_1x_1y_1z_1$ de acuerdo a la transformación R_2^1. En cada caso llamamos marco de relación con el cual ocurre la rotación, el marco actual.

2.9. Velocidad cinemática: Jacobiano del Manipulador

Matemáticamente, las ecuaciones cinemáticas avanzadas, definen una función entre el espacio de posiciones y orientaciones cartesianas y el espacio de posiciones conjuntas. El Jacobiano de esta función determina las relaciones de velocidad (Baturone, 2005). El Jacobiano es una función con valores de matriz y puede considerarse como la versión vectorial de la derivada ordinaria de una función escalar (Craig, 2006; Sánchez, 2001; Linés, 1991). Esta matriz Jacobiana o Jacobiano es una de las cantidades más importantes en el análisis y control del movimiento del robot. Surge en prácticamente todos los aspectos de la manipulación robótica: en la planificación y ejecución de trayectorias suaves, en la determinación de configuraciones singulares, en la ejecución de movimiento antropomórfico coordinado, en la derivación de las ecuaciones dinámicas de movimiento y en la transformación de fuerzas y pares desde el efector final hasta las articulaciones del manipulador, es decir, codifica las relaciones entre las velocidades (Spong y Vidyasagar, 2008; Li et al., 2004).

2.9.1. Velocidad angular: Caso de eje fijo

Cuando un cuerpo rígido se mueve en una rotación pura sobre un eje fijo, cada punto del cuerpo se mueve en un círculo. Los centros de estos círculos se encuentran en el eje de rotación. A medida que el cuerpo gira, una perpendicular desde cualquier punto del cuerpo hasta el eje barre un ángulo θ, y este ángulo es el mismo para cada punto del cuerpo. Si κ es un vector unitario en la dirección del eje de rotación, entonces la velocidad angular viene dada por

$$\omega = \dot{\theta}\kappa$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada en el tiempo de θ. Dada la velocidad angular del cuerpo, uno aprende en cursos de dinámica introductoria que la velocidad lineal de cualquier punto del cuerpo está dada por la ecuación

$$v = \omega \times r \tag{2.47}$$

en el que r es un vector desde el origen, que se encuentra en el eje de rotación, hasta el punto. El papel principal de una velocidad angular es inducir velocidades lineales de puntos en un cuerpo rígido, para describir el movimiento de un marco en movimiento, incluido el movimiento del origen del marco a través del espacio y también el movimiento de rotación de los ejes del marco (Spong et al., 2005). Para especificar la orientación de un objeto rígido, adjuntamos rígidamente un marco de coordenadas al objeto, y luego especificamos la orientación del marco de coordenadas.

Dado que cada punto del objeto experimenta la misma velocidad angular, y dado que cada punto del cuerpo está en una relación geométrica fija con el marco adjunto al cuerpo. La velocidad angular es una propiedad del propio marco de coordenadas adjunto, y no es una propiedad de puntos individuales. Los puntos individuales pueden experimentar una velocidad lineal inducida por una velocidad angular, pero no tiene sentido hablar de un punto en sí mismo que gira. Por lo tanto, en la ecuación (2.47), v corresponde a la velocidad lineal de un punto, mientras que ω corresponde a la velocidad angular asociada con un marco de coordenadas giratorio.

En este caso de eje fijo, especifica desplazamientos angulares, ocasionando realmente un problema en el plano, ya que cada punto traza un círculo y cada círculo se encuentra en un plano. Por lo tanto, es tentador usar $\dot{\theta}$ para representar la velocidad angular. Sin embargo, no se generaliza al caso tridimensional, ya sea cuando el eje de rotación no es fijo o cuando la velocidad angular es el resultado de rotaciones múltiples sobre ejes distintos. Por esta razón, se desarrolla una representación más general para las velocidades angulares. Esto es análogo a nuestro desarrollo de matrices de rotación para representar la orientación en tres dimensiones. La herramienta clave que necesitaremos para desarrollar esta representación es la matriz antisimétrica.

Matriz antisimétrica

Las matrices de rotación se pueden usar para calcular las transformaciones de velocidad relativa entre cuadros de coordenadas. Dichas transformaciones implican derivados de matrices de rotación. Al introducir la noción de una matriz antisimétrica, es posible simplificar muchos de los cálculos involucrados. Una matriz antisimétrica es una matriz cuadrada S cuya traspuesta es igual a su negativa, es decir, $S^T = -S$ y a su vez $S = -S^T$, se denominan matriz antisimétrica. Suponga la matriz S, tal que $S \in \mathbb{R}^{nxn}$:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz A es antisimétrica, o hemisimétrica, si $a_{ij} = -a_{ji} \forall\ i, j = 1, 2, \dots, n$. En consecuencia, $a_{ii} = 0$ para todo i. Por lo tanto la matriz A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ -s_{12} & 0 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ -s_{13} & -s_{23} & 0 & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_{1n} & -s_{2n} & -s_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir, que la diagonal principal se conserva y todos los otros números son cambiados de signo al opuesto. Nótese que la matriz transpuesta de la matriz antisimétrica S es $-S^T$, y la antisimetría es respecto a la diagonal principal (Spong y Vidyasagar, 2008). Si n es impar el determinante de la matriz siempre será 0.

Definición 2.9.1 *(Matriz antisimétrica) Se dice que una matriz S es antisimétrica si y solo si*

$$S^T + S = 0$$

Denotamos el conjunto de todas las matrices antisimétricas $SO(3)$. Si $S \in SO(3)$ tiene componentes s_{ij}, entonces (2.47), (Spong y Vidyasagar, 2008), es equivalente a las nueve ecuaciones de:

$$s_{ij} = s_{ji} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.48}$$

De (2.48) vemos que $s_{ii} = 0$, es decir, los términos diagonales de S son cero y los términos fuera de la diagonal s_{ij} para $i \neq j$ satisfacen $s_{ij} = -s_{ji}$. Por lo tanto, S contiene solo tres entradas independientes y cada matriz antisimétrica 3×3 tiene la forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = (a_x, a_y, a_z)^T$ es un vector, entonces definimos una matriz antisimétrica $S(a)$ como (Spong y Vidyasagar, 2008):

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Entonces si tenemos vectores i, j y k, que son los vectores unitarios básicos

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0)^T \\ j &= (0, 1, 0)^T \\ k &= (0, 0, 1)^T \end{aligned}$$

sus matrices antisimétricas $S(i)$, $S(j)$ y $S(k)$ estás dadas por:

$$S(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.9.2. Propiedades de una matriz antisimétrica

Una matriz antisimétrica posee varias propiedades que resultan útiles. Estas propiedades son consecuencia del hecho de que las matrices son $SO(3)$, un espacio vectorial con una operación de producto adecuadamente definida. Entre estas propiedades están

1. Linealidad

$$S(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\, S(a) + \beta\, S(b) \tag{2.50}$$

para cualquier vector a y b pertenecientes a $\mathbb{R}^3$, donde α y β son escalares.

2.

$$S(a)\, p = a \times p \tag{2.51}$$

para cualquier vector a y p, donde $a \times p$ denota el producto cruz.

3. Si $R \in SO(3)$ y a, b son vectores en $\mathbb{R}^3$

$$R(a \times b) = R\ a \times R\ b \tag{2.52}$$

La ecuación (2.52) es verdadera, a menos que R sea ortogonal. La ecuación (2.52) dice que si primero rotamos los vectores a y b usando la transformación de rotación R y luego formamos el producto cruzado de los vectores rotados $R\ a$ y $R\ b$, el resultado es el mismo que el obtenido al formar primero el producto cruz $a \times b$ y luego girando para obtener $R(a \times b)$.

4.
$$R\ S(a)\ R^T = S(R\ a) \tag{2.53}$$

para $R \in SO(3)$ y $a \in \mathbb{R}^3$. Esta propiedad se deduce fácilmente de (2.51) y (2.52) de la siguiente manera. Sea $b \in \mathbb{R}^3$ un vector arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} R\ S(a)\ R^T\ b &= R(a \times (R^T\ b)) \\ &= (R\ a) \times (R\ R^T\ b) \\ &= (R\ a) \times b \\ &= S(R\ a)\ b \end{aligned} \tag{2.54}$$

La ecuación (2.54) es una de las expresiones más útiles que derivadas de (Spong y Vidyasagar, 2008). El lado izquierdo de (2.54) representa una transformación de similitud de la matriz $S(a)$. Por lo tanto, la ecuación dice que la representación matricial de $S(a)$ en un marco de coordenadas girado por R es la misma que la matriz antisimétrica $S(Ra)$ correspondiente al vector rotado por R. Supongamos ahora que una matriz de rotación R es una función de la variable única θ. Por lo tanto, $R = R(\theta) \in SO(3)$ para cada θ. Como R es ortogonal para todo, se deduce que

$$R(\theta)\ R^T(\theta) = I \tag{2.55}$$

Derivando ambos lados de la ecuación (2.55), con respecto a θ, usando la regla del producto

$$\frac{dR}{dt} R^T(\theta) + R(\theta) \frac{dR^T}{dt} = 0 \tag{2.56}$$

Se defina la matriz S.

$$S := \frac{dR}{dt} R^T(\theta) \tag{2.57}$$

Entonces S^T es

$$S^T = \left(\frac{dR}{dt} R^T(\theta) \right)^T = R(\theta) \frac{dR^T}{dt}$$

La ecuación (2.56) por lo tanto

$$S + S^T = 0$$

En otras palabras, la matriz S definida por (2.57) es antisimétrica. Multiplicando R por la derecha ambos lados de (2.57) y usando el hecho de que $R^T R = I$, se obtiene

$$S\ R(\theta) = \frac{dR}{dt} \tag{2.58}$$

La (2.58) (Spong y Vidyasagar, 2008) es muy importante, ya que calcula la derivada de la matriz de rotación R que es equivalente a una multiplicación de matriz por una matriz antisimétrica S. La situación más comúnmente encontrada es el caso donde R es una matriz de rotación básica o un producto de matrices de rotación básicas (Spong et al., 2005). Suponga que $R = R_{x,\theta}$, la matriz de rotación básica dada por (2.36), entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{dR}{dt} R^T(\theta) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= S(i) \end{aligned}$$

Con lo que, hemos demostrado

$$S(i)\ R_{x,\theta} = \frac{dR_{x,\theta}}{dt}$$

de manera analógica podemos decir que

$$S(j)\ R_{y,\theta} = \frac{dR_{y,\theta}}{dt}, \qquad S(k)\ R_{z,\theta} = \frac{dR_{z,\theta}}{dt}$$

2.9.3. Velocidad angular: Caso general

Ahora consideramos el caso general de la velocidad angular sobre un eje arbitrario, posiblemente en movimiento. Suponga que una matriz de rotación R varía en el tiempo, de modo que $R = R(t) \in SO(3)$ para cada $t \in R$. Suponiendo que $R(t)$ es continuamente diferenciable en función de t, un argumento idéntico al de la sección anterior muestra que la derivada de tiempo $\dot{R}(t)$ de $R(t)$ viene dada por

$$\dot{R}(t) = S(t)\ R(t)$$

donde la matriz $S(t)$ es una matriz antisimétrica. Dado que $S(t)$ es antisimétrica, puede representarse como $S(\omega(t))$ para un vector único $\omega(t)$. Este vector $\omega(t)$ es la velocidad angular del marco giratorio con respecto al marco fijo en el tiempo t. Por lo tanto, la derivada del tiempo $\dot{R}(t)$ viene dada por

$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))\ R(t) \tag{2.59}$$

en el cual $\omega(t)$ es la velocidad angular.

2.9.4. Adición de velocidades angulares

A menudo estamos interesados en encontrar la velocidad angular resultante debido a la rotación relativa de varios cuadros de coordenadas. Ahora derivamos las expresiones para la composición de las velocidades angulares de dos cuadros móviles $o_1x_1y_1z_1$ y $o_2x_2y_2z_2$

en relación con el marco coordenado fijo $o_0x_0y_0z_0$. Ahora, suponemos que los tres cuadros comparten un origen común. Las orientaciones relativas de los marcos $o_1x_1y_1z_1$ y $o_2x_2y_2z_2$ están dadas por las matrices de rotación $R_1^0(t)$ y $R_2^1(t)$ que varían en el tiempo, derivando la ecuación (2.46) con respecto al tiempo.

$$\dot{R}_2^0(t) = \dot{R}_1^0\, R_2^1 + R_1^0\, \dot{R}_2^1 \tag{2.60}$$

Usando (2.59), se puede escribir el término $\dot{R}_2^0$ en el lado izquierdo de (2.60)

$$\dot{R}_2^0(t) = S(\omega_2^0)\, R_2^0 \tag{2.61}$$

donde ω_2^0 denota la velocidad angular total experimentada por el marco $o_2x_2y_2z_2$. Esta velocidad angular resulta de las rotaciones combinadas expresadas por R_1^0 y R_2^1. El primer término en el lado derecho de (2.60) es simplemente

$$\dot{R}_1^0\, R_2^1 = S(\omega_a^0)\, R_1^0\, R_2^1 = S(\omega_a^0)\, R_2^0 \tag{2.62}$$

Teniendo en cuenta que, en la ecuación (2.62), ω_a^0 denota la velocidad angular del marco $o_1x_1y_1z_1$ que resulta del cambio de R_1^0, y este vector de velocidad angular se expresa en relación con el sistema de coordenadas $o_0x_0y_0z_0$. Por otro lado, el segundo término en el lado derecho de (2.60). Usando la expresión (2.53) tenemos

$$\begin{aligned} R_1^0\, \dot{R}_2^1 &= R_1^0\, S(\omega_b^1)\, R_2^1 \\ &= R_1^0\, S(\omega_b^1)\, R_1^{0^T}\, R_1^0\, R_2^1 \\ &= S(R_1^0\, \omega_b^1)\, R_1^0\, R_2^1 \\ &= S(R_1^0\, \omega_b^1)\, R_2^0 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Observe que en (2.63), ω_b^1 denota la velocidad angular del marco $o_2x_2y_2z_2$ que corresponde al cambio de R_2^1, expresado en relación con el sistema de coordenadas $o_1x_1y_1z_1$. Por lo tanto, el producto $R_1^0\, \omega_b^1$ expresa esta velocidad angular en relación con el sistema de coordenadas $o_0x_0y_0z_0$. Ahora, combinando las expresiones (2.62) y (2.63) en (2.61), hemos demostrado que

$$\begin{aligned} S(\omega_2^0)\, R_2^0 &= S(\omega_a^0)\, R_2^0 + S(R_1^0\, \omega_b^1)\, R_2^0 \\ &= [S(\omega_a^0) + S(R_1^0\, \omega_b^1)]\, R_2^0 \\ &= S(\omega_a^0 + R_1^0\, \omega_b^1)\, R_2^0 \end{aligned}$$

Debido a que $S(a) + S(b) = S(a + b)$, vemos que:

$$\omega_2^0 = \omega_a^0 + R_1^0\, \omega_b^1$$

En otras palabras, las velocidades angulares se pueden agregar una vez que se expresan en relación con el mismo marco de coordenadas, en este caso $o_0x_0y_0z_0$. El razonamiento anterior se puede extender a cualquier número de sistemas de coordenadas. En particular, supongamos que se nos da

$$R_n^0 = R_1^0\, R_2^1 \cdots R_n^{n-1}$$

Aunque es un ligero abuso de notación, representemos por ω_i^{i-1} la velocidad angular debida a la rotación dada por R_i^{i-1}, expresada en relación con el marco $o_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Extendiendo el razonamiento anterior obtenemos

$$R_n^0 = S(\omega_n^0)\ R_n^0$$

donde

$$\omega_n^0 = \omega_1^0 + R_1^0\ \omega_2^1 + R_2^0\ \omega_3^2 + R_3^0\ \omega_4^3 + \cdots + R_{n-1}^0\ \omega_n^{n-1}$$

2.9.5. Derivación del Jacobiano

Considere un manipulador n-barras con variables conjuntas $q_1, \ldots, q_n$. Supongamos que

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la transformación del marco efector final al marco base, donde $q = (q_1, \cdots, q_n)^T$ es el vector de variables conjuntas. A medida que el robot se mueve, tanto las variables conjuntas q_i como la posición del efector final o_n^0 y la orientación R_n^0 serán funciones del tiempo, relacionando la velocidad lineal y angular del efector final con el vector de velocidades conjuntas $\dot{q}(t)$. Suponga que

$$S(\omega_n^0) = \dot{R}_n^0\ (R_n^0)^T$$

define el vector de velocidad angular ω_n^0 del efector final, y permite

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0$$

que denota la velocidad lineal del efector final. Buscamos expresiones de la forma

$$v_n^0 = J_v\ \dot{q} \tag{2.64}$$

$$\omega_n^0 = J_\omega\ \dot{q} \tag{2.65}$$

donde J_v y J_ω son matrices de 3 x n. Podemos escribir (2.64) y (2.65) juntos como

$$\begin{bmatrix} v_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} = J_n^0\ \dot{q}$$

La matriz J_n^0 se llama el manipulador Jacobiano o Jacobiano para abreviar. Tenga en cuenta que J_n^0 es una matriz de 6 x n donde n es el número de grados libertad o eslabones del sistema. Luego derivamos una expresión simple para el Jacobiano de cualquier manipulador.

2.10. Dinámica de sistemas

Mientras que las ecuaciones cinemáticas describen el movimiento del robot sin tener en cuenta las fuerzas y los momentos que producen el movimiento, las ecuaciones dinámicas describen explícitamente la relación entre la fuerza y el movimiento. Es importante tener en cuenta las ecuaciones de movimiento en el diseño de robots, así como en la simulación y animación, y en el diseño de algoritmos de control. Introducimos las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2), que describen la evolución de un sistema mecánico sujeto a restricciones holonómicas o no holonómicas.

Para determinar las ecuaciones de Euler-Lagrange en una situación específica, uno tiene que formar el Lagrangiano del sistema (2.3), que es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen varias propiedades muy importantes para diseñar y analizar algoritmos de control de retroalimentación. Entre estos se encuentran los límites explícitos en la matriz de inercia, la linealidad en los parámetros de inercia y las llamadas propiedades de antisimetría y pasividad.

2.10.1. Expresiones generales para energía cinética y potencial

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden usar para derivar las ecuaciones dinámicas de manera directa, siempre que se pueda expresar la energía cinética y potencial del sistema en términos de un conjunto de coordenadas generalizadas. Para que este resultado sea útil en un contexto práctico, es importante poder calcular estos términos fácilmente para un manipulador robótico de n-grados de libertad o n-eslabones, de un robot rígido utilizando las variables conjuntas Denavit-Hartenberg como coordenadas generalizadas.

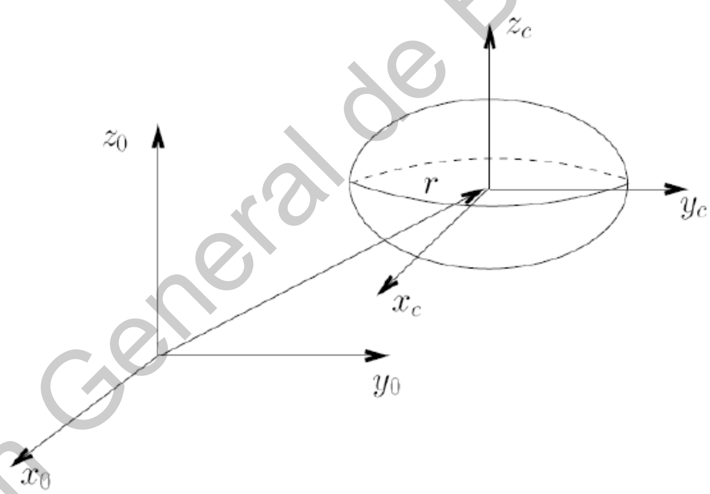


Figura 2.11: Un cuerpo rígido general (Spong y Vidyasagar, 2008).

Para comenzar, notamos que la energía cinética de un objeto rígido es la suma de dos términos: la energía traslacional obtenida al concentrar toda la masa del objeto en el centro de masa, y la energía cinética rotacional del cuerpo alrededor del centro de masa. Con referencia a la Figura 2.11, adjuntamos un marco de coordenadas en el centro de masa, llamado marco unido al cuerpo. La energía cinética del cuerpo rígido se da como

$$K = \frac{1}{2}mv^T v + \frac{1}{2}\omega^T I\omega \tag{2.66}$$

donde m es la masa total del objeto, v y ω son los vectores de velocidad lineal y angular, respectivamente, e $I \in \mathbb{R}^{3\times3}$ es una matriz simétrica, llamada Tensor de inercia.

Tensor de inercia

Se entiende que los vectores de velocidad lineal y angular, υ y ω, respectivamente, en (2.66) para la energía cinética se expresan en el marco inercial. En este caso lo sabemos ya que ω se encuentra a partir de la matriz antisimétrica (Spong et al., 2005).

$$S(\omega) = \dot{R}\, R^T \tag{2.67}$$

donde R es la transformación de orientación entre el marco adjunto al cuerpo y el marco inercial. Por lo tanto, es necesario expresar el tensor de inercia, I, también en el marco de inercia para calcular el producto $\omega^T I \omega$. El tensor de inercia relativo al marco de referencia de inercia dependerá de la configuración del objeto. Si denotamos como I el tensor de inercia expresado en su lugar en el marco adjunto al cuerpo, entonces las dos matrices se relacionan mediante una transformación de similitud de acuerdo con

$$I = RIR^T$$

Esta es una observación importante porque la matriz de inercia expresada en el marco adjunto al cuerpo es una matriz constante independiente del movimiento del objeto y se calcula fácilmente. A continuación, mostramos cómo calcular esta matriz explícitamente. Deje que la densidad de masa del objeto se represente como una función de posición, $p(x, y, z)$. Entonces el tensor de inercia en el marco adjunto al cuerpo se calcula como

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int\int\int (y^2 + z^2)\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz \\
I_{yy} &= \int\int\int (x^2 + z^2)\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz \\
I_{zz} &= \int\int\int (x^2 + y^2)\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz \\
I_{xy} = I_{yx} &= -\int\int\int x\ y\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz \\
I_{xz} = I_{zx} &= -\int\int\int x\ z\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz \\
I_{yz} = I_{zy} &= -\int\int\int y\ z\ p(x, y, z)dx\ dy\ dz
\end{aligned}$$

Las integrales anteriores se calculan sobre la región del espacio ocupado por el cuerpo rígido. Los elementos diagonales del tensor de inercia, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, se denominan **Momentos principales de inercia** sobre los ejes x, y, z, respectivamente (Spong y Vidyasagar, 2008). Los términos fuera de la diagonal I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} se denominan productos cruzados de inercia. Si la distribución de masa del cuerpo es simétrica con respecto al marco unido al cuerpo, entonces los productos cruzados de inercia son idénticamente cero.

Energía cinética para n-eslabones de un robot

Considere un manipulador que consiste en n eslabones, es decir, de n grados de libertad, donde las velocidades lineales y angulares de cualquier punto en cualquier unión pueden expresarse en términos de la matriz Jacobiana y la derivada de las variables conjuntas. Como en nuestro caso las variables conjuntas son las coordenadas generalizadas, se deduce que, para la matriz Jacobiana apropiada J_{υ_i} y J_{ω_i}, tenemos que

$$\upsilon_i = J_{\upsilon_i}(q)\,\dot{q} \qquad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\,\dot{q}$$

Suponga que la masa de la unión i es m_i y que la matriz de inercia de la unión i, evaluada alrededor de un marco de coordenadas paralelo al marco i pero cuyo origen está en el centro de masa, es igual a I_i. Luego de (2.66) se deduce que la energía cinética general del manipulador es igual a

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \sum_{i=1}^{n} \left[m_i J_{\upsilon_i}(q)^T J_{\upsilon_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q) \right] \dot{q}$$

De forma práctica podemos decir que $m_i J_{\upsilon_i}(q)^T J_{\upsilon_i}(q)$ es la energía traslacional y, por otra parte, el segundo término $J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)$ es la energía rotacional del sistema (Spong et al., 2005). En otras palabras, la energía cinética del manipulador es de la forma

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} \tag{2.69}$$

donde $D(q)$ es una matriz simétrica positiva definida que depende en general de la configuración. La matriz D se llama matriz de inercia (Spong et al., 2005).

Energía potencial para un robot de n-eslabones

Ahora considere el término de energía potencial P. En el caso de la dinámica rígida, la única fuente de energía potencial es la gravedad. La energía potencial de la unión i-ésima se puede calcular suponiendo que la masa de todo el objeto se concentra en su centro de masa y está dada por

$$P_i = g^T r_{ci} m_i \tag{2.70}$$

donde g es el vector que da la dirección de la gravedad en el marco inercial y el vector r_{ci} da las coordenadas del centro de masa de la unión i (Spong y Vidyasagar, 2008). Por lo tanto, la energía potencial total del robot de n-eslabones o grados de libertad es

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} g^T r_{ci} m_i$$

En el caso de que el robot contenga elasticidad, por ejemplo, articulaciones flexibles, la energía potencial incluirá términos que contengan la energía almacenada en los elementos elásticos. Hay que tener en cuenta que la energía potencial es una función solo de las coordenadas generalizadas y no de sus derivadas, es decir, la energía potencial depende de la configuración del robot, pero no de su velocidad.

2.11. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

También llamada segundo método de Lyapunov o método directo de Lyapunov. El principal objetivo en esta teoría de estabilidad es estudiar el comportamiento de los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (Khalil, 2002; Kelly et al., 2006; Liao et al., 2007; Aeyels et al., 2008; Karafyllis y Jiang, 2011). Esta teoría ha sido estudiada y ampliamente usada porque permite el estudio de la estabilidad de un sistema sin resolver la ecuación diferencial que lo describe (Spong y Vidyasagar, 2008; Whittaker, 1979; Awrejcewicz, 2009).

Un sistema que contiene las causas especiales y comunes de la variación, también se dice estar fuera de control, es decir, que es un sistema inestable es impredecible. Por ello, se debe saber si una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales puede tener una solución analítica, lo cual quiere decir, que primero se debe de probar la existencia y unicidad de la solución.

2.11.1. Existencia y unicidad de soluciones

Se dice que una función $f(t,x) \in \mathbb{R}^n$, con $t \geq 0$ es localmente Lipschitz en x_0, si existe una constante L, tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$$

en alguna velocidad x_0 y para todo $t \geq 0$. La norma anterior aplica para todo tipo de normas, incluyendo la norma Euclidiana.

Teorema 2.11.1 *(Existencia y Unicidad Local). Sea $f(t,x)$ una función que es continua por pedazos en t, que satisfaga la condición Lipschitz:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \qquad \begin{array}{ll} \forall\, x,y & \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ \|x - x_0\| < r\} \\ \forall\, t & \in [t_0, t_1] \end{array}$$

entonces existe una $\delta > 0$, tal que, la ecuación de estado $\dot{x} = f(t,x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene una única solución sobre el intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$. Asegurando la existencia y unidad de soluciones que son continuamente diferenciables. Una función es continuamente diferenciable sí su primera derivada existe y es continua.

El teorema 2.11.1 solo asegura existencia y unicidad en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \delta]$, que puede ser pequeño, se puede usar el principio llamado continuación de la solución, para alargar el tiempo en el que esa única solución existe; sí es que la solución permanece dentro de una región donde $f(t,x)$ sigue siendo localmente Lipschitz y en tal caso puede asegurarse que la solución existe conforme $t \to \infty$.

El origen del concepto de estabilidad tiene sus raíces en precisamente asegurar que la solución permanece dentro de una región donde $f(t,x)$ es localmente o globalmente Lipschitz y así asegurar existencia y unicidad para todo el tiempo t. Por ello, los sistemas se clasifican de la siguiente forma:

- Sistemas autónomos. Un sistemas es autónomo si se puede escribir como:

$$\dot{x} = f(x) \quad \forall\, x \in R^n \tag{2.71}$$

donde $f : D \to R^n$, lo cual quiere decir que es localmente Lipschitz en un dominio $D \subset R^n$. Un punto de equilibrio $\bar{x}$ se define como aquel punto, tal que, $f(\bar{x}) = 0$, por lo tanto, $\dot{x} = 0$.

- Sistemas no autónomos. Un sistemas es no autónomo si se puede escribir como:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \begin{matrix} \forall\, x & \in R^n \\ \forall\, t & \geq 0 \end{matrix} \tag{2.72}$$

donde el vector x corresponde al estado del sistema representado por (2.71) y (2.72). Denotamos soluciones de esta ecuación diferencial por $x(t, t_0, x(t_0))$, es decir, $x(t, t_0, x(t_0))$ representa el valor del estado del sistema en el tiempo t y con un estado inicial arbitrario $x(t_0) \in R^n$ y tiempo inicial $t_0 \geq 0$. Sin embargo, por simplicidad en la notación y dado que las condiciones iniciales t_0 y $x(t_0)$ son fijas, la mayoría de las veces usamos $x(t)$ para denotar una solución, en lugar de $x(t, t_0, x(t_0))$. Suponemos que la función $f : R_+ \times R^n \to R^n$ es continua en t y x y es tal que:

- La ecuación (2.71) y (2.72) tienen una única solución correspondiente a cada condición inicial t_0, $x(t_0)$.
- La solución $x(t)$ de (2.71) y (2.72) dependen continuamente de la condición inicial t_0, $x(t_0)$.

En términos generales, asumir que la existencia de las soluciones para todo $t \geq t_0 \geq 0$ es restrictivo y uno simplemente puede suponer que existen en un intervalo finito. Entonces, la existencia en el intervalo infinito puede concluirse a partir de los mismos teoremas sobre la estabilidad de Lyapunov que se muestran más adelante en este capítulo. Sin embargo, para los propósitos de estudio, asumimos la existencia en el intervalo infinito.

2.11.2. Punto de Equilibrio

Considere un sistema autónomo de (2.71) donde $f : D \to R^n$ es un mapeo localmente Lipschitz de un dominio $D \subset R^n$ dentro de R^n. Suponga que $x \in D$ es un punto de equilibrio de (2.71), que es, $f(x) = 0$. Entonces, se puede decir que, el sistema tiene equilibrio en el origen, siendo un vector constante $x \in R^n$ es un equilibrio o un estado de equilibrios del sistema, lo que permite asumir que $f(\bar{x})$ satisface $f(0) = 0$ y estudiar la estabilidad de el origen $x = 0$.

Definición 2.11.1 *(Equilibrio). El punto de equilibrio $x = 0$ de* (2.71) *es*

1. *Estable si para cada ε >0 existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que:*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \leq 0 \tag{2.73}$$

2. *Inestable sino es estable*

3. *Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser escogida, tal que:*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{2.74}$$

El requerimiento $\varepsilon - \delta$ para la estabilidad toma un desafío en forma de respuesta. Para demostrar que el origen es estable para cualquier valor de ε, esto implica un reto de diseño, debemos producir un valor de δ, posiblemente dependiente en ε, tal que, una trayectoria inicial en un vecindario δ del origen nunca saldrá del vecindario ε.

Para clarificar esto anterior, es prudente observar la Figura 2.12, debido a que este concepto suele ser un poco ambiguo para los lectores. De manera resumida, podemos decir que un sistema es estable siempre y cuando este permanezca dentro de un espacio de convergencia ε; por otro lado, es asintóticamente estable si es estable, es decir, que permanece dentro del espacio de convergencia ε y además el sistema converge en 0 conforme el tiempo $t \to \infty$; finalmente es inestable, si el sistema sale del espacio de convergencia ε, esto sin importar que el sistema converge a 0 después de un determinado tiempo t.

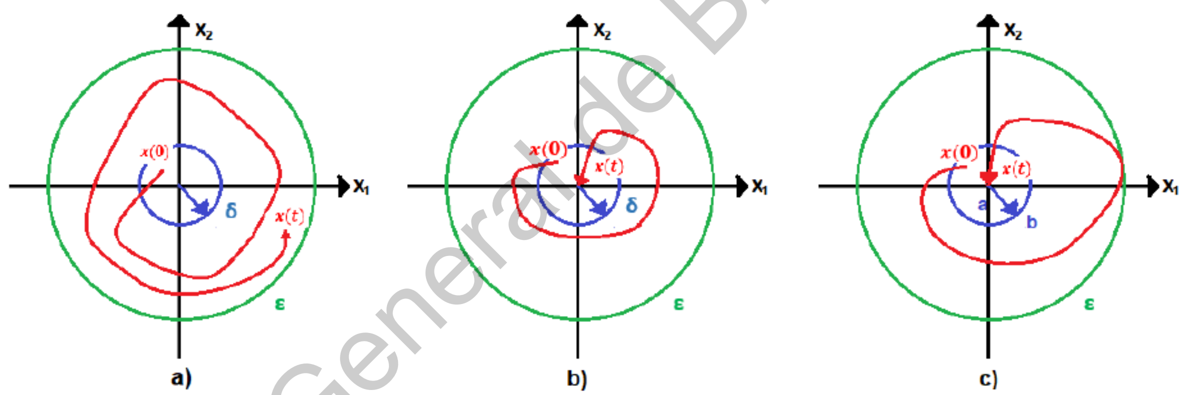


Figura 2.12: Gráficas de los tipos de comportamientos de acuerdo a la estabilidad. a) Comportamiento de un sistema estable. b) Comportamiento de un sistema asintóticamente estable. c) Comportamiento de un sistema inestable.

En la Definición 2.11.1, la constante δ, más pequeña que ε, no es única. De hecho, observe que cualquier constante δ que satisfaga la condición de la definición, cualquier $\delta' \leq \delta$ también la satisface. De igual forma, debe quedar claro que el número δ depende del número ε y, en general, también del tiempo inicial t_0. Tenga en cuenta que la definición de estabilidad para sistemas no autónomos requiere la existencia de un número $\delta > 0$ para cada $t_0 \geq 0$ y $\varepsilon > 0$ y no solo para algunos $t_o \geq 0$ y $\varepsilon > 0$. Correspondientemente, en el caso de los sistemas autónomos se requiere que exista $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no solo para algunas ε.

En consecuencia, se dice que el origen de la ecuación (2.71) es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que (2.73) se cumple con $t_0 = 0$. Otra consecuencia directa de la definición de equilibrio, bajo condiciones apropiadas de regularidad que excluyen situaciones patológicas, es que si el estado inicial $x(t_0) \in R^n$ es un equilibrio $x(t_0) = x \in R^n$ entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= x \quad \in t \geq t_0 \geq 0 \\ \dot{x}(t) &= 0 \quad \in t \geq t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

Esta idea se ilustra en la Figura 2.13, donde se representa el caso $x(t_0) \in \mathbb{R}^2$. El estado inicial $x(t_0)$ es precisamente x, por lo que la evolución de la solución $x(t)$ corresponde exactamente al valor constante x para todos los tiempos $t \geq t_0$.

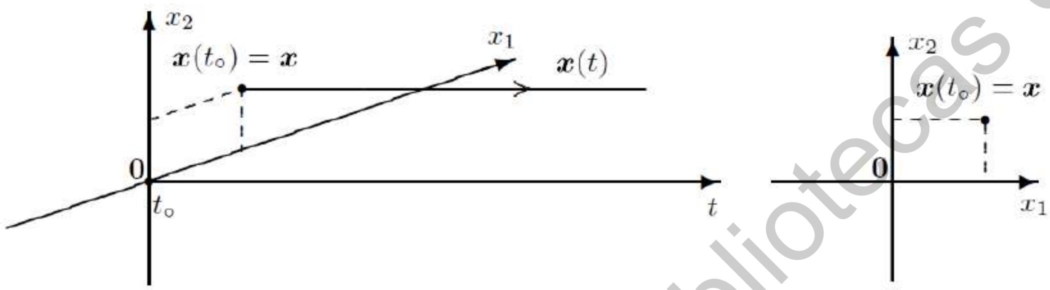


Figura 2.13: Concepto de equilibrio (Lyapunov, 1992).

Normalmente se supone que el origen del espacio de estado R^n, es decir, $x \in R^n$ es un equilibrio de (2.71) y (2.72). Si este no es el caso, se puede demostrar que mediante un cambio adecuado de variable, cualquier equilibrio se puede traducir al origen. Por otro lado, los sistemas con equilibrios múltiples no están restringidos a ejemplos matemáticos, sino que son bastante comunes en la práctica de control y los mecanismos son un buen ejemplo de estos, ya que, en general, los modelos dinámicos de robots constituyen sistemas no lineales que contienen equilibrios múltiples (Khalil, 1987, 2002; Aeyels et al., 2008).

Lo definido anteriormente nos permite afirmar, por lo tanto, sí V es decreciente a lo largo de la solución de (2.71). Las nociones básicas de estabilidad de equilibrios de ecuaciones diferenciales, deben considerarse como atributos del equilibrio de las ecuaciones diferenciales y no de las ecuaciones en sí mismas (Liao et al., 2007). Sin pérdida de generalidad, asumimos que el origen del espacio de estado, $x = 0 \in R^n$, es un equilibrio de (2.71) y (2.72), pero pueden reformularse para otros equilibrios realizando los cambios apropiados de coordenadas (Spong y Vidyasagar, 2008; Craig, 2006; Liao et al., 2007).

Teorema 2.11.2 *(Punto de equilibrio) Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para* (2.71) *y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene $x = 0$. Sea $V : D \to R$ una función continuamente diferenciable, tal que:*

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad D - \{0\} \tag{2.75}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \; \forall \, x \in D \tag{2.76}$$

Entonces, $x = 0$ es estable. Más aún, sí

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

El teorema 2.11.2 se representar por la Figura 2.14, muestra que dado un $\varepsilon > 0$, se elije un $r \in (0, \varepsilon]$, tal que, $B_r = \{x \in R^n | \ \|x\| \leq r\} \subset D$. Sea $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. Entonces, $\alpha > 0$ para (2.75), tomando en cuenta que $\beta \in (0, \alpha)$ y sea $\Omega_\beta = \{x \in B_r | \ V(x) \leq \beta\}$. Entonces, Ω_β está dentro de B_r. Este hecho puede ser demostrado por contradicción. Suponga que Ω_β no está en el interior de B_r, tal que, no hay un punto $p \in \Omega_\beta$ que se encuentre en el límite de B_r. En este punto, $V(p) \geq \alpha > \beta$, $x \in \Omega_\beta$, $V(x) \leq \beta$, lo cual es una contradicción. El conjunto Ω_β tiene la propiedad de que cualquier trayectoria comenzada en Ω_β en $t = 0$, se mantienen en Ω_β para todo $t \geq 0$. Esto se deduce de (2.76), de $\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall \ t \geq 0$. Porque Ω_β es un conjunto compacto, es decir, que es un conjunto cerrado y acotado.

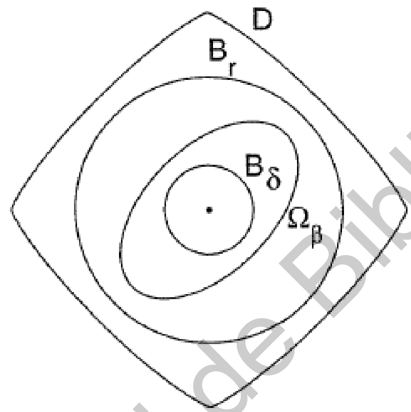


Figura 2.14: Representación geométrica de los conjuntos mostrados en el teorema 2.11.2 (Khalil, 2002).

La Definición 2.11.1 y el Teorema 2.11.2 anterior, permiten dar una alusión completa por medio del análisis matemático en los sistemas no lineales, debido a la falta de métodos o soluciones analíticas para estos sistemas, por lo que, el concepto de estabilidad y los diferentes tipos de estabilidad en conjunto a la función de Lyapunov ayudan a encontrar una expresión analítica que pruebe la de estabilidad para sistemas no lineales y con ello la Definición 2.11.2 de estabilidad en un punto de equilibrio.

Definición 2.11.2 *(Estabilidad) El punto de equilibrio $x = 0$ un punto de* (2.71) *y* (2.72) *es*

- *Estable sí, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ para cada*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall \ t \geq t_0 \geq 0 \tag{2.77}$$

- *Uniformemente estable sí, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, independiente de t_0, tal que,* (2.77) *se satisface.*

- *Inestable sí este no es estable.*

- *Asintóticamente estable sí, este es estable y hay una constante positiva $c = c(t_0)$, tal que, $x(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$, para toda $\|x(t_0)\| < c$.*

- *Uniformemente asintóticamente estable sí, este es uniformemente estable estable y hay una constante* c*, independiente de* t_0 *para toda* $\|x(t_0)\| < c$*,* $x(t) \to 0$ *conforme* $t \to \infty$*, uniformemente en* t_0*, esto así, para cada* $\eta > 0$*, hay un* $T = T(\eta) > 0$*, tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \begin{array}{l} \forall \;\; t \geq t_0 + T(\eta) \\ \forall \;\; \|x(t_0)\| < c \end{array} \tag{2.78}$$

- *Globalmente uniformemente asintóticamente estable sí, este es estable,* $\delta(\varepsilon)$ *puede ser elegido al satisfacer* $\lim_{\varepsilon \to \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$*, y para cada par de números positivos* η *y* c *hay un* $T = T(\eta, c) > 0$*, tal que*

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \begin{array}{l} \forall \;\; t \geq t_0 + T(\eta, c) \\ \forall \;\; \|x(t_0)\| < c \end{array} \tag{2.79}$$

La Definición 2.11.2 establece condiciones suficientes para la estabilidad en un punto de equilibrio, pero no necesaria para determinarlo (Hahn, 1967; Lozano et al., 2000; La Salle y Lefschetz, 2012; Lefschetz, 1965). Esto implica que no existe una solución global para todos los sistemas por lo que en algunos casos, donde $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, el sistema sera localmente estable o localmente asintóticamente estable (Kelly et al., 2006; Slotine et al., 1991; Vannelli y Vidyasagar, 1985; Marquez, 2003; Sastry, 2013).

En otras palabras, establece que el origen es un equilibrio estable si para cualquier condición inicial limitada, la solución correspondiente también está limitada. Esto se conoce comúnmente como límite de soluciones o estabilidad de Lagrange y es una propiedad algo más débil que la estabilidad de Lyapunov. Sin embargo, la limitación de las soluciones no es una condición necesaria ni suficiente para la estabilidad de Lyapunov de un equilibrio.

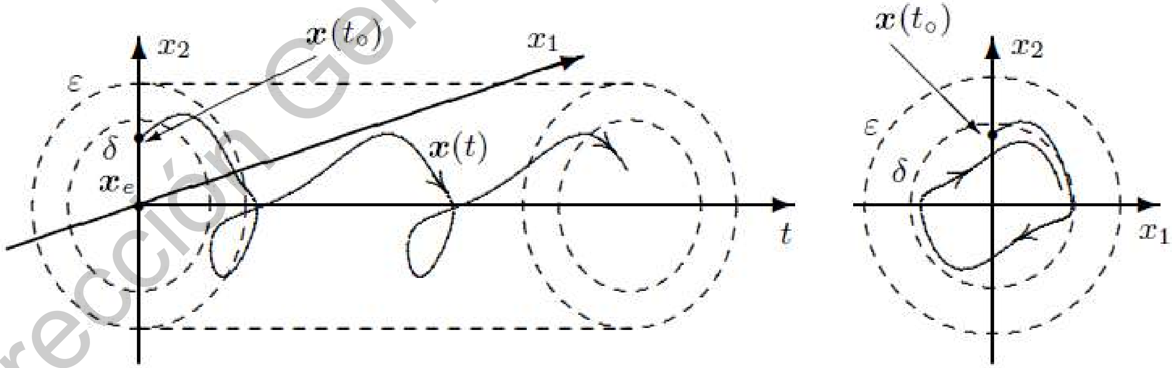


Figura 2.15: Comportamiento de la estabilidad de un sistema conforme a un punto de equilibrio x.

Para ilustrar el concepto de estabilidad, la Figura 2.15 muestra una trayectoria con un estado inicial $x(t_0) \in R^2$ tal que el origen $x = 0 \in R^2$ es un equilibrio estable. En la Figura 2.15 también mostramos ε y δ que satisfacen la condición de la definición de estabilidad, es decir, $x(t_0) < \delta$ implica que $x(t) < \varepsilon \;\; \forall \;\; t \geq t_0 \geq 0$.

Definición 2.11.3 *(Inestabilidad) El origen de la ecuación* (2.71) *y* (2.72) *es un equilibrio inestable si no es estable. Matemáticamente hablando, la propiedad de inestabilidad significa que existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el que no se puede encontrar $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que*

$$\|t_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0 \geq 0$$

En otras palabras, que existe al menos un $\varepsilon > 0$ que se desea que sea un límite en la norma de la solución $x(t)$ pero no existe ningún par de condiciones iniciales $t_0 \in \mathbb{R}_+$ y $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ cuya solución $x(t)$ puede satisfacer $x(t) < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Debe quedar claro que la inestabilidad no implica necesariamente que la solución $x(t)$ crezca hasta el infinito como $t \to \infty$.

Teorema 2.11.3 *(Chetaev) Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para* (2.71). *Sea $V : D \to R$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset R^n$ que contiene al origen $x = 0$, tal que, $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con una $\|x_0\|$ arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto $U = \{x \in B_r | V(x) > 0\}$ y supongamos que $\dot{V} > 0$ en U. Entonces $x = 0$ es inestable.*

El conjunto U no es un conjunto vacío contenido en B_r. Su límite es la superficie $V(x) = 0$ y la esfera $\|x\| = r$. Desde $V(0) = 0$, el origen se encuentra en los límites de U dentro de B_r. Nótese, que U contiene más de una componente. El conjunto U puede estar siempre construido a condición que $V(0) = 0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 arbitrariamente cercano al origen.

2.11.3. Comparación de funciones

Para clarificar la definición 2.3.1 para lograr una uniformidad, resulta necesario hacer una definición más transparente, la cual, usa una comparación especial de funciones, conocidas como funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$, que serán definidas y ejemplificadas en los siguientes Lemmas.

Definición 2.11.4 *(Función clase $\mathcal{K}$) Una función continua $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$ se dice pertenecer a la clase $\mathcal{K}$ sí esta es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$. Se dice que pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$ sí $a = \infty$ y $\alpha(r) \to \infty$ conforme $r \to \infty$*

Definición 2.11.5 *(Función clase $\mathcal{KL}$) Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ se dice que permanece a la clase $\mathcal{KL}$ sí, para cada valor fijo s, el mapeo $\beta(r, s)$ pertenece a la clase $\mathcal{K}$ con respecto a r para cada valor fijo de r, el mapeo $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \to 0$ conforme $s \to \infty$*

Ejemplo 2.11.1 *(Funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$)*

- $\alpha(r) = \tan^{-1}(r)$ *es estrictamente creciente desde $\alpha'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$. Esto pertenece a la clase $\mathcal{K}$, pero no a una clase $\mathcal{K}_\infty$ ya que $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2} < \infty$.*
- $\alpha(r) = r^c$*, para cualquier numero real positivo, es estrictamente creciente ya que $\alpha'(r) = cr^{c-1} > 0$. Más aún, $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \infty$, así, esto pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$.*

- $\alpha(r) = \text{mín}\{r, r^2\}$ *es continuo, estrictamente creciente, y* $\text{lím}_{r\to\infty} \alpha(r) = \infty$. *Por lo tanto, esto pertenece a la clase* $\mathcal{K}_\infty$. *Nótese que* $\alpha(r)$ *no es continuamente diferenciable en* $r = 1$. *Continuamente diferenciable no es requerido para la función clase* $\mathcal{K}$.

- $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr+1}$ *para cualquier número real positivo* k, *es estrictamente creciente en* r *ya que*
$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = \frac{r}{(ksr+1)^2} > 0$$
y estrictamente decreciente en s *ya que*
$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{-kr^2}{(ksr+1)^2} < 0$$
Más aún, $\beta(r, s) \to 0$ *como* $s \to \infty$. *Por lo tanto, esta pertenece a la clase* $\mathcal{KL}$.

- $\beta(r, s) = r^c e^{-s}$ *para cualquier número real positivo* c, *pertenece a la clase* $\mathcal{KL}$.

Para tener una comprensión más clara de expuesto, y facilitar el entendimiento de teoremas futuros es necesario mostrar los siguientes propiedades de las funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$ con ayuda de los Lemas 2.11.1 y 2.11.2.

Lema 2.11.1 *(Notación de funciones clase* $\mathcal{K}$ *y clase* $\mathcal{KL}$ *) Sea* α_1 *y* α_2 *funciones clase* $\mathcal{K}$ *dentro de* $[0, a)$, α_3 *y* α_4 *sean funciones clase* $\mathcal{K}_\infty$ *y* β *sea una función clase* $\mathcal{KL}$. *Denote la inversa de* α_i *como* α_i^{-1}. *Entonces,*

- α_1^{-1} *es definida en* $[0, \alpha_1(a))$ *y pertenece a la clase* $\mathcal{K}$.
- α_3^{-1} *es definido en* $[0, \infty)$ *y pertenece a la clase* $\mathcal{K}_\infty$.
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$ *pertenece a la clase* $\mathcal{K}$.
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$ *pertenece a la clase* $\mathcal{K}_\infty$.
- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ *pertenece a la clase* $\mathcal{KL}$.

Las funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$ que contienen el analisis de Lyapunov entran en los siguientes Lemmas.

Lema 2.11.2 *(Signo definido de funciones* $\mathcal{K}$*) Sea* $V : D \to R$ *una función definida positiva en un dominio* $D \subset R^n$ *que contiene el origen. Sea* $B_r \subset D$ *para algún* $r > 0$. *Entonces, existen funciones* α_1 *y* α_2 *clase* $\mathcal{K}$, *definidas en* $[0, r)$, *tal que*
$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \tag{2.80}$$
para toda $x \in B_r$. *Sí* $D = R^n$, *las funciones* α_1 *y* α_2 *serán definidas en* $[0, \infty)$ *y la desigualdad anterior se mantendrá para toda* $x \in R^n$. *Más aún, sí* $V(x)$ *es radialmente desacotada, entonces* α_1 *y* α_2 *pueden ser elegidas para permanecer a la clase* $\mathcal{K}_\infty$.

Si $V(x) = x^T P\, x$ es una función cuadrática definida positiva, el Lema 2.11.2 permite seguir la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\text{mín}}(P)\|x\|_2^2 \leq x^T P\, x \leq \lambda_{\text{máx}}(P)\|x\|_2^2$$

Lema 2.11.3 *(Solución única) Considere una ecuación diferencial autónoma*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0$$

donde α es una función localmente Lipschitz clase $\mathcal{K}$ definida en $[0, a)$. Para todo $0 \leq y_0 \leq a$, esta ecuación tiene una única solución $y(t)$ definida para todo $t \geq t_0$. Más aún,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

donde σ es una función clase $\mathcal{KL}$ definida en $[0, a) \times [0, \infty)$.

Podemos ver que lo mostrado en el Lema 2.11.3 es cierto para explicar ejemplos específicos donde una solución de forma cerrada de la ecuación escalar puede ser encontrada. Por ejemplo, sí $\dot{y} = -ky$, $k > 0$, entonces la solución es

$$y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)} \Rightarrow \sigma(r, s) = re^{-ks}$$

Como otro ejemplo, sí $\dot{y} = -ky^2$, $k > 0$, entonces la solución es

$$y(t) = \frac{y_0}{ky_0(t - t_0) + 1} \Rightarrow \sigma(r, s) = \frac{r}{krs + 1}$$

Para ver como las funciones clase $\mathcal{K}$ y clase $\mathcal{KL}$ entran en el analisis de Lyapunov, para ello es necesario ver como se usaron en la demostración del Teorema 2.11.2, consultar demostración en (Khalil, 2002). En la demostración, se selecciona β y δ, tal que, $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$. Usando el hecho que una función $V(x)$ definida positiva satisface

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

podemos elegir $\beta \geq \alpha_1(r)$ y $\delta \geq \alpha_2^{-1}(\beta)$. Esto es así porque

$$V(x) \leq \beta \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_1(r) \Leftrightarrow \|x\| \leq r$$

and

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(\delta) \leq \beta$$

En la misma demostración se muestra que cuando $\dot{V}(x)$ es definida negativa, la solución $x(t)$, la solución tiende a 0 conforme $t \to \infty$. Usando el Lema 2.11.2 vemos que hay una función α_3 clase $\mathcal{K}$, tal que, $\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$. Por lo tanto, V satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V))$$

Por su parte, el Lema 2.11.1 muestra que $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ es una función clase $\mathcal{K}$ y el Lema 2.11.3 muestra que la solución de la ecuación escalar es $y(t) = \beta(y(0), t)$, donde β es una función clase $\mathcal{KL}$. En consecuencia, $V(x(t))$ satisface la desigualdad $V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t)$, el cual muestra que $V(x(t)) \to 0$ conforme $t \to \infty$. Por otro lado, la desigualdad $V(x(t)) \leq V(x(0))$ implica que

$$\alpha 1(\|x\|) \leq V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

Por lo tanto, $\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(0)\|))$, donde $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ es una función clase $\mathcal{K}$. De manera similar, la desigualdad $V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t)$ implica que

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leq V(x(t)) \leq \beta(V(x(0)), t) \leq \beta(\alpha_2(\|x(0)\|), t)$$

Por lo tanto, $\|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(\|x\|), t))$, donde $\alpha_1^{-1}(\beta(\alpha_2(r), t))$ es una función clase $\mathcal{KL}$.

2.11.4. Función de Lyapunov

Se presentaron definiciones que determinan una clase particular de funciones que son fundamentales en el uso del método directo de Lyapunov para estudiar la estabilidad de los equilibrios de las ecuaciones diferenciales.

Definición 2.11.6 *(Semi-definida) Una función escalar continua $V(x)$ se dice que es definida positiva localmente si $V(0) = 0$ y en una bola B_r se cumple que $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$. Si $V(0) = 0$ y la propiedad anterior se cumple en todo el espacio de estados, entonces $V(x)$ es definida positiva globalmente. Por lo tanto:*

- *Una función $V(x)$ es definida negativa sí $-V(x)$ es definida positiva.*
- *Una función $V(x)$ es semi-definida positiva sí $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$.*
- *Una función $V(x)$ es semi-definida negativa sí $-V(x)$ es semi-definida positiva.*

Algunos aspectos importantes son:

1. El prefijo "semi" es usado para reflejar la posibilidad de que $V(x)$ puede ser cero para $x \neq 0$.
2. $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\frac{dx}{t} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) = \nabla V(x) f(x)$, es decir, los puntos de equilibrio también satisfacen $\dot{V}(x) = 0$. Para el caso de sistemas autonomos, $\dot{V}(x) = 0$ depende solo de x.

De acuerdo con esta definición, debe quedar claro que una función globalmente definida positiva también es localmente definida positiva. Además, según la definición de matriz definida positiva, una función cuadrática $f : R^n \to R$, es decir, de la forma

$$f(x) = x^T\, P\, x, \quad P \in R^{n \times n}$$

es definida positiva sí y solo si $P > 0$. Para una función continua $V : R_+ \times R^n \to R_+$, es decir, que también depende del tiempo, decimos que $V(t, x)$ es, respectivamente localmente definida positiva si:

$$\begin{aligned} V(t,0) &= 0 \quad \forall\, t \geq 0 \\ V(t,x) &\geq W(x) \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, x \in R^n \end{aligned}$$

donde $W(x)$ es una función localmente definida positiva.

Definición 2.11.7 *(Función radialmente desacotada y función decreciente) Se dice que una función continua $W : R^n \to R$ es radialmente desacotada si:*

$$W(x) \to \infty \quad \textit{como} \quad \|x\| \to \infty$$

En consecuencia, decimos que $V(t,x)$ es radialmente desacotada si $V(t,x) \geq W(x) \;\; \forall t \geq 0$. Y por su parte, una función continua $V : R_+ \times R^n \to R$ es decreciente si existe una función localmente definida positiva $W : R^n \to R_+$ tal que

$$V(t,x) \leq W(x) \qquad \begin{array}{l} \forall\, t \geq 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \;\; \text{mín}(\|x\|) \end{array}$$

Si $V(t,x)$ es independiente de t, es decir, si $V(t,x) = V(x)$, entonces $V(x)$ es decreciente. Sin embargo, $V(x)$ puede estar determinada como se muestra en la Figura 2.16:

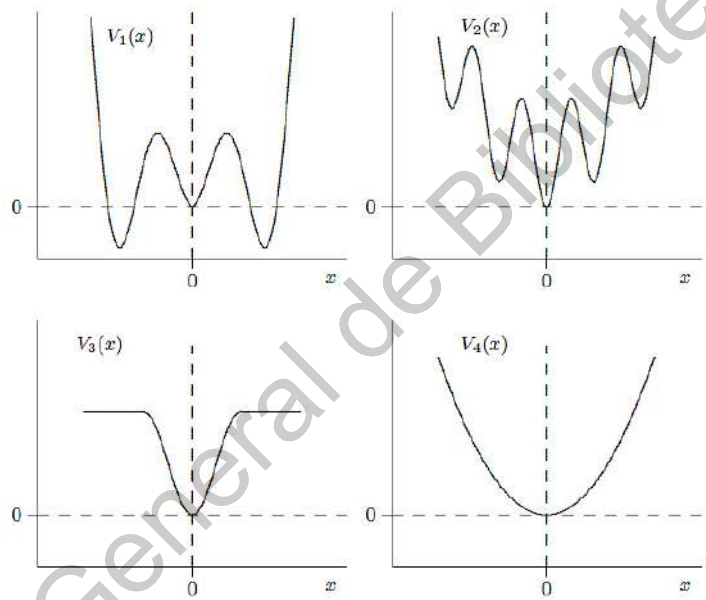


Figura 2.16: Ejemplos de algunas funciones $V(x)$ radialmente desacotadas (Lyapunov, 1992).

Estos conceptos anteriores, permiten definir el método directo de Lyapunov para el estudio de la estabilidad del equilibrio, permitiendo brindar una de las condiciones que debe de satisfacer la función candidata de Lyapunov.

Definición 2.11.8 *(Función candidata de Lyapunov) Se dice que una función continua y diferenciable $V : R_+ \times R^n \to R_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in R^n$ de la ecuación $x = f(t,x)$ si:*

1. *$V(t,x)$ es localmente definida positiva definida.*
2. *$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ es continuo con respecto a t y x.*
3. *$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ es continuo con respecto a t y x.*

en consecuencia, se dice que una función continua y diferenciable $V : R^n \to R_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in R^n$ de la ecuación $x = f(x)$ sí $V(x)$ es localmente definida positiva y $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ es continua.

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in R^n$ de las ecuaciones (2.71) y (2.72) es cualquier función localmente definida positiva y continuamente diferenciable; es decir, con derivadas parciales continuas. La derivada del tiempo de una función candidata de Lyapunov desempeña un papel clave en la obtención de conclusiones sobre los atributos de estabilidad de los equilibrios de las ecuaciones diferenciales (Kelly et al., 2006; Slotine et al., 1991; Vannelli y Vidyasagar, 1985; La Salle y Lefschetz, 2012; Lefschetz, 1965).

Definición 2.11.9 *(Derivada en el tiempo de una función candidata de Lyapunov) Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov para las ecuaciones* (2.71) *y* (2.72)*. La derivada del tiempo total de $V(t, x)$ a lo largo de las trayectorias, denotada por $\dot{V}(t, x)$, viene dada por:*

$$\dot{V}(t, x) := \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x)$$

observando que si $V(x)$ no depende explícitamente del tiempo y la ecuación (2.71) *es autónoma, porque no depende explícitamente del tiempo, entonces:*

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definición 2.11.10 *(Función de Lyapunov) Una función candidata de Lyapunov $V(x)$ es llamada función de Lyapunov para la ecuación* (2.71) *sí, en una bola B_r conteniendo el origen, $V(x)$ es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas y su derivada a lo largo de la solución, una trayectorias, de* (2.71) *es semi-definida negativa, satisface*

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$$

En consecuencia, una función candidata de Lyapunov $V(x)$ para la ecuación (2.71) es una función de Lyapunov si $\dot{V}(x) \leq 0$ para $\|x\|$ más pequeña (Khalil, 2002; Vannelli y Vidyasagar, 1985; Marquez, 2003; Sastry, 2013). Entonces, sí la energía total de un sistema es continuamente disipada, entonces el sistema, lineal o no lineal, debe eventualmente llegar a un punto equilibrio. Como la energía es un escalar, el análisis de la estabilidad debiera reducirse al análisis de una función escalar. La función de energía $V(x)$ de la definición 2.11.10 debe cumplir con:

- Es estrictamente positiva, excepto para $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, la función es definida Positiva.
- Monótonamente decreciente.

La función escalar $\dot{V}(x)$ se conoce como “la derivada de V a lo largo de la trayectoria del sistema”. Un caso especial es cuando $\dot{V}(x)$ es negativa. En una función $V(x)$ que es función de Lyapunov siempre se encuentra que cualquier trayectoria $x(t)$ reflejada en la función $V(x)$ representa una disminución de $V(x)$.

2.11.5. Sistemas perturbados

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x) \tag{2.81}$$

donde f es localmente Lipschitz y g es continua en parte en t y localmente Lipschitz en x $\forall t \geq 0$ y $x \in D$, el cual $D \subset R^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$. Suponga $f(0) = 0$ y $g(t, 0) = 0$, así que el origen es un punto de equilibrio del sistema. Es de observar que (2.81) es similar a la mostrada en la Definición 2.3.1, esto se debe a que los sistemas subactuados normalmente presentan una perturbación nominal.

El término de la perturbación $g(t, x)$ podría resultar de errores de modelado, desgaste, o incertidumbres y perturbaciones, las cuales existen en cualquier problema real. En una situación típica, no conocemos $g(t, x)$, pero sabemos alguna información sobre esto, como el límite superior en $\|g(t, x)\|$. Suponga que un sistema (2.71) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Un enfoque natural para abordar esta cuestión es utilizar una función de Lyapunov para el sistema nominal como función candidata de Lyapunov para el sistema perturbado. Para explicar esto, comencemos con el caso cuando el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (2.71). Sea $v(x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$\begin{aligned} c_1\|x\|^2 &\leq V(x) \leq c_2\|x\|^2 && (2.82)\\ \frac{\partial V}{\partial x} f(x) &\leq -c_3\|x\|^2 && (2.83)\\ \left\|\tfrac{\partial V}{\partial x}\right\| &\leq -c_4\|x\| && (2.84) \end{aligned}$$

para toda $x \in D$ para alguna constante positiva c_1, c_2, c_3 y c_4. Suponga que el término de la perturbación satisface el crecimiento lineal del límite.

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma\|x\|, \quad \begin{array}{l} \forall \;\; t \geq 0 \\ \forall \;\; x \in D \end{array} \tag{2.85}$$

donde γ es una constante positiva. Cualquier función $g(t, x)$ que desaparezca en el origen y sea localmente Lipschitz en x, uniformemente en t para todo $t \geq 0$, en un vecindario límite del origen satisface (2.85) sobre ese vecindario, sin embargo, el crecimiento lineal del límite (2.83) se vuelve restrictivo cuando se requiere mantener globalmente porque requeriría que g sea globalmente Lipschitz en x (Khalil, 2014). Por lo tanto, en el caso donde el sistema tiene perturbación constante y creciente en el tiempo, resulta conveniente buscar satisfacer como prioridad la condición del límite superior del límite creciente de la perturbación, puede ser lineal o no lineal.

2.11.6. Cota y cota última

Dado lo anterior, suponga el límite b uniformemente en t_0, es decir, con un límite independiente de t, que proporciona una estimación de la solución de (2.71) después de que ha pasado un período transitorio (Khalil, 2014). Suponga también, que este límite es válido para todo $t > t_0$, lo cual, se convierte en una estimación conservadora de la solución a medida que pasa el tiempo. En este caso, se dice que la solución está uniformemente limitada en última instancia y se llama un límite final. La siguiente definición formaliza las nociones de límite y límite final de las soluciones de (2.72) con $x(t_0) = x_0$ en la cual $t_0 \geq 0$, f es continua por partes en t y localmente Lipschitz en x $\forall$ $t \geq 0$ y $x \in D$, donde $D \subset R^n$ es un dominio que contiene el origen.

Definición 2.11.11 *(Acotación) La solución* (2.85) *es*

- *Uniforme acodado sí existe $c > 0$, independiente de t_0 y para cada $a \in (0, c)$ hay un $\beta > 0$ dependiente de a pero independiente de t_0, tal que*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{2.86}$$

- *Globalmente uniformemente acotado sí* (2.86) *se mantiene para una a arbitrariamente grande.*

- *Uniformemente finalmente acotado con una ultima cota b sí existe una constante positiva c, independiente de t_0 y para cada $a \in (0, c)$, hay un $T \geq 0$, dependiente en a y b pero dependiente de T_0, tal que*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall\, t \geq t_0 + T \tag{2.87}$$

- *Globalmente uniformemente finalmente acotado sí* (2.87) *se mantiene para una a arbitrariamente grande.*

En el caso de sistemas invariantes en el tiempo, podemos descartar la palabra "uniformemente" ya que la solución depende solo de $t - t_0$. El análisis de Lyapunov se puede utilizar para estudiar la delimitación y la delimitación final de las soluciones de (2.71) y (2.72). Considere una función definida positiva continuamente diferenciable $V(x)$ y suponga que el conjunto $V(x) \leq c$ es compacto, para algunas $c > 0$. Sea $\Lambda = e \leq V(x) \leq c$ para alguna constante positiva $\varepsilon < c$. Suponga que la derivada de V a lo largo de las trayectorias de los sistemas (2.71) y (2.72), satisface

$$\dot{V}(t, x) \leq -W_3(x), \qquad \begin{matrix} \forall & x \in \Lambda \\ \forall & t \geq 0 \end{matrix} \tag{2.88}$$

donde W_3 es una función continua definida positiva. La desigualdad (2.87) implica que el conjunto $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ y $\Omega_\varepsilon = \{V(x) \leq \varepsilon\}$ son positivamente invariantes ya que en los límites $\partial\Omega_c$ y $\partial\Omega_\varepsilon$, la derivada $\dot{V}$ es negativa. Un bosquejo de los conjuntos Λ, Ω_c y Ω_ε son mostrados en la Figura 2.17a. Ya que $\dot{V}$ es negativa en Λ, V satisface las desigualdades

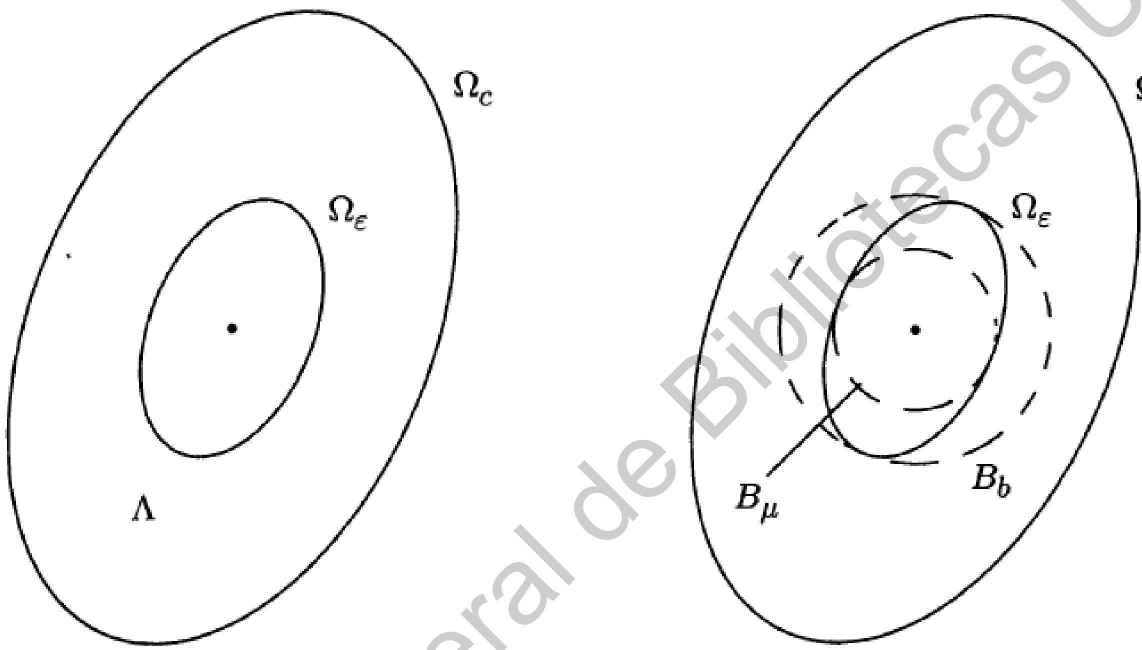
$$\begin{gathered} W_1 \leq V(t, x) \leq W_2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3 \end{gathered}$$

Por lo tanto, la trayectoria se comporta como sí el origen fuera uniformemente, asintóticamente estable y satisface

$$\|x\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$$

para algunas funciones β clase $\mathcal{KL}$. La función $V(x(t))$ continuará decreciendo hasta que la trayectoria entre al conjunto Ω_ε en un tiempo infinito y se mantenga ahí para todo el tiempo futuro (Khalil, 2014, 2002). En varios casos, la desigualdad $\dot{V} \leq -W_3$ es obtenida usando la desigualdad de la norma. En tal caso, es más probable llegar a

$$\dot{V}(t,x) \leq -W_3(x), \qquad \begin{array}{l} \forall \quad x \in D \text{ con } \|x\| \geq \mu, \quad \forall\, t \geq 0 \\ \forall \quad t \geq 0 \end{array} \tag{2.89}$$



(a) Representación de los conjuntos Λ, Ω_c y Ω_ε.

(b) Representación de los conjuntos Ω_ε, Ω_c (sólido) y B_ν, B_r ().

Figura 2.17: Representación de los conjuntos Λ, Ω_c, $Omega_\varepsilon$, B_ν y B_r (Khalil, 2014).

Sí μ es suficientemente pequeña, podemos elegir c y ε, tal que, el conjunto Λ no es vacío y contenido en $D \cap \{\|x\| \geq \mu\}$. En particular, sea α_1 y α_2 funciones clase $\mathcal{K}$, siempre es posible encontrar tales funciones clase $\mathcal{K}$, de acuerdo al Lema 2.11.2. De la parte izquierda de la desigualdad de (2.80), tenemos

$$V(x) \leq c \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq c$$

Por lo tanto, podemos elegir $c > 0$, tal que, $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$ es compacto y contenido en D. En particular, sí $B_r \subset D$, c puede ser elegida como $\alpha_1(r)$. Del lado derecho de la desigualdad (2.80) tenemos

$$\|x\| \leq \mu \Rightarrow V(x) \leq \alpha_2(\mu)$$

Tomando $\varepsilon = \alpha_2(\mu)$, aseguramos que $B_\mu \subset \Omega_\varepsilon$, para obtener $\varepsilon < c$, debemos tener $\nu < \alpha_2^{-1}(c)$. Los argumentos anteriores muestran que todas las trayectorias iniciadas en Ω_c entran en Ω_ε dentro de un tiempo finito T, sí la trayectoria empieza en $\Omega_\varepsilon, T = 0$. Para calcular la última cota en $x(t)$, usamos la desigualdad saliente de (2.80) al escribir

$$V(x) \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha_1(\|x\|) \leq \varepsilon = \alpha_2(\nu) \Rightarrow \|x\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\nu))$$

Por lo tanto, la última cota puede ser tomada como $b = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\nu))$. Un bosquejo de los conjuntos Ω_c, Ω_ε, B_μ y B_b es mostrado en la Figura 2.17b. Sí $D = R^n$ y $V(x)$ es radialmente desacotada, α_1 y α_2 pueden ser elegidas como funciones clase $\mathcal{K}_\infty$, y por consiguiente $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$. Para elegir una c lo suficientemente grande podemos satisfacer la desigualdad $\mu < \alpha_2^{-1}(c)$ para cualquier $\mu > 0$ e incluir cualquier condición inicial en el conjunto $\{V(x) \leq c\}$. Esto se puede resumir en el Teorema 2.11.4.

Teorema 2.11.4 *(Cota última) Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y sea $V : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:*

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|), && (2.90)\\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) &\leq -W_3(x), \quad \forall\ \|x\| \geq \mu > 0, && (2.91) \end{aligned}$$

$\forall\ t \geq 0$ y $\forall\ x \in D$, donde α_1 y α_2 son funciones clase $\mathcal{K}$ y $W_3(x)$ es una función continua y definida positiva. Considere una $r > 0$, tal que $B_r \subset D$ y suponga que:

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (2.92)$$

Entonces, existe una función β que es clase $\mathcal{KL}$ y para cada estado inicial $x(t_0)$, que satisfaga $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$, hay un $T \geq 0$, que depende de $x(t_0)$ y μ, tal que la solución de $\dot{x} = f(t,x)$ satisface:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall\ t_0 \leq t < t_0 + T, && (2.93)\\ \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall\ t \geq t_0 + T. && (2.94) \end{aligned}$$

Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y α_1 es una función clase $\mathcal{K}_\infty$, entonces (2.93) *y* (2.94) *se cumplen para cualquier estado inicial $x(t_0)$, sin ninguna restricción en que tan grande sea μ.*

Las desigualdades (2.93) y (2.94) muestran que $x(t)$ es uniformemente acotada para todo $t \leq t_0$ y uniformemente acotado para la última cota con el límite final $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$. La última cota es una función clase $\mathcal{K}$ de μ; por lo tanto, el valor más pequeño de μ es la cota última más pequeña. Como $\mu \to 0$, la última cota se acerca a 0. La aplicación principal del teorema 2.11.4 surge en el estudio de estabilidad de sistemas perturbados. Por lo tanto, de manera más explícita, la cota máxima sería

$$\|x\| \leq \max\{\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0, \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)))\}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

Finalmente, podemos decir que, en la teoría de control, cuando se nos requiere analizar la estabilidad de un sistema en particular, encontrar una función de Lyapunov con una derivada definida negativa es en general muy difícil. Sin embargo, si a pesar de los esfuerzos minuciosos de no poder encontrar una función de Lyapunov, no debemos concluir que el origen del sistema bajo análisis es inestable; más bien, no se puede sacar ninguna conclusión. Afortunadamente, para los sistemas autónomos, existen métodos basados en condiciones más restrictivas, pero considerablemente más fáciles de verificar.

Capítulo 3

Modelado dinámico del robot

En este capítulo se muestra, el modelado matemático del sistema representado por la Figura 3.1, en una primera sección se establecen los marcos de referencia y variables de estado a considerar, se debe mencionar que la parte del modelado se está basando en el propuesto por (Pathak et al., 2005). En una segunda sección se describen las restricciones no holonómicas a utilizar y lo que implican dichas restricciones en el modelo dinámico. Finalmente, en la tercera sección se describe el procedimiento empleado para aplicar las restricciones no holonómicas, en donde se muestran los resultados de las matrices de inercia, Coriolis, gravedad y pares aplicados al sistema.

3.1. Modelado matemático del sistema

Con referencia a la Figura 3.1, b es la distancia de O a O_w, donde O es el punto intermedio entre los dos centros de las ruedas. R es el radio de ambas ruedas. Los parámetros del cuerpo del péndulo tienen el subíndice p, y los parámetros de la rueda tienen el subíndice w. $E(x, y, z)$ es un marco inercial. $P(x_p, y_p = y, z_p)$ es un marco unido al cuerpo del péndulo. $V(x_v, y_v = y, z_v = z)$ son las coordenadas fijas del vehículo.

El ángulo de inclinación α es el ángulo entre (z, z_p), y el ángulo de orientación del vehículo θ es el ángulo entre (x, x_v). I_{wa}, I_{wd} son el momento de inercia de una rueda sobre su eje y sobre un diámetro respectivamente y M_w es su masa. ϕ_r y ϕ_l son los ángulos de rotación de las ruedas derecha e izquierda, respectivamente. Se consideran las variables de estado representadas en el vector q tal como en (2.1), para este caso, tenemos (3.1) como lo muestra (Pathak et al., 2005). El vector q es dado por los 6 grados de libertad y variables de estado del sistema, tomando en cuenta la Figura 3.1:

$$q = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \theta & \alpha & \phi_r & \phi_l \end{bmatrix}^T \tag{3.1}$$

Para obtener la energía cinética y potencial del sistema se debe de considerar la energía rotacional y traslacional del sistema. Dado lo anterior, se considera la energía cinética rotacional T_p^R y traslacional T_p^T del péndulo, y la energía cinética rotacional T_w^R y traslacional T_w^T de las dos ruedas que forman la base del móvil (Pathak et al., 2005) donde la energía cinética está

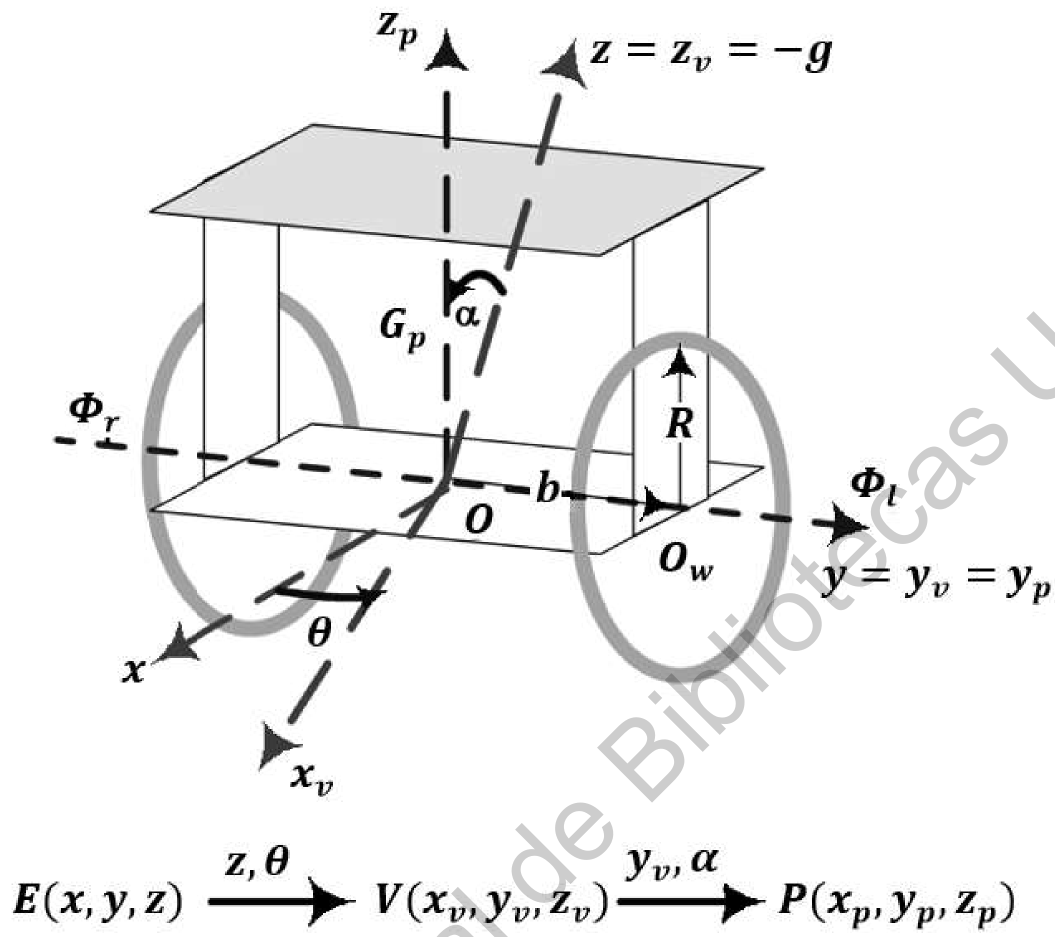


Figura 3.1: Parámetros geométricos y coordenadas del sistemas para el sistema (Pathak et al., 2005).

definida por:

$$T(q,\dot{q}) = \dot{q}^T M(q)\,\dot{q} = T_p^R + T_p^T + T_w^R + T_w^T \tag{3.2}$$

donde $T(q,\dot{q})$ es la energía cinética de (2.3), del Lagrangiano. Entonces, comenzaremos encontrando T_p^T y a partir de la Figura 3.1, donde sabemos que:

$$T_p^T = \frac{1}{2} M_b \left[V_{G_p} \cdot V_{G_p} \right] \tag{3.3}$$

donde

$$V_{G_p} = \dot{x}_{G_p} \tag{3.4}$$

Sea x_{G_p} el vector de coordenadas del centro de masa

$$r_{ci} = x_{G_p} = \begin{bmatrix} \sin\alpha\ \cos\theta \\ \sin\alpha\ \sin\theta \\ \cos\alpha \end{bmatrix} C_z + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ R \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

por lo que:

$$V_{G_p} = \dot{x}_{G_p} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta + \dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta \\ \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta + \dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta \\ -\dot{\alpha}\sin\alpha \end{bmatrix} C_z + \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Por lo tanto, $T_p^T = \frac{1}{2}M_p\left[V_{G_p}\cdot V_{G_p}\right]$, en el apéndice A.1 se muestran los calculo de $\left[V_{G_p}\cdot V_{G_p}\right]$:

$$\begin{aligned} T_p^T = \frac{1}{2}M_p\Bigg[& C_z^2\Big(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\alpha\Big) + 2C_z\Big(\dot{x}_0\left(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta\right) \\ & + \dot{y}_0\left(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\Bigg] \end{aligned} \tag{3.7}$$

De forma matricial, lo podemos escribir (3.7), como en (3.8), tomando en cuenta el orden del vector q de (3.1).

$$T_p^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & M_pC_z^2\sin^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_pC_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -M_pC_z\sin\alpha\sin\theta \\ \Delta_2 &= M_pC_z\cos\alpha\cos\theta \\ \Delta_3 &= M_pC_z\sin\alpha\cos\theta \\ \Delta_4 &= M_pC_z\cos\alpha\sin\theta \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por lo que, podemos decir que $T_p^T = \frac{1}{2}\dot{q}^TM_1\dot{q}$. Se observa que (3.8) tiene la forma de (2.5), por consiguiente, todas las demás energías cinéticas se deberán de expresar de la misma manera. Entonces la energía cinética rotacional del péndulo T_p^R, se calcula a partir de

$$T_p^R = \frac{1}{2}\Omega_{\mathbf{P}/\varepsilon}^T I_{p/\mathbf{P}}\Omega_{\mathbf{P}/\varepsilon} \tag{3.10}$$

donde

$$I_{p/\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad I_{xy} = 0, \quad I_{yz} = 0$$

$I_{p/\mathbf{P}}$ es la matriz de inercia del cuerpo del péndulo sobre su centro de masa G_p en la base $\mathbf{P}(x_p, y_p, z_p)$. $I_{xz} = 0$. Si tomamos c_x = 0 y suponemos que el cuerpo es simétrico con respecto al eje x_p (Pathak et al., 2005). El centro de masa del cuerpo del péndulo G_p está en las coordenadas $OG_p = (c_x, 0, c_z)$ en $\mathbf{P}(x_p, y_p, z_p)$. c_x se tomaría como 0 para simplificar las ecuaciones. M_p es la masa del cuerpo del péndulo. Por lo que:

$$I_{p/\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dado a que el marco de referencia en que se desea utilizar, es el marco $\mathbf{E}(x, y, z)$ que es el marco inercial, para mover el sistema coordenado $\mathbf{P}(x_p, y_p, z_p)$ que es el marco de referencia del péndulo (Pathak et al., 2005). Entonces, se deben utilizar matrices de rotación para llevar las coordenadas (x_p, y_p, z_p) al marco de referencia inercial. Para esto debemos de girar nuestras coordenadas en un ángulo θ con respecto a y_p y un ángulo α con respecto a z_p. Utilizando las matrices de rotación básicas de (2.33) y (2.37), que son las rotaciones $R_{y,\theta}$ y $R_{z,\alpha}$. Podemos decir que:

$$\Omega_{\mathbf{P}/\varepsilon} = R^T J_w(q)\,\dot{q} = \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon} J_w(q)\,\dot{q} \tag{3.11}$$

donde $J_w(q)$ son las interacciones entre los cuerpos rígidos. Dado lo anterior, debemos encontrar la matriz de rotación $\Psi_{\mathbf{P}/\varepsilon}$ que nos permita establecer las coordenadas en el marco inercial E, por ello:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{P}/\varepsilon} &= \left[\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta & -\sin\alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} \\
\Psi^{-1}_{\mathbf{P}/\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta & -\sin\alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha \end{bmatrix} = \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Hay que recordar que una de las propiedades de las matrices de rotación, $\Psi^{-1}_{\mathbf{P}/\varepsilon} = \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon}$. Debido a que son matrices de rotación y de acuerdo a la ecuación (2.65), se necesita buscar la velocidad lineal del efector final, por ello se calcula $\dot{\Psi}_{\mathbf{P}/\varepsilon}$ que se muestra a continuación

$$\dot{\Psi}_{\mathbf{P}/\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & \dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta \\ -\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta & \dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta \\ -\dot{\alpha}\cos\alpha & 0 & \dot{\alpha}\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Para calcular la matriz antisimétrica, es necesario obtener el tensor de inercia, que resulta a partir de $S(\omega_o) = \dot{\Psi}_{\mathbf{P}/\varepsilon}\ \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon}$, el cual se encuentra desarrollada en el Apéndice A.2, donde finalmente resulta (3.14), la cual cumple las propiedades de la definición 2.3.1.

$$S(\omega_o) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\alpha}\cos\theta \\ \dot{\theta} & 0 & \dot{\alpha}\sin\theta \\ -\dot{\alpha}\cos\theta & -\dot{\alpha}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Sabiendo que la ecuación (2.68) se puede expresar como (2.65), en base a (2.49), entonces el vector ω_o está determinado por $(a_x, a_y, a_z)^T$, por lo tanto:

$$\omega_o = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\theta \\ \dot{\alpha}\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Dicho los anterior y tomando en cuenta (2.65), donde $J_\omega(q)$ es el Jacobiano, podemos decir que:

$$
\begin{aligned}
\omega_o &= J_\omega(q)\,\dot{q} \\
\begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\sin\theta \\ \dot{\alpha}\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, es posible emplear (3.11), tal que

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathbf{P}/\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta & \cos\alpha\sin\theta & -\sin\alpha \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dado lo anterior, resulta posible emplear (3.10) para calcular la energía rotacional de péndulo

$$
\begin{aligned}
T_p^R &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}\sin^2\alpha + I_{zz}\cos^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

claramente podemos ver que (3.15), se puede representar de la forma $T_p^R = \dot{q}^T M_2\,\dot{q}$, que es la energía rotacional de péndulo. Por otro lado, la energía rotacional T_w^R y la energía traslacional

T_w^T de las llantas. Por su parte la energía rotacional de las llantas T_w^R está determinada por Pathak et al. (2005):

$$T_w^R = \frac{1}{2}\left[I_{wa}\dot{\phi}_r^2 + I_{wa}\dot{\phi}_l^2 + 2I_{wd}\dot{\theta}^2\right]$$

el cual, $I_{wa}\dot{\phi}_l^2$ y $I_{wa}\dot{\phi}_r^2$, son el momento de inercia de la llanta izquierda y derecha, respectivamente, por otro lado, tenemos $2I_{wd}\dot{\theta}^2$ que es el momento de inercia sobre el diámetro de la rueda y debido a que son dos ruedas tenemos el doble de la magnitud del momento inercial, que afecta a la posición sobre el plano de la parte móvil del sistema. Acomodando de forma matricial

$$T_w^R = \begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\phi}_r\\ \dot{\phi}_l\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&2I_{wd}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&I_{wa}&0\\0&0&0&0&0&I_{wa}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\phi}_r\\ \dot{\phi}_l\end{bmatrix} \tag{3.16}$$

por lo que $T_w^R = \dot{q}^T M_3\, \dot{q}$.

Finalmente, la energía traslacional de las ruedas T_w^T está dada por

$$T_w^T = \frac{1}{2}M_w R^2\left[\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2\right]$$

en el cual $M_w R^2\dot{\phi}_r^2$ y $M_w R^2\dot{\phi}_l^2$ son las inercias de la llanta derecha e izquierda, respectivamente. Acomodando de forma matricial obtenemos

$$T_w^T = \begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\phi}_r\\ \dot{\phi}_l\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&M_wR^2&0\\0&0&0&0&0&M_wR^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\\ \dot{\theta}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\phi}_r\\ \dot{\phi}_l\end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Tomando en cuenta (2.69) y (3.2), podemos deducir que la matriz de inercia del sistema es la sumatoria de (3.8), (3.15), (3.16) y (3.17) (Pathak et al., 2005); este cálculo se desarrolla en el Apéndice A.3, tal que:

$$M(q) = \begin{bmatrix}M_p&0&\Delta_1&\Delta_2&0&0\\0&M_p&\Delta_3&\Delta_4&0&0\\\Delta_1&\Delta_3&\Delta_5&0&0&0\\\Delta_2&\Delta_4&0&M_pC_z^2+I_{yy}&0&0\\0&0&0&0&M_wR^2+I_{wa}&0\\0&0&0&0&0&M_wR^2+I_{wa}\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

donde

$$\Delta_5 = (M_pC_z^2 + I_{xx})\sin^2\alpha + I_{zz}\cos^2\alpha + 2I_{wd} \tag{3.19}$$

por lo tanto, la energía cinética $T(q,\dot{q})$ de (3.2) es $M(q)$ de (3.18):

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\, \dot{q}$$

Por su parte la energía potencial del sistema está definida por (2.70), en el Lagrangiano de (2.3) como $U(q)$, donde sabemos que $m_i = M_p$, el vector de coordenadas del centro de masa está definido en (3.5) y el vector g_m^T está dado por

$$g_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

entonces (2.4)

$$U(q) = -M_p\, g_m^T\, r_{ci}$$

Debido a que se pretende considerar el caso que el sistema se enfrente a una situación adversa de terreno, es decir, se considera que el vehículo se enfrente ante una pendiente ascendente, por lo que el vector de coordenadas del centro de masa r_{ci} en (3.5), queda de la siguiente manera

$$r_{ci} = \begin{bmatrix} \sin\alpha\ \cos\theta \\ \sin\alpha\ \sin\theta \\ \cos\alpha \end{bmatrix}\ C_z + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ R + x_0\tan\beta \end{bmatrix}$$

donde β es el ángulo de inclinación conforme al plano (x, y), por tanto, $x_0 \tan\beta$ es la distancia de desplazamiento generado por el ángulo β, conforme al eje x, ver Figura 3.2.
Esto es únicamente considerado en la energía potencial debido que la pendiente genera una energía sobre el sistema, siendo esta la razón por la que solamente es considerado esto en el vector de coordenadas. Finalmente, la energía potencial queda definida como:

$$\begin{aligned} U(q) &= -M_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \sin\alpha\ \cos\theta \\ \sin\alpha\ \sin\theta \\ \cos\alpha \end{bmatrix}\ C_z + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ R + x_0\tan\beta \end{bmatrix} \right] \\ &= M_p\, g\, [C_z\cos\alpha + R + x_0\tan\beta] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por lo tanto $L = T(q,\dot{q}) - U(q)$, no es necesario escribir el Lagrangiano. Debido a que se utilizarán en la demostración de (2.12) para obtener el modelo matemático. Para calcular la ecuación $M(q)\ \ddot{q} + C(q,\dot{q})\ \dot{q} + g(q) = \tau$, debemos de calcular los diferentes términos de la ecuación. El término $M(q)\ \ddot{q}$ contiene la matriz de inercia $M(q)$ que únicamente depende de la energía cinética. Por otro lado, en (2.12), es claro que $C(q,\dot{q})\ \dot{q}$ contiene la matriz de Coriolis $C(q,\dot{q})$, que depende de la matriz de Inercia $M(q)$. Y finalmente, el termino $g(q)$ es la matriz de efectos gravitatorios que únicamente depende de la energía potencial del sistema. Primeramente, calcularemos la matriz $M(q)$, en (2.12) podemos ver que el término $M(q)\ \ddot{q}$ es simplemente

$$M(q)\ \ddot{q} = \frac{d}{dt}M(q)\ \dot{q} \tag{3.21}$$

tal que $M(q)$ es una matriz constante. La ecuación (3.21) es debido a que (2.12) se demuestra que $M(q)\ \ddot{q}$, es la misma matriz $M(q)$ que en $M(q)\ \dot{q}$, donde únicamente el vector de estado

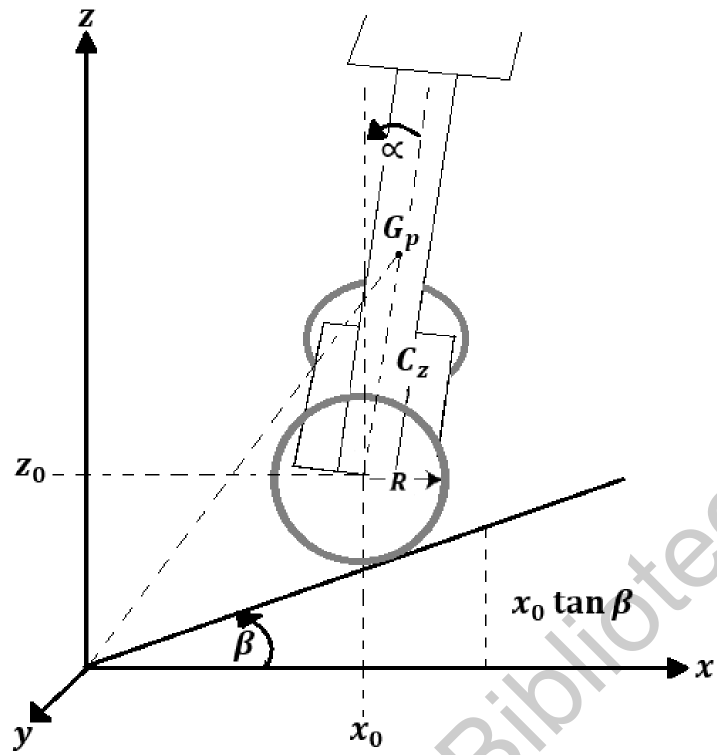


Figura 3.2: Pendiente ascendente considerada en un desplazamiento.

$\dot{q}$ incrementa de orden. De igual forma, en (2.12), se demuestra la obtención de la matriz de Coriolis $C(q, \dot{q}$ a partir de $M(q)$. Y también se muestra como calcular $g(q)$ a partir de (3.20). Dado lo anterior, podemos decir que $M(q)\ \ddot{q}$, es

$$M(q)\ \ddot{q} = \begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_p C_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x_0} \\ \ddot{y_0} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\phi_r} \\ \ddot{\phi_l} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

donde Δ_i son las mismas de (3.9) y (3.19). Debido a que ya conocemos $M(q)$, podemos calcular $C(q, \dot{q})$, esta se calcula a partir de (2.13) para obtener la matriz de Coriolis en (3.23), se recomienda ver Apéndice A.4 para consultar los cálculos hechos para obtener $C(q, \dot{q})$, tal que:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Por su parte, el termino $g(q)$, se determina como $\frac{\partial U(q)}{\partial q} = g(q)$, esto de acuerdo a (2.12), por lo tanto

$$g(q) = \begin{bmatrix} M_p \; g \; \tan\beta \\ 0 \\ 0 \\ -M_p C_z \; g \; \sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el vector $\tau = B(q)\ \tau$, donde $B(q)$ y τ son matrices constantes que están definidas en (Pathak et al., 2005), como:

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

en la cuarta fila de la matriz $B(q)$. Esto surge porque los motores están montados en el cuerpo del péndulo, y τ es el vector de entradas de par del motor, tal que, τ también representa fuerzas de restricciones. Usando la matriz de inercia $M(q)$, la matriz de Coriolis $C(q, \dot{q})$, y el vector de gravedad $g(q)$, el cual resulta el modelo dinámico del sistema que se representa en (3.24)

$$M(q)\ \ddot{q} + C(q, \dot{q})\ \dot{q} + g(q) = \tau \tag{3.24}$$

3.2. Restricciones no holonómicas

Como sabemos, si no existe una función $h(q)$ que pueda ser obtenida mediante integración de la restricción, entonces es posible reducirlos mediante ecuaciones de restricción, entonces se denominan que dichas restricciones son no holonómicas. Para ello debemos de tomar en cuenta la ecuación (3.24), la cual se puede deducir a partir de (2.12) y (2.20), que es un sistema Euler-Lagrange sometido a restricción. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento que se derivaron anteriormente, (2.25), como:

$$M(q)\ \ddot{q} + C(q, \dot{q})\ \dot{q} + g(q) = B(q)\ \tau + A^T(q)\ \dot{q}$$

donde la matriz $A(q)$ es la matriz de restricciones no holonómicas, se considerarán que están sometidos a m restricciones no holonómicas. Las restricciones no holonómicas del sistema son tres, las restricciones en su totalidad son de características geométricas:

1. La velocidad del punto O, sobre la dirección del eje longitudinal de simetría está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x_0} &= \nu \cos\theta \\ \dot{y_0} &= \nu \sin\theta \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\nu = \frac{\dot{x}_0}{\cos\theta}$$

sustituyendo ν en $\dot{y}_0 = \nu \sin\theta$

$$\dot{y}_0 = \frac{\dot{x}_0}{\cos\theta}\sin\theta$$

con lo que se obtiene la primera restricción

$$\dot{x}_0 \sin\theta - \dot{y}_0 \cos\theta = 0 \tag{3.25}$$

2. La segunda restricción es cuando la rueda izquierda no debe de patinar o resbalar, es decir, sea $\sqrt{\dot{\bar{x}}_0 + \dot{\bar{y}}_0} = R\dot{\phi}_l$ la velocidad del centro de la rueda izquierda. Considerando la plataforma móvil como rígida y que la velocidad del centro de la rueda medida desde O es $b\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 &= \dot{x}_0 - b\dot{\theta}\cos\theta = R\dot{\phi}_l \cos\theta \\ \dot{\bar{y}}_0 &= \dot{y}_0 - b\dot{\theta}\sin\theta = R\dot{\phi}_l \sin\theta \end{aligned}$$

calculando $\dot{\bar{x}}_0 \cos\theta$ y $\dot{\bar{y}}_0 \sin\theta$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 \cos\theta &= \dot{x}_0 \cos\theta - b\dot{\theta}\cos^2\theta = R\dot{\phi}_l \cos^2\theta \\ \dot{\bar{y}}_0 \sin\theta &= \dot{y}_0 \sin\theta - b\dot{\theta}\sin^2\theta = R\dot{\phi}_l \sin^2\theta \end{aligned}$$

sumando las expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta - b\dot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) &= R\dot{\phi}_l(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta - b\dot{\theta} &= R\dot{\phi}_l \\ \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta - b\dot{\theta} - R\dot{\phi}_l &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

3. De igual forma, la rueda derecha no debe de patinar o resbalar, por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 &= \dot{x}_0 + b\dot{\theta}\cos\theta = R\dot{\phi}_r \cos\theta \\ \dot{\bar{y}}_0 &= \dot{y}_0 + b\dot{\theta}\sin\theta = R\dot{\phi}_r \sin\theta \end{aligned}$$

calculando $\dot{\bar{x}}_0 \cos\theta$ y $\dot{\bar{y}}_0 \sin\theta$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_0 \cos\theta &= \dot{x}_0 \cos\theta + b\dot{\theta}\cos^2\theta = R\dot{\phi}_r \cos^2\theta \\ \dot{\bar{y}}_0 \sin\theta &= \dot{y}_0 \sin\theta + b\dot{\theta}\sin^2\theta = R\dot{\phi}_r \sin^2\theta \end{aligned}$$

sumando las expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta + b\dot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) &= R\dot{\phi}_r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta + b\dot{\theta} &= R\dot{\phi}_r \\ \dot{x}_0\cos\theta + \dot{y}_0\sin\theta + b\dot{\theta} - R\dot{\phi}_r &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Las restricciones no holonómicas son tres, las cuales están en (3.25), (3.26) y (3.27), por lo tanto, $m = 3$, que se resumen en la siguiente matriz

$$A(q)\,\dot{q} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & b & 0 & -R & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -b & 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_0} \\ \dot{y_0} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Esta última ecuación, (3.28), es la matriz de restricción que se aplicará al modelo dinámico de (3.24), con la finalidad de restringir las limitantes y considerar ciertas restricciones geométricas pertinentes al comportamiento real del sistema. Y con ellos se continúa manteniendo el modelado completo del sistema, lo cual es apreciable en la siguiente sección.

3.3. Modelo dinámico con restricciones no holonómicas

La ecuación (3.28) es la matriz de restricciones no holonómicas, que forma parte de (2.25). Las cuales deben de satisfacer (2.23) donde se hace nula la matriz de restricción, esto debido a que no forman parte de la dinámica del sistema. Lo siguiente es aplicar las restricciones no holonómicas al sistema Euler-Lagrange, de la condición (2.22). Donde $S(q)$ es una matriz de $n - m = 3$, debido a que $n = 6$ y $m = 3$, con columnas linealmente independientes. Se sabe que la matriz $S(q)$ debe de cumplir (2.21). Existen diversas matrices que pueden satisfacer el espacio nulo de $\dot{q}$, para esto utilizaremos la propuesta de (Pathak et al., 2005), dada la sencillez de la misma, y de la misma forma se utiliza el vector v propuesto, siendo los mostrados en (3.29).

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{b}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \nu \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Aplicando la ecuación (2.27) y (2.28) al sistema Euler-Lagrange. Siendo (3.30) el modelo dinámico del sistema, estas operaciones se encuentran en el Apéndice A.5 que se analiza en el siguiente capítulo.

$$\bar{M}(q)\,\dot{v}(t) + \bar{C}(q,\dot{q})\,v(t) + \bar{g}(q) = \bar{B}(q)\,\tau \tag{3.30}$$

3.4. Comprobación del modelado matemático

Existen diferentes formas de verificar un modelo matemático, con la finalidad de asegurar y garantizar la validez del modelado. Para validar el modelo matemático del sistema (3.30), es necesario probar las propiedades que debe de cumplir la matriz $\bar{M}(q)$ que es una matriz definida positiva y simétrica. Por otro lado, se debe de probar las propiedades de la sección 2.7.1, la cual menciona que $\dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q})$, (2.29) debe de ser una matriz antisimétrica. Primero evaluaremos la propiedad de que $\bar{M}(q)$, (3.30), que debe de ser una matriz definida positiva y simétrica

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} MpC_z^2 + I_{yy} & M_pC_z\cos\alpha & 0 \\ M_pC_z\cos\alpha & M_p + 2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) + \Delta_5 \end{bmatrix}$$

Se puede observar claramente que $\bar{M}(q)$ es simétrica debido a que $\bar{M}(q) = \bar{M}^T(q)$. De igual forma, es claro que $\bar{M}(q)$ tiene inversa, ya que es no singular, es decir, $det(\bar{M}(q)) \neq 0$. También es fácil observar que los determinantes de matriz son positivos $det_n(\bar{M}(q)) > 0$.

$$\begin{aligned} det(\bar{M}(q)) = &\left(MpC_z^2 + I_{yy}\right)\left(M_p + 2\left(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}\right)\right)\left(2b^2\left(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}\right) + \Delta_5\right) \\ &- (M_pC_z\cos\alpha)^2\left(\left(2b^2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}\right) + \Delta_5\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Resolviendo la siguiente propiedad, con $\bar{C}(q,\dot{q})$ y $\dot{\bar{M}}(q)$ de $\bar{M}(q)$ en (3.30). Los términos son de signo positivo y las constantes $Mp, C_z, b, R, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{wd}, M_w, I_{wa} \in \mathbb{R}^+$. Entonces, $det(\bar{M}(q))$ contiene el termino $\Delta_5 = (M_pC_z^2 + I_{xx})\sin^2\alpha + I_{zz}\cos^2\alpha + 2I_{wd}$, tal que, sucede lo mismo que el caso anterior. Debido que la magnitud máxima de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$ es 1, permite que el determinante $det(\bar{M}(q)) > 0$ es positivo. Dado que, cada submatriz precedente de una matriz definida positiva, también definida positiva. Lo cual indica que la matriz $\bar{M}(q)$ es definida positiva y esto a su vez, permite definir que todos eigenvalores $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solamente hace falta probar que $\dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q})$ es una matriz antisimétrica, para ello debemos encontrar $\dot{\bar{M}}(q)$

$$\dot{\bar{M}}(q) = \begin{bmatrix} 0 & -M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 \\ -M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Resolviendo la siguiente propiedad, con $\bar{C}(q,\dot{q})$ y $\dot{\bar{M}}(q)$ de $\bar{M}(q)$ en (3.30)

$$\begin{aligned} A(q,\dot{q}) =& \dot{\bar{M}}(q) - 2\bar{C}(q,\dot{q}) \\ =& \begin{bmatrix} 0 & -M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & \gamma \\ M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 & 2M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha \\ -\gamma & -2M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde $\gamma = 2(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha$. Este método es utilizado debido que realizar una prueba experimental o validar por medio del análisis de parámetros resulta complicado, dadas las características y la familia de sistema subactuados a la que pertenece. Por su propia naturaleza, esto no garantiza la exactitud del modelo, por lo que se utiliza lo propuesto en (Pathak et al., 2005).

Capítulo 4

Diseño del Controlador

Este capítulo es destinado al diseño del controlador y método directo de Lyapunov. En este se muestran las funciones candidatas de Lyapunov, junto a las condiciones que debe cumplir para ser catalogada con ese nombre. De igual manera, se demuestra cómo es que esta función puede ser nombrada Función de Lyapunov. Se incluye una sección con el análisis de estabilidad, donde con ayuda de ciertos teoremas se demuestran la estabilidad local del sistema. También se describen algunas conclusiones sobre el sistema y su comportamiento, junto a las condiciones que se deben de satisfacer para que pueda converger este criterio de estabilidad.

4.1. Sistema en lazo cerrado

Como sabemos, el modelo dinámico está dado por (3.30)

$$\bar{M}(q)\ \dot{v}(t) + \bar{C}(q,\dot{q})\ v(t) + \bar{g}(q) = \bar{B}(q)\ \tau$$

donde $\bar{M}(q)$, $\bar{C}(q,\dot{q})$, $\bar{g}(q)$, $\bar{B}(q)$ y $v(t)$, están definidas por (3.30) y (3.29), respectivamente. Tomando en cuenta el Teorema 2.11.2 y la Definición 2.11.4, podemos dividir el modelo en dos subsistemas, esto con la finalidad de facilitar el análisis de estabilidad y de hacer menos compleja la obtención de una función candidata de Lyapunov. Por ello, la matriz $\bar{M}(q)$, la acomodamos de la siguiente forma:

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_pC_z^2 + I_{yy} & M_pC_z\cos\alpha & 0 \\ M_pC_z\cos\alpha & M_p + 2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) + \Delta_5 \end{bmatrix}$$

entonces $\bar{M}_A$ la definimos como:

$$\bar{M}_A = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_pC_z^2 + I_{yy} & M_pC_z\cos\alpha \\ M_pC_z\cos\alpha & M_p + 2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) \end{bmatrix}$$

que sería un subsistema formado por las variables $\dot{\alpha}$ y ν, por lo que el subsistema generado tiene la siguiente forma

$$\bar{M}_A(q)\ \dot{v}(t) + \bar{C}_A(q,\dot{q})\ v(t) + \bar{g}_A(q) = \bar{B}_A(q)\ \tau \tag{4.1}$$

tal que

$$\bar{C}_A(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha \\ -M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 & -M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}_A(q) = \begin{bmatrix} -M_pC_z\ g\ \sin\alpha \\ M_p\ g\ \tan\beta\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_A(q) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

por lo que (4.1) se escribe como

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \nu \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{R} \end{bmatrix}(\tau_r + \tau_l)$$

despejando $\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = \bar{M}_A^{-1}(q)\left[-\begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \nu \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{R} \end{bmatrix}(\tau_r + \tau_l)\right] \tag{4.2}$$

donde

$$\bar{M}_A^{-1}(q) = \mu\begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{M_{11}M_{22} - (M_{21})^2}$$

Por lo tanto, simplificando, multiplicando y acomodando (4.2), resulta

$$\begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} h_1(\dot{\alpha}^2, \dot{\theta}^2, \sin\alpha) \\ h_2(\dot{\alpha}^2, \dot{\theta}^2, \sin\alpha) \end{bmatrix} - \mu\begin{bmatrix} M_{22} \\ -M_{21} \end{bmatrix} g_1 - \mu\begin{bmatrix} -M_{12} \\ M_{11} \end{bmatrix} g_2 + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}(\tau_r + \tau_l) \tag{4.3}$$

donde

$$\begin{aligned} G_1 &= \mu(-M_{22} - \tfrac{1}{R}M_{12}) \\ G_2 &= \mu(M_{21} + \tfrac{1}{R}M_{11}) \\ h_1 &= \mu(\dot{\theta}M_{22}C_{13} - M_{12}(\dot{\alpha}C_{21} + \dot{\theta}C_{23})) \\ h_2 &= \mu(-\dot{\theta}M_{21}C_{13} + M_{11}(\dot{\alpha}C_{21} + \dot{\theta}C_{23})) \end{aligned}$$

Multiplicando el primero renglón por una constante $\lambda > 0$:

$$\begin{bmatrix} \lambda\ddot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \lambda h_1(\dot{\alpha}^2, \dot{\theta}^2, \sin\alpha) \\ h_2(\dot{\alpha}^2, \dot{\theta}^2, \sin\alpha) \end{bmatrix} - \mu\begin{bmatrix} \lambda M_{22} \\ -M_{21} \end{bmatrix} g_1 - \mu\begin{bmatrix} -\lambda M_{12} \\ M_{11} \end{bmatrix} g_2 + \begin{bmatrix} \lambda G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}(\tau_r + \tau_l) \tag{4.4}$$

Entonces, (4.4) puede ser expresada como

$$\lambda\ddot{\alpha} + \dot{\nu} = -\lambda h_1 - h_2 - \mu(\lambda M_{22} - M_{21})g_1 - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2 + (\lambda G_1 + G_2)(\tau_r + \tau_l)$$

Sea $f_0 \sin\alpha = \mu(\lambda M_{22} - M_{21})g_1$, por tanto

$$\lambda\ddot{\alpha} + \dot{\nu} = -\lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2 + (G_1 + G_2)(\tau_r + \tau_l)$$

Sea $\tilde{\nu} = \nu - \nu_d$ donde ν_d es constante, entonces $\vartheta = \int \tilde{\nu}\, dt$, tal que, $\tilde{\nu} = \dot{\vartheta}$ y $\dot{\tilde{\nu}} = \ddot{\vartheta} = \dot{\nu}$.

$$\lambda\ddot{\alpha} + \ddot{\vartheta} = -\lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2 + (G_1 + G_2)(\tau_r + \tau_l) \tag{4.5}$$

Se propone (4.6), que tiene forma de un compensador Proporcional-Integral-Derivativo. En donde, f_1 asemeja una ganancia derivativa, f_2 una ganancia proporcional y f_3 una ganancia integral. La idea del término integral es compensar el término $-\mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2$ en (4.5), que es contante si α y θ permanecen constantes. Como $\ddot{\alpha}$ esta multiplicado por una constante λ, por lo tanto, sus derivadas de menor orden también lo están.

$$(\lambda G_1 + G_2)(\tau_r + \tau_l) = -f_1\left(\lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}\right) - f_2(\lambda\alpha + \vartheta) - f_3 \int_0^t (\lambda\alpha + \vartheta)\, dr \tag{4.6}$$

Sustituyendo (4.6) en (4.5)

$$\lambda\ddot{\alpha} + \ddot{\vartheta} = -f_1\left(\lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}\right) - f_2(\lambda\alpha + \vartheta) - f_3 \int_0^t (\lambda\alpha + \vartheta)\, dr - \lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2$$

Haciendo $\ddot{\zeta} = \lambda\ddot{\alpha} + \ddot{\vartheta}$, tal que, $\dot{\zeta} = \lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}$, $\zeta = \lambda\alpha + \vartheta$ y $\zeta_0 = \int_0^t (\lambda\alpha + \vartheta)\, dr$

$$\ddot{\zeta} = -f_1\, \dot{\zeta} - f_2\, \zeta - f_3\zeta_0 - \lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2 \tag{4.7}$$

Defínase $f_2 = f_2' + f_3'$ donde $f_3' = \frac{f_3}{\kappa_0}$ para algunas constantes $\kappa_0 > 0$ y $f_2' > 0$. Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
-f_2\zeta - f_3\zeta_0 &= -(f_2' + f_3')\zeta - f_3\zeta_0 \\
&= -f_2'\zeta - f_3'\zeta - f_3\zeta_0 \\
&= -f_2'\zeta - f_3' \int_0^t \dot{\zeta}\, dr - f_3 \int_0^t (\lambda\alpha + \vartheta)\, dr \\
&= -f_2'\zeta - f_3' \int_0^t \dot{\zeta}\, dr - f_3 \int_0^t \zeta\, dr \\
&= -f_2'\zeta - f_3' \int_0^t \dot{\zeta} dr - f_3'\kappa_0 \int_0^t \zeta\, dr \\
&= -f_2'\zeta - f_3' \int_0^t \left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) dr
\end{aligned}$$

Entonces, (4.7) se puede escribir como

$$\ddot{\zeta} = -f_1\, \dot{\zeta} - f_2'\zeta - f_3' \int_0^t \left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) dr - \lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2$$

Para probar la estabilidad de lo anterior, se propone (4.8), siendo una función candidata de Lyapunov V_1, como en la Definición 2.11.8, donde se ha definido $\zeta_1 = \int_0^t \left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) dr$ es constante y $\kappa_1 > 0$ es constante y tiene forma de una ecuación de energía.

$$V_1 = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 + \frac{\kappa_0}{2} f_1\, \zeta^2 + \frac{1}{2} f_2'\, \zeta^2 + \kappa_0\, \zeta\dot{\zeta} + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\dot{\zeta} + \frac{1}{2} f_3'\zeta_1^2 + \frac{\kappa_0\kappa_1}{2} f_1\zeta_1^2 + \frac{\kappa_1}{2}(f_2' - \kappa_0 f_1)(\zeta_1 - \zeta)^2 \tag{4.8}$$

Aplicando la Definición 2.11.9, resultando (4.9), derivada de V_1 es necesario $\dot{V}_1$, esta operación se muestra en el Apéndice A.6, tal que

$$\dot{V}_1 = -z^T P z + \left(\dot{\zeta} + \kappa_0 \zeta + \kappa_0 \kappa_1 \zeta_1\right) H_1 \tag{4.9}$$

donde

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} f_1 - \kappa_0 \left(1 + \kappa_1\right) & -\frac{\kappa_0^2 \kappa_1}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa_0^2 \kappa_1}{2} & \kappa_0 f_2' \left(1 + \kappa_1\right) - \kappa_0^2 \kappa_1 f_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_0 \kappa_1 f_3' \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \\ \zeta_1 \end{bmatrix}^T \\ H_1 &= -\lambda h_1 - h_2 - f_0 \sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12}) g_2 \end{aligned}$$

tal que H_1 es considerada una perturbación que actúa sobre el sistema. Nótese que la función H_1 no tiene signo definido. Por tanto, para definir el signo de la función H_1, se aplica el valor absoluto garantizando que sea definida positiva. Entonces $(\kappa_1 \zeta_1 + \dot{\zeta} + \kappa\ \zeta) H_1 \leq \|z\| \operatorname{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_1\} \sqrt{3} |H_1|$. Aplicando lo anterior a la ecuación (4.9):

$$\dot{V}_1 \leq -z^T P z + \sqrt{3} \operatorname{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0 \kappa_1\} \|z\| |H_1|$$

Para el subsistema de $\ddot{\theta}$, resulta:

$$M_{33}\ \ddot{\theta} + C_{31}\ \dot{\alpha} + C_{32}\ \nu + C_{33}\ \dot{\theta} = \frac{b}{R}(\tau_r - \tau_l) \tag{4.10}$$

Simplificando $C_{31}\ \dot{\alpha} + C_{33}\ \dot{\theta}$

$$C_{31}\ \dot{\alpha} + C_{33}\ \dot{\theta} = 2(M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha$$

y considerando $\tilde{\nu} = \nu - \nu_d$, la ecuación (4.10) resulta

$$M_{33}\ \ddot{\theta} + 2(M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha + C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d) = \frac{b}{R}(\tau_r - \tau_l)$$

Se propone (4.11), que tiene forma de un compensador Proporcional-Derivativo, igual que en (4.6), donde f_4 asemeja una ganancia proporcional y f_5 una ganancia derivativa. Y se propone $\tilde{\theta} = \theta - \theta_d$, con θ_d constante, tal que

$$\frac{b}{R}(\tau_r - \tau_l) = -f_4 \tilde{\theta} - f_5 \dot{\theta} \tag{4.11}$$

Sustituyendo (4.11) en (4.10), y despejando $M_{33}\ \ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned} -f_4 \tilde{\theta} - f_5 \dot{\theta} &= M_{33}\ \ddot{\theta} + 2(M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha + C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d) \\ M_{33}\ \ddot{\theta} &= -f_4 \tilde{\theta} - f_5 \dot{\theta} - 2(M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha - C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d) \\ M_{33}\ \ddot{\theta} &= -f_4 \tilde{\theta} - f_5 \dot{\theta} - J(\dot{\alpha}, \dot{\theta}, \dot{\vartheta}) \end{aligned}$$

donde

$$J(\dot{\alpha}, \dot{\theta}, \dot{\vartheta}) = 2(M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz}) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin\alpha \cos\alpha + C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d)$$

Para probar estabilidad, se propone la función candidata de Lyapunov (4.12), donde δ es constante, y al igual que (4.8) cumple la Definición 2.11.4:

$$V_2 = \frac{1}{2} M_{33}\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} f_4 \tilde{\theta}^2 + \delta M_{33} \tilde{\theta} \dot{\theta} + \frac{\delta}{2} f_5 \tilde{\theta}^2 \tag{4.12}$$

Utilizando la Definición 2.11.6, los cálculos realizados para obtener (4.13) se muestran en el Apéndice A.6, $\dot{V}_2$ resulta:

$$\dot{V}_2 = -(f_5 - \delta M_{33})\dot{\theta} - \delta f_4 \tilde{\theta}^2 - \dot{\theta} H_2 - \delta \tilde{\theta} H_3 \tag{4.13}$$

donde

$$\begin{aligned} H_2 &= \dot{\theta}^2 \sin\alpha ((M_p C_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\cos\alpha + M_p C_z\ (\tilde{\nu} + \nu_d)), \\ H_3 &= M_p C_z \dot{\theta} \sin\alpha\ (\tilde{\nu} + \nu_d) \end{aligned}$$

Igual que en (4.9), se considera un vector $w = [\tilde{\theta},\ \dot{\theta}]$, y $\varsigma = max\{\delta M_{33}\}$, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -(f_5 - \varsigma)\dot{\theta} - \delta f_4 \tilde{\theta}^2 + \|w\||H_2| + \delta\|w\||H_3|, \\ \dot{V}_2 &\leq -(f_5 - \varsigma)\dot{\theta} - \delta f_4 \tilde{\theta}^2 + \text{máx}\{1, \delta\}\|w\|(|H_2| + |H_3|) \end{aligned}$$

De forma general, podemos decir que $X = [\zeta,\ \dot{\zeta},\ \tilde{\theta},\ \dot{\theta}]$, entonces la función de Lyapunov es $V = V_1 + V_2$, por lo que, $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$. De igual forma $\|X\| \geq \|z\|$ y $\|X\| \geq \|w\|$, tal que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -z^T P z - (f_5 - \varsigma)\dot{\theta} - \delta f_4 \tilde{\theta}^2 + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1\}\|z\||H_1| + \text{máx}\{1, \delta\}\|w\|(|H_2| + |H_3|), \\ &\leq -z^T P z - (f_5 - \varsigma)\dot{\theta} - \delta f_4 \tilde{\theta}^2 + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1, \delta\}\|X\|(|H_1| + |H_2| + |H_3|), \\ &\leq -X^T\ Q\ X + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1, \delta\}\|X\|(|H_1| + |H_2| + |H_3|) \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} f_1 - \kappa_0\,(1+\kappa_1) & -\frac{\kappa_0^2\kappa_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa_0^2\kappa_1}{2} & \kappa_0 f_2'\,(1+\kappa_1) - \kappa_0^2\kappa_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_0\kappa_1 f_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta f_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_5 - \varsigma \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \\ \zeta_1 \\ \tilde{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

4.2. Análisis de estabilidad

Cabe resaltar que Q es una matriz diagonal. Entonces, siempre existen ganancias positivas f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, suficientemente grandes de manera que Q es una matriz definida positiva. Esto significa que el menor eigenvalor de Q siempre puede hacerse positivo, es decir $\lambda_{\text{mín}}(Q) > 0$. Entonces, (4.14) se puede escribir como:

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)\|X\|^2 + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1, \delta\}\|X\|(|H_1| + |H_2| + |H_3|)$$

Definiendo una constante $0 < \Theta < 1$ y sumando y restando el término $\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta\|X\|^2$ se obtiene sucesivamente:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2 - \lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta\|X\|^2 + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1,\kappa_0,\kappa_0\kappa_1,\delta\}\|X\|(|H_1|+|H_2|+|H_3|),\\
&\leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2,\\
&\qquad\qquad \text{si } -\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta\|X\|^2 + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1,\kappa_0,\kappa_0\kappa_1,\delta\}\|X\|(|H_1|+|H_2|+|H_3|) < 0,\\
&\leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2,\\
&\qquad\qquad \text{si } -\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta\|X\| + \sqrt{3}\,\text{máx}\{1,\kappa_0,\kappa_0\kappa_1,\delta\}\|X\|(|H_1|+|H_2|+|H_3|) < 0,\\
&\leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2,\ \text{si } \sqrt{3}\,\text{máx}\{1,\kappa_0,\kappa_0\kappa_1,\delta\}\|X\|(|H_1|+|H_2|+|H_3|) < \lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta\|X\|,\\
&\leq -\lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2,\ \forall\ \|X\| > \frac{\sqrt{3}}{\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta}\,\text{máx}\{1,\kappa_0,\kappa_0\kappa_1,\delta\}\|X\|(|H_1|+|H_2|+|H_3|) = \mu_0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Por otro lado, de acuerdo a (4.8) se puede escribir:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 + \frac{\kappa_0}{2}f_1\,\zeta^2 + \frac{1}{2}f_2'\,\zeta^2 + \kappa_0\,\zeta\dot{\zeta} + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\dot{\zeta} + \frac{1}{2}f_3'\zeta_1^2 + \frac{\kappa_0\kappa_1}{2}f_1\zeta_1^2 + \frac{\kappa_1}{2}(f_2'-\kappa_0 f_1)(\zeta_1-\zeta)^2\\
&= z^T Q_1 z,\\
Q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\kappa_0}{2} & \frac{\kappa_0\kappa_1}{2}\\ \frac{\kappa_0}{2} & \frac{1}{2}\left(\kappa_0 f_1\left(1-\kappa_1\right) + f_2'\left(1+\kappa_1\right)\right) & \frac{\kappa_1}{2}(f_2'-\kappa_0 f_1)\\ \frac{\kappa_0\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_1}{2}(f_2'-\kappa_0 f_1) & \frac{1}{2}(f_3'+\kappa_1 f_2') \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y (4.12) se tiene que

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{2}f_4\tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_{33}\,\dot{\theta}^2 + \delta M_{33}\tilde{\theta}\dot{\theta} + \frac{\delta}{2}f_5\tilde{\theta}^2,\\
&= \frac{1}{2}f_4\tilde{\theta}^2 + \eta^T Q_2\eta,\\
Q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{M_{33}}{2} & \frac{\delta M_{33}}{2}\\ \frac{\delta M_{33}}{2} & \frac{\delta}{2}f_5 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$V = V_1 + V_2 = z^T Q_1 z + \frac{1}{2}f_4\tilde{\theta}^2 + \eta^T Q_2\eta \tag{4.16}$$

Se puede observar que Q_1 y Q_2 son definidas positivas si $f_1 > 0$ y $f_5 > 0$ son suficientemente grandes. Entonces, a partir de (4.16) se puede escribir:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\|X\|) \leq V \leq \alpha_2(\|X\|),\\
&\alpha_1(\|X\|) = c_1\|X\|^2, \quad \alpha_2(\|X\|) = c_2\|X\|^2,\\
&\qquad c_1 = \text{mín}\{\lambda_{\text{mín}}(Q_1), \frac{1}{2}f_4, \lambda_{\text{mín}}(Q_2)\},\\
&\qquad c_2 = \text{máx}\{\lambda_{\text{máx}}(Q_1), \frac{1}{2}f_4, \lambda_{\text{máx}}(Q_2)\},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

donde $\lambda_{\text{mín}}(\cdot)$ y $\lambda_{\text{máx}}(\cdot)$ representan los eigenvalores menor y mayor, respectivamente, de la matriz entre paréntesis. Considerando el Teorema 2.11.4, y de acuerdo a (4.17) se cumple

(2.90) y de acuerdo a (4.15) se cumple (2.91) con $W_3(X) = \lambda_{\text{mín}}(Q)(1-\Theta)\|X\|^2$ y:

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta} \text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1, \delta\}(|H_1| + |H_2| + |H_3|) = \mu_0.$$

Así que de acuerdo a (2.93) y (2.94) el estado X permanece acotado y converge a una bola cuyo radio está dado por la cota última en (2.94).

Por otro lado, de acuerdo a (4.17), también se sabe que:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|X\|) &= c_1\|X\|^2 = \Upsilon, \quad \alpha_2(\|X\|) = c_2\|X\|^2, \\ \Rightarrow \quad \|X\| &= \sqrt{\tfrac{1}{c_1}\Upsilon} = \alpha_1^{-1}(\Upsilon) \end{aligned}$$

Entonces, la cota última en (2.94) está dada como:

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &\leq \sqrt{\frac{1}{c_1}\Upsilon} = \alpha_1^{-1}(\Upsilon), \quad \Upsilon = \alpha_2(\mu) = c_2\mu_0^2, \quad \mu = \mu_0, \\ &= \sqrt{\frac{1}{c_1}c_2\mu_0^2} = \mu_0\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \\ \mu_0 &= \frac{\sqrt{3}}{\lambda_{\text{mín}}(Q)\Theta} \text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_0\kappa_1, \delta\}(|H_1| + |H_2| + |H_3|). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nótese que, por diseño, siempre se puede mantener $\sqrt{3}\,\text{máx}\{1, \kappa_0, \kappa_1, \delta\}$ pequeño. Por otro lado, el término $(|H_1|+|H_2|+|H_3|)$ decrece con $|\sin(\alpha)|$ y las velocidades $\dot{\theta}, \dot{\alpha}$. Entonces, se puede definir un dominio $D \subset \mathbb{R}^6$ tal que $(|H_1|+|H_2|+|H_3|)$ permanece acotado por un valor pequeño. Esto limita el resultado a que $|\sin(\alpha)|$ y las velocidades $\dot{\theta}, \dot{\alpha}$ sean pequeños y, por tanto, a que el resultado sea local. Además, observe que c_1 y c_2 dependen de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Sin embargo, siempre es posible elegir f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, cada vez más grandes manteniendo constante el cociente $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$, creciendo la raíz cuadrada con f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.

Ahora considere el siguiente resultado de (Horn y Johnson, 2012).

Teorema 4.2.1 *(Geršgorin) Sea A_{ij} el elemento de la matriz A de $n \times n$ localizado en el $i-$ésimo renglón y la $j-$ésima columna. Defina:*

$$R_i'(A) := \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} |A_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Entonces, todos los eigenvalores de la matriz A están localizados en la unión de los n discos:

$$\cup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq R_i'(A)\}.$$

Más aún, si la unión de k de esos n discos forma una región conectada que es disjunta de todos los otros $n-k$ discos restantes, entonces hay exactamente k eigenvalores de A en esta región.

Este teorema implica que si $A_{ii} > 0$ crece cada vez más mientras que $R_i'(A)$ no crece, para todos los renglones de A. Entonces, todos los eigenvalores de A son positivos y crecen cada vez más. De acuerdo a esto y a Q de (4.14), $\lambda_{\text{mín}}(Q) > 0$ crece proporcionalmente a f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, si se selecciona $\kappa_1 = \frac{1}{f_1}$.

Como $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ crece con la raíz cuadrada de f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, mientras que $\lambda_{\text{mín}}(Q) > 0$ crece proporcionalmente a f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, entonces la bola en (4.18) existe y puede hacerse arbitrariamente pequeña de acuerdo a los argumentos recién presentados. Entonces, el radio de la bola crece si $|\sin(\alpha)|$ y las velocidades $\dot{\theta}, \dot{\alpha}$ crecen, lo cual es cierto si el mecanismo presenta movimientos rápidos y sí la inclinación α es grande, pero puede reducirse si f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 son grandes. Así que se tiene la siguiente conclusión:

El estado se mantiene acotado y converge a una bola cuyo radio depende de la rapidez con la que se mueva el mecanismo. Las ganancias f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, del controlador se pueden usar para reducir el radio de la bola conforme el mecanismo se mueve más rápido.

Las ecuaciones (4.6) y (4.11), representan el controlador del sistema, donde podemos asemejar con control clásico que f_1, f_5 es una ganancia derivativa, f_2, f_4 una ganancia proporcional del primero y segundo subsistema respectivamente, y f_3 una ganancia integral para disminuir el error en estado con pendiente constante.

$$\begin{aligned} (\lambda G_1 + G_2)(\tau_r + \tau_l) &= -f_1\left(\lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}\right) - f_2(\lambda\alpha + \vartheta) - f_3\int_0^t(\lambda\alpha + \vartheta)\,dr \\ \frac{b}{R}(\tau_r - \tau_l) &= -f_4\tilde{\theta} - f_5\dot{\theta} \end{aligned}$$

De forma matricial lo podemos expresar como se muestra en (4.19)

$$\begin{bmatrix} \lambda G_1 + G_2 & \lambda G_1 + G_2 \\ \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1\left(\lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}\right) - f_2(\lambda\alpha + \vartheta) - f_3\int_0^t(\lambda\alpha + \vartheta)\,dr \\ -f_4\tilde{\theta} - f_5\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Despejando $\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$ de (4.19)

$$\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda G_1 + G_2 & \lambda G_1 + G_2 \\ \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -f_1\left(\lambda\dot{\alpha} + \dot{\vartheta}\right) - f_2(\lambda\alpha + \vartheta) - f_3\int_0^t(\lambda\alpha + \vartheta)\,dr \\ -f_4\tilde{\theta} - f_5\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

La ecuación (4.20) determina los pares que deben ser aplicados a las ruedas derecha, τ_r, e izquierda, τ_l, del péndulo. Por último, es importante aclarar la función que realiza la constante λ en (4.20). Esta constante interviene en la definición de la variable $\lambda\alpha+\vartheta$, a través de la cual se controla tanto la inclinación del péndulo, α, como la velocidad del mecanismo completo $\vartheta = \int_0^t \tilde{\nu}(r)dr$. Así que si se elige $\lambda > 1$, entonces al controlar la variable $\lambda\alpha + \vartheta$ se está indicando que es más importante controlar la inclinación del péndulo α porque es la variable inestable. Dado lo mostrado anteriormente, se utiliza (4.20) como controlador de sistema mostrado en (3.30).

4.3. Simulación del sistema

Para llevar a cabo la simulación del sistema con su respectivo controlador junto a la función de estabilidad del sistema visto anteriormente. Se utiliza la plataforma MATLAB, con la herramienta Simulink. Dicho diagrama se muestra en la Figura 4.1 que tiene un único bloque con las funciones del sistema y control mismo del sistema, el código de las operaciones matemáticas en el bloque "Sistema" se encuentra en el Apéndice B.

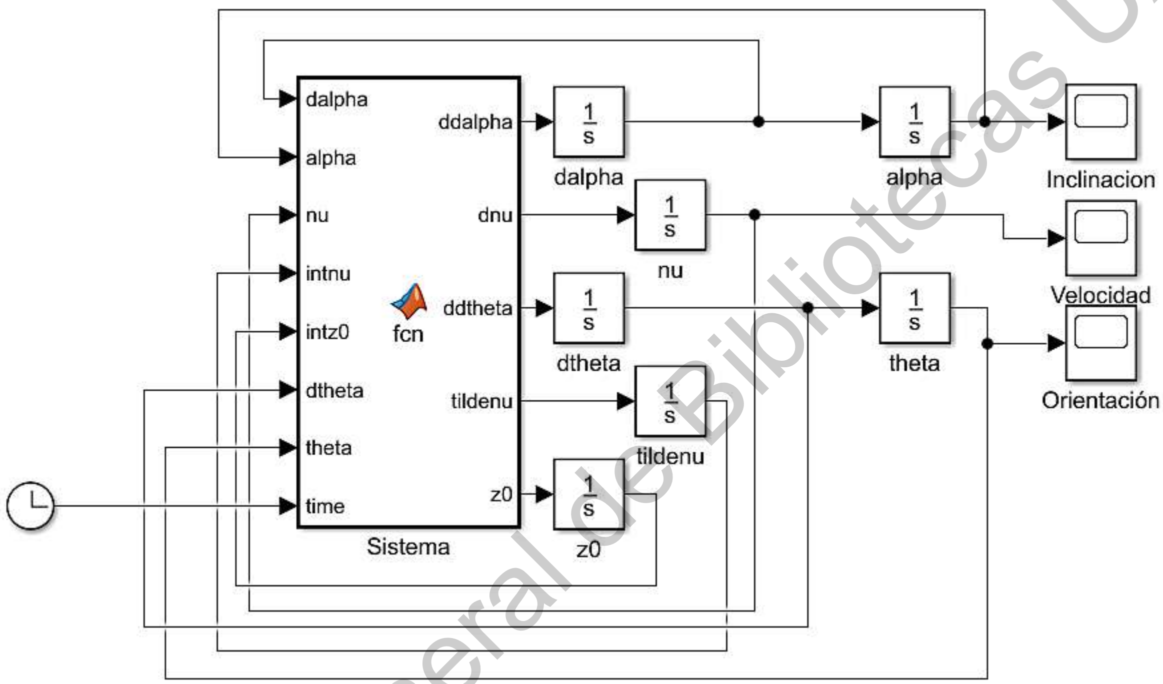
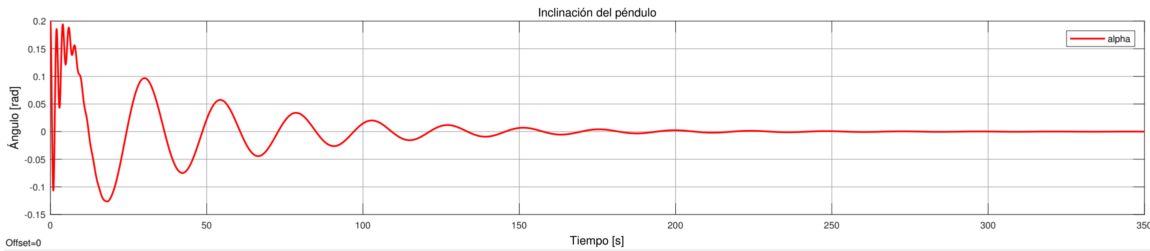


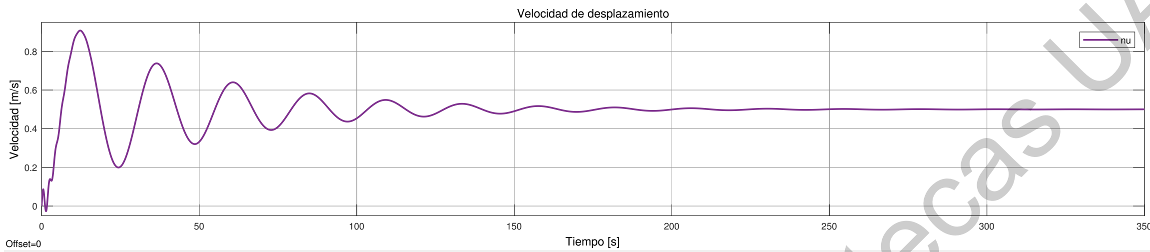
Figura 4.1: Diagrama de bloques de Simulink.

Las constantes empleadas para el sistema son, una masas del péndulo $M_p = 0.4$ [kg], un peso de las ruedas $M_w = 0.08$ [kg], un radio de rueda $R = 0.05$ [m], una distancia b entre el centro de masa G_p y el eje de las ruedas de $b = 0.1$ [m]. Las componentes de inercia $I_{xx} = 0.2$ [kg m^2], $I_{yy} = 0.1$ [kg m^2] y $I_{zz} = 0.1$ [kg m^2]. La inercia en el eje de las ruedas $I_{wa} = 0.05$ [kg m^2], la inercia sobre el diámetro $I_{wd} = 0.0781$ [kg m^2] y la gravedad $g = 9.81$ $[\frac{m}{s^2}]$. Además, las condiciones iniciales del sistema para todas las simulaciones siguientes son, una inclinación $\alpha = 0$ [rad], una velocidad $\nu = 0$ $[\frac{m}{s}]$ y una orientación $\theta = 0$ [rad].

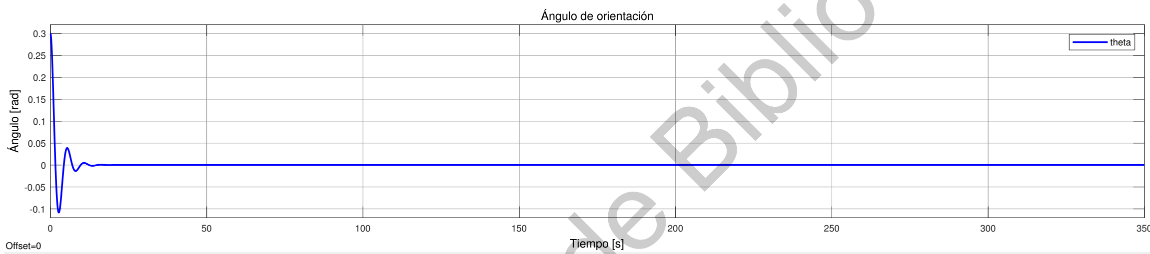
Cabe mencionar que los valores de las constantes del controlador, como se muestra en (4.20), $\lambda = 20$, $f_1 = 0.95$, $f_2 = 19.5$, $f_3 = 1.2$, $f_4 = 1$ y $f_5 = 0.5$. La constante λ de (4.20), está denotada en el código de programación como "e". Es posible encontrar mejores valores para las constantes f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, que brinden mejor respuesta y disminución de oscilaciones del sistema. Y las condiciones deseadas son $\alpha_d = 0$ [rad], $\nu_d = 0.5$ $[\frac{m}{s}]$ y $\theta_d = 0$ [rad].



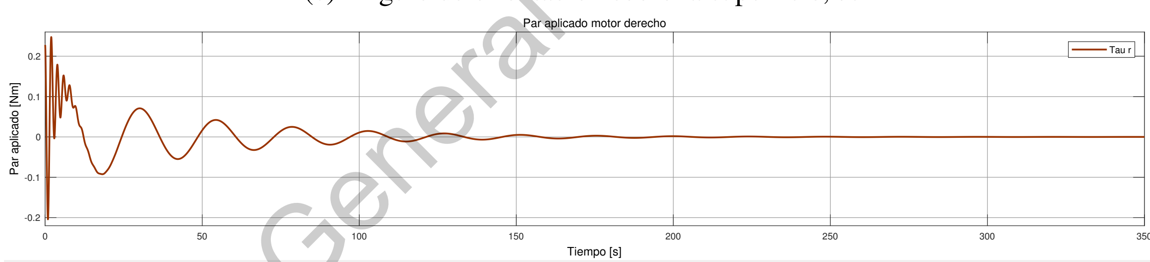
(a) Ángulo de inclinación del péndulo, α.



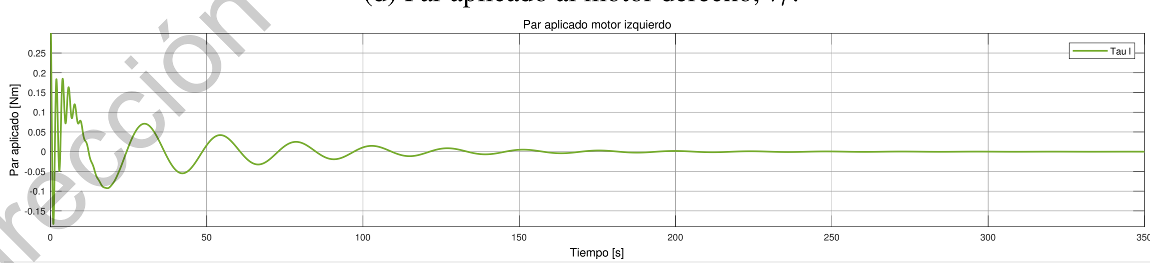
(b) Velocidad de desplazamiento del robot, ν.



(c) Ángulo de orientación sobre la superficie, θ.



(d) Par aplicado al motor derecho, τ_r.



(e) Par aplicado al motor izquierdo, τ_l.

Figura 4.2: Gráfica de simulación en MATLAB del comportamiento.

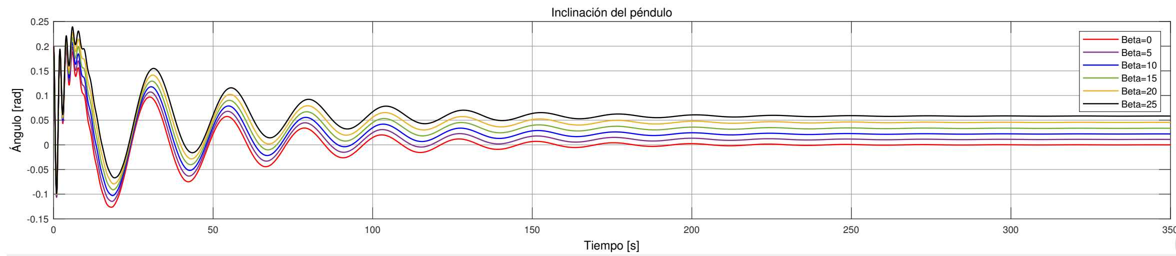
En la Figura 4.2, se muestra el comportamiento de la variable α, ν, y θ de (3.30), recordando que $v(t)$ de (3.29), para esto se considera que la pendiente es $\beta = 0$, una velocidad deseada $\nu_d = 0.5$ $[\frac{m}{s}]$ y un ángulo de orientación deseado $\theta_d = 0$ [rad]. En la Figura 4.2a, es claro que después de los $250[s]$ transcurridos el sistema converge a una región o dentro de una bola que nos asegura la estabilidad en α. Por su parte, en la Figura 4.2b, la velocidad se vuelve constante conforme α es constante. Esto se debe a la dependencia que tiene ν con respecto a α, se puede ver tanto en la matriz de inercia, como en la matriz de Coriolis de (3.29). En la Figura 4.2c, θ rápidamente converge al valor deseado de θ_d, por lo que, se puede establecer que la variable θ, no puede presentar un rasgo significativo en α. Por otro lado, los pares τ_r y τ_l, son completamente dependientes de la inclinación del sistema, es decir, si el péndulo se mueve de forma positiva los pares aplicados de igual manera son positivos, comparar la Figura 4.2d, 4.2e y 4.2a.

A continuación, se muestran gráficas con variaciones en la pendiente, es decir, diferentes valores de β como condición inicial del sistema. En el cual se utilizan ángulos de $0°$, $5°$, $10°$, $15°$, $20°$ y $25°$, los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.3. Hay que mencionar que las constantes de control y ν_d y θ_d son las mismas que anteriormente.

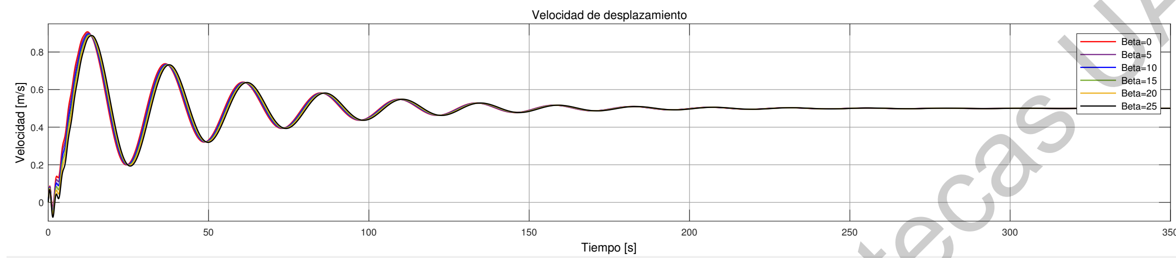
Es evidente que la pendiente β ocasiona que el péndulo invertido con ruedas, ver Figura 4.3a, deba de inclinarse para subir la pendiente. Esto resulta normal debido que el centro de masa G_p siempre busca situarse en el origen del marco de referencia de coordenadas. Se puede decir que cuanto mayor resulte la pendiente, mayor será la inclinación del péndulo. Y esto podría generar una pregunta, ¿Cuál sería la pendiente máxima que pueda subir el péndulo?, obviamente esta respuesta puede depender de acuerdo al diseño de la estructura del robot, como a las características electrónicas del sistema.

Esto a su vez genera un incremento en la velocidad ν, ver Figura 4.3b, ya que necesita mayor potencia por parte de los pares aplicados τ_r y τ_l para lograr moverse sobre la pendiente, ver Figura 4.3d y 4.3e. Además, la velocidad ν en estado estacionario es la misma en todos los casos, independientemente de la inclinación de la pendiente. Esto es posible a la acción integral del controlador en la velocidad de (4.20). Por su parte, en la Figura 4.3c, la orientación del sistema no se ve afectada ante esta modificación, lo cual resulta coherente. Dado que, en (3.30) el termino $\bar{g}$ en el elemento $\bar{g}_{31} = 0$, y se puede concluir que no es necesaria una posición específica sobre la superficie para desplazarse por una pendiente ni resulta significativo este cambio para θ.

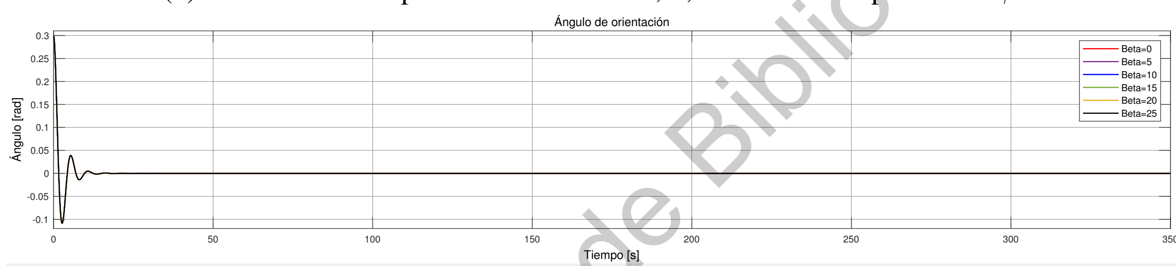
En las siguientes gráficas de la Figura 4.4, se realizan diferentes simulaciones con distintas velocidades deseadas ν_d. Cabe mencionar que el ángulo de pendiente que se está utilizando en que $\beta = 0$, por su parte los valores deseados de ν_d utilizadas son $0.2[\frac{m}{s}]$, $0.4[\frac{m}{s}]$, $0.6[\frac{m}{s}]$, $0.8[\frac{m}{s}]$, $1.0[\frac{m}{s}]$ y $1.2[\frac{m}{s}]$. Igual que en el caso anterior se conservan los mismos valores para el controlador y las constantes del sistema.



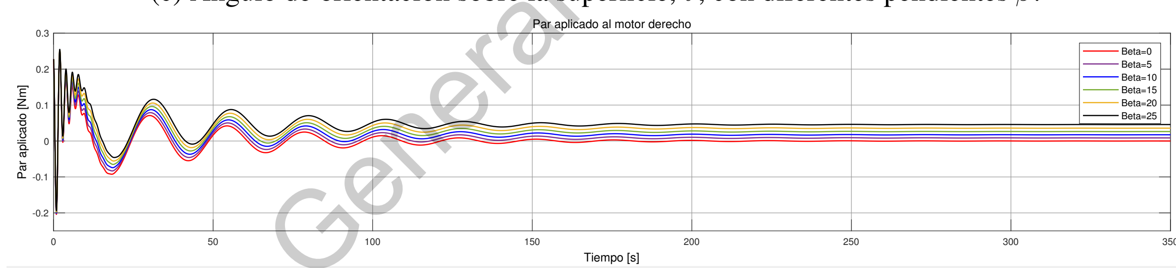
(a) Ángulo de inclinación del péndulo, α, con diferentes pendientes β.



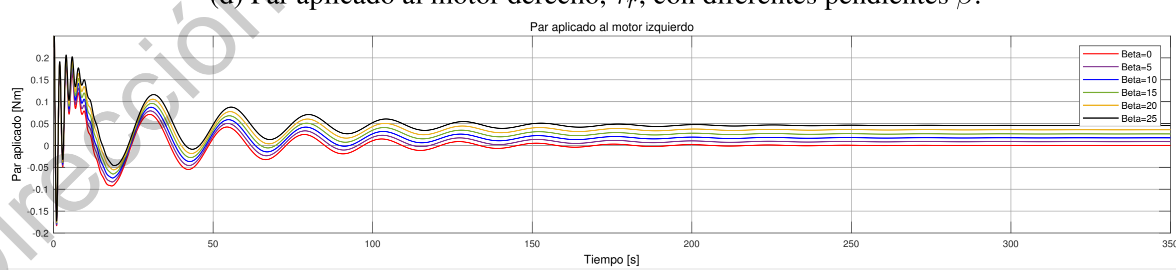
(b) Velocidad de desplazamiento del robot, ν, con diferentes pendientes β.



(c) Ángulo de orientación sobre la superficie, θ, con diferentes pendientes β.

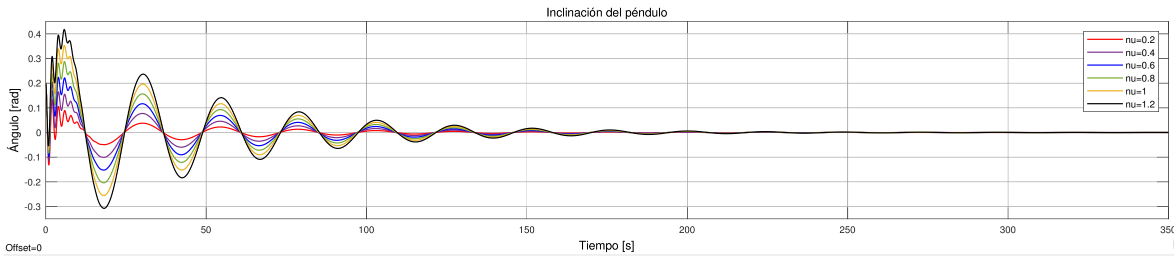


(d) Par aplicado al motor derecho, τ_r, con diferentes pendientes β.

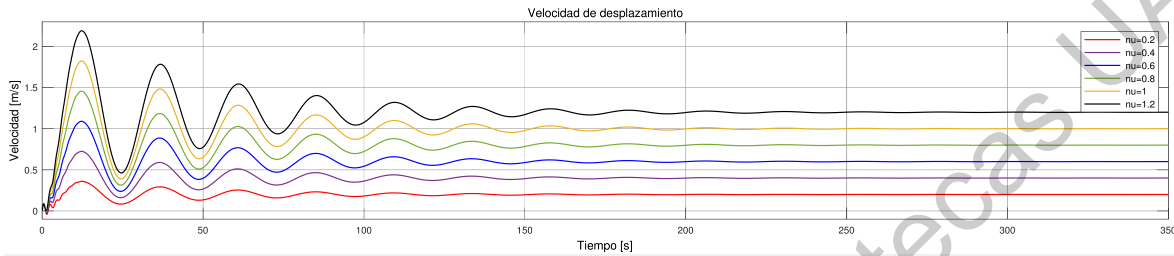


(e) Par aplicado al motor izquierdo, τ_l, con diferentes pendientes β.

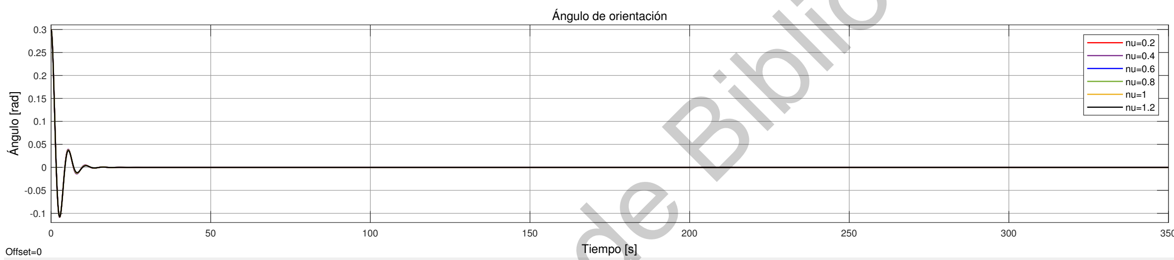
Figura 4.3: Gráfica de simulación con diferentes pendientes β.



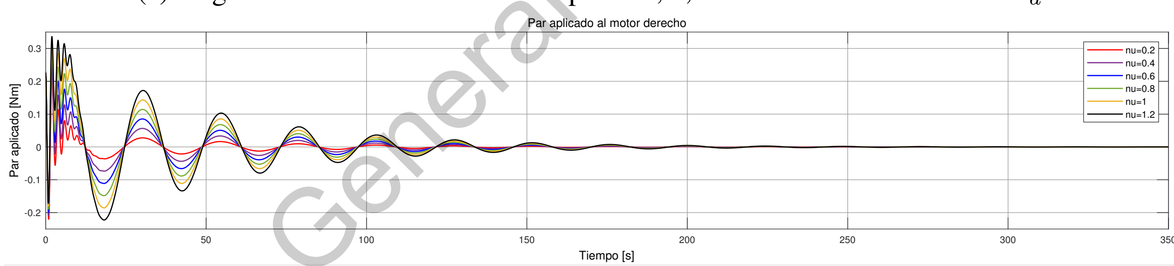
(a) Ángulo de inclinación del péndulo, α, con diferentes velocidades ν_d.



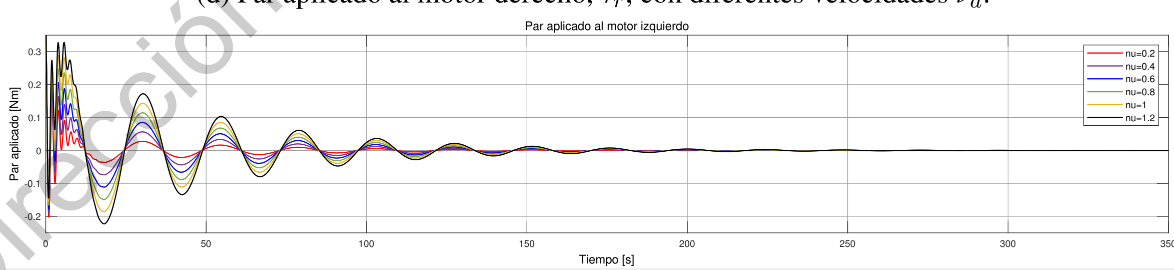
(b) Velocidad de desplazamiento del robot, ν, con diferentes velocidades ν_d.



(c) Ángulo de orientación sobre la superficie, θ, con diferentes velocidades ν_d.



(d) Par aplicado al motor derecho, τ_r, con diferentes velocidades ν_d.



(e) Par aplicado al motor izquierdo, τ_l, con diferentes velocidades ν_d.

Figura 4.4: Gráfica de simulación con diferentes velocidades deseadas ν_d.

Resultando nuevamente que el ángulo de orientación θ, ver Figura 4.4c, no resulta nuevamente afectado por la velocidad de desplazamiento ν, caso contrario con α. Ya que α

es afectada, dado que, a mayor velocidad ν mayor es la inclinación α, ver Figura 4.4a y 4.4b, es muy evidente que cuanto mayor es ν, mayor resulta el tiempo en el cual converge a un valor estable de α. Dado lo anterior, podemos decir que el tiempo que tarda en converger α es proporcional al tiempo en que tarda en converger ν. Otra conclusión valida es que α es completamente dependiente de los pares aplicados τ_r y τ_l, desde la Figura 4.3b era notable, ya que estos son los encargados de mantener en equilibrio el péndulo. Al igual que ν, τ_r y τ_l se vuelven estables conforme α es constante, ver Figura 4.4d y 4.4e.

4.4. Simulación de caso práctico

Para mostrar los resultados obtenidos es necesario tomar en cuenta la Figura 1.3 y 4.5, siendo está la última maqueta de la pista diseñada para el circuito la competencia de ”Robouaq edición 2020”, donde como se muestra ahora la pendiente tiene menor inclinación. Es claro que el diseño del controlador en lazo cerrado mostrado, junto a las simulaciones mostradas anteriormente logran avanzar por la pendiente y adaptarse para continuar moviéndose, sin embargo, faltan poner las condiciones que la competencia establece.

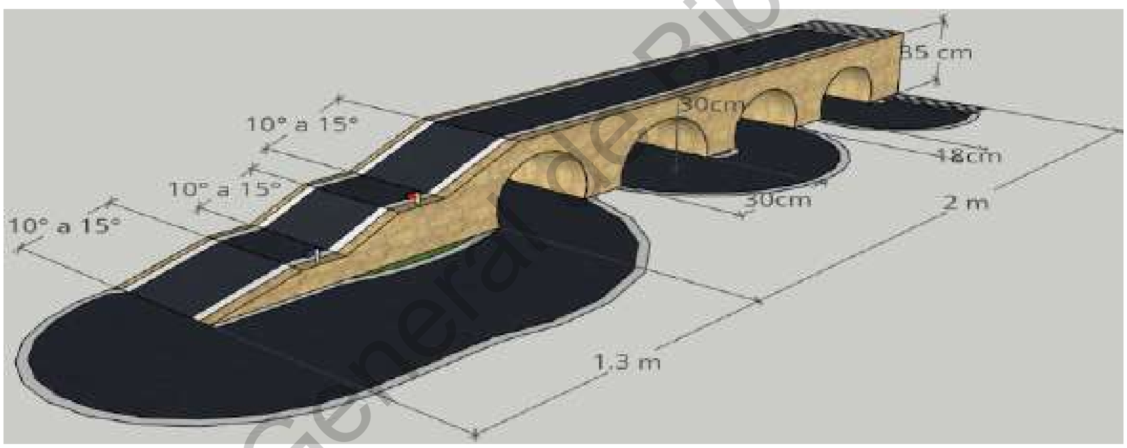


Figura 4.5: Maqueta de la pista de la categoría de ”robot balancín autónomo” de ”Robouaq edición 2020”.

Está competencia marca que el robot debe de recorrer el circuito en un tiempo de 3 minutos como máximo, y que péndulo debe tener un peso máximo de 1 [kg]. De igual manera, se deben mencionar restricciones en las dimensiones del robot, pero estás no influyen directamente en el recorrido. Es prudente mencionar que al modificar estás constantes muy probablemente se deba ajustar las ganancias del controlador. Para esta demostración del recorrido se consideran otros valores de los parámetros, tal que, $M_p = 0.7$ [kg], un radio de rueda $R = 0.10$ [m], las componentes de inercia $I_{xx} = 0.9$ [kg m^2], $I_{yy} = 0.5$ [kg m^2] y $I_{zz} = 0.4$ [kg m^2]. También se ajustaron las condiciones deseadas de $\nu_d = 0.12$ [$\frac{m}{s}$] y $\beta = 5°$. Además se ajustaron las ganancias $f_3 = 2.5$, $f_4 = 1.9$ y 0.6 del controlador. Mientras que b, M_w, I_{wa}, I_{wd} permanecen iguales, junto a las condiciones iniciales del sistema, las ganancias f_1 y f_2 del controlador y las condiciones deseadas de α_d y θ_d de la sección anterior.

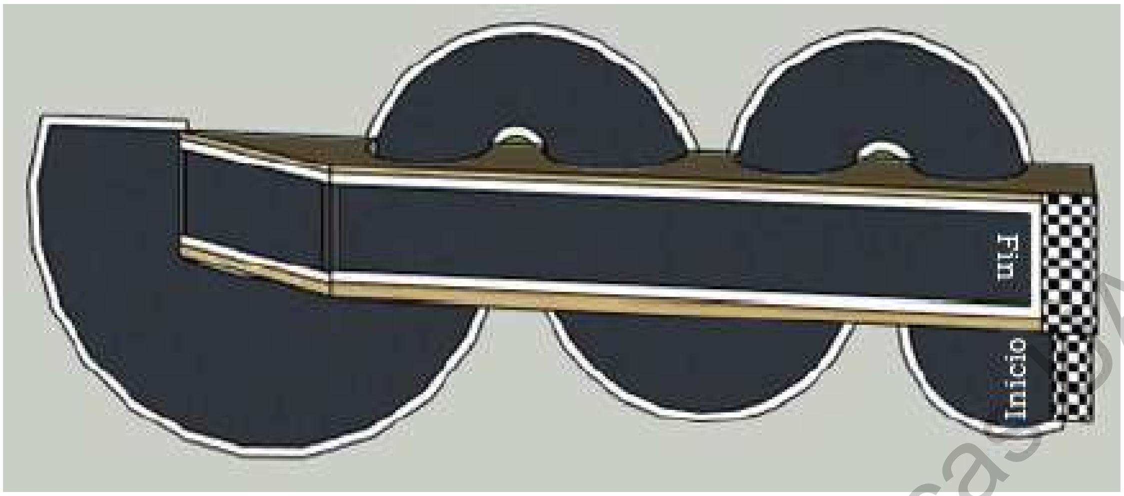


Figura 4.6: Vista cenital de la pista de la categoría de ”robot balancín autónomo” de ”Robouaq edición 2020”.

El recorrido a realizar se muestra en la Figura 4.6, primero realiza un giro de $90°$ a la derecha, después un giro de $180°$ a la izquierda, posterior a eso, vuelve a girar a la derecha pero ahora $180°$, luego gira a la izquierda $180°$ y por último gira $90°$ a la derecha. Posteriormente, continua avanzando por una semi-recta unos instantes de tiempo, para después girar $180°$ a la derecha y comenzar a subir la pendientes, la rampa para la pista del ”2019”, Figura 1.3, es de $20°$ a $25°$, mientras que la pista del ”2020”, Figura 4.6 está dividida en 3 segmentos, con pendientes de $10°$ a $15°$, donde la pendiente intermedia tiene menor longitud. Finalmente, se encuentra una trayectoria recta para concluir el circuito.

Con la finalidad de estar dentro del tiempo máximo de la competencia y dado que se desconoce la logitud del recorrido del robot, se toman en cuenta un intervalo de tiempo de 110 [s] para las trayectorias sobre la superficie y para el recorrido de la pendiente un tiempo restante de 70 [s]. Esto implica, que el robot puede recorrer alrededor de 21.6 [m] tomando en cuenta ν_d y el tiempo máximo para recorrer el circuito.

Para desarrollar lo anterior es necesario, realizar la simulación correspondiente con el diagrama de bloque que se muestra en la Figura 4.7. La cual, forma una trayectoria en forma de ”ocho”, una trayectoria similar a la que se ve en la Figura 4.6. Los códigos de programación de cada función de los bloques, bloque ”Controlador”, ”Sistema” y ”Trayectoria”, se que se muestran en la Figura 4.7, se encuentra en el Apéndice C.

Realizando la simulación del diagrama de bloques de la Figura 4.7, resultando la Figura 4.8 de la trayectoria en el plano ”XY” que muestra el seguimiento de una trayectoria sobre un plano inclinado durante el recorrido. Sin embargo, al inicio se presenta una parte de estabilización. Es claro que en un inicio el sistema por avanzar pierde el equilibrio ocacionando que la acción de control haga retroceder al robot. Esta acción la repite en varias ocaciones hasta que logra estabilizarce y comenzar la trayectoria.

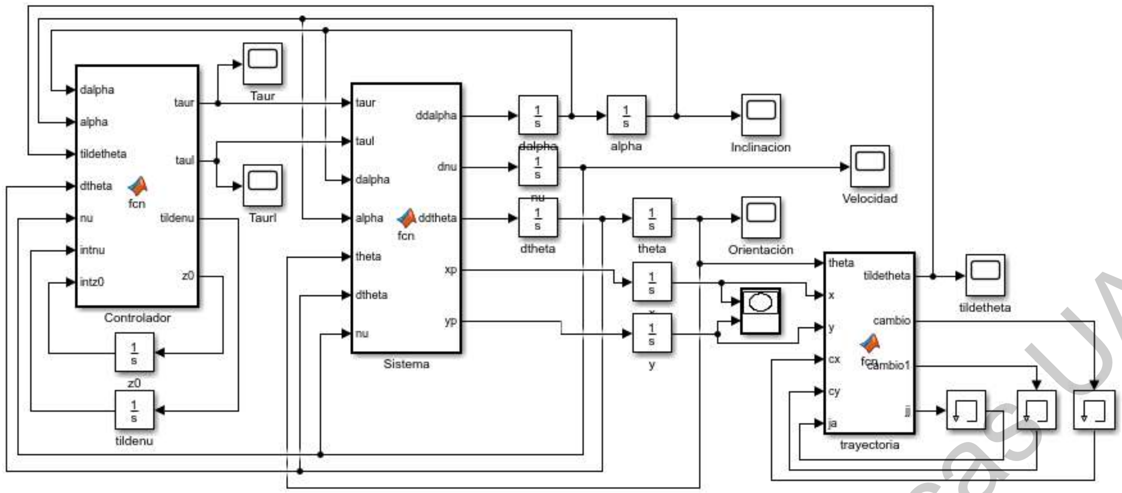


Figura 4.7: Diagrama de bloques de trayectoria en ocho.

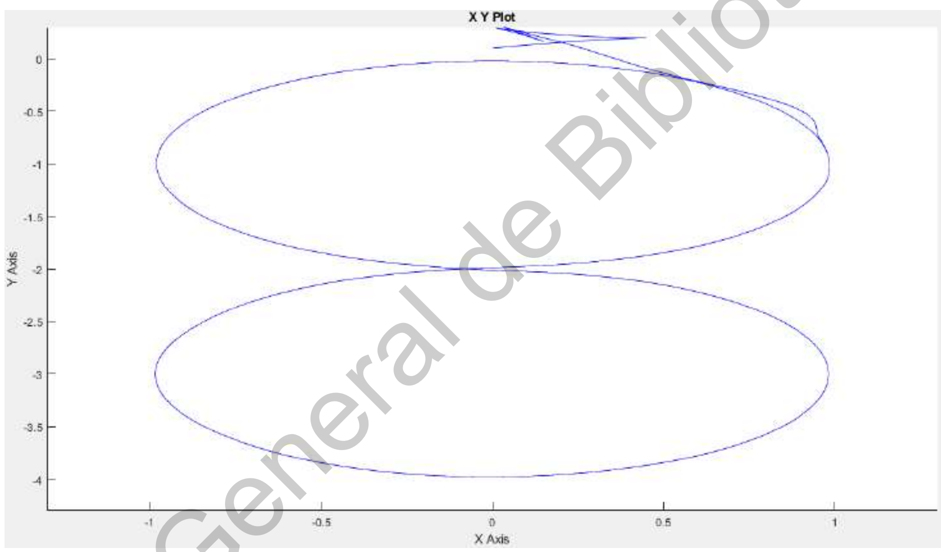
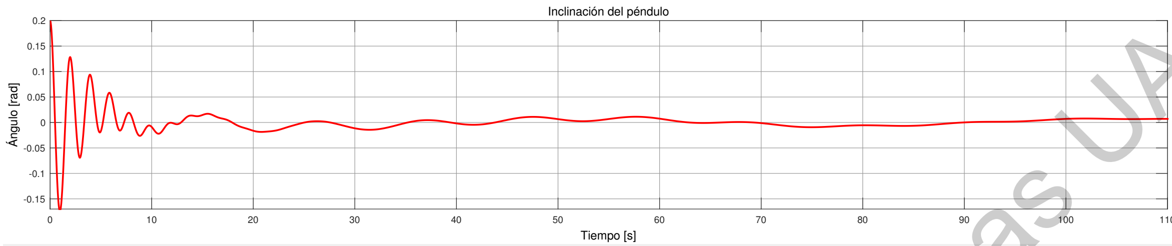


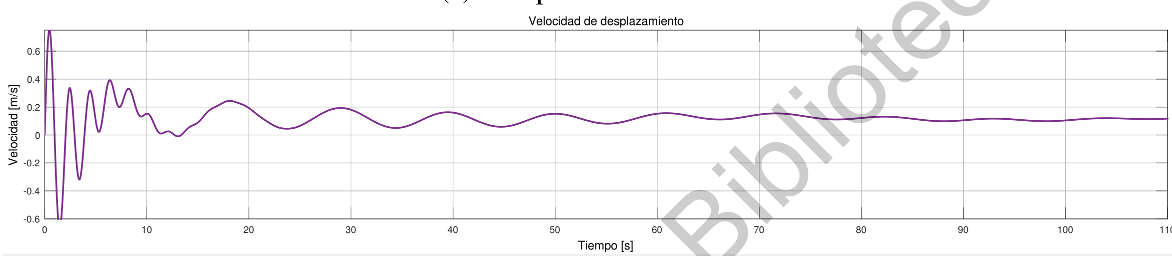
Figura 4.8: Trayectoria realizada con el diagrama de bloques de la Figura 4.7.

Se puede observar en toda la trayectoria de la Figura 4.8, que los principales inconvenientes son en la parte inicial de la trayectoria. Esto se debe, a las características del modelado que se hicieron previamente. Ya que, esto hace que la superficie no sea plana, sino que siempre tiene una pendiente β en el sistema, que, para el caso de esta simulación, $\beta = 5°$. Por ello, se puede decir que la superficie es un plano inclinado. Por esta razón, en la Figura 4.9, específicamente en la Figura 4.9a, se nota como α constantemente se encuentra oscilando. Dado que la ganancia el controlador del robot trata de eliminar el error en estado semi-estacionario.

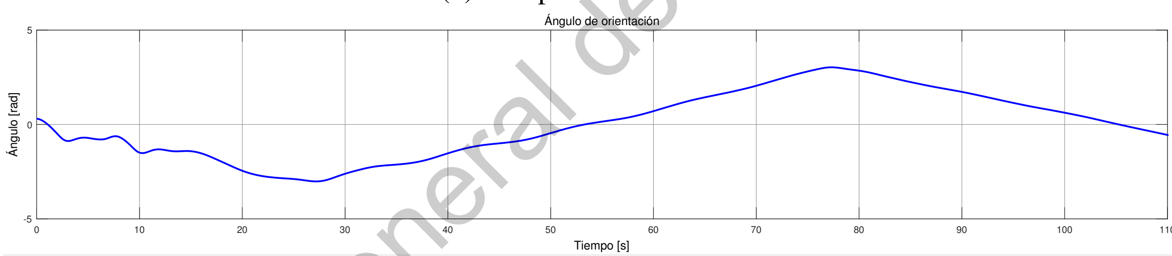
Por otro lado, en la Figura 4.9b podemos ver como el sistema acelera y desacelera constantemente durante todo el trayecto, tratando de llegar a ν_d. Es evidente que conforme avanza el tiempo las variaciones de la velocidad ν se vuelven menores, es decir, los cambios de velocidad son más suaves y en menor magnitud que al inicio de la trayectoria. Tal que, al final de la trayectoria y dadas las ganacias del controlador, ν disminuye sus ocilaciones a tal punto de casi ser constante. Por su parte, θ converge en todas las situaciones que se presentan, ver Figura 4.9c. Sin embargo, $\tilde{\theta}$ conserva siempre un error pequeño con respecto a la trayectoria. El error $\tilde{\theta}$ todos los casos son menor a 0.04 [rad] como se puede ver en la Figura 4.9d, lo que es aproximadamente equivalente a $3°$ con respecto a θ_d.



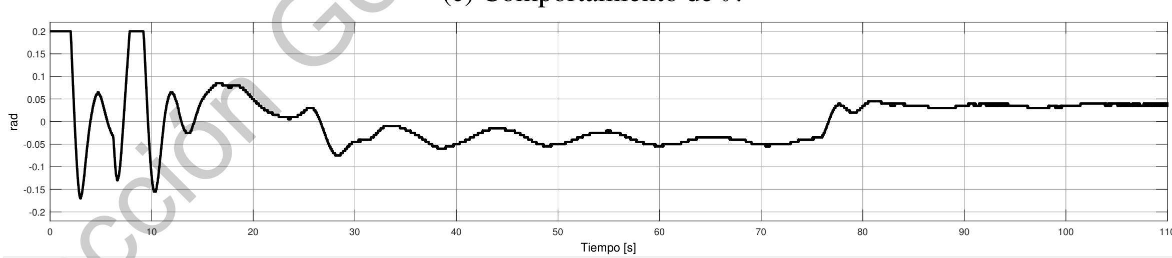
(a) Comportamiento de α.



(b) Comportamiento de ν.



(c) Comportamiento de θ.



(d) Error $\tilde{\theta}$ entre la trayectoria y el ángudo θ.

Figura 4.9: Gráfica del comportamiento de las variables del sistema sobre el circuito de curvas de la Figura 1.3 y 4.5 de la competencia de ”Robouaq 2019 y 2020”, respectivamente.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

En este capítulo se redactan todos los resultados y conclusiones obtenidas durante la investigación. Se explica detalladamente lo encontrado en cada objetivo específico y lo logrado en cada uno de ellos, de igual forma, se explica cada conclusión obtenida. También, se agregan una sección con el trabajo futuro a realizar y las posibilidades de estudio y aprendizaje de estos sistemas.

5.1. Resultados

Al realizar la investigación y estudio del sistema en cuestión, obtener el modelo matemático completo del sistema subactuado tomando en cuenta todas las variables de estado presentes en el sistema. Esto, resultó laborioso al elaborar el modelo matemático del sistema. Hay que recordar, que esto fue calculado con lo presentado en (Pathak et al., 2005), donde se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelo matemático fue probado por medio de las características que deben de tener la matriz de inercia $M(q)$ y la matriz de Coriolis $C(q, \dot{q})$, como se muestra en la Sección 3.4. Esto dado que se utilizo lo basado en (Pathak et al., 2005) con lo que dio como resultado el modelo dinámico mostrado en (3.30). Este modelo ya contiene las restricciones no holonómicas.

El diseño del controlador compensa al sistema para lograr converger a una región de estabilidad para cada una de las variables de estado, es decir, cumple una de las necesidad fundamentales del sistema, que es mantenerse estable en su posición vertical. Hay que mencionar que el controlador propuesto es un controlador lineal, el cual, podemos decir que es un control PID para el subsistema $\alpha - \nu$, es decir, tiene ganancias Proporcional - Integral - Derivativa, lo cual permite incrementar la velocidad de respuesta, eliminar el error en estado estacionario e incrementar el amortiguamiento ante las diferentes perturbaciones, respectivamente. Mientras que para el segundo subsistema θ se propone un controlador PD, es decir, tiene ganancias Proporcional - Derivativa. Esto permite una mayor velocidad de respuesta y un mayor amortiguamiento para las diferentes perturbaciones, respectivamente.

Dado el análisis de estabilidad hecho en la sección 4.2, utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov, se proponen las funciones (4.8) y (4.12), las cuales con ayuda de los Teoremas y Definiciones hechas en la Sección 2.11, se obtiene que el sistema converge a una bola B_r, la cual, con base a la definición de sistemas subactuados y sistemas perturbados, Definición 2.3.1 y la Sección 2.11.5, respectivamente, y el Teorema 2.11.4, las constantes f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 del controlador son las encargadas de mantener al sistema dentro de un subconjunto B_r que satisface al sistema y permite ser localmente estable a lo largo del tiempo.

Finalmente, en las simulaciones me muestra como todo lo hecho anteriormente, hace que el sistema sea estable, a pesar del cambio de pendiente β, los cambios de velocidad deseada ν y los cambios en el ángulo de orientación θ, tal como se muestran en la Sección 4.4. Dado esto, se puede afirmar la hipótesis propuesta inicialmente. Logrando controlar y estabilizar el sistema tomando en cuenta todos sus grados de libertad. Más aún, se diseñó un compensador estable para que el sistema se desplace por la superficie, es decir, puede tener movimiento en diferentes trayectorias, y no únicamente en una trayectoria longitudinal, cambiando de orientación cuantas veces sea necesario. Sin embargo, esto no implica que el robot tenga una estabilidad asintótica, sino únicamente se converge a una bola que tiene un radio que puede ser hecho tan pequeño como se desee. Además la velocidad a la cual puede desplazarse representa una limitante para el robot.

5.2. Conclusión

Llegado a este punto de la investigación y en función de los objetivos planteados, se puede afirmar que se obtuvo el modelo dinámico que se muestra en (3.24), fue obtenido de (Pathak et al., 2005). Dicho modelo contiene restricciones no holonómicas y cumple las propiedades mostradas en la Sección 2.4.2, para las matrices de inercia y la matriz de Coriolis, esto es verificable en la Sección 3.4.

Para cumplir la parte del controlador se propuso dividir el sistema en dos subsistemas, siendo uno $\alpha - \nu$ y otro solo con θ. Para el subsistema $\alpha - \nu$ se diseñó un controlador PID, mientras que, para el subsistema θ solo un controlador PD. El motivo por el cual el subsistema $\alpha - \nu$ tiene una ganancia integral es para eliminar el error en estado estacionario del sistema. Además, esto permite que ν sea independiente de α, en caso contrario, ν tendría un comportamiento dependiente de α.

El controlador propuesto satisface las necesidades del sistema, tal como se muestra en el Capítulo 4 y se logra una estabilidad local en el robot, convergiendo en una bola B_r cuyo radio depende de la rapidez con la que se mueve el mecanismo. Dado lo anterior, es posible afirmar que el robot puede avanzar por una pendiente β, sin embargo, se desconoce la pendiente máxima que lograría subir. El controlador se adapta a las condiciones del sistema y los diferentes cambios que se puedan presentar. También, podemos afirmar que el ángulo de inclinación, la velocidad de movimiento y el ángulo de orientación son constantes, después de un tiempo.

El análisis de estabilidad del sistema, por medio del método directo de Lyapunov, muestra las condiciones de control. Las consideraciones para que el sistema pueda converger a una bola dependen ampliamente de algunos parámetros del robot y de los las ganacias que se utilicen en el controlador, ver Sección 4.2. Este análisis nos afirma el tipo de estabilidad del sistema, y sus condiciones necesarias para obtener el tipo de estabilidad. Para el caso de este robot, se ha demostrado que converge en una bola B_r, por lo que, podemos decir que el sistema es localmente estable.

Como se propuso desde un inicio, el sistema tenía que ser estable, y como ya se mencionó, el sistema es localmente estable. Sin embargo, esto solo nos garantiza que el sistema converge a una bola, de acuerdo con el Teorema 2.11.4 y 4.2.1, es decir, a un conjunto de soluciones donde es estable, pero nunca, se asegura una estabilidad asintótica local. Esto no quiere decir que el sistema no pueda presentar estabilidad asintótica local a lo largo del tiempo.

Finalmente, de forma general, y con todo lo visto en capítulos anteriores queda demostrado que es posible subir la pendiente y realizar el recorrido de una trayectoria, para terminar el recorrido en un tiempo determinado de 3 minutos como en el concurso de robouaq, y avanzar por el circuito de la Figura 1.3 y 4.5, aún con los cambios de pendiente. Mejor aún, el robot puede avanzar por una trayectoria de plano inclinado como se muestra en la Figura 4.8

5.3. Trabajo futuro

Como pregunta abierta a este trabajo, sería prudente conocer la pendiente máxima que puede subir el robot. Ya que esto anterior, depende de las características mecánicas de la estructura del sistema. Así como los parámetros mostrados en el modelado dinámico. También, resulta atractivo, encontrar un controlador que garantice una estabilidad asintótica global o local, en el mejor de los casos. También sería conveniente hacer una plataforma experimental para verificar y comprobar lo fundamentado en esta tesis. Esto implica desarrollar circuitos electrónicos y selección de componentes, programación del algoritmo de control, diseño estructural del robot y una realización de la trayectoria en un tiempo menor de los 3 minutos, según la competencia Robouaq.

Apéndice A

Solución explicita de ecuaciones

A.1. Producto interno del vector velocidad del centro de masa.

Partiendo de (3.6), podemos decir que $V_{G_p} \cdot V_{G_p}$ de (3.7) resulta de la siguiente forma

$$V_{G_p} \cdot V_{G_p} = \begin{bmatrix} C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right) + \dot{x}_0 \\ C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right) + \dot{y}_0 \\ \dot{\alpha} C_z \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right) + \dot{x}_0 \\ C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right) + \dot{y}_0 \\ \dot{\alpha} C_z \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

aplicando el producto interno de (A.1)

$$\begin{aligned} V_{G_p} \cdot V_{G_p} = {} & \left(C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right) + \dot{x}_0 \right)^2 \\ & + \left(C_z \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right) + \dot{y}_0 \right)^2 + \dot{\alpha}^2 C_z^2 \sin^2\alpha \end{aligned} \tag{A.2}$$

desarrollando los binomios

$$\begin{aligned} V_{G_p} \cdot V_{G_p} = {} & C_z^2 \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right)^2 \\ & + 2C_z \, \dot{x}_0 \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \cos\theta - \dot{\theta} \sin\alpha \sin\theta \right) + \dot{x}_0^2 \\ & + C_z^2 \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right)^2 \\ & + 2C_z \, \dot{y}_0 \left(\dot{\alpha} \cos\alpha \sin\theta + \dot{\theta} \sin\alpha \cos\theta \right) + \dot{y}_0^2 + C_z^2 \, \dot{\alpha}^2 \sin^2\alpha \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2\Big(&(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta)^2 - 2\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta\\
&+\left(\dot\theta\sin\alpha\sin\theta\right)^2\Big) + 2C_z\,\dot x_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta - \dot\theta\sin\alpha\sin\theta\right)\\
&+\dot x_0^2 + C_z^2\Big((\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta)^2 + 2\dot\alpha\dot\theta\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta\\
&+\left(\dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)^2\Big) + 2C_z\,\dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right) + \dot y_0^2\\
&+ C_z^2\,\dot\alpha^2\sin^2\alpha
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Agrupando términos

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2\Big(&(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta)^2 + \left(\dot\theta\sin\alpha\sin\theta\right)^2 + (\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta)^2\\
&+\left(\dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)^2 + \dot\alpha^2\sin^2\alpha\Big) + 2C_z\Big(\dot x_0\Big(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta\\
&-\dot\theta\sin\alpha\sin\theta\Big) + \dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot x_0^2 + \dot y_0^2
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Factorizando $\dot\alpha^2\cos^2\alpha$ y $\dot\theta^2\sin^2\alpha$

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2\Big(&\dot\alpha^2\cos^2\alpha\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \dot\theta^2\sin^2\alpha\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\\
&+\dot\alpha^2\sin^2\alpha\Big) + 2C_z\Big(\dot x_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta - \dot\theta\sin\alpha\sin\theta\right)\\
&+\dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot x_0^2 + \dot y_0^2
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

Como se sabe $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, por tanto

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2&\left(\dot\alpha^2\cos^2\alpha + \dot\theta^2\sin^2\alpha + \dot\alpha^2\sin^2\alpha\right) + 2C_z\Big(\dot x_0\Big(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta\\
&-\dot\theta\sin\alpha\sin\theta\Big) + \dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot x_0^2 + \dot y_0^2
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Factorizando, $\dot\alpha^2$

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2&\left(\dot\alpha^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \dot\theta^2\sin^2\alpha\right) + 2C_z\Big(\dot x_0\Big(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta\\
&-\dot\theta\sin\alpha\sin\theta\Big) + \dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot x_0^2 + \dot y_0^2
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

Aplicando, nuevamente, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$
\begin{aligned}
V_{G_p}\cdot V_{G_p} = C_z^2&\left(\dot\alpha^2 + \dot\theta^2\sin^2\alpha\right) + 2C_z\Big(\dot x_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\cos\theta - \dot\theta\sin\alpha\sin\theta\right)\\
&+\dot y_0\left(\dot\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot\theta\sin\alpha\cos\theta\right)\Big) + \dot x_0^2 + \dot y_0^2
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

A.2. Matriz antisimétrica

Se entiende que los vectores de velocidad lineal y angular, v y w, en (2.66) para la energía cinética se expresan en el marco inercial. En este caso lo sabemos que w se encuentra a partir de la matriz antisimétrica (2.67), donde R es la transformación de orientación entre el marco adjunto al cuerpo y el marco inercial. Por lo tanto, es necesario expresar el tensor de inercia, I, también en el marco de inercia. Esto se calcula a partir de la matriz antismétrica $S(\omega_o) = \dot{\Psi}_{\mathbf{P}/\varepsilon}\ \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon}$

$$S(\omega_o) = \dot{\Psi}_{\mathbf{P}/\varepsilon}\ \Psi^T_{\mathbf{P}/\varepsilon} \tag{A.10}$$

Sustituyendo (3.12) y (3.13) y realizando el producto matricial, resulta la matriz

$$S(\omega_o) = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= \Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta\Big)\cos\alpha\cos\theta + \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta\Big)\sin\alpha\cos\theta \\
\psi_{12} &= \Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta\Big)\cos\alpha\sin\theta - \dot{\theta}\cos^2\theta \\
&\quad + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta\Big)\sin\alpha\sin\theta \\
\psi_{13} &= -\Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta\Big)\sin\alpha + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta\Big)\cos\alpha \\
\psi_{21} &= \Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta\Big)\cos\alpha\cos\theta + \dot{\theta}\sin^2\theta \\
&\quad + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta\Big)\sin\alpha\cos\theta \\
\psi_{22} &= \Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta\Big)\cos\alpha\sin\theta - \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta\Big)\sin\alpha\sin\theta \\
\psi_{23} &= -\Big(-\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta\Big)\sin\alpha + \Big(\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta\Big)\cos\alpha \\
\psi_{31} &= -\dot{\alpha}\cos^2\alpha\cos\theta - \dot{\alpha}\sin^2\alpha\cos\theta \\
\psi_{32} &= -\dot{\alpha}\cos^2\alpha\sin\theta - \dot{\alpha}\sin^2\alpha\sin\theta \\
\psi_{33} &= \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha - \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Desarrollando los productos correspondientes

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\theta - \dot{\theta}\cos^2\alpha\sin\theta\cos\theta + \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\theta \\
&\quad - \dot{\theta}\sin^2\alpha\sin\theta\cos\theta \\
\psi_{12} &= -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta - \dot{\theta}\cos^2\alpha\sin^2\theta - \dot{\theta}\cos^2\theta + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta \\
&\quad - \dot{\theta}\sin^2\alpha\sin^2\theta \\
\psi_{13} &= \dot{\alpha}\sin^2\alpha\cos\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta + \dot{\alpha}\cos^2\alpha\cos\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta \\
\psi_{21} &= -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta + \dot{\theta}\cos^2\alpha\cos^2\theta + \dot{\theta}\sin^2\theta \\
&\quad + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta + \dot{\theta}\sin^2\alpha\cos^2\theta \\
\psi_{22} &= -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\theta + \dot{\theta}\cos^2\alpha\sin\theta\cos\theta - \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\theta + \dot{\theta}\sin^2\alpha\sin\theta\cos\theta \\
\psi_{23} &= +\dot{\alpha}\sin^2\alpha\sin\theta - \dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta + \dot{\alpha}\cos^2\alpha\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta \\
\psi_{31} &= -\dot{\alpha}\cos^2\alpha\cos\theta - \dot{\alpha}\sin^2\alpha\cos\theta \\
\psi_{32} &= -\dot{\alpha}\cos^2\alpha\sin\theta - \dot{\alpha}\sin^2\alpha\sin\theta \\
\psi_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Simplificando términos y factorizando y aplicando $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\begin{aligned}
\psi_{11} &= -\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] + \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = -\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\
\psi_{12} &= -\dot{\theta}\left[\sin^2\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] + \cos^2\theta\right] = -\dot{\theta}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] \\
\psi_{13} &= \dot{\alpha}\cos\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] = \dot{\alpha}\cos\theta \\
\psi_{21} &= \dot{\theta}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right]\right] = \dot{\theta}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] \\
\psi_{22} &= \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] - \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - \dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\
\psi_{23} &= \dot{\alpha}\sin\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] = \dot{\alpha}\sin\theta \\
\psi_{31} &= -\dot{\alpha}\cos\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] = -\dot{\alpha}\cos\theta \\
\psi_{32} &= -\dot{\alpha}\sin\theta\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] = -\dot{\alpha}\sin\theta \\
\psi_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Finalmente $S(\omega_o)$ resulta

$$S(\omega_o) = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & \dot{\alpha}\cos\theta \\ \dot{\theta} & 0 & \dot{\alpha}\sin\theta \\ -\dot{\alpha}\cos\theta & -\dot{\alpha}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

A.3. Sumatoria de matrices de Inercia

Como sabemos, la matriz de inercia de calcula de acuerdo a lo demostrado en (2.69), lo cual podemos resumir en (A.16)

$$M(q) = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \tag{A.16}$$

Tomando en cuenta (3.18), la cual resulta de la sumatoria de (3.8), (3.15), (3.16) y (3.17)

$$\begin{aligned} M(q) = &\begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & M_p C_z^2 \sin^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_p C_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx}\sin^2\alpha + I_{zz}\cos^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{wd} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{wa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 \end{bmatrix} \\ M(q) = &\begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_p C_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_w R^2 + I_{wa} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.17}$$

A.4. Matriz de Coriolis

Debido a (3.18), $M(q)$, podemos calcular $C(q,\dot{q})$, esta se calcula a partir de (2.13), por lo que, primero procedemos a encontrar las matrices $\bar{C}_i(q)$.

$$\bar{C}_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2M_pC_z\sin\alpha\cos\theta & -2M_pC_z\cos\alpha\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2M_pC_z\cos\alpha\sin\theta & -2M_pC_z\sin\alpha\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{C}_2(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2M_pC_z\sin\alpha\sin\theta & 2M_pC_z\cos\alpha\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2M_pC_z\cos\alpha\cos\theta & -2M_pC_z\sin\alpha\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{C}_3(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(M_pC_z^2+I_{xx}-I_{zz})\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(M_pC_z^2+I_{xx}-I_{zz})\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{C}_4(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(M_pC_z^2+I_{xx}-I_{zz})\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{C}_5(q) = \begin{bmatrix} ,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_6(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

Como recordamos de (2.13), $c_i(q,\dot{q})$ son los renglones o filas que conforman a la matriz de coriolis, con la cual se obtiene (A.19), tal que, la matriz de coriolis $C(q,\dot{q})$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -M_pC_z(\dot{\theta}\sin\alpha\cos\theta + \dot{\alpha}\cos\alpha\sin\theta) \\ \Gamma_2 &= -M_pC_z(\dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta + \dot{\alpha}\sin\alpha\cos\theta) \\ \Gamma_3 &= -M_pC_z(\dot{\theta}\sin\alpha\sin\theta - \dot{\alpha}\cos\alpha\cos\theta) \\ \Gamma_4 &= M_pC_z(\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta - \dot{\alpha}\sin\alpha\sin\theta) \\ \Gamma_5 &= (M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha \\ \Gamma_6 &= (M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned} \tag{A.20}$$

A.5. Aplicación de restricciones no holonómicas

Aplicando la ecuación (2.27) y (2.28) al sistema Euler-Lagrange en (3.24).

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= S^T(q)M(q)S(q) \\ &= S^T(q)\begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_pC_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_wR^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_wR^2 + I_{wa} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{b}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{b}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_pC_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ M_p\cos\theta & M_p\sin\theta & 0 & M_pC_z\cos\alpha & \frac{M_wR^2+I_{wa}}{R} & \frac{M_wR^2+I_{wa}}{R} \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & \frac{b(M_wR^2+I_{wa})}{R} & -\frac{b(M_wR^2+I_{wa})}{R} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_pC_z^2 + I_{yy} & M_pC_z\cos\alpha & 0 \\ M_pC_z\cos\alpha & M_p + 2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2(M_w + \frac{I_{wa}}{R^2}) + \Delta_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A.21}$$

Para $\bar{C}(q,\dot{q})$, es necesario calcular $\dot{S}(q)$, tal que

$$\dot{S}(q) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & \dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

calculado $\xi(q,\dot{q}) = M(q)\ \dot{S}(q) + C(q,\dot{q})\ S(q)$

$$\begin{aligned}
\xi(q,\dot{q}) =& M(q)\ \dot{S}(q) + C(q,\dot{q})\ S(q) \\
=& \begin{bmatrix} M_p & 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_p & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_3 & \Delta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_4 & 0 & M_pC_z^2 + I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_wR^2 + I_{wa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_wR^2 + I_{wa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & \dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & \Gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & \frac{b}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} 0 & -M_p\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & M_p\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ 0 & M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_4 & 0 & \Gamma_3 \\ \Gamma_6 & 0 & \Gamma_5 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} \Gamma_2 & -M_p\dot{\theta}\sin\theta & \Gamma_1 \\ \Gamma_4 & M_p\dot{\theta}\cos\theta & \Gamma_3 \\ \Gamma_6 & M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & \Gamma_5 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Usando $\bar{C}(q,\dot{q}) = S^T(q)\xi(q,\dot{q})$ y sustituyendo los valores de Γ_i de la ecuación (A.20)

$$\begin{aligned}
\bar{C}(q,\dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_2 & -M_p\dot{\theta}\sin\theta & \Gamma_1 \\ \Gamma_4 & M_p\dot{\theta}\cos\theta & \Gamma_3 \\ \Gamma_6 & M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & \Gamma_5 \\ 0 & 0 & -\Gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Gamma_6 \\ \Gamma_2\cos\theta + \Gamma_4\sin\theta & 0 & \Gamma_1\cos\theta + \Gamma_3\sin\theta \\ \Gamma_6 & M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & \Gamma_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha \\ -M_pC_z\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 & -M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha \\ (M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha & M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha & (M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Por otro lado, para calcular $\bar{g}(q)$

$$\begin{aligned}
\bar{g}(q) &= S^T(q)\ g(q) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_p\ g\ \tan\beta \\ 0 \\ 0 \\ -M_pC_z\ g\ \sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -M_pC_z\ g\ \sin\alpha \\ M_p\ g\ \tan\beta\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Finalmente para calcular $\bar{B}(q)$

$$\begin{aligned}
\bar{B}(q) &= S^T(q)\ B(q) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{b}{R} & -\frac{b}{R} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Por lo tanto, la ecuación (A.27) es el modelo dinámico del sistema, que se analizará en el siguiente capitulo.

$$\bar{M}(q)\ \dot{v}(t) + \bar{C}(q,\dot{q})\ v(t) + \bar{g}(q) = \bar{B}(q)\ \tau \tag{A.27}$$

A.6. Derivada de las funciones de Lyapunov

Tomando en cuanta la ecuación (4.8), y aplicando la definición 2.11.4 a V_1, resulta

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 =& \dot{\zeta}\ddot{\zeta} + \kappa_0 f_1\, \zeta\dot{\zeta} + f_2'\, \zeta\dot{\zeta} + \kappa_0\, \zeta\ddot{\zeta} + \kappa_0\, \dot{\zeta}^2 + \kappa_0\kappa_1\dot{\zeta}_1\dot{\zeta} + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\ddot{\zeta} + f_3'\zeta_1\dot{\zeta}_1 + \kappa_0\kappa_1 f_1\zeta_1\dot{\zeta}_1 \\ &+ \kappa_1\left(f_2' - \kappa_0 f_1\right)(\zeta_1 - \zeta)\left(\dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}\right)\end{aligned} \tag{A.28}$$

Sustituyendo $\ddot{\zeta}$ y ζ

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 =& \dot{\zeta}\left(-f_1\,\dot{\zeta} - f_2'\zeta - f_3'\zeta_1 - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) + \kappa_0 f_1\,\zeta\dot{\zeta} + f_2'\,\zeta\dot{\zeta} \\ &+ \kappa_0\,\zeta\left(-f_1\,\dot{\zeta} - f_2'\zeta - f_3'\zeta_1 - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) + \kappa_0\,\dot{\zeta}^2 \\ &+ \kappa_0\kappa_1\dot{\zeta}\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\left(-f_1\,\dot{\zeta} - f_2'\zeta - f_3'\zeta_1 - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) \\ &+ f_3'\zeta_1\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) + \kappa_0\kappa_1 f_1\zeta_1\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) + \kappa_1\left(f_2' - \kappa_0 f_1\right)(\zeta_1 - \zeta)\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta} - \dot{\zeta}\right)\end{aligned} \tag{A.29}$$

Reduciendo algunos términos.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 =& \dot{\zeta}\left(-f_1\,\dot{\zeta} - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) \\ &+ \kappa_0\,\zeta\left(-f_2'\zeta - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) + \kappa_0\,\dot{\zeta}^2 + \kappa_0\kappa_1\dot{\zeta}\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) \\ &+ \kappa_0\kappa_1\zeta_1\left(-f_1\,\dot{\zeta} - f_2'\zeta - f_3'\zeta_1 - \lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) \\ &+ \kappa_0\kappa_1 f_1\zeta_1\left(\kappa_0\zeta + \dot{\zeta}\right) + \left(\kappa_0\kappa_1 f_2'\zeta - \kappa_0^2\kappa_1 f_1\zeta\right)(\zeta_1 - \zeta)\end{aligned} \tag{A.30}$$

Factorizando y cancelando términos.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 =& -f_1\dot{\zeta}^2 - \kappa_0 f_2'\zeta^2 + \kappa_0\dot{\zeta}^2 + \kappa_0^2\kappa_1\dot{\zeta}\zeta + \kappa_0\kappa_1\dot{\zeta}^2 - \kappa_0\kappa_1 f_3'\zeta_1^2 - \kappa_0\kappa_1 f_2'\zeta^2 + \kappa_0^2\kappa_1 f_1\zeta^2 \\ &+ \left(\dot{\zeta} + \kappa_0\zeta + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\right)\left(-\lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right)\end{aligned} \tag{A.31}$$

Finalmente, acomodando algunos términos de forma matricial.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 =& -z^T P z + \left(\dot{\zeta} + \kappa_0\zeta + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\right)\left(-\lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2\right) \\ =& -z^T P z + \left(\dot{\zeta} + \kappa_0\zeta + \kappa_0\kappa_1\zeta_1\right) H_1\end{aligned} \tag{A.32}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} f_1 - \kappa_0\left(1 + \kappa_1\right) & -\frac{\kappa_0^2\kappa_1}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa_0^2\kappa_1}{2} & \kappa_0 f_2'\left(1 + \kappa_1\right) - \kappa_0^2\kappa_1 f_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_0\kappa_1 f_3' \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \zeta \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \tag{A.33}$$

$$H_1 = -\lambda h_1 - h_2 - f_0\sin\alpha - \mu(\lambda M_{11} - M_{12})g_2$$

Partiendo de (4.12) y derivando la función, de acuerdo a la definición 2.11.4, $\dot{V}_2$, resulta:

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{2}\dot{M}_{33}\ \dot{\theta}^2 + M_{33}\ \dot{\theta}\ddot{\theta} + f_4\tilde{\theta}\dot{\theta} + \delta M_{33}\ \dot{\theta}^2 + \delta\dot{M}_{33}\ \tilde{\theta}\dot{\theta} + \delta M_{33}\ \tilde{\theta}\ddot{\theta} + \delta f_5\tilde{\theta}\dot{\theta} \tag{A.34}$$

donde $\dot{M}_{33} = 2(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha$ y sustituyendo $M_{33}\ \ddot{\theta}$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 =&(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}^2\sin\alpha\cos\alpha + \dot{\theta}(-f_4\tilde{\theta} - f_5\dot{\theta} - 2(M_pC_z^2 + I_{xx}\\ &- I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha - C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d)) + f_4\tilde{\theta}\dot{\theta} + \delta M_{33}\ \dot{\theta}^2 + 2\delta\tilde{\theta}(M_pC_z^2 + I_{xx}\\ &- I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha + \delta\tilde{\theta}(-f_4\tilde{\theta} - f_5\dot{\theta} - 2(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha\\ &- C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d)) + \delta f_5\tilde{\theta}\dot{\theta},\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &\dot{\theta}(-f_5\dot{\theta} - (M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha - C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d)) + \delta M_{33}\ \dot{\theta}^2\\ &+ 2\delta\tilde{\theta}(M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha + \delta\tilde{\theta}(-f_4\tilde{\theta} - 2(M_pC_z^2 + I_{xx}\\ &- I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha - C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d)),\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 =& - (f_5 - \delta M_{33})\dot{\theta} - \delta f_4\tilde{\theta}^2 - \dot{\theta}((M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha + C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d))\\ &- \delta\tilde{\theta}C_{32}\ (\tilde{\nu} + \nu_d),\end{aligned} \tag{A.37}$$

Sustituyendo C_{32}

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 =& - (f_5 - \delta M_{33})\dot{\theta} - \delta f_4\tilde{\theta}^2 - \dot{\theta}((M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha\cos\alpha + M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha\ (\tilde{\nu} + \nu_d))\\ &- \delta\tilde{\theta}M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha\ (\tilde{\nu} + \nu_d),\\ =& - (f_5 - \delta M_{33})\dot{\theta} - \delta f_4\tilde{\theta}^2 - \dot{\theta}^2\sin\alpha((M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\cos\alpha + M_pC_z\ (\tilde{\nu} + \nu_d))\\ &- \delta\tilde{\theta}M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha\ (\tilde{\nu} + \nu_d),\\ =& - (f_5 - \delta M_{33})\dot{\theta} - \delta f_4\tilde{\theta}^2 - \dot{\theta}H_2 - \delta\tilde{\theta}H_3\end{aligned} \tag{A.38}$$

donde

$$\begin{aligned}H_2 &= \dot{\theta}^2\sin\alpha((M_pC_z^2 + I_{xx} - I_{zz})\dot{\alpha}\cos\alpha + M_pC_z\ (\tilde{\nu} + \nu_d)),\\ H_3 &= M_pC_z\dot{\theta}\sin\alpha\ (\tilde{\nu} + \nu_d)\end{aligned} \tag{A.39}$$

Apéndice B

Simulación en MATLAB

Código del bloque ”Sistema”

```
function [ddalpha,dnu,ddtheta,tildenu,z0]=fcn(dalpha,alpha,nu,
                                intnu,intz0,dtheta,theta,time)
    %Constantes del sistema
    Mp = 0.4;%0.7;       %Masa del pendulo
    Mw = 0.08; %0.3;     %Masa de las llantas
    R = 0.05; %0.25;     %Radio de las llantas
    Cz = 8*R;%3*R; %
    b = 0.1; %0.20;      %Distancia centro masa - eje ruedas
    Ixx = 0.2; %2.1073; %Inercia en x
    Iyy = 0.1; %1.8229; %Inercia en y
    Izz = 0.1; %0.6490; %Inercia en z
    Iwa = 0.05; %1.1563;%Momento de inercia en eje de las ruedas
    Iwd = 0.0781;        %Momento de inercia sobre diametro
    g = 9.81;            %Gravedad

    %Condiciones deseadas,
    nud = 0.5;  %Velocidad deseado
    thetad= 0; %Angulo de orientación deseado
    beta=0

    %Cambios de pendiente
    %{
    if time <= 99
        beta=0;
    elseif time > 100 && time <= 250
        beta=30*pi/180;
    elseif time > 251 && time <= 400
        beta=0;
    elseif time > 401 %&& time <= 550
        beta=400*pi/180;
    elseif time > 551 && time <= 700
```

```
    beta=0;
else time < 900
   beta=20*pi/180;
end
%}

%Constantes del controlador
e=25;%10%10;    %100    %Importancia de alpha
f1=0.8;%0.05%0.01;%0.05 %g derivativa e*dalpha+nu
f2=20;%20%20;  %15%45   %g proporcional e*alpha+vartheta
f3=1;                   %g integral int e*alpha+vartheta
f5=0.5;%0.2%0.2;        %g derivativa dtheta
f4=1;%3%1;              %g proporcional theta

%Componentes matriciales
%Coeficinetes de matriz de inercia
D5=(Mp*Cz^2+Ixx)*sin(alpha)^2+Izz*cos(alpha)^2+2*Iwd;
M11= Mp*Cz^2+Iyy;
M12= Mp*Cz*cos(alpha);
M21= M12;
M22= Mp+2*(Mw+Iwa/R^2);
M33= 2*b^2*(Mw+Iwa/R^2)+ D5; %ddtheta

%Coeficientes de matriz de coriolis
C13= -(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dtheta*sin(alpha)*cos(alpha);
C21= -Mp*Cz*dalpha*sin(alpha);
C23= -Mp*Cz*dtheta*sin(alpha);
C32= Mp*Cz*dtheta*sin(alpha); %ddtheta
C31=(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dtheta*sin(alpha)*cos(alpha);
C33=(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dalpha*sin(alpha)*cos(alpha);

%Coeficientes de matriz de gravedad
g1= -Mp*Cz*g*sin(alpha);
g2= Mp*g*tan(beta)*cos(theta);

%Matrices
Mb=[M11 M12 0;M21 M22 0;0 0 M33];
Cb=[0 0 C13;C21 0 C23;C31 C32 C33];
gb=[g1;g2;0];
Bb=[-1 -1;1/R 1/R;b/R -b/R];

%Control
u= 1/(M11*M22-M12^2);
G1= u*(-M22-(1/R)*M12);
G2= u*(M21+(1/R)*M11);
```

```
DD=[e*G1+G2 e*G1+G2;b/R -b/R];
vartheta=intnu;
tildetheta=theta-thetad;
VV=[-f1*(e*dalpha+(nu-nud))-f2*(e*alpha+vartheta)- f3*intz0;
    -f4*tildetheta-f5*dtheta];
tau=inv(DD)*VV;

%Salidas, vector v
v=[dalpha; nu; dtheta];
dv=inv(Mb)*(-Cb*v-gb+Bb*tau);

ddalpha=dv(1);
dnu=dv(2);
ddtheta=dv(3);
tildenu=nu-nud;
z0=e*alpha+vartheta;
```

Apéndice C

Simulación de la Trayectoria en MATLAB

C.1. Bloque "Controlador"

Código del bloque "Controlador"

```
function [taur,taul,tildenu,z0]= fcn(dalpha,alpha,tildetheta,dtheta,
nu,intnu,intz0)

    %Constantes del sistema
    Mp= 0.7;%0.95; %0.7;     %Masa del pendulo
    Mw= 0.08; %0.3;          %Masa de las llantas
    R= 0.10;%0.05;  %0.25;   %Radio de las llantas
    Cz= 10*R; %8*R;  %3*R;%
    b= 0.10;   %0.20;        %Distancia centro masa - eje ruedas
    Ixx= 0.9; %0.2; %2.1073;%Inercia en x
    Iyy= 0.5; %0.1; %1.8229;%Inercia en y
    Izz= 0.4; %0.6490;       %Inercia en z
    Iwa= 0.05;%1.1563;       %Momento de inercia en eje de las ruedas
    Iwd= 0.0781;             %Momento de inercia sobre diametro
    g= 9.81;                 %Gravedad

    %Condiciones deseadas,
    nud = 0.13;             %Velocidad deseado
    thetad= 0*pi/180;       %Angulo de orientación deseado

    %Constantes del controlador
    e=20;%10%10;    %100     %Importancia de alpha
    f1=0.95;%0.05%0.01;%0.05 %g derivativa e*dalpha+nu
    f2=19.5%20%20;  %15%45   %g proporcional e*alpha+vartheta
    f3=2.5;%1.2;             %g integral int e*alpha+vartheta
    f4=1.9;%3%1;             %g proporcional theta
```

```
    f5=0.6;%0.5;%0.2%0.2;    %g derivativa dtheta

    %Componentes matriciales
    %Coeficinetes de matriz de inercia
    D5=(Mp*Cz^2+Ixx)*sin(alpha)^2+Izz*cos(alpha)^2+2*Iwd;
    M11= Mp*Cz^2+Iyy;
    M12= Mp*Cz*cos(alpha);
    M21= M12;
    M22= Mp+2*(Mw+Iwa/R^2);

    %Control
    u= 1/(M11*M22-M12^2);
    G1= u*(-M22-(1/R)*M12);
    G2= u*(M21+(1/R)*M11);
    DD=[e*G1+G2 e*G1+G2;b/R -b/R];
    vartheta=intnu;
    %tildetheta=theta-thetad;
    tildenu=nu-nud;
    z0=e*alpha+vartheta;
    VV=[-f1*(e*dalpha+(nu-nud))-f2*(e*alpha+vartheta)- f3*intz0;
        -f4*tildetheta-f5*dtheta];
    tau=inv(DD)*VV;
    taur = tau(1,1);
    taul = tau(2,1);
```

C.2. Bloque ”Sistema”

Código del bloque ”Sistema”

```
function [ddalpha,dnu,ddtheta,xp,yp]= fcn(taur,taul,dalpha,alpha,
theta,dtheta,nu)
    %Constantes del sistema
    Mp= 0.7;%0.95; %0.7;    %Masa del pendulo
    Mw= 0.08; %0.3;         %Masa de las llantas
    R= 0.10;%0.05;  %0.25;  %Radio de las llantas
    Cz= 10*R; %8*R;  %3*R;%
b= 0.10;   %0.20;       %Distancia centro masa - eje ruedas
    Ixx= 0.9; %0.2; %2.1073;%Inercia en x
    Iyy= 0.5; %0.1; %1.8229;%Inercia en y
    Izz= 0.4; %0.6490;      %Inercia en z
    Iwa= 0.05;%1.1563;      %Momento de inercia en eje de las ruedas
    Iwd= 0.0781;            %Momento de inercia sobre diametro
    g= 9.81;                %Gravedad

    %Condiciones deseadas,
```

```
beta=5*pi/180;

%Componentes matriciales
%Coeficinetes de matriz de inercia
D5=(Mp*Cz^2+Ixx)*sin(alpha)^2+Izz*cos(alpha)^2+2*Iwd;
M11= Mp*Cz^2+Iyy;
M12= Mp*Cz*cos(alpha);
M21= M12;
M22= Mp+2*(Mw+Iwa/R^2);
M33= 2*b^2*(Mw+Iwa/R^2)+ D5; %ddtheta

%Coeficientes de matriz de coriolis
C13= -(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dtheta*sin(alpha)*cos(alpha);
C21= -Mp*Cz*dalpha*sin(alpha);
C23= -Mp*Cz*dtheta*sin(alpha);
C32= Mp*Cz*dtheta*sin(alpha); %ddtheta
C31=(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dtheta*sin(alpha)*cos(alpha);
C33=(Mp*Cz^2+Ixx-Izz)*dalpha*sin(alpha)*cos(alpha);

%Coeficientes de matriz de gravedad
g1= -Mp*Cz*g*sin(alpha);
g2= Mp*g*tan(beta)*cos(theta);

%Matrices
Mb=[M11 M12 0;M21 M22 0;0 0 M33];
Cb=[0 0 C13;C21 0 C23;C31 C32 C33];
gb=[g1;g2;0];
Bb=[-1 -1;1/R 1/R;b/R -b/R];

%Pares de motores
tau=[taur;taul];

%Salidas, vector v
v=[dalpha; nu; dtheta];
dv=inv(Mb)*(-Cb*v-gb+Bb*tau);

ddalpha=dv(1);
dnu=dv(2);
ddtheta=dv(3);

%Coordenadas
xp=cos(theta)*nu;
yp=sin(theta)*nu;
```

C.3. Bloque ”Trayectoria”

Código del bloque ”Trayectoria”

```
function [tildetheta,cambio,cambio1,jj] = fcn(theta,x,y,cx,cy,ja)
    L0=0.237;
    gamma=-0.2:0.005:0.2;% 0.001
    if cx==0
        A=1;
        phi=0:0.001:8; %0.001
        xd=A*sin(phi);
        yd=A*cos(phi)-A;
    else
        A=1;
        phi=0:0.001:9; %0.001
        xd=-A*sin(phi);
        yd=A*cos(phi)-3*A;
    end
    minimo=10;
    equis=10;
    tildetheta=1;
    jj=0;
    for j=ja:ja+5
        for i=1:length(gamma)
            sensorx= x + L0*cos(theta+gamma(i));
            sensory= y + L0*sin(theta+gamma(i));
            distancia=sqrt((xd(j)-sensorx)^2 + (yd(j)-sensory)^2);
            if distancia<minimo
                minimo=distancia;
                tildetheta=-gamma(i);
                equis=sensorx;
                jj=j;
                %ye=sensory;
            end
        end
    end
    cambio=cx;
    cambio1=cy;
    if equis<0
        if cx==0
            if cy==0
                cambio=1;
                cambio1=0;
                jj=1;
            end
```

```
        end
    end

    if equis>0
        if cx==1
            cambio1=1;
        end
    end
    if equis<0
        if cx==1
            if cy==1
                cambio=0;
                jj=3142;
                cx;
            end
        end
end
```

Bibliografía

A, D.C.G. and D.C. García. 2012. Control No Lineal de Vehículos Marinos Subactuados No Holónomos. Editorial Academica Espanola.

Acosta, JA. 2010. Furuta's pendulum: a conservative nonlinear model for theory and practise. Mathematical Problems in Engineering 2010:5–20.

Aeyels, Dirk, Françoise Lamnabhi-Lagarrigue and Arjan van der Schaft. 2008. Stability and stabilization of nonlinear systems. 246 Springer.

Anderson, David P. 2003. nBot balancing robot.
URL: *http://www.geology.smu.edu/ dpa-www/robo/nbot/*

Aracil, J. and F. Gordillo. 2010. El Péndulo Invertido: un Desafío para el Control No Lineal. Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 2(2):8–19.
URL: *https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/8056*

Awrejcewicz, Jan. 2009. Modeling, simulation and control of nonlinear engineering dynamical systems. Springer.

Balafoutis, Constantinos A and Rajnikant V Patel. 2012. Dynamic analysis of robot manipulators: A Cartesian tensor approach. 131 1 ed. Springer Science & Business Media.

Baturone, Aníbal Ollero. 2005. Robótica: manipuladores y robots móviles. Marcombo.

Bellman, Richard. 1966. Dynamic programming. Science 153(3731):34–37.

Bertsekas, Dimitri P, Dimitri P Bertsekas, Dimitri P Bertsekas and Dimitri P Bertsekas. 1995. Dynamic programming and optimal control. 1 Athena scientific Belmont, MA.

Bloch, Anthony M, Naomi Ehrich Leonard and Jerrold E Marsden. 1997. Stabilization of mechanical systems using controlled Lagrangians. Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. 3 IEEE :2356–2361.

Bloch, Anthony M, Naomi Ehrich Leonard and Jerrold E Marsden. 2000. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems. IEEE Transactions on automatic control 45(12):2253–2270.

Block, Daniel J, Karl J Åström and Mark W Spong. 2007. The reaction wheel pendulum. Synthesis Lectures on Control and mechatronics 1(1):1–105.

Bode, Hendrick W. 1940. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. The Bell System Technical Journal 19(3):421–454.

Bode, Hendrik W et al. 1945. Network analysis and feedback amplifier design. van Nostrand New York .

Boltyanskiy, V. G., R. V. Gamkrelidze, Y. E. F. Mishchenko and L. S Pontryagin. 1986. Mathematical theory of optimal processes. 4 Gordon and Breach Science Publishers.

Brown, Scott C and Kevin M Passino. 1997. Intelligent control for an acrobot. Journal of Intelligent and Robotic Systems 18(3):209–248.

Chestnutt, Joel, Manfred Lau, German Cheung, James Kuffner, Jessica Hodgins and Takeo Kanade. 2005. Footstep planning for the honda asimo humanoid. Proceedings of the 2005 IEEE international conference on robotics and automation. IEEE :629–634.

Craig, John J. 2006. Robótica, 3ra Edición. Prentice Hall.

Donaire, Alejandro, Rachit Mehra, Romeo Ortega, Sumeet Satpute, Jose Guadalupe Romero, Faruk Kazi and Navdeep M Singh. 2015. Shaping the energy of mechanical systems without solving partial differential equations. 2015 American Control Conference (ACC). IEEE :1351–1356.

Dorf, Richard C, Robert H Bishop, Sebastián Dormido Canto, Raquel Dormido Canto and Sebastián Dormido. 2005. Sistemas de control moderno. Pearson Educación.

Fantoni, Isabelle and Rogelio Lozano. 2001. Non-linear control for underactuated mechanical systems. Springer Science & Business Media.

Fantoni, Isabelle, Rogelio Lozano and Mark W Spong. 2000. Energy based control of the pendubot. IEEE Transactions on Automatic Control 45(4):725–729.

Fierro, Rafael, Frank L Lewis and Andy Lowe. 1999. Hybrid control for a class of underactuated mechanical systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans 29(6):649–654.

Gandarilla, Isaac, Víctor Santibáñez and Jesús Sandoval. 2017. Control of a self-balancing robot driven by DC motors via IDA-PBC. Proceedings of the 2017 The 5th International Conference on Control, Mechatronics and Automation. ACM :13–17.

Gandarilla, Isaac, Víctor Santibañez and Jesús Sandoval. 2019. Control of a self-balancing robot with two degrees of freedom via IDA-PBC. ISA transactions 88:102–112.

Grasser, Felix, Aldo D'arrigo, Silvio Colombi and Alfred C Rufer. 2002. JOE: a mobile, inverted pendulum. IEEE Transactions on industrial electronics 49(1):107–114.

Gutiérrez Frías, Oscar Octavio. 2009. Diseño de controladores para sistemas subactuados del tipo péndulo invertido PhD thesis Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Computación.

Hahn, Wolfgang. 1967. Stability of motion. 138 Springer.

Hernández-Guzmán, Victor Manuel and Ramón Silva-Ortigoza. 2018. Automatic Control with Experiments. Springer.

Hernández-Guzmán, Victor Manuel, Ramón Silva-Ortigoza and Roberto Valentín Carrillo-Serrano. 2013. Control Automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales. COLECCIÓN CIDETEC.

Horn, Roger A and Charles R Johnson. 2012. Matrix analysis. Cambridge university press.

Kalman, Rudolf E and John E Bertram. 1960. Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov: I—Continuous-time systems. Journal of Basic Engineering 82(2):371–393.

Kalman, Rudolf Emil et al. 1960. Contributions to the theory of optimal control. Bol. soc. mat. mexicana 5(2):102–119.

Kalman, Rudolph Emil. 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of basic Engineering 82(1):35–45, 95–108.

Kanellakopoulos, Ioannis, Petar V Kokotovic and A Stephen Morse. 1991. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. 1991 American Control Conference. IEEE :649–654.

Karafyllis, Iasson and Zhong-Ping Jiang. 2011. Stability and stabilization of nonlinear systems. Springer Science & Business Media.

Kelly, Rafael, Victor Santibáñez Davila and Julio Antonio Loría Perez. 2006. Control of robot manipulators in joint space. Springer Science & Business Media.

Khalil, Hassan K. 2002. Non-linear systems. Upper Saddle River .

Khalil, HASSANK. 1987. Stability analysis of nonlinear multiparameter singularly perturbed systems. IEEE Transactions on Automatic Control 32(3):260–263.

Khalil, H.Khalil. 2014. Nonlinear Control. Always Learning Pearson Education Limited.

Kim, Yeonhoon, Soo Hyun Kim and Yoon Keun Kwak. 2005. Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot. Journal of Intelligent and Robotic Systems 44(1):25–46.

Kuo, Benjamin C. 1996. Sistemas de control automático. Pearson Educación.

L. Chernousko, Felix, Igor M. Ananievski and Sergey Reshmin. 2008. Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications. Springer Science & Business Media.

La Salle, Joseph and Solomon Lefschetz. 2012. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Elsevier.

Lefschetz, Solomon. 1965. Stability of nonlinear control systems. Technical report MARTIN MARIETTA CORP BALTIMORE MD RESEARCH INST FOR ADVANCED STUDIES.

Li, Wei, Kazuo Tanaka and Hua O Wang. 2004. Acrobatic control of a pendubot. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12(4):549–554.

Liao, Xiaoxin, LQ Wang and Pei Yu. 2007. Stability of dynamical systems. Monograph series on nonlinear science and complexity Elsevier.

Linés, E. 1991. Principios de análisis matemático. Reverté.

Lozano, Rogelio, Isabelle Fantoni and Dan J Block. 2000. Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. Systems & control letters 40(3):197–204.

Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich. 1992. The general problem of the stability of motion. International journal of control 55(3):531–534.

Malinietski, Gueorgui Guenadievich. 2005. Fundamentos matemáticos de la sinergética: caos, estructuras y simulación por ordenador. URSS.

Marquez, Horacio J. 2003. Nonlinear control systems: analysis and design. 1 Wiley-Interscience Hoboken.

Maxwell, James Clerk. 1868. On governors. Proceedings of the Royal Society of London 1(16):270–283.

Mayr, Otto. 1970. The origins of feedback control. Scientific American 223(4):110–119.

Muhammad, M, S Buyamin, MN Ahmad and SW Nawawi. 2011. Dynamic modeling and analysis of a two-wheeled inverted pendulum robot. 2011 Third International Conference on Computational Intelligence, Modelling & Simulation. IEEE :159–164.

Nyquist, Harry. 1932. Regeneration theory. Bell system technical journal 11(1):126–147.

Ogata, Katsuhiko. 1996. Sistemas de control en tiempo discreto. Pearson educación.

Ogata, Katsuhiko. 2003. Ingeniería de control moderna. Pearson Educación.

Ogata, Katsuhiko. 2010. Ingeniería de control moderna, México, DF. México: PEARSON.

Ogata, Katsuhiko and Yanjuan Yang. 2002. Modern control engineering. 4 London.

Olfati-Saber, Reza. 2001. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles PhD thesis Massachusetts Institute of Technology.

Ooi, Rich Chi. 2003. Balancing a two-wheeled autonomous robot. University of Western Australia 3.

Ortega, Romeo, Mark W Spong, Fabio Gómez-Estern and Guido Blankenstein. 2002. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. IEEE transactions on automatic control 47(8):1218–1233.

Patete, Anna, Inaki Aguirre and Héctor Sánchez. 2011. Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido. Revista INGENIERÍA UC 18(1):12–22.

Pathak, Kaustubh, Jaume Franch and Sunil Kumar Agrawal. 2005. Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. IEEE Transactions on robotics 21(3):505–513.

Pontryagin, Lev Semenovich. 2018. Mathematical theory of optimal processes. Routledge.

Reyes, Fernando. 2011. Robótica-Control de robots manipuladores. Alfaomega grupo editor.

Routh, Edward John. 1877. A treatise on the stability of a given state of motion: particularly steady motion. Macmillan and Company.

Sadeghian, Rasoul and Mehdi Tale Masoule. 2016. An experimental study on the PID and Fuzzy-PID controllers on a designed two-wheeled self-balancing autonomous robot. 2016 4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA). IEEE :313–318.

Sakagami, Yoshiaki, Ryujin Watanabe, Chiaki Aoyama, Shinichi Matsunaga, Nobuo Higaki and Kikuo Fujimura. 2002. The intelligent ASIMO: System overview and integration. IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems. 3 IEEE :2478–2483.

Sánchez, José Andrés Somolinos. 2001. Modelado dinámico y control de un robot flexible de tres grados de libertad. 116 Univ de Castilla La Mancha.

Sastry, Shankar. 2013. Nonlinear systems: analysis, stability, and control. 10 Springer Science & Business Media.

Seto, D. and J. Baillieul. 1994. Control problems in super-articulated mechanical systems. IEEE Transactions on Automatic Control 39(12):2442–2453.

Slotine, Jean-Jacques E. 1984. Sliding controller design for non-linear systems. International Journal of control 40(2):421–434.

Slotine, Jean-Jacques E, Weiping Li et al. 1991. Applied nonlinear control. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.

Spong, Mark W and Mathukumalli Vidyasagar. 2008. Robot dynamics and control. John Wiley & Sons.

Spong, Mark W., Seth Hutchinson and Mathukumalli Vidyasagar. 2005. Robot modeling and control. Wiley.

Vannelli, Anthony and M Vidyasagar. 1985. Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems. Automatica 21(1):69–80.

Westervelt, Eric R, Jessy W Grizzle, Christine Chevallereau, Jun Ho Choi and Benjamin Morris. 2018. Feedback control of dynamic bipedal robot locomotion. CRC press.

Whittaker, E. T. 1979. A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies. Cambridge University Press, Cambridge.

Xu, Jian-Xin, Zhao-Qin Guo and Tong Heng Lee. 2013. Design and implementation of integral sliding-mode control on an underactuated two-wheeled mobile robot. IEEE Transactions on industrial electronics 61(7):3671–3681.

Xu, Rong and Ümit Özgüner. 2008. Sliding mode control of a class of underactuated systems. Automatica 44(1):233–241.

Yuan, S., Lei G. Bin X. 2016. Dynamic modeling and sliding mode controller design of a two-wheeled self-balancing robot. IEEE International Conference on Mechatronics and Automation.