

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas



**Un esquema numérico cinético de ecuaciones diferenciales
parciales para modelar flujo sanguíneo en arterias.**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

Brandon Alejandro Llaca Sánchez

Dirigido por:

Dr. Gerardo Hernández Dueñas

Centro Universitario

Querétaro, Qro.

México, 2021



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

**Un esquema numérico cinético de ecuaciones diferenciales
parciales para modelar flujo sanguíneo en arterias.**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Presenta

Brandon Alejandro Llaca Sánchez

Dirigido por:

Dr. Gerardo Hernández Dueñas

Dr. Gerardo Hernández Dueñas

Presidente

Firma

Dr. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

Secretario

Firma

Dr. Ulises Velasco García

Vocal

Firma

M. en C. José Enrique Crespo Baltar

Vocal

Firma

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
México, 2021

©2021 - Brandon Alejandro Llaca Sánchez

All rights reserved.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

DEDICATORIA

A todas las personas que han creído en mí, y que de alguna u otra manera me han ayudado a llegar hasta acá. Gracias totales.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Agradecimientos

Me gustaría empezar por agradecer a mi director de tesis todo el apoyo, ayuda y guía brindados durante estos meses. La realización de este trabajo no fue fácil, y él fue una razón importante por la cual no desistí.

También, quisiera agradecer a mi mamá y a mi novia Daniela todo el apoyo y ánimo brindados durante este proceso. No puedo expresar lo mucho que me ayudaron y me siguen ayudando. Ellas fueron parte fundamental de este logro.

Al comité revisor del presente trabajo, por darse el tiempo para mejorarlo y enriquecerlo con sus sugerencias y recomendaciones. Investigación realizada gracias al Proyecto Conacyt Ciencia Básica A1-S-17634 y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM con número UNAM-DGAPA-PAPIIT IN113019. Agradezco a Ciencia de Frontera, Conacyt y la DGAPA-UNAM la beca recibida.

No quiero dejar pasar la oportunidad de agradecer a mis profesores y compañeros de universidad. Ha sido un largo viaje desde que comencé la carrera, y ellos han sido parte muy importante de mi camino. Mención especial merecen Lalo, Lili y JuanCa. Así como también, el profe Vic.

Quisiera agradecer también a mis estudiantes de italki, Espree, Cassandra y Rouvaishyana. Ellos se volvieron amigos cercanos y un gran apoyo para la consumación de este trabajo.

Por último, me gustaría agradecerme a mí. Quiero darme las gracias por no haberme rendido con la realización de este trabajo, a pesar de que lo pensé tantas veces. *“Ma sono ancora il re!”*.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice general

1. Introducción	1
2. El modelo macroscópico y sus propiedades	7
2.1. Derivación del modelo macroscópico	8
2.2. Forma cuasi-lineal	11
2.3. Estados estacionarios	14
2.4. Solución al Problema de Riemann	17
2.4.1. Soluciones débiles a leyes de conservación escalares	17
2.4.2. Caso 2-D para las arterias	19
3. Formulación microscópica del modelo	31
3.1. Derivación de la ecuación del modelo cinético	33
3.2. Estados estacionarios a nivel microscópico	37
4. Método numérico: esquema cinético	41
4.1. Método Lax-Wendroff en 1D	41
4.2. Método Lax-Wendroff en 2D	44
4.3. Método <i>upwind</i> de alta resolución para la formulación microscópica del modelo	48
5. Resultados numéricos	57
5.1. Problema de Riemann	57
5.2. Perturbación $\mu > 0, \alpha > 1$	60
5.3. Perturbación $\mu > 0, \alpha > 1$, con estrechamiento de la arteria	63
5.4. Simulación de flujo sanguíneo en la aorta	66

6. Conclusiones

71

Bibliografía

73

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Capítulo 1

Introducción

Las enfermedades cardiovasculares son la principal causa de muerte en todo el mundo, llegando a 17.3 millones de muertes por año, un número que se espera crezca a más de 23.6 millones para 2030. En el 2008, éstas representaban el 30 por ciento de las muertes globales, con 80 por ciento de esas muertes tomando lugar en países de bajos y medios recursos (Mozaffarian et al., 2015). Esto convierte en una labor imprescindible el dedicar una gran cantidad de tiempo y esfuerzo para estudiar cómo se comporta y cómo funciona el sistema cardiovascular, a fin de tener un mejor entendimiento de éste y desarrollar mejores tratamientos y técnicas de prevención para sus padecimientos.

Los matemáticos, en lugar de encontrarse lejos del campo de batalla, forman una parte muy importante de éste. Desde finales del siglo XX, con el desarrollo de renovados métodos numéricos que aprovecharon el nuevo y potente poder de cómputo, los matemáticos han podido proponer e investigar una gran cantidad de modelos y esquemas numéricos útiles para modelar el flujo sanguíneo. Dichos modelos, cuyo carácter puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional, se ajustan a leyes de conservación de la naturaleza, como la conservación de masa y el balance de momento, y presentan una ecuación de estado que relaciona el área seccional de la arteria con la presión asociada. En consecuencia, normalmente resultan ser de naturaleza hiperbólica, lo cual coincide con el tipo de solución que se

espera para estos problemas (Quarteroni et al., 2017; Čanić et al., 2017; Formaggia et al., 2000). Estos modelos han probado ser bastante precisos a la hora de intentar predecir y entender la forma en que circula la sangre en el cuerpo humano, y han ayudado eficazmente a la comunidad médica en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardiovasculares desde que empezó su desarrollo.

Dentro de la gama de modelos existente, es bien sabido que los formulados en 3 dimensiones permiten tener una idea bastante certera de la mayoría de los detalles de la distribución del flujo local de sangre, incluyendo los patrones de flujo local y las tensiones de corte de los vasos sanguíneos. Sin embargo, son sumamente costosos computacionalmente, del orden de horas, días o semanas dependiendo de la potencia del equipo de cómputo en el que se realice la simulación (Krafczyk et al., 1998), por lo que en muchas ocasiones se vuelven inviables por el tiempo requerido para implementarlos.

A la par, múltiples estudios han comprobado que los modelos y las simulaciones en una dimensión aproximan suficientemente bien el movimiento del flujo sanguíneo, si se toma en cuenta su bajo costo computacional (del orden de minutos en una simple laptop de uso diario), su simplicidad y la precisión e información que nos ofrecen (Grinberg et al., 2011; Xiao et al., 2014).

Es claro que no es posible obtener toda la información que se obtendría utilizando un modelo en 3 dimensiones; sin embargo, los modelos unidimensionales brindan información relevante para poder determinar varias características del flujo sanguíneo. Entre estas características están, por ejemplo, la propagación de ondas de presión a través de las arterias, así como los efectos de las variaciones en las propiedades mecánicas de las mismas, como lo son su taponamiento o ruptura (Formaggia et al., 2003; Willemet y Alastruey, 2015).

Estas variaciones pueden ser causadas, por ejemplo, por una estenosis, es decir, un estrechamiento de la arteria, que se puede derivar de una acumulación de depósitos de calcio y otras condiciones fisiológicas; o un aneurisma, i.e., una dilatación de las paredes de la arteria, causada por su debilitamiento. Dicha información, de capital importancia a la hora de evaluar la salud de una persona, cuando se empata con el reducido tiempo que se

necesita para obtener resultados (i.e. su viabilidad y practicidad), hace que los modelos unidimensionales se vuelvan una mejor opción que su contraparte en 3 dimensiones al momento de realizar simulaciones de las cuales se necesita una respuesta rápida y precisa para conocer el estado de salud de una persona.

En este trabajo, se utilizará un modelo en una dimensión basado en un esquema cinético. Este esquema tiene la particularidad de que considera los movimientos de las partículas a nivel microscópico y sus efectos en las variables macroscópicas; es decir, los incorpora al movimiento resultante del flujo. El esquema cinético es ampliamente utilizado en la actualidad para modelar una vasta variedad de problemas, entre ellos modelación de aguas someras (Perthame y Simeoni, 2001), fluidos de gases enrarecidos (Zhu et al., 2017), fluidos viscosos incompresibles con transferencia de calor (Inamuro, 2002), etc., y existe una comunidad matemática grande que lo implementa. Sin embargo, nunca se ha usado para modelar el flujo sanguíneo en arterias; esta tesis pretende ser el primer trabajo en donde esto se realice, y busca crear un antecedente que pueda ser utilizado como referencia por la gran comunidad que lo emplea en la actualidad.

Entrando ya un poco en materia, es sabido que la sangre está compuesta por 4 componentes principales: plasma, plaquetas, glóbulos blancos y glóbulos rojos. Debido a esta composición, se comporta como un fluido no-newtoniano en vasos sanguíneos cortos, y como un fluido newtoniano incompresible en vasos sanguíneos largos (Alastruey et al., 2012). Tomando esto en consideración, en el presente trabajo se modelará el flujo sanguíneo en arterias (vasos sanguíneos largos) con propiedades elásticas en sus paredes (compliance).

Las dos variables que se calcularán en el modelo corresponden al área seccional transversal A y a la descarga de flujo Au , donde u es la velocidad del flujo. Para calcular el área transversal, se necesita dar un aproximado del radio de la arteria, R , y por simplificación se asumirá que la sección transversal de la arteria tiene forma circular. Además, A depende directamente del tiempo t y de la posición por longitud de arco s . De esta forma, una primera versión del modelo queda en forma de una ley de conservación de masa $A_t + (Au)_s = 0$ y de una ecuación para el balance de momento

$(Au)_t + (\alpha Au^2)_s + \frac{A}{\rho} p_s = -2\pi \frac{\alpha \nu}{\alpha - 1} u - gA \sin \theta(s)$, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales donde p es la presión transmural, ρ es la densidad constante, ν es la viscosidad, α es el coeficiente de Coriolis para la distribución de la velocidad en cada sección transversal, g es la aceleración debida a la gravedad y $\theta(s)$ es el ángulo que forma la arteria con respecto a la horizontal en la posición por longitud de arco s (Čanić y Kim, 2003).

Este solamente es el modelo macroscópico en su forma primitiva; todavía falta considerar la formulación microscópica (esquema cinético) que ponderará los movimientos microscópicos de las células, así como dejar al modelo macroscópico en su forma conservativa más desarrollada. Se darán más detalles acerca de las ecuaciones en los capítulos 2 y 3. Cabe notar que este modelo es de tipo hiperbólico, y por lo tanto podría presentarse la formación de ondas de choque. De hecho, este es un criterio que se ha utilizado para determinar a pacientes sanos (Čanić y Kim, 2003), pues se encontró que en estos pacientes, la formación de ondas de choque en arterias se producía hasta una zona que no es físicamente relevante, del orden de metros, mientras que para pacientes no sanos, en los que existía un debilitamiento en las paredes de la arteria, esto podía provocar la formación de ondas de choque presenciadas en una zona físicamente relevante. Se darán más detalles acerca de la formación de ondas de choque en la próxima sección.

De igual forma, por los rasgos físicos del modelo, este problema también podría pensarse como un problema de dos capas. En este caso, se modela la dinámica existente entre una capa formada mayormente de plasma, libre de glóbulos rojos, y otra capa formada por el resto de los componentes del flujo sanguíneo, que se comportará más bien como un fluido no Newtoniano (Haldar y Andersson, 1996; Armi, 1986). Sin embargo, ese enfoque no se abordará en la presente tesis.

Una parte fundamental en la implementación de los modelos en una dimensión, así como en la implementación de cualquier modelo matemático, es contar con un método numérico eficiente, estable y preciso, que permita obtener una buena aproximación en un tiempo razonable. En este trabajo se utilizará un esquema cinético para resolver el modelo descrito anteriormente, que tiene la ventaja de ser estable ante perturbaciones y de no tener problemas de violación de entropía. Asimismo, las simulaciones aquí

obtenidas con éste no presentan problemas de no preservación de positividad, pues no se trabaja con radios casi nulos, que pudieran presentar esta complicación.

En definitiva, en la actualidad sigue siendo de capital importancia contribuir a construir y aplicar modelos y métodos numéricos eficaces para el modelamiento del comportamiento del sistema circulatorio. Como se sabe, las enfermedades de este sistema son la principal causa de defunciones en el mundo, y son un factor importante que reduce la calidad de vida (Mensah et al., 2019). Y es que, aunque se ha estudiado el movimiento del flujo sanguíneo en arterias con cierta profundidad, y se tienen modelos definidos para su estudio, no hay duda de que hoy sigue siendo imprescindible estudiar el problema desde nuevos enfoques. Esto, con la finalidad de lograr modelos más eficientes, con implementaciones numéricas que requieran tiempos de cómputo menores, y que al mismo tiempo mejoren las aproximaciones.

Esta es la razón por la que se vuelve imperioso para los matemáticos contribuir con su conocimiento a la resolución de este problema, derivando e implementando modelos y métodos numéricos que permitan comprender y predecir el funcionamiento del sistema cardiovascular, en general y bajo ciertas condiciones; en particular, como se realiza en este trabajo, buscando tener una mejor aproximación del comportamiento del flujo sanguíneo en arterias, e intentando predecir y entender cómo se comporta ante ciertos padecimientos, como aneurismas, estrechamientos de las paredes de la arteria, o algún otro problema. Así pues, el presente estudio cobra relevancia pues en él se realiza la aplicación de un esquema numérico importante que no ha sido utilizado antes para abordar este problema, y por lo tanto, generará una referencia y antecedente para la gran comunidad que trabaja con el esquema numérico en cuestión, es decir, el esquema cinético.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Capítulo 2

El modelo macroscópico y sus propiedades

El flujo sanguíneo en arterias del sistema circulatorio mayor se comporta básicamente como el paso de un fluido newtoniano a través de un tubo, en el cual se consideran propiedades elásticas de sus paredes (compliance). Estas propiedades elásticas se pueden modelar a través de una relación entre la presión transmural del ducto y el área seccional del mismo. Sin embargo, esta relación no es puramente mecánica, pues intervienen otros factores como la contracción de músculos circundantes, patologías como aneurismas, características fisiológicas (autorregulación) y otras cualidades (Bessonov et al., 2016). Dicho de otra manera, en el modelo presentado, la presión es una función explícita de la sección transversal. Este fenómeno puede ser modelado utilizando un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) (Čanić y Kim, 2003).

Para resolver el sistema con el planteamiento cinético, será necesario formular el modelo tanto a nivel macroscópico como a nivel microscópico. A nivel macroscópico, las ecuaciones de movimiento en su forma conservativa,

son

$$\begin{aligned} \partial_t A + \partial_s(Au) &= 0, \\ \partial_t(Au) + \partial_s\left(\alpha Au^2 + \frac{K}{2\rho}A^2\right) &= -\mu Q + \frac{G'_o(s)}{\rho}A - gA \sin(\theta(s)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde u es la velocidad del fluido, $Q = Au$ es la descarga, p es la presión transmural, ρ es la densidad, ν la viscosidad, α el coeficiente de Coriolis para la distribución de la velocidad en cada sección transversal, g la aceleración debida a la gravedad, θ el ángulo de la arteria con respecto al eje horizontal, t el tiempo y s la posición por longitud de arco. La primera ecuación corresponde a la conservación de masa, mientras que la segunda al balance de momento. La presión transmural, definida como la diferencia entre la presión interna y la externa en las paredes de la arteria, está dada por

$$p = G_o(s) \left(\frac{A}{A_o(s)} - 1 \right),$$

donde $A_o(s)$ es un área seccional en reposo, y $G_o = G_o(s)$ es un parámetro de elasticidad de la arteria y que es proporcional al módulo de Young. Los parámetros A_o, G_o dependen de la longitud de arco s y su variación se debe a propiedades elásticas de la arteria no uniformes, debido a características fisiológicas de ésta o enfermedades tales como aneurismas. Por simplicidad, se supone que $K = G_o(s)/A_o(s)$ es constante. Además, el coeficiente μ está dado por $\mu = 2\pi \frac{\alpha\nu}{(\alpha-1)A}$ y se toma como una constante. Aunque la presión transmural no aparece de forma explícita en las ecuaciones macroscópicas en su forma conservativa, está presente de manera implícita en dos términos de la ecuación del balance de momento.

2.1. Derivación del modelo macroscópico

Existe un modelo unidimensional para el flujo sanguíneo en arterias con simetría axial y con propiedades elásticas en las paredes, ampliamente difundido y utilizado para atacar problemas concernientes al sistema cardiovascular. Por su simplicidad, ofrece resultados computacionalmente asequibles, y brinda una buena aproximación para el movimiento del flujo sanguíneo en arterias donde se cumplen las características del modelo, es decir, ser largos (de longitud $L \gg R_p$, donde R_p representa el radio promedio de la

arteria) con simetría axial aproximada y con propiedades elásticas en las paredes (compliance). Verbigracia, la aorta completa, que va desde la aorta ascendente hasta el final de la aorta abdominal, sin patologías, cumple con estas características y las simulaciones con este modelo pueden presentar buenos resultados. En el caso contrario, como ocurre con las venas del sistema circulatorio menor, el fluido se comporta de forma no Newtoniana; esto es, fluidos que no tienen un valor de viscosidad definido y constante, pues varía con la temperatura y presión que se le aplique. Son fluidos que tienen resistencia a fluir, y que estando en reposo se comportan como líquidos, pero cuando son sometidos a alguna fuerza aumentan su viscosidad y se comportan más bien como sólidos.

Tomando en cuenta las condiciones de arriba, se realiza una derivación de un modelo unidimensional en (Čanić y Kim, 2003). Para ello, se hace uso de un análisis asintótico partiendo de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes en ductos largos y estrechos con simetría axial. Las ecuaciones se escriben en coordenadas cilíndricas, se eliminan términos que no son dominantes y se procede con un promedio transeccional. Además, se considera un perfil Hagen-Poiseuille de la velocidad en la sección transversal V_x , esto con el objetivo de que las ecuaciones queden escritas en términos de las cantidades promediadas. Dicho perfil, adicionado a un parámetro de viscosidad en la sangre de $\nu = 0.0000026 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, que es un valor típico para la viscosidad en la sangre a 37° C (Eckmann et al., 2000), lleva a considerar $\alpha = 1.1$, el término de Coriolis. Como resultado, se llega a las ecuaciones que determinan la evolución de tales cantidades promediadas en cada sección transversal.

En el modelo unidimensional en (Čanić y Kim, 2003) no se considera el efecto de la gravedad. Esto corresponde al caso en donde la arteria se extiende a lo largo de la dirección horizontal. En el modelo aquí expuesto, se consideran también arterias inclinadas o verticales, en donde el efecto de la gravedad es importante. El modelo final se escribe como

$$\begin{aligned} \partial_t A + \partial_s(Au) &= 0 \\ \partial_t(Au) + \partial_s(\alpha Au^2) + \frac{A}{\rho} \partial_s(p) &= -\mu Q - gA \sin(\theta(s)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

en donde $\theta(s)$ es el ángulo que forma la arteria con respecto a la horizontal en la posición por longitud de arco s . Las demás variables ya se definieron

al principio del capítulo.

Ahora bien, para incluir el efecto de la presión transmural (por módulo de Young) en el modelo, se parte de la forma obtenida en (Čanić y Kim, 2003) para ésta, basada en el “independent ring model”, donde se considera el hecho de que el radio del vaso cambia más lentamente a presiones sanguíneas mayores, introduciendo el parámetro β :

$$p = G_o(s) \left(\left(\frac{A}{A_o(s)} \right)^{\frac{\beta}{2}} - 1 \right),$$

donde $\beta > 1$ indica la respuesta no lineal de las paredes a la tensión-deformación. Un β mayor ($\beta \rightarrow \infty$) corresponde a paredes rígidas de las arterias. Se ha reportado (Čanić y Kim, 2003) que $\beta = 2$ provee una “buena aproximación con datos experimentales. Así, utilizando este valor para β , se tiene que

$$\partial_s(p) = \partial_s \left(\left(\frac{G_o(s)}{A_o(s)} \right) A - G_o(s) \right) = K \partial_s(A) - G'_o(s), \quad (2.3)$$

donde $K = G_o(s)/A_o(s)$ se supone constante. Luego,

$$\frac{A}{\rho} \partial_s(p) = \frac{K}{\rho} A \partial_s(A) - \frac{G'_o(s)}{\rho} A = \partial_s \left(\frac{K A^2}{2} \right) - \frac{G'_o(s)}{\rho} A. \quad (2.4)$$

Así, el modelo macroscópico para el problema presentado queda, en forma conservativa, como:

$$\begin{aligned} \partial_t A + \partial_s(Au) &= 0 \\ \partial_t(Au) + \partial_s \left(\alpha Au^2 + \frac{K}{2\rho} A^2 \right) &= -\mu Q + \frac{G'_o(s)}{\rho} A - gA \sin(\theta(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2. Forma cuasi-lineal

Las propiedades hiperbólicas del modelo se pueden encontrar escribiendo el sistema en forma cuasi-lineal, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1. El sistema (2.5) se puede escribir en forma cuasi-lineal como

$$\partial_t \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2\alpha u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu Q + \frac{G'_o(s)}{\rho} A - gA \sin(\theta(s)) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho} A}. \quad (2.7)$$

Además, los eigenvalores y eigenvectores están dados por

$$\lambda_1 = \alpha u - \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2}, \quad \lambda_2 = \alpha u + \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2},$$

y

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad y \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Demostración. Primero, se escribe la parte izquierda del sistema en términos de las variables conservadas A y $Q = Au$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_t A + \partial_s(Au) &= \partial_t A + \partial_s Q \\ \partial_t(Au) + \partial_s \left(\alpha Au^2 + \frac{K}{2\rho} A^2 \right) &= \partial_t(Q) + \partial_s \left(\alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{2\rho} A^2 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ahora, nótese que $\partial_s Q = 0 \cdot \partial_s A + 1 \cdot \partial_s Q$. Por otro lado, se tiene que

12CAPÍTULO 2. EL MODELO MACROSCÓPICO Y SUS PROPIEDADES

$$\begin{aligned}
 \partial_s \left(\alpha \frac{Q^2}{A} + \frac{K}{2\rho} A^2 \right) &= \partial_s \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{K}{2\rho} 2A \partial_s A \\
 &= \alpha \frac{2QAQ_s - Q^2 A_s}{A^2} + \frac{K}{\rho} AA_s \\
 &= \alpha (2uQ_s - u^2 A_s) + \frac{K}{\rho} AA_s \quad (2.9) \\
 &= 2\alpha u Q_s + \left(\frac{K}{\rho} A - \alpha u^2 \right) A_s \\
 &= (c^2 - \alpha u^2) A_s + 2\alpha u Q_s,
 \end{aligned}$$

donde $c^2 = \frac{K}{\rho} A$. Luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \alpha u^2 & 2\alpha u \end{pmatrix} = J, \quad (2.10)$$

es la matriz jacobiana del sistema. Por lo tanto, el sistema (2.5) se puede escribir en forma cuasi-lineal como

$$\partial_t \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \alpha u^2 & 2\alpha u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu Q + \frac{G'_o(s)}{\rho} A - gA \sin(\theta(s)) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho} A}.$$

Ahora, se calculan los eigenvalores y eigenvectores del sistema, es decir, se necesitan obtener los eigenvalores y eigenvectores de la matriz jacobiana J .

Se tiene entonces que el polinomio característico de la matriz J es:

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ c^2 - \alpha u^2 & 2\alpha u - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2\alpha u\lambda + \alpha u^2 - c^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Resolviendo, se obtiene que los eigenvalores están dados por

$$\lambda_1 = \alpha u - \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2}, \lambda_2 = \alpha u + \sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2}. \quad (2.13)$$

Luego, solucionando $J \cdot \vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{r}_1$, resulta:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - \alpha u^2 & 2\alpha u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ (c^2 - \alpha u^2)x_1 & 2\alpha u y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El cual es un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones de la forma $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$. Análogamente, las soluciones del sistema $J \cdot \vec{r}_2 = \lambda_2 \vec{r}_2$, son de la forma $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Así, los eigenvectores son $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ y $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

□

Nótese entonces que los eigenvalores del sistema (2.6) siempre son reales, ya que $\alpha \geq 1$. Además, los eigenvectores forman siempre una base pues son linealmente independientes, salvo cuando $\sqrt{\alpha(\alpha - 1)u^2 + c^2} = 0$, i.e., cuando $\alpha(\alpha - 1)u^2 = 0$ y $c^2 = \frac{K}{\rho}A = 0$, o sea, es necesario que $\alpha = 1$ o $u = 0$, y al mismo tiempo $A = 0$. Por tanto, para que los vectores no formen una base, es necesario que $A = 0$, es decir, que la arteria colapse, lo cual no pasa en el presente estudio. Así, se concluye que las propiedades hiperbólicas del sistema solamente se pierden cuando la arteria colapsa, algo que no es posible en este trabajo.

2.3. Estados estacionarios

Un estado estacionario se refiere a una solución que es independiente del tiempo. Por un lado, las simulaciones de la hemodinámica de estados en movimiento proveen de información muy acertada en cuanto al movimiento del flujo sanguíneo en arterias, y pueden ser utilizadas para el diagnóstico apropiado de personas con aneurismas intracraneales. Sin embargo, los estados estacionarios, que simulan movimiento de flujo sanguíneo en arterias que no depende del tiempo, también pueden llegar a ser de ayuda para ciertos problemas en condiciones específicas, con la gran ventaja de un costo computacional menor (Geers et al., 2010).

Proposición 2. *Las soluciones de clase C^1 estacionarias del sistema (2.5) están dadas por las siguientes condiciones*

$$Q = Au = \text{const.}, \quad \partial_s E = -\mu \frac{Q}{A}, \quad (2.15)$$

donde Q es la descarga, $E = \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + gz$ es la energía del sistema, $z = \int_{s_0}^s \sin(\theta(s))ds$ es la elevación a partir de una altura referencial, y $s_0 = 0$ corresponde al extremo izquierdo de la arteria. En particular, la energía del sistema es constante cuando $\mu = 0$.

Demostración. Para la prueba se utilizará la forma primitiva del sistema, es decir, como se muestra en (2.2). Dado que se están buscando soluciones estacionarias, éstas no dependen del tiempo, y entonces $\partial_t A = \partial_t(Au) = 0$. Así, de la primera ecuación del sistema (2.2), se deduce

$$\partial_s(Au) = 0 \Rightarrow Au = Q = \text{const.}$$

Además, de la segunda ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_s (\alpha Au^2) + \frac{A}{\rho} \partial_s (p) &= -\mu Q - gA \sin(\theta(s)) \\
\alpha Au \partial_s u + \frac{A}{\rho} \partial_s p + \mu Q + gA \sin(\theta(s)) &= 0 \\
A \partial_s \left(\frac{\alpha u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \int_{s_0}^s \sin(\theta(s')) ds' \right) + \mu Q &= 0 \\
\partial_s \left(\frac{\alpha u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \int_{s_0}^s \sin(\theta(s')) ds' \right) &= -\mu \frac{Q}{A}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Como $E = \frac{\alpha u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \int_{s_0}^s \sin(\theta(s')) ds'$, se concluye que las soluciones suaves estacionarias del sistema (2.5) están dadas por

$$Q = Au = \text{const.}, \quad \partial_s E = -\mu \frac{Q}{A}. \tag{2.17}$$

Además, si el término de fricción μ es igual a 0, entonces $\partial_s E = 0$ y por lo tanto la energía del sistema, E , es constante.

□

Nótese que de la igualdad $\partial_s E = -\mu \frac{Q}{A}$, se deduce que cuando $\mu > 0$, es decir, cuando se tiene fricción, en los estados estacionarios suaves la energía del sistema está en función de s . Esto implica que va creciendo en aquellos puntos en donde $u < 0$, i.e. donde la velocidad es negativa, y decreciendo en aquellos puntos en donde $u > 0$, cuando se tiene velocidad positiva. Además, estados estacionarios discontinuos se pueden dar si las condiciones iniciales tienen un salto, en cuyo caso los estados estacionarios estarán conectados en los puntos donde se satisfagan las condiciones de Rankine-Hugoniot, las cuales se explican en la próxima sección.

Se dice que un estado estacionario está en reposo si su velocidad axial se anula ($u = 0$). Matemáticamente, de (2.16) se puede ver que cuando $\mu = 0$, el estado estacionario en reposo del sistema satisface:

$$u = 0, \quad G_o(s) \left(\frac{A}{A_o} - 1 \right) + g\rho z(s) = \text{const.} \tag{2.18}$$

16CAPÍTULO 2. EL MODELO MACROSCÓPICO Y SUS PROPIEDADES

En particular, un estado estado estacionario en reposo para arterias horizontales ($\theta = 0$) está dado por las condiciones:

$$u = 0, \quad A = A_o(s). \quad (2.19)$$

Corolario 3. *Supóngase que $\mu > 0$ y $\theta = 0$. Si los parametros A_o y G_o son constantes (independientes de s), entonces las soluciones estacionarias suaves satisfacen*

$$Q = \text{Const.}, \quad \alpha Au^2 + A \frac{G_o}{2\rho} \frac{A}{A_o} + \mu Q s = \text{Const.} \quad (2.20)$$

Demostración. Es posible retomar la prueba de la proposición (2) hasta una de las ecuaciones de donde se deduce (2.16). De ahí, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha Au \partial_s u + \frac{A}{\rho} \partial_s p + \mu Q + gA \sin(\theta(s)) \\ &= -\alpha uu A_s + \frac{A}{\rho} \partial_s p + \mu Q + gA \sin(\theta(s)) \\ &= -\alpha \frac{Q^2}{A^2} A_s + \frac{A}{\rho} \frac{G_o}{A_o} A_s + \mu Q \\ &= \partial_s \left(-\alpha Q^2 \frac{A^{-1}}{-1} + \frac{G_o}{\rho A_o} \frac{A^2}{2} + \mu Q s \right) \\ &= \partial_s \left(\alpha Au^2 + A \frac{G_o}{2\rho} \frac{A}{A_o} + \mu Q s \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Luego, se concluye que en este caso, las soluciones suaves estacionarias satisfacen

$$Q = \text{Const.}, \quad \alpha Au^2 + A \frac{G_o}{2\rho} \frac{A}{A_o} + \mu Q s = \text{Const.} \quad (2.22)$$

□

2.4. Solución al Problema de Riemann

El estudio de una ley de conservación en conjunto con una condición inicial constante a trozos, con una sola discontinuidad, se conoce como problema de Riemann (LeVeque, 1992). Para el caso general, el problema de Riemann asociado a la ley de conservación hiperbólica escalar $u_t + (f(u))_x = 0$, está dado por:

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, & t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_r, & x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

2.4.1. Soluciones débiles a leyes de conservación escalares

En este problema, la forma de las soluciones $u(x, t)$ que son constantes e independientes del tiempo, depende de la relación entre $f'(u_l)$ y $f'(u_r)$.

Caso 1: $f'(u_l) > f'(u_r)$:

En este caso, aplicando el método de las características para el espacio fase xt , se tiene que éstas son de la forma: $x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0$. Luego, por estabilidad, una onda de choque aparece en la solución, pues las curvas características convergen. Existe además una relación entre la velocidad de choque y los estados u_l y u_r , llamada *Condición de salto de Rankine-Hugoniot*: $f(u_l) - f(u_r) = s(u_l - u_r)$, donde s representa la velocidad de choque para pasar de u_l a u_r , i.e., la pendiente de la curva en el espacio fase xt para pasar de u_l a u_r . Se dice que la onda de choque que se propaga a velocidad s satisface la condición de entropía si: $f'(u_l) \geq \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = s \geq f'(u_r)$, lo cual ocurre cuando f es convexa. Para este caso, dicha condición siempre se cumple. Por lo tanto, la solución u en este caso es de la forma:

$$u(x(t), t) = \begin{cases} u_l, & x < st \\ u_r, & x \geq st. \end{cases}$$

Caso 2: $f'(u_l) < f'(u_r)$:

En este caso, la discontinuidad que se propaga en el tiempo no forma una onda de choque, ya que de así hacerlo, no satisficaría la condición de entropía. Siguiendo la idea de “suavizar un poco” la condición inicial (perturbarla), se necesita construir una solución en la zona intermedia $f'(u_l) < \frac{x}{t} < f'(u_r)$, de tal forma que la solución sea constante en cada línea $x/t = \xi$ (donde ξ es constante) de rarefacción. Esto implica que la solución es función de x/t en esa zona: $u(x/t) = \omega(\frac{x}{t})$ para $f'(u_l) < \frac{x}{t} < f'(u_r)$. Luego, sustituyendo en la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} \omega(x/t)_t + f'(\omega(x/t))\omega(x/t)_x &= 0 \\ \frac{-x\omega'(x/t)}{t^2} + \frac{\omega'(x/t)f'(\omega(x/t))}{t} &= 0 \\ -(x/t)\omega'(x/t) + \omega'(x/t)f'(\omega(x/t)) &= 0 \\ f'(\omega(\xi))\omega'(\xi) &= \xi\omega'(\xi). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se supone que $\omega'(\xi) \neq 0$, pues de no ser así la solución sería constante; así

$$f'(\omega(\xi)) = \xi.$$

Ahora, si se supone que f es cóncava o convexa, entonces f' es creciente o decreciente, y por lo tanto es invertible, entonces

$$\omega(\xi) = (f')^{-1}(\xi).$$

Luego, la solución u para este caso queda de la forma:

$$u(x(t), t) = \begin{cases} u_l, & x < f'(u_l)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & f'(u_l)t \leq x < f'(u_r)t \\ u_r, & x \geq f'(u_r)t, \end{cases}$$

en donde se tiene continuidad en la solución ya que $(f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = u_l$ cuando $x = f'(u_l)t$, y de manera similar, $(f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = u_r$ cuando $x = f'(u_r)t$.

2.4.2. Caso 2-D para las arterias

Las soluciones para el sistema (2.5) no siempre se pueden calcular de forma general. Sin embargo, es posible calcular las soluciones para el problema de Riemann utilizando los valores $\alpha = 1$, $G_o = cte$, $\theta = 0$ y $\mu = 0$. Esto elimina los términos fuente del sistema y lo deja en forma de una ley de conservación. Así, el sistema (2.5) queda como:

$$\begin{aligned} \partial_t A + \partial_s(Au) &= 0 \\ \partial_t(Au) + \partial_s\left(Au^2 + \frac{K}{2\rho}A^2\right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Cabe resaltar que el problema de Riemann realmente no tiene un significado físico directo en la hemodinámica de las arterias. Sin embargo, las soluciones exactas a este problema permiten comparar la precisión del esquema expuesto. Los siguientes resultados ya se conocen, pero se explicarán para el caso del sistema trabajado aquí.

Ondas de choque

Para este problema, las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot implicarían que:

$$\begin{aligned} \Delta(Au) &= \tilde{s}\Delta A \\ \Delta\left(Au^2 + \frac{K}{2\rho}A^2\right) &= \tilde{s}\Delta(Au), \end{aligned} \quad (2.25)$$

20CAPÍTULO 2. EL MODELO MACROSCÓPICO Y SUS PROPIEDADES

en donde $\Delta W = W_r - W_l$ implica una diferencia entre dos estados iniciales. Luego, dos estados $W_l = (A_l, A_l u_l)$ y $W_r = (A_r, A_r u_r)$ estarán conectados por una onda de choque si existe \tilde{s} tal que se satisfagan las condiciones (2.25). La pregunta es, entonces, dado un estado inicial W_r , cómo determinar estados W_l que estén conectados con él mediante una onda de choque.

Primero, nótese que $\Delta(Au)$ se puede ver como

$$\Delta(Au) = A_\eta \Delta u + u^\eta \Delta A,$$

donde $q_\eta = \eta q_l + (1 - \eta)q_r$ y $q^\eta = (1 - \eta)q_l + \eta q_r$ denotan promedios ponderados (sumas convexas), para η un parámetro que está entre 0 y 1. A saber,

$$\begin{aligned} A_\eta \Delta u + u^\eta \Delta A &= (\eta A_l + (1 - \eta)A_r)(u_r - u_l) \\ &\quad + ((1 - \eta)u_l + \eta u_r)(A_r - A_l) \\ &= \eta A_l u_r - \eta A_l u_l + A_r u_r - A_r u_l - \eta A_r u_r + \eta A_r u_l \\ &\quad + u_l A_r - u_l A_l - \eta u_l A_r + \eta u_l A_l + \eta u_r A_r - \eta u_r A_l \\ &= A_r u_r - A_l u_l \\ &= \Delta(Au). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Luego, $A_\eta \Delta u + u^\eta \Delta A = \tilde{s} \Delta A$ (por Rankine-Hugoniot). Por otro lado, nótese que

$$\partial_s(Au^2) = \partial_s \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2QQ_s A - Q^2 A_s}{A^2} = 2uQ_s - u^2 A_s. \tag{2.27}$$

Discretizando:

$$\begin{aligned}\Delta(Au^2) &= 2\tilde{u}\Delta(Au) - \tilde{u}^2\Delta A \\ \Rightarrow \Delta A\tilde{u}^2 - 2\Delta(Au)\tilde{u} + \Delta(Au^2) &= 0.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Así,

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{2\Delta(Au) \pm \sqrt{4(\Delta(Au))^2 - 4(\Delta A)\Delta(Au^2)}}{2\Delta A} \\ &= \frac{\Delta(Au) \pm \sqrt{(\Delta(Au))^2 - (\Delta A)\Delta(Au^2)}}{\Delta A}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Pero

$$\begin{aligned}(\Delta(Au))^2 - (\Delta A)\Delta(Au^2) &= (A_r u_r - A_l u_l)^2 - (A_r - A_l)(A_r u_r^2 - A_l u_l^2) \\ &= A_r^2 u_r^2 - 2A_r A_l u_r u_l + A_l^2 u_l^2 \\ &\quad - A_r^2 u_r^2 + A_r A_l u_l^2 + A_l A_r u_r^2 - A_l^2 u_l^2 \\ &= A_r A_l (u_r - u_l)^2.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{\Delta(Au) \pm \sqrt{A_r A_l}(u_r - u_l)}{\Delta A} \\ &= \frac{A_r u_r - A_l u_l \pm \sqrt{A_r A_l}(u_r - u_l)}{A_r - A_l} \\ &= \frac{\sqrt{A_r} u_r (\sqrt{A_r} \pm \sqrt{A_l}) - \sqrt{A_l} u_l (\sqrt{A_l} \pm \sqrt{A_r})}{(\sqrt{A_r} - \sqrt{A_l})(\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l})}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Tomando el signo $-$ (para tener una verdadera aproximación), \tilde{u} queda como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= \frac{\sqrt{A_r}u_r + \sqrt{A_l}u_l}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}} \\
 &= \frac{\sqrt{A_l}}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}u_l + \left(1 - \frac{\sqrt{A_l}}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}\right)u_r \\
 &= u_{\tilde{\eta}},
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\tilde{\eta} = \frac{\sqrt{A_l}}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}$. Luego,

$$\Delta\left(Au^2 + \frac{K}{2\rho}A^2\right) = 2\tilde{u}\Delta(Au) - \tilde{u}^2\Delta A + \frac{K}{\rho}\bar{A}\Delta A = \tilde{s}\Delta(Au), \tag{2.33}$$

en donde $\bar{A} = \frac{A_l + A_r}{2}$, y la segunda igualdad viene de las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot. Pero, también por Rankine-Hugoniot, se tiene que $\Delta(Au) = \tilde{s}\Delta A$, entonces, sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 2\tilde{u}\tilde{s}\Delta A - \tilde{u}^2\Delta A + \frac{K}{\rho}\bar{A}\Delta A &= \tilde{s}^2\Delta A \\
 \Rightarrow \tilde{s}^2 - 2\tilde{u}\tilde{s} + \tilde{u}^2 - \frac{K}{\rho}\bar{A} &= 0 \\
 \Rightarrow (\tilde{s} - \tilde{u})^2 &= \frac{K}{\rho}\bar{A},
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

en donde se ha podido dividir por ΔA ya que si $\Delta A = 0$, entonces $\Delta(Au) = 0$ y por lo tanto se tiene un estado sin saltos, es decir, no podría formarse una onda de choque. Por tanto, $\tilde{s} = \tilde{u} \pm \sqrt{\frac{K}{\rho}\bar{A}}$. Por otro lado, la matriz de coeficientes (2.10) en este caso en particular ($\alpha = 1$), está dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

en donde $c^2 = \frac{K}{\rho}A$, y los eigenvalores del sistema vienen dados por las expresiones (2.13), que en este caso en particular se reducen a $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u + c$. Entonces, nótese que $\tilde{s} = \tilde{u} \pm \sqrt{\frac{K}{\rho}\bar{A}}$ es una aproximación a los eigenvalores del sistema, ya que \tilde{u} es una aproximación de u y $\sqrt{\frac{K}{\rho}\bar{A}}$ es una aproximación de c . Así, cada posible valor para la velocidad de la onda de choque \tilde{s} , se corresponde con un eigenvalor. Entonces, se tiene a una primera familia para las ondas de choque (por la izquierda), asociadas a la condición de Rankine-Hugoniot que a su vez está asociada al eigenvalor λ_1 , y a una segunda familia para las ondas de choque (por la derecha), asociadas a la condición de Rankine-Hugoniot que a su vez está asociada al eigenvalor λ_2 .

Ahora, nótese que, en particular, para $\tilde{\eta} = \frac{\sqrt{A_l}}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}$,

$$\begin{aligned}
 \Delta(Au) &= A_{\tilde{\eta}}\Delta u + u^{\tilde{\eta}}\Delta A \\
 &= (\tilde{\eta}A_l + (1 - \tilde{\eta})A_r)(u_r - u_l) \\
 &\quad + ((1 - \tilde{\eta})u_l + \tilde{\eta}u_r)(A_r - A_l) \\
 &= ((1 - \tilde{\eta})A_l + \tilde{\eta}A_r)(u_r - u_l) \\
 &\quad + (\tilde{\eta}u_l + (1 - \tilde{\eta})u_r)(A_r - A_l) \\
 &= A^{\tilde{\eta}}\Delta u + u_{\tilde{\eta}}\Delta A,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

en donde la tercera igualdad se sigue del hecho de que la igualdad $\Delta(Au) = A_{\tilde{\eta}}\Delta u + u^{\tilde{\eta}}\Delta A$ se satisface $\forall \tilde{\eta} \in (0, 1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 1 - \tilde{\eta} &= \frac{\sqrt{A_r}}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}, u_{\tilde{\eta}} = \frac{\sqrt{A_l}u_l + \sqrt{A_r}u_r}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}}, \\
 A^{\tilde{\eta}} &= \frac{\sqrt{A_r}A_l + \sqrt{A_l}A_r}{\sqrt{A_r} + \sqrt{A_l}} = \sqrt{A_lA_r}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \Delta(Au) &= \tilde{u}\Delta A + \sqrt{A_l A_r} \Delta u \\
 \Rightarrow \tilde{s}\Delta A &= \tilde{u}\Delta A + \sqrt{A_l A_r} \Delta u \\
 \Rightarrow \sqrt{A_l A_r} \Delta u &= \tilde{s}\Delta A - \tilde{u}\Delta A \\
 &= (\tilde{s} - \tilde{u})\Delta A \\
 &= \pm \sqrt{\frac{K}{\rho}} \bar{A} \Delta A \\
 \Rightarrow \Delta u &= \pm \frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}} \bar{A}}{\sqrt{A_l A_r}} \Delta A.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Entonces, dado un estado inicial $(A_r, A_r u_r)$, solamente se necesita especificar A_l para así poder calcular \bar{A} , $\sqrt{A_l A_r}$, ΔA , y con esta información obtener Δu con la expresión que se obtuvo en (2.38). Una vez obtenido Δu , dado que ya se tiene u_r , es posible despejar para encontrar u_l , y de esta forma ya se encontró un estado $(A_l, A_l u_l)$ que se conecta con el estado inicial $(A_r, A_r u_r)$ mediante una onda de choque.

Además, para que la onda de choque sea estable, se necesita asimismo la convergencia de las curvas características para ese eigenvalor, ya sea la primera o la segunda familia. Por tanto, para que las curvas características converjan, se requiere que $u_l \pm c_l > u_r \pm c_r$, es decir, que el eigenvalor en el estado de la izquierda (que es la velocidad de las curvas características en ese estado), sea mayor al eigenvalor en el estado de la derecha; de esta forma, las curvas características a la izquierda de la onda de choque “alcanzan.^a las curvas características de la derecha.

También, mediante manipulaciones algebraicas se puede ver que en este caso, es necesario para que las condiciones de entropía se satisfagan, las siguientes condiciones:

$$A_l < A_r, \text{ para la primera familia } (\lambda_1), \quad (2.39)$$

$$A_l > A_r, \text{ para la segunda familia } (\lambda_2).$$

De esta forma, a modo de resumen, dado un estado inicial $(A_r, A_r u_r)$, solamente se necesita especificar A_l utilizando las desigualdades (2.39), dependiendo de si se quiere generar una onda de choque para la primera familia (a la izquierda) o para la segunda (a la derecha). Una vez hecho esto, se calcula Δu con la expresión que se obtuvo en (2.38), en donde se utilizará el signo $-$ para una onda de choque de la primera familia, o el signo $+$ para una onda de choque de la segunda familia. Se despeja u_l de Δu , y de esta forma se obtiene un estado $(A_l, A_l u_l)$ que se conecta con el estado inicial $(A_r, A_r u_r)$ mediante una onda de choque. Además, la velocidad de dicha onda de choque está dada por $\tilde{s} = \tilde{u} \pm \sqrt{\frac{K}{\rho} \bar{A}}$, en donde el signo va a depender de si se está tratando con una onda de choque para la primera familia (a la izquierda, se utiliza el signo $-$), o con la segunda (a la derecha, se utiliza el signo $+$).

Ondas de rarefacción

Nuevamente en este caso, se tiene el propósito de, dado un estado inicial $W_r = (A_r, A_r u_r)$, construir un estado inicial $W_l = (A_l, A_l u_l)$ conectado con W_r mediante una onda de rarefacción, y calcular la solución en esa zona. Al igual que con el caso unidimensional de rarefacción, para este problema se supondrá que la solución $W = \begin{pmatrix} A \\ Au \end{pmatrix}$ es una función de $\frac{s}{t} = \xi$ sobre la zona de rarefacción, i.e., $W = \vec{\omega}(\frac{s}{t}) = \vec{\omega}(\xi)$. En general, se está resolviendo el sistema

$$\partial_t W + \partial_s(F(W)) = 0. \quad (2.40)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\partial_t W &= \bar{\omega}'(\xi) \left(-\frac{s}{t^2}\right), \\ \partial_s(F(W)) &= M(W)\bar{\omega}'(\xi) \left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}\tag{2.41}$$

Sumando las dos igualdades anteriores y utilizando (2.40), se llega a

$$M(W)\bar{\omega}'(\xi) = \left(\frac{s}{t}\right)\bar{\omega}'(\xi) = \xi\bar{\omega}'(\xi).\tag{2.42}$$

Por lo tanto,

$$M(\bar{\omega}'(\xi))\bar{\omega}'(\xi) = \xi\bar{\omega}'(\xi),$$

de donde se concluye que ξ es eigenvalor de $M(W)$, y $\bar{\omega}'(\xi)$ es eigenvector de $M(W)$. Luego, $\xi = u(\xi) \pm c(\xi)$, y, denotando $\bar{\omega}'(\xi) = \begin{pmatrix} \delta(A) \\ \delta(Au) \end{pmatrix}$, se tiene que $\bar{\omega}'(\xi) = \begin{pmatrix} \delta(A) \\ \delta(Au) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ u(\xi) \pm c(\xi) \end{pmatrix}$, donde \sim significa que los vectores son proporcionales. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(Au)}{\delta(A)} &= \frac{u(\xi) \pm c(\xi)}{1} \\
\Rightarrow \delta(Au) &= (u(\xi) \pm c(\xi))\delta(A) \\
\Rightarrow u\delta(A) + A\delta(u) &= u\delta(A) \pm c\delta(A) \\
\Rightarrow \delta(u) &= \pm \frac{c}{A}\delta(A) \\
\Rightarrow \delta(u) &= \pm \sqrt{\frac{K}{\rho}} A^{(-\frac{1}{2})} \delta(A) \\
&= \pm \sqrt{\frac{K}{\rho}} \delta\left(\frac{A^{(-\frac{1}{2})}}{1/2}\right) \\
&= \pm \delta\left(2\sqrt{\frac{K}{\rho}} A\right) \\
&= \pm \delta(2c) \\
\Rightarrow \delta(u \mp 2c) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por lo tanto, para la primera familia ($\lambda_1 = u - c$), $u + 2c$ es invariante, y para la segunda familia ($\lambda_2 = u + c$), $u - 2c$ es invariante. Además, mediante manipulaciones algebraicas, se puede ver que en este caso se necesita para la estabilidad que:

$$\begin{aligned}
A_l &> A_r, \text{ para la primera familia } (\lambda_1), \\
A_l &< A_r, \text{ para la segunda familia } (\lambda_2).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Así, el procedimiento para encontrar un estado W_l conectado con W_r mediante una onda de rarefacción sería el siguiente: dados $(A_r, A_r u_r)$, se puede especificar A_l de tal forma que se satisfagan las desigualdades (2.44) dependiendo de para qué familia se está encontrando una onda de rarefacción.

28CAPÍTULO 2. EL MODELO MACROSCÓPICO Y SUS PROPIEDADES

Posteriormente, se obtiene c_l mediante el cálculo $c_l = \sqrt{\frac{K}{\rho}} A_l$, y se utiliza la invariante encontrada $u + 2c$ o $u - 2c$ según sea el caso, para calcular u_l como sigue:

$$\begin{aligned} u_l + 2c_l &= u_r + 2c_r, \text{ para la primera familia } (\lambda_1), \\ u_l - 2c_l &= u_r - 2c_r, \text{ para la segunda familia } (\lambda_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

En donde ha sido posible usar la invariante en la frontera de la zona de rarefacción por continuidad. Con esto, ya se tiene una técnica para encontrar estados W_l conectados mediante una onda de rarefacción a un estado inicial W_r dado. Ahora, la interrogante es, qué sucede dentro de la onda de rarefacción, es decir, cuál es la solución en esa zona. Para encontrarla, primero se usan las invariantes $u + 2c$ y $u - 2c$ dentro de esta zona según sea el caso para cada familia, obteniéndose así la ecuación $u(\xi) \mp 2c(\xi) = u_r \mp 2c_r$. Además, recuérdese que $\xi = u(\xi) \pm c(\xi) \Rightarrow -\xi = -u(\xi) \mp c(\xi)$. Así,

$$\begin{aligned} \mp 3c(\xi) &= -\xi + u_r \mp 2c_r \\ \Rightarrow c(\xi) &= \mp \frac{1}{3}(-\xi + u_r \mp 2c_r) \\ &= \pm \frac{1}{3}(\xi - u_r \pm 2c_r). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Y, por otro lado, $c(\xi) = \sqrt{\frac{K}{\rho}} A(\xi)$. Igualando y despejando $A(\xi)$, se tiene:

$$A(\xi) = \frac{\rho}{K} \frac{1}{9} (\xi - u_r \pm 2c_r)^2, \quad (2.47)$$

es el valor de $A(\xi)$ para $\xi_l \leq \xi \leq \xi_r$, donde $\xi_l = u_l \pm c_l$, $\xi_r = u_r \pm c_r$. Para obtener $u(\xi)$, se hace uso de:

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \xi \mp c(\xi) = \xi + \frac{1}{3}(-\xi + u_r \mp 2c_r) \\
 &= \frac{2}{3}\xi + \frac{1}{3}(u_r \mp 2c_r).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

∴ La solución de rarefacción para las familias $\lambda_{1,2} = u \pm c$, es:

$$A(s, t) = \begin{cases} A_l & \text{si } s/t \leq \xi_l = (u_l \pm c_l), \\ \frac{\rho}{K} \frac{1}{9} \left(\frac{s}{t} - u_r \pm 2c_r \right)^2 & \text{si } \xi_l \leq s/t \leq \xi_r, \\ A_r & \text{si } s/t \geq \xi_r = (u_r \pm c_r), \end{cases}$$

$$u(s, t) = \begin{cases} u_l & \text{si } s/t \leq \xi_l = (u_l \pm c_l), \\ \frac{2}{3} \frac{s}{t} + \frac{1}{3}(u_r \mp 2c_r) & \text{si } \xi_l \leq s/t \leq \xi_r, \\ u_r & \text{si } s/t \geq \xi_r = (u_r \pm c_r). \end{cases}$$

Se debe notar que, dados cualesquiera estados iniciales W_l y W_r , la solución al problema de Riemann consiste en dos ondas propagándose, con una región asterisco (A^*, A^*u^*) conectando ambas ondas. En el caso de una onda por la izquierda, (A_r, A_ru_r) es reemplazado por (A^*, A^*u^*) , mientras que en el caso de una onda por la derecha, (A_l, A_lu_l) es reemplazado por (A^*, A^*u^*) .

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Capítulo 3

Formulación microscópica del modelo

En la presente sección se hará uso del modelo macroscópico descrito en la sección anterior, y se construirá además una ecuación cinética (formulación microscópica). Ésta estará basada en el trabajo de (Perthame y Simeoni, 2001), en donde se aplicó el esquema cinético al problema del modelamiento del flujo de agua en ríos con un término fuente. Esto permitirá agregar al modelo macroscópico los movimientos a nivel microscópico.

Asimismo, se procederá a construir un método numérico que sirva para adaptar el esquema cinético al modelo del flujo sanguíneo, para después aplicarse al modelo macroscópico y obtener simulaciones numéricas. En éstas, se analizarán la estabilidad, precisión y consistencia del método numérico. Para la resolución propia del esquema, se hará uso del software MATLAB, realizando el código del esquema numérico en dicho software.

Hablando de la formulación microscópica, se debe definir una densidad de la distribución de partículas $M(s, t, \xi)$ en el espacio fase (s, ξ) . Se supondrá que existe equilibrio de Gibbs. Es decir, la densidad está dada por

$$M(s, t, \xi) = M(A, \xi - u) = \sqrt{A(s, t)} \chi \left(\frac{\xi - u(s, t)}{\sqrt{A(s, t)}} \right),$$

donde ξ representa la variable de momento. Siguiendo (Perthame y Simeoni, 2001), se define a χ como

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{K}{2\rho\alpha}}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{\frac{K}{2\rho\alpha}} \right)_+^{\frac{1}{2}},$$

la cual satisface

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = \frac{K}{2\rho\alpha}.$$

Las variables (A, Au) se conocen como las variables macroscópicas, mientras que la densidad de partículas M es la microscópica. Se puede demostrar que las relaciones entre las cantidades microscópicas y macroscópicas están dadas por

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} M(A, \xi - u) d\xi, \\ Au &= \int_{\mathbb{R}} \xi M(A, \xi - u) d\xi, \\ Au^2 + \frac{K}{2\rho\alpha} A^2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 M(A, \xi - u) d\xi. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que la ecuación cinética se escribe como

$$\begin{aligned} \partial_t M + \xi \cdot \partial_s M - (\alpha - 1) \cdot \partial_s \partial_\xi (M \xi^2) \\ - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} - \mu \cdot \partial_\xi (M \xi) = C(s, t, \xi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $C(s, t, \xi)$ es un término de colisión que satisface que para casi todo (s, t) ,

$$\int_{\mathbb{R}} C d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi C d\xi = 0. \quad (3.2)$$

Este término de colisión se ignora en cada paso de tiempo, después del cual se vuelve a equilibrio de Gibbs.

Es posible verificar que la ecuación cinética es correcta al integrar en el espacio fase (s, ξ) y obtener como resultado las ecuaciones de movimiento a nivel macroscópico en su forma conservativa. Para la ecuación de la conservación de masa, es necesario integrar la ecuación cinética respecto a ξ para recuperarla, y en cuanto a la de balance de momento, se recupera multiplicando la ecuación cinética por ξ e integrando posteriormente respecto a ξ . Un hecho fundamental para que sea posible recuperar las ecuaciones a nivel macroscópico integrando la ecuación cinética, es que la función $M(s, t, \xi)$, al ser una distribución de velocidades de las partículas en el espacio fase (s, ξ) , se anula en ∞ y $-\infty$.

3.1. Derivación de la ecuación del modelo cinético

La idea detrás del esquema cinético es considerar una formulación microscópica del modelo, que permita tomar en consideración los movimientos a nivel microscópico de las partículas. En (Perthame y Simeoni, 2001), se construye una formulación microscópica de las ecuaciones de Saint-Venant (un caso particular de las ecuaciones de aguas someras), utilizadas para modelar el flujo de agua en ríos rectangulares ideales con un término fuente.

Tomando como base entonces a (Perthame y Simeoni, 2001), en este trabajo se realizó una formulación microscópica del modelo macroscópico (2.5). A continuación se muestra una derivación de la ecuación cinética a la cual se llegó (3.1).

Para considerar los efectos del movimiento de las partículas a nivel microscópico, una primera idea es construir una ecuación, la ecuación cinética, tal que al momento de integrarla con respecto a la variable de momento ξ sobre todo el dominio, se recuperen las ecuaciones macroscópicas. Nótese que pensar en integrar la ecuación cinética tiene sentido, pues integrar sobre todo el dominio se puede entender como el efecto de considerar la suma de todas las velocidades de las partículas a nivel microscópico. En concreto, sería útil que al momento de integrar la ecuación cinética respecto a ξ , se recuperara la primera ecuación del modelo macroscópico (2.5), es decir, la conservación de masa, y que al multiplicar por ξ la ecuación cinética e integrar posteriormente respecto a ξ , se obtuviera la segunda ecuación, o

sea, la ecuación del balance de momento.

Recuérdese ahora que las relaciones entre las cantidades microscópicas (M) y macroscópicas (A, Au), obtenidas del equilibrio microscópico, están dadas por

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} M(A, \xi - u) d\xi, \\ Au &= \int_{\mathbb{R}} \xi M(A, \xi - u) d\xi, \\ Au^2 + \frac{K}{2\rho\alpha} A^2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 M(A, \xi - u) d\xi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Siguiendo a [\(Perthame y Simeoni, 2001\)](#), una primera versión de la ecuación cinética para el modelo presentado es:

$$\partial_t M + \xi \cdot \partial_s M - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_\sigma(s)}{\rho} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} - \mu \partial_\xi (\xi M) = C(s, t, \xi), \quad (3.4)$$

donde $C(s, t, \xi)$ es un término de colisión que satisface que para casi todo (s, t) ,

$$\int_{\mathbb{R}} C d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi C d\xi = 0.$$

Este término de colisión se ignora en cada paso de tiempo, después del cual se vuelve a equilibrio de Gibbs.

Nótese que si se integra [\(3.4\)](#) respecto a ξ , se recupera la ecuación de conservación de masa. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t M d\xi = \partial_t \int_{\mathbb{R}} M d\xi = \partial_t A, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_s M d\xi = \partial_s \int_{\mathbb{R}} \xi M d\xi = \partial_s (Au).$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} d\xi &= - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial M}{\partial \xi} d\xi \\
&= - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) M \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0, \\
\int_{\mathbb{R}} -\mu \partial_{\xi}(\xi M) d\xi &= -\mu \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi}(\xi M) d\xi \\
&= -\mu(\xi M \Big|_{-\infty}^{\infty}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y al integrar el lado derecho de la ecuación, éste se anula por las propiedades del término de colisión $C(s, t, \xi)$ mencionadas en (3.2). Análogamente, si se analiza el caso $\alpha = 1$, al multiplicar la ecuación (3.4) por ξ e integrar respecto a ξ , se obtiene la ecuación del balance de momento, es decir, la segunda ecuación del modelo macroscópico.

Obsérvese que los cálculos anteriores son puramente consecuencia de las relaciones (3.3), y de que la función $M(s, t, \xi)$, al ser una distribución de velocidades de las partículas en el espacio fase (s, ξ) , se anula en ∞ y $-\infty$.

Sin embargo, sería conveniente generalizar el valor de α a un valor mayor o igual a uno, en vez de un valor idénticamente uno. De esa forma, se estaría considerando una posible variabilidad en la distribución de la velocidad de las partículas en cada sección transversal. Esto es algo que no se realiza en (Perthame y Simeoni, 2001), pues en las ecuaciones de Saint-Venant el valor de α se considera igual a 1, i.e., se estima que no hay variabilidad en las velocidades de las partículas en cada sección transversal del río.

Nótese que para lograr recuperar el coeficiente α presente en la segunda ecuación de (2.5), el término de interés en la ecuación cinética (3.4) es $\xi \cdot \partial_s M$, pues es de ese término de donde se recupera el término $\partial_s(Au^2)$ en el caso $\alpha = 1$. Luego, se intentará sumar otro término al término de interés para lograr recuperar el coeficiente α en la ecuación de balance de

momento. Obsérvese que como $M(s, t, \xi)$ se anula en ∞ y $-\infty$, entonces $H = k \cdot M$ donde k es una función de ξ , también se anulará en ∞ y $-\infty$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi}(H) d\xi = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_{\xi}(H) d\xi = 0 - \int_{\mathbb{R}} H d\xi.$$

De esta forma, sumando $\partial_{\xi}H$ al término de interés $\xi \cdot \partial_s M$, se mantiene la ecuación de conservación de masa. Por tanto, para lograr recuperar el coeficiente α del término $\partial_s(\alpha Au^2)$ presente en la ecuación de balance de momento, sería beneficioso que $-\int_{\mathbb{R}} H d\xi$ fuera igual a $\partial_s((\alpha - 1)Au^2)$, pues ya se tiene un término $\partial_s(Au)$ que se recupera del término $\xi \cdot \partial_s M$. Esto último motiva a considerar $k = \xi^2 \beta$, con β constante, un coeficiente de ajuste que se calculará después. Además, como el término $\partial_s(\alpha Au^2)$ en la ecuación de balance de momento involucra una derivada con respecto a s , esto sugiere considerar $\partial_s \partial_{\xi} H$ en lugar de sólo $\partial_{\xi} H$.

Así, el nuevo término de interés es $\xi \cdot \partial_s M - \partial_s \partial_{\xi}(\xi^2 M \beta) = T$, con las relaciones

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} M(A, \xi - u) d\xi &= A, \\ \int_{\mathbb{R}} \xi M(A, \xi - u) d\xi &= Au, \\ \int_{\mathbb{R}} \xi^2 M(A, \xi - u) d\xi &= Au^2 + \Gamma A^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

con los coeficientes Γ y β por determinar. De esta forma,

$$\int_{\mathbb{R}} T d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_s(M) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \partial_s \partial_{\xi}(\xi^2 M \beta) d\xi = \partial_s(Au) - 0 = \partial_s(Au),$$

por lo que se mantiene la ecuación de conservación de masa. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \xi T d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \partial_s(M) d\xi - \partial_s \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_\xi (\xi^2 M \beta) d\xi \\
&= \partial_s (A u^2 + \Gamma A^2) - \partial_s (0 - \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 M \beta) d\xi) \\
&= \partial_s (A u^2 + \Gamma A^2 + \beta (A u^2 + \Gamma A^2)) \\
&= \partial_s ((1 + \beta) A u^2 + \Gamma (1 + \beta) A^2),
\end{aligned}$$

comparando coeficientes con el término que se quiere obtener, es decir, $\partial_s \left(\alpha A u^2 + \frac{K}{2\rho} A^2 \right)$, se tiene que $1 + \beta = \alpha \Rightarrow \beta = \alpha - 1$, de donde $\Gamma(1 + \beta) = \Gamma\alpha = \frac{K}{2\rho} \Rightarrow \Gamma = \frac{K}{2\rho\alpha}$. Luego, sustituyendo el término $\xi \cdot \partial_s M$ de la ecuación (3.4) por el término $\xi \cdot \partial_s M - \partial_s \partial_\xi (\xi^2 M (\alpha - 1))$, es posible generalizar el modelo macroscópico para un valor de $\alpha \geq 1$. Así, la ecuación cinética para el modelo de interés queda como:

$$\begin{aligned}
\partial_t M + \xi \cdot \partial_s M - (\alpha - 1) \cdot \partial_s \partial_\xi (M \xi^2) \\
- \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} - \mu \cdot \partial_\xi (M \xi) = C(s, t, \xi).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2. Estados estacionarios a nivel microscópico

En esta sección se dará una demostración de que la formulación microscópica reconoce estados estacionarios del modelo macroscópico, como los que se analizaron en el capítulo anterior. Durante esta sección, se restringirá el estudio al caso especial $\alpha = 1$ y $\mu = 0$.

Primero, considérese la ecuación (3.6) en ausencia del término de Coriolis y del término de fricción. Se tiene entonces la ecuación cinética:

$$\partial_t M + \xi \cdot \partial_s M - \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) \frac{\partial M}{\partial \xi} = C(s, t, \xi), \tag{3.7}$$

en donde se ignora el término $C(s, t, \xi)$ en cada paso en el tiempo del método numérico, por el equilibrio de Gibbs. Nótese entonces que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\partial_t M + \left\{ M, \frac{1}{2}\xi^2 + \int \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) ds \right\} = 0, \quad (3.8)$$

en donde $\{f, g\}$ denota el paréntesis de Poisson de f y g , y está dado por: $\{f, g\} = \partial_s f \partial_\xi g - \partial_\xi f \partial_s g$. A la cantidad $\frac{1}{2}\xi^2 + \int \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) ds$ se le conoce como la energía, E , del sistema, y está formada por la suma de la energía cinética y la energía potencial. Entonces, se tiene que

$$\partial_t M + \{M, E\} = 0. \quad (3.9)$$

Para que la formulación microscópica reconozca estados estacionarios, sería útil que $\partial_t M = 0$, es decir, que la densidad de partículas $M(s, t, \xi)$ no cambie con el tiempo. Luego, se busca que el paréntesis de Poisson entre M y E se anule. Para esto se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4. *El paréntesis de Poisson $\{M, E\}$ se anula si $M = M(E)$, i.e., M es función de E .*

Demostración.

$$\begin{aligned} \{M, E\} &= \partial_s M \partial_\xi E - \partial_\xi M \partial_s E \\ &= M'(E) \partial_s E \partial_\xi E - M'(E) \partial_\xi E \partial_s E \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

□

Ahora, se verá que M es función de E en presencia de un estado estacionario en reposo.

Proposición 5. Si $u = 0$ y $A = A_o(s)$, es decir, u y A están dados por las condiciones de un estado estacionario en reposo para arterias horizontales (y por tanto, $\theta = 0$), entonces M es función de E .

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 M &= \sqrt{A_o} \chi \left(\frac{\xi}{\sqrt{A_o}} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{K}{2\rho}}} \sqrt{A_o} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{A_o}} \right)^2 \right)_+^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{K}{2\rho}}} \left(A_o - \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \xi^2 \right)_+^{\frac{1}{2}} \\
 &= M \left(A_o - \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \xi^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\xi^2 + \int \left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho} \right) ds \\
&= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{G_o(s)}{\rho} + E_o \\
&= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{K}{\rho}A_o + E_o \\
&= \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \frac{K}{2\rho} \right) \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{K}{\rho}A_o + E_o \quad (3.12) \\
&= \frac{K}{\rho} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \xi^2 - A_o \right) + E_o \\
&= -\frac{K}{\rho} \left(A_o - \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{K}{2\rho}} \xi^2 \right) + E_o.
\end{aligned}$$

Tomando $E_o = 0$, se concluye que M es función de E .

□

Así, la formulación microscópica respeta el balance de los estados estacionarios en reposo del modelo macroscópico en arterias horizontales.

Capítulo 4

Método numérico: esquema cinético

En este capítulo se discutirá la obtención de un método numérico con formulación microscópica, junto con su código, para su aplicación en el modelo del flujo sanguíneo en arterias. Este trabajo servirá además como la primera referencia que hace uso de un esquema cinético para estudiar el movimiento del flujo sanguíneo en arterias, algo que por sí mismo resulta de gran valor.

4.1. Método Lax-Wendroff en 1D

Los métodos de diferencias finitas son útiles para producir aproximaciones $U_j^n \in \mathbb{R}^m$ a la solución $u(x_j, t_n)$ evaluada en una malla discreta de una ecuación diferencial (LeVeque, 1992). Existen una gran cantidad de estos métodos, los cuales se pueden clasificar en métodos explícitos y métodos implícitos, métodos de un paso y métodos multi-paso, métodos de primer orden, de segundo orden, de tercer orden, etc. Para el modelo presentado, el método que resulta de mayor ayuda será el así llamado método de Lax-Wendroff, del cual se utilizará una variante, el método *upwind* de alta resolución, que permitirá escapar de oscilaciones cerca de discontinuidades durante simulaciones numéricas. En esta primera sección se analizará la construcción y propiedades del método de Lax-Wendroff en una dimen-

sión, para posteriormente pasar al análisis del método en dos dimensiones en la próxima sección, el cual será el que será útil en las simulaciones.

El método de Lax-Wendroff está basado en la expansión por series de Taylor de la solución $u(x, t)$ de la ecuación de advección $u_t + au_x = 0$ en el punto $(x, t + k)$:

$$u(x, t + k) = u(x, t) + k\partial_t u(x, t) + \frac{1}{2}k^2\partial_t^2 u(x, t) + \dots \quad (4.1)$$

ahora, observando que de la ecuación de advección se tiene que $u_t = -au_x$, entonces

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -au_{xt} \\ &= -au_{tx} \\ &= -a(-au_x)_x \\ &= a^2u_{xx}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

por lo que (4.1) se transforma en

$$u(x, t + k) = u(x, t) - ka\partial_x u(x, t) + \frac{1}{2}k^2a^2\partial_x^2 u(x, t) + \dots \quad (4.3)$$

El método de Lax-Wendroff en una dimensión resulta de considerar sólo los primeros tres términos de la ecuación anterior y de utilizar diferencias finitas centradas para las derivadas que aparecen en ellos:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n), \quad (4.4)$$

donde $\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$. Se puede demostrar que este método tiene un error de truncamiento τ^n de segundo orden en el tiempo y en el espacio, a saber:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2} a^2 \Delta t \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (4.5)$$

Reemplazando cada U_j^n por la solución exacta correspondiente en ese punto, y expandiendo por Serie de Taylor, se sigue que τ^n es igual a:

$$\begin{aligned} \tau^n &= \frac{1}{\Delta t} \left[u(x_j, t_n) + \Delta t u_t(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_j, t_n) \dots - u(x_j, t_n) \right] \\ &+ \frac{a}{2\Delta x} \left[u(x_j, t_n) + \Delta x u_x(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n) + \dots \right. \\ &\quad \left. - u(x_j, t_n) + \Delta x u_x(x_j, t_n) - \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n) + \dots \right] \\ &- \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} \left[u(x_j, t_n) - \Delta x u_x(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n) - \dots \right. \\ &\quad \left. - 2u(x_j, t_n) + u(x_j, t_n) + \Delta x u_x(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x_j, t_n) + \dots \right] \\ &= u_t(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) \\ &\quad + a u_x(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \\ &\quad - \frac{a^2 \Delta t}{2} u_{xx}(x_j, t_n) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (u_{tt}(x_j, t_n) - a^2 u_{xx}(x_j, t_n)) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) + O(\Delta x^2) \\ &= O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para ver la estabilidad del método, se considerarán soluciones exponenciales, periódicas en x : $U_j^n = \lambda^n e^{ikx_j}$, donde k es el número de onda. Luego,

$$\begin{aligned}\lambda^{n+1}e^{ikx_j} &= \lambda^n e^{ikx_j} - \frac{\nu}{2}(\lambda^n e^{ikx_{j+1}} - \lambda^n e^{ikx_{j-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\nu^2(\lambda^n e^{ikx_{j-1}} - 2\lambda^n e^{ikx_j} + \lambda^n e^{ikx_{j+1}}),\end{aligned}\tag{4.7}$$

dividiendo entre $\lambda^n e^{ikx_j}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - \frac{\nu}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) + \frac{1}{2}\nu^2(e^{-ik\Delta x} - 2 + e^{ik\Delta x}) \\ &= 1 - \frac{\nu}{2}(2i \sin(k\Delta x)) + \frac{1}{2}\nu^2(2 \cos(k\Delta x) - 2) \\ &= 1 - \nu^2(1 - \cos(k\Delta x)) - i\nu \sin(k\Delta x),\end{aligned}\tag{4.8}$$

entonces, dado que $\|U_j^n\| = \|\lambda\|^n$, para garantizar estabilidad es preciso saber cuándo $\|\lambda\| \leq 1$, de tal suerte que la norma de la solución aproximada no explote con el tiempo. Equivalentemente, se puede calcular cuándo $\|\lambda\|^2 \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\|\lambda\|^2 - 1 &= [(1 - \nu^2(1 - \cos(k\Delta x)))^2 + \nu^2 \sin^2(k\Delta x)] - 1 \\ &= 4\nu^2(\nu^2 - 1) \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Nótese que la expresión anterior es negativa o igual a cero si y sólo si $\nu^2 \leq 1$, i.e., si y sólo si $|\nu| \leq 1$. Por lo tanto, el método de Lax-Wendroff en una dimensión es estable si $|\nu| \leq 1$.

4.2. Método Lax-Wendroff en 2D

Se derivará ahora el método de Lax-Wendroff en dos dimensiones, de la misma forma que se derivó el de una dimensión. Se tiene entonces la ecuación

de advección en dos dimensiones $u_t + au_x + bu_y = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= \partial_t(-au_x - bu_y) \\
 &= -a\partial_x u_t - b\partial_y u_t \\
 &= -a\partial_x(-au_x - bu_y) - b\partial_y(-au_x - bu_y) \\
 &= a^2 u_{xx} + 2abu_{xy} + b^2 u_{yy}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Haciendo $k = \Delta t$, $h_x = \Delta x$, $h_y = \Delta y$ en la expansión de la solución $u(x, y, t + \Delta t)$ en serie de Taylor alrededor del punto (x, y, t) , se sigue que:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t + k) &= u(x, y, t) + ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} + O(k^3) \\
 &= u(x, y, t) + k(-au_x - bu_y) \\
 &\quad + \frac{k^2}{2}(a^2 u_{xx} + 2abu_{xy} + b^2 u_{yy}) + O(k^3).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Entonces, en base a la expansión anterior, utilizando diferencias finitas de segundo orden para aproximar las derivadas, se tiene:

$$\begin{aligned}
 U_{j,k}^{n+1} &= U_{j,k}^n - \frac{ak}{2h_x}(U_{j+1,k}^n - U_{j-1,k}^n) - \frac{bk}{2h_y}(U_{j,k+1}^n - U_{j,k-1}^n) \\
 &\quad + \frac{a^2 k^2}{2h_x^2}(U_{j+1,k}^n - 2U_{j,k}^n + U_{j-1,k}^n) \\
 &\quad + \frac{abk^2}{4h_x h_y}(U_{j+1,k+1}^n - U_{j-1,k+1}^n - U_{j+1,k-1}^n + U_{j-1,k-1}^n) \\
 &\quad + \frac{b^2 k^2}{2h_y^2}(U_{j,k+1}^n - 2U_{j,k}^n + U_{j,k-1}^n).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Luego, si $\nu_x = \frac{ak}{h_x}$, $\nu_y = \frac{bk}{h_y}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 U_{j,k}^{n+1} &= U_{j,k}^n - \frac{\nu_x}{2}(U_{j+1,k}^n - U_{j-1,k}^n) - \frac{\nu_y}{2}(U_{j,k+1}^n - U_{j,k-1}^n) \\
 &\quad + \frac{\nu_x^2}{2}(U_{j+1,k}^n - 2U_{j,k}^n + U_{j-1,k}^n) \\
 &\quad + \frac{\nu_y^2}{2}(U_{j,k+1}^n - 2U_{j,k}^n + U_{j,k-1}^n) \\
 &\quad + \frac{\nu_x \nu_y}{4}(U_{j+1,k+1}^n - U_{j-1,k+1}^n - U_{j+1,k-1}^n + U_{j-1,k-1}^n).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para ver la estabilidad del método, se considerarán nuevamente soluciones exponenciales, periódicas en x y y : $U_{j,k}^n = \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k}$, donde k_x y k_y son los números de onda. Luego,

$$\begin{aligned}
 \lambda^{n+1} e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} &= \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} - \frac{\nu_x}{2} \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} (e^{ik_x h_x} - e^{-ik_x h_x}) \\
 &\quad - \frac{\nu_y}{2} \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} (e^{ik_y h_y} - e^{-ik_y h_y}) \\
 &\quad + \frac{\nu_x^2}{2} \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} (e^{ik_x h_x} - 2 + e^{-ik_x h_x}) \\
 &\quad + \frac{\nu_y^2}{2} \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} (e^{ik_y h_y} - 2 + e^{-ik_y h_y}) \\
 &\quad + \frac{\nu_x \nu_y}{4} \lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k} (e^{ik_x h_x} e^{ik_y h_y} - e^{-ik_x h_x} e^{ik_y h_y} \\
 &\quad - e^{ik_x h_x} e^{-ik_y h_y} + e^{-ik_x h_x} e^{-ik_y h_y}).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

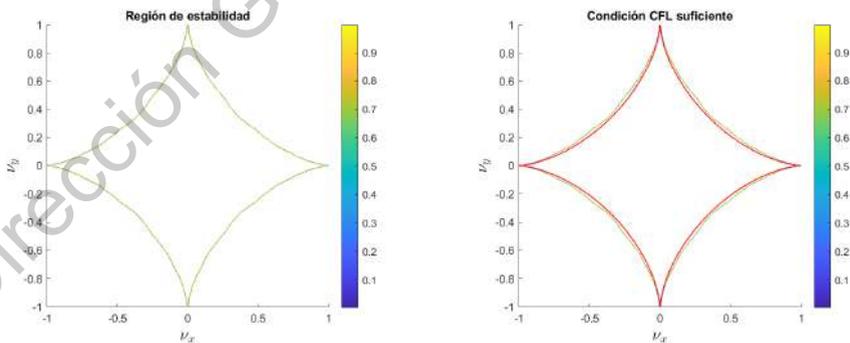
Dividiendo entre $\lambda^n e^{ik_x x_j} e^{ik_y y_k}$,

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1 - \frac{\nu_x}{2} 2i \sin(k_x h_x) - \frac{\nu_y}{2} 2i \sin(k_y h_y) \\
&+ \frac{\nu_x^2}{2} 2(\cos(k_x h_x) - 1) + \frac{\nu_y^2}{2} 2(\cos(k_y h_y) - 1) \\
&+ \frac{\nu_x \nu_y}{4} (e^{ik_y h_y} (2i \sin(k_x h_x)) - e^{-ik_y h_y} (2i \sin(k_x h_x))).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1 - \nu_x i \sin(k_x h_x) - \nu_y i \sin(k_y h_y) \\
&+ \nu_x^2 (\cos(k_x h_x) - 1) + \nu_y^2 (\cos(k_y h_y) - 1) \\
&- \nu_x \nu_y (\sin(k_x h_x) \sin(k_y h_y)).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A diferencia del caso unidimensional, en este punto se vuelve complicado encontrar una expresión analítica para la estabilidad, que dependa del valor de ν_x y ν_y . Sin embargo, numéricamente es posible encontrar la región de estabilidad del método, en función de ν_x y ν_y , como se muestra a continuación:



Asimismo, es posible encontrar una condición CFL algebraica suficiente, que describa una región que caiga dentro de la región de estabilidad y

sea similar a ésta, de tal forma que si se restringe a esta condición, se obtiene un método estable. Dicha condición está dada por la ecuación $|\nu_x|^{0.65} + |\nu_y|^{0.65} \leq 1$, y esta es la condición de estabilidad que se estará usando en el presente trabajo. Esto también está representado en las gráficas anteriores, en la segunda figura, en donde se ha superpuesto la región de estabilidad y la región delimitada por la condición CFL considerada. Como se puede observar, dicha región está contenida en la región de estabilidad, y además hace un muy buen trabajo en imitar su comportamiento “desde dentro”; esto es importante, pues si se considerara una región demasiado pequeña, i.e., con mucho menor área que la región de estabilidad, aunque ésta estuviera también contenida dentro de la región de estabilidad, derivaría en un tamaño de paso en el tiempo muy pequeño, y computacionalmente no óptimo. Adicionalmente, aumentaría significativamente la viscosidad, algo que no es deseable. En este sentido, la condición CFL presentada no sólo es suficiente, sino óptima.

4.3. Método *upwind* de alta resolución para la formulación microscópica del modelo

Se ha visto ya que Lax-Wendroff es un método estable y de segundo orden, y por lo tanto un buen candidato para utilizarlo al resolver numéricamente la ecuación cinética. Sin embargo, los métodos de segundo orden (y de orden mayor) tienen la desventaja de generar oscilaciones cerca de discontinuidades. Por tal motivo, para resolver la ecuación cinética se utilizará el llamado método *upwind* de alta resolución. Este es un método equivalente al de Lax-Wendroff en regiones suaves, y por lo tanto también de segundo orden en ellas, pero se reduce al método *upwind* de primer orden cerca de discontinuidades, librándose así de las oscilaciones. La forma en que se consigue esto es escribiendo al método de Lax-Wendroff como una suma entre el método *upwind* de primer orden y una corrección de segundo orden, la cual se anulará cerca de discontinuidades. Para lograr esto último, se utiliza un limitador de flujo $\phi(x)$, el cual es una función que va a multiplicar a la corrección de segundo orden. Este limitador va a tener un valor de 1 en regiones suaves, dejando así intacto el método de Lax-Wendroff, pero muy cercano a 0 en regiones cerca de discontinuidades, logrando así anular el

efecto de la corrección de segundo orden y por lo tanto reduciéndose así al método *upwind* de primer orden.

Existen muchos posibles limitadores de flujo en la literatura, sin embargo en este trabajo se estará utilizando el limitador *Superbee* (LeVeque, 1992), definido como $\phi(\theta) = \max[0, \max(\min(2\theta, 1), \min(\theta, 2))]$. La forma en la que se aplicará en el código es la siguiente: se partirá de la ecuación cinética (3.6), la cual, en el caso cuando $\mu = 0$ y $\alpha = 1$ (es decir, cuando no hay fricción y el coeficiente de Coriolis es igual a 1, lo cual implica que la sangre se desplaza a la misma velocidad en cada sección transversal) se reduce a la ecuación de advección en dos dimensiones con coeficientes variables $\partial_t M + a\partial_s M + b\partial_\xi M = 0$, donde $a = \xi$ y $b = -\left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho}\right)$. Tal como en la sección anterior, se considerará $\nu_s = \frac{a\Delta t}{\Delta s}$, $\nu_\xi = \frac{b\Delta t}{\Delta \xi}$, donde Δt se calcula utilizando la condición CFL descrita en la sección anterior; entonces,

$$\Delta t = \frac{0.9}{\left[\left(\frac{\max|a|}{\Delta s}\right)^r + \left(\frac{\max|b|}{\Delta \xi}\right)^r\right]^{1/r}},$$

donde $r = 0.65$, el máximo de $|a|$ se calcula sobre todos los ξ en cada paso del tiempo, y el máximo de $|b|$ se calcula sobre todos los s en cada paso del tiempo. Luego, la manera de proceder para aplicar el método *upwind* de alta resolución con el limitador *superbee* para actualizar la ecuación cinética, es la siguiente.

Fórmula de actualización:

$$\begin{aligned}
M_{j,k}^{n+1} &= M_{j,k}^n - \text{sign}(a)\nu_s \left(M_{j,k}^n - M_{j-\text{sign}(a),k}^n \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \text{sign}(a)\nu_s (1 - \text{sign}(a)\nu_s) \times \\
&\quad \times \left[\left(M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n \right) \phi_{s,j,k} - \left(M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n \right) \phi_{s,j-1,k} \right] \\
&\quad - \text{sign}(b)\nu_\xi \left(M_{j,k}^n - M_{j,k-\text{sign}(b)}^n \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \text{sign}(b)\nu_\xi (1 - \text{sign}(b)\nu_\xi) \times \\
&\quad \times \left[\left(M_{j,k+1}^n - M_{j,k}^n \right) \phi_{\xi,k,j} - \left(M_{j,k}^n - M_{j,k-1}^n \right) \phi_{\xi,k-1,j} \right] \\
&\quad + (DC)_{j,k}^n
\end{aligned}$$

en donde $(DC)_{j,k}^n$ es un término que incorpora la contribución de los términos con derivadas cruzadas, y está dado por:

$$\begin{aligned}
(DC)_{j,k}^n &= \frac{\nu_s \nu_\xi}{4} \left[\left(M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n \right) \phi_{s,j,k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n \right) \phi_{s,j,k} \right] \phi_{\xi,k,j+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\nu_s \nu_\xi}{4} \left[\left(M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n \right) \phi_{s,j-1,k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n \right) \phi_{s,j-1,k} \right] \phi_{\xi,k,j-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\nu_s \nu_\xi}{4} \left[\left(M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n \right) \phi_{s,j,k} \right. \\
&\quad \left. - \left(M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n \right) \phi_{s,j,k-1} \right] \phi_{\xi,k-1,j+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\nu_s \nu_\xi}{4} \left[\left(M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n \right) \phi_{s,j-1,k} \right. \\
&\quad \left. - \left(M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n \right) \phi_{s,j-1,k-1} \right] \phi_{\xi,k-1,j-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Los términos de la fórmula de actualización distintos de $(DC)_{j,k}^n$, corresponden a los términos con derivadas de primer orden y derivadas cuadradas en la ecuación (4.13). En ellos, está presente la función *sign*, pues recuérdese que a y b pueden cambiar de signo, dado que son variables dependientes de ξ y s respectivamente, ya que $a = \xi$ y $b = -\left(g \sin(\theta(s)) - \frac{G'_o(s)}{\rho}\right)$. Más aún, nótese que la función *sign* está bien definida, pues si a o b son cero, entonces en la ecuación (4.13), los términos con a o b desaparecen respectivamente.

En general, $\phi_* = SuperBee(\gamma_*)$, donde:

Si $a > 0$:

$$\gamma_{s,j,k} = \frac{M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n}{M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k} = \frac{M_{j-1,k}^n - M_{j-2,k}^n}{M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n}. \quad (4.18)$$

Si $a \leq 0$:

$$\gamma_{s,j,k} = \frac{M_{j+2,k}^n - M_{j+1,k}^n}{M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k} = \frac{M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n}{M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n}. \quad (4.19)$$

Si $b > 0$:

$$\gamma_{\xi,k,j} = \frac{M_{j,k}^n - M_{j,k-1}^n}{M_{j,k+1}^n - M_{j,k}^n}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j} = \frac{M_{j,k-1}^n - M_{j,k-2}^n}{M_{j,k}^n - M_{j,k-1}^n}. \quad (4.20)$$

Si $b \leq 0$:

$$\gamma_{\xi,k,j} = \frac{M_{j,k+2}^n - M_{j,k+1}^n}{M_{j,k+1}^n - M_{j,k}^n}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j} = \frac{M_{j,k+1}^n - M_{j,k}^n}{M_{j,k}^n - M_{j,k-1}^n}. \quad (4.21)$$

Si $a > 0$:

$$\gamma_{s,j,k+1} = \frac{M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n}{M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k+1} = \frac{M_{j-1,k+1}^n - M_{j-2,k+1}^n}{M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n}, \quad (4.22)$$

$$\gamma_{s,j,k-1} = \frac{M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n}{M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k-1} = \frac{M_{j-1,k-1}^n - M_{j-2,k-1}^n}{M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n}. \quad (4.23)$$

Si $a \leq 0$:

$$\gamma_{s,j,k+1} = \frac{M_{j+2,k+1}^n - M_{j+1,k+1}^n}{M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k+1} = \frac{M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n}{M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n}, \quad (4.24)$$

$$\gamma_{s,j,k-1} = \frac{M_{j+2,k-1}^n - M_{j+1,k-1}^n}{M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n}, \quad \gamma_{s,j-1,k-1} = \frac{M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n}{M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n}. \quad (4.25)$$

Si $b > 0$:

$$W_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n}{\Delta s}, \quad W_{j+\frac{1}{2},k-1} = \frac{M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n}{\Delta s},$$

$$W_{j+\frac{1}{2},k+1} = \frac{M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n}{\Delta s}, \quad W_{j+\frac{1}{2},k-2} = \frac{M_{j+1,k-2}^n - M_{j,k-2}^n}{\Delta s}, \quad (4.26)$$

$$\gamma_{\xi,k,j+\frac{1}{2}} = \frac{W_{j+\frac{1}{2},k} - W_{j+\frac{1}{2},k-1}}{W_{j+\frac{1}{2},k+1} - W_{j+\frac{1}{2},k}}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j+\frac{1}{2}} = \frac{W_{j+\frac{1}{2},k-1} - W_{j+\frac{1}{2},k-2}}{W_{j+\frac{1}{2},k} - W_{j+\frac{1}{2},k-1}}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
W_{j-\frac{1}{2},k} &= \frac{M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n}{\Delta s}, & W_{j-\frac{1}{2},k-1} &= \frac{M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n}{\Delta s}, \\
W_{j-\frac{1}{2},k+1} &= \frac{M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n}{\Delta s}, & W_{j-\frac{1}{2},k-2} &= \frac{M_{j,k-2}^n - M_{j-1,k-2}^n}{\Delta s},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\gamma_{\xi,k,j-\frac{1}{2}} = \frac{W_{j-\frac{1}{2},k} - W_{j-\frac{1}{2},k-1}}{W_{j-\frac{1}{2},k+1} - W_{j-\frac{1}{2},k}}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j-\frac{1}{2}} = \frac{W_{j-\frac{1}{2},k-1} - W_{j-\frac{1}{2},k-2}}{W_{j-\frac{1}{2},k} - W_{j-\frac{1}{2},k-1}}. \tag{4.29}$$

Si $b \leq 0$:

$$\begin{aligned}
W_{j+\frac{1}{2},k} &= \frac{M_{j+1,k}^n - M_{j,k}^n}{\Delta s}, & W_{j+\frac{1}{2},k+1} &= \frac{M_{j+1,k+1}^n - M_{j,k+1}^n}{\Delta s}, \\
W_{j+\frac{1}{2},k-1} &= \frac{M_{j+1,k-1}^n - M_{j,k-1}^n}{\Delta s}, & W_{j+\frac{1}{2},k+2} &= \frac{M_{j+1,k+2}^n - M_{j,k+2}^n}{\Delta s},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\gamma_{\xi,k,j+\frac{1}{2}} = \frac{W_{j+\frac{1}{2},k+2} - W_{j+\frac{1}{2},k+1}}{W_{j+\frac{1}{2},k+1} - W_{j+\frac{1}{2},k}}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j+\frac{1}{2}} = \frac{W_{j+\frac{1}{2},k+1} - W_{j+\frac{1}{2},k}}{W_{j+\frac{1}{2},k} - W_{j+\frac{1}{2},k-1}}, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
W_{j-\frac{1}{2},k} &= \frac{M_{j,k}^n - M_{j-1,k}^n}{\Delta s}, & W_{j-\frac{1}{2},k+1} &= \frac{M_{j,k+1}^n - M_{j-1,k+1}^n}{\Delta s}, \\
W_{j-\frac{1}{2},k-1} &= \frac{M_{j,k-1}^n - M_{j-1,k-1}^n}{\Delta s}, & W_{j-\frac{1}{2},k+2} &= \frac{M_{j,k+2}^n - M_{j-1,k+2}^n}{\Delta s},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\gamma_{\xi,k,j-\frac{1}{2}} = \frac{W_{j-\frac{1}{2},k+2} - W_{j-\frac{1}{2},k+1}}{W_{j-\frac{1}{2},k+1} - W_{j-\frac{1}{2},k}}, \quad \gamma_{\xi,k-1,j-\frac{1}{2}} = \frac{W_{j-\frac{1}{2},k+1} - W_{j-\frac{1}{2},k}}{W_{j-\frac{1}{2},k} - W_{j-\frac{1}{2},k-1}}. \quad (4.33)$$

Tanto en las ecuaciones anteriores como en las fórmulas de actualización, los subíndices para ϕ y γ representan: el primero, la dirección en la que se está calculando, el segundo, el nivel de la diferencia específica que se está calculando en esa dirección, y el tercero, el nivel en la otra dirección. Además, $W_{j+\frac{1}{2},k}$ representa una aproximación a $\partial_s M$ en el nivel j , en el nivel k en la dirección ξ .

Asimismo, en cada paso del tiempo, después de recuperar las variables macroscópicas A y Q integrando respectivamente M y ξM en la dirección ξ , va a ser necesario volver a calcular el equilibrio de Gibbs. De igual manera, aunque en principio el dominio de M en la dirección ξ , al ser una distribución de probabilidad, es infinito, se aprovechará el hecho de que tiene soporte compacto (como se mostrará a continuación) para eliminar este problema, y se restringirá su dominio en cada paso del tiempo a un rectángulo que contenga a su soporte. Así, se debe calcular el soporte de M (y por lo tanto también el de χ), en cada paso del tiempo, antes de aplicar el método *upwind* de alta resolución para actualizar $M(s, t, \xi)$. Para calcular el soporte de χ , es necesario calcular cuándo $1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{k/2\rho\alpha} \geq 0$. Luego,

$$1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{k/2\rho\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \leq \frac{2k}{\rho\alpha}. \quad (4.34)$$

Recordando que en $M(s, t, \xi)$, ω está definido como $\frac{\xi - u(s, t)}{\sqrt{A(s, t)}}$, se tiene que para encontrar el soporte de M , es preciso calcular cuándo se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(\frac{\xi - u(s, t)}{\sqrt{A(s, t)}} \right)^2 \leq \frac{2k}{\rho\alpha} \Leftrightarrow |\xi - u| \leq \sqrt{\frac{2k}{\rho\alpha} A} \Leftrightarrow u - \sqrt{\frac{2k}{\rho\alpha} A} \leq \xi \leq u + \sqrt{\frac{2k}{\rho\alpha} A}. \quad (4.35)$$

Por tanto, para un t fijo, viendo la función M como función de s y de ξ , el soporte de $M(s, \xi)$ está contenido en el rectángulo:

$$\text{Sop } M \subset [s_0, s_1] \times \left[\min_s \left(u - \sqrt{\frac{2k}{\rho\alpha} A} \right), \max_s \left(u + \sqrt{\frac{2k}{\rho\alpha} A} \right) \right], \quad (4.36)$$

donde $[s_0, s_1]$ es el dominio de M en la dirección s .

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Capítulo 5

Resultados numéricos

5.1. Problema de Riemann

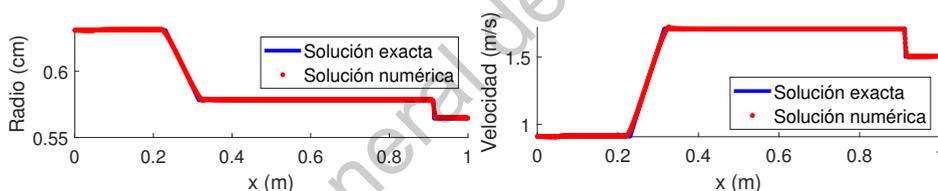


Figura 5.1: Gráficas del radio (panel izquierdo) y velocidad (panel derecho) a tiempo $t = 0.07$ s. Las condiciones iniciales están dadas por (5.1). La solución exacta se muestra en línea sólida azul y la numérica en línea punteada roja.

Considérese un problema de Riemann con condiciones iniciales:

$$A(x, t = 0) = \begin{cases} 1.25 \text{ cm}^2 & \text{si } 0 \text{ m} \leq x < 0.5 \text{ m,} \\ 1 \text{ cm}^2 & \text{si } 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m,} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} 0.9 \text{ ms}^{-1} & \text{si } 0 \text{ m} \leq x < 0.5 \text{ m,} \\ 1.5 \text{ ms}^{-1} & \text{si } 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m.} \end{cases}$$

Para la resolución de este problema, se consideró un dominio en el eje horizontal x de 1 m. Como es un problema de Riemann, se consideraron además los valores de los parámetros $\alpha = 1$, $G_o = 40000$ Pa, $\theta = 0$ y $\mu = 0$, como se explica en la sección (2.4). En la figura (5.1), se muestran las soluciones exacta (línea sólida azul) y numérica (línea punteada roja) a tiempo $t = 0.7$ s. Las condiciones iniciales corresponden a un problema de Riemann en donde se puede observar el desplazamiento de dos ondas en la solución, una de rarefacción a la izquierda (para la primera familia de eigenvalores) y una de choque a la derecha (para la segunda familia de eigenvalores). La solución exacta fue calculada con el procedimiento mostrado en la sección (2.4), y para la solución numérica se utilizó el esquema cinético descrito en el capítulo anterior, con una malla de 1000 puntos en s y 1000 puntos en ξ , y con condiciones de frontera libres, que en este caso se corresponden con condiciones de frontera Neumann. Como se puede apreciar en las dos gráficas de la figura (5.1), existe un buen empate entre ambas soluciones tanto para el radio como para la velocidad, lo cual es un buen indicador tanto de la consistencia como de la precisión de este esquema. No se observan oscilaciones en la solución numérica, lo cual también es un rasgo positivo para este método.

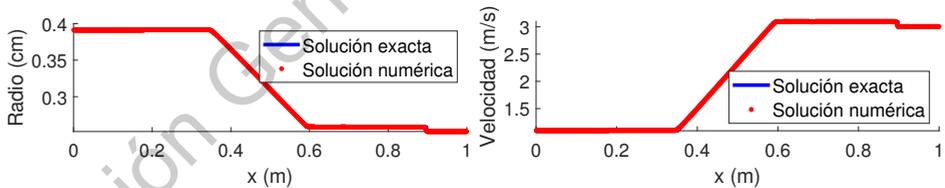


Figura 5.2: Gráficas del radio (panel izquierdo) y velocidad (panel derecho) a tiempo $t = 0.08$ s. Las condiciones iniciales están dadas por la ecuación (5.2). A diferencia del caso anterior, la rarefacción en este caso involucra cambios de signo en los eigenvalores. La solución exacta se muestra en línea sólida azul y la numérica en línea punteada roja.

Considérese ahora un problema de Riemann con condiciones iniciales:

$$A(x, t = 0) = \begin{cases} 0.48 \text{ cm}^2 & \text{si } 0 \text{ m} \leq x < 0.5 \text{ m,} \\ 0.2 \text{ cm}^2 & \text{si } 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m,} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} 1.09 \text{ ms}^{-1} & \text{si } 0 \text{ m} \leq x < 0.5 \text{ m,} \\ 3 \text{ ms}^{-1} & \text{si } 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m.} \end{cases}$$

De igual manera que para el caso anterior, se consideró un dominio en el eje horizontal x de 1 m. Asimismo, se consideraron además los valores de los parámetros $\alpha = 1$, $G_o = 40000$ Pa, $\theta = 0$ y $\mu = 0$. En la figura (5.2), se muestran las soluciones exacta (línea sólida azul) y numérica (línea punteada roja) a tiempo $t = 0.8$ s. Tal como para el ejemplo anterior, las condiciones iniciales corresponden a un problema de Riemann en donde se puede observar el desplazamiento de dos ondas en la solución, una de rarefacción a la izquierda (para la primera familia de eigenvalores) y una de choque a la derecha (para la segunda familia de eigenvalores).

La solución exacta fue calculada con el procedimiento mostrado en la sección (2.4), y para la solución numérica se utilizó el esquema cinético descrito en el capítulo anterior, con una malla de 1000 puntos en s y 1000 puntos en ξ , y con condiciones de frontera libres, que en este caso son equivalentes a condiciones de frontera Neumann. A diferencia del ejemplo anterior, en este caso la rarefacción involucra cambios de signo en las velocidades de las curvas características (los eigenvalores) dentro del abanico. Esto puede representar un problema de violación de entropía para algunos esquemas numéricos como el *upwind* de tipo Roe. Sin embargo, este algoritmo no presenta dicho problema, pues no conduce a soluciones débiles que no son físicamente relevantes, lo cual es una ventaja para este método. Existe una buena concordancia entre ambas soluciones, tanto para el radio como para la velocidad, lo cual es nuevamente un buen indicador de la precisión de este esquema y de su correcto funcionamiento para resolver este problema. Además, tampoco se observan oscilaciones en la solución numérica, lo cual es un aspecto positivo para este método.

5.2. Perturbación $\mu > 0, \alpha > 1$

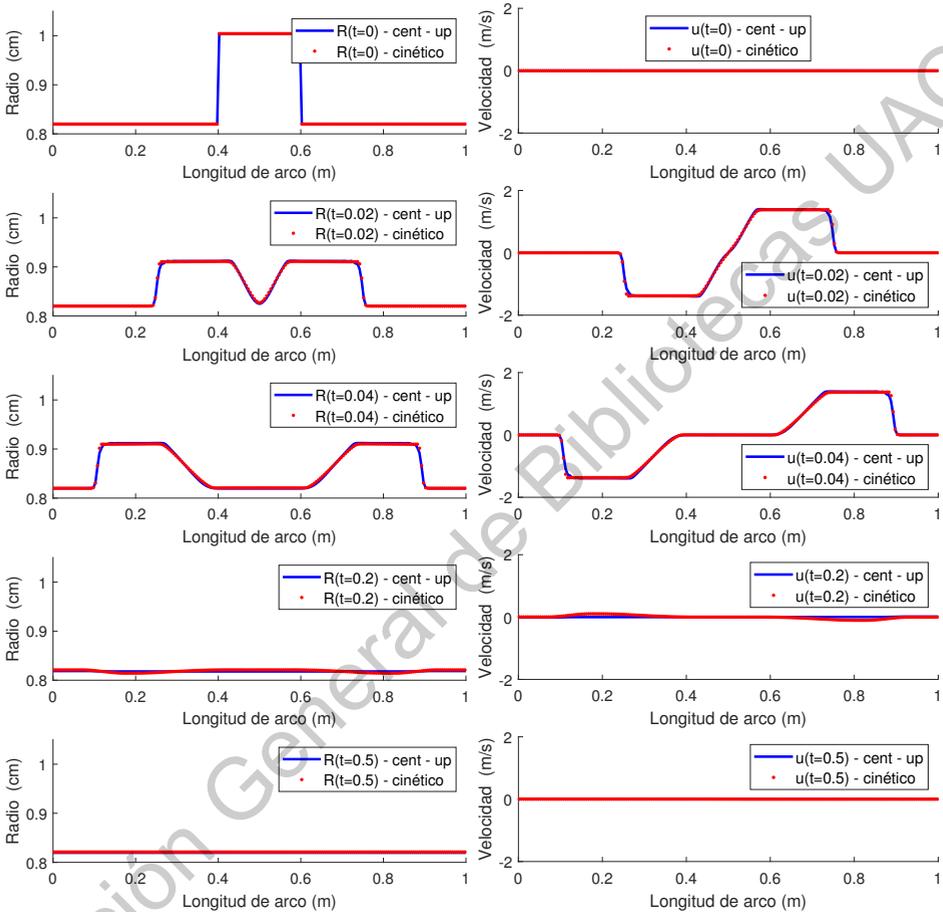


Figura 5.3: Soluciones numéricas para una perturbación en una arteria horizontal con efecto de fricción y del término de Coriolis, utilizando los esquemas central-upwind y el esquema cinético para el radio (páneos izquierdos) y velocidad (páneos derechos) a tiempos $t = 0, 0.02, 0.04, 0.2$ y 0.5 s, en orden descendente. Las condiciones iniciales están dadas por la ecuación (5.3). Las soluciones utilizando el esquema central-upwind se muestran en línea sólida azul y las que utilizan el esquema cinético en línea punteada roja.

Considérese una perturbación en una arteria horizontal en donde se toman en cuenta los efectos de la fricción y del término de Coriolis, con condiciones iniciales:

$$A(x, t = 0) = \begin{cases} 2.11 \text{ cm}^2 & \text{si } 0 \text{ m} \leq x < 0.4 \text{ m}, \\ 3.17 \text{ cm}^2 & \text{si } 0.4 \text{ m} \leq x \leq 0.6 \text{ m}, \\ 2.11 \text{ cm}^2 & \text{si } 0.6 \text{ m} < x \leq 1 \text{ m}, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$u(x, t = 0) = 0 \text{ ms}^{-1}.$$

Aquí, se consideró un dominio en el eje horizontal x de 1 m, con los valores de los parámetros $\alpha = 1.1$, $G_o = 40000 \text{ Pa}$, $\theta = 0$, $\mu = 2\pi \frac{\alpha\nu}{(\alpha-1)\pi(0.0082)^2} \text{ s}^{-1}$ y $\nu = 0.0000026 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. En la figura (5.3), se graficaron las soluciones numéricas obtenidas mediante el esquema central-upwind estudiado en (Hernández-Dueñas y Ramírez-Santiago, 2021) (línea sólida azul) y el esquema cinético discutido en este trabajo (línea punteada roja), a tiempos $t = 0, 0.02, 0.04, 0.2$ y 0.5 s . Las condiciones iniciales corresponden a una arteria horizontal en estado estacionario que ha sufrido una perturbación en el centro, y los sucesivos paneles tanto del radio como la velocidad muestran una dinámica del movimiento de tipo *outflow*, es decir, flujo (la perturbación) que se desplaza a ambos extremos de la arteria.

Para las soluciones numéricas se utilizaron, como ya se mencionó, los esquemas central-upwind y cinético, con una malla de 200 puntos para el primero, y de 200 puntos en s y 5000 puntos en ξ para el segundo, y con condiciones de frontera que respetan la dinámica del fluido dada por la velocidad de las curvas características. Se considera el flujo natural de la sangre de izquierda a derecha, por lo que en la frontera izquierda siempre se considera movimiento tipo *inflow* y en la frontera derecha tipo *outflow*, a menos que sean alcanzadas por el movimiento de una perturbación, en cuyo caso, de ser una perturbación que provenga del centro de la arteria, la frontera izquierda recibirá fluido, es decir, la dinámica ahí en ese momento será de tipo *outflow*, mientras que si es una perturbación que proviene de más allá de la frontera derecha, ésta recibirá fluido, por lo que la dinámica en ella en ese momento será de tipo *inflow*. Dichas condiciones de frontera están dadas por:

En la izquierda:

$$A(x, t = 0), u(x, t = 0) = \begin{cases} \left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] = [0, 0] & \text{si } \lambda_2 < 0, \\ 2.11 \text{ cm}^2, 0 \text{ ms}^{-1} & \text{si } \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

En la derecha:

$$A(x, t = 0), u(x, t = 0) = \begin{cases} \left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] = [0, 0] & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ 2.11 \text{ cm}^2, 0 \text{ ms}^{-1} & \text{si } \lambda_1 \leq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Donde λ_1 y λ_2 son los eigenvalores del sistema, y están dados por (2.13).

Como se puede apreciar en las gráficas de la figura (5.3), existe un buen empate entre ambas soluciones tanto para el radio como para la velocidad en los diferentes tiempos, y además, se observa que conforme pasa el tiempo, se recupera la información del estado en reposo de la arteria, es decir, la perturbación se desplaza fuera del dominio. Esto es un buen indicador tanto de la consistencia como de la precisión de este esquema.

5.3. Perturbación $\mu > 0, \alpha > 1$, con estrechamiento de la arteria

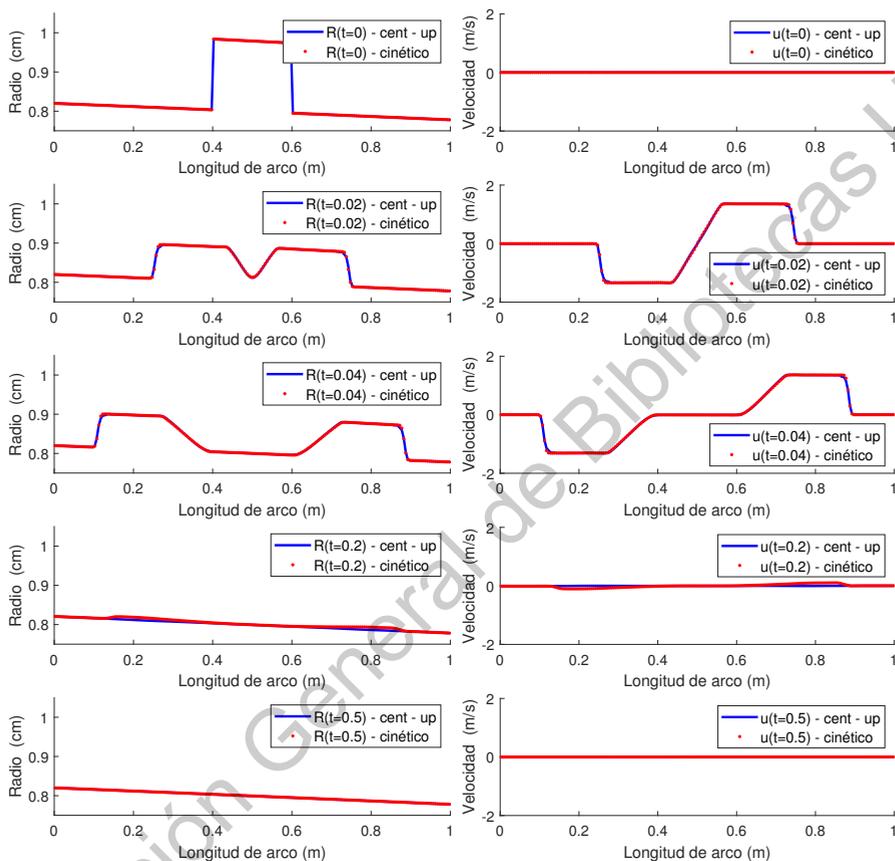


Figura 5.4: Soluciones numéricas para una perturbación en una arteria horizontal con estrechamiento, con efecto de fricción y del término de Coriolis, utilizando los esquemas central-upwind y el esquema cinético para el radio (páneos izquierdos) y velocidad (páneos derechos) a tiempos $t = 0, 0.02, 0.04, 0.2$ y 0.5 s, en orden descendente. Las condiciones iniciales están dadas por la ecuación (5.6). Las soluciones utilizando el esquema central-upwind se muestran en línea sólida azul y las que utilizan el esquema cinético en línea punteada roja.

Considérese ahora una perturbación en una arteria horizontal con efecto de estrechamiento que va del extremo izquierdo al extremo derecho, en donde se toman en cuenta los efectos de la fricción y del término de Coriolis, con condiciones iniciales:

$$A(x, t = 0) = (1 - Tx)\pi(0.82)^2 \text{ cm}^2, \quad u(x, t = 0) = 0 \text{ ms}^{-1}, \quad (5.6)$$

en donde $T = 0.1$ corresponde a un factor de *tapering*, es decir, a un factor de estrechamiento de la arteria, y el escalar 0.82 corresponde a un radio inicial de la arteria en reposo, $R_0 = 0.82$ cm. El estrechamiento de la arteria, o *tapering*, consiste en la disminución del radio de la arteria en alguna zona específica de la misma, lo cual puede deberse a diferentes factores, como por ejemplo el colesterol en la sangre. El perfil de *tapering* utilizado fue obtenido de (Čanić y Kim, 2003), en donde se usa un perfil en donde el área inicial $A_0(x)$ es vista como función lineal y decreciente de x , para estudiar la formación de ondas de choque.

Para este caso, se consideró también un dominio en el eje horizontal x de 1 m, con los valores de los parámetros $\alpha = 1.1$, $G_o = 40000$ Pa, $\theta = 0$, $\mu = 2\pi \frac{\alpha\nu}{(\alpha-1)\pi(0.0082)^2} \text{ s}^{-1}$ y $\nu = 0.0000026 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. En la figura (5.4), se graficaron las soluciones numéricas obtenidas mediante el esquema central-upwind al cual se hace referencia en la sección anterior (línea sólida azul) y el esquema cinético discutido en este trabajo (línea punteada roja), a tiempos $t = 0, 0.02, 0.2$ y 0.5 s. Las condiciones iniciales corresponden a una arteria horizontal con estrechamiento en el extremo derecho en estado estacionario, que ha sufrido una perturbación en el centro, y los sucesivos paneles tanto del radio como la velocidad muestran nuevamente una dinámica del movimiento de tipo *outflow*, similar a la que se observa en la sección anterior; flujo (la perturbación) que se desplaza a la frontera de la arteria y se va.

Para las soluciones numéricas fueron utilizados los esquemas descritos anteriormente, central-upwind y cinético, con una malla de 200 puntos para el primero, y de 200 puntos en s y 5000 puntos en ξ para el segundo, y con condiciones de frontera equivalentes a las utilizadas en la sección anterior, las cuales respetan la dinámica del fluido, a saber:

En la izquierda:

$$A(x, t = 0), u(x, t = 0) = \begin{cases} \left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] = [0, 0] & \text{si } \lambda_2 < 0, \\ 2.11 \text{ cm}^2, 0 \text{ ms}^{-1} & \text{si } \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

En la derecha:

$$A(x, t = 0), u(x, t = 0) = \begin{cases} \left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right] = [0, 0] & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ 1.90 \text{ cm}^2, 0 \text{ ms}^{-1} & \text{si } \lambda_1 \leq 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Donde λ_1 y λ_2 son los eigenvalores del sistema, y están dados por (2.13).

De las gráficas de la figura (5.4), se observa que existe una buena concordancia entre ambas soluciones, tanto para el radio como para la velocidad en los diferentes tiempos. Asimismo, se aprecia que conforme pasa el tiempo, también se recupera la información del estado en reposo de la arteria, es decir, la perturbación se desplaza fuera del dominio hasta desaparecer. Este es un rasgo positivo para este método, pues se observa que es robusto ante el efecto del *tapering* en arterias horizontales.

5.4. Simulación de flujo sanguíneo en la aorta

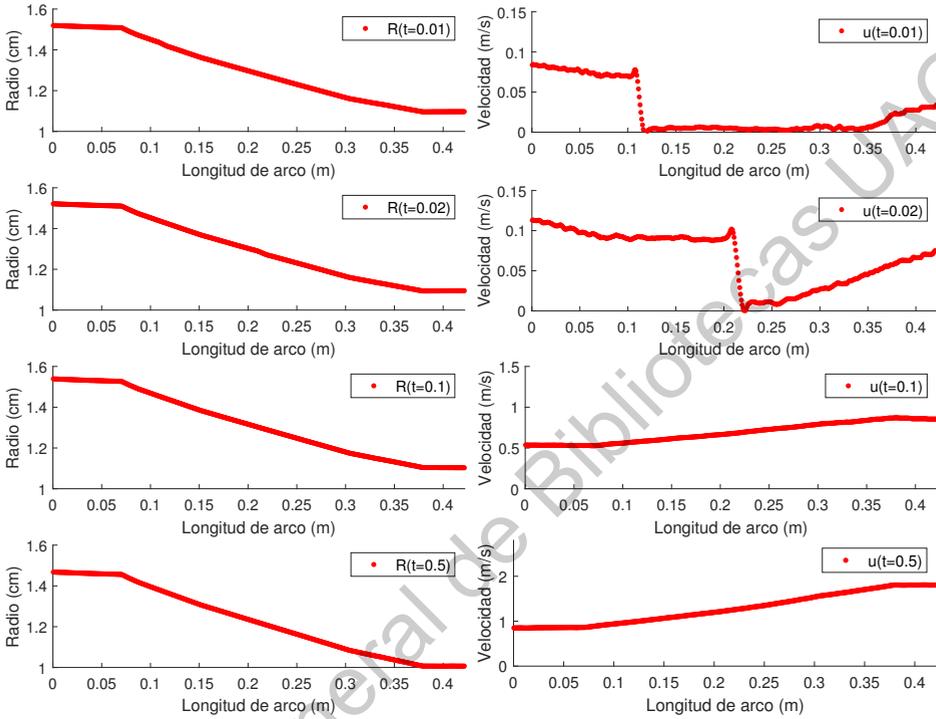


Figura 5.5: Soluciones numéricas en línea punteada roja para el radio (páneos izquierdos) y la velocidad (páneos derechos) en una simulación de flujo sanguíneo en la aorta, utilizando el esquema cinético a tiempos $t = 0.01, 0.02, 0.1$ y 0.5 s, en orden descendente. Las condiciones iniciales están dadas por la ecuación (5.9).

Como problema final, se considerará la simulación del paso del flujo sanguíneo durante un ciclo cardíaco en la aorta, con condiciones iniciales correspondientes a un estado estacionario en reposo de una arteria inclinada, dadas por:

$$A(s, t = 0) = A_o(s) \left(1 + \frac{\rho_o - g\rho z(s)}{G_o(s)} \right), \quad u(s, t = 0) = 0 \text{ ms}^{-1}, \quad (5.9)$$

en donde A_o , G_o , y ρ_o corresponden a parámetros de la aorta durante la presión diastólica, es decir, cuando los ventrículos del corazón están relajados y no se encuentran bombeando sangre. Dichos parámetros fueron calculados a partir de los valores proporcionados en (Xiao et al., 2014). Cabe resaltar que el valor de A_o es constante a trozos y decreciente linealmente con respecto a s , esto como consecuencia de que el propio valor de R_o presenta este comportamiento. Esto genera un perfil inicial de *tapering* similar al que presenta la aorta completa en la vida real, desde el arco aórtico hasta el final de la aorta abdominal. Además, se está simulando flujo sanguíneo a través de la aorta completa, pero sin tomar en cuenta sus ramificaciones; el dominio en el eje horizontal s es $[s_o, s_1]$, con $s_o = 0$, $s_1 = 42.21$ cm., lo cual corresponde a la longitud promedio de la aorta. Los valores de los otros parámetros utilizados fueron $\alpha = 1.1$, $\theta(s) = \frac{\pi}{2} \left[1 - 2 \min \left(\frac{s}{0.3(s_1)}, 1 \right) \right]$, $\mu = 2\pi \frac{\alpha\nu}{(\alpha-1)\pi(0.0082)^2} s^{-1}$ y el parámetro de viscosidad $\nu = 0.0000026 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. El valor de $\theta(s)$ usado brinda una aproximación a la curvatura real de la aorta, empezando con un ángulo de $\frac{-\pi}{2}$ en el extremo izquierdo de la misma y terminando con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en el extremo derecho, empezando a tener este valor a partir de $s = 12.67$ cm.

En la figura (5.5), se graficaron las soluciones numéricas para el radio y la velocidad obtenidas mediante el esquema cinético estudiado, a tiempos $t = 0.01, 0.02, 0.1$ y 0.5 s. Las condiciones iniciales corresponden a las de una arteria inclinada en estado estacionario en reposo, y los sucesivos paneles de la velocidad muestran una dinámica del movimiento de tipo *out flow*, es decir, flujo (el que está entrando a la aorta por las condiciones de frontera impuestas por la izquierda, las cuales corresponden a un ciclo cardíaco) que se desplaza al extremo derecho de la aorta. Además, se nota el efecto de la gravedad en el extremo derecho de la aorta, pues es posible apreciar una velocidad positiva que se va incrementando más y más en este extremo conforme pasa el tiempo, incluso antes de que el flujo inicial de la frontera izquierda alcance a la frontera derecha. Asimismo, se puede observar que la dinámica de movimiento del radio es más bien poco perceptible, solamente expandiéndose y contrayéndose un poco para algunos tiempos.

Para las soluciones numéricas se utilizó una malla de 500 puntos en s y 5000 puntos en ξ , y con condiciones de frontera que respetan la dinámica del fluido dada por un ciclo cardíaco en la aorta; en ésta el flujo natural de la sangre es del corazón al resto de los órganos. En las simulaciones presentadas, el corazón se encuentra cerca del extremo izquierdo de la idealización de la aorta utilizada (la cual por simplicidad, ignora las bifurcaciones que se presentan a lo largo de la misma), por lo que en la frontera izquierda siempre se considera movimiento de tipo *inflow* y se imponen condiciones de frontera Dirichlet, dadas por:

$$A(s_o, t = 0) = A_o(s_o) \left(1 + \frac{\rho_o - gpz(s_o)}{G_o(s_o)} \right). \quad (5.10)$$

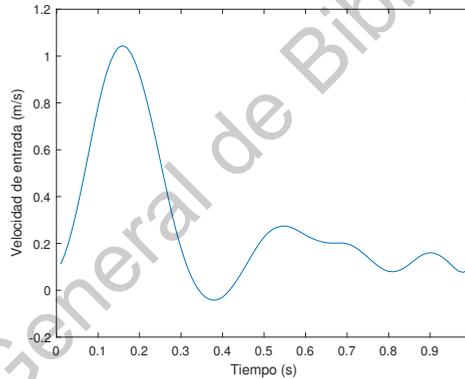


Figura 5.6: Gráfica de la velocidad impuesta en la frontera izquierda de la aorta en función del tiempo. Este perfil de la velocidad corresponde a un ciclo cardíaco típico. Los datos para su realización fueron tomados de (Čanić y Kim, 2003).

Por otro lado, en la frontera derecha el movimiento que siempre se considera es de tipo *outflow*, y las condiciones de frontera que se están considerando son de tipo Neumann, dadas por:

$$\left[\frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right] = [0, 0]. \quad (5.11)$$

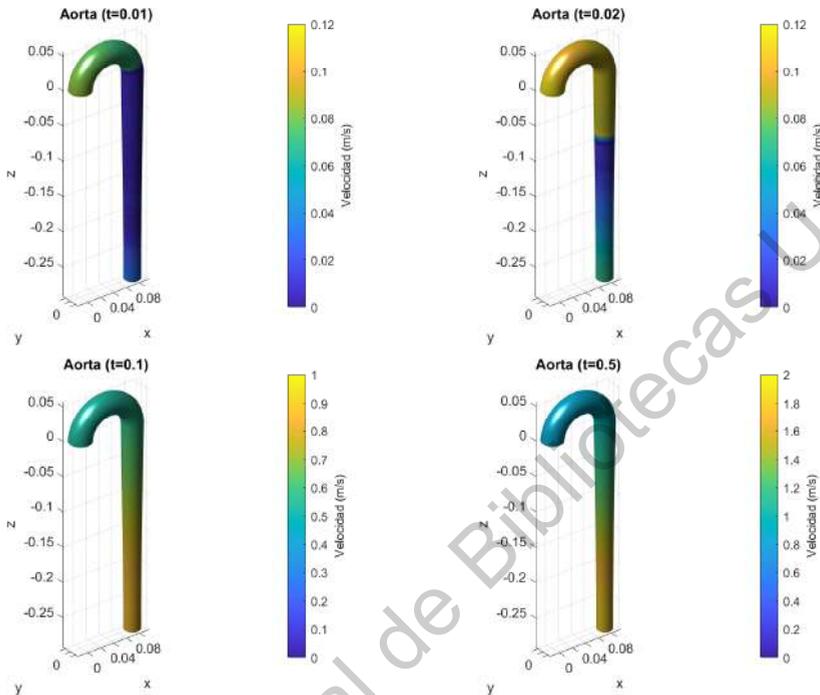


Figura 5.7: Simulación del campo de velocidades en la aorta durante un ciclo cardíaco, utilizando el esquema cinético a tiempos $t = 0.01$, 0.02 , 0.1 y 0.5 s, en orden descendente. Las condiciones iniciales están dadas por la ecuación (5.9).

En la figura (5.7), se graficaron el radio en la posición axial y el campo de velocidades en la aorta a tiempos $t = 0.01$, 0.02 , 0.1 y 0.5 s. Se puede apreciar en las gráficas que la aorta no sufre un ensanchamiento significativo durante el ciclo cardíaco, y más bien donde se puede notar el paso del fluido es a través del campo de velocidades, para el cual se ha graficado la escala respectiva para cada panel. Para los primeros dos, $t = 0.01$ y 0.02 s, es posible utilizar la misma escala, y se aprecia claramente el desplazamiento del fluido, del extremo izquierdo de la aorta, cerca de donde se encuentra el corazón, a través de la misma y hacia el extremo derecho. Asimismo, se puede observar el efecto de la gravedad en este último extremo, en donde

el color del campo de velocidades indica que ya se empieza a generar una velocidad positiva del fluido, debida al efecto de la gravedad en el sistema.

Los sucesivos pánels de la figura (5.7), para $t = 0.1$ y 0.5 s, muestran un incremento en la velocidad significativo, en donde ya se notan los efectos de la dinámica interna del fluido. Para $t = 0.1$ s, se puede notar que todavía la dinámica del movimiento se encuentra dominada por la velocidad impuesta en la frontera izquierda de la aorta, es decir, el ciclo cardíaco que bombea el corazón, sin embargo ya para $t = 0.5$ s es posible observar que la dinámica interna del flujo en la aorta ya no está dominada por la así llamada velocidad de entrada, sino que la gravedad y otros factores han intervenido. Es así que se encuentra una velocidad en la frontera izquierda de la aorta de cerca de 1 ms^{-1} , cuando, si se examina la figura (5.6), la velocidad del flujo inyectado por el corazón en ese momento es de aproximadamente 0.2 ms^{-1} .

Capítulo 6

Conclusiones

Este trabajo corresponde a un primer acercamiento a resolver este tipo de problemas en donde se presentan consideraciones mayores en cuanto a la dinámica del flujo, utilizando el esquema cinético. Se probó la eficacia del presente método para resolver este problema complejo, aún a sabiendas de las posibles dificultades que se pudieran presentar, y se comprobó así el potencial del método. Entre estas dificultades están el efecto de la gravedad y el perfil de *tapering* inicial, que parecen ser en parte los responsables de las oscilaciones que se alcanzan a percibir para la gráfica de la velocidad a tiempos cortos. Aún con este obstáculo en cuanto a la precisión del esquema en este caso, como se puede apreciar, los resultados numéricos son consistentes con la dinámica que se esperaría para este problema.

Otra dificultad que pudiera estar afectando la precisión del método, es el hecho de que al considerar valores de $\alpha > 1$, el término con derivadas cruzadas de segundo orden de la ecuación cinética (3.6) no se anula, por lo que al resolver el sistema con el método cinético, en principio podrían generarse problemas, ya que esto ocasiona que la ecuación microscópica ya no sea completamente de transporte. Sin embargo, parece ser que este hecho por sí mismo no afecta en gran medida la precisión del método, pues en las simulaciones mostradas en las figuras (5.3) y (5.4) también se utilizó un valor de $\alpha > 1$ y no se observaron estas oscilaciones. La conclusión es que debe ser una combinación entre este hecho, el efecto de la gravedad y

el perfil de *tapering* particular de la aorta.

Por otro lado, como ya se mencionó, se utilizó una resolución en ξ de 5000 puntos en la malla, esto para lograr una precisión adecuada en las simulaciones en este caso, lo cual ocasionó un costo computacional del orden de horas (en una laptop de uso diario) al momento de correr las simulaciones para $t = 0.1$ y 0.5 s. De cualquier manera, el hecho de que se tenga consistencia en las soluciones numéricas y se pueda recuperar la dinámica esperada del fluido en este problema complejo, corresponde a un esperanzador primer acercamiento y una buena señal para el futuro.

En futuros trabajos se puede entonces, tratar de solventar las dificultades encontradas en este estudio (por ejemplo, tomando como guía técnicas utilizadas en el trabajo de [Perthame y Simeoni, 2001](#)), con vistas a reducir el costo computacional) y de explotar las bondades de este método. Entre éstas, la principal, la de considerar la dinámica de las partículas a nivel microscópico, para, por ejemplo, el estudio de flujos granulares, en donde hay interacciones a nivel microscópico entre los sólidos flotantes en el fluido y el fluido mismo, por lo que puede resultar de interés considerar esta dinámica.

Bibliografía

Alastruey, J., Parker, K. H., Sherwin, S. J., et al. (2012). Arterial pulse wave haemodynamics. In *11th International Conference on Pressure Surges*, pages 401–442. Virtual PiE Led t/a BHR Group Lisbon, Portugal.

Armi, L. (1986). The hydraulics of two flowing layers with different densities. *J. Fluid Mech.*, 163:27–58.

Bessonov, N., Sequeira, A., Simakov, S., Vassilevskii, Y., y Volpert, V. (2016). Methods of blood flow modelling. *Mathematical modelling of natural phenomena*, 11(1):1–25.

Eckmann, D. M., Bowers, S., Stecker, M., y Cheung, A. T. (2000). Hematocrit, volume expander, temperature, and shear rate effects on blood viscosity. *Anesthesia & Analgesia*, 91(3):539–545.

Formaggia, L., Lamponi, D., y Quarteroni, A. (2003). One-dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3):251–276.

Formaggia, L., Nobile, F., Quarteroni, A., Veneziani, A., y Zunino, P. (2000). Advances on numerical modelling of blood flow problems. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)*, pages 11–14.

Geers, A., Larrabide, I., Morales, H., y Frangi, A. (2010). Comparison of steady-state and transient blood flow simulations of intracranial aneurysms. In *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2010 Annual International Conference of the IEEE*, pages 2622–2625.

Grinberg, L., Cheever, E., Anor, T., Madsen, J. R., y Karniadakis, G. E. (2011). Modeling blood flow circulation in intracranial arterial networks: A comparative 3d/1d simulation study. *Annals of Biomedical Engineering*, 39(1):297–309.

Haldar, K. y Andersson, H. I. (1996). Two-layered model of blood flow through stenosed arteries. *Acta Mechanica*, 117:221–228.

Hernández-Dueñas, G. y Ramirez-Santiago, G. (2021). A well-balanced positivity-preserving central-upwind scheme for one-dimensional blood flow models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 93:369–395.

Inamuro, T. (2002). A lattice kinetic scheme for incompressible viscous flows with heat transfer. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 360(1792):477.

Krafczyk, M., Cerrolaza, M., Schulz, M., y Rank, E. (1998). Analysis of 3d transient blood flow passing through an artificial aortic valve by lattice-boltzmann methods. *Journal of Biomechanics*, 31(5):453–462.

LeVeque, R. J. (1992). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser.

Mensah, G. A., Roth, G. A., y Fuster, V. (2019). The global burden of cardiovascular diseases and risk factors: 2020 and beyond. *Journal of the American College of Cardiology*, 74(20):2529–2532.

Mozaffarian, D., Benjamin, E. J., Go, A. S., Arnett, D. K., Blaha, M. J., Cushman, M., de Ferranti, S., Després, J.-P., Fullerton, H. J., Howard, V. J., Huffman, M. D., Judd, S. E., Kissela, B. M., Lackland, D. T., Lichtman, J. H., Lisabeth, L. D., Liu, S., Mackey, R. H., Matchar, D. B., McGuire, D. K., Mohler, E. R., Moy, C. S., Muntner, P., Mussolino, M. E., Nasir, K., Neumar, R. W., Nichol, G., Palaniappan, L., Pandey, D. K., Reeves, M. J., Rodriguez, C. J., Sorlie, P. D., Stein, J., Towfighi, A., Turan, T. N., Virani, S. S., Willey, J. Z., Woo, D., Yeh, R. W., y Turner, M. B. (2015). Heart disease and stroke statistics – at-a-glance. *Heart disease and stroke statistics— 2015 update: a report from the American Heart Association*.

Perthame, B. y Simeoni, C. (2001). A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4):201–231.

Quarteroni, A., Manzoni, A., y Vergara, C. (2017). The cardiovascular system: Mathematical modelling, numerical algorithms and clinical applications. *Acta Numerica*, 26:365–590.

Čanić, S., Galovic, M., Ljulj, M., y Tambaca, J. (2017). A dimension-reduction based coupled model of mesh-reinforced shells. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 77(2):744–769.

Čanić, S. y Kim, E. H. (2003). Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model blood flow through compliant axi-symmetric vessels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(14):1161–1186.

Willemet, M. y Alastruey, J. (2015). Arterial pressure and flow wave analysis using time-domain 1-d hemodynamics. *Annals of Biomedical Engineering*, 43(1):190–206.

Xiao, N., Alastruey, J., y Alberto Figueroa, C. (2014). A systematic comparison between 1-d and 3-d hemodynamics in compliant arterial models. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 30(2):204–231.

Zhu, Y., Zhong, C., y Xu, K. (2017). Unified gas-kinetic scheme with multigrid convergence for rarefied flow study. *Physics of Fluids*, 29(9):096102.