



Universidad Autónoma De Querétaro
Facultad de Ingeniería



Diseño e implementación de circuito PID para control de intensidad de trampa óptica para átomos neutros ultra fríos

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Ingeniero Físico

Presenta:

Gerardo Pérez Cervantes

Asesora:

Dra. Karina Jiménez García

Santiago de Querétaro, Querétaro. 2021.



Universidad Autónoma De Querétaro
Facultad de Ingeniería



Diseño e implementación de circuito PID para control de intensidad de trampa óptica para átomos neutros ultra fríos

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Ingeniero Físico

Presenta:

Gerardo Pérez Cervantes

Asesora:

Dra. Karina Jiménez García

Sinodales:

Dra. Karina Jiménez García

Director

Dr. Alberto Hernández Almada

Secretario

Dr. Aldrin M. Cervantes Contreras

Vocal

Dr. Neil Vladimir Corzo Trejo

Suplente


Firma


Firma


Firma


Firma

Campus Aeropuerto
Querétaro, Qro.
2021

*Dedicado a mis padres
y al profesor Marcelino.*

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Agradecimientos

Agradezco a mi asesora, la Dra. Karina Jiménez García, por su apoyo y dedicación a la realización de la presente tesis.

A mis sinodales, el Dr. Alberto Hernández Almada, Dr. Aldrin M. Cervantes Contreras y el Dr. Neil Vladimir Corzo Trejo, por sus correcciones y comentarios sobre la presente tesis.

Finalmente, la Dra. María Lucero Gómez Herrera por el apoyo y la orientación a lo largo de la carrera.

Dirección General de Bibliotecas UNQ

Resumen

En esta tesis se estudia la teoría de los átomos ultra fríos, iniciando con un modelo de átomo de dos niveles y después generalizando en los átomos alcalinos. Existen varias maneras de producir estos átomos ultra fríos, en este trabajo nos enfocaremos en los métodos ópticos, los cuales involucran láseres para su funcionamiento, aunque se hace mención de otros métodos de producción. El estudio de los métodos ópticos se hace por medio de una aproximación semiclásica, la cual describe el comportamiento que tiene la materia al ser expuesta a luz láser, lo que tiene como resultado que la profundidad de las trampas ópticas es proporcionales a intensidad láser. Posteriormente se propone el diseño de un circuito de control tipo PID con la finalidad de poder controlar de manera experimental la intensidad de estos láseres, para finalmente simular este circuito y diseñar una PCB para su futura implementación.

Dirección General de Bibliotecas

Índice

Secciones	Página
1. ¿Qué son los átomos neutros alcalinos ultra fríos, para qué sirven y cómo se producen?	1
1.1. Física de átomos alcalinos	2
1.1.1. Estructura fina en átomos alcalinos	3
1.1.2. Estructura fina del átomo de ^{87}Rb	6
1.1.3. Estructura hiperfina del átomo de ^{87}Rb	8
2. Introducción a métodos de enfriamiento para átomos neutros	9
2.1. Enfriamiento Láser	9
2.1.1. Melaza óptica	12
2.1.2. Trampa magneto-óptica	16
2.2. Enfriamiento por evaporación en trampas magnéticas	19
2.2.1. Atrapamiento magnético en átomos Multi-nivel	19
2.2.2. Transiciones por radio-frecuencia en trampas magnéticas	21
2.2.3. Método de enfriamiento por evaporación rf	21
2.3. Enfriamiento por evaporación en trampas dipolares ópticas	22
2.3.1. Trampas ópticas en átomo de 2 niveles	22
2.3.2. Parámetros físicos más relevantes	24
2.3.3. Generalización a átomos multinivel	25
2.3.3.1. Átomos alcalinos	26
2.3.3.2. Características de las fuentes láser para implementar potenciales ópticos	27
2.4. Comparación de los métodos de producción de átomos fríos	27
3. Trampas ópticas para átomos neutros	28
3.1. Aproximación a potencial tipo oscilador armónico	29
3.2. Profundidad de la trampa óptica	30
4. ¿Por qué es necesario controlar la intensidad de la trampa óptica?	33
5. ¿Cómo se controla la intensidad de un láser?	34
5.1. Directamente con la corriente aplicada a la fuente láser	34
5.2. Indirectamente mediante un modulador acusto-óptico (AOM)	34
6. Implementación de circuito PID para control de intensidad	35
6.1. ¿Qué es un circuito PID?	35
6.2. Diseño del circuito PID	38
6.3. Modelado del circuito PID	41
6.4. Implementación experimental y pruebas del circuito PID	44
7. Resultados	46

8. Conclusiones	47
A. Átomo de dos niveles y su interacción con un campo eléctrico externo oscilante	52
B. Momento dipolar inducido de un átomo de dos niveles	57
C. Vector de Bloch	59
D. Ecuaciones ópticas de Bloch	61
E. Solución del estado estacionario de las ecuaciones ópticas de Bloch	64
F. Sección eficaz de absorción	65
G. Fuerza melaza óptica	70
H. Efecto Stark	71

Dirección General de Bibliotecas UAG

1. ¿Qué son los átomos neutros alcalinos ultra fríos, para qué sirven y cómo se producen?

Primeramente, los átomos son los constituyentes básicos de la materia; éstos están formados por un núcleo¹, y por electrones que se mueven a su alrededor. En segundo lugar, se sabe que la carga del protón es la misma que la del electrón, siendo el protón positivo y el electrón negativo. Se dice que un átomo es neutro cuando éste tiene la misma cantidad de protones que de electrones [1]. Finalmente, un conjunto de átomos o partículas en general tiene asociada una energía cinética (energía de movimiento) cuya magnitud está directamente relacionada con su temperatura a través del principio de equipartición de la energía². Es así que un conjunto de átomos de ultra-baja energía cinética es equivalente a un conjunto de átomos de ultra baja temperatura o en otras palabras un conjunto de átomos ultra fríos.

Un conjunto de átomos ultra fríos es entonces una colección de átomos neutros cuya temperatura media ronda el cero absoluto; estos sistemas muestran un alto grado de control experimental y son muy importantes para el desarrollo de la metrología de ultra-alta precisión, en particular en mediciones del tiempo a partir de relojes atómicos, y en la gravimetría, la cual consiste en medir las variaciones locales del campo gravitacional [2]. Con las técnicas experimentales de enfriamiento disponibles en la actualidad es posible generar las condiciones adecuadas para producir un condensado de Bose-Einstein, el cual es un estado cuántico de la materia donde todos los átomos están en el estado de menor energía, y con el cual, debido a sus características físicas, se puede hacer interferometría de ultra alta precisión. El uso del condensado en la interferometría puede incrementar significativamente la precisión en la medición del campo gravitacional, de hecho existen ya algunos prototipos de este tipo de gravímetro [3]. Otra aplicación importante de los átomos ultra fríos es en la simulación cuántica, la cual tiene un amplio rango de investigación, desde materia condensada, física estadística, física de altas energías hasta astrofísica³ [4], siendo especialmente útil para simular problemas cuánticos de muchos cuerpos, como por ejemplo en el estudio de las fases topológicas de la materia [5] haciendo uso de redes ópticas de las cuales hablaremos en la Sección 2.3.2.

A grandes rasgos, el método estándar para producir un sistema de átomos ultra fríos consiste en los siguientes pasos:

- Generar un vapor de la especie atómica con la que se desea trabajar, para esto se puede utilizar un horno o algún otro sistema de calentamiento.
- Implementar la técnica enfriamiento láser, la cual hace uso de una combinación láseres para reducir la energía cinética de los átomos, lo cual resulta en una reducción de la temperatura del gas atómico. Con este método se logra alcanzar temperaturas del orden de μK .

¹El núcleo atómico esta constituido por neutrones y protones, las cuales son partículas fundamentales. Los protones tienen carga positiva y los neutrones no tienen carga, por lo que el núcleo tiene carga positiva, a su vez, la mayor parte de la masa del átomo esta contenida en el núcleo atómico.

²El principio de equipartición de la energía nos dice que cuando la energía de un sistema que se encuentra en equilibrio térmico esta distribuida de manera aleatoria entre los tipos de energía posibles (Algunos tipos de energía son la energía potencial, energía cinética, energía rotacional, entre otras.), entonces podemos relacionar la energía total promedio del sistema con la temperatura, mediante la siguiente relación $E_{\text{promedio}} = k_B T$ donde k_B es la constante de Boltzmann E_{promedio} la energía total promedio del sistema y T la temperatura.

³Un ejemplo es en la simulación de la radiación Hawkin utilizando condensados de Bose-Einstein [6].

- Atrapar a los átomos previamente enfriados ya sea con una trampa magnética, la cual hace uso de campos magnéticos generados por bobinas anti-Helmholtz para atrapar magnéticamente los átomos, o con una trampa dipolar óptica la cual atrapa a los átomos únicamente con láseres.
- Implementando la técnica de enfriamiento por evaporación forzada en trampas magnéticas o en trampas dipolares ópticas, lo que permite reducir aún más la temperatura, y llegar a temperaturas del orden de nK.

Todos estos procesos se llevan a cabo dentro de un sistema de ultra-alto vacío (presión de 10^{-9} Torr a 10^{-12} Torr), esto para evitar interacciones con partículas altamente energéticas del ambiente, las cuales estropearían la preparación del sistema de ultra baja energía⁴.

Dentro de los átomos neutros atrapables con estos métodos, existe un grupo denominado átomos alcalinos, los cuales son de nuestro interés (y en particular es de nuestro interés el Rb-87 ya que a partir de este generaremos nuestro sistema de átomos fríos) debido a que presentan características útiles e interesantes. Estos átomos están clasificados como el grupo I de la tabla periódica y su principal característica es que tienen un único electrón de valencia [1]. Estos átomos alcalinos también son llamados hidrogenoides y pueden ser modelados, bajo ciertas condiciones, de manera simple como un sistema de dos niveles⁵.

1.1. Física de átomos alcalinos

Dado que los átomos alcalinos son hidrogenoides, su ecuación de Schrödinger puede reducirse a la forma del átomo de hidrógeno. La función de onda ψ_i del i -ésimo electrón en un átomo alcalino, satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^N \left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2}_{\text{Energía cinética}} \underbrace{-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i}}_{\text{Interacción núcleo-e}} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{\text{Interacción e-e}} \right) \psi_i(r, \theta, \phi) = E\psi_i(r, \theta, \phi), \quad (1.1)$$

donde \hbar es la constante de Planck, ∇ es el operador diferencial asociado al operador de momento lineal, m es la masa del electrón, $-e$ es la carga eléctrica del electrón, Z es el número de protones en el núcleo, ϵ_0 es la constante de permitividad eléctrica en vacío y E la energía del electrón; la ecuación está expresada en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Para reducir la ecuación de Schrödinger del átomo multielectrón a la forma del átomo de hidrógeno se utiliza la aproximación de campo medio⁶, teniendo en cuenta que las interacciones electrón-

⁴Generar vacío significa retirar partículas no deseadas del volumen específico en el que se desea trabajar, entre menos partículas estén en el recipiente, menor será la presión debido a que hay menos partículas que puedan impartir fuerza a las paredes. Se llevará a cabo el experimento en las regiones de presión 10^{-9} Torr a 10^{-12} Torr debido a que reducir esas presiones resulta complicado porque quedan tan pocas partículas en un volumen muy grande en comparación del tamaño de las partículas, lo que hace difícil tan siquiera encontrarlas como para poder retirarlas del medio.

⁵Como veremos en la sección 1.1, en la técnica de enfriamiento láser un átomo multinivel puede modelarse como un sistema efectivo de 2 niveles.

⁶Se puede hacer esta aproximación debido a que podemos considerar a todos los electrones de las capas llenas y a los nucleones como los entes generadores del campo medio (promedio) con el cuál interactuará el electrón de la última capa.

núcleo y electrón-electrón son de un campo central, esto nos dará un conjunto de ecuaciones, una para cada electrón en el átomo, que no están acopladas entre sí, las cuales son de la forma:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + V_{\text{cm}}(r_i) \right) \psi_i(r, \theta, \phi) = E_i \psi_i(r, \theta, \phi), \quad (1.2)$$

donde $V_{\text{cm}}(r_i)$ es el potencial de campo medio para las interacciones electrón-núcleo y electrón-electrón. Estas ecuaciones de Schrödinger ya tienen la forma de la ecuación del átomo de hidrógeno y al no estar acopladas tienen solución analítica. La solución para el electrón de la última capa se conoce como la función de onda de los átomos alcalinos⁷, la cual es

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)_{n,l} Y_{l,m}(\theta, \phi) \psi_s, \quad (1.3)$$

donde las funciones $R(r)_{n,l}$ son las soluciones de la parte radial de la ecuación de Schrödinger Ecn. (1.2), las funciones $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos que surgen de solucionar la parte angular del átomo de hidrógeno Ecn. (1.2) y ψ_s es la función de onda asociada al espín del electrón, el cual es una característica intrínseca del mismo. La forma de la solución dependerá entonces de los números cuánticos del electrón al que estemos analizando (en nuestro caso analizaremos el comportamiento del electrón de valencia, el cual es el único que interactúa), donde n es el número cuántico principal, l el número cuántico asociado al momento angular, m el número cuántico magnético asociado a la proyección del momento angular y s el número cuántico asociado a la proyección de espín⁸.

A continuación describiremos el origen de la estructura fina e hiperfina en los átomos alcalinos, la cual es fundamental para la manipulación experimental de los átomos mediante las técnicas de enfriamiento láser, atrapamiento magnético y atrapamiento óptico. La solución dada por la Ecn. (1.3) al provenir de la ecuación de Schrödinger no considera efectos relativistas, ya que la ecuación de Schrödinger es no relativista. Los efectos relativistas se introducen al problema como correcciones al Hamiltoniano, a pesar de ser correcciones muy pequeñas, los experimentos en la actualidad tienen suficiente resolución para observar estas correcciones en los espectros de los átomos alcalinos, cuya manifestación experimental es la estructura fina e hiperfina de los átomos.

En las siguientes secciones describiremos el origen de la estructura fina e hiperfina en átomos alcalinos.

1.1.1. Estructura fina en átomos alcalinos

Para introducir los efectos relativistas se parte de la ecuación de Dirac y se hace una expansión del término de energía cinética, considerando que el electrón se mueve con momento P . Es posible demostrar que la corrección relativista al término de energía cinética corresponde a [7]

$$H'_r = -\frac{1}{8} \frac{P^4}{m^3 c^2}, \quad (1.4)$$

⁷En los átomos alcalinos se considera sólo la solución para el último electrón debido a que este electrón es el único que interactúa, todas las demás capas electrónicas están completamente llenas.

⁸Por tratarse de un electrón el espín es $\mathbf{S} = \frac{1}{2}$, con proyecciones $s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Este término extra se considera como una perturbación al Hamiltoniano atómico, por lo que al aplicar la teoría de perturbaciones⁹ obtenemos una primer corrección a la energía del sistema por efectos relativistas, dada por [7]:

$$E_r \propto \left(\frac{2n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \right). \quad (1.5)$$

Este primer resultado indica que si el electrón al que estamos analizando tiene más de un valor posible de momento angular l , entonces la energía sufrirá un desdoblamiento dependiendo del valor de l . La razón por la cual el desdoblamiento de la energía puede ocurrir es debido a que pueden existir estados que sean diferentes pero tengan la misma energía. Cuando varios estados tienen la misma energía, se dice que esos estados están degenerados, entonces la corrección relativista hace que se pierda la degeneración.

La estructura fina no sólo proviene de la corrección relativista a la energía cinética, también hay que considerar otro efecto relativista llamado acoplamiento espín-órbita, el cual surge de analizar la interacción electrón-núcleo desde el marco de referencia del electrón; desde esta perspectiva es el electrón el que está estático y el núcleo atómico gira alrededor de él. El núcleo al tener carga y moverse genera un campo magnético efectivo que interactúa con el espín del electrón. El acoplamiento espín-órbita da lugar a la siguiente corrección relativista al Hamiltoniano¹⁰ [8]

$$H'_{so} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (1.6)$$

Los operadores de momento angular \mathbf{L} y espín \mathbf{S} surgen de la interacción del momento magnético del electrón $\mu_e \propto \mathbf{S}$ con el campo magnético efectivo del núcleo $\mathbf{B} \propto \mathbf{L}$. Para calcular la corrección a los niveles de energía de un átomo hidrógeno de debido a la interacción espín-órbita es conveniente definir el momento angular total del electrón $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ el cual se compone de su momento angular orbital y su momento angular espín. Antes de presentar el cálculo de esta corrección relativista con teoría de perturbaciones, se presentan las siguientes consideraciones:

- Se hace uso de la notación de Dirac donde la integral de la función de onda sin perturbar con su conjugado complejo se denota como $\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^*(r, \theta, \phi) \psi(r, \theta, \phi) dv$ donde $|\psi\rangle$ representa la función de onda en la integral mientras que $\langle \psi |$ representa su conjugado complejo.
- La función de onda satisface la condición de normalización dada por $\int \psi^*(r, \theta, \phi) \psi(r, \theta, \phi) dv = \langle \psi | \psi \rangle = 1$.
- El valor de expectación de una f es $\int \psi^*(r, \theta, \phi) f \psi(r, \theta, \phi) dv = \langle \psi | f | \psi \rangle$. En este caso es una integral en coordenadas esféricas donde $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

⁹En teoría de perturbaciones de primer orden, la corrección a la energía es proporcional al elemento de matriz del término perturbativo. Al evaluar el elemento de matriz de la perturbación (1.4) en un estado específico determinado por los números cuánticos n y l se obtiene la Ecn. (1.5).

¹⁰La corrección por acoplamiento espín-órbita se analizó considerando el átomo de hidrógeno, pero los átomos alcalinos, al ser hidrogenoides, tienen comportamiento similar y sólo se debe realizar una corrección debido a que se tiene un potencial efectivo.

- El estado $|\psi\rangle$ es un vector propio común¹¹ de los operadores \mathbf{J}^2 , \mathbf{L}^2 y \mathbf{S}^2 , y satisfacen las siguientes ecuaciones de eigenvalores $\mathbf{J}^2|\psi\rangle = j(j+1)|\psi\rangle$, $\mathbf{L}^2|\psi\rangle = l(l+1)|\psi\rangle$ y $\mathbf{S}^2|\psi\rangle = s(s+1)|\psi\rangle$. Los eigenvalores j , l y s corresponden a los números cuánticos de momento angular: total, orbital y espín del electrón, respectivamente.

Para obtener la corrección a la energía, aplicamos teoría de perturbaciones, por lo que

$$\begin{aligned} E'_{\text{so}} &= \langle \psi | H'_{\text{so}} | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi \rangle. \\ E'_{\text{so}} &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2} \langle \psi | \frac{1}{r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Observemos que podemos factorizar la integral de tal manera que

$$\langle \psi | \frac{1}{r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi \rangle = \langle \psi_{\text{Rad}} | \frac{1}{r^3} | \psi_{\text{Rad}} \rangle \langle \psi_{\text{Ang}} | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi_{\text{Ang}} \rangle, \quad (1.8)$$

debido a que tanto \mathbf{S} como \mathbf{L} no dependen de la variable radial. Podemos calcular la parte angular a partir del operador $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})$, con el que obtenemos los valores propios de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$, se compone

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{Ang}} | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi_{\text{Ang}} \rangle &= \langle \psi_{\text{Ang}} | \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) | \psi_{\text{Ang}} \rangle \\ \langle \psi_{\text{Ang}} | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi_{\text{Ang}} \rangle &= \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \langle \psi_{\text{Ang}} | \psi_{\text{Ang}} \rangle. \\ \langle \psi_{\text{Ang}} | \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} | \psi_{\text{Ang}} \rangle &= \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

En la última igualdad se ha tomado en cuenta que $s = \frac{1}{2}$, por tratarse del espín del electrón. Sustituyendo en la corrección a la energía

$$E'_{\text{so}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{m^2 c^2} \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \langle \psi_{\text{Rad}} | \frac{1}{r^3} | \psi_{\text{Rad}} \rangle. \quad (1.10)$$

En general, la integral radial $\langle \psi_{\text{Rad}} | \frac{1}{r^3} | \psi_{\text{Rad}} \rangle \propto \frac{n}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$ por lo que la corrección a la energía por el acoplamiento espín-órbita [7]

$$E'_{\text{so}} \propto \frac{n[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}]}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)}. \quad (1.11)$$

La corrección espín-órbita es válida cuando $l \neq 0$ ya que tiene un término l en el denominador, para el caso de $l = 0$, existe otro término de corrección llamado el término de Darwin [9], este término es puramente cuántico, por lo que no tiene análogo clásico, a su vez, es necesario tener un conocimiento más especializado de la mecánica cuántica para poder interpretarlo,

¹¹Los operadores \mathbf{J}^2 , \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 son operadores Hermitianos que conmutan entre sí, es por esto que comparten una base de vectores propios comunes. Esta propiedad nos la dice el siguiente teorema: *Si dos operadores Hermitianos \mathbf{A} y \mathbf{B} conmutan y si \mathbf{A} no tiene valores propios degenerados, entonces cada vector propio de \mathbf{A} también será un vector propio de \mathbf{B} . Adicionalmente, podemos construir una base ortonormal común que esté hecha de los vectores propios de \mathbf{A} y \mathbf{B} .* [10]

es por esta razón que no lo vamos a desarrollar, pero es necesario considerarlo para tener la corrección completa de la estructura fina, esta corrección se comporta como [11]

$$E'_{\text{Darwin}} \propto n, \quad (1.12)$$

y solo aplica para el caso especial $l = 0$.

Entonces la estructura fina será la suma de las correcciones de energía cinética, de acoplamiento espín-órbita y del término de Darwin; para calcularla, consideramos¹² $j = l - \frac{1}{2}$ para poner todo en términos de j , para poder sumar los términos¹³, las correcciones en términos de j

$$E'_r \propto \frac{3}{4} - \frac{n}{j}, \quad (1.13)$$

$$E'_{\text{so}} \propto \frac{n}{j(j + \frac{1}{2})}, \quad (1.14)$$

$$E'_{\text{Darwin}} \propto n. \quad (1.15)$$

Al sumarlos, simplemente hay que considerar que $E'_{\text{Darwin}} = 0$ cuando $l \neq 0$ y $E'_{\text{so}} = 0$ cuando $l = 0$. Al hacerlo, se llega a una expresión de la forma [11]

$$E_{\text{ef}} \propto \frac{3}{4} - \frac{n}{j + \frac{1}{2}}. \quad (1.16)$$

La cual aplica para cualquier valor de l .

1.1.2. Estructura fina del átomo de ⁸⁷Rb

A manera de ejemplo, a continuación calcularé la estructura fina de un átomo en concreto, el átomo de Rubidio¹⁴. Para calcular la estructura fina primero debemos conocer su estructura electrónica, la cuál esta escrita en términos de su número cuántico principal y su número cuántico de momento angular l . La estructura electrónica del Rubidio (cuyo número total de electrones es $Z = 37$) es $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 2d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1$, donde el primer número corresponde al valor del número cuántico principal, la letra corresponde al valor del número cuántico de momento angular donde $s \rightarrow l = 0$, $p \rightarrow l = 1$, $d \rightarrow l = 2$ y $f \rightarrow l = 3$ y por último el superíndice indica cuántos electrones hay en cada capa electrónica¹⁵. Conociendo los números cuánticos del electrón de valencia de este átomo hidrogenoide, se puede calcular la estructura fina, la cual para el Rubidio esta representada en la Figura 1.1.

¹²Se llega al mismo resultado usando $j = l + \frac{1}{2}$ o usando $j = l - \frac{1}{2}$

¹³Tanto la corrección a la energía relativista, la corrección espín-órbita como la corrección por término de Darwin tienen la misma constante de proporcionalidad y es por esto que se pueden sumar como se indica.

¹⁴El Rubidio se encuentra en la naturaleza en forma de isótopos: ⁸⁵Rb y ⁸⁷Rb. Un isótopo es un átomo que tiene mayor un número de neutrones que de protones en el núcleo, lo que no afecta su carga eléctrica pero sí su peso molecular; por ejemplo, el ⁸⁷Rb tiene 37 protones y 50 neutrones (87 nucleones) en el núcleo mientras que el ⁸⁵Rb tiene 37 protones y 48 neutrones (85 nucleones) en el núcleo.

¹⁵Los electrones se agrupan en capas siguiendo el Principio de Exclusión de Pauli.

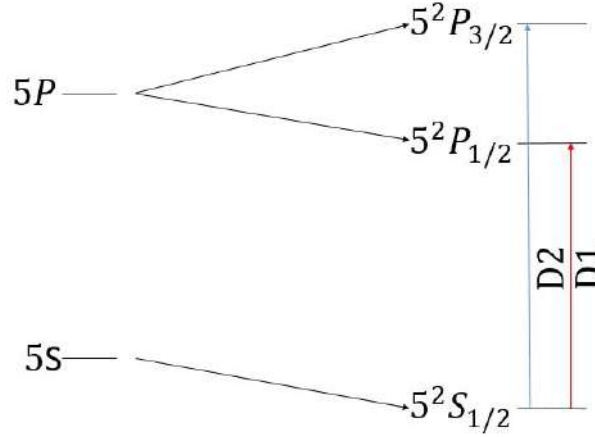


Figura 1.1: Estructura fina del átomo de Rubidio para el estado base $5S$ del electrón de valencia y su primer estado $5P$, donde se muestran las líneas de excitación D1 la cual va del estado $5^2S_{1/2}$ al estado $5^2P_{1/2}$ y la línea D2 la cual va del estado $5^2S_{1/2}$ al estado $5^2P_{3/2}$.

La notación para identificar los niveles de energía en la estructura fina se conoce como notación de Russell-Saunders [12], que se denota como $^{2S+1}\mathbf{L}_J$, donde \mathbf{S} es el momento de espín total, el cual corresponde a la suma del número cuántico de espín s de cada electrón de valencia, \mathbf{L} es el momento angular orbital total, el cual corresponde a la suma del número cuántico de momento angular orbital l de cada electrón, este se denota con letras mayúsculas tal que $S \rightarrow \mathbf{L} = 0$, $P \rightarrow \mathbf{L} = 1$, $D \rightarrow \mathbf{L} = 2$ y $F \rightarrow \mathbf{L} = 3$ y por último \mathbf{J} es el momento angular total que se define como $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. A veces, para saber de que electrón se esta hablando se agrega al inicio el valor del número cuántico principal n , de tal manera que la notación queda como $n^{2S+1}\mathbf{L}_J$.

Observemos entonces que para el estado base, el cual tiene los números cuánticos $n = 5$, $l = 0$ y $s = \frac{1}{2}$ se tiene el valor del momento angular total $j = \frac{1}{2}$, lo que se refleja sólo como una corrección a la energía, mientras que para el primer estado excitado, se tienen los números cuánticos $n = 5$ y $l = 1$, por lo que el valor del momento angular total puede tomar los valores de $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, es por esto que la corrección a la energía se manifiesta como un desdoblamiento en este nivel dando lugar a los primeros niveles excitados, debido a que solo se tiene un electrón los valores de \mathbf{S} , \mathbf{L} y \mathbf{J} corresponden a los valores s , l y j , por lo que en notación de Russell-Saunders, el estado base se tiene $5^2S_{1/2}$ y para el primer estado excitado los estados desdoblados se denotan como $5^2P_{1/2}$ y $5^2P_{3/2}$ respectivamente.

La Figura 1.1, presenta los niveles de estructura fina de menor energía del átomo de Rubidio. Ambos conforman un doblete con 2 transiciones posibles: La línea D1 (que va del estado $5^2S_{1/2}$ al estado excitado $5^2P_{1/2}$) corresponde a una transición de 794.8 nm [13], mientras que la línea D2 que va del estado $5^2S_{1/2}$ al estado excitado $5^2P_{3/2}$, corresponde a 780 nm [13], ambas transiciones corresponden con longitudes de onda de láseres comerciales. La línea D2 tiene propiedades físicas especiales para poder realizar enfriamiento láser de manera eficiente, como describiremos más adelante. Para ello es necesario conocer la estructura hiperfina del átomo.

¹⁶El valor del espín del electrón siempre será $s = \frac{1}{2}$ ya que este es una característica intrínseca del electrón, esto hace que la estructura fina sea un desdoblamiento de a lo más 2 niveles.

1.1.3. Estructura hiperfina del átomo de ^{87}Rb

A continuación se describiremos el origen de la estructura hiperfina. En el átomo, el núcleo atómico también presenta un momento magnético intrínseco el cual está relacionado con el espín del núcleo (representado por la letra I) $\mu_N \propto I$, el cual es mucho menor que el momento magnético del electrón en magnitud ¹⁷. Debido al movimiento relativo entre el electrón y el núcleo, se genera una interacción entre el momento magnético nuclear y el campo magnético del electrón. Esta interacción se comporta de manera similar al acoplamiento espín-órbita, tanto así que el término de corrección al Hamiltoniano es

$$H_{\text{EHF}} \propto \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}. \quad (1.17)$$

En la ecuación anterior, el espín nuclear y el momento angular total del electrón se acoplan, por lo que de nuevo es conveniente definir el momento angular total del átomo $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ (\mathbf{F}^2 también tiene valor propio $\mathbf{F}^2|\psi\rangle = F(F+1)|\psi\rangle$). Aplicando teoría de perturbación

$$E_{\text{EHF}} = \langle \psi | H_{\text{EHF}} | \psi \rangle \propto \langle \psi | \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} | \psi \rangle. \quad (1.18)$$

Calculamos los valores propios de $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ a partir del momento angular total del átomo $\mathbf{F}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{J})(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \mathbf{I}^2 + \mathbf{J}^2 + 2(\mathbf{I} \cdot \mathbf{J})$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)|\psi\rangle = \frac{1}{2}[F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)]|\psi\rangle. \quad (1.19)$$

Entonces la corrección de energía tiene el siguiente comportamiento

$$E_{\text{EHF}} \propto [F(F+1) - I(I+1) - j(j+1)]. \quad (1.20)$$

A continuación calcularé la estructura hiperfina de la línea D2 del átomo de Rubidio, específicamente del ^{87}Rb , ¹⁸ el cual tiene espín nuclear $I = \frac{3}{2}$ [13]. La estructura hiperfina de la línea D2 del Rubidio está representada en la Figura 1.2.

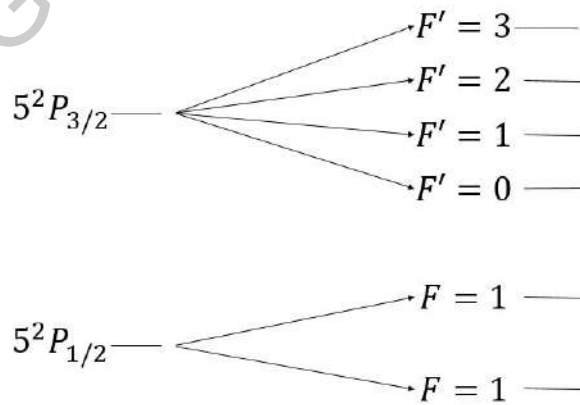


Figura 1.2: Estructura hiperfina de la línea D2 del átomo de ^{87}Rb .

¹⁷El momento magnético del electrón es proporcional al magnetón de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ donde m_e es la masa del electrón, mientras que el momento magnético nuclear es proporcional al magnetón nuclear $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ donde m_p es la masa de un protón. La relación $\frac{\mu_N}{\mu_B} = \frac{m_p}{m_e} \approx \frac{1}{1800}$, es por esto que el momento magnético nuclear es menor que el momento magnético del electrón.

¹⁸Para calcular la estructura hiperfina es importante aclarar qué isótopo se va a utilizar ya que el espín nuclear varía de un isótopo a otro.

En el estado $5^2S_{1/2}$ el valor del momento angular total es $J = \frac{1}{2}$, combinando con el espín nuclear $I = \frac{3}{2}$ tenemos que el momento angular total del átomo puede tomar los valores de $F = 1, 2$, esto es lo que da origen al desdoblamiento en dos niveles del estado base $5^2S_{1/2}$. Por otro lado, el estado $5^2P_{3/2}$ tiene momento angular total $J = \frac{3}{2}$, por lo que el momento angular total del átomo puede tomar los valores de $F' = 0, 1, 2, 3$ (se escribe F' para diferenciar a los estados excitados de los estados de menor energía $5^2S_{1/2}$) generando un desdoblamiento en 4 niveles para el estado $5^2P_{3/2}$.

2. Introducción a métodos de enfriamiento para átomos neutros

El enfriamiento de átomos neutros hace uso de algunas propiedades interesantes de los átomos al estar expuestos a la componente eléctrica del campo electromagnético que describe la radiación láser y a campos magnéticos generados por bobinas. En primer lugar, al exponer un átomo neutro a un haz láser, este sufre una redistribución de carga que se manifiesta como un momento dipolar inducido en el átomo, el campo eléctrico interacciona con este momento dipolar lo que da origen a una fuerza cuya magnitud es significativa lejos de resonancia atómica (esta fuerza da origen al atrapamiento dipolar óptico). El intercambio de momento lineal en los procesos de absorción y emisión espontánea de fotones cuando un átomo interactúa con un haz láser cerca de resonancia es el responsable de generar la fuerza de dispersión (que da origen al enfriamiento láser). Estas fuerzas tienen diferentes características y regímenes de aplicación, por ejemplo, la fuerza lejos de resonancia sirve para crear una trampa para átomos neutros mientras que la fuerza de dispersión en resonancia por sí sola no produce atrapamiento, sino que da lugar a un medio en el cual se enfrían los átomos, sin atraparlos. Por otro lado, si se expone un átomo neutro a campos magnéticos, este sufrirá un desdoblamiento en sus niveles de energía que está relacionado con el momento magnético del átomo, conocido como efecto Zeeman, este efecto incrementa conforme incrementamos el campo magnético. Haciendo uso de estas características es que se diseña un sistema de atrapamiento basado en campos magnéticos dando origen a las trampas magnéticas. A lo largo de esta sección se describirán con más detalle estos procesos y su aplicación para lograr enfriar y atrapar átomos.

2.1. Enfriamiento Láser

En la Sección 1 aprendimos que los átomos alcalinos tienen una estructura electrónica compleja, lo que hace que tengan más de dos niveles en los cuales puede estar el electrón; sin embargo, al ser iluminados por campos láser de ciertas características, es posible recurrir a un modelo de átomo de 2 niveles¹⁹(Apéndice A), para comprender el método experimental del enfriamiento láser.

A continuación desarrollaremos las ecuaciones de movimiento de un átomo en presencia de un campo láser y obtendremos una expresión para la fuerza ejercida sobre el átomo como

¹⁹La aplicación/estudio del modelo del átomo de dos niveles se justifica con base en teoría de momento angular aplicada al estudio de las transiciones electrónicas excitadas y a los decaimientos involucrados en el proceso de enfriamiento láser. Como se verá más adelante, la polarización de la luz y las reglas de selección para las transiciones juegan un papel muy importante para la validez del modelo.

resultado de la interacción con la luz láser. Comencemos entonces con un átomo al cual iluminamos con un haz láser, esta interacción es capaz de redistribuir la carga del átomo, de tal manera que se genera un momento dipolar inducido, este momento dipolar (denotado por la letra \mathbf{P}) depende del campo eléctrico generado por el haz láser, un momento dipolar inducido cualquiera matemáticamente tiene la forma $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ (para el caso específico de un átomo de dos niveles ver el Apéndice B), donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica del material y nos indica que tan sensible es el material a generar dipolos eléctricos en presencia de campos eléctricos externos \mathbf{E} . El campo eléctrico generado por el láser entonces interactuará con el momento dipolar inducido y la energía está dada por $U = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$, el momento dipolar no es homogéneo, por lo que tenemos que calcular el valor del potencial en todo el campo, para esto hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e d\mathbf{E}, \\ dU &= -\epsilon_0 \chi_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E}, \\ \rightarrow U &= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_a E^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

el factor de $\frac{1}{2}$ surge del hecho de que el dipolo que hay en el átomo sea un dipolo inducido, en el caso de un dipolo permanente este no depende del campo y por ende no surge este factor.

Podemos calcular entonces la fuerza ejercida sobre el átomo a partir de calcular el gradiente del potencial, $F = -\nabla U$, para lo cual suponemos que el láser genera un campo polarizado $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{e}_x$ donde k es el número de onda y E_0 la amplitud del campo. Este campo se propaga a lo largo del eje \hat{e}_z y oscila a lo largo del eje \hat{e}_x , lo que da origen a una fuerza a lo largo de \hat{e}_z ²⁰, la cual tiene la forma

$$F_z = \epsilon_0 \chi_a E \frac{\partial E}{\partial z}, \quad (2.2)$$

$$F_z = \epsilon_0 \chi_a E \left(\frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(\omega t - kz) + k E_0 \sin(\omega t - kz) \right). \quad (2.3)$$

De la Ecn. (2.3) identificamos el momento dipolar $\epsilon_0 \chi_a E$, esta expresión adquiere una forma específica para el caso del átomo de dos niveles²¹, el cuál es conveniente escribir en términos de las componentes del vector de Bloch²²(u, v, w). El momento dipolar inducido para el átomo de dos niveles en términos de las componentes del vector de Bloch es

²⁰Para hacer este cálculo, se puede tomar un campo que se propague en el eje \hat{e}_x ó \hat{e}_y , lo que generaría fuerzas en \hat{e}_x ó \hat{e}_y respectivamente, la cual tendrá el mismo comportamiento que la fuerza que se genera en z .

²¹Deducimos la expresión para el momento dipolar en el Apéndice B.

²²El vector de Bloch es una forma de describir geoméricamente el sistema de dos niveles, del cual se habla mas a detalle en el Apéndice C, en este apéndice también escribimos la expresión para el momento dipolar en términos de las componentes del vector de Bloch, las cuales son $u = \widetilde{\rho}_{12} + \widetilde{\rho}_{21}$ $v = i(\widetilde{\rho}_{12} - \widetilde{\rho}_{21})$ $w = \widetilde{\rho}_{11} - \widetilde{\rho}_{22}$, donde $\widetilde{\rho}_{11} = \widetilde{C}_1 \widetilde{C}_1^*$ y $\widetilde{\rho}_{22} = \widetilde{C}_2 \widetilde{C}_2^*$, representan las poblaciones de los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ respectivamente, $\widetilde{\rho}_{12} = \widetilde{C}_1 \widetilde{C}_2^*$ y $\widetilde{\rho}_{21} = \widetilde{C}_2 \widetilde{C}_1^*$ representan la respuesta del sistema a la frecuencia de resonancia, en estas expresiones $\widetilde{C}_1 = C_1 e^{-\frac{i\omega t}{2}}$ y $\widetilde{C}_2 = C_2 e^{\frac{i\omega t}{2}}$ donde C_1 y C_2 son las amplitudes de probabilidad de los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ que se obtienen de resolver la interacción entre un sistema de dos niveles con un campo eléctrico externo (ver Apéndice A).

$\mathbf{P} = -e\chi_{12}(u \cos \omega t - v \sen \omega t)$ (Ecn. (C.4)), por lo tanto al sustituir en la Ecn. (2.3)

$$F_z = -e\chi_{12} \left(u \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos^2(\omega t - kz) + ukE_0 \cos(\omega t - kz) \sen(\omega t - kz) - v \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(\omega t - kz) \sen(\omega t - kz) + vkE_0 \sen^2(\omega t - kz) \right). \quad (2.4)$$

En la expresión anterior u y v son las componentes del vector de Bloch y χ_{12} es la integral en notación compacta $\chi_{12} = \langle 1|z|2 \rangle$ que surge del cálculo del momento dipolar del sistema de dos niveles. Para simplificar la Ecn. (2.4) la reescribimos en términos de la frecuencia de Rabi²³ Ω y además como esta interacción ocurrirá varias veces en corto tiempo nos interesa su promedio, entonces después de muchas oscilaciones²⁴ la Ecn. (2.4) adquiere la forma

$$\overline{F_z} = -\frac{u\hbar}{2} \frac{\partial E_0}{\partial z} + vk\hbar\Omega. \quad (2.5)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que, en promedio, podemos observar dos fuerzas que actúan sobre el átomo, las cuales corresponden a la fuerza dipolar y a la fuerza de dispersión²⁵, siendo estas

$$F_{\text{dip}} = -\frac{u\hbar}{2} \frac{\partial E_0}{\partial z}, F_{\text{dis}} = vk\hbar\Omega. \quad (2.6)$$

En el Apéndice E calculamos las componentes u y v en estado estacionario²⁶, por lo que al sustituir en las Ecns. (2.6) tenemos su forma general

$$F_{\text{dip}} = -\frac{\hbar\delta}{2} \frac{\Omega}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad (2.7)$$

$$F_{\text{dis}} = \hbar\kappa \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

Donde F_{dip} es la fuerza dipolar y F_{dis} es la fuerza de dispersión, el comportamiento de las fuerzas de dispersión se muestra en la Figura 2.6 con la gráfica de color azul, como esta fuerza surge del intercambio de momento entre los fotones y el átomo, tiene su máximo de intensidad en la frecuencia de resonancia ω_0 y conforme nos vamos alejando de esta va decayendo, mientras que la fuerza dipolar esta representada en la Figura 2.6 con la gráfica de color rojo, esta fuerza es más intensa lejos de la frecuencia de resonancia, hablaremos mas de la fuerza dipolar en la Sección 2.3.1.

²³La frecuencia de Rabi nos indica que tan bien se acoplan los niveles de energía en el átomo de dos niveles, y esta definida como $\Omega = eE_0 \frac{\chi_{12}}{\hbar}$.

²⁴Para calcular el promedio utilizamos los valores promedio $\overline{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$, $\overline{\sen^2 x} = \frac{1}{2}$ y $\overline{\cos x \sen x} = 0$.

²⁵Se le llama fuerza de dispersión debido a que es el origen de esta fuerza es el intercambio de momento que surge ente los fotones y el átomo, es por esto que esta fuerza es más intensa cuando se ilumina con un láser en resonancia, mientras que la fuerza dipolar se llama así debido a que al exponer el átomo a un campo eléctrico sus cargas se acomodan, originando un dipolo eléctrico, la fuerza surge de la interacción entre el dipolo inducido en el átomo y el campo eléctrico al que se le expone.

²⁶Utilizamos el estado estacionario debido a que el el sistema estará en este estado cuando sienta la fuerza promedio.

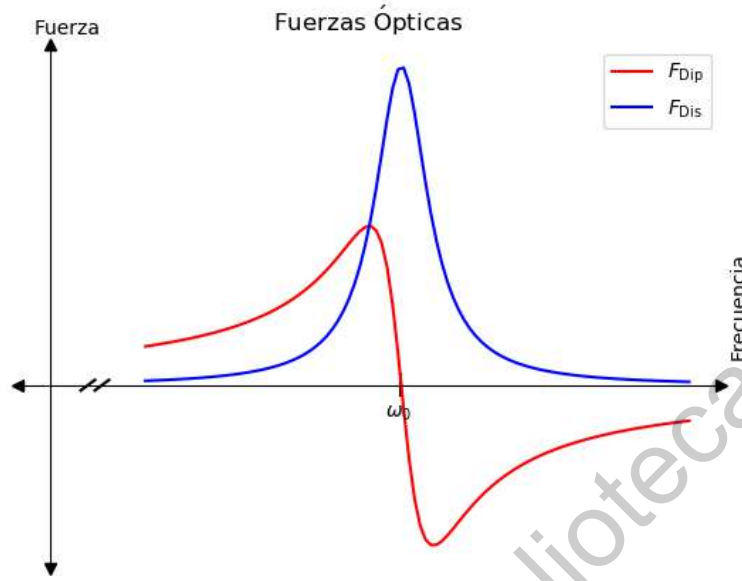


Figura 2.1: Comportamiento de las fuerzas dipolar y de dispersión con respecto a la frecuencia.

Comúnmente, la fuerza de dispersión se suele escribir en términos de la intensidad del láser con el que se ilumina y la intensidad de saturación²⁷ del sistema, de las cuales se habla más a detalle en el Apéndice F, al hacer el cambio pertinente las Ecn. (2.8) toman la forma

$$F_{\text{dis}} = \hbar\kappa \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2}}. \quad (2.10)$$

En la expresión anterior, I es la intensidad del láser y I_{sat} es la intensidad de saturación del sistema, la fracción $\frac{I}{I_{\text{sat}}}$ esta definida como (para más detalle ver Apéndice F)

$$\frac{I}{I_{\text{sat}}} = \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}. \quad (2.11)$$

La naturaleza de la fuerza da origen a diferentes fenómenos, por un lado, la fuerza dipolar da lugar a potenciales conservativos utilizados para crear las trampas dipolares (ver Sección 2.1), mientras que la fuerza de dispersión da origen al método de enfriamiento conocido como Melaza Óptica, la cual presentaremos a continuación.

2.1.1. Melaza óptica

La técnica de melaza óptica es un método de enfriamiento que hace uso de la fuerza de dispersión generada por la interacción átomo-láser para poder reducir la energía cinética

²⁷Un resultado importante de la solución estacionar del sistema de dos niveles interactuando con un campo eléctrico oscilante externo es que el sistema se satura al incrementar la intensidad del campo eléctrico, en este estado las poblaciones en los niveles base y excitado se igualan sin importar que sigamos aumentando la intensidad, se le conoce como intensidad de saturación al valor de la intensidad a partir del cual las poblaciones sufren este fenómeno en el que se igualan.

de un conjunto de átomos. Se denomina melaza óptica debido a que las ecuaciones que describen el movimiento de los átomos al estar expuestos a campos eléctricos son parecidas a las ecuaciones de un cuerpo el cual se mueve en un medio que presenta fricción, un ejemplo de esto es una partícula moviéndose a través de melaza, debido a la similitud que presentan ambos fenómenos decidieron llamar al efecto melaza óptica, siendo óptico debido a que lo que genera este entorno es un láser. La configuración para generar este método de enfriamiento es tener 3 pares de láseres contrapropagantes en las 3 direcciones espaciales estos láseres deben estar cerca de resonancia atómica para poder hacer a la fuerza dipolar despreciable²⁸. Para entender el mecanismo detrás de esta técnica de enfriamiento debemos considerar que el átomo está en movimiento, lo que hace que éste note una diferencia de frecuencia del haz incidente debido al efecto Doppler (ver Figura 2.2). A la hora de considerar la fuerza de dispersión (la cual depende de la frecuencia del láser a través de la desintonía, ver Ecn. (2.8)), debemos considerar una corrección debido al efecto Doppler que experimentan los átomos.

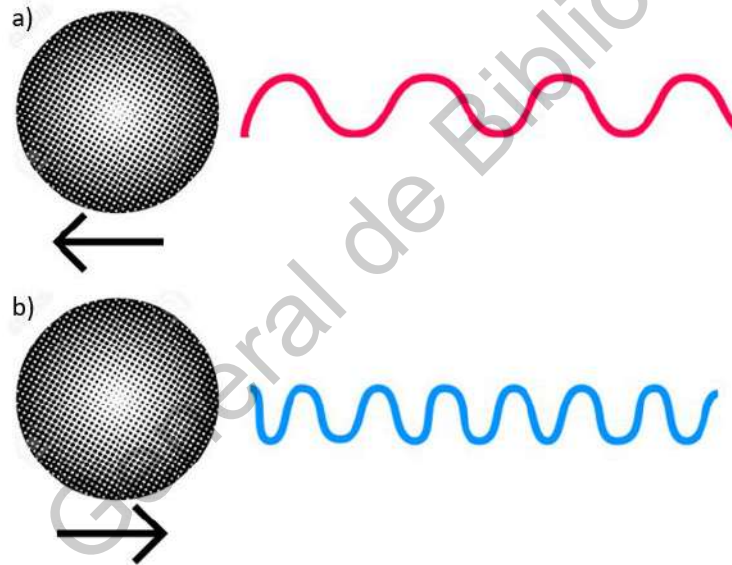


Figura 2.2: Efecto Doppler óptico, donde una partícula en un corrimiento en la longitud de onda original de la fuente. Si la partícula se está moviendo en la misma *dirección de propagación*, entonces la longitud de onda observada será mayor (la frecuencia observada por el átomo será menor), a este fenómeno se le conoce como *corrimiento al rojo*. Si la partícula se está moviendo en contra de la dirección de propagación con respecto al haz de luz, la longitud de onda observada será menor (la frecuencia observada será mayor), a este fenómeno se le conoce como *corrimiento al azul*.

Por simplicidad, sólo calcularemos la fuerza generada por haces contrapropagantes en un eje coordenado, pero es fácilmente generalizable a 3 dimensiones. Para lograr un enfriamiento efectivo en una dirección, si se desea reducir la velocidad de las partículas en el eje \hat{e}_x por ejemplo, debemos utilizar dos haces contrapropagantes de iguales características, de esta manera logramos realizar el frenado efectivo tanto si los átomos se mueven hacia $+x$ o se

²⁸Si sustituimos directamente en la Ecn. (2.10) el valor de $\delta = 0$, nos arroja que $F_{\text{dip}} = 0$

mueven hacia -x. La fuerza

$$F_{MO} = F_{dis}(\delta - kv) - F_{dis}(\delta + kv). \quad (2.12)$$

Donde F_{MO} es la fuerza que se genera por la técnica de melaza óptica en una dimensión, F_{dis} es la fuerza que calculamos previamente en la Ecn. 2.10, el término kv es la corrección a la frecuencia que se genera por el efecto Doppler²⁹, donde k es el número de onda y v la velocidad a la que se mueve el átomo [8].



Figura 2.3: Interacción del átomo con los haces láser, de color rojo se representa el láser que se propaga en la misma dirección que el movimiento del átomo, mientras que en color azul se representa el láser que se propaga en dirección contraria a su movimiento. También se representan las fuerzas que se generan con la interacción átomo-láser, con sus respectivas correcciones por efecto Doppler y con una flecha que representa la dirección de la fuerza.

La interacción del átomo con los haces láser se muestra en la Figura 2.3, por un lado, el haz que se propaga en su misma dirección de movimiento, representado con rojo en la Figura, generará una fuerza que contribuye al movimiento del átomo por lo que la fuerza debe ser positiva, a su vez, la fuerza debe tener una corrección por el efecto Doppler, ya que el átomo sentirá una frecuencia menor por su movimiento, por lo que la corrección a la frecuencia debe ser negativa; la interacción con el haz que se propaga en dirección contraria al movimiento del átomo, representada con color azul en la Figura, restará al movimiento, por lo que generará una fuerza negativa, esta fuerza también debe tener una corrección por efecto Doppler, sólo que esta vez, la corrección será positiva debido al movimiento relativo entre fuente y observador.

Asumiendo que la velocidad del átomo es pequeña ($kv \ll \Gamma$) obtenemos que la fuerza que experimenta por al ser iluminado por los campos láseres (ver desarrollo en el Apéndice G)

$$F_{MO} \approx -2kv \frac{\partial F_{dis}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega}. \quad (2.13)$$

Esta fuerza tiene la misma estructura que la que surge al calcular las ecuaciones de movimiento de una partícula inmersa en un fluido viscoso, donde la fuerza que actúa sobre la partícula se opone a su movimiento y tiene la forma $F = -av$, esta fuerza es la responsable

²⁹La fuerza de la melaza óptica depende de la velocidad a través del efecto Doppler. Por esta razón esta técnica de enfriamiento se conoce como enfriamiento Doppler.

de reducir la energía de la partícula. Calculamos la derivada para conocer el valor de F_{MO}^{30} , lo que al sustituir nos genera

$$F_{MO} = 4k^2v \frac{I}{I_{sat}} - \frac{\frac{2\delta}{\Gamma}}{\left[1 + \left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right)^2\right]^2}. \quad (2.14)$$

Esta expresión nos permite conocer el comportamiento de la fuerza con respecto a la velocidad a la que se mueve el átomo. El comportamiento de la fuerza que experimentan los átomos en una melaza óptica esta representado en la Figura 2.4 donde se puede observar que los átomos dentro de cierto rango de velocidades serán detenidos por la fuerza generada por la melaza óptica, debido a este hecho es que no se considera una trampa, ya que sólo se limita a bajar la energía cinética de los átomos que se traduce como una reducción de temperatura del sistema en general.

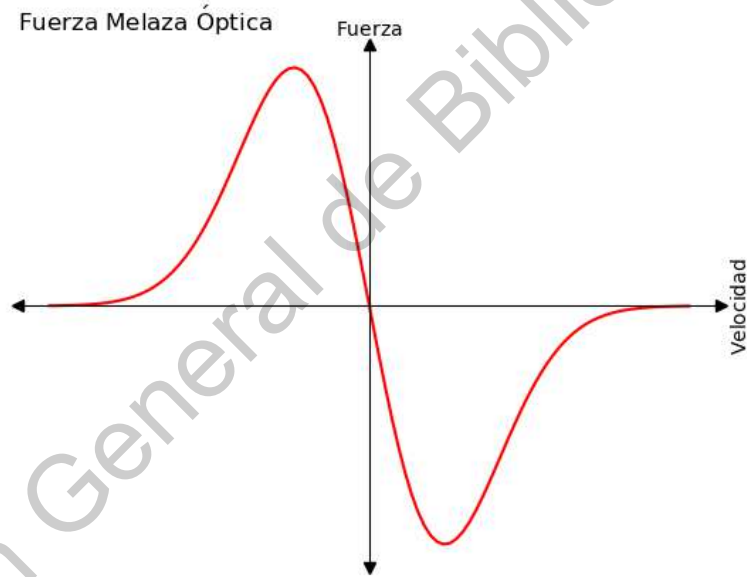


Figura 2.4: Comportamiento de la fuerza en el método de enfriamiento melaza óptica, donde los átomos se encuentran en un medio disipativo de energía generado por dos haces láser contrapropagantes.

Esta descripción ideal de la fuerza no toma en cuenta que la fuerza presenta fluctuaciones

³⁰Se asume que $\frac{I}{I_{sat}} \ll 1$ en el denominador de la Ecn. 2.14 debido a que, para que las fuerzas generadas por los haces contrapropagantes actúen de manera independiente, la intensidad deben ser mucho menores a las intensidades de saturación. A su vez, el primer término de la derivada

$$\frac{\partial F_{dis}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} = \frac{\hbar \Gamma}{c} \frac{\frac{I}{I_{sat}}}{2 \left(1 + \frac{I}{I_{sat}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}\right)} + \hbar \kappa \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{sat}}}{1 + \frac{I}{I_{sat}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} \right]$$

se desprecia debido a que el segundo término es aproximadamente 10^8 veces mas grande.

debido a un proceso conocido como emisión espontánea ³¹. La emisión espontánea es un proceso en el que un átomo que se encuentra en su estado excitado emite un fotón en una dirección aleatoria, lo que hace que este pase del estado excitado al estado base. Estas fluctuaciones se traducen como calentamiento no deseado del sistema y son las responsables de que el método de melaza óptica tenga límite de enfriamiento, el cual es conocido como el límite Doppler y está dado por la Ecuación [14]

$$k_B T_{\text{Doppler}} = \frac{\hbar\Gamma}{2}. \quad (2.15)$$

Donde k_B es la constante de Boltzmann, T_{Doppler} es la temperatura mínima y Γ es la tasa de decaimiento. En general, la temperatura límite es de cientos de μK , para el caso particular del Rubidio 87 la temperatura límite es $T_{\text{Doppler}} = 144 \mu\text{K}$ ($\Gamma_{\text{Rb-87}} = 2\pi \times 5.9 \text{ MHz}$ [13]).

Para hacer el método de melaza óptica una trampa, es necesario combinar los láseres con campos magnéticos generados por bobinas, a esta configuración se le conoce como trampa magneto óptica y hablaremos de ella a continuación.

2.1.2. Trampa magneto-óptica

Para lograr que el método de enfriamiento por melaza óptica se vuelva una trampa para átomos neutros, es necesario implementar la melaza óptica junto con un campo magnético no uniforme, ambos dan origen a la trampa magneto-óptica. La configuración para generar una trampa magneto óptica consta de los 3 pares de láseres contrapropagantes mas un par de bobinas en configuración anti-Helmholtz como se muestra en la Figura 2.5. Las bobinas en configuración anti-Helmholtz generan un cuadripolo magnético, el cual a su vez da lugar un gradiente de campo magnético³² que causa que la fuerza de melaza óptica sufra un ajuste, generando la fuerza que da lugar a la trampa magneto-óptica.

³¹Además del proceso de emisión espontánea, existe el proceso de absorción, en el cuál un átomo en estado base absorbe un fotón, lo que hace que pase del estado base al estado excitado, y también existe el proceso de emisión estimulada, donde un átomo que se encuentra en el estado excitado emite un fotón en la misma dirección que el láser que lo está estimulando, lo que hace que pase del estado excitado al estado base. Estos procesos no calientan el sistema debido a que se compensan.

³²Es necesario que sea el gradiente de un campo magnético, debido a que un campo magnético homogéneo no genera una fuerza, lo que no altera al sistema.

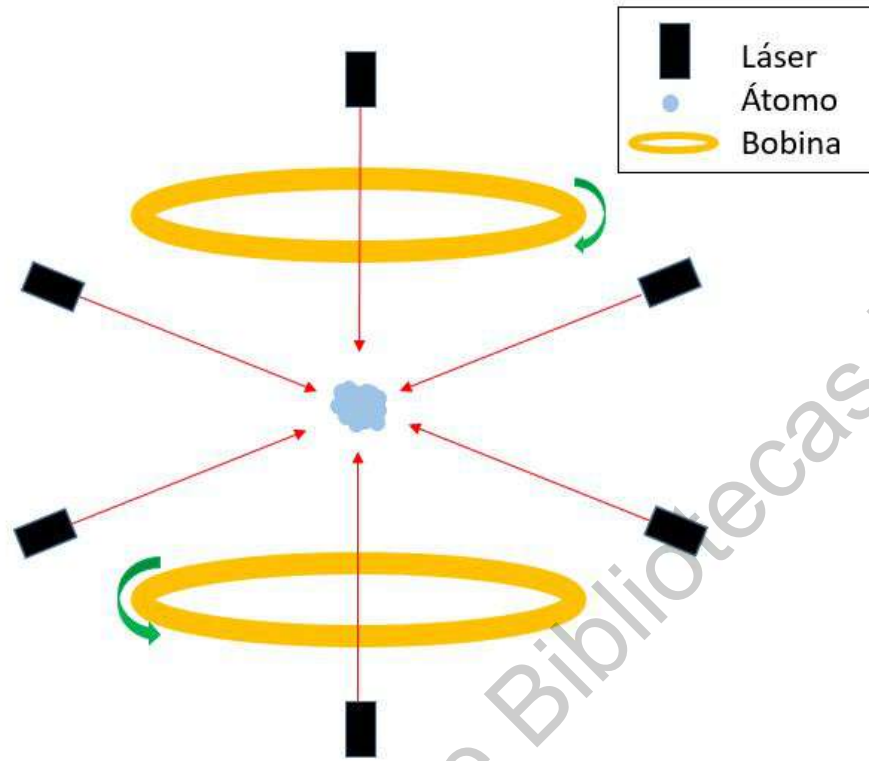


Figura 2.5: Esquemático de trampa magneto-óptica, donde se muestran los 3 pares de láseres contrapropagantes mas un par de bobinas, las flechas verdes indican la dirección de la corriente, está en configuración anti-Helmholtz debido a que las corrientes fluyen en dirección contraria en las bobinas. En el centro se representa al gas atómico que se desea enfriar.

Para que funcione la trampa magneto-óptica se debe encender el gradiente de campo magnético, este gradiente genera un desdoblamiento extra en los niveles hiperfinos de energía en el átomo, de los cuales hablamos en la sección 1. Este desdoblamiento generado por la presencia de un campo magnético se le conoce como efecto Zeeman, donde el Hamiltoniano de interacción es³³ [8]

$$H_{\text{Zeeman}} = -\mu_{\text{atomo}} \cdot \mathbf{B} = g_J \mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.16)$$

El campo magnético en nuestro caso es generado por las bobinas anti-Helmholtz, para que funcione este método el campo magnético debe ser débil (su energía de interacción debe ser menor que la estructura fina para ser considerado débil), si esto se cumple podemos tratar esta interacción como una perturbación, al aplicar teoría de perturbaciones obtenemos [8]

$$E_{\text{Zeeman}} = g_F \mu_B B m_F. \quad (2.17)$$

Donde $g_F = \frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)} g_J$ [8] donde a su vez g_J es el factor g de Landé y m_F es el número cuántico magnético, que puede tener los valores $-F \leq m_F \leq F$, esto nos indica en

³³Se hace la aproximación

$$\mu_{\text{atomo}} = -g_J \mu_B \mathbf{J} + g_I \mu_N \mathbf{I} \approx -g_J \mu_B \mathbf{J}$$

debido a que $\mu_e \gg \mu_N$.

cuantos niveles se va a desdoblar el nivel de energía, por ejemplo, para el Rubidio-87 el nivel de energía $5S_{1/2} F = 1$, se desdoblará en 3 estados, $m_F = -1, 0, 1$.

Aparte de generar el desdoblamiento por efecto Zeeman en el átomo, el campo magnético define un eje de cuantización, que en general es en el eje \hat{z} debido a que el momento magnético μ del átomo tiende a alinearse con el campo magnético. Definir el eje de cuantización hace que sea relevante la dirección en la cual el campo eléctrico generado por el láser oscila, a esta característica se le conoce como polarización y es importante considerarla debido a que los átomos interactuarán de manera diferente con el campo dependiendo su polarización. Es útil describir entonces la polarización de el haz en términos de los vectores esféricos irreducibles, los cuales son [15]

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_0 = \hat{z}, \quad \mathbf{e}_{+1} = -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}. \quad (2.18)$$

Observemos que el vector \mathbf{e}_0 corresponde a el eje \hat{z} , esto es debido a que nuestro eje de cuantización lo ajustamos a este eje. El escribir el campo eléctrico polarizado en términos de los vectores irreducibles hace que podamos hablar en general de 3 tipos de polarización, la polarización lineal π , la polarización circular σ_+ y a polarización circular σ_- , estas polarizaciones tendrán diferentes interacciones con el átomo, cambiando su nivel de energía, el cual cambia de una manera determinada, que esta dada por las reglas de selección del momento.

Las reglas de selección del momento surgen de analizar el comportamiento de la integral $\int_V \varphi^* n' l' m' (r, \theta, \phi) \mathbf{r} \varphi_{nlm}(r, \theta, \phi) dV$ que surge la interacción del momento dipolar inducido con el campo eléctrico generado por el láser, el resultado de estas integrales dependen de los números cuánticos l y m , su resultado nos indica que transiciones energéticas son posibles en el átomo. En general, se tiene que las transiciones deben cumplir que $\Delta m = m' - m = \pm 1, 0$ y $\Delta l = l' - l = \pm 1$ [7], de no ser así, la integral da 0 y no genera un cambio de estado.

Las reglas de selección junto con el análisis de la polarización de el campo eléctrico nos dejan como conclusión que [15]:

- Si la polarización es σ_+ generara una transición $\Delta m = 1$.
- Si la polarización es σ_- generara una transición $\Delta m = -1$.
- Si la polarización es π generara una transición $\Delta m = 0$

Considerando entonces la polarización, tenemos que nuestros haces contrapropagantes tienen polarización σ_+ para el caso del haz que se propaga en la misma dirección que el movimiento del átomo y polarización σ_- para el caso del haz que se propaga en dirección contraria al movimiento del átomo, por lo que la corrección a la fuerza generada en la técnica de melaza óptica (Ecn (2.12)) es (se hicieron aproximaciones pra llegar al resultado) [8]

$$F_{\text{MOT}} = F_{\text{dis}}(\delta - kv - \beta z) - F_{\text{dis}}(\delta + kv + \beta z),$$

$$F_{\text{MOT}} \approx -2 \frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} (kv + \beta z). \quad (2.19)$$

Donde F_{MOT} es la fuerza en la tampa magneto-óptica y el término βz es el desdoblamiento por efecto Zeeman en un desplazamiento z , dado por [8]

$$\beta z = \frac{g\mu_B}{\hbar} \frac{dB}{dz} z, \quad (2.20)$$

en el cual se incorporó el gradiente de campo generado por nuestro arreglo de bobinas. Observemos entonces que el implementar un campo magnético, surge una fuerza de la forma $F = -kz$ (donde $k = 2\frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega-\omega_0)}{\beta}z$), esta fuerza es conservativa, debido a que se parece a la fuerza generada por un resorte, lo que hace que los átomos se junten en $z = 0$. Debido a que los átomos tienden a una posición es por lo que consideramos a la trampa magneto-óptica una trampa, ya que permite confinar a los átomos en una región concreta del espacio, cabe mencionar que los rangos de temperaturas posibles en esta trampa son los mismos que en la melaza óptica. Las trampas magneto-ópticas son utilizadas generalmente como paso previo para cargar de átomos ya sea a una trampa magnética o a una trampa dipolar óptica (de las cuales hablaremos más adelante), las cuales alcanzan temperaturas aún más bajas, pero necesitan tener átomos previamente enfriados para poder funcionar, mientras que las trampas magneto-ópticas son capaces de generar el enfriado y atrapamiento a temperatura ambiente.

2.2. Enfriamiento por evaporación en trampas magnéticas

La trampa magnética tiene origen en el desdoblamiento por efecto Zeeman que calculamos previamente en la Sección 2.1.2, donde la energía de desdoblamiento puede ser vista como una energía potencial, de la cual podemos calcular una fuerza (recordando que $\mathbf{F} = -\nabla E_{\text{potencial}}$), de tal manera que al derivar la Ecn. (2.17) obtenemos

$$F_{\text{mag}} = -g_{\text{F}}\mu_{\text{B}}m_{\text{F}}\nabla B. \quad (2.21)$$

El campo magnético dependerá de la configuración de Bobinas que se desee utilizar, algunas de ellas son la configuración anti-helmholtz, Ioffe, etc. el uso de una u otra dependerá de lo que se quiere hacer ya que por ejemplo las bobinas anti-helmholtz no generan campo a lo largo de un eje (dependiendo como se monte). Es importante observar que tanto la fuerza como la energía dependen de la magnitud del campo magnético sin importar la dirección.

2.2.1. Atrapamiento magnético en átomos Multi-nivel

Continuando con la configuración anti-helmholtz que propusimos, tenemos que se genera un gradiente de campo en el plano x-y, por lo que la derivada $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$, ahora, nos interesa más bien el comportamiento radial, para escribir la fuerza en términos radiales partimos de la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, de donde obtenemos que para que se cumpla $\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial y} = b$, para obtener el valor del campo magnético entonces integramos, lo que nos arroja que el campo magnético tiene la forma

$$\mathbf{B} = b(x\hat{x} - y\hat{y}) + \mathbf{B}_0. \quad (2.22)$$

La constante \mathbf{B}_0 es la suma de las constantes de integración. Para el análisis nos quedamos con el caso más sencillo $\mathbf{B}_0 = 0$, de esta manera, podemos observar que la magnitud del campo magnético es

$$|\mathbf{B}| = b(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = br. \quad (2.23)$$

Recordando que tanto la fuerza como la energía dependen solo de la magnitud, podemos escribir entonces la fuerza en términos de coordenadas radiales usando la relación anterior,

por lo que la fuerza nos queda como

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = -g_F \mu_B m_F b \hat{r}. \quad (2.24)$$

El comportamiento de la fuerza y del potencial será determinado entonces por las constantes g_F , μ_B y el valor del número cuántico m_F de cada átomo, siendo este último el determinante para saber si los átomos son atrapables o no, para determinar esto, necesitamos analizar el comportamiento del potencial magnético, el cual se muestra en la Figura 2.6 (potencial para el Rubidio-87 en el nivel de energía $5S_{1/2}$ $F = 1$), en la que se muestra en azul el potencial que sentirán los átomos con número cuántico $m_F = 1$, la forma de este potencial nos indica que las partículas se alejaran del origen ya que los estados tienden a el estado de menor energía y entre más lejos del origen, la energía será menor, por lo que los átomos con este número cuántico no se atrapan ya que no tienden a un punto fijo. Por otro lado, el comportamiento de las partículas con número cuántico $m_F = -1$ se muestra en rojo en la Figura 2.6, en este caso las partículas tienden a agruparse en el origen ya que este es el mínimo de energía, el hecho de que se agrupen en el origen hace que sea una trampa.

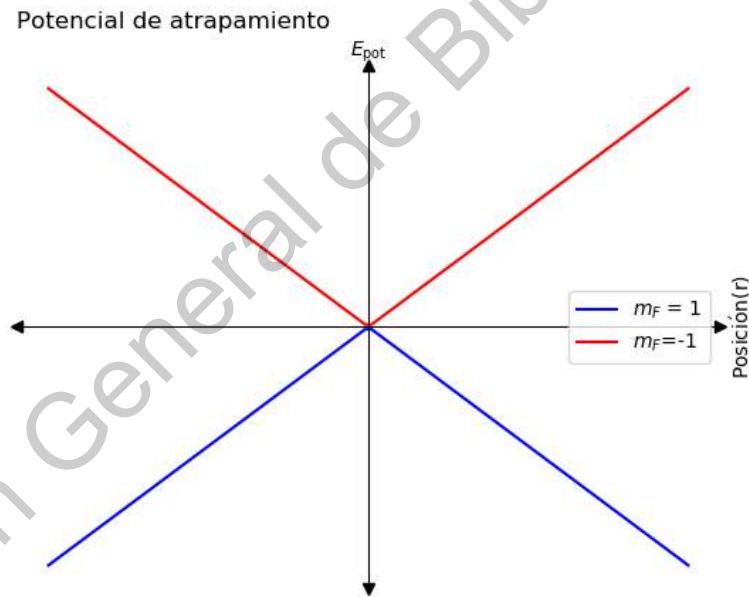


Figura 2.6: Comportamiento del potencial en las trampas magnéticas, para el átomo de ^{87}Rb en el nivel $5S_{1/2}$ $F = 1$ donde los átomos serán atrapados si $m_F = -1$, mientras que los átomos con $m_F = 1$ no serán atrapados.

Cuando el átomo se encuentra en el estado $m_F = 0$, este no sentirá potencial, por lo que no será atrapable. Las trampas magnéticas pueden contener nubes atómicas con temperaturas que rondan los cientos de mK [13], a esta característica se le conoce como profundidad de la trampa. El hecho de que se presenten estados atrapables y no atrapables nos permite bajar la temperatura de los átomos confinados aun más con el método de evaporación, pero antes de hablar de este, necesitamos hablar de las transiciones atómicas generadas por radiofrecuencia.

2.2.2. Transiciones por radio-frecuencia en trampas magnéticas

Las transiciones entre un nivel de energía y otro pueden ser promovidas de manera eficaz y precisa haciendo uso de ondas electromagnéticas, las cuales si tiene la frecuencia correcta, es decir, la energía suficiente, son capaces de generar estas transiciones de energía, por lo que para hacer la transición entre los subniveles de energía generados por el efecto Zeeman necesitamos una onda de igual energía para poder generar la transición. Para hacer este cálculo, partamos entonces de la fuerza que sienten los átomos en el gradiente de energía que ya previamente calculamos en la Ecn. (2.24), y mediante el teorema del trabajo y la energía calculemos entonces la energía que existe entre los niveles de energía generado por el efecto Zeeman, la cual queremos asociar a una frecuencia, esto se hace mediante la relación $E = \hbar\omega$, por lo que la frecuencia se calcula mediante

$$2\pi \times \omega = \frac{g_F \mu_B m_F b r}{h}. \quad (2.25)$$

Para darnos una idea de el orden de magnitud de esta frecuencia, la calcularemos para el ^{87}Rb como hemos estado haciendo para las otras propiedades, entonces, calculamos la frecuencia necesaria par generar un cambio de niveles tal que $\Delta m_F = 1$ debido a que queremos dejara a los átomos atrapados en el estado $m_F = 0$ (lo que nos será útil para el método de enfriamiento por evaporación) que no es atrapable y partimos del estado $m_F = 1$ ya que es el atrapable en trampas magnéticas, por lo que utilizaremos el valor de $m_F = -1$, el factor de Lánde para el Rubidio-87 es $g_F = \frac{1}{2}$ [16], el valor del magnetón de Bohr en $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$, el valor de la constante de plank es $h = 6,626 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{s}$ y los valores típicos de el gradiente de campo magnético son $b = 3 \text{ T} \cdot \text{m}^{-1}$, consideremos entonces por último que queremos hacer la transición para los átomos que se encuentran justo en un radio de $r = 2 \text{ mm}$ dentro de la trampa magnética, lo que nos deja una frecuencia angular $\omega_{\text{rf}} \approx 24 \text{ GHz}$, lo cual corresponde con ondas de radio, es por esto que se denota con las letras rf.

Por lo que podemos concluir que para generar transiciones entre los estados energéticos de los átomos dentro de las trampas magnéticas, podemos utilizar ondas de radio, esta propiedad nos será útil ya que haciendo uso de esta podremos generar el enfriamiento por evaporación en trampas magnéticas.

2.2.3. Método de enfriamiento por evaporación rf

El método de enfriamiento por evaporación consiste en deshacerse de los átomos con mayor energía cinética que se encuentran dentro de la trampa magnética, de este modo se reduce drásticamente la energía promedio de los átomos confinados, lo que se traduce con una disminución de la temperatura de la nube atómica. Continuando el análisis de las bobinas anti-helmholtz, los átomos que se encuentren más lejos del punto mínimo del potencial (que en nuestro cálculo fue el origen) tienen más energía y el desdoblamiento en sus niveles de energía se hace aun mayor como se puede apreciar en la energía (que obtuvimos por el teorema del trabajo y energía a partir de la Ecn. (2.24) para los estados atrapables $m_F = -1$) la cual es

$$E_{\text{mag}} = g_F \mu_B b r. \quad (2.26)$$

Conforme el átomo tiene más energía y se logra mover más lejos del mínimo del potencial, su desdoblamiento de niveles de energía por efecto Zeeman también se hará mas intenso, de

manera lineal con respecto a la coordenada r . Que el desdoblamiento sea mas intenso junto con las transiciones por radio frecuencia nos permite seleccionar con precisión a partir de que rango de energías queremos remover de la trampa magnética.

Imaginemos entonces que queremos deshacernos de los átomos que se encuentran en la región $r \geq 2$ mm que presentan mayor energía que los átomos dentro de este radio, para esto, nosotros previamente calculamos que para un radio $r = 2$ mm las ondas que necesitamos para promover transiciones en esta región es $\omega_{rf} \approx 24$ GHz, por lo que para deshacernos de toda la región mayor a 2 mm, aumentamos progresivamente las ondas de radio a partir de 24 GHz con las que estamos promoviendo la transiciones a estados no atrapados, de esta manera hacemos un barrido de átomos energéticos que vamos sacando de la trampa magnética, quedamos con los átomos poco energéticos que se encuentran en la región $r < 2$ mm, al hacer esto, bajamos la temperatura del sistema al reducir la energía cinética promedio de las partículas.

Las temperaturas mínimas alcanzadas por este método son de decenas de nK [8], esto es debido a limitantes con la nube atómica, ya que, al enfriarlo por evaporación perdemos partículas, al perder partículas, se hace más difícil detectar a los átomos en la nube, incluso se puede llegar al punto de que las partículas sean tan pocas que ya no sean detectables. Otra de las limitantes es que cuando la energía de la onda de radio es comparable con la energía promedio de los átomos, se vuelve imposible remover selectivamente átomos.

2.3. Enfriamiento por evaporación en trampas dipolares ópticas

La trampa dipolar eléctrica tiene su origen de la fuerza de dispersión (Ecn. (2.7)) calculada previamente en la Sección 2.1, bajo ciertas consideraciones de las cuales hablaremos más adelante, la fuerza dipolar coincide con la derivada del desdoblamiento de niveles de energía debido a la interacción del campo eléctrico generado por el láser, a este fenómeno se le conoce como efecto Stark (del cual se habla mas en el Apéndice H), por lo que al igual que en las trampas magnéticas con el efecto Zeeman, se considera como la energía potencial a la energía de desdoblamiento, lo que nos permite analizar el comportamiento del potencial y así extraer sus características.

2.3.1. Trampas ópticas en átomo de 2 niveles

En la Sección 2.1 obtuvimos que la interacción del átomo con un campo eléctrico (el haz láser) nos da origen a dos fuerzas, el comportamiento de estas fuerzas esta determinado por las Ecuaciones (2.7) y (2.8), siendo la fuerza de dispersión la que da origen a el método por melaza óptica, el cual funciona cuando el haz láser está cerca de resonancia donde la fuerza dipolar es despreciable. Nos interesa entonces analizar el caso contrario donde el haz láser se encuentra lejos de resonancia atómica, para esto reescribamos las Ecuaciones (2.7) y (2.8) de la siguiente manera

$$F_{\text{dip}} = -\frac{\hbar}{2\delta} \frac{\Omega}{1 + \frac{\Omega^2}{2\delta^2} + \frac{\Gamma^2}{4\delta^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad (2.27)$$

$$F_{\text{dis}} = \hbar\kappa \frac{\Gamma}{2\delta^2} \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{1 + \frac{\Omega^2}{2\delta^2} + \frac{\Gamma^2}{4\delta^2}}. \quad (2.28)$$

En la región lejos de resonancia atómica, consideramos que $|\delta| \gg \Omega$ y $|\delta| \gg \Gamma$, de tal manera que las Ecuaciones (2.27) y (2.28) toman la forma

$$F_{\text{dip}} \approx -\frac{\hbar\Omega}{2\delta} \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \quad (2.29)$$

$$F_{\text{dis}} \approx \hbar\kappa \frac{\Gamma\Omega}{4\delta^2}. \quad (2.30)$$

A partir de estas ecuaciones podemos intuir que necesitamos una desintonía lo suficiente grande para poder desprestigiar la fuerza de dispersión (tal que $\frac{1}{\delta^2} \approx 0$) pero no tan grande como para desprestigiar la fuerza dipolar. Ya que observamos que en la región de alta desintonía la fuerza de dispersión es desprestigiable, entonces continuemos analizando la fuerza dipolar (Ecn. (2.29)), la cual podemos acomodar de la siguiente manera

$$F_{\text{dip}} \approx -\frac{\hbar\Omega}{2\delta} \frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hbar\Omega^2}{4\delta} \right). \quad (2.31)$$

Esta expresión nos indica que la fuerza dipolar proporcional a la derivada espacial del desdoblamiento de niveles energía por efecto Stark el cuál es $\Delta\omega_{luz} = \frac{\Omega^2}{4\delta}$ (para ver el origen del efecto Stark ver Apéndice H), es decir, el origen de la fuerza en la trampa dipolar tiene un origen similar al de la fuerza del método de atrapamiento magnético, solo que en la trampa magnética el potencial esta dado por la energía de desdoblamiento por efecto Zeeman, mientras que en la trampa dipolar el potencial es la energía de desdoblamiento por efecto Stark.

Ahora, ya que la intensidad es un parámetro experimental que podemos controlar en el laboratorio, nos interesa escribir la fuerza dipolar y el potencial dipolar en términos de la intensidad, para esto utilizamos la ecuación F.27, la cual nos lleva a que

$$F_{\text{dip}} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hbar\Gamma^2}{8\delta} \frac{I}{I_s} \right), \quad (2.32)$$

$$U_{\text{dip}} = \frac{\hbar\Gamma^2}{8\delta} \frac{I}{I_s}. \quad (2.33)$$

A diferencia del método de melaza óptica, para poder implementar una trampa dipolar en 3D solo es necesario para una trampa 3D es fácilmente generalizable y queda de la forma

$$F_{\text{dip}} = -\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) U_{\text{dip}}. \quad (2.34)$$

Donde U_{dip} es el potencial calculado en la Ecn. (2.33). Este potencial dipolar se puede reescribir en términos de la tasa de decaimiento, la intensidad del campo láser y la desintonía, para esto hacemos uso de la expresión de I_s (Ecn. (F.23)), para finalmente obtener

$$U_{\text{dip}}(r) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \delta} I(r). \quad (2.35)$$

Esta expresión nos ayudará a analizar los tipos de trampa dipolar que podemos obtener jugando solo con los parámetros controlables en el laboratorio. La trampa dipolar es considerada una trampa debido a que el potencial hereda el la forma del perfil de intensidad del

láser, el cual es gaussiano (como veremos en la Sección 3), la geometría de este nos permite ver que es parecido a un pozo de potencial (y en ciertas regiones, es aproximable a un potencial tipo oscilador armónico), lo que hace que los átomos tiendan a juntarse o alejarse de un punto dependiendo del signo de la desintonía. Esta trampa puede tener profundidades por debajo de $1 \mu\text{K}$ [13].

Observemos entonces que a diferencia de la trampa magnética, en la trampa dipolar todos los átomos son atrapables sin importar su número atómico, además de que la implementación del método de evaporación (del cual hablaremos en la Sección 2.3.2) es más sencillo en este tipo de trampas.

2.3.2. Parámetros físicos más relevantes

Con base en la Ecn. (2.35), podemos observar entonces que los parámetros más importantes del potencial dipolar son la intensidad y la desintonía, ya que estas dos características son controlables en el laboratorio.

Por un lado, el controlar la desintonía nos generará dos tipos de trampas, las cuales adquieren su nombre dependiendo de la frecuencia, los nombres son parecidos a los del efecto Doppler, ya que si la frecuencia del láser es menor a la frecuencia de excitación, se dice que la trampa está corrida al rojo, mientras que si la frecuencia del láser es mayor, se dice que la trampa está corrida al azul.

Las trampas corridas al rojo tienen su desintonía negativa ($\omega_0 > \omega$ y por lo tanto $\delta < 0$), esto hace que el potencial, el cual tiene una forma gaussiana debido a que el perfil de intensidad del láser es una gaussiana, tenga la forma de una gaussiana invertida (se invierte por el signo de la desintonía en la expresión matemática), lo cual lo hace que el potencial sea un pozo, en el que los átomos tienden a acumularse en el máximo de intensidad, y esto es debido a que los átomos tienden al estado de mínima energía, el cual dentro del potencial coincide con el máximo de intensidad.

Las trampas corridas al azul son el caso contrario, ya que su desintonía es positiva ($\omega_0 < \omega$ y por lo tanto $\delta > 0$), esto hace que el potencial siga teniendo la forma de una gaussiana, esto hace que los átomos sean repelidos del máximo de intensidad para minimizar su energía, debido a esto, la forma de generar una trampa corrida al azul es rodear un área de intensidad, lo que hace que los átomos sean repelidos al centro de esta región, y por lo tanto son confinados, generando una barrera alrededor de estos de la cual no pueden escapar.

Por otro lado, el controlar la intensidad nos permitirá realizar el método de evaporación de manera más sencilla, ya que la manera de calcular la temperatura a la que se encuentra la nube atómica es mediante el teorema de equipartición, el cual nos permite llegar a la expresión la expresión $T = \frac{U}{k_B}$, donde k_B es la constante de Boltzmann, por lo que la temperatura es proporcional a la intensidad. Si bajamos la intensidad, los átomos más energéticos no serán atrapados por el pozo de potencial generado por una trampa corrida al rojo, por lo que saldrán de la trampa dipolar y se reducirá la temperatura de la nube por evaporación lo que nos permite llegar a temperaturas del orden de nK.

Otra cosa interesante que podemos hacer en las trampas dipolares controlando la intensidad son las redes ópticas. Nosotros mediante interferencia constructiva y destructiva podemos crear máximos y mínimos de intensidad en lugares específicos, donde los átomos tenderán a acumularse por la fuerza dipolar si la trampa está corrida al rojo, esto nos permite generar un arreglo atómico y estudiarlo como si fuera un cristal. Este tipo de configuraciones se han podido generar en el laboratorio [17].

2.3.3. Generalización a átomos multinivel

Anteriormente en la Sección 1 mostramos que los átomos multinivel tienen una subestructura muy compleja, ¿Qué repercusiones tiene en el potencial dipolar?. Para poder generalizar a un sistema de átomos multinivel se hace uso de la teoría de perturbaciones de manera directa, por lo que primero analicemos el sistema de dos niveles que hemos ido trabajando.

Para poder aplicar de manera directa la teoría de perturbaciones a el sistema de dos niveles y generar una trampa dipolar óptica, donde el láser perturbante se encuentra lejos de resonancia de los niveles atómicos, primero debemos conocer la expresión que nos genera la corrección de perturbaciones de segundo orden no degenerada, donde la interacción de un Hamiltoniano H_1 nos lleva a un corrimiento de energía en el i -ésimo estado [13]

$$\Delta E_i = \sum_{i \neq j} \frac{|\langle i | H_1 | j \rangle|^2}{E_i - E_j}. \quad (2.36)$$

El Hamiltoniano que gobierna la interacción entre la materia y la luz, la cual es la interacción que nos interesa para las trampas dipolares, es (Para saber más sobre esta interacción ver Apéndice A, Ecn. (A.19))

$$H_I = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.37)$$

Para la trampa dipolar óptica, trabajamos en un rango donde la energía entre los niveles de energía son un “estado vestido” del estado átomo+campo eléctrico; el estado vestido quiere decir que consideraremos al átomo y al campo magnético como un mismo sistema.

Otra cosa que debemos considerar para poder aplicar directamente la Ecn. (2.36) es que la energía del campo eléctrico será $E_c = n\hbar\omega$ con n el número de fotones del campo. Si consideramos entonces nuestro marco de referencia de energía del átomo tal que el estado base sea $E = 0$, entonces la energía total en el estado vestido tendrá la forma de la energía del campo $E_i = n\hbar\omega$. Por otro lado, la energía del átomo cuando se encuentra en un estado excitado será $E = \hbar\omega_0$, la transición del estado base al estado excitado del átomo hará que el campo pierda un fotón debido a que este fue absorbido por el átomo para hacer la transición entre niveles de energía, por lo que la energía del campo pasa a ser $E = (n - 1)\hbar\omega$, de esta manera, la energía total del sistema pasa a ser

$$E_j = \hbar\omega_0 + (n - 1)\hbar\omega = \hbar(\omega_0 - \omega) + n\hbar\omega = -\hbar\delta_{ij} + n\hbar\omega. \quad (2.38)$$

Donde $\delta_{ij} = \omega - \omega_0$, lo que concuerda con nuestra definición de desintonía. Esto nos permite calcular la diferencia de energías $E_i - E_j = n\hbar\omega - (-\hbar\delta_{ij} + n\hbar\omega) = \hbar\delta_{ij}$, por lo que al sustituir en la Ecn. (2.36) nos queda

$$\Delta E_i = \sum_{i \neq j} \frac{|\langle i | H_I | j \rangle|^2}{\hbar\delta_{ij}}. \quad (2.39)$$

Si aplicamos este resultado para un sistema de dos niveles obtenemos que [13]

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle 1 | \boldsymbol{\mu} | 2 \rangle|^2}{\delta} |E|^2 = \frac{3\pi c^3 \Gamma}{2\omega_0^3 \delta} I(r). \quad (2.40)$$

Este resultado concuerda con nuestro resultado que obtuvimos al resolver usando las ecuaciones de Bloch (Ecn. 2.35), ambos métodos nos guiaron a la misma conclusión, la cual es que la fuerza dipolar surge de la energía potencial que se genera por el efecto Stark, entonces lo que continua es aplicarlo a átomos multinivel.

Para aplicar entonces teoría de perturbaciones de segundo orden a un átomo multinivel con subestructura de transición, necesitamos conocer los elementos de la matriz dipolar $\mu_{ij} = \langle 1_i | \mu | 2_j \rangle$ entre estados base específicos $|1_i\rangle$ y los estados excitados $|2_j\rangle$. Podemos resolver este problema utilizando el teorema de Wigner-Eckart [18], el cual nos dice que:

Si se tiene una matriz μ con sus elementos de matriz $\mu_{ij} = \langle i | \mu | j \rangle$ tal que μ_{ij} no depende de la base $|i\rangle, |j\rangle$ entonces toda la dependencia del elemento μ_{ij} en la base $|i\rangle, |j\rangle$ estará contenida en los coeficientes de Clebsch-Gordan multiplicado por un elemento de la matriz reducida, tal que

$$\mu_{ij} = \langle i | \mu | j \rangle = C_{ij} ||\mu||. \quad (2.41)$$

Con C_{ij} como los coeficientes Clebsch-Gordan y $||\mu||$ los elementos de matriz reducida.

Los coeficientes de Clebsch-Gordan para el acoplamiento de átomos alcalinos han sido calculados anteriormente y se pueden encontrar en tablas, se puede usar software para calcularlos o se puede hacer a mano, pero dependen de cada sistema y su complejidad, esto excede al nivel de esta tesis, pero si se desea calcular se hace mediante el método de tensores irreducibles.

Veamos que para nuestro caso, los estados del átomo, los cuales usamos de base $|i\rangle, |j\rangle$ son independientes de la matriz μ , por lo que podemos escribir

$$\mu_{ij} = C_{ij} ||\mu|| \rightarrow (\mu_{ij})^2 = C_{ij}^2 ||\mu||^2. \quad (2.42)$$

$||\mu||$ depende solamente de las funciones de onda orbitales y está directamente relacionado al decaimiento espontáneo Γ . Los elementos de matriz μ_{ij} ya son conocidos, pero si se desea calcular hay que obtener los valores de los elementos de matriz reducida $||\mu||$ y los coeficientes de Clebsch-Gordan C_{ij} [13]

$$\Delta E_i = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} I(r) \sum_j \frac{C_{ij}^2}{\delta_{ij}}. \quad (2.43)$$

Esto implica que si queremos calcular el potencial dipolar $U_{\text{dip}} = \Delta E_{ij}$ para los estados base, tenemos que sumar todas las contribuciones de los estados excitados acoplados tomando en cuenta los coeficientes de Clebsch-Gordan C_{ij}^2 y las desintonías δ_{ij}

2.3.3.1. Átomos alcalinos

Es posible obtener un resultado general del potencial para los átomos alcalinos que tengan un estado base con momento angular total F y número cuántico magnético m_F válido en la región de alta desintonía (la cuál es la región de la trampa dipolar óptica) al aplicar la ecuación 2.43 lo que da como resultado [13]

$$U_{\text{dip}}(r) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2 + P g_F m_F}{\delta_{2,F}} + \frac{1 - P g_F m_F}{\delta_{1,F}} \right) I(r), \quad (2.44)$$

donde P es la polarización del haz incidente³⁴, $\delta_{2,F}$ y $\delta_{1,F}$ representan la desintonía entre el estado base $^2S_{1/2,F}$ y los estados excitados $^2P_{3/2}$ y $^2P_{1/2}$ respectivamente (que corresponden con la línea D2 y D1 respectivamente en el caso del Rubidio). De nuevo, este cálculo excede el nivel de la tesis, pero es de nuestro interés mencionarlo ya que, al igual que en el átomo de dos niveles el potencial hay que considerar que en el átomo multinivel el potencial depende también de la polarización del haz, siendo estos dos parámetros controlables en el laboratorio.

2.3.3.2. Características de las fuentes láser para implementar potenciales ópticos

Hasta ahora, hemos visto que el diseño de trampas ópticas para átomos alcalinos recae en dos principales características:

- a) El láser debe trabajar en frecuencias lejanas a las de transición atómica de la especie que hayamos elegido, lo que asegura que la desintonía se mantenga alta y trabajemos en el régimen de la trampa dipolar óptica, el cual es el de baja dispersión (recordemos que la fuerza de dispersión no es deseada para generar las trampas dipolares).
- b) La trampa dipolar óptica debe ser lo suficientemente profunda para poder confinar átomos fríos obtenidos a partir de una nube atómica a temperatura ambiente por una trampa magneto-óptica o una trampa magnética cuyas temperaturas son relativamente altas ($T \approx \text{mK}, \mu\text{K}$), por lo que tiene que tener una intensidad lo suficientemente alta para poder llegar a estas temperaturas, a su vez, debe compensar la pérdida de profundidad que se tiene por tener una desintonía alta (ya que $U_{\text{dip}} \propto \frac{1}{\delta}$).

En cuanto a la polarización, la cual controla si todos los estados son atrapables o no en las trampas dipolares para átomos alcalinos, existen unos instrumentos ópticos llamados retardadores o láminas de onda, los cuales sirven para cambiar la polarización de la luz al pasar por estos.

Por lo que Tenemos que tener todas estas características en cuenta a la hora de decidir que láser vamos a utilizar, considerando que un láser puede ajustarse mejor a las características de la especie atómica que a otra para emplear el método de enfriamiento.

2.4. Comparación de los métodos de producción de átomos fríos

A manera de resumen, hablaremos rápidamente de los métodos de producción de átomos fríos para comparar sus características.

- Melaza óptica/Trampa magneto-óptica: Este método de producción presenta la ventaja de poder generar átomos fríos a partir de una nube de átomos a temperatura ambiente, las temperaturas mínimas a las que se puede llegar con esta son del orden de μK .
- Trampas magnéticas: Con este método podemos llegar a temperaturas del orden de cientos de mK y haciendo uso de la técnica de evaporación podemos llegar a temperaturas del orden de nK . Debido a su construcción, solo es posible capturar un estado atómico ($m_F = -1$), añadido a esto, la geometría de atrapamiento esta limitada por los campos magnéticos que podamos generar con bobinas.

³⁴ $P = 0$ corresponde a la polarización π y $P = \pm 1$ corresponde a la polarización σ_{\pm}

- Trampa dipolar óptica: Con este método podemos llegar a temperaturas menores a 1mK, y haciendo uso de la técnica de evaporación podemos llegar a temperaturas del orden de nK. A diferencia de las trampas magnéticas, con una polarización adecuada se pueden capturar todos los estados atómicos del átomo, lo que permite analizar el sistema completo. Debido a que el potencial adquiere la forma del perfil de intensidad del láser, se pueden realizar una gran variedad de geometrías en la trampa.

3. Trampas ópticas para átomos neutros

Las trampas ópticas son más versátiles que las trampas magnéticas, ya que nos permiten implementar una amplia variedad de configuraciones de potencial del atrapamiento; por esta razón nos enfocaremos en las trampas ópticas. El potencial óptico para los átomos alcalinos depende de la polarización de la luz con la que se produce (Ecn. (2.44)). Por un lado, si iluminamos los átomos de polarización circular σ_{\pm} , tendremos el valor de $P = \pm 1$, resultando en un potencial de la forma

$$U_{dip}(r) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2 \pm g_F m_F}{\delta_{2,F}} + \frac{1 \mp g_F m_F}{\delta_{1,F}} \right) I(r). \quad (3.1)$$

Por lo tanto, para el caso de polarización circular σ_{\pm} , observamos que el potencial depende del estado interno m_F en el cuál se encuentra el átomo pero sentirán un potencial diferente dependiendo del valor de su número cuántico m_F .

En cambio, si se utiliza la polarización lineal π para iluminar a los átomos, tendremos que el valor de $P = 0$, resultando en un potencial de la forma

$$U_{dip}(r) = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right) I(r). \quad (3.2)$$

El potencial generado no depende del número cuántico m_F , esto hace que todos los estados atómicos sean atrapables y que a su vez todos los estados sientan el mismo potencial de atrapamiento. Por esta característica el potencial óptico que se utiliza comúnmente es el generado por polarización lineal π .

Además de la polarización es importante considerar el perfil de intensidad del láser, ya que el potencial heredará la forma del mismo. Comúnmente, la propagación de los láseres se da a lo largo del eje z y su intensidad decae radialmente en el plano xy . Los láseres comerciales presentan perfiles de intensidad Gaussianos con un perfil de intensidad de la forma [19]

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}, \quad (3.3)$$

donde P es la potencia del haz, $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es la variable radial, w es la función que describe la evolución del láser a lo largo del eje de propagación z , esta función es conocida y tiene la forma [20]

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2}. \quad (3.4)$$

Nuevamente z es la posición en el eje de propagación, λ la longitud de onda del haz y w_0 es conocido como la cintura del haz láser, la cual es el valor mínimo que puede tener el radio de la intensidad láser en el plano xy , la cintura es un parámetro experimentalmente ajustable mediante lentes ópticas que nos ayuden a enfocar el láser. El potencial de atrapamiento seguirá la misma forma matemática del perfil de intensidad del haz Gaussiano, dado por la Ecn. (3.3).

En la siguiente sección presentaremos las condiciones bajo las cuales este potencial Gaussiano se puede reducir a un potencial del tipo oscilador armónico.

3.1. Aproximación a potencial tipo oscilador armónico

Una vez que conocemos el comportamiento general de la intensidad láser, analicemos entonces las regiones cercanas al máximo de intensidad, el cual se encuentra en $r = 0$. Podemos aproximar el potencial haciendo uso de la serie de Taylor para el perfil de intensidad alrededor de $r = 0$ ³⁵, de tal manera que el potencial en esa región se puede aproximar como

$$I(r, z) \approx \frac{2P}{\pi w^2(z)} - \frac{4Pr^2}{\pi w^4(z)}. \quad (3.5)$$

A su vez, por simplicidad consideremos que la trampa se generará en la región de $z = 0$ de tal manera que la $w(0) = w_0$ y por lo tanto la aproximación de la intensidad será

$$I(r, z) \approx \frac{2P}{\pi w_0^2} - \frac{4Pr^2}{\pi w_0^4}. \quad (3.6)$$

Sustituyamos entonces la aproximación de la intensidad en el potencial dipolar para un sistema de dos niveles Ecn. (2.35), de tal manera que

$$U_{\text{dip}}(r) \approx -\frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \delta} \left(\frac{2P}{\pi w_0^2} - \frac{4Pr^2}{\pi w_0^4} \right),$$

$$U_{\text{dip}}(r) \approx -A_1(P) + B_1(P)r^2, \quad (3.7)$$

donde $A_1(P) = \frac{3Pc^2 \Gamma}{\omega_0^3 w_0^2 \delta}$ y $B_1(P) = \frac{6Pc^2 \Gamma}{\omega_0^3 w_0^4 \delta}$. Observemos entonces que el potencial cerca de la región de máxima intensidad $r = 0$ se comporta como un potencial tipo oscilador armónico, es decir, es cuadrático con la posición, con la energía corrida por un factor $E + A(P)$ ³⁶.

Para los átomos alcalinos, al igual que para el sistema de dos niveles, sustituimos la Ecn. (3.6) en la Ecn. (3.2) para una trampa corrida al rojo con una polarización lineal, al hacer

³⁵La aproximación por serie de Taylor de una Gaussiana alrededor de $x = 0$ en general es $\frac{e^{-x^2/B}}{A} \approx \frac{1}{A} - \frac{x^2}{AB}$.

³⁶La corrección surge de la ecuación de Schrödinger, ya que si sustituimos el potencial en esta obtenemos que

$$\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + B_1(P)r^2 - A_1(P) \right) \psi = E\psi,$$

$$\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + B_1(P)r^2 \right) \psi = (E + A_1(P))\psi.$$

Donde la aproximación coincide con la ecuación de un potencial tipo oscilador armónico con la energía incrementada por la cantidad $A_1(P)$.

esto obtenemos

$$U_{\text{dip}}(r) \approx -\frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right) \left(\frac{2P}{\pi w_0^2} - \frac{4Pr^2}{\pi w_0^4} \right),$$

$$U_{\text{dip}}(r) \approx -A_2(P) + B_2(P)r^2. \quad (3.8)$$

Donde $A_2(P) = \frac{Pc^2\Gamma}{\omega_0^3 w_0^2} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right)$ y $B_2(P) = \frac{2Pc^2\Gamma}{\omega_0^3 w_0^4} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right)$. Al igual que en el sistema de dos niveles, observamos que el potencial dipolar es tipo oscilador armónico con su energía corrida, por lo que podemos concluir que la trampa dipolar tanto para el sistema de dos niveles como para los átomos alcalinos tiene un comportamiento tipo oscilador armónico en la región cerca del máximo de intensidad cuando se tiene una configuración de polarización lineal y está corrida al rojo. Debido a que el oscilador armónico confina partículas en el potencial es que podemos decir que el potencial dipolar confina átomos neutros.

3.2. Profundidad de la trampa óptica

Para diseñar una trampa de átomos neutros, es necesario calcular la profundidad de la misma, esto se logra utilizando las ecuaciones del potencial dipolar (2.35) y (3.2) para un sistema de dos niveles y para átomos alcalinos respectivamente. Primero, debemos calcular la expresión para obtener la máxima profundidad (o la temperatura más baja alcanzable), la cual corresponde al máximo de intensidad del láser en $r = 0$, $z = 0$ (ver Figura 3.1), en esta región, la intensidad láser descrita por la Ecn. (3.3) y está dada por

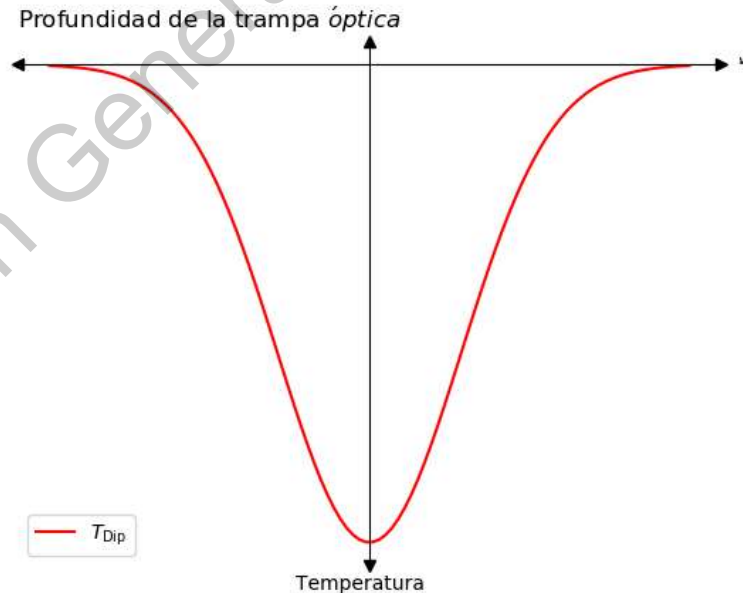


Figura 3.1: Comportamiento de la profundidad de una trampa dipolar óptica corrida al rojo con respecto a su posición radial, centrada en $z = 0$. Al ser una trampa corrida al rojo, la temperatura mínima de atrapamiento de los átomos se encuentra en $r = 0$ con el mínimo del potencial, a su vez el mínimo de temperatura coincide con máximo de intensidad del láser.

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi w^2}. \quad (3.9)$$

Sustituimos entonces en la expresión del potencial dipolar, para calcular la profundidad de la trampa, solo queda calcular conversión a temperatura utilizando la constante de Boltzmann ($k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$). Por ejemplo, la profundidad de la trampa en unidades de temperatura para un sistema de dos niveles, se muestra a continuación: sustituimos la expresión del máximo de intensidad dado por la Ecn. (3.9) en la Ecn. (2.35), de tal manera que

$$\begin{aligned} U_{\text{dip}}(r) &= k_B T_{\text{dip}} = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \delta} \frac{2P}{\pi w^2}, \\ T_{\text{dip}}(P) &= \frac{3Pc^2}{k_B \omega_0^3 w^2} \frac{\Gamma}{\delta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observemos entonces que la profundidad de la trampa depende directamente de la potencia del láser. Calculemos entonces a manera de ejemplo la temperatura para el caso del ^{87}Rb en el modelo de átomo de dos niveles, en este caso tenemos las constantes

$$\begin{aligned} c &= 299792458 \text{ ms}^{-1}, \\ k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}, \end{aligned}$$

además, para el ^{87}Rb , conocemos el valor de su tasa de decaimiento y la longitud de onda de línea D2 [13], con esto podemos calcular ω_0 , estos valores son

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi \times 5.6 \text{ MHz}, \\ \lambda_{\text{D2}} &= 780 \text{ nm}, \\ \omega_0 &= \frac{2\pi c}{\lambda_{\text{D2}}} = 2.41494 \times 10^9 \text{ MHz}. \end{aligned}$$

Para el calculo de la desintonía, la longitud de onda típica del láser incidente para trampas dipolares ópticas para átomos neutros es de $\lambda = 1064 \text{ nm}$ (suficientemente desintonizada y corrida al rojo). La frecuencia del láser y la desintonía son

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi c}{\lambda} = 1.77035 \times 10^9 \text{ MHz}, \\ \delta &= \omega - \omega_0 = -6.44589 \times 10^9 \text{ MHz}. \end{aligned}$$

El signo de la desintonía sólo nos indica si el máximo de intensidad es un atractor o un repulsor de átomos, y no juega un papel importante a la hora de calcular la profundidad de la trampa por lo que tomamos el valor absoluto de la desintonía.

En los experimentos de átomos fríos, un valor típico de cintura del láser es de $w_0 = 100 \mu\text{m}$, mientras que para la potencia, se utilizan potencias de orden de decenas de watts, por lo que utilizaremos $P = 30 \text{ W}$. Sustituyendo todos los valores presentados en este ejemplo, se tiene una temperatura de $T_{\text{DN}} = 239.23 \mu\text{K}$ tal que T_{DN} corresponde a la temperatura calculada con el modelo de átomo de dos niveles.

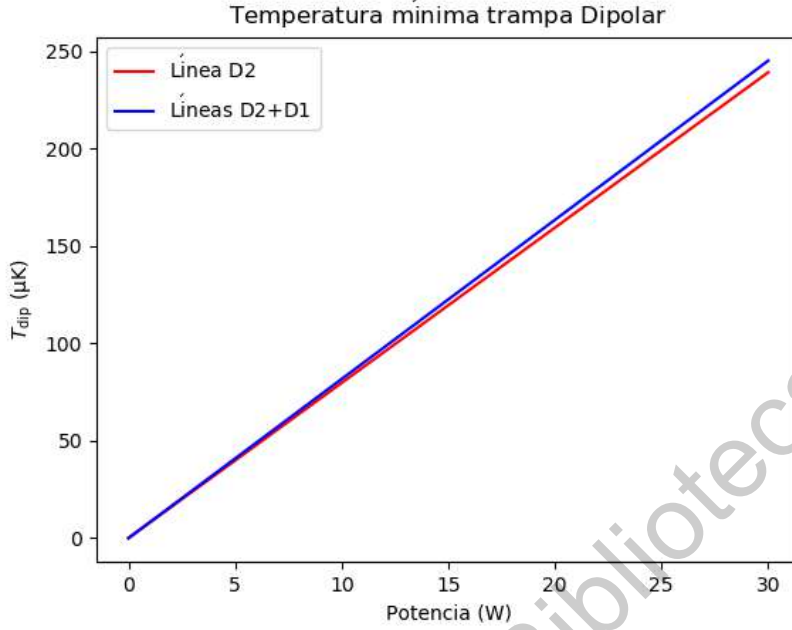


Figura 3.2: Comportamiento de la temperatura mínima en la trampa dipolar óptica dependiente de la potencia del láser incidente: En rojo se muestra el comportamiento para el modelo de átomo de dos niveles el cual considera solo a la línea D2, mientras que en color azul se muestra el comportamiento del modelo de átomo multinivel, el cual considera las dos líneas espectrales D1 y D2. Se consideraron los valores $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$, $k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$, $\Gamma = 2\pi \times 5.6 \text{ MHz}$, $\omega_0 = 2.41494 \times 10^9 \text{ MHz}$, $\delta_{1,F} = -5.9962 \times 10^8 \text{ MHz}$, $\delta_{2,F} = -6.44589 \times 10^9 \text{ MHz}$ y $w_0 = 100 \mu\text{m}$. Se tiene desintonía negativa porque es para una trampa corrida al rojo, aunque el signo no juega un papel en el cálculo de la temperatura.

Calculemos ahora de manera de ejemplo la temperatura para el caso del ^{87}Rb en el modelo de átomo de multinivel, para este caso sustituimos la Ecn. (3.9) en la Ecn. (3.2), de tal manera que

$$\begin{aligned}
 U_{\text{dip}}(r) &= k_B T_{\text{dip}} = \frac{\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right) \frac{2P}{\pi w^2}, \\
 T_{\text{dip}}(P) &= \frac{P c^2 \Gamma}{k_B \omega_0^3 w^2} \left(\frac{2}{\delta_{2,F}} + \frac{1}{\delta_{1,F}} \right). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior conocemos c , k_B , Γ , ω , ω_0 y $\delta_{2,F}$, que corresponde con la desintonía de la línea D2 con la frecuencia del láser incidente ($\delta \rightarrow \delta_{2,F}$), para calcular la desintonía con la línea D1, conocemos la longitud de onda de línea [13]. La desintonía con la línea D1 es:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{D1} &= 794.8 \text{ nm}, \\
 \omega_{D1} &= \frac{2\pi c}{\lambda_{D1}} = 2.36997 \times 10^9 \text{ MHz}, \\
 \delta_{1,F} &= \omega - \omega_{D1} = -5.9962 \times 10^8 \text{ MHz}
 \end{aligned}$$

De igual manera, el signo de la desintonía sólo nos indica si el máximo de intensidad es un atractor o un repulsor de átomos. Sustituyendo los valores presentados en el ejemplo obtenemos una temperatura de $T_{MN} = 245.22 \mu\text{K}$ tal que T_{MN} corresponde a la temperatura calculada con el modelo de átomo multinivel.

Comparando ambos modelos, observamos que la diferencia entre las temperaturas es tan solo de 2.4 %, al graficar el comportamiento de ambos modelos como se muestra en la Figura 3.2 podemos observar que el modelo de átomo multinivel tiene una pendiente más elevada que la del átomo de dos niveles, esta diferencia en la pendiente surge porque el modelo de átomo multinivel considera la aportación generada por las líneas D1 y D2, mientras que la aproximación de átomo de dos niveles solo considera la línea D2. Al ser la diferencia entre los modelos de 2.4 % podemos usar cualquiera de los dos modelos a la hora de diseñar una trampa dipolar óptica.

Por último, el cálculo de la profundidad es importante debido a que no podemos capturar átomos cuyas temperaturas son superiores a la la profundidad de la trampa, por ejemplo no podemos capturar átomos a temperatura ambiente haciendo uso de la trampa dipolar óptica, por lo tanto es muy importante que primero se hayan enfriado los átomos con la técnica de melaza óptica o con la trampa magneto-óptica cuyas temperaturas limite son del orden de algunos μK . Saber la profundidad nos permite diseñar de manera eficiente los arreglos experimentales para producción de átomos fríos, así como generar de manera eficiente una transición entre métodos de enfriamiento.

4. ¿Por qué es necesario controlar la intensidad de la trampa óptica?

En la Sección 2 aprendimos que la profundidad de la trampa dipolar óptica para átomos alcalinos es proporcional a parámetros que se pueden controlar en el laboratorio manipulando la fuente láser, en específico es posible ajustar la desintonía de la frecuencia del láser con respecto a la transición atómica y su intensidad. De estas dos características, la intensidad láser es más propensa a fluctuaciones ya que depende de la corriente con la que se alimenta la fuente láser, a su vez, la intensidad es una característica más sencilla de ajustar que la desintonía, la cual se suele dejar fija. El controlar de manera precisa la intensidad láser nos permite manipular de manera directa la profundidad de la trampa dipolar, a su vez, al tener un buen control de la intensidad podemos realizar el método de evaporación (ver Sección 2.3) de manera más precisa, lo cual nos ayuda a llegar a temperaturas de orden de nK.

Estabilizar la intensidad no sólo nos permite tener un mejor control de la profundidad de la trampa dipolar y del método de evaporación, también es necesario para evitar un calentamiento indeseado que puede surgir por fluctuaciones en la intensidad, lo cual es importante debido a que se desea tener estabilidad y precisión (capacidad de un instrumento de dar el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas en las mismas condiciones) en los experimentos realizados en esta trampa. Es necesario asegurar que se pueden generar las mismas temperaturas, lo cual sería imposible si se tienen fluctuaciones en la intensidad.

5. ¿Cómo se controla la intensidad de un láser?

5.1. Directamente con la corriente aplicada a la fuente láser

Es posible hacer un control directo de la intensidad si controlamos la potencia de la fuente láser, esto debido a que aprendimos que la intensidad es proporcional a la potencia (ver Ecn. (3.3)). Si se desea implementar esta técnica, debemos tener en cuenta que puede perjudicar a los componentes de la fuente láser al estar variando la corriente y el voltaje de entrada para tener estabilidad.

5.2. Indirectamente mediante un modulador acusto-óptico (AOM)

Existe otra manera de controlar la intensidad de un láser, esto es haciendo uso de un modulador acusto-óptico (AOM) representado en la Figura 5.1. Un AOM consta de un cristal el cual puede cambiar su índice de refracción al ser expuesto a un campo de radiofrecuencia. La señal de rf genera una onda estacionaria en el cristal, lo que da lugar a una modulación periódica del índice de refracción, la cual actúa como una rejilla para el haz láser que pasa a través del cristal, lo que genera difracción la cual depende de la amplitud de onda estacionaria generada por la radiofrecuencia.

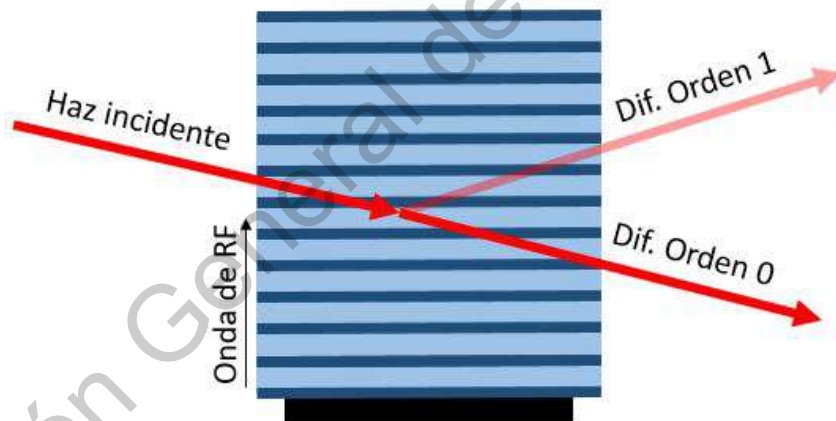


Figura 5.1: Esquemático de AOM. Al incidir una onda de radio frecuencia en el cristal, se genera una onda estacionaria, lo que actúa como rejilla de difracción. El ángulo de difracción se exageró, normalmente es de 1° .

Controlando la amplitud de la señal de radiofrecuencia que entra en el AOM se puede controlar la intensidad de los órdenes de difracción del láser de manera indirecta, ya que la intensidad de la difracción depende del ángulo del haz difractado, esta relación está dada por [21]

$$I_1 = I \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right). \quad (5.1)$$

Donde I_1 corresponde a la intensidad del primer orden de difracción, I la intensidad total

del láser. A su vez, el factor $\Delta\theta$ esta determinado por [21]

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} ((L/H) M_2 P)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

Donde λ es la longitud de onda de el haz incidente, L/H es la relación de aspecto entre el largo y alto de la onda sonora que pasa por el AOM, M_2 es una propiedad del material llamada factor de mérito acusto-óptico y P es la potencia de la onda sonora. De estas relaciones podemos concluir que el ángulo de difracción aumenta si aumentamos la potencia de señal rf y decrece si la disminuimos. Haciendo uso de esta propiedad podemos controlar de manera indirecta la intensidad del láser, hablaremos en la Sección 6 del arreglo experimental para controlar el láser con un AOM.

6. Implementación de circuito PID para control de intensidad

En los experimentos de producción de átomos fríos es muy importante mantener lo más estable posible la intensidad del láser debido a que buscamos tener la mayor estabilidad posible en la trampa dipolar óptica para poder asegurar que, si hacemos n experimentos, éstos estarán hechos bajo las mismas condiciones experimentales (intensidad de los haces láser, polarización de los haces láser, magnitud del campo magnético, misma desintonía) y por ende tengan las características físicas lo más parecidas posible (número de átomos, densidad, temperatura). Es por esto que haremos uso de un circuito de control tipo PID para poder estabilizar la intensidad del láser y evitar calentamientos indeseados que surjan de la fluctuación de la intensidad como se mencionaron en la Sección 4. En nuestro caso controlaremos la intensidad de manera indirecta a través de un AOM; es necesario que el proceso sea cíclico, retroalimentado y en tiempo real.

6.1. ¿Qué es un circuito PID?

Un circuito PID, por sus siglas Proporcional-Integral-Derivativo, es un circuito de retroalimentación que corrige el error entre una señal de entrada que describe el parámetro del experimento que queremos controlar V_s y una señal de referencia V_{setpoint} . El error se define como $e(t) = V_{\text{setpoint}} - V_s$. El circuito PID calcula 3 correcciones tomando en cuenta el error: la proporcional, la integral y la derivativa, en las cuales se usan amplificadores operacionales (OPAMs) en diferentes configuraciones. La combinación de estas 3 contribuciones generan la corrección de la señal, para elegir adecuadamente los parámetros de cada corrección (ganancia, constante de tiempo) es importante conocer el funcionamiento de cada una.

La corrección **proporcional** corrige el error de manera directa e instantánea para intentar eliminarlo, consiste en tomar el error y corregirlo de manera proporcional de tal manera que la corrección (denotado con la letra P de proporcional) será $P = K_P e(t)$ donde K_P es la ganancia, la cual se ajusta experimentalmente para determinar qué tan intensa será la corrección [22], [23]. Esta corrección proporcional se puede implementar haciendo uso de un OPAM en configuración inversora.

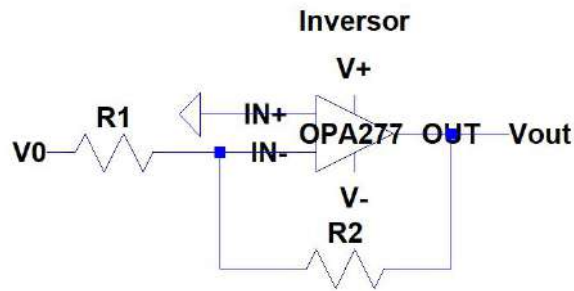


Figura 6.1: OPAM en configuración inversora, utilizado en la parte proporcional del circuito PID.

La configuración inversora se muestra en la Figura 6.1 y se caracteriza por dar un voltaje de salida proporcional al voltaje de entrada

$$V_{\text{out}} = -\frac{R_2}{R_1}V_0, \quad (6.1)$$

donde $K_P = -\frac{R_1}{R_2}$ es la ganancia o factor de amplificación. En la aplicación el voltaje de entrada es la señal del error $V_0 = e(t)$.

La corrección **integral**; la integral o bien el área bajo la curva de error, la cual sirve como historial para la corrección: si el área bajo la curva es grande, la corrección que implementa la parte integral será grande, mientras que si el área bajo la curva del comportamiento del error es pequeña, la corrección será pequeña. El valor irá cambiando con el tiempo debido a que se va ajustando el error en tiempo real, lo que hace que se vaya calculando el área bajo la curva del error también en el tiempo, en específico en periodos de tiempo τ . La corrección integral será positiva o negativa dependiendo de cómo se compare con el valor de referencia V_{setpoint} [22], [23]. Esta etapa es útil debido a que puede hacer correcciones que varían lentamente en el tiempo, como cambios en la temperatura y otras variables cuya escala de tiempo es grande. En general aplicadas a contribuciones del error por ruido eléctrico, las cuales no pueden ser corregidas por la etapa proporcional. La corrección Integral se puede implementar haciendo uso de un OPAM en configuración integradora.

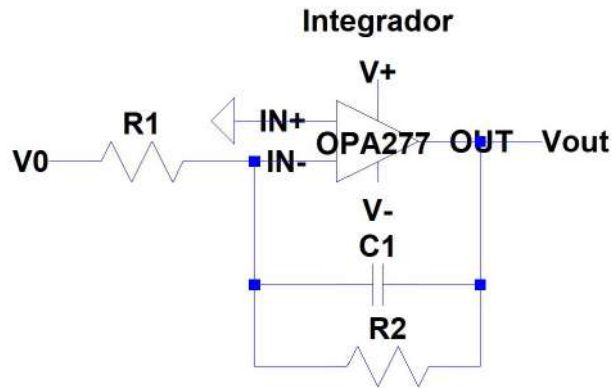


Figura 6.2: OPAM en configuración integradora con corrección, utilizado en la parte integral del circuito PID. Esta configuración tiene un problema, el cual es que si el OPAM recibe una señal de voltaje constante, esta se satura y no integra, este error se puede corregir agregando una resistencia R2 en paralelo del capacitor, el cual actúa como si estuviéramos sumando una parte proporcional.

La configuración integral se muestra en la Figura 6.2, su voltaje de salida esta dado por

$$V_{out} = -\frac{1}{R1C1} \int V_{0,ac} dt - \frac{R2}{R1} V_{0,dc}, \quad (6.2)$$

donde $\tau = R1C1$, siendo esta la constante de tiempo de integración la cual permite ajustar la ganancia del integrador. La parte integral corrige la parte de la señal que no es constante $V_{0,ac}$, mientras que la parte proporcional corrige la parte constante de la señal $V_{0,dc}$ con una ganancia de $-\frac{R2}{R1}$.

Por último, se tiene la corrección **derivativa** (denotada por la letra *D* de derivativo), la cual predice el comportamiento del error, esto lo hace calculando la tasa de cambio (pendiente) del error en función del tiempo y por lo tanto nos da información sobre el comportamiento futuro de la función del error, si es creciente o decreciente y a qué tasa cambia esta función. Esta corrección sirve como amortiguamiento para la corrección global de la señal, evitando que la corrección proporcional e integral sean muy agresivas. Esta corrección sirve para procesos que son largos en duración, debido a que utilizarlo en procesos muy cortos induce oscilaciones; también tiene el inconveniente de que es una corrección muy susceptible al ruido, haciéndola muy difícil de calibrar, es por esto que no suele ser muy utilizada [22], [23]. Esta corrección se puede implementar haciendo uso de un OPAM en configuración derivador.

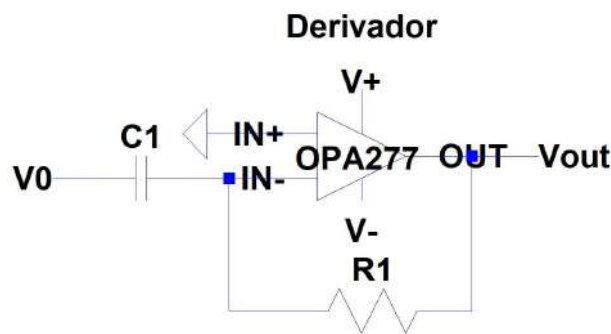


Figura 6.3: OPAM en configuración derivador, utilizado en la parte derivativa del circuito PID.

La configuración diferencial de un OPAM se muestra en la Figura 6.3, la cual tiene comportamiento

$$V_{\text{out}} = -R1C1 \frac{dV_0}{dt}, \quad (6.3)$$

donde $\tau_{\text{der}} = R1C1$ es la constante del tiempo del derivador, con la que se ajusta su ganancia.

6.2. Diseño del circuito PID

Tomando en cuenta que controlaremos la intensidad del láser con un AOM se propone el arreglo experimental que se muestra en la Figura 6.4. En el arreglo tendremos una señal de radiofrecuencia, la cual pasará por un mezclador de señales, el cual mezclará la señal inicial con la señal de salida del circuito PID. Posteriormente se utiliza un amplificador para enviar una señal de radiofrecuencia de la potencia adecuada para poder operar el AOM y controlar la intensidad del láser. El haz láser al pasar por el AOM se difractará, nosotros utilizaremos la difracción de orden 0 y de primer orden. La difracción de orden 0 irá directamente al experimento, mientras que parte de la difracción de orden 1 será detectada por un fotodiodo, la señal generada por este fotodiodo será la que corregiremos con el circuito PID. Por último la salida del circuito PID entrará al mezclador de señales.

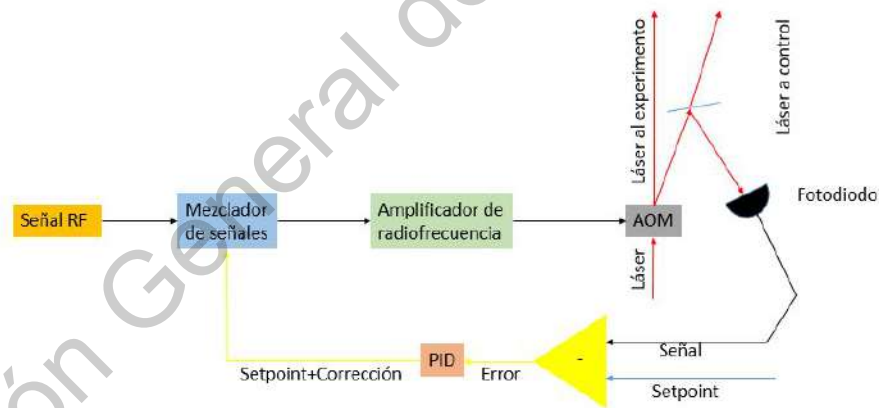


Figura 6.4: Diagrama de bloques del experimento que se desea controlar

Antes de diseñar el PID presentaremos dos configuraciones de OPAMs básicas para manipular las señales del circuito PID, estas son: la configuración diferencial y la configuración sumadora [24]. La configuración diferencial nos ayuda a restar señales y está representada en la Figura 6.5 (a), mientras que la configuración sumadora nos ayuda a sumar señales, representada en la Figura 6.5 (b).

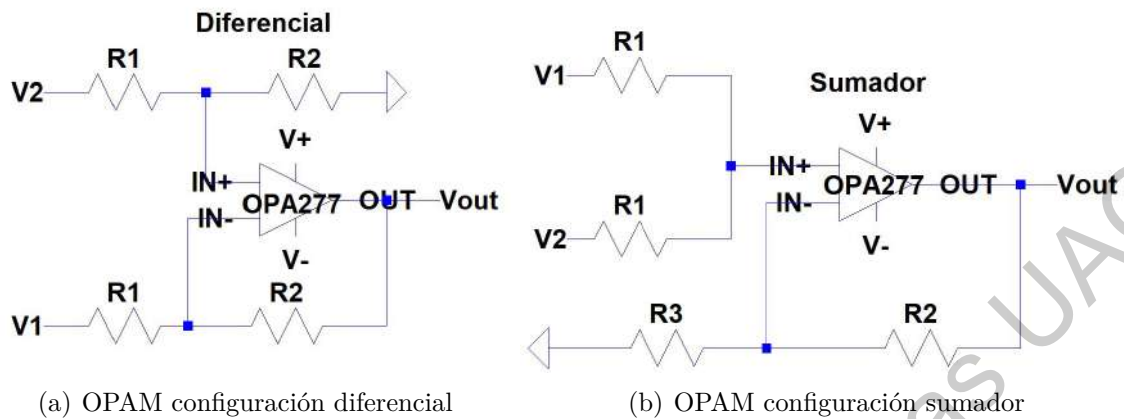


Figura 6.5: OPAMs en configuraciones diferencial y sumador, los cuales son útiles para manipular señales.

El comportamiento del OPAM diferencial esta dado por la ecuación (6.4) y el sumador por la ecuación (6.5)

$$V_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1), \quad (6.4)$$

$$V_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_1}(V_1 + V_2). \quad (6.5)$$

En general el OPAM diferencial se utiliza para el cálculo del error y el sumador para agregar la corrección generada por el PID al setpoint. Con estas herramientas en mente, se propone el circuito PID que se muestra en la Figura 6.6.

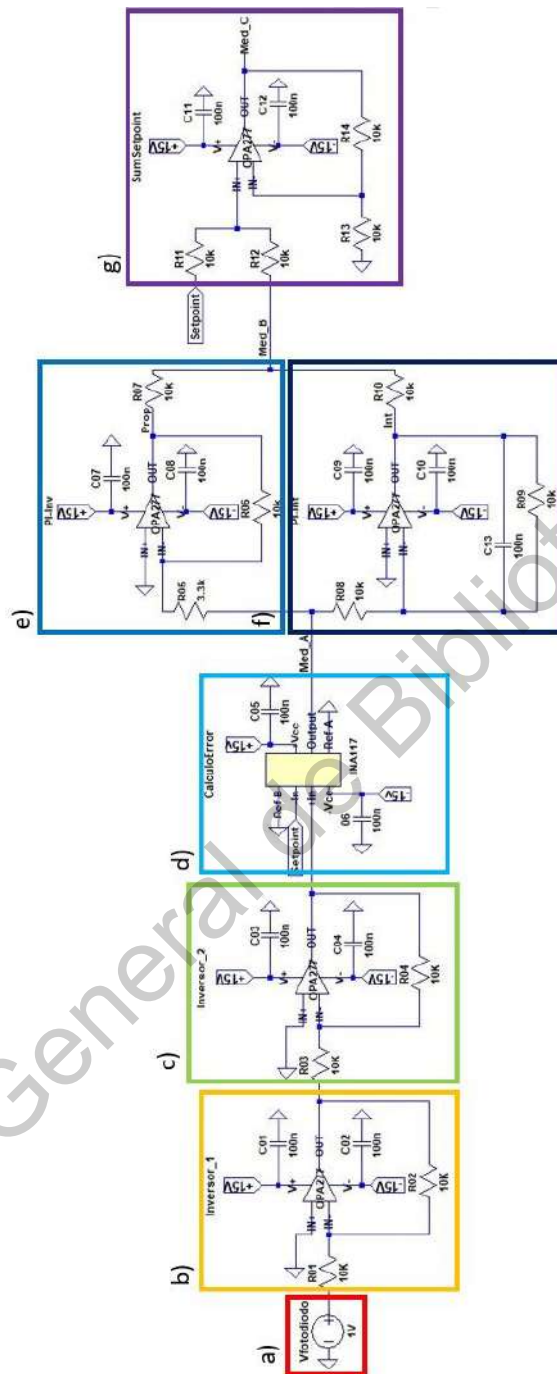


Figura 6.6: Esquemático del circuito PID con todos sus componentes. A continuación se especifica, por bloques, la función de cada componente dentro del circuito, a) La señal de entrada que corresponde con la señal proporcionada por el fotodiodo, b) Primer inversor de señal con ganancia 1 tal que $V \rightarrow -V$, c) Segundo inversor de señal con ganancia 1 para mantener el la señal original $-V \rightarrow V$, d) Resta de la señal del fotodiodo con la señal de referencia para calcular el error $V_{error} = V_{fotodiodo} - V_{setpoint}$, esto se logra mediante un amplificador de instrumentación llamado INA 117, e) El cálculo de la corrección proporcional, f) El cálculo de la corrección integral y por último g) Suma de la corrección PI con la señal de referencia.

En la primera etapa (Figura 6.6b) podemos observar un inversor cuya función es cambiar el signo a la señal de entrada ($V_{\text{fotodiodo}}$) manteniendo su valor original ($V_{\text{fotodiodo}} \rightarrow -V_{\text{fotodiodo}}$), en preparación para el cálculo del error necesitamos invertir de nuevo la señal, ya que se ocupa positiva, es por esto que en la siguiente etapa (Figura 6.6c) se vuelve a invertir la señal ($-V_{\text{fotodiodo}} \rightarrow V_{\text{fotodiodo}}$), se agrega esta etapa debido a que el OPAM ayuda a reducir el ruido eléctrico ya que actúa como una especie de filtro, y se utilizan dos OPAMs inversores para que se tenga la misma señal que la original³⁷. En la siguiente etapa (Figura 6.6d) se calcula el error, donde se tiene un chip INA117, el cual es un amplificador diferencial de precisión de ganancia unitaria (Figura 6.4), el cual resta el voltaje de fotodiodo con el voltaje de referencia (V_{setpoint}) obteniendo así el error entre ellos

$$V_{\text{error}} = V_{\text{fotodiodo}} - V_{\text{setpoint}}. \quad (6.6)$$

Posteriormente se pasa a la parte proporcional-integral (PI, Figuras 6.6e y 6.6f), se decidió no poner la parte diferenciadora debido a que la corrección del error se espera que dure algunos segundos con un valor del error pequeño (algunos mV) y para errores pequeños y tiempos cortos, la etapa diferencial es muy sensible e inestable, por lo que sería inconveniente agregarla en esta corrección. Por último, la corrección resultante de la parte PI llega al último OPAM (Figura 6.6g), el cual está en configuración de suma, en este punto del circuito se suma la corrección generada en la parte PI con la señal de referencia, para posteriormente insertarse en la señal que va a controlar al AOM.

6.3. Modelado del circuito PID

Para comprobar el funcionamiento del circuito antes de fabricarlo, realizamos una serie de pruebas en el simulador de circuitos eléctricos LTSpice XVII [25], en el cual variamos un parámetro en la etapa proporcional-integral, la ganancia en la parte proporcional³⁸. Variamos específicamente estos valores debido a que experimentalmente será el parámetros de control del circuito.

Para el análisis del circuito de retroalimentación PID, se realizó la simulación por partes debido a que el circuito completo consume muchos recursos computacionales no disponibles por el momento; sin embargo simularlo por partes no afecta en el resultado final. La primera parte de la simulación, en la cual intervienen los primeros circuitos integrados (Figuras 6.6b, 6.6c y 6.6d), los inversores y el INA117, corresponde al cálculo del error entre el voltaje $V_{\text{fotodiodo}}$ que proviene del fotodiodo y el voltaje de referencia V_{setpoint} , en el experimento real se espera tener una diferencia de voltajes de aproximadamente 1 a 10 mV, esto corresponde a un voltaje de entrada $V_{\text{fotodiodo}} = 0.99, 0.999, 1.01, 1.001$ V y un voltaje de referencia³⁹ $V_{\text{setpoint}} = 1$ V, Para medir el voltaje de salida del error, debemos medir en Med A, especificado en la

³⁷Se utilizan los OPAMs inversores ya que estos pueden tener ganancia 1, mientras que la ganancia en los OPAMs no inversores es siempre < 1 , lo cual no es deseado para nuestro experimento.

³⁸La tasa a la cual el voltaje de salida incrementa es determinado por el valor de la constante de tiempo RC . Este parámetro es importante controlarlo debido a que en funciones periódicas toma un papel importante, porque a altas frecuencias, el capacitor puede no alcanzar a cargarse completamente, lo que no nos dará un voltaje de saturación, que es el resultado esperado cuando utilizamos un OPAM integrador. Por lo que si se desea hacer un análisis con funciones periódicas es conveniente variar también el parámetro RC , esto se hace cambiando el valor del capacitor en la parte integral (C13, ver Figura 6.6f).

³⁹Aunque el voltaje generado por el fotodiodo no sea aproximadamente 1 V, el valor de V_{setpoint} se puede ajustar para tener aproximadamente estos errores.

Figura 6.6. La siguiente etapa de la simulación del circuito corresponde a la parte PI, en la cual, como primera simulación variaremos solamente la ganancia en la parte proporcional, para medir la corrección generada por la parte PI debemos medir en Med B especificado en la Figura 6.6. Por último simularemos la señal de salida del sistema V_{out} que consta de sumar la corrección con el voltaje de referencia, para medir este voltaje tenemos que medir en Med C. Este comportamiento lo observamos en el Cuadro 1.

$V_{fotodiodo}$ (V)	V_{error} (mV) Med A	Ganancia	P (mV) Prop	I (mV) Int	PI (mV) Med B	V_{out} (V) Med C
1.01	10.05692	0.09	-0.90335	-10.03692	-5.47015	0.99454
1.01	10.05692	1.51	-15.21342	-10.03694	-12.62479	0.98738
1.01	10.05692	3.03	-30.43525	-10.03694	-20.23609	0.97977
1.001	1.05654	0.09	-0.08515	-1.03656	-0.56086	0.99945
1.001	1.05654	1.51	-1.57585	-1.03656	-1.30613	0.99870
1.001	1.05654	3.03	-3.16136	-1.03657	-2.09897	0.99791
0.999	-0.94354	0.09	0.09667	0.96352	0.53009	1.00054
0.999	-0.94354	1.51	1.45482	0.96352	1.20913	1.00122
0.999	-0.94354	3.03	2.89962	0.96352	1.93150	1.00194
0.99	-9.94391	0.09	0.91490	9.96388	5.43938	1.00545
0.99	-9.94391	1.51	15.09272	9.96387	12.52776	1.01254
0.99	-9.94391	3.03	30.17392	9.96387	20.06859	1.02008

Cuadro 1: Correcciones del error y señal de salida para diferentes valores del error y diferentes valores de ganancia, el valor de la ganancia se modifica al cambiar el valor de la resistencia R06 en el circuito PID representado en la Figura 6.6, cuando la ganancia es 0.09, $R06= 300\Omega$, cuando la ganancia es 1.51, $R06= 5000\Omega$ y cuando la ganancia es 3.03, $R06= 10000\Omega$.

Para la simulación reportada en el Cuadro 1 utilizamos el modelo computacional del OPAM OPA277 proporcionado por el distribuidor [26] se seleccionó este modelo porque se planean usar OPAMS OPA277 en la fabricación del circuito. Observemos entonces el comportamiento del circuito que se encuentra en el cuadro 1, este comportamiento es el esperado para poder corregir la intensidad ya que si $V_{fotodiodo}$ es mayor que $V_{setpoint}$, el PID nos da un menor valor a la salida y viceversa.

También, a partir del Cuadro 1 podemos observar que la corrección generada por el PI corresponde con la mitad de la suma de las correcciones generadas en la parte proporcional (P) y la parte integral (I), esto debido a que las correcciones P e I al pasar por los OPAMs nos reflejan un voltaje, estas etapas están conectadas en paralelo, con la misma resistencia, esto hace que tengan un comportamiento similar al de tener 2 fuentes en paralelo con diferente voltaje, en ambos casos los voltajes se compensan, esto es, la de mayor voltaje “carga” a la de menor voltaje hasta que las dos tengan la misma corriente y voltaje⁴⁰. Al tener la misma resistencia en la salida de la corrección P e I, el voltaje de salida debe cumplir que el voltaje en ambas etapas es el promedio de ambos voltajes.

Como parte de la simulación, observaremos el comportamiento del circuito al introducir una fluctuación en el voltaje de entrada, para tal efecto modelamos el voltaje que se registra del fotodiodo como $V_{fotodiodo} = 1 + 0.01 \sin(2\pi x)$ donde x tendrá valores en el intervalo $[0, 1]$,

⁴⁰Esta configuración es utilizada para cargar baterías [1], es por esto que se usa la palabra ‘cargar’.

esto con el fin de abarcar un ciclo de la función seno, en este ciclo tomaremos 20 puntos igualmente espaciados para ver el comportamiento del error y de las partes P, I y PI para comprobar nuestro análisis anterior, se utilizarán los valores de $V_{\text{setpoint}} = 1 \text{ V}$ y se tendrá una ganancia de 1.52, tal que $R06 = 5000 \Omega$.

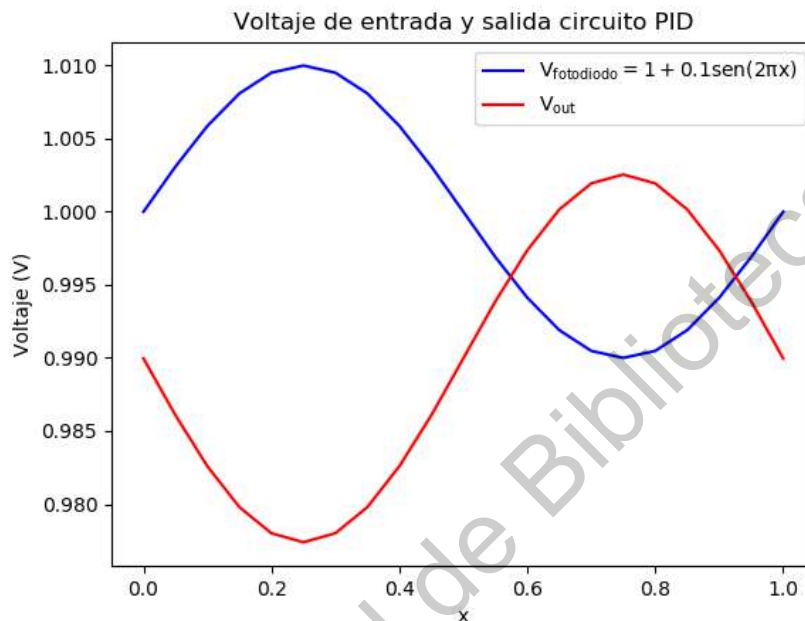


Figura 6.7: Modelo de una fluctuación periódica en la intensidad del láser medida en el fotodiodo, y su correspondiente corrección con el circuito PID. Se utilizaron los parámetros $V_{\text{setpoint}} = 1 \text{ V}$ y $R06 = 5000 \Omega$.

La Figura 6.7 nos muestra una fluctuación intencional del voltaje de entrada $V_{\text{fotodiodo}}$ en azul, mientras que, en color rojo se muestra el voltaje de salida del circuito PID, el cual corresponde a la corrección y refleja la forma de la fluctuación de la potencia. Observamos si $V_{\text{fotodiodo}} > V_{\text{setpoint}}$, el circuito arroja un voltaje menor para compensar mientras que si $V_{\text{fotodiodo}} < V_{\text{setpoint}}$, el circuito arroja un voltaje mayor para compensar, lo cual es el comportamiento deseado.

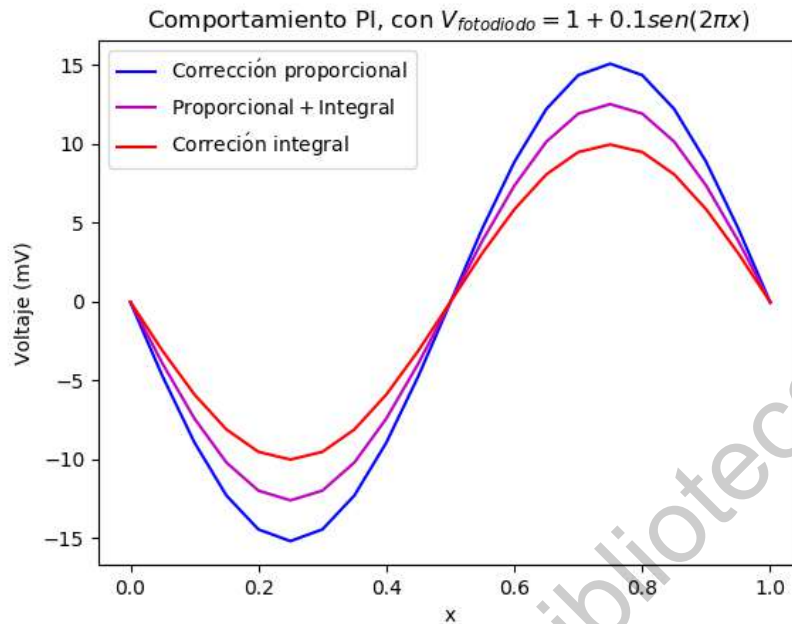
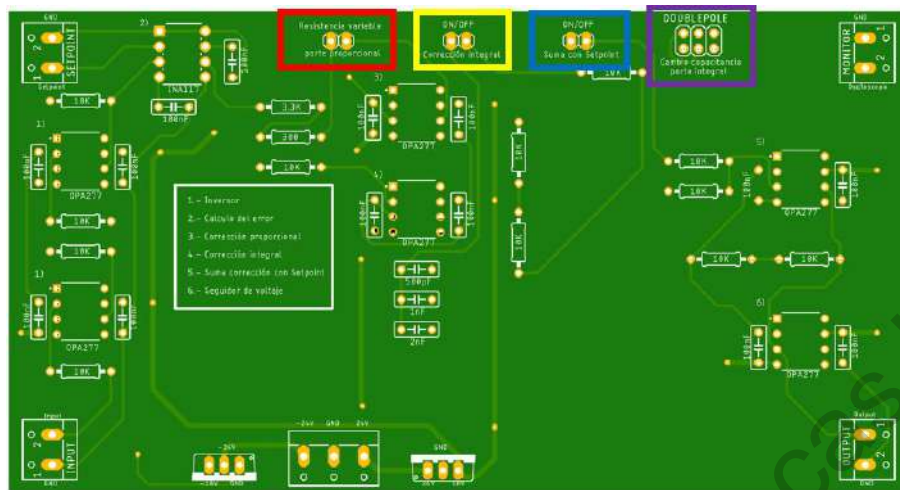


Figura 6.8: Comparación del comportamiento de las correcciones proporcional, integral y la suma de ambas, estas correcciones dependen del parámetro x el cual modela el error introducido en el voltaje de entrada en esta simulación. Se utilizaron los parámetros $V_{\text{setpoint}} = 1 \text{ V}$ y $R_{06} = 5000 \Omega$.

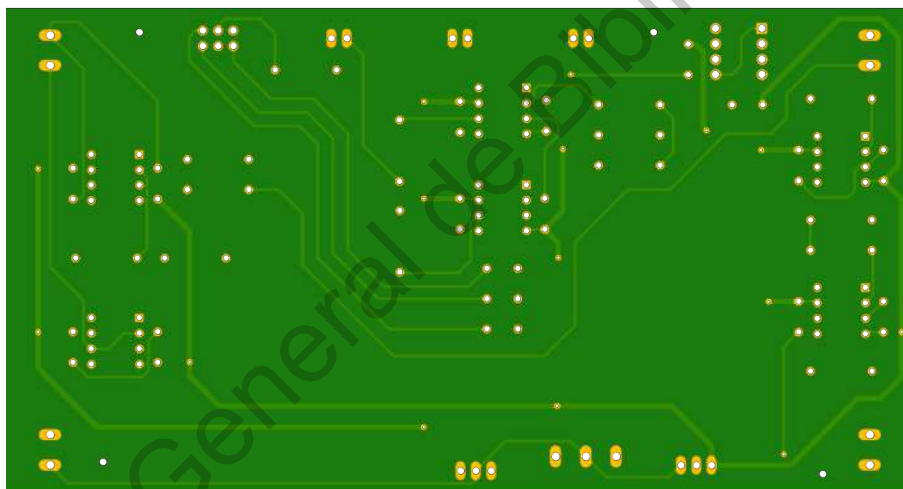
Por otro lado, la Figura 6.8 nos muestra las correcciones generadas por la parte proporcional en azul, la parte integral en rojo y la corrección PI en violeta. Podemos observar que ambas correcciones proporcional e integral dan una corrección proporcional inversa al error generado, la única diferencia es que cambia la ganancia, esto es debido a que los errores se trataron como una señal de corriente directa para cada punto en x , lo que originó que en la parte integral actuara como una corrección proporcional debido a la resistencia que sirve para corregir el comportamiento en este tipo de corriente. El comportamiento del circuito es el esperado, debido a que la señal de salida al combinar ambas correcciones es la mitad de la suma de las correcciones P e I, por lo que el circuito tiene el comportamiento esperado.

6.4. Implementación experimental y pruebas del circuito PID

Una vez modelado el circuito PID, podemos construirlo físicamente, una opción es construir el circuito usando cables, esta opción se considerará mientras el circuito sea un prototipo reconfigurable, sin embargo en el futuro se optará por fabricar una placa con el circuito impreso (PCB). Una PCB presenta las ventajas de tener conexiones fijas, facilidad de reproducción de piezas numerosas, superficies específicas para para montar los componentes, presentan menor ruido electrónico y tienen menor probabilidad de fallas [27]. Para poder generar la PCB se hizo uso del software de Eagle con la cual generamos la placa que se muestra en la Figura 6.9.



(a) Parte frontal del PCB



(b) Parte trasera del PCB

Figura 6.9: PCB del circuito PID diseñado para el experimento en una placa de 15 cm x 8 cm.

En la propia PCB se señala cada etapa, es por esto que se tiene un número a lado de cada OPAM y del INA177, el número 1) corresponde a los OPAMs inversores que nos ayudan a tratar la señal antes calcular el error, el número 2) señala la parte del circuito que calcula el error, el número 3) la corrección proporcional, el 4) la corrección integral, el 5) nos señala la suma con el setpoint y por ultimo el 6) nos muestra un OPAM seguidor de voltaje (el cual proporciona la misma señal de entrada que de salida), el cual sirve como protección a los sensores de medición con los que se pretende medir la señal de salida.

Se consideró una placa de 15 cm x 8 cm con el fin de hacerlo lo mas compacto posible, dentro del mismo diseño se buscó describir el circuito para que cualquier persona pueda entenderlo, para esto señalamos donde esta cada etapa del circuito. En este circuito se planea tener 4 características ajustables las cuales se encuentran en la parte superior de la

placa, en la parte frontal se tiene descrito la función de cada componente como se muestra en la Figura 6.9 (a), la primera siendo la ganancia variable en la parte proporcional en la corrección PI, señalada con un recuadro rojo en la Figura 6.9 (a), esta será controlada con un potenciómetro con el cual podremos ajustar la resistencia (la que variamos en la simulación), este potenciómetro es el que nos ayudará a calibrar la ganancia del sistema manualmente. La siguiente característica es poder activar o desactivar la corrección a la integral que se utiliza para señales constantes, señalada con un recuadro amarillo en la Figura 6.9 (a) como es una característica que se activa o se desactiva, será controlada por un switch/interruptor físico. También se buscó tener la posibilidad de desactivar el circuito PID de manera manual, esto se logra con un interruptor, el cual permite que la señal generada en la etapa PI llegue al OPAM sumador si se activa o desactiva el interruptor, esta característica esta señalada con un recuadro azul en la Figura 6.9 (a). Por último, se buscó poder variar el periodo de integración, esto lo hacemos con un switch DPDT, el cual nos permite cambiar las conexiones dependiendo de la posición del switch, esta característica esta señalada con un recuadro morado en la Figura 6.9 (a).

7. Resultados

Tomando en cuenta que el enfriamiento y atrapamiento láser en trampas ópticas esta ampliamente relacionado con la intensidad del láser incidente y que la intensidad es controlable de manera indirecta haciendo uso de un modulador acusto-óptico se diseñó un circuito PID para controlar en tiempo real la intensidad del láser, este circuito se muestra en la Figura 6.6. El circuito tiene como parámetros ajustables la resistencia en la parte proporcional que ajusta la ganancia y en la parte integral la constante de tiempo de integración para ajustar los errores periódicos en la señal.

Posteriormente se estudió la respuesta del circuito haciendo uso del software LTSpice XVII, la primera simulación consistió en conocer el comportamiento del circuito en dos puntos, cuando $V_{\text{fotodiodo}} < V_{\text{setpoint}}$ y cuando $V_{\text{fotodiodo}} > V_{\text{setpoint}}$ con diferente ganancia en la parte proporcional para la corrección del error en señales digitales, este resultado se presentó en el Cuadro 1, en el se muestra el comportamiento esperado, aumentando la señal si $V_{\text{fotodiodo}} < V_{\text{setpoint}}$ y disminuyendo la señal si $V_{\text{fotodiodo}} > V_{\text{setpoint}}$. Para observar este comportamiento de manera gráfica, ajustamos el circuito con una ganancia fija en la parte proporcional y variamos el voltaje de entrada simulando una fluctuación en la intensidad del láser tal que $V_{\text{fotodiodo}} = 1 + 0.01 \text{sen}(2\pi x)$, en el cual variamos $x \in [0, 1]$, a partir de esta simulación generamos la Figura 6.7, de la cual obtuvimos siguientes resultados:

- Si $V_{\text{fotodiodo}} < V_{\text{setpoint}}$ la corrección aumenta.
- Si $V_{\text{fotodiodo}} > V_{\text{setpoint}}$ la corrección disminuye.

En la Figura 6.8 observamos de manera gráfica el comportamiento de las etapas proporcional e integral, también se puede apreciar que el comportamiento de la corrección completa PI es el promedio de la etapa proporcional y la integral individualmente, lo cual corresponde con lo esperado.

Finalmente, basándonos en el circuito PID, se diseñó una PCB la cual se muestra en la figura 6.9 con el fin de tener el circuito fijo en una placa, para el diseño de la PCB se consideró el poder ajustar los parámetros de control como la resistencia en la parte proporcional y la

constante de tiempo de integración en la parte integral; el ajuste de la resistencia se logró haciendo uso de un potenciómetro el cual ajusta la resistencia en la etapa proporcional mientras que la constante de tiempo en la etapa integral se ajusta haciendo uso de un switch DPDT, el cual nos ayudara a cambiar de capacitor. Estos ajustes nos ayudaran para poder hacer el ajuste del error de manera manual. Además, se tienen dos botones, el primero nos permitirá encender y apagar la corrección a la parte integral para señales digitales mientras que el segundo botón sirve para encender y apagar la corrección PID, esto se logra permitiendo que la señal de la corrección pase por el OPAM sumador o no del circuito.

Por la situación actual de pandemia, quedó pendiente la fabricación y caracterización del circuito. La caracterización consta de conectar el circuito y hacer pruebas en él con diferentes señales electrónicas, ya sean señales constantes, rampas específicas, señales sinusoidales, o cualquier otra señal personalizada que se desee, para posteriormente ir midiendo la respuesta que tiene en cada etapa parte del circuito, y conocer el comportamiento específico de nuestro circuito.

8. Conclusiones

En esta tesis aprendimos que para poder realizar el enfriamiento de átomos neutros es necesario conocer primeramente el comportamiento que tiene este tipo de átomos al exponerlos con la componente eléctrica del campo electromagnético que describe la radiación láser y con campos magnéticos los cuales son generados por bobinas. Se consideró estudiar los átomos alcalinos debido a que bajo ciertas condiciones estos pueden comportarse como átomos de dos niveles. Debido a que el átomo de dos niveles es el modelo más sencillo que podemos resolver; se analizó su comportamiento frente a campos eléctricos y magnéticos para conocer el comportamiento general de la materia bajo estas condiciones, de este análisis llegamos a la conclusión de que se pueden generar dos tipos de trampas, las magnéticas y las ópticas.

Antes de profundizar en los atrapamientos, se describió el procedimiento estándar para poder enfriar átomos alcalinos el cual consta en generar una nube de alguna especie atómica, posteriormente enfriar la nube atómica con el método de enfriamiento por melaza óptica, el cual consiste en iluminar a los átomos con haces láser en resonancia, lo que disminuye la energía del sistema, esto se manifiesta con una disminución de la temperatura de la nube. Después de enfriar la nube, se procede a atrapar los átomos en una trampa magnética generada por bobinas o en una trampa óptica la cual se genera con láseres lejos de resonancia atómica.

Por ultimo, si se desea bajar aun más la temperatura, se puede implementar la técnica de evaporación en cualquiera de las dos trampas. Cabe mencionar que este procedimiento para atrapar átomos es para átomos alcalinos neutros, es necesario volver a hacer el análisis si se desea usar algún otro tipo de átomo neutro debido a que su estructura interna será distinta a la de los alcalinos y su comportamiento con los campos electro y magnéticos puede variar. También es importante considerar que se puede hacer enfriamiento con átomos cargados eléctricamente, lo que hace que su atrapamiento sea diferente debido a que se puede utilizar la carga eléctrica para poder manipularlos.

Una vez conocido el procedimiento estándar para enfriar átomos alcalinos neutros, analizamos los métodos de atrapamiento. Al hacer el análisis nos concentramos en las trampas ópticas debido a las ventajas que presentan frente a las trampas magnéticas, siendo algunas

de las más notables que las trampas magnéticas sólo pueden atrapar un número limitado de estados magnéticos, mientras que las trampas ópticas permiten atrapar la totalidad de los estados internos de los átomos. Otra ventaja de las trampas ópticas es que podemos generar potenciales de atrapamiento de geometría casi arbitraria como las redes ópticas y otras configuraciones, pues el potencial depende directamente de la intensidad del láser incidente.

Basándonos en que el potencial de atrapamiento de los átomos alcalinos depende directamente de la intensidad láser se propone un circuito de control que nos permita regular la estabilidad de esta intensidad con el fin de tener un buen control para mantener más estable la temperatura. Las fluctuaciones en la intensidad se traducen en calentamiento indeseado de la nube atómica que atrapamos. Un buen control de la intensidad nos permite implementar métodos de enfriamiento como el de evaporación forzada para trampas ópticas, así como poder replicar las condiciones de atrapamiento dentro de la trampa óptica, esto es especialmente útil si se necesita hacer un experimento muchas veces con nubes atómicas enfriadas para poder conocer el comportamiento cuántico del sistema con alta precisión.

Por último, los retos presentados al realizar este proyecto se presentaron a la hora de diseñar la PCB, la cual sufrió varios cambios hasta llegar al producto final. Los errores que se cometieron principalmente fue un mal manejo del espacio ya que inicialmente se planteaba tener los componentes y las características ajustables lo más cercana posible, lo que llevó primeramente a poner los pines para las características ajustables en medio de la placa, lo cual sería inconveniente debido a que se tiene planeado montar el circuito en una caja, y tener estos pines en medio tendría como consecuencia tener cables muy largos cruzados en la caja, es por esto que en la versión final de la PCB se pusieron en la parte superior.

También se tuvo que rediseñar el circuito debido a que se considero primeramente usar OPAMs duales, mientras que los OPAMs que se tenían planeado usar en el laboratorio eran simples, por lo que es importante conocer el material con el que se cuenta o se planea contar para poder realizar el diseño. Por otra parte, es recomendable entender bien el funcionamiento de nuestras herramientas y las necesidades del proyecto, debido a que esto nos permite proponer una solución clara y concisa a los retos que se puedan presentar, en este caso, debido al conocimiento del control PID como el conocimiento de la necesidad de estabilizar la intensidad permitió tener una visión clara de cómo resolver el problema. Por último, a la hora de diseñar PCBs es importante no sólo conocer las dimensiones del espacio donde se va a poner la placa, sino que también es importante saber cómo esta va a interactuar con el entorno, esto para facilitar la interacción entre el usuario y el circuito.

Cómo conclusión final, las trampas ópticas para átomos neutros presentan ventajas sobre las trampas magnéticas; la forma de controlar la profundidad de las trampas ópticas es mediante la intensidad, el implementar un circuito de control para la intensidad nos permite tener estabilidad en la trampa para poder trabajar, lo que nos permite tener un entorno óptimo para la realización de experimentos con la nube atómica confinada.

Referencias

- [1] GIANCOLI D. (2009). *Física para Ciencias e Ingeniería con Física Moderna volumen II*. 4ta edición. México: Pearson educación.
- [2] GEOTEM (2016). *Caracterización Geofísica-Geológica del subsuelo*. Recuperado de: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/20/2/022001>
- [3] DEBS J., ALTIN P., BARTER H. et al. (2011). *Cold-atom gravimetry with a Bose-Einstein condensate*, Physical Review A 84(3), [033610]. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.033610>
- [4] SCHÄFER, F., FUKAHARA, T. et al. (2020). *Tools for quantum simulation with ultracold atoms in optical lattices*. arXiv. DOI: 10.1038/s42254-020-0195-3
- [5] GROSS, C. & BLOCH, I. (2017). *Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices*, Science, (357), [995–1001]. DOI: 10.1126/science.aal3837
- [6] JANNES, G. (2009). *Emergent gravity: the BEC paradigm* (Tesis doctoral). arXiv. DOI: arXiv:0907.2839
- [7] GRIFFITHS, D. (1995). *Introduction to quantum mechanics*. Estados Unidos, Nueva Jersey: Prentice hall.
- [8] FOOT C. (2005). *Atomic Physics*. Estados Unidos, Nueva York: Oxford New York.
- [9] RETAMOSA, J., TREJO, A. & RUIZ, P. (2004). *Introducción a la física cuántica, segunda parte*. Recuperado de http://nuclear.fis.ucm.es/EM2011/Apuntes-FC2-1_1_0-Joaquin.pdf
- [10] ZETTLI, N. (2009). *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. Segunda edición. Estados Unidos: John Wiley & Sons.
- [11] WOODGATE, K. (1980). *Elementary atomic structure, second edition* Estados Unidos, Nueva York: Oxford New York.
- [12] GUTIÉRREZ, C. (2014). *Aspectos teóricos de no linealidad óptica en un medio atómico* (Tesis doctoral). Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla.
- [13] GRIMM, R., WEIDERMÜLLER, M. & OVCHINNIKOV, Y. (2000). *Optical Dipole Traps For Neutral Atoms*, Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics, (42), [95-170]. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(08\)60186-X](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60186-X)
- [14] PHILLIPS, W. D. (1998). *Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms*. Reviews of Modern Physics, 70, [721-741]. DOI:10.1103/RevModPhys.70.721
- [15] JIMÉNEZ, K. (2012). *Artificial Gauge Fields for Ultracold Neutral Atoms* (Tesis doctoral). National Institute of Standards and Technology, and the University of Maryland, Gaithersburg, Maryland.

- [16] WEIGAND, W., EGBERT, A. & SADLER, H. (2015). *Determining g-factors in Rubidium-85 and Rubidium-87 using optical pumping* Universidad de San Diego, Estados Unidos, California.
- [17] BARREDO, D., LÉSÉLEUC, S., et al. (2016). *An atom-by-atom assembler of defect-free arbitrary 2D atomic arrays*. Science, 354. DOI: 10.1126/science.aah3778
- [18] DE LA PEÑA, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica*. México, CDMX: UNAM
- [19] SELF, SIDNEY A. (1983). *Focusing of Spherical Gaussian Beams*. Applied Optics, vol. 22, no. 5, January 1983. DOI:<https://doi.org/10.1364/AO.22.000658>
- [20] ALDA, J. (2003). *Laser and Gaussian Beam Propagation and Transformation*. Encyclopedia of Optical Engineering. DOI: 10.1081/E-E0E120009751
- [21] LEKAVICH, J. (1986). *Basic of Acousto-Optic Devices*. Recuperado de: https://www.lambdaphoto.co.uk/wp/wp-content/uploads/2018/02/LAMBDA_Basics-of-Acousto-Optic-Devices.pdf
- [22] BAÑUELOS, M. (1999). *Análisis y Diseño de un Controlador PID Analógico (inf.téc.)*. Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico. UNAM. Ciudad de México, México.
- [23] MAZZONE, V. (2002). *Controladores PID*. Universidad Nacional de Quilmes, Bernal, Argentina.
- [24] ASPENCORE (2018). *Operational Amplifiers Summary*. Recuperado de: https://www.electronics-tutorials.ws/opamp/opamp_8.html
- [25] TUINENGA, P. (1988). *Spice: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using Pspice*. Estados Unidos: Prentice Hall.
- [26] MOUSER ELECTRONICS. *OPA277P*. Recuperado de: <https://www.mouser.mx/ProductDetail/Texas-Instruments/OPA277P?qs=7nS3%252BbEUL6u0oZNOXifw7g%3D%3D>
- [27] TORRES, H. (2014). *Guía de diseño de PCB con Eagle*. Herramientas Tecnológicas Profesionales, Guadalajara, Jalisco.
- [28] ANDERSON, M., ENSHER, J., MATTHEWS, M., WIEMAN, C. & CORNELL, E. (1995). *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. Science, 269(5221), [198-201] DOI: 10.1126/science.269.5221.198
- [29] CASTIN, Y., WALLIS, H., & DALIBARD, J. (1989). *Limit of Doppler cooling*. Journal of the Optical Society of America B, 6(11), 2046. DOI: 10.1364/josab.6.002046
- [30] DALFOVO, F., GIORGINI, S., PITAEVSKII, L. & STRINGARI, S. (1998). *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Review of Modern Physics, 71(3), [463-512]. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.463

- [31] DE ANGELIS M., BERTOLDI A., CACCIAPUOTI L. et al. (2008). *Precision gravimetry with atomic sensors*, Measurement science and technology, 20(2), [1-16]. DOI: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/20/2/022001>
- [32] LABARCA, D. (2018). *Diseño y construcción de fresadora CNC para la producción de placas PCB* (Tesis grado). Universidad técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
- [33] METCALF, H. & VAN DER STRAREN, P. (1999). *Laser cooling and trapping of atoms*. Estados Unidos, Nueva York: Springer Science.
- [34] MIGDALL A., PRODAN J., PHILLIPS W., BERGEMAN T. & METCALF H. (1985). *First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms*, Physical Review Letters, 45(24), [2596-2599] DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.2596>

Dirección General de Bibliotecas UAG

A. Átomo de dos niveles y su interacción con un campo eléctrico externo oscilante

El átomo de dos niveles considera su estructura con un electrón orbitando al núcleo atómico, entonces el electrón puede estar en dos estados, uno sin perturbar, que vendría siendo $|1\rangle$ también llamado estado base y el estado excitado denotado como $|2\rangle$. Como nos interesa la dinámica del sistema en general, escribamos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar\partial_t\psi(x, y, z, t) = H\psi(x, y, z, t), \quad (\text{A.1})$$

donde el Hamiltoniano del átomo esta dado por $H = K + V$ donde K es el operador de la energía cinética, que en el caso cuántico es $K = \frac{-\hbar}{2m}\nabla^2$, y V es el operador de la energía potencia. Para dar solución a la ecuación (A.1) proponemos una función tipo $\psi(x, y, z, t) = \varphi_t(t)\varphi(x, y, z)$, sustituimos y separamos variables para obtener

$$i\hbar\partial_t\frac{\varphi_t'(t)}{\varphi_t(t)} = \frac{1}{\varphi(x, y, z)}\hat{H}\varphi(x, y, z). \quad (\text{A.2})$$

Al separar variables, la única solución es que ambos lados de la igualdad sean una constante, esto nos arroja la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo por un lado y la evolución temporal en la otra. Analicemos el caso independiente del tiempo

$$H\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z), \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\frac{-\hbar}{2m}\nabla^2 + U(x, y, z)\right)\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z), \quad (\text{A.4})$$

donde E es la energía del sistema. Dado que el potencial de interacción es un potencial coluombiano de la forma $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, el cual tiene simetría radial, es conveniente expresar las ecuaciones en coordenadas esféricas. Para esto escribimos ∇ en coordenadas esféricas y $\varphi(x, y, z) \rightarrow \varphi(r, \theta, \phi)$ y de nuevo proponemos una solución tipo $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Al separar las variables identificamos que la parte angular del operador diferencial corresponde al operador de momento angular, y ambos lados se igualan a la misma constante, cuyo valor es: $l(l+1)$. La parte angular de la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y(\theta, \phi) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Esta ecuación diferencial tiene como solución las ecuaciones especiales conocidas como los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ los cuales dependen no solo de las coordenadas θ y ϕ sino que también depende de el número cuántico de momento angular l y el número cuántico magnético m . La parte radial por otro lado nos genera la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + E\right)R(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R(r), \quad (\text{A.6})$$

la cual tiene como solución las funciones especiales conocidas como funciones asociadas de Laguerre $R_{nl}(r)$, que dependen de la posición r , como del número cuántico principal n y

de l . Tanto los armónicos esféricos como las funciones asociadas de Laguerre son funciones especiales que forman conjuntos de funciones ortonormales, por lo que se usan como base. La solución será entonces

$$\varphi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}Y_{lm}(\theta, \phi).$$

al ser ortonormales deben cumplir las propiedades de normalidad y ortogonalidad las cuales son

$$\int_V \varphi_{n'l'm'}^*(r, \theta, \phi) \varphi_{nlm}(r, \theta, \phi) dV = \begin{cases} 1 & \text{si } n' = n, l' = l, m' = m \\ 0 & \text{si } n' \neq n, l' \neq l, m' \neq m \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Estas expresiones se pueden escribir en lenguaje simplificado usando notación de Dirac, donde multiplicar un estado cualquiera $|i\rangle$ por el complejo conjugado de otro estado cualquiera $|j\rangle^* = \langle j|$ representa hacer la integral en el el espacio de la función i por el complejo conjugado de la función j . Entonces escribiendo en esta notación el estado base y el primer estado excitado del Hidrógeno obtenemos que

$$\varphi_{100} = |1\rangle \text{ y } \varphi_{200} = |2\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Las condiciones de normalidad y ortogonalidad en notación compacta tienen la forma

$$\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1, \quad (\text{A.9})$$

$$\langle 1|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0, \quad (\text{A.10})$$

Tanto el estado base como el estado excitado son soluciones a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, por lo que el utilizar el estado base como solución nos arrojará una energía E_1 correspondiente a la energía del estado base, mientras que utilizar el estado excitado nos arrojará una energía E_2 correspondiente a la energía del estado excitado, de tal manera que en notación compacta, tendríamos que

$$H|1\rangle = E_1|1\rangle, \quad (\text{A.11})$$

$$H|2\rangle = E_2|2\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Para tener la solución completa hace falta tener la solución temporal, la cual se obtiene así:

$$i\hbar \partial_t \frac{\varphi'_t(t)}{\varphi_t(t)} = E_n, \quad (\text{A.13})$$

$$\partial_t \frac{\phi'_t(t)}{\phi_t(t)} = -i \frac{E_n}{\hbar}, \quad (\text{A.14})$$

$$\rightarrow \varphi'_t(t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}. \quad (\text{A.15})$$

Donde E_n corresponde a la energía del estado base o el estado excitado según sea el caso. La solución para una átomo será entonces la superposición de ambos estados energéticos

$$\psi(\vec{r}, t) = C_1(t)|1\rangle e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2(t)|2\rangle e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \quad (\text{A.16})$$

donde $C_1(t)$ es la amplitud de probabilidad asociada a la probabilidad de encontrar al átomo en el estado base y $C_2(t)$ es amplitudes de probabilidad asociadas a la probabilidad de

encontrar al átomo en el estado excitado, ambas amplitudes de probabilidad dependen del tiempo. En el caso de tener una nube atómica, las amplitudes representarían el porcentaje de la población en el estado base y excitado respectivamente. Como el cuadrado de las amplitudes representan una probabilidad, estas deben estar normalizadas, por lo que deben cumplir que

$$|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = 1. \quad (\text{A.17})$$

Podemos simplificar la notación de la ecuación (A.16) si asociamos una frecuencia a la energía mediante la relación $\hbar\omega = E$, por lo que, la solución completa quedará como:

$$\psi(\vec{r}, t) = C_1(t)|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2(t)|2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \quad (\text{A.18})$$

La ecuación (A.18) nos describe la dinámica de un gas de átomos de dos niveles libres no interactuantes entre sí, siendo esta la solución para el átomo de dos niveles.

Debido a que nosotros nos interesa la solución en presencia de un campo eléctrico oscilante, consideremos en primer lugar un campo eléctrico oscilante $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, la interacción que presenta con el átomo se genera por la interacción momento dipolar campo, esta interacción la consideraremos una perturbación al estado base sin perturbar, para poder usar la teoría de perturbaciones. Consideremos entonces a la energía potencial que se genera entre el campo y el momento dipolar como el término perturbativo

$$H_I = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t). \quad (\text{A.19})$$

Para resolver el problema entonces debemos resolver la ecuación de Schrödinger perturbada $i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t) = (H_0 + H_I)\psi(\mathbf{r}, t)$ empezamos entonces con la parte temporal

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) &= i\hbar\partial_t [C_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2|2\rangle e^{-i\omega_2 t}], \\ i\hbar\dot{C}_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + E_1 C_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + i\hbar\dot{C}_2|2\rangle e^{-i\omega_2 t} + E_2 C_2|2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Calculamos la parte espacial recordando que $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$\begin{aligned} H\psi(\mathbf{r}, t) &= (H_0 + H_I)\psi(\mathbf{r}, t), \\ H\psi(\mathbf{r}, t) &= C_1 E_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2 E_2|2\rangle e^{-i\omega_2 t} + C_1 H_I|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2 H_I|2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Igualando igualamos la Ecn. (A.20) y la Ecn.(A.21)

$$i\hbar\dot{C}_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + i\hbar\dot{C}_2|2\rangle e^{-i\omega_2 t} = C_1 H_I|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2 H_I|2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \quad (\text{A.22})$$

Para poder conocer la solución del sistema, tenemos que conocer el comportamiento de las amplitudes de probabilidad C_1 y C_2 . Para encontrar las ecuaciones que describirán este comportamiento esto, primero multiplicaremos la Ecn. (A.22) por $\langle 1|$

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_1\langle 1|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + i\hbar\dot{C}_2\langle 1|2\rangle e^{-i\omega_2 t} &= C_1\langle 1|H_I|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2\langle 1|H_I|2\rangle e^{-i\omega_2 t}, \\ i\hbar\dot{C}_1 e^{-i\omega_1 t} &= C_1\langle 1|H_I|1\rangle e^{-i\omega_1 t} + C_2\langle 1|H_I|2\rangle e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned}$$

El término $\langle 1|H_I|1\rangle$ se hace 0 por argumentos de paridad⁴¹, por lo que la ecuación nos queda como

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_1 e^{-i\omega_1 t} &= C_2\langle 1|H_I|2\rangle e^{-i\omega_2 t}, \\ i\dot{C}_1 &= C_2 \cos(\omega t) e^{\frac{\langle 1|\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0|2\rangle}{\hbar} e^{-i\omega_2 t + i\omega_1 t}}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

⁴¹Una función impar integrada en un intervalo [-a,a] tiene como resultado 0

Es útil definir la frecuencia de Rabi como

$$\Omega = e \frac{\langle 1 | \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 | 2 \rangle}{\hbar}, \quad (\text{A.24})$$

ya que esta cantidad indica que tan bien se pueden acoplar los niveles $|1\rangle$ y $|2\rangle$. La Ecn. (A.23) entonces nos queda como

$$i\dot{C}_1 = C_2 \cos(\omega t) \Omega e^{i\omega_0 t}. \quad (\text{A.25})$$

Donde $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ es la frecuencia de excitación para generar una transición del estado $|1\rangle$ al $|2\rangle$. Para generar la ecuación de \dot{C}_2 , aplicamos $\langle 2 |$ a la ecuación (A.22) y siguiendo un proceso similar obtenemos la siguiente ecuación

$$i\dot{C}_2 = C_1 \cos(\omega t) \Omega^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{A.26})$$

Donde Ω^* es el complejo conjugado de la frecuencia de Rabi. Solo nos queda entonces solucionar las Ecuaciones (A.25) y (A.26), para esto reescribir el coseno en exponenciales ⁴², de tal manera que

$$i\dot{C}_1 = \frac{C_2 \Omega (e^{-i(\omega_0+\omega)t} + e^{-i(\omega_0-\omega)t})}{2}, \quad (\text{A.27})$$

$$i\dot{C}_2 = \frac{C_1 \Omega^* (e^{i(\omega_0+\omega)t} + e^{i(\omega_0-\omega)t})}{2}. \quad (\text{A.28})$$

Para poder solucionar estas ecuaciones, aplicamos la aproximación de onda rotante, la cual consiste en considerar que las frecuencias ω y ω_0 son muy grandes (en el caso del Rubidio ω_0 es del orden de $10^{15} Hz$, el láser también debe ser de esos ordenes de magnitud para que pueda generar transiciones de estado), de esta manera la función $e^{i(\omega_0+\omega)t}$ oscila muy rápidamente, por lo que su contribución en el tiempo se puede promediar como 0. Podemos definir también la desintonía como $\delta = \omega - \omega_0$, este parámetro nos sirve para saber que tan lejos de resonancia se encuentra el láser de la frecuencia de transición, entonces la Ecn. (A.28) al aplicar la aproximación de onda rotante y reescribir en términos de la desintonía nos queda como

$$i\dot{C}_1 = \frac{C_2 \Omega e^{i\delta t}}{2}, \quad (\text{A.29})$$

$$i\dot{C}_2 = \frac{C_1 \Omega^* e^{-i\delta t}}{2}. \quad (\text{A.30})$$

Para darle solución a las Ecuaciones (A.29) y (A.30), es necesario reescribirlas para que dependan de una sola variable, para esto , tenemos que derivar y sustituir, empezamos derivando la Ecn. (A.29)

$$\begin{aligned} \partial_t (i\dot{C}_1) &= \partial_t \left(\frac{C_2 \Omega e^{i\delta t}}{2} \right), \\ i\ddot{C}_1 &= \frac{\Omega}{2} (\dot{C}_2 e^{i\delta t} + i\delta C_2 e^{i\delta t}). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

⁴²La función coseno se puede reescribir en términos de exponenciales $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

De la Ecn. (A.30) conocemos \dot{C}_2 y de la Ecuación A.29 podemos despejar C_2 , de tal manera que al sustituir en la Ecn. (A.31), se tiene

$$\ddot{C}_1 - i\delta\dot{C}_1 + \frac{|\Omega|^2 C_1}{i4} = 0. \quad (\text{A.32})$$

Hacemos un procedimiento similar para la Ecuación (A.30), tal que

$$\ddot{C}_2 + i\delta\dot{C}_2 + \frac{|\Omega|^2 C_2}{i4} = 0. \quad (\text{A.33})$$

Con ambas ecuaciones en términos de una variable podemos solucionar con el método de la ecuación característica, empezamos con la Ecn. (A.32), la cual tiene ecuación característica

$$r^2 - i\delta r + \frac{|\Omega|^2}{4} = 0,$$

la cual tiene solución por fórmula general

$$r = \frac{1}{2} \left(i\delta \pm i\sqrt{\delta^2 + |\Omega|^2} \right),$$

para acortar notación definimos $W^2 = \delta^2 + |\Omega|^2$, por lo que

$$r = \frac{1}{2} (i\delta \pm iW).$$

La solución puede ser una suma de exponenciales o bien una combinación lineal de funciones sinusoidales, ya que las exponenciales se pueden escribir en términos de estas, usaremos las funciones sinusoidales por simplicidad matemática, por lo que la solución quedará entonces como

$$C_1(t) = e^{\frac{i\delta t}{2}} \left(A \cos\left(\frac{Wt}{2}\right) + B \sin\left(\frac{Wt}{2}\right) \right). \quad (\text{A.34})$$

C_1 y C_2 son las amplitudes de probabilidad asociadas a las poblaciones, y sabemos que al tiempo $t=0$ todos los átomos estarán en el estado de menor energía (porque el haz láser aun no excita sus electrones al estado excitado), tal que

$$|C_1(t=0)|^2 = 1 \rightarrow |C_1(0)| = 1, \quad (\text{A.35})$$

$$|C_2(t=0)|^2 = 0 \rightarrow |C_2(0)| = 0. \quad (\text{A.36})$$

Evalutando la Ecn. (A.34) al tiempo $t = 0$ se obtiene que $A = 1$, para obtener B , necesitamos considerar que al tiempo 0 no va a haber intercambio de población entre el nivel $|1\rangle$ y $|2\rangle$ por lo que la tasa de cambio será 0, esto se entiende matemáticamente como

$$\partial_t C_1(0) = 0. \quad (\text{A.37})$$

Derivamos entonces la Ecn. (A.34), evaluamos al tiempo $t = 0$ y aplicamos la condición $A = 1$ para obtener que $B = -\frac{i\delta}{W}$, de tal manera que la solución completa para C_1 será entonces

$$C_1(t) = e^{\frac{i\delta t}{2}} \left(\cos\left(\frac{Wt}{2}\right) - \frac{i\delta}{W} \sin\left(\frac{Wt}{2}\right) \right). \quad (\text{A.38})$$

Para C_2 solucionamos por ecuación característica la Ecn. (A.339 y realizamos un procedimiento similar para obtener la solución en funciones sinusoidales

$$C_2(t) = e^{\frac{-i\delta t}{2}} \left(C \cos\left(\frac{Wt}{2}\right) + D \operatorname{sen}\left(\frac{Wt}{2}\right) \right). \quad (\text{A.39})$$

Evalutando la Ecn. (A.39) al tiempo $t = 0$ se obtiene que $C = 0$

$$C_2(t) = e^{\frac{-i\delta t}{2}} D \operatorname{sen}\left(\frac{Wt}{2}\right). \quad (\text{A.40})$$

Para obtener D hacemos uso de la condición de normalización (A.17), para la cual debemos calcular $|C_1(t)|^2$ y $|C_2(t)|^2$, al sustituir estos valores se tiene la expresión

$$|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{Wt}{2}\right) + \left(|D|^2 + \frac{\delta^2}{W^2}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{Wt}{2}\right). \quad (\text{A.41})$$

Para que la Ecn. (A.41) se cumplan $|D|^2 + \frac{\delta^2}{W^2} = 1$, al despejar y simplificar tenemos que $D = \frac{|\Omega|}{W}$, por lo que la Ecn. (A.40) queda como

$$C_2(t) = e^{\frac{-i\delta t}{2}} \frac{|\Omega|}{W} \operatorname{sen}\left(\frac{Wt}{2}\right). \quad (\text{A.42})$$

Las Ecuaciones (A.38) y (A.42) nos describen el comportamiento de las amplitudes de probabilidad de un átomo de dos niveles al interactuar con un campo magnético oscilante. Un caso interesante de analizar es como se comportan las amplitudes de probabilidad atómicas si tuviéramos n átomos idénticos y estos estuvieran iluminados por un haz en resonancia. En resonancia, la desintonía es $\delta = 0$ y por lo tanto $W^2 = \delta^2 + |\Omega|^2 = |\Omega|^2$, en este caso las Ecuaciones (A.38) y (A.42), toman la forma

$$|C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (\text{A.43})$$

$$|C_2(t)|^2 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (\text{A.44})$$

Las ecuaciones nos indican que las poblaciones de $|1\rangle$ y $|2\rangle$ se irían intercambiando con el tiempo, esto quiere decir que si tenemos a todas los átomos en el estado $|1\rangle$ estos terminarían todos después de un tiempo determinado en el estado $|2\rangle$, a este proceso se le llama absorción y es donde el átomo absorbe un fotón y manda a su electrón a un estado de mayor energía. Pero, si continuáramos iluminándolos, después de un tiempo determinado, todos los átomos volverían al estado $|1\rangle$, esto lo hacen emitiendo el fotón que absorbieron, a este proceso se le llama emisión estimulada, adquiere su nombre de que el átomo debe seguir iluminado, o seguir siendo 'excitado' para poder emitir.

B. Momento dipolar inducido de un átomo de dos niveles

Cuando el electrón esta en presencia de un campo eléctrico externo, este genera un momento dipolar eléctrico debido a la reorganización de cargas que sufre debido a esto, en

reposito el átomo de hidrógeno tiene su carga eléctrica distribuida como

$$\rho_e = -e|\psi|^2. \quad (\text{B.1})$$

El momento dipolar para una carga puntual es $\mathbf{P} = q\mathbf{r}$, donde q es la carga eléctrica. En caso de tener una distribución de carga en un volumen, el momento dipolar clásico es

$$\mathbf{P}_{\text{clasico}} = \int_v \rho(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})d^3\mathbf{r}.$$

donde $\rho(\mathbf{r}_0)$ es la distribución de carga, \mathbf{r}_0 es donde quiero medir el momento dipolar y \mathbf{r} es donde se encuentra la distribución. Si queremos pasar al caso cuántico hay que hacer las siguientes consideraciones

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}_0) &\rightarrow \rho_e(\mathbf{r}, t) = -e|\psi(\mathbf{r}, t)|^2, \\ (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) &\rightarrow \mathbf{r}. \end{aligned}$$

De ese modo podemos calcular el momento cuántico

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{cuantico}} &= \int_v \rho_e(\mathbf{r})\mathbf{r}d^3\mathbf{r}, \\ \mathbf{P}_{\text{cuantico}} &= \int -e|\psi(\mathbf{r}, t)|^2\mathbf{r}d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Conocemos ψ de la Ecn. (A.16), por lo que calculemos el momento dipolar generado por un láser (el cual por sus propiedades es unidireccional) de la forma

$$\mathbf{E} = |E_0| \cos \omega t \hat{x}. \quad (\text{B.3})$$

Al estar propagado en \hat{x} el campo eléctrico, el momento dipolar solo se generará en esa dirección, entonces

$$\begin{aligned} P_{\text{cuantico}} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e \left(C_1 \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 \psi_2 e^{-i\omega_2 t} \right) x \left(C_1^* \psi_1^* e^{i\omega_1 t} + C_2^* \psi_2^* e^{i\omega_2 t} \right) dx, \\ P_{\text{cuantico}} &= -e \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1 \psi_1 e^{-i\omega_1 t} x C_1^* \psi_1^* e^{i\omega_1 t} \right) dx + -e \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_2 \psi_2 e^{-i\omega_2 t} x C_2^* \psi_2^* e^{i\omega_2 t} \right) dx + \\ &\quad + -e \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_1^* \psi_1^* e^{i\omega_1 t} x C_2 \psi_2 e^{-i\omega_2 t} \right) dx + -e \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_2^* \psi_2^* e^{i\omega_2 t} x C_1 \psi_1 e^{-i\omega_1 t} \right) dx. \end{aligned}$$

Las integrales tachadas se hace 0 ya que es son una función impar ⁴³ en un intervalo $[-a, a]$, reescribamos la expresión resultante en notación de Dirac

$$\begin{aligned} P_{\text{cuantico}} &= -e C_1^* C_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_1^* x \psi_2) dx + -e C_2^* C_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_2^* x \psi_1) dx, \\ P_{\text{cuantico}} &= -e C_1^* C_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \langle 1|x|2 \rangle + -e C_2^* C_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \langle 2|x|1 \rangle, \\ P_{\text{cuantico}} &= -e C_1^* C_2 e^{-i\omega_0 t} \chi_{12} + -e C_2^* C_1 e^{i\omega_0 t} \chi_{21}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

⁴³La integral es 0 debido a que

$$-e \int_{-\infty}^{\infty} (C_1 \psi_1 e^{-i\omega_1 t} x C_1^* \psi_1^* e^{i\omega_1 t}) dx = -e C_1 C_1^* \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 x \psi_1^* dx = -e C_1 C_1^* \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 x dx.$$

Donde $|\psi_1|^2$ es una función par mientras que x es una función impar, lo que en global nos deja con la integral de una función impar en un intervalo $[-a, a]$, por lo tanto la integral se vuelve 0. Se puede hacer el mismo análisis para la segunda integral llegando al mismo resultado.

Donde $\chi_{nm} = \langle n|x|m \rangle$ es la integral y $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$ es la frecuencia de excitación para pasar del estado $|1\rangle$ al $|2\rangle$. La Ecn. (B.4) implica que el átomo debe estar en un estado de superposición entre los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ para poder generar un momento dipolar eléctrico, también observemos que, así como el campo externo oscila, el momento dipolar también lo hace, pero a la frecuencia de excitación ω_0 .

C. Vector de Bloch

La descripción de la interacción de los átomos con un campo magnético externo se puede describir de otra manera más geométrica, para esto se hace uso del vector de Bloch, el cual tiene su origen haciendo un análisis a partir de el origen del momento dipolar inducido y la solución del sistema ψ , observemos que podemos escribirla en forma de vector haciendo uso de la notación de Dirac

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \langle\psi| = (C_1^* \ C_2^*).$$

Esta notación nos permite hacer el producto $|\psi\rangle\langle\psi|$, lo que tiene como resultado la matriz

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} C_1 C_1^* & C_1 C_2^* \\ C_2 C_1^* & C_2 C_2^* \end{pmatrix}.$$

Definamos entonces la variable $\rho_{nm} = C_n C_m^*$ por lo que la matriz toma la forma

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Los elementos de la diagonal ρ_{nn} representan las poblaciones de los átomos en el estado $|1\rangle$ y $|2\rangle$ respectivamente, mientras que los componentes ρ_{nm} representan la respuesta del sistema a la frecuencia de resonancia. Buscamos construir un vector $\mathbf{R} = u\hat{e}_1 + v\hat{e}_2 + w\hat{e}_3$ que contenga toda la información del sistema, empezamos haciendo unos cambios de variables

$$\widetilde{C}_1 = C_1 e^{-\frac{i\delta t}{2}}, \widetilde{C}_2 = C_2 e^{\frac{i\delta t}{2}}, \widetilde{\rho}_{nm} = \widetilde{C}_n \widetilde{C}_m^*. \quad (\text{C.2})$$

Reescribiendo el momento dipolar cuántico en términos de las nuevas variables

$$\mathbf{P} = -e\widetilde{\rho}_{21} e^{-i(\omega_0+\delta)t} \chi_{12} + -e\widetilde{\rho}_{12} e^{i(\omega_0+\delta)t} \chi_{21}.$$

Con la definición de desintonía podemos simplificar esta expresión, ya que $\omega_0 + \delta = \omega_0 + \omega - \omega_0 = \omega$, por lo que

$$\mathbf{P} = -e\widetilde{\rho}_{21} e^{-i\omega t} \chi_{12} + -e\widetilde{\rho}_{12} e^{i\omega t} \chi_{21}. \quad (\text{C.3})$$

La integral χ_{12} es un número puramente real, esto implica que $\chi_{21} = \chi_{12}^* = \chi_{12}$. Este resultado tiene consecuencias en la frecuencia de Rabi, la cual por construcción también será siempre real, pero por ahora, el momento dipolar queda como

$$\mathbf{P} = -e\chi_{12} \left(\widetilde{\rho}_{21} e^{-i\omega t} + \widetilde{\rho}_{12} e^{i\omega t} \right).$$

Reescribiendo las exponenciales como suma de senos y cosenos ⁴⁴

$$\mathbf{P} = -e\chi_{12} (\cos \omega t (\widetilde{\rho}_{12} + \widetilde{\rho}_{21}) + i \operatorname{sen} \omega t (\widetilde{\rho}_{12} - \widetilde{\rho}_{21})).$$

Definamos entonces las componentes $u = \widetilde{\rho}_{12} + \widetilde{\rho}_{21}$ y $v = i(\widetilde{\rho}_{12} - \widetilde{\rho}_{21})$ que nos ayudarán a construir el vector de Bloch para poder reescribir el momento dipolar inducido en términos de estas, tal que

$$\mathbf{P} = -e\chi_{12} (u \cos \omega t - v \operatorname{sen} \omega t). \quad (\text{C.4})$$

Nos interesa el cambio que presentan las componentes u y v en el tiempo, para calcular sus derivadas, debemos escribir las Ecuaciones (A.29) y (A.30) en términos de las nuevas variables \widetilde{C}_1 y \widetilde{C}_2 , esto nos ayudará a calcular la expresión para los coeficientes $\widetilde{\rho}_{nm}$ lo que nos permitirá calcular finalmente \dot{v} y \dot{u} , al hacerlo, se obtiene que

$$\dot{u} = \dot{\widetilde{\rho}}_{12} + \dot{\widetilde{\rho}}_{21} = -i\delta (\widetilde{\rho}_{12} - \widetilde{\rho}_{21}) = \delta v, \quad (\text{C.5})$$

$$\dot{v} = -i(\dot{\widetilde{\rho}}_{12} - \dot{\widetilde{\rho}}_{21}) = \Omega (\widetilde{\rho}_{11} - \widetilde{\rho}_{22}) - \delta (\widetilde{\rho}_{21} + \widetilde{\rho}_{12}) = \Omega w - \delta u. \quad (\text{C.6})$$

Definimos $w \equiv \widetilde{\rho}_{11} - \widetilde{\rho}_{22}$, esta será nuestra ultima componente que nos ayudará a construir el vector de Bloch, también nos interesa su cambio que presenta en el tiempo, por lo que, el valor de su derivada es

$$\dot{w} = \dot{\widetilde{\rho}}_{11} - \dot{\widetilde{\rho}}_{22} = i\Omega (\widetilde{\rho}_{12} - \widetilde{\rho}_{21}) = -\Omega v.$$

Definimos entonces el vector de Bloch como $\mathbf{R} = u\hat{e}_1 + v\hat{e}_2 + w\hat{e}_3$, en el que u , v y w dependen de C_1 y C_2 , por lo que una vez conocido el sistema la solución del sistema, podemos resumir toda la dinámica del sistema en una sola ecuación. Para extraer la información del vector de Bloch hacemos uso de el vector auxiliar $\mathbf{W} = \Omega\hat{e}_1 + \delta\hat{e}_3$ el cual esta definido solo con las constantes del sistema que caracterizan la interacción entre el átomo y un haz láser. El primer resultado importante es que el vector de Bloch cumple que

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \mathbf{W}. \quad (\text{C.7})$$

Veamos como podemos representar el vector de Bloch de manera gráfica, primero, observemos que el producto $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}$ debe ser 0 debido a que estos vectores son ortogonales, si esto se cumple entonces la operación $\partial_t \mathbf{R}^2 = 2\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}$ también debe ser igual a 0 lo que implica que el el cuadrado del vector de Bloch es una constante, si abrimos la definición de vector de Bloch obtendremos que el cuadrado esta representado por $\mathbf{R}^2 = u^2 + v^2 + w^2$, esta ecuación concuerda con la ecuación de una esfera de radio $|\mathbf{R}|$, si $|\mathbf{R}| = 1$ sería la ecuación de una esfera unitaria. La representación del vector de Bloch como esfera unitaria nos permite observar el estado del sistema de dos niveles de forma gráfica.

Al caracterizar el sistema definiendo δ y Ω existen solo algunos estados disponibles, de nuevo, el producto $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{W}$ debe ser igual a 0 por ortogonalidad. De igual manera, si se cumple esta propiedad, se cumple que la operación $\partial_t (\mathbf{R} \cdot \mathbf{W}) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{W}}$ es igual a 0 ($\dot{\mathbf{W}} = 0$ porque tanto δ como Ω no dependen del tiempo), esto implica que el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$ es una constante. Si reescribimos este producto como $\mathbf{R} \cdot \mathbf{W} = |\mathbf{R}||\mathbf{W}| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{R} y \mathbf{W} , las soluciones estarán acotadas tanto por el vector auxiliar \mathbf{W} como el ángulo θ . Gráficamente esto se muestra como un cono alrededor del vector \mathbf{W} en un ángulo θ de estados disponibles en los cuales se puede encontrar el sistema.

⁴⁴La función exponencial se puede reescribir como $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$

D. Ecuaciones ópticas de Bloch

Hasta ahora solo hemos considerado la emisión y la absorción estimulada en el modelo del átomo de dos niveles interactuando con una fuente láser, pero en la realidad se presenta un fenómeno adicional a estos, la emisión espontánea. Imaginemos la siguiente situación: Si paramos el láser al tiempo justo tal que la nube atómica quede en el estado $|2\rangle$, después de un tiempo t notaremos que la población de $|2\rangle$ empieza a decaer a $|1\rangle$, a este proceso se le conoce como decaimiento espontáneo y es necesario considerarlo en nuestras ecuaciones ya que este juega un papel importante en la dinámica del sistema, siendo este un mecanismo de disipación de energía, para esto, hagamos la analogía entre las ecuaciones de Bloch y un oscilador armónico forzado amortiguado (OFA).

Se compara las ecuaciones de Bloch con un OFA ya que el átomo se puede ver como un sistema masa-resorte entre el núcleo y el electrón, donde el campo eléctrico externo tiene el papel de la fuerza que estimula el sistema y el decaimiento espontáneo como la fuerza que amortigua el sistema. El OFA tiene la siguiente forma

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \cos \omega t \quad (\text{D.1})$$

Donde β es la constante de amortiguamiento, ω_0 es la frecuencia natural de oscilación del sistema, ω es la frecuencia a la que se excita el sistema, m la masa del sistema masa-resorte y $F(t)$ la fuerza que estimula al sistema. Proponemos una solución al sistema de la forma $x = U(t) \cos \omega t - V(t) \sin \omega t$, que al derivar y sustituir en la Ecn. (D.1) tiene la forma

$$\begin{aligned} (\ddot{U} - U\omega^2 - 2\dot{V}\omega) \cos \omega t - (\ddot{V} - V\omega^2 + 2\dot{U}\omega) \sin \omega t + (\beta\dot{U} - \beta V\omega) \cos \omega t + \\ - (\beta U\omega + \beta\dot{V}) \sin \omega t + U\omega_0^2 \cos \omega t - V\omega_0^2 \sin \omega t = \frac{F(t)}{m} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La Ecn. (D.2) solo tendrá solución si en la igualdad los términos de coseno son igual a los de coseno y los de seno a los de seno, lo que nos deja con dos igualdades

$$\ddot{U} + \beta\dot{U} - (\omega^2 - \omega_0^2) U - 2\dot{V}\omega - \beta V\omega = \frac{F(t)}{m}, \quad (\text{D.3})$$

$$\ddot{V} + \beta\dot{V} - (\omega^2 - \omega_0^2) V + 2\dot{U}\omega + \beta U\omega = 0. \quad (\text{D.4})$$

Hacemos un despeje conveniente para estas ecuaciones, de tal manera que

$$\dot{V} = \frac{\ddot{U}}{2\omega} + \frac{\beta\dot{U}}{2\omega} - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) U}{2\omega} - \frac{\beta V}{2} - \frac{F(t)}{2\omega m}, \quad (\text{D.5})$$

$$\dot{U} = -\frac{\ddot{V}}{2\omega} - \frac{\beta\dot{V}}{2\omega} + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) V}{2\omega} - \frac{\beta U}{2}. \quad (\text{D.6})$$

U y V cambian en el tiempo con a la misma velocidad que cambia la amplitud de la fuerza $\frac{F(t)}{m}$ ya que esta los está forzando, esto hace que las amplitudes U y V cambien lentamente con respecto a ω , gracias a esto podemos hacer la siguiente aproximación:

Debido a que U y V cambian lento en el tiempo con respecto a ω , la primera derivada también lo hará, entonces $\dot{V} \ll V\omega$ y $\dot{U} \ll U\omega$, y si la primera derivada cambia lento, la segunda derivada cambiará aún más lento, por lo que podemos aproximar la segunda

derivada como $\ddot{U} \approx 0$ y $\ddot{V} \approx 0$ lo que nos permite escribir a las Ecuaciones (D.5) y (D.6) como

$$\dot{V} = \frac{\beta\dot{U}}{2\omega} - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)U}{2\omega} - \frac{\beta V}{2} - \frac{F(t)}{2\omega m}, \quad (\text{D.7})$$

$$\dot{U} = -\frac{\beta\dot{V}}{2\omega} + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)V}{2\omega} - \frac{\beta U}{2}. \quad (\text{D.8})$$

Debido a que la posición debe variar poco con respecto a la frecuencia ω , la inversa de la constante de amortiguamiento del sistema, el periodo de amortiguamiento, debe ser mucho mayor que el periodo de excitación del sistema (el inverso de ω), esta condición aporta a que las amplitudes U y V varíen lento con respecto a la frecuencia de excitación. La aproximación entonces tomara la forma $\frac{1}{\beta} \gg \frac{1}{\omega} \rightarrow 1 \gg \frac{\beta}{\omega} \rightarrow \frac{\beta}{\omega} \approx 0$. Esta aproximación se conoce como 'slowly-varying approximation', entonces las Ecuaciones (D.7) y (D.8) tomaran la forma

$$\dot{V} = -\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)U}{2\omega} - \frac{\beta V}{2} - \frac{F(t)}{2\omega m}, \quad (\text{D.9})$$

$$\dot{U} = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)V}{2\omega} - \frac{\beta U}{2}. \quad (\text{D.10})$$

Por último, es necesitamos hacer otra aproximación ya el modelo clásico da incongruencias en el estado estacionaria cuando se esta en resonancia, recordemos que como estamos intentando hacer analogía con el sistema de dos niveles y este solo presenta transiciones estimuladas de un nivel a otro en resonancia $\omega = \omega_0$, por lo que nuestra aproximación sera tener $\omega \approx \omega_0$, si esto es cierto, entonces se cumple que $(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega(\omega - \omega_0)$. Las Ecuaciones (D.9) y (D.10) al aplicar la aproximación toman la forma

$$\dot{V} = -(\omega - \omega_0)U - \frac{\beta V}{2} - \frac{F(t)}{2\omega m}, \quad (\text{D.11})$$

$$\dot{U} = (\omega^2 - \omega_0^2)V - \frac{\beta U}{2}. \quad (\text{D.12})$$

Nos interesa la solución estacionaria del sistema⁴⁵, el cual se calcula haciendo $\dot{U} = \dot{V} = 0$

$$-(\omega - \omega_0)U - \frac{\beta V}{2} - \frac{F(t)}{2\omega m} = 0. \quad (\text{D.13})$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)V - \frac{\beta U}{2} = 0. \quad (\text{D.14})$$

Resolviendo las Ecuaciones (D.13) y (D.14) obtenemos las soluciones

$$V = -\frac{\frac{\beta}{2} F(t)}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 2\omega m}, \quad (\text{D.15})$$

$$U = \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 2\omega m} F(t). \quad (\text{D.16})$$

⁴⁵Cuando un sistema se encuentra en estado estacionario, sus características físicas no varían con el tiempo, lo que hace que el sistema este estático.

Nos interesa ahora conocer el comportamiento de la energía en el régimen estacionario, para calcularla, sumamos la energía cinética y la energía potencial

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2. \quad (\text{D.17})$$

Para calcular esta energía utilizamos la solución propuesta $x = U(t)\cos\omega t - V(t)\sin\omega t$, teniendo en cuenta que en el estado estacionario las derivadas $\dot{U} = \dot{V} = 0$ y recordando que para obtener esta solución se hizo la aproximación $\omega \approx \omega_0$, tomando estas consideraciones en cuenta llegamos a que la energía tiene la forma

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(U^2 + V^2). \quad (\text{D.18})$$

Debemos considerar el comportamiento de la energía en el tiempo, ya que esto nos permitirá poder conocer el comportamiento que tiene el sistema si se apaga el campo magnético oscilante, además nos serviría para comprobar que la energía tiende a 0 al apagar el campo magnético por el decaimiento espontáneo. Calcular entonces el cambio de energía en el tiempo, utilizando las Ecuaciones (D.11) y (D.12)

$$\begin{aligned} \dot{E} &= m\omega^2(U\dot{U} + V\dot{V}), \\ \rightarrow \dot{E} &= -E\beta - \frac{\omega}{2}Fv. \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

En ausencia de una fuerza externa, $F = 0$ y la energía tiene un comportamiento exponencial

$$\dot{E} = -E\beta \rightarrow E(t) = e^{-\beta t}. \quad (\text{D.20})$$

Lo que nos comprueba que la energía tiende a 0 debido al término disipativo. Solo queda conocer las constantes del sistema, comenzamos analizando la energía de un fotón, la cual está dada por la expresión $E = \hbar\omega$, si tomamos el marco de referencia del estado de mínima energía como $E = 0$, entonces observamos que la energía del sistema será el número de átomos que están en el estado excitado, y a su vez, la población del estado excitado está dada por ρ_{22} , entonces la energía del sistema será

$$E = \rho_{22}\hbar\omega. \quad (\text{D.21})$$

Calculamos el valor de ρ_{22} , el cual al dejarlo en términos de u y v tiene la forma $\rho_{22} = \frac{\Omega}{2}v$, esta solución implica que la energía del sistema es proporcional a Ωv . A este resultado le hace falta introducir la pérdida de energía por emisión espontánea, la cual podemos introducir haciendo la analogía con el modelo clásico

$$\dot{E} = \underbrace{-\beta E}_{\text{termino disipativo}} - \frac{\omega}{2}FV, \quad (\text{D.22})$$

$$\rightarrow \dot{\rho}_{22} = \underbrace{-\Gamma\rho_{22}}_{\text{termino disipativo}} + \frac{\Omega}{2}v. \quad (\text{D.23})$$

donde Γ es la tasa de decaimiento por emisión espontánea, esta toma la función de β debido a que nos dice la frecuencia a la cual los electrones decaen espontáneamente del estado excitado

decaen al estado base, lo que representa un amortiguamiento a la energía del sistema. Al igual que antes, si no campo externo, no se esta excitando al sistema y si no se excita el sistema no hay acoplamiento, por lo que la frecuencia de Rabi $\Omega = 0$, esto implica que

$$\dot{\rho}_{22} = -\Gamma\rho_{22} \rightarrow \rho_{22}(t) = \rho_{22}(0)e^{-\Gamma t}. \quad (\text{D.24})$$

Debido al marco de referencias que utilizamos, la energía es proporcional a la población de electrones en el estado excitado, podemos observar entonces que el comportamiento de la población concuerda con el comportamiento de la energía del modelo con el que estamos haciendo la analogía, entonces añadamos términos a las Ecuaciones (C.5), (C.6) y a ρ_{22}

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(\omega - \omega_0)U - \underbrace{\frac{\beta V}{2}} - \frac{F(t)}{2\omega m} \rightarrow \dot{v} = \Omega w - \delta u - \underbrace{\frac{\Gamma}{2}}v, \\ \dot{U} &= (\omega^2 - \omega_0^2)V - \underbrace{\frac{\beta U}{2}} \rightarrow \dot{u} = \delta v - \underbrace{\frac{\Gamma}{2}}u, \\ \dot{E} &= \underbrace{-\beta E} - \frac{\omega}{2}FV \rightarrow \dot{\rho}_{22} = \underbrace{-\Gamma\rho_{22}} + \frac{\Omega}{2}v. \end{aligned}$$

Podemos reescribir la ecuación de la población en términos de w , para esto hacemos el siguiente cambio utilizando la Ecn. (C.7)

$$\begin{aligned} w - 1 &= -2\rho_{22} \text{ y } \dot{w} = -2\dot{\rho}_{22}, \\ \dot{\rho}_{22} &= -\Gamma\rho_{22} + \frac{\Omega}{2}v \rightarrow 2\dot{\rho}_{22} = -2\Gamma\rho_{22} + \Omega v, \\ \rightarrow \dot{w} &= -\Omega v - \Gamma(w - 1). \end{aligned}$$

De esta manera, podemos definir las ecuaciones ópticas de Bloch como

$$\dot{v} = \Omega w - \delta u - \frac{\Gamma}{2}v, \quad (\text{D.25})$$

$$\dot{u} = \delta v - \frac{\Gamma}{2}u, \quad (\text{D.26})$$

$$\dot{w} = -\Omega v - \Gamma(w - 1). \quad (\text{D.27})$$

Estas ecuaciones son validas para describir a un átomo de dos niveles, en estas ya consideramos el decaimiento espontáneo, que era el mecanismo faltante a la hora de definir las ecuaciones de Bloch. Es importante recordar que estas ecuaciones son validas para campos magnéticos que oscilan a frecuencias cerca de resonancia del sistema, esto es resultado de las aproximaciones que realizamos para poder solucionar el sistema.

E. Solución del estado estacionario de las ecuaciones ópticas de Bloch

Para solucionar en estado estacionario igualamos a 0 las Ecuaciones (D.25), (D.26) y (D.27), lo que implica que no presentan cambios en el tiempo, además, para una manipulación

más fácil las podemos agrupar en forma de matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Gamma}{2} & \delta & 0 \\ -\delta & -\frac{\Gamma}{2} & \Omega \\ 0 & -\Omega & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Gamma \end{pmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

Para solucionar el sistema, solo tenemos que calcular la matriz inversa, de este modo haríamos algo parecido a un despeje. Al calcular la matriz inversa, obtenemos la siguiente solución

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma}{4}} \begin{pmatrix} \delta\Omega \\ \frac{\Gamma\Omega}{2} \\ \frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Ahora analizaremos este estado estacionario, en específico el comportamiento de w si el campo externo es muy grande, nos concentraremos en w ya que por construcción este nos indica la diferencia entre las poblaciones en el estado base y excitado. De la Matriz E.2, recuperamos w , y hacemos el límite

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2}{\delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma}{4}} = 0. \quad (\text{E.3})$$

Se hace la frecuencia de Rabi grande debido a que por construcción, esta es proporcional al campo, entonces si crece el campo crece la frecuencia de Rabi. pero recordemos que se debe cumplir que

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1, \quad (\text{E.4})$$

de tal manera, que veamos el comportamiento del estado excitado

$$\rho_{22} = \frac{1-w}{2} \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \rho_{22} = \frac{1}{2}. \quad (\text{E.5})$$

Este resultado nos indica que en vez de que las poblaciones continúen oscilando conforme aumentamos el campo eléctrico, el sistema llega a un punto de saturación en el que las poblaciones de los niveles base y excitado se igualan en el estado estacionario.

F. Sección eficaz de absorción

Por último, para considerar el escenario más realista posible, consideremos uno más, el cual no tenga una energía definida en ω , mas bien, que presente una densidad de energía $\rho(\omega)$. El átomo interactuará fuertemente con los fotones del campo cuando $\omega \approx \omega_0$ y débilmente lejos de resonancia. Para estudiar estas interacciones tenemos que retomar las ideas de Einstein en las que este calculo los coeficientes de absorción y de emisión de un átomo, el simplemente propuso que el cambio del número de átomos en el estado excitado (N_2) tiene a siguiente forma

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = \rho_{11}B_{12}\rho(\omega_0) - \rho_{22}B_{21}\rho(\omega_0) - \rho_{22}A_2. \quad (\text{F.1})$$

Los átomos que se encuentran en el estado de menor energía (N_1) son excitables por la fuente externa, por esto el signo positivo, porque aporta al cambio de población de N_2 , también se encuentra multiplicada por la densidad de energía del haz (ρ), ya que de esta depende como se excite el estado, y por una constante que corresponde con la tasa de excitación del nivel de menor energía al de mayor energía (B_{12}). Por los mismos argumentos, se encuentra el segundo término, solo que este corresponde a la emisión estimulada, la cual tiene signo negativo porque quita población a N_2 y es acompañada por la tasa de emisión estimulada (B_{21}). El último término se introduce debido a que existe emisión espontánea del estado N_2 al N_1 , y la tasa de decaimiento espontáneo es A_{21} , esta interacción también quita población.

También observemos que el número de átomos no va a cambiar debido a que no quitamos o metemos átomos al experimento, por lo que la suma de las poblaciones $N_1 + N_2$ debe ser igual a un número constante N_{total} el cual denota el total de átomos en el sistema. Como solo consideramos que los átomos pueden estar en un estado base N_1 o un estado excitado N_2 , entonces estamos considerando un conjunto de sistemas de dos niveles. Como la suma de las poblaciones debe ser igual a una constante, entonces al derivar con respecto al tiempo tenemos que $\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt}$, lo que indica que el cuando N_2 gana población N_1 pierde y viceversa. Observemos entonces que pasa con las poblaciones en ausencia de campo externo $\rho = 0$, los átomos que se quedaron en el estado N_2 presentan el siguiente comportamiento

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= -N_2 A_{21}, \\ \rightarrow N_2(t) &= N_2(0) e^{-A_{21}t}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Donde la vida media es $\frac{1}{A_{21}}$. Observemos que de nueva cuenta la población en el estado excitado tiende a 0 debido al decaimiento espontáneo.⁴⁶ Ahora imaginemos que le pasaría al átomo si lo metemos en una caja que radia como un cuerpo negro, la densidad de radiación $\rho(\omega)$ entre las frecuencias de excitación de el átomo dependen solo de la temperatura T de las superficies emisoras y absorbentes, Plank descubrió la función de distribución de frecuencias de radiación, dada por

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^3 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} + 1}. \quad (\text{F.3})$$

En el estado estacionario $\frac{dN_2}{dt} = 0$, esto nos permite despejar $\rho(\omega)$ de la Ecuación F.1

$$\rho(\omega) = \frac{A_{21} N_2}{B_{21} N_1} \frac{1}{\frac{B_{12} N_1}{B_{21} N_2} - 1}. \quad (\text{F.4})$$

Debemos considerar si los estados son degenerados y la temperatura a la que se encuentra el sistema, introducimos estos factores ya que sabemos que en equilibrio $N_1 = N_2$, dividimos entre la degeneración y multiplicamos por el factor de Boltzman

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{g_1} e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_B T}} &= \frac{N_2}{g_2} e^{\frac{\hbar\omega_2}{k_B T}}, \\ \frac{N_1}{N_2} &= \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{\hbar(\omega_2 - \omega_1)}{k_B T}} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

⁴⁶En caso de tener más niveles a los cuales decaer y ser N_n el estado de mayor energía, existen más tasas de decaimiento del estado n al $n - 1$, entonces la vida media sería $\sum \frac{1}{A_{n,n-1}}$ con n como el número de niveles a los cuales puede decaer.

Donde ω_0 es la frecuencia de excitación del estado base al estado excitado. Sustituimos este resultado en la Ecn. (F.4)

$$\rho(\omega) = \frac{A_{21} N_2}{B_{21} N_1} \frac{1}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1}. \quad (\text{F.6})$$

La Ecuación de radiación de cuerpo negro (F.3) tiene que coincidir con la Ecn. (F.6), esto nos permite conocer las constantes $A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^3 c^3} B_{21}$ y $B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}$, en términos de las variables que hemos estado utilizando A_{21} es la la tasa de decaimiento Γ .

Una vez que sabemos como calcular la tasa de decaimiento, nuestra siguiente tarea es calcular la fracción de átomos que absorben fotones de un láser. Si tenemos los átomos en un volumen V , y consideramos una fracción de este volumen tal que $\Delta V = \sigma(\omega)\Delta z$ y que el volumen contenga una fracción átomos nos n , entonces el número de átomos que que lograron la absorción son

$$\text{átomos que absorben} = n\sigma(\omega)\Delta z. \quad (\text{F.7})$$

Pero nos interesa la fracción de partículas que absorben por unidad de volumen, por lo que dividimos la Ecn. (F.7) por el volumen

$$\text{partículas que absorben por unidad de volumen} = N\sigma(\omega)\Delta z. \quad (\text{F.8})$$

Donde definimos $N = \frac{n}{V}$ como el número de partículas por unidad de volumen, la sección eficaz de absorción es $\sigma(\omega)$ y una fracción del grosor del volumen iluminado Δz . Consideremos entonces que la intensidad del láser al pasar por el volumen en el que se encuentran los átomos se atenúa, la fracción de intensidad perdida debe ser proporcional a la fracción de partículas que absorben por unidad de volumen, de esta manera obtenemos que

$$\frac{\Delta I}{I} = -N\sigma(\omega)\Delta z. \quad (\text{F.9})$$

El signo negativo resulta de que entre mayor sea el número de partículas en el volumen iluminado menor será la intensidad resultante. Observemos que si hacemos infinitesimal el cambio obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I}{\Delta z} &= -N\sigma(\omega)I, \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -N\sigma(\omega)I, \\ \rightarrow I(\omega, z) &= I(\omega, 0)e^{-k(\omega)z}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Definimos el coeficiente de absorción como $k = N\sigma(\omega)I$. Este resultado implica que la intensidad decae exponencialmente con la distancia de propagación, lo que concuerda con la ley de Beer⁴⁷. Este comportamiento es correcto cuando la intensidad del láser es lo suficientemente baja como para mantener a la mayoría de los átomos en el estado de menor energía, para

⁴⁷La ley de Beer es una relación descubierta de manera empírica que relaciona el atenuamiento de la luz al pasar por un material con las propiedades del material.

mejorar el modelo es necesario introducir las poblaciones de los átomos. Los átomos que pueden absorber son los que están en el estado N_1 , por lo que la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -N_1\sigma(\omega)I. \quad (\text{F.11})$$

El proceso de emisión estimulada contribuye positivamente a la intensidad, expresamos esta ganancia en el modelo sumando el término $N_2\sigma(\omega)I$, ya que los átomos excitados (N_2) son los únicos que pueden emitir. La Ecn. (F.11) toma la forma

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(N_1 - N_2)\sigma(\omega)I. \quad (\text{F.12})$$

Debemos considerar que la población en N_2 también se pierde por el proceso de emisión espontánea, para esto multiplicamos la población N_2 por la tasa de decaimiento y por la energía que emitirán, tendrá signo positivo porque aporta a la intensidad al emitir, la Ecn. (F.12) toma la forma

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(N_1 - N_2)\sigma(\omega)I + N_2\Gamma\hbar\omega. \quad (\text{F.13})$$

Este proceso puede llegar a saturarse al impartirle una intensidad láser muy grande como observamos al solucionar el estado estacionario de las ecuaciones ópticas de Bloch, entonces, calculamos para el estado estacionario de la Ecn. (F.13), de tal manera que obtenemos que $(N_1 - N_2)\sigma(\omega)I = N_2\Gamma\hbar\omega$, pero nos interesa la fracción de la población que absorberá y emitirá, ya que estas son las variables que hemos estado utilizando, por lo que dividimos por N , lo que nos deja que $\frac{N_1}{N} = \rho_{11}$ y $\frac{N_2}{N} = \rho_{22}$ lo que finalmente nos deja con

$$(\rho_{11} - \rho_{22})\sigma(\omega)I = \rho_{22}\Gamma\hbar\omega. \quad (\text{F.14})$$

De las ecuaciones ópticas de Bloch sabemos que $w = \rho_{11} - \rho_{22}$, a su vez, nos interesa la sección eficaz de absorción por lo que la despejamos de la Ecn. (F.14)

$$\sigma(\omega) = \frac{\rho_{22}}{w} \frac{\Gamma\hbar\omega}{I}. \quad (\text{F.15})$$

pero conocemos w de la Ecn. (E.2) y ρ_{22} de la Ecn. (E.5), al combinarlas obtenemos que

$$\frac{\rho_{22}}{w} = \frac{\frac{\Omega}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (\text{F.16})$$

Finalmente, la sección eficaz de absorción toma la forma

$$\sigma(\omega) = \frac{\frac{\Omega}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\Gamma\hbar\omega}{I}. \quad (\text{F.17})$$

podemos calcular la fracción $\frac{\Omega^2}{I}$, ya que conocemos la frecuencia de Rabi por definición, y la intensidad de un láser, la cual es $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$, por lo que, después de realizar la sustitución en la Ecn. (F.17) obtenemos

$$\sigma(\omega) = \frac{3\Gamma\pi^2 c^2}{\omega_0^2} g_H(\omega) \quad (\text{F.18})$$

Donde la función $g_H(\omega)$ está definida como $g_H(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi(\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4})}$. En resonancia ($\delta = 0$) y tomando en cuenta que $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, la sección eficaz de absorción toma la forma

$$\sigma(\omega) = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2. \quad (\text{F.19})$$

De esta manera, podemos escribir la Ecn. (F.14) en términos de la intensidad y de la intensidad de saturación, para esto primero acomodamos los términos de la siguiente manera

$$N_2 = (N_1 - N_2) \frac{\sigma(\omega)I}{\Gamma \hbar \omega}. \quad (\text{F.20})$$

Lo que nos permite definir $r = \frac{\sigma(\omega)I}{\Gamma \hbar \omega}$, haciendo otro reacomodo de la ecuación obtenemos que

$$\frac{N}{1 + 2r} = N_1 - N_2 \quad (\text{F.21})$$

De esta manera podemos definir la intensidad de saturación y la intensidad de saturación en resonancia como

$$I_s(\omega) = \frac{\hbar \omega \Gamma}{2\sigma(\omega)}, \quad (\text{F.22})$$

$$I_s(\omega_0) = I_{\text{sat}} = \frac{\pi \hbar c}{3\lambda_0^3 \tau}. \quad (\text{F.23})$$

Donde I_{sat} es la intensidad de saturación en resonancia y $\tau = \frac{1}{\Gamma}$, de esta manera podemos reescribir a la variable r como

$$r = \frac{I}{2I_s(\omega)}. \quad (\text{F.24})$$

Esta relación nos permite conocer el valor de $\frac{I}{I_{\text{sat}}}$, para calcularlo utilizamos la definición de r y sustituimos el de $\sigma(\omega)$ de la Ecn. (F.17), lo que nos deja con

$$2r = \frac{\frac{\Omega}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (\text{F.25})$$

sustituir la Ecn. (F.25) en la Ecn. (F.24) nos permite conocer los valores de $\frac{I}{I_{\text{sat}}}$ e $\frac{I}{I_s}$, los cuales tienen la forma

$$\frac{I}{I_s} = \frac{\frac{\Omega}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (\text{F.26})$$

$$\frac{I}{I_{\text{sat}}} = \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}. \quad (\text{F.27})$$

Esta relación es de nuestro interés debido a que, para justificar el control de la intensidad láser, es necesario poner las ecuaciones resultantes para las trampas ópticas en término de la intensidad, esta relación es la que nos permitirá realizar esto ya que une las variables de nuestro modelo Ω , δ y Γ con la intensidad del láser.

G. Fuerza melaza óptica

Para calcular la fuerza que actúa en el método de melaza óptica es necesario hacer algunas aproximaciones a la fuerza dipolar, empecemos entonces con la Fuerza que se genera en el átomo cuando este se mueve en dirección de propagación del haz láser

$$\begin{aligned} F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) &= \hbar\kappa \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0 - kv)^2}{\Gamma^2}}, \\ F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) &= \frac{\hbar(\omega - kv)}{c} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0 - kv)^2}{\Gamma^2}}. \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

El número de onda total en la fuerza de dispersión es $\kappa = \frac{\omega - kv}{c}$ debido a que el átomo se esta moviendo relativamente con la frecuencia corregida y el número de onda k es el resultante de la corrección por efecto Doppler. Asumimos velocidades pequeñas ($kv \ll \Gamma$) de tal manera que el factor $\frac{4(\omega - \omega_0 - kv)^2}{\Gamma^2} \approx \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}$, por lo que la Ecn. (G.1) toma la forma

$$\begin{aligned} F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) &\approx \frac{\hbar(\omega - kv)}{c} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}}, \\ F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) &\approx \frac{\hbar\omega}{c} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} - \frac{\hbar kv}{c} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}}. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Observemos que el primer termino corresponde a la fuerza de dispersión evaluada en $\omega - \omega_0$, por lo que sustituimos

$$F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) \approx F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0) - \frac{\hbar kv}{c} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}}. \quad (\text{G.3})$$

A partir de la derivada de la fuerza obtenemos la forma del segundo término

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} &= \frac{\hbar\Gamma}{c} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{2 \left(1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}\right)} + \hbar\kappa \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} \right), \\ \rightarrow \frac{\hbar\Gamma}{c} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{2 \left(1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}\right)} &= \frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} - \hbar\kappa \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Al sustituir la Ecn. (G.4) en la Ecn. (G.3) obtenemos la siguiente expresión

$$F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) \approx F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0) - kv \left[\frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} - \hbar\kappa \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} \right) \right]. \quad (\text{G.5})$$

De manera análoga podemos obtener la fuerza de dispersión que se genera cuando el átomo se mueve en dirección contraria a la de propagación, dando como resultado

$$F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 + kv) \approx F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0) + kv \left[\frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega} + \hbar\kappa \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{I_{\text{sat}}}}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} + \frac{4(\omega - \omega_0)^2}{\Gamma^2}} \right) \right]. \quad (\text{G.6})$$

Debido a que el origen de esta fuerza es el mismo haz láser pero que se propaga en dirección contraria, el término $\kappa \rightarrow -\kappa$. Al combinar las Ecuaciones (G.5) y (G.6) para obtener la fuerza en la melaza óptica obtenemos

$$\begin{aligned} F_{\text{MO}} &\approx F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 - kv) - F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0 + kv), \\ F_{\text{MO}} &\approx -2kv \frac{\partial F_{\text{dis}}(\omega - \omega_0)}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Siendo esta la aproximación a la fuerza generada en la melaza óptica.

H. Efecto Stark

El efecto Stark es el desdoblamiento de los niveles de energía del átomo el cual tiene su origen en la presencia de un campo magnético externo. Para calcular este efecto partimos de las ecuaciones que obtuvimos del átomo de dos niveles al interactuar con un campo eléctrico (Ecuaciones (A.29) y (A.30)), las cuales primero debemos de reescribir en términos de las variables definidas en la Ecn. (C.2), para posteriormente acomodarlas en forma matricial como se muestra a continuación

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & -\frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.1})$$

En la el Apéndice A también observamos que la solución para estas ecuaciones estaba dada por una exponencial, que en forma matricial podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-i\lambda t} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2})$$

Para obtener el valor de λ obtenemos los eigenvalores de la matriz. Cabe mencionar que se puede resolver el sistema derivando y sustituyendo por el método de ecuación característica, al igual que en el Apéndice A, donde los eigenvalores serían entonces r , resolvemos de nuevo el sistema debido a que nos interesa tenerlo en términos de las nuevas variables \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 , pero se procede a resolver de esta manera debido a que los eigenvalores coinciden con la energía entre niveles de energía. Calculando los eigenvalores obtenemos entonces que

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}(\delta^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{H.3})$$

Esta solución corresponde al corrimiento por luz, observemos que si no perturbamos el sistema $\Omega = 0$ obtenemos los niveles sin perturbar separados por una distancia δ (la cual recordemos que es la desintonía, lo que quiere decir que es la energía entre el estado base y el excitado). Analicemos entonces el caso de alta desintonía ya que es el que nos interesa estudiar para la trampa dipolar óptica, en este régimen $|\delta|^2 \gg \Omega$, por lo que podemos

reorganizar y expandir en serie de Taylor ⁴⁸

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\delta^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{\Omega^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2}(\delta^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}} &\approx \frac{\delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\delta}, \\ \lambda &\approx \pm \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\delta}\right).\end{aligned}\tag{H.4}$$

En este régimen, el primer término corresponde a los niveles de energía sin perturbar y el segundo término es la corrección por el corrimiento de luz de tal manera que el desdoblamiento por efecto Stark es $\Delta\omega_{luz} = \frac{\Omega^2}{4\delta}$. Este resultado nos será útil a la hora de analizar la fuerza en las trampas dipolares ópticas.

⁴⁸La expansión en Taylor utilizada es $A(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx A(1 + \frac{x}{2})$.