Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

CONOCIMIENTOS SOBRE VALOR POSICIONAL EN ALUMNOS DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

Presenta:
Olivia Avalos Esparza

Dirigido por:
Dra. Diana Violeta Solares Pineda

SINODALES

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Presidente
Firma

Dra. Mónica Alvarado Castellanos
Secretario
mónica Alvarado C.
Firma

Dr. David Francisco Block Sevilla
Vocal
Firma

Dra. Claudia Broitman
Suplente
Firma

Mtro. Zorobabel Martiradoni Galindo
Suplente
Firma

Mtra. Fabiola García Martínez
Director provisional de la Facultad

Dra. Ma. Guadalupe Flavia Loarca Piña
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre de 2016
México

RESUMEN

Aun cuando los niños desarrollan conocimientos intuitivos sobre las reglas del Sistema de Numeración Decimal al margen de la instrucción formal, el conocimiento de sus aspectos más complejos se aborda a lo largo de la escolaridad básica. Varias investigaciones han reportado las dificultades que manifiestan alumnos de diversos grados de primaria para comprender el valor del cero, el aspecto multiplicativo del sistema, la interpretación y escritura de números grandes, entre otros aspectos del sistema de numeración decimal. Además, evaluaciones nacionales dan cuenta del bajo porcentaje de logro de alumnos de primaria y de secundaria en reactivos sobre valor posicional.

Esta investigación tiene como objetivo contribuir con la comprensión de los procesos de aprendizaje del sistema de numeración indagando los argumentos, justificaciones y errores que manifiestan diez alumnos de sexto grado al resolver tareas aditivas que implican al valor posicional. El marco teórico en el que se inscribe es la Teoría de las Situaciones Didácticas. El diseño metodológico fue de tipo cualitativo. Se entrevistaron a diez alumnos de una escuela pública del estado de Querétaro, México.

La tarea consistió en plantear a cada alumno cinco sumas horizontales con determinadas variables didácticas cada una. Los resultados obtenidos muestran que los alumnos recurren a diversos conocimientos sobre el cero entre los que destacan: el uso del cero como representación de ausencia, como diferenciador de cantidades y como marca de posición. Los resultados también muestran diferentes explicaciones sobre la agrupación decimal. Asimismo, se ponen de manifiesto conflictos para escribir una cantidad con ceros intermedios y para operar una adición con dos transformaciones de órdenes. Sin embargo, los alumnos cuentan con una diversidad de recursos de cálculo que, en su mayoría, pudieron vincular con reglas de funcionamiento del sistema de numeración.

Palabras clave: Sistema de numeración decimal, valor posicional, conocimientos sobre el sistema de numeración, educación primaria.

SUMMARY

Although children develope intuitive knowledge about the rules of the Decimal Number System besides formal instruction, knowledge of more complex aspects is taken into account along basic school. Different researches have reported difficulties that all-grade students from primary school have to understand the zero value, the multiplicational aspect of the system, the unit and ten values, as well as reading and writing of large numbers. Besides, national evaluations have reported low percentage of achievement in place-value items among students from primary and secundary school. This research has the objective to contribute to the comprehension of learning processes of the number system finding out the arguments, justifications and mistakes done by ten sixth-grade students to solve addition tasks where place value is concern. Theorical framework for this research is the Theory of Didactical Situations. Desing research methodology was a qualitative kind. Ten students from a public school were interviewed in Queretaro State, Mexico. The tasks were five horizontal additions with different didactical variables each one. The obtained results showed that students use various knowledges about the zero, the most outstanding ones were: the use of zero as absence representation, to distinguish quantities and as a position indicator. Also results showed different explanations about decimal grouping. Main found conflicts were related to writing a quantity with zero and performing an addition with two order transformations. However, students have diverse calculation resources which they could link appropriately to the rules of number system.

Key words: Decimal Number System, place value, knowledge about numerical system, primary education.

AGRADECIMIENTOS

A mi directora de tesis, Dra. Diana Violeta Solares Pineda, por conducir mis inquietudes, por su compromiso constante y por saber cuáles preguntas responder y cuáles dejar abiertas para impulsarme a buscar.

A mis lectores, Dra. Alvarado, Dr. Block, Dra. Broitman y Mtro. Zorobabel Martiriadoni, por cuestionar los planteamientos de este trabajo y compartir su mirada experta y su entusiasmo por el saber infantil.

A la maestra Silvia García por sus pertinentes aportaciones metodológicas.

A los alumnos que partiparon en esta investigación, por compartir con generosidad su pensamiento. Sus saberes constituyen el alma de este trabajo.

A la Dra. Karina Hess que me dio la bienvenida a la maestría.

A mis amigos, por su interés y aliento.

A mis hermanos Laura, Jorge, Mari, que desde temprana edad me enseñaron a valorar la curiosidad, la creatividad, el aprendizaje y los libros. A Miriam, Juan, Hilda, Felipe y Montse, por su cariño y apoyo.

De manera especial a mis Padres, Candelario y Consuelo, por todo su amor y confianza.

Dedico este trabajo a *Dani, Sabi y Adri*, por quienes mis esfuerzos tienen sentido.

Para la elaboración de esta tesis se contó con una beca del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Contenido

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo ha sido indagar los conocimientos sobre el sistema de numeración, en particular sobre valor posicional, que ponen en juego alumnos que están finalizando su educación primaria. El contexto de indagación de dichos conocimientos es una tarea de cálculo.

El conocimiento de los diferentes aspectos y reglas de funcionamiento del sistema de numeración decimal (en adelante SND) es uno de los accesos al concepto del número natural. Especificamente, conocer los símbolos utilizados por el sistema (del 0 al 9) y sus principios operativos permite la comunicación de ideas abstractas, como la cantidad, además del cómputo y el cálculo (Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas y Tièche Christinat, 2000). Por ello, comprender las maneras en la que los alumnos se apropian de este objeto cultural y matemático reviste una importancia especial.

Existen numerosos estudios que nos acercan al conocimiento sobre dicha apropiación. El objetivo de esos trabajos ha sido indagar la adquisión de diferentes aspectos del SND en niños pequeños, particularmente en lo que se refiere a la notación numérica, la numeración oral y las reglas de acción para interpretar números desconocidos (Alvarado, 2000, 2002; Brizuela, 2001; Lerner y Sadovsky, 1994; Scheuer, et al., 2000).

Sin embargo, las investigaciones con alumnos de segundo ciclo de primaria no se han desarrollado al mismo grado que las llevadas a cabo con preescolares. En el campo de la investigación con niños mayores, resaltan los trabajos encabezados por Lerner (1992, 2005), Terigi y Buitron (2013), Wolman y Ponce (2013), Centurion y Saiz (2014). Estos estudios se han dedicado a revelar la manera en cómo los alumnos comprenden el valor del cero, el valor de los agrupamientos, los aspectos multiplicativos de sistema y la lectura y producción de números grandes. Por lo anterior, consideramos necesario contribuir al conocimiento de los procesos de aprendizaje de este objeto de conocimiento en niños que llevan al menos seis años de enseñanza formal.

El diseño de nuestra investigación fue del tipo cualitativo con alcance exploratorio. Diseñamos un instrumento de indagación que se puso en marcha a través de una entrevista clínica. Esta elección metodológica responde a la necesidad de conocer de manera profunda y detallada los razonamientos de los entrevistados.

Plan de exposición

En el capítulo 1 se describe la problemática, justificación, objetivos y preguntas del estudio. La conformación de este capítulo se apoya en la revisión de investigaciones en el campo educativo y en los resultados en pruebas nacionales de logro educativo.

Las investigaciones consultadas dan cuenta de dificultades por parte de los alumnos de primaria en la comprensión de las propiedades del SND. Tales estudios plantean que, aunque hay avances en el conocimiento del SND, éstos no se dan de manera lineal ni uniforme. Además, los resultados de las evaluaciones del logro educativo nacional (EXCALE), para las muestras de tercer y sexto grado de primaria y tercero de secundaria, reportan un bajo desempeño en reactivos que tienen que ver con el valor posicional y la interpretación de cantidades con cero (del orden de cientos de miles y millones).

Las dos fuentes de información precedentes contribuyeron a la configuración de nuestra problemática y a la definición de nuestros objetivos y preguntas de estudio.

El segundo capítulo de esta tesis está dedicado al objeto matemático de nuestro interés. Se presentan antecedentes históricos del SND, sus características actuales y su vinculación con el cálculo. También presentamos las investigaciones llevadas a cabo con niños de primaria y secundaria, y otros estudios con adultos en proceso de alfabetización. Estos trabajos constituyen la referencia central para comparar nuestros resultados. Para finalizar el capítulo se presenta el marco teórico conceptual que orientó nuestras decisiones metodológicas, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

Más ampliamente, la Didáctica de la Matemática constituyó nuestro referente fundamental para:

- Adentrarnos en el conocimiento del SND en su dimensión histórica.
- Conocer de cerca el proceso de reconstrucción psicológica de este objeto matemático cutural que los niños llevan a cabo.
- Reconocer los diferentes escenarios en los que los alumnos manifiestan su saber: el escenario de la acción, el de la explicación, el de la justificación y también en el error.
- Analizar a profundidad las producciones de los alumnos, teniendo en cuenta la complejidad y riqueza del pensamiento infantil.

La metodología se delimita en el Capítulo 4. El diseño metodológico es de carácter cualitativo, pues buscamos conocer de cerca las justificaciones de los niños sobre sus procesos de resolución de la tarea. La selección del instrumento de indagación se efectuó con base en los trabajos de investigación didáctica y psicológica que forman parte de nuestros antecedentes. En ese capítulo se describe la muestra de nuestro estudio y el instrumento de indagación utlizado en las entrevistas clínicas. Se describe de manera detallada la estructura de cada ítem, las respuestas esperadas por parte de los alumnos, así como el protocolo de preguntas básicas para cada una de esas operaciones.

El quinto capítulo se dedica al análisis de resultados. Primero, se describen las categorías y subcategorías en las que se organizaron las respuestas de los alumnos una vez efectuado el análisis de las entrevistas. Después se presenta el análisis de las respuestas, considerando los procedimientos de solución a los que los alumnos recurrieron y los conocimientos sobre el SND que emergieron al justificarlos.

En el capítulo final exponemos las conclusiones a las que hemos arribado tras el análisis de resultados. Además, efectuamos una reflexión en torno a las decisiones metodológicas y recomendaciones para futuros trabajos.

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problema de investigación

La invención del sistema de numeración decimal obedeció a la necesidad humana de contar, registrar y transmitir información de la manera clara, regular y sucinta. Las propiedades del SND permiten asignar a cada número natural un nombre y una representación escrita. Por todo ello, el SND es un objeto matemático cultural de gran valor.

Nuestro sistema de numeración se caracteriza, precisamente, por su regularidad y economía de símbolos. Es regular porque los números de un mismo orden se escriben con la misma cantidad de cifras (decenas con dos cifras, centenas con tres cifras, millares con cuatro cifras, etc). Es económico puesto que con sólo diez símbolos (del 0 al 9), combinándolos y repitiéndolos, se puede representar cualquier cantidad no importando cuán grande sea ésta (Broitman, Grimaldi y Ponce, 2011).

Dichas características confieren al SND gran eficacia para representar números y efectuar complejos cálculos. Sin embargo, como señala Martí (2005), las reglas de su funcionamiento son herméticas y los niños tienen que pasar por un proceso cognitivamente complejo para construir conocimientos sobre el uso, los elementos y las reglas de funcionamiento del sistema de numeración. Según el mismo autor, los siguientes aspectos son fundamentales para que los niños reconstruyan el sistema de numeración:

- Conocer las funciones de las notaciones numéricas.
- Usar las notaciones numéricas como ayuda a la memoria.
- Comprender la naturaleza convencional y arbitraria de las notaciones numéricas (símbolos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).
- Utilizar el cero para representar ausencia de elementos de una colección.
- Representar mediante notaciones numéricas cierta cantidad de objetos.

— Comprender los principios organizativos del SND

- El principio de agrupamiento: base 10.
- Principios operativos entre los símbolos (0 al 9): multiplicación y adición.
- Principio de posición: cada cifra tiene valor en función de la posición que ocupa.
- El cero: representa una cantidad nula y representa una ausencia de unidades de orden.

Este objeto matemático cultural ha devenido en objeto de estudio dentro de la escuela. Los currículos escolares otorgan singular importancia a la enseñanza de este sistema de representación numérico. Según Nunes, Carraher y Bryant (1998, citado en Terigi y Wolman, 2007), el desarrollo de conocimientos y la comprensión matemática implican dominar y utilizar los sistemas matemáticos convencionales. En este sentido el SND:

> “es el primer sistema matemático convencional con que se enfrentan los niños en la escuela, y constituye el instrumento de mediación de otros aprendizajes matemáticos. En consecuencia, la calidad de los aprendizajes que los niños puedan lograr en relación con este objeto cultural es decisiva para su trayectoria escolar posterior.” (Terigi y Wolman, 2007, p. 64).

Dentro del currículo nacional, el SND tiene una marcada relevancia durante los primeros años de escolaridad. La revisión de Orientaciones didácticas y Planes y programas de estudio (SEP, 2011), nos condujo a identificar que los tres primeros grados de primaria, particularmente segundo, tienen una carga fuerte de actividades sobre el sistema de numeración decimal en comparación con los años posteriores.

Sin embargo, a pesar de la gran cantidad de actividades destinadas a la enseñanza del sistema de numeración en los primeros años de primaria, los reportes de evaluaciones nacionales efectuadas por el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa -INEE- ofrecen un panorama preocupante respecto de los aprendizajes alcanzados en este rubro.

En tercer grado de primaria el porcentaje de logro es de 40 % a 60% en reactivos cuyo contenido es identificar cómo se escribe un número de cuatro cifras cuando tiene ceros intermedios; identificar la escritura de un número en notación desarrollada; identificar el valor posicional y ordenar números. Todos estos ítems están en un rango numérico de cuatro cifras (Tabla 1).

Tabla 1

Porcentajes de logro reportados en tercer año de primaria sobre conocimientos que implican el sistema de numeración

Contenido del reactivo	Porcentaje de logro tercer año (EXCALE 2010)	
	Media nacional	Media estatal
Identificar la escritura con letra de un número de cuatro cifras	80%	83%
Identificar el valor de un término en secuencias numéricas crecientes con la constante aditiva de dos cifras	76%	77%
Identificar la escritura de un número de cuatro dígitos	72%	73%
Identificar el sucesor de un número de tres cifras	72%	76%
Escribir con cifras un número de cuatro cifras sin cero intermedio	68%	70%
Identificar el antecesor de un número de cuatro cifras	64%	71%
Identificar descomposiciones aditivas no convencionales de un número de cuatro cifras	62%	66%
Escribir y ordenar números dadas sus tres cifras	61%	59%
Comparar entre sí dos números de cuatro cifras	60%	64%
Identificar la escritura en cifras de un número de cuatro dígitos con cero intermedio	58%	60%
Identificar la escritura de un número de cuatro cifras en notación desarrollada	56%	56%
Identificar el valor posicional de un término en un número de cuatro cifras	49%	47%
Ordenar números de cuatro cifras	46%	40%
Generalizar e identificar constantes aditivas de una cifra en secuencias numéricas decrecientes	30%	37%

Nota: Tabla construida a partir de los datos publicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

En sexto grado (Tabla 2) los contenidos cuyo desempeño no supera el 60% son: escribir números naturales de hasta siete cifras, ordenarlos de manera ascendente y completar series numéricas. Asimismo, escribir números naturales a partir del valor posicional es el reactivo con el más bajo porcentaje de éxito entre los alumnos de sexto grado (41%).

Tabla 2

Porcentajes de logro reportados en sexto año de primaria sobre conocimientos que implican el sistema de numeración

Contenido del reactivo	Porcentaje de logro sexto año (EXCALE 2009)	
	Media nacional	Media estatal
Ordenar números naturales de cuatro cifras	89%	94%
Identificar una cantidad con letra hasta el orden de millones con cero intermedio	78%	82%
Identificar el número que corresponde a una cantidad escrita con letra, con ceros intermedios	72%	71%
Identificar la notación desarrollada de un número	69%	75%
Desagregar en sumandos un número de cinco cifras	67%	73%
Comparar dos números naturales de hasta seis cifras	66%	75%
Escribir números naturales de siete cifras	58%	59%
Ordenar números naturales de cinco y seis cifras en orden ascendente	50%	57%
Completar series numéricas descendentes	49%	49%
Completar series numéricas ascendentes	41%	39%
Escribir números naturales a partir del valor posicional	41%	46%

Nota: Tabla construida a partir de los datos publicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Los porcentajes de logro visibles en la Tabla 3, reflejan que el desempeño en reactivos relacionados con sistema de numeración no mejora en secundaria. El éxito en los mismos no va más allá del 60%. Los reactivos de lectura y escritura de números con ceros intermedios y los conocimientos sobre el valor relativo de las cifras en un número son contestados exitosamente por la mitad de los alumnos evaluados.

Tabla 3

Porcentajes de logro reportados en tercer grado de secundaria sobre conocimientos que implican el sistema de numeración

Contenido del reactivo	Porcentaje de logro tercero de secundaria (EXCALE 2008)	
	Media nacional	Media estatal
Escribir números naturales formados con más de seis cifras, sin ceros intermedios	63%	62%
Leer números naturales formados con más de seis cifras, con ceros intermedios	53%	57%
Escribir números naturales formados con más de seis cifras con ceros intermedios	48%	52%
Conocer el valor relativo de las cifras en un número	48%	51%
Leer números naturales formados con más de seis cifras, sin ceros intermedios	36%	38%
Leer y escribir números expresados mediante potencias de 10	22%	21%

Nota: Tabla construida a partir de los datos publicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Los reportes de EXCALE también dan cuenta de que asignar un valor a un número de acuerdo con su valor posicional es uno de los reactivos con menor porcentaje de logro en las tres muestras donde se evaluó: tercero (49%) y sexto de primaria (41%), así como tercero de secundaria (48%). Si bien no tenemos los datos sobre los reactivos que se usaron, sino sólo una descripción general de los mismos, llama la atención que en tercer grado de primaria los porcentajes de éxito en preguntas relacionadas con valor posicional sean más altos que en sexto de primaria. Cabe señalar que durante los tres primeros años de primaria se lleva a cabo un trabajo intenso sobre el contenido de sistema de numeración, lo que podría explicar que se manifieste un mayor porcentaje de logro. A partir de cuarto y hasta sexto grado, las lecciones destinadas a analizar sistema de numeración se limitan a dos por grado escolar (cuando en primero, segúndo y tercero se destinan tres, nueve y tres lecciones respectivamente), lo cual podría reducir las oportunidades de profundizar sobre aspectos más complejos del SND.

Autores como Terigi y Wolman (2007) argumentan que la enseñanza actual del SND se centra en su aspecto notacional o escrito y se orienta a mostrarlo como una técnica de transcripción de cantidades a su forma gráfica, sin entender la compleja naturaleza de su estructura. Esto implica que en las aulas se deja fuera la reflexión de las reglas que determinan su funcionamiento, en gran medida porque estas reglas están ocultas. Entre ellas se encuentran el principio de agrupamiento, el principio de base 10 y el valor posicional. Los argumentos de estos autores pueden ayudarnos a comprender los bajos niveles de desempeño logrados por los alumnos en pruebas nacionales.

En cuanto a resultados provenientes de la investigación, encontramos que numerosos trabajos reportan que pueden presentarse dificultades en la aplicación de las reglas y las convencionalidades del SND durante la primaria e inclusive, en grados posteriores a la misma (Lerner, 1992, 2005; Terigi y Buitron, 2013; Saiz y Centurión, 2014; Wolman y Ponce, 2013).

Lo anterior se vincula con los datos reportados por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE, 2002 a 2011), en sus Estados del conocimiento.

En esta recopilación encontramos investigaciones de García (2007) y Butto (2011), de las que se concluye lo siguiente:

> “el sistema de numeración y sus reglas sigue siendo reportado como problemático para los niños de primero y segundo grados. Los problemas para lograr su comprensión impactan en las dificultades para utilizar los procedimientos formales de suma y sobre todo de resta. No obstante, lo anterior, se informa que también el aprendizaje de los alumnos evoluciona en el tránsito escolar, aunque no de manera lineal”. (pp. 40-41).

Las evidencias anteriores nos conducen a identificar que aspectos complejos sobre el SND, como son el valor posicional, el principio de multiplicación por la base 10 y la interpretación de números grandes (del orden de los miles en delante) presentan conflicto para su comprensión aún después de tercer grado de primaria. Por otro lado, como ya se expuso, en las mediciones nacionales hay un bajo porcentaje de logro, en esos mismos aspectos del SND. Por ello es congruente que se emprenda una investigación al respecto.

En síntesis, el SND es un sistema complejo cuya apropiación se logra de forma paulatina y, generalmente, mediante la instrucción formal. La revisión que hemos efectuado al currículo de enseñanza nacional da cuenta de que este tema se aborda de manera relevante en los tres primeros años de primaria, y si bien sigue presente en los grados posteriores, las situaciones problemáticas y actividades específicas sobre este contenido tienden a disminuir. Pero es a partir de cuarto grado cuando el estudio de las características más complejas de SND representa un reto para los niños. Si no hay un trabajo reflexivo sobre este tema, los avances en su comprensión pueden ser limitados.

Por lo anterior consideramos que hace falta conocer más sobre los conocimientos adquiridos por alumnos de los grados finales de primaria, particularmente de sexto grado, pues es el tránsito a la secundaria y es el grado en el que se espera que los alumnos tengan conocimientos bien consolidados sobre el número y el sistema de numeración.

1.2 Preguntas y objetivos de investigación

Pregunta de investigación

¿Qué conocimientos ponen de manifiesto alumnos de sexto grado de primaria al resolver problemas matemáticos que implican el valor posicional?

Preguntas específicas:

- ¿Qué procedimientos utilizan alumnos de sexto grado al resolver tareas matemáticas relacionadas con el valor posicional?
- ¿Qué argumentos utilizan los alumnos para justificar sus procedimientos y respuestas ante dichas tareas?
- ¿Qué errores y dificultades manifiestan al enfrentar tales tareas y al argumentar sus procedimientos?

Objetivo general

Identificar los conocimientos sobre el valor posicional que ponen de manifiesto alumnos de sexto de primaria al resolver determinadas tareas matemáticas.

Objetivos particulares

- Identificar los procedimientos que utilizan alumnos de sexto grado al resolver tareas matemáticas relacionadas con el valor posicional.
- Identificar los conocimientos sobre el sistema de numeración decimal presentes en las justificaciones que los alumnos hagan de sus procedimientos y respuestas ante dichas tareas.
- Identificar los errores y dificultades recurrentes en sus procedimientos o en sus argumentaciones.

CAPÍTULO 2
ANTECEDENTES TEÓRICOS

Una vez que hemos establecido que la apropiación de nuestro sistema numérico conlleva un complejo proceso de reconstrucción por parte de los alumnos, esbozaremos los principales problemas que sorteó la humanidad para llegar a conformar el SND como lo conocemos en la actualidad. Posteriormente, se expondrán las características que definen al SND, como son: los agrupamientos, el principio de base, la posicionalidad y el cero. Finalmente expondremos los trabajos en el campo de la investigación psicológica y didáctica que son cercanos a nuestro problema de investigación.

Numerosos investigadores y didactas que han analizado el SND concluyen que es un objeto complejo en su composición, regido por convenciones que se fueron construyendo a lo largo de la historia de la humanidad. Su aprendizaje, por lo tanto, no es sencillo para los niños, pues tendrán que reconstruir “reglas ocultas” para ir comprendiendo el funcionamiento del SND.

La invención de los sistemas de numeración obedeció a la necesidad humana de contar, registrar y transmitir dicha información contada. Cuando una serie de marcas sobre piedra, hueso o madera, sustituyeron a los objetos que se querían contar, se establecieron los orígenes de un sistema de representación centrado en la numerosidad o cantidad de una colección de objetos. Este paso en la representación no fue sencillo y costó a la humanidad miles de años (Ifrah, 1987; Cajori, 1909, Gómez, 1988). Construir una colección representada idéntica a la real, en la que cada marca corresponde a un objeto, fue el primer método que los humanos de la antigüedad desarrollaron para resolver los problemas planteados por las actividades que les exigían saber el *cuánto*.

Es fácil imaginar las limitaciones que este primer método de notación comporta, ¿qué pasó cuando los elementos a cuantificar eran en extremo numerosos? Hubo que dar respuestas a tales problemas, superando lo explícito de los primeros registros y dejando implícitos algunos aspectos en la representación. Lo que permanece oculto en nuestro sistema notacional es el valor de cada símbolo, mismo que depende de la posición que ocupa. Está es la única señal que indica la potencia de base por la cual se multiplica cada cifra para interpretar una notación (Martí, 2005; Lerner y Sadovsky, 1994).

Una breve revisión histórica a los antecedentes del SND nos permitirá identificar diferentes problemas a los que se enfrentó la humanidad al inventar un sistema numérico con las características que lo conocemos en la actualidad.

2.1 El sistema indo-arábigo[1]

Hacia el siglo V de nuestra era, nació al norte de la India el antecesor de nuestro sistema de numeración. Las necesidades planteadas por el comercio condujeron a los calculistas a buscar formas para escribir, leer y comunicar cantidades de manera simplificada. Esa numeración incluía nueve grafías convencionales que nos pueden resultar familiares (Figura 1). Su base es decimal.

Figura 1: Grafías usadas en la numeración hindú.
Tomadas de Ifrah (1987).

[1] Este apartado esta basado en las descripciones del historiador en matemáticas George Ifrah (1987).

En aquel entonces, decir un número incluía indicar al mismo tiempo la potencia de base y se efectuaba en orden creciente (no decreciente como en nuestro sistema actual). Por ejemplo, decir un número como 5783 en la India implicaría decir:

Tres, ocho decenas, siete centenas, cinco millares

Es posible que, debido a la regularidad al decir los números, se fuera omitiendo la mención a la potencia de base. De esta manera sólo se decían los nombres de las cifras. Así, el número 5783 se diría:

Tres, ocho, siete, cinco

Y en caso de tener que indicar una cantidad con cero, recurrieron a la palabra sunya que significa "vacío". Así, un número como 402 se diría:

Dos, vacío, cuatro

Sin embargo, el cero y la posición aún se encontraban a nivel de representación oral. Faltaba aplicar estas soluciones a la numeración escrita. Ese impulso fue dado por la necesidad de calcular, conocimiento que en aquel entonces era dominado exclusivamente por sabios calculistas. En su afán de que los cálculos fueran menos complejos, la humanidad aplicó los principios de la numeración hablada (posición y representación del vacío o cero) a las escrituras numéricas.

A diferencia de las numeraciones en otras civilizaciones como la babilónica y maya[2], la economía de signos (nueve), la regularidad en la numeración y la

---

[2] Hubo dos civilizaciones antiguas que usaron el principio de posición y tuvieron una forma de representar la ausencia de unidades de cierto orden mediante el cero. Fueron los babilonios (dos mil años antes de J.C) y los mayas (durante el primer milenio de nuestra era). Sin embargo, la concepción y el uso dado al cero no fue idéntica a la que damos en la actualidad. Los babilonios lo usaron para representar la ausencia de cantidades de cualquier orden y como operador aritmético, con lo cual pudieron escribir números sin ambigüedades. El problema con su numeración fue que no concibieron al cero como sinónimo de "cantidad nula", hecho que limitó su desarrollo matemático. Por su parte, los mayas usaban el cero como operador aritmético, pero al no contar con una numeración regular no pudieron usar el cero en las operaciones. En palabras de Ifrah "debido a estas imperfecciones, los sistemas posicionales babilonio, chino y maya, nunca sirvieron para realizar

concepción del cero como ausencia y número nulo de la numeración hindú, permitieron importantes avances que dieron lugar al desarrollo de la aritmética y a la concepción de un sistema de numeración económico y eficaz.

2.2 Caracteristicas del sistema de numeración decimal

Según Ifrah (1987), los agrupamientos, el principio de base y el valor posicional junto a la introducción del cero, son las construcciones claves en la invención del SND. Estas tres innovaciones devinieron en la elaboración de un económico sistema en el cual, con pocos símbolos, se pueden escribir infinita cantidad de números y realizar cálculos complejos. Enseguida se expondrán brevemente dichos aspectos.

Agrupamientos: hacen referencia a la reunión de cierto número de elementos al contar grandes colecciones, ya sea rodeando las marcas con un trazo, separando o marcando con espacios o creando un signo para representar cierto número de marcas.

Principio de base: dichos agrupamientos se volvieron regulares (en el caso del SND, la base de los agrupamientos es de diez elementos); además, el número de elementos de la base es igual al número de símbolos utilizados en su escritura (del 0 al 9, diez símbolos en el caso del decimal). Ello condujo a establecer las operaciones implícitas que se debían efectuar entre los agrupamientos para poder calcular y escribir la cantidad final. Algunos sistemas utilizan sólo la adición entre sus agrupamientos (como el Romano, donde el número 2000 se obtiene sumando el valor de M más M y su escritura es MM) y otros se apoyan, además. en la multiplicación para poder registrar e interpretar cantidades, como nuestro sistema

---

operaciones aritméticas y los dos ceros anteriores (el babilonio y el maya) nunca pudieron originar desarrollos matemáticos." (Ifrah, 1987, p. 248) de numeración decimal[3], donde el número 34 se obtiene de multiplicar el $(3x10^1)$ + $(4x10^0)$.

Valor posicional: la notación numérica de grandes cantidades, así como el cálculo de las mismas, supusieron un reto antes del siglo V de nuestra era. Para ese momento ya se había establecido una notación que incorporaba la cifra y su potencia de base. Como se comentó, un número como 734 era dicho y escrito "cuatro, tres decenas, siete centenas"[4] empezando por las unidades simples. Pero la búsqueda de la economía en la notación condujo a los hindúes a evitar hacer referencia a la potencia de base; así, el valor de cada cifra fue dado por la posición que ocupaba en la sucesión de cifras de una escritura numérica.

El Cero: se utiliza para indicar la ausencia de unidades en un determinado orden.

Las características antes citadas conforman un sistema numérico que además permite realizar potentes cálculos. Como indican Broitman, et al.:

> "la introducción del cero y de un sistema posicional permitía la representación escrita de las mismas manipulaciones del ábaco, ya que, al llegar a 10 (o superarlo) en la columna de las unidades, también se podía "llevar uno" a la columna de las decenas. Permitía manipular de forma simbólica cualquier agrupación y operación que anteriormente se llevaba a cabo con el ábaco." (2011, p. 13).

---

[3] En este trabajo retomamos las definiciones de Unidad, Decena y Centena propuestas por Bedoya y Orozco (1991): la Unidad es definida como un elemento diferenciado y completo que forma parte de un conjunto. Se entiende a la Decena como unidad cuyo valor es diez; una decena es una unidad de unidades (diez unidades, en este caso). La Centena es una unidad de unidades compuestas (diez unidades de diez unidades cada una; las cuales son a su vez unidades compuestas de unidades simples). De esta manera, estos autores denominan a las Unidades como unidades de orden cero $(n \times 10^0)$, a las Decenas como unidades de orden uno $(n \times 10^1)$ y a las Centenas como unidades de orden dos $(n \times 10^2)$, los Millares como unidades de orden tres $(n \times 10^3)$ y, por un mecanismo recursivo, de ahí en adelante hasta $(n \times 10^n)$. La potencia de la base es diez.

[4] Esta escritura es una adaptación de la manera en que antiguamente se hacía referencia a los números. Se quiere destacar que en ese entonces se mencionaba la cantidad junto a la potencia de base por la cuál habría de multiplicarse (Ifrah, 1987).

La definición anterior incluye al algoritmo vertical o en columnas[5]. Sin embargo, no es la única manera de solucionar una operación.

Un cálculo determinado puede resolverse ya sea con el algoritmo en columnas o con cálculo mental. Analizar las formas posibles de obtener el resultado de un cálculo es de especial relevancia para nuestro estudio, el cual indaga conocimientos de valor posicional a través, precisamente, de la resolución de operaciones.

La resolución de operaciones a través del cálculo mental implica conocimientos sobre el SND. De acuerdo con Parra (1994), “Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números” (pp. 222-223). Por su parte, Mochón y Vázquez (1995) exponen que el cálculo mental es un proceso constructivo que permite desarrollar el sentido numérico, conocer el sistema de numeración decimal y acrecentar la seguridad en los resultados de las operaciones matemáticas.

Para este trabajo nos apoyaremos en la definición que ofrece Parra (1994) de cálculo mental: “el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados” (p. 222). Algunos de los procedimientos relacionados con las propiedades del sistema de numeración son los siguientes:

[5] Retomamos la definición de algoritmo planteada por Vergnaud (1991, citado en Ortiz 2014): “Un algoritmo es una regla (o un conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o dado el caso, mostrar que no hay solución. Hay que subrayar que se puede decir que una regla “conduce a una solución”, sólo si lo hace en un número finito de etapas; si este número no es finito, la regla podría aplicarse indefinidamente sin éxito. Ésta no sería, entonces, “efectiva”, y no sería un algoritmo” (p. 258). El algortimo de la suma al que haremos alusión en este trabajo implica encolumnar, reagrupar y desagrupar correctamente las cantidades, así como operar las cifras en sentido de derecha a izquierda.

- Apoyarse en un repertorio de sumas memorizadas a las que se les agrega cero. Por ejemplo, para sumar 50 + 30, se puede decir proceder sumando 5 + 3 = 8, luego al 8 se le agrega el 0 y da por resultado 80.
- Pensar un número de diferente manera; esto implica poderlo descomponer en números redondos (aquellos que terminan con ceros) con los cuales es posible operar con más facilidad. Por ejemplo, para sumar 45 + 38 se puede proceder así: 40 + 5 + 30 + 8 = 40 + 30 + 8 + 5 = 83.
- Apoyarse en las propiedades asociativas y conmutativas de la suma; por ejemplo, para sumar 700 + 5000 + 300 + 60 se puede proceder asociando primero las centenas: 700 + 300 = 1000; luego conmutando los números para operarlos de manera flexible: 5000 + 1000 + 60= 6060. Ello refleja el acomodo del sumando mayor al menor (en orden decreciente), característico del SND.

Hasta este momento se ha hecho una revisión a las características del SND. Estas se han conformado como soluciones a los problemas que se fueron planteando al largo de su construcción histórica. También nos percatamos de que, gracias a ellas, el sistema decimal se constituyó como un potente instrumento para la resolución de cálculos. Conocer los aspectos anteriores permite acercarnos a las concepciones infantiles de manera informada y poder identificar en ellas conocimientos vinculados con el sistema.

2.3 Estudios en torno al aprendizaje y la enseñanza del SND en contexto de enseñanza formal

Existe una amplia gama de estudios cuyos objetivos principales han sido indagar la manera en que niños pequeños (alumnos de preescolar) producen e interpretan escrituras numéricas (Alvarado, 2000, 2002; Brizuela, 2001; Lerner y Sadovsky, 1994; Sheuer, Sinclair, Merlo de Rivas y Tièche Christinat, 2000).

A diferencia de los anteriores, nuestro trabajo tiene como antecedentes directos aquellos estudios efectuados con niños en su etapa escolar, particularmente con niños en el segundo ciclo de la primaria. Además, para tener una visión comparativa ampliada, nos apoyamos también en estudios sobre adultos que comienzan su escolaridad. A continuación, se expondrán los trabajos desarrollados en estas áreas.

2.3.1 Estudios sobre el sistema numérico en contexto de tareas de cálculo

En el campo de la investigación sobre conocimientos del sistema de numeración al resolver tareas de cálculo, resaltan los aportes hechos por Lerner (1992). Su trabajo, efectuado con 14 niños de primero, tercero y quinto grado de primaria, tuvo como objetivo indagar la interpretación que los alumnos dan al cero; también exploró sus concepciones de una unidad, decena y centena. Además, se adentró en los retos que enfrentan los estudiantes para identificar el valor de las “llevadas” y los “pedir prestado” en las operaciones con algoritmo vertical.

Durante el desarrollo de dicho estudio, la autora y su equipo identificaron las dificultades que atraviesan los niños para determinar el valor del cero. Descubrieron que para los niños resulta complejo concebir que el cero dentro de una escritura numérica representa simultáneamentes dos cosas: la ausencia de elementos de algún orden y la presencia de una posición. La tarea para los niños consistió en lo siguiente “Un niño me dijo que el 0 no vale nada ¿qué piensas tú?” Las respuestas de los niños fueron que el cero, en sí no tienen ningún valor. Los argumentos ofrecidos por ellos para sustentar esta idea fueron que, si a 2 le quitas 2, te da 0; o si tienes 3 y le quitas 0, sigues teniendo 3. Ello indica que estos alumnos han comprendido que el cero es un elemento neutro en las operaciones de suma y resta.

La siguiente tarea implicó interpretar el cero, pero dentro de una cantidad, no aislado como en la tarea previa. Las respuestas de los niños permiten identificar que éstos piensan que el cero tienen valor sólo si está escrito después de otro número (como en 90); y que si está escrito antes de un número no vale nada (como en 090). Esto significa que los alumnos han comprendido que dicho signo no puede suprimirse de un número como 102, sin afectar el valor del número. De esta manera, niños de primero, tercero y quinto de primaria han construido algunas reglas de acción para interpretar el cero que son:

- Primero de primaria: el cero tiene valor en función de la posición que ocupa con respecto a otros números y, entre más cifras tiene una cantidad, mayor es su valor.
- Tercero: El cero se tiene que escribir, pero no tiene cantidad ni valor. Sin embargo, en este grupo de edad, los alumnos no lograron esbozar algún argumento que concilie la contradicción que implica que el cero no valga nada, pero no pueda ser suprimido (de una escritura numérica).
- Quinto: aparece un argumento que contribuye a resolver el problema que apareció con niños de tercer grado “el cero tienen valor en tanto sirva para diferenciar cantidades”. Esto supone que han comprendido que el cero escrito en una cantidad indica que no hay elementos correspondientes a esa potencia de base (Lerner, 1992). A diferencia de la concepción del cero construida por niños más pequeños, este cero representa también un vacío, una nada, pero es una nada en una posición determinada.

Por otro lado, en cuanto al significado de unidades, decenas y centenas, la autora concluye que haber recibido instrucción directa sobre el valor de cada uno de esos órdenes no se traduce necesariamente en que los niños comprendan el funcionamiento y reglas del sistema de numeración. La tarea propuesta para indagar al respecto consistió en traducir en cantidades un cierto número de fichas colocados en un tablero de unidades y decenas como el de la imagen siguiente:

D	U

La investigadora iba poniendo fichas en las columnas de manera alternada, primero en la de U (unidades) luego en la D (decenas). En una de las intervenciones, colocó una ficha en la columna de la D y nueve fichas en la columna de la U. Posteriormente pidió a los alumnos indicar la cantidad total que se representa con las fichas (la cual sería igual a 19). Algunos de ellos tuvieron problemas para interpretar convencionalmente los valores de las fichas. Un ejemplo de esto lo ofrece la entrevistada Sidarta. Esta niña indica que en el tablero hay un total de diez en total (no 19, si se considera que la ficha de la columna de la D vale diez, más las nueve unidades de la columna U). Por esta razón, la autora del estudio cuestiona la utilidad del trabajo en el aula con tableros y fichas y se pregunta si estas representaciones de los valores de los órdenes favorecen u obstaculizan la comprensión de la agrupación decimal.

En cuanto a la tarea de algoritmos de suma y resta, los niños no ofrecieron explicaciones razonables sobre el valor de las "llevadas" pues todos consideraron que al hacer una suma (por ejemplo 14 + 8 = 22) el uno que llevas a la columna de las decenas vale uno y no diez. Sin embargo, en el transcurso de la entrevista algunos niños de quinto establecieron relaciones entre conocimientos sobre el SND que ya tenían y procedimientos como "las llevadas". Los alumnos lograron determinar que lo que se lleva no es una unidad, sino una decena, centena o millar, según sea el caso.

Resulta de interés en ese estudio que los niños de quinto grado fueran quienes manifestaron conocimientos más avanzados sobre valor posicional. Sin embargo, es necesario enfatizar que lo hicieron en el marco de una entrevista muy específica y no de un trabajo sistemático de aula.

En un trabajo posterior de la misma autora (Lerner, 2005), se reportan los resultados de una secuencia didáctica con niños de 7 y 8 años. En ella se buscó conocer la manera en que los alumnos establecían relación entre procedimientos de resolución de operaciones y valor posicional. En el transcurso de la secuencia se pudo observar que, aunque algunos niños pudieran resolver con éxito los cálculos, sus justificaciones no necesariamente se fundamentaban en la comprensión de lo principios del SND.

Específicamente, la tarea consistió en que los alumnos encontraran procedimientos rápidos para hacer sumas del tipo 4000 + 20 + 600 + 2 o 90 + 500 + 700 o 100 + 2 + 5000. Entre los resultados documentados están que los alumnos explicaron que es conveniente ordenar los números de mayor a menor para calcular rapídamente, pero no explican por qué. También indican que sumar reiteradamente cienes y dieces es una manera rápida de resolver estas cuentas; como enel ejemplo, 1000 + 500 + 80 + 6, es pertinente sumar 1000 + 100 = 1100 + 100 = 1200 + 100, etc. Según la autora, los alumnos pusieron en acción conocimientos que no todos pudieron explicitar.

Cabe señalar que ese trabajo transcurrió dentro de una secuencia de enseñanza sobre el SND. Por ello la intervención docente estuvo muy presente. En un momento posterior de dicha investigación, aparece otro procedimiento para resolver esos cálculos. Este consistía en ordenar de mayor a menor los sumandos y luego borrar los ceros de cada uno, componiendo así un resultado. Por ejemplo, en 1000 + 500 + 80 + 6, los ceros son tachados por un alumno llamado Santiago, quedando sólo 1586 como resultado; además, este alumno indica que para que el procedimiento funcioné debe haber un número de tres ceros, uno de dos ceros y uno de un cero y uno de ningún cero. De esta manera, y sólo después de variadas intervenciones de la profesora, las justificaciones de los alumnos tendieron a revelar conocimientos de valor posicional. La docente orientó a la clase a que distinguieran en qué casos el procedimiento es exitoso y en cuáles no lo es y condujo a los alumnos a explicar las razones que fundamentaban los argumentos de los niños.

En 2013, Terigi y Buitron presentaron los resultados de un estudio exploratorio con 45 niños, sobre los avances en los conocimientos básicos y complejos del SND producidos en diferentes grados escolares (de primero a cuarto de primaria) y en diferentes entornos de enseñanza (enseñanza usual y enseñanza con enfoque en la comprensión del SND[6]). Las autoras encontraron que los niños de primero y segundo grado son capaces de lograr importantes avances en los aspectos más sencillos de sistema de numeración, como son: comprender la función social del número en distintos contextos, comparar números mayores y menores o realizar tareas que involucran memoria de la cantidad; inclusive resolver operaciones sencillas con cálculos mentales o por procedimientos de conteo. Sin embargo, sólo los alumnos de tercero y cuarto año de escuelas con "enfoque en la comprensión" presentaron avances en el entendimiento del principio de posición y el principio de agrupamiento, que son los aspectos multiplicativos del SND, así como en tareas de dictado de números.

Las conclusiones presentadas por estas autoras nos resultan significativas pues señalan la necesidad de un trabajo didáctico centrado en la comprensión, para que los alumnos se adentren en el conocimiento de los aspectos complejos del SND. Además, ellas subrayan que es a partir de cuarto grado de primaria cuando el aprendizaje de esos aspectos se complejiza. Recordemos que, en nuestro contexto nacional, las lecciones dedicadas al estudio del SND disminuyen considerablemente en cuarto año respecto de los tres años previos y ello puede explicar la inestabilidad de los conocimientos sobre el sistema en años posteriores.

En el campo de la investigación con adultos que están ingresando a la escolaridad, Broitman (2012) presenta resultados de un estudio efectuado con cinco entrevistados. En él, revela los conocimientos numéricos de éstos, ligados al valor

[6] El entorno de enseñanza usual es descrito por las autoras en los siguientes términos "En la enseñanza usual del SN, se considera ineludible enseñar los números de a uno por vez, comenzando por los dígitos y respetando el orden de la serie. Se establecen cortes para secuenciar la enseñanza de los números según los años de la escolaridad: de 1 a 100 en primer grado, hasta 1000 en segundo, y así sucesivamente. Desde el inicio y junto con la presentación del número 10, se incorporan las nociones de unidades y decenas y las materializaciones de estas últimas. Este modo de presentar los números, que busca facilitar su aprendizaje, dosifica y segmenta de tal modo al objeto de conocimiento que, en verdad, dificulta su comprensión: bajo estas condiciones, para los alumnos/as no es posible detectar regularidades y descubrir la recursividad del agrupamiento, precisamente porque lo que no se permite es la interacción con el sistema *en cuanto tal*." (Terigi y Buitron, 2013, p. 16). Por otro lado, el enfoque en la comprensión se daría en escuelas donde la enseñanza de las matemáticas se organiza de modo tal de ofrecer a los alumnos/as oportunidades de reflexionar sobre los aspectos conceptuales del sistema de numeración.

posicional en tareas de composición y descomposición de cantidades en contexto de dinero y en tareas con algoritmos de suma y resta. La autora señala la enorme variedad de conocimientos sobre valor posicional disponibles por los adultos, entre ellos:

- Composición de cantidades atendiendo a relaciones multiplicativas o a relaciones de órdenes del SND. Por ejemplo, en la tarea de componer una cantidad con 6 billetes de $100, 7 de $10 y 5 de $1, inmediatamente concluyen que se forman $675.
- Aprovechamiento de los números nudo[7] para resolver tareas de cálculo. Por ejemplo, al sumar 4 billetes de $100, 3 de $10 y 4 de $1, los adultos indican que “cuatro de diez son cuatrocientos, tres de diez son treinta, cuatro de uno son cuatro”, proceden a recuperar sólo los números redondos “cuatrocientos”, “treinta” y “cuatro”, esto es, “cuatrocientos treinta y cuatro”.
- Apoyo en la descomposición aditiva de cantidades y apoyo en el cálculo mental oral y en aspectos multiplicativos del sistema de numeración (como por ejemplo saber que el 3 de $367 vale 3 de $100).

La autora concluye que, pese a su corta o nula trayectoria escolar, dichos adultos cuentan con numerosos conocimientos disponible sobre el valor posicional. Además, propone la necesidad de que estos saberes puedan ser recuperados como punto de partida de su escolarización básica. Por otro lado, plantea la problemática existente cuando se considera que el SND es un objeto de conocimiento totalmente nuevo para aquellos que están ingresando a la escolarización. Esta investigadora cree necesario tender puentes desde lo que los adultos ya saben (por ejemplo, su amplio dominio del cálculo mental) hacía conocimientos matemáticos formales, buscando con ello contribuir a un aprendizaje con sentido.

En esta misma línea de trabajo, Delprato (2002) explora los saberes matemáticos de adultos en proceso de ingresar a la enseñanza formal en el marco

[7] Números nudo o redondos son aquellos que terminan con ceros.

de una ingeniería didáctica. En él describe a profundidad los conocimientos sobre cálculo y sistema de numeración de tres adultas en su tránsito hacia la simbolización matemática (uso de notaciones numéricas). Algunos de sus hallazgos nos permiten identificar recursos y dificultades por las que puede atravesar un sujeto cuando se enfrenta al aprendizaje de la numeración y las operaciones escritas, específicamente del algortimo en columnas.

Las adultas entrevistadas manifestaron poseer conocimientos relevantes en el campo del cálculo mental como los que se destacan a continuación.

— El uso preponderante que hacen del cálculo mental les favoreció para poder identificar y corregir errores cometidos en los cálculos escritos.
— Se presentaron problemas para leer y producir cantidades de manera convencional, pero el apoyo en números nudo y en resultados controlados con cálculo mental favoreció la corrección de escrituras.

Dichas entrevistadas, además, mostraron dominio sobre aspectos del SND que se describen a continuación:

— En una tarea cuyo objetivo era identificar el número de billetes y monedas de \$100, \$10 y \$1 que les presentaba la investigadora, lograron señalar pertinentemente los agrupamientos, esto es, decir cuántos billetes o monedas había de cada valor.
— En la tarea de escribir con cifras una cierta cantidad de monedas, por ejemplo, diez monedas de \$10 y nueve monedas de \$1, se presentaron algunos problemas para escribir \$109. Lo anterior debido a que antes de transcribir ese número de billetes y monedas, tenían que efectuar una transformación de las diez monedas de \$10 por un billete de \$100, que no les resultaba sencilla de comprender. Tras el paso de las sesiones de trabajo, las adultas superaron esta dificultad y lograron apegarse a las restricciones de la escritura posicional.
— En un principio no todas las participantes lograban aplicar la regla de agrupación decimal en contexto de monedas y billetes (es decir, no

cambiaban diez monedas de $10 por un billete de $100). Transcurridas las sesiones de trabajo con las participantes, pudieron incorporar la regla de cambio como instrumento para cumplir con las restricciones de la escritura de una cantidad.

Examinar los conocimientos que tienen los adultos sobre el SND y los cálculos, así como las dificultades, contradicciones, errores y desafios a los que se enfrentan al incorporar nuevos saberes, nos permitirá identificar y establecer coincidencias o diferencias con las respuestas de los alumnos de sexto grado analizadas en esta investigación.

2.3.2 Estudios en torno a la lectura y escritura de números grandes[8]

En el campo de la lectura y escritura de números, Wolman y Ponce (2013) llevaron a cabo un estudio con niños de 10 y 11 años. Su objetivo fue explorar las hipótesis infantiles sobre la lectura de números, así como analizar si la ampliación del rango numérico (de diez miles a millones) permite la aparición de ideas originales; se centraron particularmente en el uso de los puntos[9] en niños que leen y escriben un rango importante de la serie numérica (de unidades a miles).

Algunos de los hallazgos principales fueron que que los alumnos entrevistados establecieron relaciones entre el uso de puntos con la numeración hablada y escrita, según lo descrito a continuación:

— *El punto puede cambiar un número*. Es decir, los entrevistados elaboraron dos escrituras numéricas que sólo se distinguían entre sí por la ubicación del punto, pero les asignan valores diferentes. Por ejemplo, escribían 10.000 para diez mil y 1.0000 para un millón. La hipótesis subyacente es que, al cambiar el punto de lugar, cambia el número.

[8] Por números grandes nos referimos a números a partir de los miles.

[9] La investigación citada se llevó a cabo en Argentina, lugar donde el punto equivale a la coma que usamos en México.

— *El punto sirve para ordenar, separar o diferenciar*. Los niños conciben que los puntos sirven para ordenar la escritura de un número con varias cifras o para hacer corresponder el número dicho con la escritura. Por ejemplo, si se les pide a los alumnos escribir “tres millones cuarenta y un mil cien”, anotan 3.41.100, en lugar de 3.041.100, que sería la escritura convencional.

Los autores concluyen que la relación entre numeración hablada y escrita es una interrogante que acompaña a los niños más allá de sus primeros accesos al sistema de numeración. Este tipo de ideas, que a simple vista podrían ser interpretadas como problemas en la comprensión del valor posicional, tienen, según los autores, otra causa: “la tensión entre considerar las informaciones que brinda el nombre del número y ajustarse a los principios de la numeración escrita” (Wolman y Ponce, 2013, p. 226). Este estudio, nos permite identificar cuáles son los nuevos retos a los que los alumnos se enfrentan cuando se trata de trabajar con números grandes.

En esta misma línea de investigación Centurión y Saiz (2014), presentan un estudio llevado a cabo con 50 alumnos de nivel secundario. En él, analizan conocimientos sobre el sistema de numeración en tareas de escritura de números, particularmente las relaciones que los alumnos establecen entre las reglas de lectura de números y las reglas de la escritura de números. Su objetivo fue identificar los conocimientos que los niños han construido a lo largo de sus trayectorias escolares, las dificultades a las que se enfrentan al resolver las tareas y conocer cuáles son las reglas a las que recurren para validar sus respuestas y elaborar argumentos para superar los conflictos que se les presentan; En este estudio se les propone a los niños:

— Escribir trescientos mil cinco.
— Escribir trescientos cinco mil.
— Escribir doscientos cuarenta y cinco mil quinientos treinta y nueve.
— Leer los números: 406,000; 500,300 y 200,003.

Sus resultados demuestran que el 80 % de los entrevistados de su muestra presentaron errores al escribir números que comportan varios ceros a partir de su nombre. Además, identificaron cinco reglas de acción que los alumnos formularon para controlar y dar sentido a sus producciones:

- Regla 1. De las palabras que se dicen en el nombre, solo se escriben los dígitos; no se escriben las potencias de 10. Por ejemplo, ante el dictado de "trescientos mil cinco" escriben 3.0005.
- Regla 2. No pueden existir dos números diferentes con el mismo nombre o con la misma escritura con cifras.
- Regla 3. Si tienen más de 6 cifras, tienen que decir millones en el nombre. Por ejemplo, se les dicta "trescientos mil cinco", la alumna escribe correctamente 300.005 e indica que si agrega más cifras "ya es millón".
- Regla 4. Cuando dice mil o millón se pone punto (coma para el contexto mexicano).
- Regla 5. Entre dos puntos siempre tiene que haber tres cifras, Un número no puede terminar con un punto (coma).

Las autoras concluyen que las tareas donde se plantea escribir números grandes con ceros (como 300,005) pone en juego conocimientos del sistema de numeración que no eran necesarios para resolver otras tareas, -como el manejo de números de 3 o 4 cifras o inclusive, la escritura de números grandes sin cero (como 456,823)-. También indican que, pese a que el sistema de numeración decimal no siempre juega un papel relevante en el último tramo de la escuela, los alumnos presentan conocimientos poco coordinados, las reglas del sistema no son claras y no siempre esas reglas tienen estatus matemático.

A partir de la revisión de los trabajos de Wolman y Ponce y de Centurión y Saiz, podemos concluir que las reglas que han construido sobre la numeración oral y escrita en porciones menores de la serie, no se pueden generalizar automáticamente al resto de los números.

2.4 Marco conceptual de referencia

Esta investigación se ha enriquecido de algunos conceptos desarrollados por Guy Brousseau, en su denominada Teoría de las Situaciones Didácticas. A continuación, presentaremos aquellos conceptos y planteamientos que han constituido herramientas teóricas y metodológicas utilizadas en este estudio.

Dado que el sujeto cuyos conocimientos matemáticos nos interesa indagar está inmerso en una institución escolar, nos resulta necesario recurrir a una teoría didáctica, en este caso, la Teoría de las Situaciones Didácticas es la perspectiva que nos permite abordar a ese sujeto escolarizado ya que su atención se centra en el sujeto alumno y en el conocimiento matemático escolar.

La Teoría de las Situaciones Didácticas surge como una disciplina interesada en delimitar el campo de estudio y los métodos de la didáctica:

> "Fue una didáctica específica, la didáctica de la matemática, la que contribuyó de manera decisiva a delimitar el campo de lo didáctico y explicitar con claridad creciente el objeto y los métodos de estudio que le son propios. Al definir la problemática a estudiar –la comunicación del saber matemático y de las transformaciones que esta comunicación produce en los alumnos y en el saber mismo–, al asumirse como una disciplina orientada a comprender los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje escolar del saber matemático (independientemente de que los estudios realizados dieran lugar o no a la producción de métodos, técnicas o materiales para la enseñanza), la Didáctica de la Matemática realizó un aporte esencial a las otras didácticas específicas y permitió una diferenciación más nítida entre los problemas psicológicos y los didácticos". (Lerner, 2001, p. 275).

Desde esta teoría, existen tres actores en el sistema didáctico: el saber, el alumno y el maestro En la relación didáctica que se establece entre estos actores, el *profesor* organiza intencionalmente un *saber* a enseñar y es el encargado de llevar a cabo el proyecto de enseñanza. El *alumno* toma lo que debe adquirir y que ha sido preestablecido socialmente para él (Chamorro, 2005). La finalidad de la enseñanza es la comunicación de un *saber* constituido o en vías de construcción, de tal manera que la didáctica de la matemática se define como “la ciencia de las condiciones de difusión y apropiación de los conocimientos matemáticos” (Brousseau, 2007, p. 49).

Nociones de medio y situación

Las nociones de *medio* y de *situación* se relacionan profundamente con la definición anterior y son fundamentales dentro de la TSD. Las condiciones de difusión y apropiación del conocimiento exigen de un *medio* con intenciones didácticas; la ausencia de éstas pondría en riesgo la transmisión de los saberes.

El *medio* está conformado por las circunstancias externas que oponen resistencia a la aprehensión cognitiva de los alumnos y que no pueden ser resueltas en las primeras interacciones (lo cual conforma el medio antagonista). De acuerdo con Brousseau (1986), “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje” (p. 11).

En el complejo desarrollo histórico del sistema de numeración se pueden rastrear condiciones del medio que sin duda ofrecieron resistencia a los humanos. Confrontar circunstancias adversas hubo de conducirlos a construir adaptaciones asombrosas: el paso del conteo al cálculo, la representación de los agrupamientos, el principio de base, de posición y el cero.

Por otro lado, una *situación*, definida desde la TSD, es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, conocimiento que es considerado como el recurso del sujeto para conservar el medio en estado favorable (equilibrado). Algunas de las situaciones requieren de conocimientos anteriores y otras ofrecen la posibilidad de que el sujeto construya por sí mismo un nuevo conocimiento (Brousseau, 2007). Según Fregona y Orús "las situaciones, son las herramientas que posee el profesor para crear un espacio de producción y transformación de conocimientos" (2011, p. 59).

Ambas nociones, la de *medio* y la de *situación*, conducen a la posibilidad de propiciar con la enseñanza una génesis artificial de conocimientos, en otras palabras, una producción de aprendizajes mediante situaciones de enseñanza. Brousseau (2007) considera que las situaciones son el conjunto de condiciones que enmarcan la puesta en acción de conocimientos por parte del alumno, pero a la vez, las situaciones funcionan como modelos para estudiar esa acción.

Brousseau propone una tipología de situaciones didácticas en las que el alumno se relaciona de diversas maneras con el conocimiento matemático en juego. Estas son las situaciones de acción, validación, formulación e institucionalización. Si bien para este autor existen estos tipos de situaciones didácticas, en este estudio no se estudiará una situación en el sentido que el autor le confiere. Retomamos para nuestra investigación uno de los planteamientos que subyacen a esa tipología: la importancia de que los alumnos actúen, formulen y validen para que logren profundizar y explicitar sus conocimientos matemáticos. En ese sentido, nos interesa que los alumnos entrevistados actúen sobre el problema que les planteamos y que formulen y validen sus procedimientos de resolución, pues es en esa acción, formulación y validación que procuraremos identificar los conocimientos sobre el SND que ponen en juego.

Concepto de variable didáctica

Hemos revisado nociones fundamentales de la TSD como son el *medio*, las *situaciones* y la *tipología de las situaciones didácticas*. Sin embargo, una descripción de la teoría estaría incompleta sin el abordaje del concepto de Variable didáctica que, por otro lado, nos ha sido de utilidad en esta investigación en el momento de elegir los ítems que conformaron nuestro instrumento de indagación.

En la triada del sistema didáctico alumno-profesor-saber, ¿cuál es el papel del profesor para contribuir en la aculturación matemática del alumno? Él es el representante de la sociedad y de la institución escolar que tiene un proyecto educativo para el alumno. Para contribuir con el avance de los conocimientos de sus alumnos, el maestro gestiona las denominadas *variables didácticas.*

> “Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, la validez, por la complejidad, etc.)” (Briand y Chevalier, 1995, p. 68; en Ruiz, 2005).

En este estudio hemos retomado el concepto de Variable didáctica para estructurar cada uno de nuestros ítems de manera diferenciada, propiciando con ello reflexiones sobre diferentes aspectos del SND.

El papel del error

De la misma manera nos resulta valioso considerar el papel de los errores. En esta perspectiva teórica, los errores forman parte de todo proceso de construcción de conocimiento. Contemplamos que al cuestionar a los alumnos sin duda surgirán obstáculos manifestados a través de errores, que son, desde la TSD, una condición característica, coherente, aunque no correcta, de un conocimiento (Brousseau, 2007). Los errores formarán parte del proceso de aprendizaje y el maestro o, en su caso, el investigador, es quien debe anticipar su aparición.

Algunos de esos errores pueden identificarse de manera anticipada en la realización de las llamadas ingenierías didácticas.

Ingenieria didáctica

La ingeniería didáctica, en su origen, se describe "como metodología de investigación, la *ingeniería didáctica* se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las *realizaciones didácticas* en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p. 36). Los resultados esa ingeniería pueden dar lugar al diseño de situaciones de enseñanza con miras a construir una génesis artificial del conocimiento.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica (en adelante ID) contempla cuatro fases: 1) fase de análisis preliminares, 2) fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, 3) fase de experimentación y 4) fase de análisis posterior y evaluación. Nos centraremos en la descripción de los análisis preliminares por considerar que nuestra investigación podría constituir un aporte para esta fase. Ésta incluye:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva (Artigue, 1995, p. 48).

La ID ha sufrido adaptaciones, y si bien en un principio se le creó con la intención de tener una metodología específica para la TSD, posteriormente las diversas culturas matemáticas han cursado un proceso de apropiación en el cual ahora la ID es aplicada en una diversidad de estudios y con finalidades distintas, en las que no se llevan a cabo, necesariamente, realizaciones didácticas en clase; por ejemplo: en el estudio sobre prácticas docentes o en investigaciones sobre tecnologías de la información (TICS), inclusive en el desarrollo de recursos y la formación de profesores (Artigue, 2011; Perrin Glorian, 2011). No obstante, la diversidad de aplicaciones, Artigue concluye que:

> "La ingeniería didáctica se ha convertido en un objeto de contornos borrosos, a pesar de que hay algunas invariantes que me parece permanecen: sensibilidad epistemológica, que se expresa o no en términos de situación fundamental, importancia acordada a la construcción de las tareas, preocupación por organizar un medio que ofrezca un fuerte potencial adidáctico, una estructura global con un papel clave que desempeña el análisis a priori; y visión interna de los procesos de validación." (pp. 15-16).

Como se mostrará en el capítulo de Metodología, esta investigación procuró apegarse a esas "invariantes" de la ID señaladas por Artigue para diseñar el instrumento de indagación, particularmente para diseñar la tarea matemática que se planteó a los alumnos, y también para determinar las intervenciones que podrían hacerse en el transcurso de las entrevistas. Por otra parte, consideramos que tanto el diseño de la tarea, algunas de las intervenciones de las entrevistas y los resultados obtenidos, pueden aportar elementos a la fase de análisis preliminares de futuras ingenierías didácticas.

Transposición didáctica

Como se mencionó antes, la TSD tiene como objetivos de estudio la génesis artificial de los conocimientos. Esos conocimientos matemáticos disciplinares sufren una adaptación para ser enseñados y aprendidos en clase. A este proceso se le denomina transposición didáctica[10]. En este proceso el "saber sabio" (saber disciplinar) se transforma sucesivamente cuando es enseñado a universitarios, a profesores en formación, a alumnos de cualquier nivel de escolaridad.

¿Cuáles son las razones de estas adaptaciones? Una de las razones es que el destinatario de ese saber no comparte el mismo nivel de desarrollo y comprensión que el productor de ese saber. A pesar de ello, se busca que diversos

[10] Este concepto fue desarrollado por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pero se retoma en este trabajo porque ambas teorías, TAD y TSD, comparten la misma postura sobre el estudio de los fenómenos didácticos.

objetos matemáticos (número, objetos geométricos, álgebra, etc.), entren al espacio escolar con la menor pérdida de significado posible. Esto implica que el conocimiento matemático responda a las necesidades para las cuales fue originado (Chevallard, 1997).

Conservar el sentido del conocimiento matemático demanda una vigilancia epistemológica:

> "…que garantice que las transformaciones sufridas por el saber sabio no lo han convertido en algo irreconocible, matemáticamente hablando, y desprovisto de sentido, viendo qué elementos mínimos es necesario respetar para que las transposiciones realizadas conserven el sentido del concepto y no lo desvirtúen" (Chamorro, 2005, p. 57).

Todo saber escolar representa un ejemplo de transposición didáctica. Se debe considerar que hay transposiciones que conservan el sentido del saber, como transposiciones que no lo hacen. A continuación, presentamos un ejemplo de las adaptaciones donde puede advertirse que el sentido del conocimiento está en una condición de "fragilidad".

Un dispositivo diseñado para explicitar los órdenes del SND y que se usa recurrentemente en las aulas es la tabla de U y D. El trabajo con estas tablas propone que los niños escriban las unidades en la columna con el título de U y las decenas en la columna con la D. Es posible que al alumno se le dé un número cualquiera como 10, 19, 28, 7, 9, etc., y se le pida colocarlo correctamente dentro de la tabla. En el siguiente ejemplo, el saber a enseñar es el valor posicional de unidades y decenas, el 3 vale 3 unidades, y el 1 vale 1 decena.

D	U
1	3

Una investigación ya mencionada llevada a cabo por Lerner (1992) utiliza este tipo de tablas para indagar los conocimientos de niños de primero, tercero y quinto año sobre el valor posicional. Las observaciones de su estudio conducen a cuestionar el uso de estos recursos de enseñanza para enseñar valor posicional. Es probable que, al preguntarles a niños de primer o segundo grado, sobre el valor del 1 en la tabla, respondan que es "uno" y no diez. El problema podría revelarse más contundentemente, cuando se les pida colocar el número 12, con fichas de acuerdo al lugar que les correspondería en la tabla de la siguiente manera:

D	U
10	2

D	U
	12

Las respuestas probables son que coloqué 12 fichas en la columna de la U, argumentando que "son unos"; o que coloque 10 fichas en la D porque son las que valen 10[11]. En ambas respuestas se puede detectar una ruptura entre lo que se quiere enseñar y lo que los niños aprenden, propiciada probablemente, por una transposición didáctica descuidada.

Un ejemplo de transposición didáctica donde se preserva el sentido del conocimiento lo proporciona la siguiente actividad:

Operación	El resultado va a empezar con	Resultado con la calculadora
53 + 22 =		
55 + 27		

El objetivo es trabajar la reagrupación decimal (Lerner, 2005). Se les pide a los alumnos que anticipen con cuál número comenzara el resultado de las operaciones: se les pregunta a los alumnos si 53 + 22 dará un setenta o un ochenta. La misma pregunta se efectúa con 55 + 27, donde el resultado en efecto, comenzará

[11] Ejemplo adaptado de los resultados de investigación de Lerner (1992).

con ochenta. En esta actividad el sentido de los grupos (las decenas de 53 y 22 y de 55 y 27) deben preservarse para anticipar el resultado exitoso. Además, la actividad conserva la necesidad de apoyarse en conocimientos sobre el valor posicional de cada cifra.

El concepto de transposición didáctica resulta valioso en este trabajo pues nos permite seleccionar un instrumento de indagación donde se conserve el sentido del conocimiento matemático de nuestro interés.

En este capítulo fueron expuestos los antecedentes de estudios cercanos al nuestro, y el marco conceptual de referencia en el cual se basa nuestro trabajo. A continuación, se presentará la metodología elegida para acanzar nuestro objetivo de investigación.

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA

El propósito de esta investigación es identificar los conocimientos sobre valor posicional que ponen de manifiesto alumnos de sexto grado de primaria al resolver tareas de suma. Para ello hemos elegido un diseño de investigación cualitativo de alcance exploratorio.

3.1 Muestra

La muestra del estudio estuvo conformada por diez alumnos: ocho niñas y dos niños, de 11.9 años de edad en promedio. Todos ellos provienen de una escuela pública matutina de un municipio conurbado de la ciudad de Querétaro. Los participantes se encontraban cursando el sexto grado de primaria al ser entrevistados.

El tipo de muestreo que se llevó a cabo fue no probabilístico; los participantes de la investigación fueron elegidos por conveniencia; esto es, participaron los diez primeros alumnos de desempeño escolar “regular” o “bueno”[12], que accedieron a ser entrevistados Se decidió entrevistar a alumnos con estas características para evitar sesgos debidos a problemas de aprendizaje que pudieran obstaculizar la comprensión cabal de la tarea matemática. Los alumnos fueron entrevistados en la biblioteca de la escuela, en horarios de clase.

[12] La muestra provino de dos grupos, sexto A y sexto B. Los alumnos fueron invitados a participar a través de las maestras de grupo, quienes según su criterio extendieron la invitación a alumnos de desempeño regular, bueno o muy bueno.

3.2 Instrumento de indagación

Se diseñó un instrumento que constó de cinco ítems en los que solicitamos a los alumnos la resolución de sumas horizontales. A este conjunto de ítems lo hemos denominado “Tarea de sumas horizontales”[13] (Figura 2).

Sumas horizontales
Indicaciones: te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo vas haciendo. Si en algún momento necesitas comprobar un cálculo, te puedes apoyar usando la calculadora. 5000 + 300 + 60 + 4 = 2000 + 80 + 2 = 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 = 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 = 9000 + 1700 + 800 + 5 =

Figura 2. Formato del instrumento de indagación usado en la entrevista clínica con los alumnos**.**

Esta disposición de los sumandos es útil en el estudio del valor posicional dado que implica reflexionar sobre el valor de las cifras en función del lugar que ocupan (Broitman, et al., 2011).

[13] La selección de los ítems de la tarea que denominamos “sumas horizontales” está inspirada en el trabajo de Lerner (2005) y en las sugerencias de la investigadora Silvia García.

Dicha tarea se planteó a los alumnos a través de una entrevista clínica. Este tipo de entrevista tiene como característica la formulación de:

> "preguntas básicas comunes para todos los sujetos, que se van ampliando y completando de acuerdo a las respuestas de los sujetos para poder interpretar los mejor posible lo que van diciendo. Las respuestas van guiando el curso del interrogatorio, pero se vuelve a los temas esenciales establecidos inicialmente" (Delval, 2001).

La esencia de este método es la intervención repetida del investigador mediante preguntas, contra ejemplos y supuestos efectuados ante las acciones y explicaciones de los niños. El objetivo principal es encontrar el significado de dichos comportamientos y reconstruir el modelo mental que guía las acciones del sujeto ante la tarea planteada en la investigación.

Procedimiento

Los cinco ítems de la tarea fueron presentados a los alumnos en una hoja de tamaño carta. Se les proporcionó lápiz, goma y una calculadora. La consigna fue leída en voz alta por la investigadora: "Te voy a presentar unas operaciones, quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo vas haciendo. Si en algún momento necesitas comprobar algún cálculo, te puedes apoyar usando la calculadora". A continuación, se le solicitaba al alumno leer en voz alta las operaciones, luego se le pedía resolver la suma y, al finalizar su procedimiento de resolución, la investigadora procedía con el interrogatorio sobre los procedimientos, argumentos, justificaciones y errores. Las preguntas específicas para cada ítem se presentarán en el apartado siguiente.

Cabe señalar que, si bien no limitamos a los alumnos a usar cualquier método que ellos eligieran para solucionar el cálculo, proponíamos que mostraran otras formas de solucionar los ítems, además de la técnica del algortimo vertical.

El instrumento de indagación fue aplicado de manera individual en una sola sesión, con duración promedio de 25 minutos. Las entrevistas fueron videograbadas y se recolectaron las producciones escritas de los participantes para su posterior transcripción y análisis.

Descripción de la Tarea de sumas horizontales

El instrumento de indagación estuvo conformado por cinco operaciones horizontales, cuyos sumandos son números nudo (terminados con cero). Las variables didácticas incorporadas en la estructura de los ítems fueron:

Orden de presentación de los sumandos. Los ítems 1, 2 y 5 se presentaron en orden decreciente, del sumando de orden mayor al sumando de orden menor, por ejemplo: el ítem uno tiene unidades de millar (5000), centenas (300), decenas (60) y unidades (4). Por el contrario, los ítems 3 y 4 no se presentaron en orden decreciente; en el caso del ítem 4 se presentan centenas (600), millares (5000), unidades (7), centenas (400) y decenas (40).

Ausencia de algún agrupamiento. En los ítems 2 y 5 falta un sumando de algún agrupamiento; en el caso del 2 faltan las centenas (2000 + 80 + 2); y en el ítem 5 faltan las decenas (9000 + 1700 + 800 + 5).

Cantidad de sumandos del mismo agrupamiento (decenas o centenas). Esta característica implica que el ítem tenga más de un sumando de un mismo orden y se aplica en los ítems 3, 4 y 5. Por ejemplo, en el caso del ítem 3 hay dos sumandos del orden de las decenas: (300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =). Este tipo de ítems implica transformación de órdenes.

El análisis a priori de las variables didácticas, nos permiten indagar diversos procedimientos y conocimientos de los niños al resolver la tarea. A continuación, se describen las variables de cada operación, las respuestas esperadas de los alumnos y el protocolo de preguntas básicas contempladas para cada ítem.

Ítem 1: 5000 + 300 + 60 + 4 = 5364

Este ítem se caracteriza por una presentación de sumandos en orden decreciente de millares a unidades. Además, en este caso no hubo agrupamientos repetidos, cada sumando corresponde a un agrupamiento decimal: millares, centenas, decenas, unidades.

El objetivo de este ítem fue indagar los conocimientos de los alumnos sobre los órdenes del SND, la escritura posicional y sobre el apoyo que puede brindar el nombre de los numerales para conformar una cantidad. Por ejemplo, es posible que los alumnos indiquen que el resultado de este ítem puede conformarse a partir de decir los nombres de los sumandos: "cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

Por otro lado, las características de este ítem (sumandos en orden decreciente, números nudo) nos permiten anticipar otros procedimientos de resolución posibles, como el cálculo mental.

Para este ítem se contemplaron las siguientes preguntas en el protocolo de entrevista: "¿qué resultado obtuviste?, ¿en qué te fijaste para resolver tu cálculo?" Si el alumno hacía alusión a unidades, decenas, centenas, etc., (o a cualquier otro nombre no convencional para referirse a las agrupaciones), se preguntaría: "¿a qué le llamas tú unidades, decenas, centenas…?". En este ítem como en los siguientes, las respuestas de los alumnos podían dar pie a diversas interrogaciones por parte de la investigadora.

En caso de que los alumnos cometan algún error en el cálculo o en la escritura de los resultados, y no hayan sido capaces de darse cuenta por sí mismos, se les invita a comprobar el resultado con la calculadora. A continuación, se propiciarían intercambios sobre las causas que originaron el error, según los alumnos. Este tipo de interrogatorio sobre los errores se aplica para todos los ítems de la tarea.

Ítem2: 2000 + 80 + 2= 2082

En este ítem los sumandos se presentan en orden decreciente, tal como en el ítem 1; sin embargo, en este caso no se presenta ningún agrupamiento de centenas, lo cual determinará la escritura de un cero en el resultado.

El objetivo en este ítem fue indagar lo que representa para los alumnos el cero del sistema decimal y las reglas de la escritura posicional cuando el número lleva cero. En cuanto a las respuestas de los alumnos, anticipamos que podrían recurrir al cálculo mental para resolver la suma. Contemplamos, por otro lado, que escribir el cero en el resultado podría representarles algún desafío.

Las preguntas que se plantearon una vez que los niños resolvieron el ítem fueron: "¿cuál fue tu resultado?, ¿puedes leerlo en voz alta?, ¿en qué te fijaste para resolverlo así?, ¿cómo decides escribir el cero en ese lugar?, ¿qué significa el cero?". En caso de que algún alumno cometiera algún error en la escritura del resultado (como sería omitir el cero o cambiarlo de lugar), se le invitaba a explicar de dónde cree que pudo haber surgido ese error.

Ítem 3: 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 = 4423

Las características de este ítem son las siguientes: la presentación de los sumandos no sigue el orden decreciente; hay dos sumandos que corresponden a dos agrupaciones de decenas (80 y 40) que, al juntarse, se transforman a centenas. Las particularidades de este ítem permiten indagar sobre los conocimientos de los órdenes (o agrupaciones) del sistema decimal y, de manera muy especial, sobre la operatividad o proceso de transformación de órdenes (reagrupación decimal).

Anticipamos que los procedimientos de solución por parte de los alumnos podrían ser el cálculo mental, apoyado de algunas anotaciones de resultados parciales. También se podría presentar el reordenamiento de los sumandos (ordenarlos de manera decreciente); además, los niños podrían recurrir a la propiedad asociativa de la suma y a la descomposición decimal, para operar con mayor facilidad.

La indagación por medio de la entrevista para este ítem gira en torno a lo que los niños saben de los órdenes y a las razones que subyacen a la trasformación de órdenes. Para ello se consideraron las siguientes preguntas: “¿Qué resultado obtuviste?, ¿lo puedes escribir?, ¿cómo fuiste haciendo el cálculo?” En este punto la investigadora estaba atenta a identificar los pasos de la operación, de manera que si el alumno sumaba primero las decenas se le invitaba a justificar su decisión: “¿Por qué decidiste sumar primero las decenas (o el nombre que el entrevistado este dando a los órdenes)?” Para profundizar sobre la transformación decimal se le planteó a los alumnos el siguiente cuestionamiento: “En el resultado final no se ven las decenas (o el nombre que el alumno use para referirse a las agrupaciones), pero en la suma sí hay ¿qué piensas de eso?”

Ítem 4: 600 + 4000 + 7 + 400 + 40 = 6047

En esta operación los sumandos se presentan en un orden diferente al decreciente. Al igual que el ítem 3, hay dos agrupaciones iguales, en este caso son centenas (600 y 400). Una vez efectuada la agrupación de centenas en millares, no quedan agrupaciones de centenas restantes, por lo que se representará esa ausencia con un cero. El objetivo de este ítem es indagar los conocimientos de los niños acerca de la agrupación decimal (transformación de órdenes). Además, se busca conocer cómo relacionan la ausencia de alguna agrupación (después de transformar órdenes) con la escritura del cero en el resultado.

Al igual que en el ítem previo, consideramos que los alumnos recurrirían a diferentes recursos de cálculo mental para resolverlo. La exigencia de memorizar más cantidades que en las tres operaciones anteriores podría suponer un reto para los alumnos, por lo que éstos podrían recurrir al uso del algoritmo de la suma en columnas como procedimiento de solución.

En este momento de la entrevista se formularon las siguientes preguntas: “¿Me puedes decir el resultado?, ¿lo puedes escribir?, ¿cómo fuiste haciendo el cálculo?, ¿por qué decidiste sumar cierta cantidad con cierta cantidad orden (depende de los sumandos que el alumno haya sumado primero)?”. Además, se presentó un contraejemplo, para conocer si los argumentos de los niños se vinculan con las reglas de funcionamiento del SND.

Dicho contraejemplo presenta al alumno una respuesta incorrecta proveniente de la aplicación de un procedimiento de resolución erróneo. Éste consiste en colocar sólo las cifras diferentes de cero de cada sumando en la operación 600 + 4000 + 7 + 400 + 40 =, para formar el resultado 64744. La manera de plantearlo a los alumnos fue la siguiente: “Un niño de otra escuela me dijo que el resultado de esta operación era 65744 ¿qué piensas de su respuesta?, ¿crees que es correcta o incorrecta? ¿cuál sería el error del niño que respondió 65744?”. Una vez que el alumno exprese sus ideas, se pregunta: ¿cómo le explicarías la manera de hacerlo?, ¿cómo le explicarías un procedimiento para que no se equivoque?, ¿por qué no se puede resolver así?” Lo anterior tiene como objetivo invitar al alumno a que argumente sobre los procedimientos y las justificaciones aplicables a la resolución exitosa de este tipo de ítems.

Ítem 5: 9000+ 1700 + 800 + 5 = 11505

La estructura de este ítem está determinada por una presentación de sumandos en orden decreciente. No se presentan decenas agrupadas, por lo que el resultado llevará cero en su escritura. Esta operación es más compleja que las anteriores puesto que implica llevar a cabo más de una trasformación de órdenes: se tienen que agrupar centenas y luego agrupar millares. Como característica adicional, uno de los sumandos se presenta agrupado (1700). El objetivo perseguido con este ítem es profundizar en los conocimientos sobre el cero, la escritura posicional y la reagrupación decimal.

La complejidad de este ítem, mayor respecto a los previos, podría conducir a los alumnos a apoyarse de la calculadora para resolver la operación o, como se mencionó, intentar escribir el algoritmo en columnas y resolver por esta vía. También podrían usar cálculo mental con anotaciones parciales de los resultados.

Las preguntas estipuladas en el protocolo de entrevista para este ítem fueron: ¿Me puedes decir el resultado?, ¿lo puedes escribir?, ¿cómo fuiste haciendo el cálculo?, ¿por qué decidiste sumar esta cantidad con esta otra? (depende de los sumandos que el alumno haya sumado primero). Para conocer más a detalle sus ideas sobre posicionalidad y el cero se plantearon las siguientes cuestiones: ¿Cómo decides dónde escribir el cero?, ¿qué significa ese cero que escribiste? Para indagar sobre la agrupación decimal se propiciaron los siguientes intercambios: "en la operación yo veo un 800, pero en tu resultado no está, ¿me puedes explicar qué pasó con él?" En caso de que cometan algún error, invitarlos a hacer la suma en la calculadora y discutir en torno a ello: "¿qué piensas de tu resultado?, ¿por qué crees que no te dio como en la calculadora?, ¿quisieras intentarlo de otra forma?" Al término de este ítem, se concluía la entrevista.

Una vez que se hizo la transcripción de las entrevistas[14], se procedió a identificar los procedimientos por los cuales los alumnos resolvían el ítem. Simultáneamente se identificaron los conocimientos explícitos o implícitos sobre sistema de numeración a los que hacían referencia cuando se les preguntaba sobre la justificación de sus procedimientos. En el siguiente capítulo se descibirán a detalle las categorías en las cuales se organizaron las respuestas de los alumnos para su análisis.

[14] En el Anexo A se presenta la transcripción de las entrevistas.

3.3 Consideraciones éticas

Para salvaguardar la integridad de los participantes de esta investigación nos apegamos a los siguientes principios éticos.

— Principio de privacidad y confidencialidad. En las transcripciones de las entrevistas se usaron códigos en lugar de los nombres de los alumnos para mantener su anonimato. En las videograbaciones de las entrevistas no fueron tomados los rostros de los participantes.

— Consentimiento informado[15]. Se les envío a los padres de los posibles participantes una carta de invitación con los detalles relevantes sobre el proyecto de investigación. Los padres y alumnos, a su vez, enviaron el consentimiento firmado donde asentaron su permiso para que sus hijos fueran entrevistados. La participación de los alumnos fue totalmente voluntaria y se respetó en todo momento el deseo de los niños a ser entrevistados. Aquellos alumnos que contaron con el permiso de sus padres, pero que en el momento de la entrevista decidieron no continuar, fueron respetados en su decisión.

— Principio de no maleficencia. En todo momento se actuó con cuidado de no infligir ningún daño físico, psicológico o moral a los participantes. Así mismo, se respetó la opinión de cada entrevistado, su estado de ánimo y su disposición de tiempo.

[15] Ver Anexo B.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS Y DISCUSIONES

4.1 Resultados generales

Este trabajo de investigación ha tenido como objetivo identificar qué conocimientos ponen de manifiesto alumnos de sexto grado de primaria al resolver problemas que involucran el valor posicional.

El análisis de las entrevistas nos condujo a establecer dos grandes categorías:

a) Los procedimientos de resolución de los ítems
b) Los conocimientos sobre el sistema de numeración que se manifestaron al resolver y explicar las operaciones

Ambas categorías están relacionadas, pues los conocimientos sobre el funcionamiento del SND se ponen de manifiesto tanto en los procedimientos de resolución como en la explicación y/o justificación que los alumnos dieron de esos procedimientos. Sin embargo, presentamos esta división con fines de análisis. En los siguientes párrafos se ofrecerá un panorama general de las respuestas; para ello estas respuestas se organizaron en categorías y se identificó la frecuencia de cada una de ellas.

En primer lugar, tenemos la frecuencia de respuestas correctas de los cinco ítems que comprenden nuestra tarea de sumas horizontales.

La Tabla 4 indica que el ítem 1 fue el más fácil de resolver a juzgar por la frecuencia de respuestas correctas. El ítem 2 se resolvió correctamente en su totalidad hasta el segundo intento, pues la escritura del cero en el resultado de 2082 se constituyó en una dificultad para cuatro alumnos. Los ítems 3 y 4 generaron dificultades para escribir el resultado debido a las transformaciones entre órdenes. El ítem 5 cuya estructura implica dos transformaciones de órdenes, obtuvo sólo ocho respuestas correctas. La tendencia de la tabla en general indica que la tarea se tornó más compleja hacía los últimos ítems. El asterisco en el ítem 3 indica que tuvimos pérdida de una respuesta en ese ítem.

Tabla 4

Número de respuestas correctas e incorrectas en cada ítem

	Ítem 1	**Ítem 2**	**Ítem 3***	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Total**
Respuestas correctas en el primer intento	10 (100%)	6 (60%)	8 (88%)	7 (70%)	6 (60%)	37 (75.5%)
Respuestas correctas en el segundo intento		4 (40%)		2 (20%)	2 (20%)	8 (16.3%)
Respuestas incorrectas			1 (12%)	1 (10%)	2 (10%)	4 (8.1%)
Total	10	10	9	10	10	49 (100%)

En la Tabla 5 se muestra la frecuencia de respuestas para la categoría Procedimientos de resolución. Cabe acalarar que un mismo alumno usó más de una forma de resolución, por ello el número de respuestas por ítem excede el número de alumnos. Las tres subcategorías de resolución que se presentaron fueron el cálculo mental, el uso del algorirmo en columnas y un procedimiento de composición de resultado (implica escribir las cifras diferentes del cero de cada sumando, sobre los ceros del sumando mayor de la operación). Tanto el cálculo mental como el algortimo en columnas tienen, a su vez, “tipos” que se detallan en el apartado 5.2.

Tabla 5
Frecuencia de respuestas dentro de la categoría Procedimientos de resolución

Subcategoría	ítem 1	ítem 2	ítem 3	ítem 4	ítem 5	Total
Componer un resultado	4	3	1	1	0	9
Estrategias de Cálculo mental	6	5	9	10	10	40
Algoritmo en columnas	2	3	2	0	3	10

La subcategoría Componer un resultado (Tabla 5) se aplicó en los dos ítems donde este procedimiento es adecuado (ítem 1 y 2). Por otro lado, se presentó una alta frecuencia de uso de estrategias de cálculo mental al resolver los ítems 3, 4 y 5. El uso del algortimo en columnas se manifestó acompañando a los otros dos procedimientos.

En cuanto a la categoría Conocimientos sobre componentes y funcionamiento del SND, se establecieron tres subcategorías:

- Uso y significado del cero
  - Cero como indicador de cómo sumar
  - Cero como representación de ausencia
  - Cero como diferenciador de cantidades
  - Cero como marca de posición
- Órdenes del SND y su transformación
  - Identificación de órdenes
  - Transformación de órdenes
- Uso y significado de la marca gráfica coma

La Tabla 6 presenta las frecuencias de respuestas analizadas sobre las subcategorías de Uso y sgnificados del cero. Notamos que el cero como representación de ausencia fue una de las respuestas más frecuentes (13). Por otro lado, considerando que en este estudio nos propusimos indagar de manera especial conocimientos sobre valor posicional, cobra relevancia que la subcategoría del cero como marca de posición haya tenido 11 respuestas.

Tabla 6

Frecuencia de respuestas dentro de la categoría Conocimientos sobre componentes y funcionamiento del SND: cero

Subcategoría	Tipo	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem4	Ítem 5	Total
Usos y significado del cero	Indicador de cómo sumar	2		1	2		5
	Representación de ausencia		6		4	3	13
	Diferenciador de cantidades		3		1	2	6
	Marca de posición	1	5		1	4	11
Total		3	14	1	8	9	35

La Tabla 7 muestra los conocimientos respecto a los órdenes del sistema de numeración y su transformación (o agrupamiento decimal). La tabla se centra en la categoría de transformación de órdenes y muestra la frecuencia de respuestas sobre agrupación decimal obtenidas en los ítems 3 y 4. Para solucionar estas operaciones los alumnos tenían que efectuar transformaciones entre órdenes, de tal manera que fueron los ítems indicados para indagar sobre sus conocimientos de la agrupación decimal.

Tabla 7

Frecuencia de respuestas dentro de la categoría Conocimientos sobre componentes y funcionamiento del SND: órdenes

Subcategoría	Ítem 3	Ítem 4	Total
Transformación de órdenes	6	7	13

Otros conocimientos que se manifestaron durante la entrevista fueron referentes a los usos y significado de la coma. La Tabla 8 muestra la frecuencia de aparición de esta categoría y contempla a aquellos alumnos que usaron la coma sin hacer una alusión explícita a su significado, y a aquellos que, además de usar la coma, dieron explicaciones sobre su significado.

Tabla 8

Frecuencia de respuestas dentro de la categoría Conocimientos sobre componentes y funcionamiento del SND: coma

Subcategoría	Tipo	Ítem 1	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Total
Uso y significado de la coma	Uso de la coma	1	1	2	2	6
	Significado de la coma	1	1	1	2	5

En el siguiente apartado se presentará un análisis detallado de las respuestas. Se exponen las más representativas de los procedimientos de resolución y de los conocimientos vinculados a ellos. Cabe aclarar que las producciones y explicaciones de un mismo entrevistado pueden aparecer en varias ocasiones para ilustrar procedimientos y conocimientos destacables en el análisis.

4.2 Análisis de resultados de cada ítem

4.2.1 Resultados del ítem 1

El ítem 1 se caracteriza por presentar los sumados en orden decreciente; esto es, primero las unidades de millar, centenas, decenas y unidades simples.

$$5000 + 300 + 60 + 4 =$$

Se esperaba que los alumnos se apoyaran en la denominación oral de los números para componer un resultado. Por otro lado, esta presentación de sumandos podría favorecer algunas reflexiones en torno a la escritura posicional y a los órdenes del sistema de numeración.

En la Figura 3 se muestran dos tipos de procedimientos de solución para el ítem 1: a) componer un resultado, b) calcular un resultado. Respecto a los conocimientos sobre el sistema de numeración a los que hicieron alusión los alumnos, todos ellos fueron referentes al uso y significado del cero.

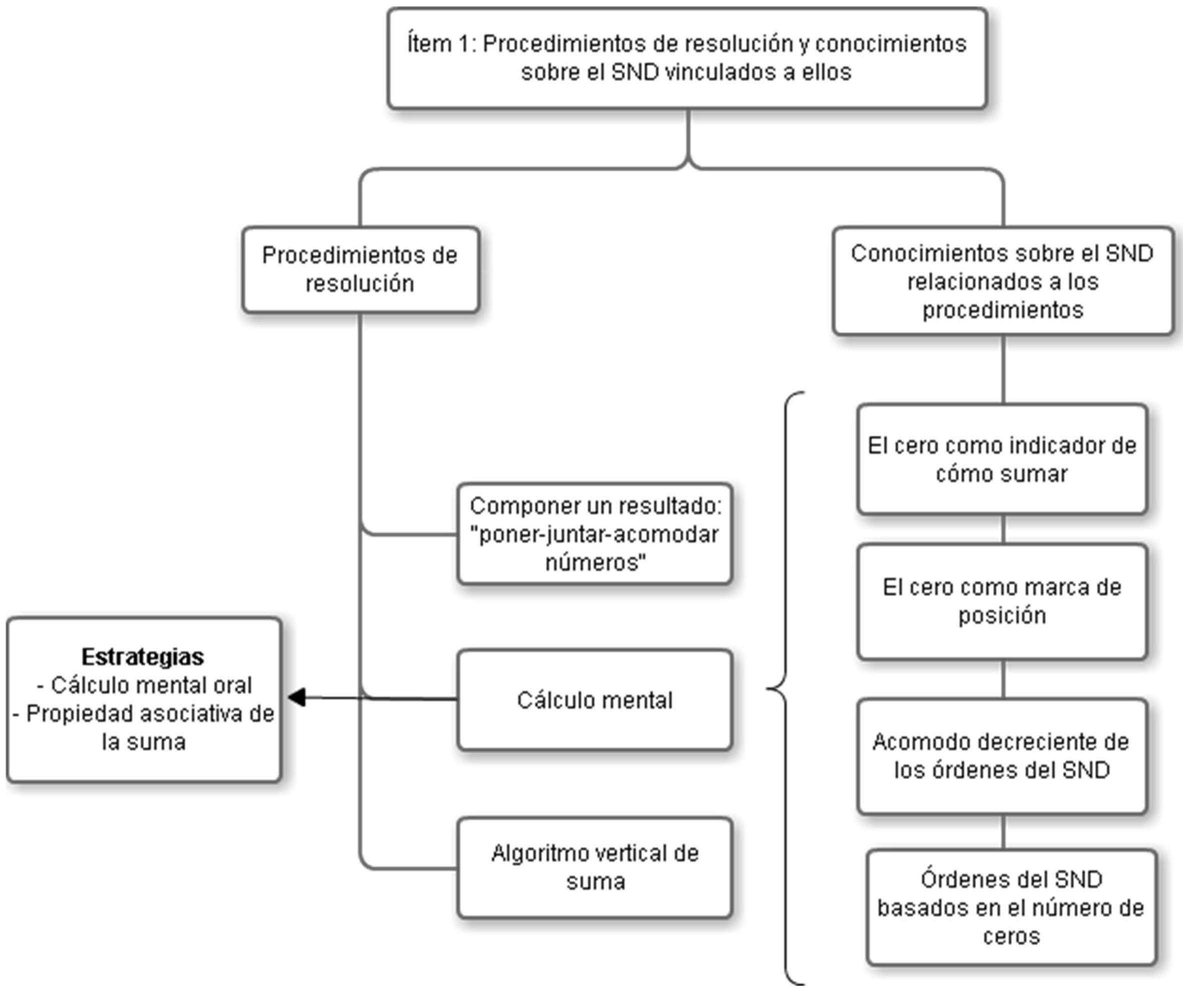


Figura 3. Procedimientos de cálculo y conocimientos sobre el SND utilizados en la resolución de la operación *5000+ 300 + 60 + 4 =*

4.2.1.1 Procedimientos de resolución

En esta la operación los alumnos recurrieron a tres tipos de procedimientos de resolución: 1) componer el resultado, 2) cálculo mental y 3) cálculo con algoritmo vertical. Antes de adentrarnos en la explicación de cada uno de ellos, resulta valioso mostrar que en cinco respuestas los alumnos hicieron una distinción entre los procedimientos de componer el resultado (juntando, poniendo o acomodando números) y sumar para obtener el resultado (con cálculo mental o con algortimo vertical). El alumno Ao7 explone lo siguiente:

E- ¿Aquí (señalando la operación 5000 + 300 + 60 + 4 =) hiciste algún cálculo o ya ni siquiera hiciste algún cálculo?

Ao7[16]- Hice uno para verificar qué resultado iba a ser, pero sumar, así de ir sumando uno por uno, no.

E- ¿Entonces cómo le hiciste más bien?

Ao7- Lo que ya le había dicho, de que iba juntando los números o sea tres... (Ao7 se refiere al tres de 300 en 5000 + 300 + 60 + 4 =) de izquierda a derecha, voy: el tres en el primer cero (en el primer cero de 5000), luego el seis, luego el cuatro. Cinco mil trescientos sesenta y cuatro. (PC, p. 37) [17].

En la explicación de Ao7, éste distingue que no ha ido "sumando de uno por uno", sino que ha recurrido a otro procedimiento de juntar los números. A continuación, se analizarán las respuestas sobre los tres procedimientos citados.

Tipo 1. Componer el resultado: "Poner-juntar-acomodar números"-

Una manera de resolver este ítem es fijarse en el orden de los sumandos (decreciente de unidades de millar a unidades simples) y acomodar los números diferentes de cero de cada orden poniéndolos sobre los ceros del sumando mayor. Lo anterior es posible porque en esta operación no hay ninguna transformación entre unidades de cada orden. De hecho, los alumnos usaron expresiones como "poner", "juntar" y "acomodar" los números para explicar cómo habían obtenido el resultado. Para llegar a la solución los alumnos acomodaron sobre el sumando mayor (en este caso el 5000) las cifras diferentes de cero de los demás sumandos: 3 centenas, 6 decenas y 4 unidades. Se presentaron cuatro respuestas donde se recurrió a esta vía de solución (facilitada por las características del ítem). Los alumnos que dieron esas respuestas expresaron que el ítem se puede solucionar

[16] Como medida para mantener el anonimato de los entrevistados, en este trabajo se utilizará un código de referencia para identificar a cada alumno participante, consistente en la referencia al género Ao-alumno, Aa-alumna y al número de alumno (del 1 al 10).

[17] Al final de cada registro, el lector encontrá entre paréntesis la clave utilizada en la investigación para referir al documento original donde se organizaron las respuetas transcritas.

como una suma o sólo poniendo números encima de los ceros. Aa6 ofrece una explicación sobre este procedimiento.

E- ¿Qué dice tu resultado?

Aa6- Cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- ¿En qué es lo que te estás fijando para hacer tu suma?

Aa6- En los ceros, que puedes pasar esto (refiriéndose al 3 de 300, al 6 de 60 y al 4 de la adición 5000 + 300 + 60 + =); como son tres números aquí (refiriéndose a los tres ceros del 5000), los puedes pasar acá (Aa6 indica que en 5000 hay tres ceros, lugar que puede ocupar la cantidad de 364) y nada más sumas esto, y ya se hace el resultado no necesariamente puedes también calcular. Bueno o sea de las sumas, sumando. (PC, p. 27).

La alumna procede "pasando" los primeros números de cada sumando a los ceros del 5000. Al final de su explicación da cuenta de que no necesariamente se calcula o se suma para llegar al resultado. Sin embargo, está poniendo mucha atención a los órdenes del sistema de numeración -por lo que se fija en los ceros- y al acomodo de éstos en forma decreciente.

Es importante mencionar que esta forma de calcular no fue considerada por estos niños como una suma en el sentido de procedimiento donde se lleva a cabo reordenamiento de sumandos y transformación entre órdenes. Los alumnos se refirieron a este significado de sumar como "suma suma".

Tipo 2. Cálculo mental

El cálculo mental es un medio de resolución de cálculos complejo, que se manifiesta a través del uso de diversas estrategias. En este estudio identificamos una amplia gama de ellas: cálculo mental oral, uso de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, redondeo, anotación de resultados parciales, entre otras que se irán exponiendo al largo de este capítulo. En el ítem 1, las estrategias de cálculo mental que se distinguieron fueron: cálculo mental oral (dos respuestas) y el apoyo en la propiedad asociativa de la suma (una respuesta).

El cálculo mental oral se caracteriza por la expresión en voz alta de los números y de los pasos del cálculo; en otras palabras, los alumnos van diciendo en voz alta cómo hacen la suma, tal como se muestra en el siguiente fragmento.

(Ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =)

E- ¿Qué números tenemos ahí?

Aa10- Cinco mil, trescientos, sesenta y cuatro.

E- ¿Qué resultado nos da?

Aa10- Nos da quinientos... digo perdón, nos da cinco mil más trescientos, son cinco mil trecientos, si le sumamos sesenta son cinco mil trescientos sesenta, más cuatro, cinco mil trescientos sesenta y cuatro. (PC, p. 47).

En este caso, la alumna Aa10 al estar utilizando el cálculo mental oral puede inclusive corregir un error en la denominación del número 5000 al que nombra “quinientos”.

En lo que se refiere al uso de la propiedad asociativa de la suma, ésta se presentó en numerosas ocasiones a lo largo de las entrevistas. Dicha propiedad implica que cuando existen tres o más sumandos en una operación, se pueden asociar los sumandos de diversas maneras sin alterar el resultado de la operación. Llama la atención que, a pesar de la facilidad del cálculo de este ítem, uno de los alumnos la haya usado para sumar pares de números:

Ao5- Sumé primero éstos dos números (Ao5 se refiere al 5000 + 300 del ítem 5000 + 300 + 60 + 4) y luego ya éste con éste lo sumé (señala el 60 y el 4 de la operación del ítem). (PC, p. 21).

La propiedad asociativa de la suma fue un recurso ampliamente aplicado, de manera implícita por los alumnos, como se verá en las respuestas a ítems posteriores.

Tipo 3. Uso del algoritmo vertical

Otra de las vías de solución para el ítem 1 fue el algoritmo en columnas. Se debe mencionar que no estaba entre nuestros intereses indagar el uso de este tipo de algoritmo, ni las explicaciones que pudieran dar los alumnos sobre su funcionamiento. Sin embargo, en el transcurso del análisis se fueron detectando regularidades en las razones que dan los alumnos para recurrir a esta técnica. De esta manera, se decidió incluir estos resultados como parte del análisis y los datos a discutir.

En el ítem 1 se registraron dos respuestas en las que se recurre a esta técnica. Sin embargo, su uso continuó a los demás. El apoyo en el algoritmo vertical se presentó con dos propósitos diferentes: como primera vía de solución o como técnica segura, confiable para verificar el cálculo. Estos usos son más evidentes a partir del ítem 2 y en los subsecuentes, por lo que los ejemplos de respuesta se exponen en ese apartado.

En el caso del ítem 1, dos alumnas escribieron el algoritmo vertical, pero lo hicieron una vez que ya habían hecho el cálculo mental o habían hecho cálculo mental oralizado. Es necesario destacar que el uso del algoritmo vertical convivió con el cálculo mental.

4.2.1.2 Conocimientos sobre los componentes y el funcionamiento del Sistema de numeración decimal

El interés de esta investigación está en los procedimientos de resolución de los alumnos y en los conocimientos que ponen de manifiesto cuando se les pregunta sobre las razones de sus formas de proceder. En el análisis de respuestas pudimos identificar argumentos relacionados con el cero, su uso y funciones. Fueron cuatro tipos de respuestas en las que dividimos dichos conocimientos.

— El cero como indicador de cómo sumar. Los alumnos hacen uso de la información de los ceros de cada sumando, para elegir un procedimiento de cálculo

— El cero como diferenciador de cantidades. Los alumnos indican que la escritura del cero en un determinado lugar de un numeral, lo diferencia de otro. Ej. El cero de 108 lo diferencia de 180 o de 18.
— El cero como representación de ausencia de unidades de algún orden. Los alumnos argumentan que el cero se escribe para indicar que no se tiene alguno de los órdenes en el resultado del cálculo.
— El cero como marca de posición. Los alumnos revelan que el cero marca la posición que puede ser ocupada por algún orden.

De las cuatro subcategorías de conocimiento expuestas, los alumnos al resolver la operación 1 dieron explicaciones del primer tipo (dos respuestas) y del cuarto tipo (una respuesta). Las respuestas del cuarto tipo son relevantes puesto que revelan la relación directa entre la escritura del cero y el carácter posicional del SND, en el cual cada cifra tiene valor en función de la posición que ocupa en la cadena de números. A continuación, presentaremos algunos ejemplos.

Tipo 1. El cero como indicador de cómo sumar

En las respuestas de los alumnos Aa6 y Ao7, los ceros les indicaron “cómo sumar”; es decir, poner atención en los ceros que hay en 5000, en 300, y en 60 los llevó a observar el orden decreciente de los sumandos. Lo anterior dio pie a que compusieran el resultado sin realizar necesariamente el cálculo. Ao7 lo expresa como sigue.

Ao7- (Escribe la respuesta 5364)

E- ¿Cómo te fijaste para empezarlo a resolver?

Ao7- Pues primero que nada me fijo en los ceros, porque es la cantidad que se podría decir que representan... por ejemplo en cinco mil, cinco mil tiene tres ceros y un cinco (ríe)…

E- Sí, cinco mil tiene tres ceros y un cinco... dices que te fijas en los ceros para saber qué cantidad representan ¿y qué decides cuando ves los ceros?

Ao7- Se podría decir que voy colocando los números conforme a la cantidad y a su orden.

E- ¿Qué orden tú notas?

Ao7- Que empieza de miles a cientos. (C, p.2).

Es notable que el uso de los ceros como indicador de cómo sumar, hace alusión a conocimientos sobre los agrupamientos decimales, el orden decreciente y la posicionalidad. En esta respuesta destaca que los ceros le ofrecen pistas al alumno para determinar la posición de las unidades de cada agrupamiento en el resultado.

Tipo 2. El cero como marca de una posición

La alumna Aa8 expresa que el cero del 60 (en el ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =) no vale y en su lugar se pone algo que sí vale, como el cuatro (el último sumando).

E- ¿Qué tenemos ahí? (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =)

Aa8- Cinco mil, más trescientos, más sesenta más cuatro. Entonces si voy a resolverlo empiezo de la derecha a la izquierda...

E- De la derecha a la izquierda... A ver.

Aa8- Primero es el cuatro, aquí (Aa8 se refiere ahora al 60 en la operación 5000 + 300 + 60 + 4 =) el cero como no vale, es como si tuviéramos el cuatro, sigue el seis, el tres y el cinco, que me da cinco mil trescientos sesenta y cuatro, que es el resultado final (PC, p.40).

Interpretamos que la alumna sabe de manera implícita que cada cero del 5000 lleva en sí mismo la posición que será ocupada por la primera cifra de cada sumando. Además, hace mención de que el cero "no vale"; el conocimiento que puede subyacer a sus argumentos es que, aunque el cero no valga, marca una posición que puede potencialmente ser ocupada por las unidades simples (en este caso con 4).

En ítems subsecuentes, particularmente en el 2 y 4 cuyo resultado incluye cero (2082 y 6047) se podrá profundizar sobre este conocimiento puesto en acción.

4.2.2 Discusión de resultados del ítem 1

La estructura del ítem 1 (5000 + 300 + 60 + 4 =) permite componer el resultado con sólo decir los nombres de los sumandos “cinco mil, trescientos, sesenta y cuatro”, de manera que esperábamos que los entrevistados se apoyaran en los nombres de los números para solucionar la operación. Sin embargo, el análisis de las respuestas nos llevó a reconocer procedimientos de cálculo diferentes al previsto.

El primero de ellos estuvo centrado en el “cómo se escribe un número” (estrategia de “Poner-Juntar-Acomodar números”, llamada así en función de las acciones reconocidas por los alumnos entrevistados) y no en el “cómo se dice un número”. Los otros procedimientos presentes fueron el cálculo mental y el algoritmo vertical.

El procedimiento de componer el resultado (“Juntar-Poner-Acomodar números”) fue justificado por los niños que lo usaron a través de algunos conocimientos vinculados al papel del cero en el sistema posicional. En otros términos, implica que los ceros del 5000 se sustituyen por cifras que indican la cantidad de centenas, decenas y unidades que se agreguan al 5000. Estos ceros del sumando mayor determinan el lugar que cada unidad de cada orden va a ocupar en el resultado.

Un procedimiento similar fue encontrado por Lerner (2005), ella les plantea a niños de 7 y 8 años de edad encontrar procedimientos de solución rápidos para la suma 4000 + 20 + 600 + 2 =. Estos niños indican que, en primer lugar, es necesario acomodar los números del grande al pequeño y sólo un niño de la clase indica que una vez acomodados los números basta con “tachar los ceros” para llegar al resultado. Por ejemplo, en 1000 + 500 + 80 + 6 =, se tachan los ceros y queda con el primer número de cada sumando: 1,5, 8 y 6 o 1586.

Este mismo procedimiento es reportado por Delprato (2002) en una investigación llevada a cabo con adultos no alfabetizados. En ella da cuenta de cómo los números nudo (en nuestro caso, los sumandos mayores) son tomados como modelos para sobreescribir sobre sus ceros las cifras restantes. Sin embargo, el uso de este recurso estuvo limitado a los conocimientos sobre los números nudo que las entrevistadas dominaban desde el inicio de la investigación (generalmente fueron números tridígitos redondos como 200, 900, 100).

Es clara la similitud en el uso de esta estrategia hecha por los niños de segundo grado y adultos no alfabetizados con los analizados en este trabajo sobre alumnos de sexto grado. La información que reciben de los ceros se transforma en una vía de solución.

Lerner indica que los niños segundo grado no pudieron vincular el hecho de "tachar los ceros" con las reglas de la numeración escrita ni con el valor posicional. En ese sentido nos preguntamos si los alumnos de nuestra muestra estuvieron en condiciones de hacerlo.

El análisis detallado de las respuestas de los alumnos de sexto indica que hay una diferencia importante con los niños más pequeños. Cuatro de los diez alumnos entrevistados identificaron cuándo sí es pertinente usar está técnica; es decir, identifican (implícita o explítamente) las condiciones que los números deben cumplir para poder usar el procedimiento "juntar-poner-acomodar números" y cuándo no usarlo.

Las condiciones que los alumos establecieron para el uso de esta técnica fueron tres:

— *Primero.* Que los números estén en orden decreciente (millares, centenas, decenas, unidades). Por ejemplo, Aa1 indica que resuelve la operación 5000 + 300 + 60 + 4 = acomodando en orden decreciente:

> *Aa1- Lo que hago es localizarlos, es poner los números en unidades, decenas y centenas, entonces eso me daría cinco mil, trescientos, sesenta y cuatro.*
>
> *E- Entonces tú para ponerlo te fijas en si son unidades, decenas, centenas, ¿y qué más?*

Aa1- ... Este… unidades de millar, decenas de millar. (PC, p. 1-2).

— *Segundo.* Que no haya dos sumandos del mismo orden. Aa8 se le pregunta cuándo es pertinente acomodar números y ella explica:

Aa8- Acomodar sería si tengo quinientos (escribe 500 + 90 + 8), más noventa más ocho ya sabría que es (escribe) que el cinco es normal; el nueve tomaría su lugar, el segundo cero (cero de las decenas) y el ocho el cero (refiriéndose al cero de las unidades); ese es acomodarlo. Y sumarlo como es la misma cantidad, me saldría lo mismo. Pero como aquí (señalando el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =) tengo dos números que tienen las mismas cifras, la misma cantidad de números, ya aquí sería diferente. (PC, p. 43-44).

— *Tercero.* Que no falte ningún orden (que implicaría un cero en el resultado) El caso de Aa6 nos deja ver su argumento para no aplicar este procedimiento:

E- Dos mil más ochenta más dos, ok, ¿qué resultado te da?

Aa6- Mmmm, dos mil ochenta y dos... suman…

E- ¿Cómo llegaste a ese resultado?

Aa6- Sumando, es que de aquí no estoy tan segura porque aquí no se puede traspasar acá, ahora se pasa acá el ocho y sumas ocho más dos, digo el ochenta más dos. (Aa6 se refiere a que no puede colocar el ocho de 80 en el lugar de las centenas, o del segundo cero a la derecha del 2 del sumando 2000 en el ítem 2000 + 80 + 2).

E- Dices, que no podrías poner el ocho en este cero que está después del dos (el cero que guarda el lugar de las centenas), sino que lo tienes que poner en el segundo cero (el cero de las decenas en 2000). ¿Lo podrías hacer aquí igual, así como le hiciste? (refiriéndome al procedimiento que realizó en el ítem 1, que fue acomodar sobre el 2000 el 8 y el 2 de 82).

Aa6- Mmmmmm.... ¿lo puedo sumar?

E- ¿A qué te refieres con poderlo sumar?

Aa6- Es que ahí yo lo intento sumar porque no estoy tan segura de ponerlo acá (señala sobre algún cero del 2000 y escribe el algoritmo vertical de 2000 + 80 + 2). (PC, p.28).

En resumen, los alumnos de sexto pudieron expresar tres condiciones que, a su juicio, tendría que cumplir la operación para poderse resolver componiendo el resultado o sumándose. Las dos primeras condiciones cumplen el carácter de necesarias para poder usar este procedimiento, pues hay que acomodar los sumandos de manera decreciente y asegurarse de tener solo un sumando (que sea un número redondo) de cada orden para proceder sin problema con el acomodo de las cifras diferentes de cero sobre los ceros del sumando mayor. Sin embargo, la condición de que no falten sumandos de algún agrupamiento (como el caso las centenas en 2000 + 80 + 2 =) no es una condición que impida usar este procedimiento.

En cuanto a la estrategia de cálculo mental oral notamos que su uso fue reiterado no sólo en el ítem 1 y subsecuentes. Por ello, nos preguntamos qué función cumplió en los niños de nuestra muestra y para ello revisamos algunas referencias de la literatura existente al respecto.

En un trabajo de investigación (ya citada) llevada a cabo por Broitman (2012), se presenta el uso del cálculo mental oral por parte de adultos que inician su escolarización. La autora afirma que este tipo de cálculo oralizado puede ser punto de apoyo para la escritura e interpretación de números que pueden presentarles conflicto a estos adultos (como escribir dos mil como 200 o 2000). Uno de los casos que la autora analiza se presenta con la participante Isabel, quien ha efectuado la suma correcta de 780 + 410 = 1190. Esta cantidad es leída por Isabel como “ciento noventa” y “ciento diecinueve”. Ante una intervención del entrevistador se le hace notar la lectura incorrecta del numeral, Isabel recurre a repitir los pasos del cálculo de manera oral (recurso en el cual se desempeña de manera ejemplar) y así logra interpreter la cantidad de manera correcta:

*“**C2:** Pensá... si fuera cuatrocientos más setecientos, ¿cuánto tendría?*
***I:** Serían, setecientos más cuatrocientos, serían mil cien. (Haciéndolo mentalmente).*
***C2:** Mil cien, o sea que setecientos más cuatrocientos serían mil cien.*
***I:** Claro, porque si yo tengo setecientos más trescientos serían mil nada más, pero acá tengo cuatrocientos más setecientos tengo mil cien.*
***C2:** Entonces, ¿qué número sería este? (Señalando el 1190 de la cuenta).*
***I:** Mil ciento noventa.” (P. 190)*

Es notable como para Isabel el cálculo mental oral es un recurso fundamental para interpretar un número. Por el contrario, para los niños que ya dominan la serie numérica, el cálculo oral podría no tener la misma relevancia. (Broitman, 2012). En nuestra investigación los niños también muestran dominio de la escritura y del nombre de los números que les presentamos, por lo cual no podemos afirmar que utilicen el cálculo mental oral como una guía para escribir e interpretar números tal como lo usaron los adultos no alfabetizados del estudio de Broitman. Se puede decir que los alumnos de esta investigación lo usaron para exponer su procedimiento ante el entrevistador; esto es que se sirvieron del recurso para “decir en voz alta” cada uno de sus pasos a la par que mostraban la resolución del ítem. Podemos afirmar también que es posible que este recurso les podría permitir llevar a cabo un control sobre el cálculo y fungir como apoyo a la memoria.

En cuanto a los conocimientos relacionados con el cero, la mitad de alumnos de nuestra muestra expresaron que siempre hay que fijarse en los ceros de los sumandos o “*sumar los ceros”* para no caer en errores. Ejemplificando lo anterior, una alumna indica “*que también los sume con los ceros porque también valen”,* refiriéndose a que es necesario considerar los ceros de cada orden para llevar a cabo una operación de manera correcta. El conocimiento que podría estar implícito en esa afirmación es que se debe tener en cuenta el orden al que pertenece cada sumando y que en el resultado debe escribirse apegándose a las reglas de la escritura posicional del sistema decimal.

Aunque no es el caso del ítem 1, en una operación como 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 = es fundamental hacer la transformación de órdenes (600 + 400); por ello dichos alumnos enfatizan “fijarse en los ceros” para efectuar un buen cálculo. Ello da cuenta de cómo los alumnos en este estudio anticipan ciertos aspectos a los que deben atender cuando realicen una suma.

De esta manera, consideramos que los niños de sexto en esta investigación, quienes tienen al menos tres años más de escolaridad que los estudiados en las investigaciones de Lerner, cuentan con mayores recursos para explicar una técnica apoyándose en sus conocimientos sobre el SND. En palabras de los alumnos, el cero les puede servir para saber “cómo sumar”, por la información que los ceros de los sumandos les provee: en primer lugar, los ceros les dieron pistas sobre el orden creciente o decreciente de los sumandos; en segundo lugar, los ceros de cada sumando les permitieron identificar el agrupamiento al que pertenecen (unidad, sin ceros; decenas, dos ceros; centenas tres ceros, etc.); en tercer lugar, una vez reconocido que hay órdenes repetidos, se procede a sumar o, en caso contrario a usar otro procedimiento como el de “poner-juntar-acomodar números”. De ahí que esta información fuera recuperada para tomar decisiones sobre cómo resolver el cálculo.

Lo anterior nos conduce a pensar respecto a la utilidad que tiene, sobre todo en grados inferiores de la escuela básica, plantear las adiciones de manera horizontal. La presentación de las adiciones en columnas oculta información que en este trabajo ha resultado relevante para los alumnos, como es la cantidad de ceros de los sumandos.

Finalmente, en lo que respecta al uso de ceros como marca de posición, encontramos que en este ítem los alumnos usaron los ceros del sumando mayor como marcas de una posición que podría ocuparse con las cifras diferentes de cero de los sumandos menores. Este recurso está fundamentado en el carácter posicional del sistema de numeración y es uno de sus rasgos más sofisticados. Recordemos que el cero tardó siglos en ser inventado y usado a nivel de la escritura, pues resultaba contra intuitivo escribir algo que “no valía nada” (Flegg, 1984; citado en Lerner, 1992).

En el trabajo efectuado por Lerner (1992), la autora plantea la contradicción a la que llegan niños de tercer año de primaria cuando indican que el cero “no vale” pero no se puede suprimir. Según la autora un argumento que pueden usar los niños para superar este dilema es reconocer el papel que juega el cero dentro de las cantidades: es una representación de ausencia y es una posición. Hecho que ya alcanzan a comprender alumnos de quinto año entrevistados en ese mismo trabajo.

El conocimiento sobre la doble función del cero, aparentemente contradictoria porque éste no vale nada en sí mismo, pero no se puede suprimir, parece no causar conflicto a los niños de nuestra muestra, al igual que a los alumnos de quinto año que ella entrevistó. En ambos trabajos, los entrevistados reconocen al cero como un lugar que potencialmente puede ser ocupado con unidades simples o agrupadas después de un proceso de transformación de órdenes.

4.2.3 Resultados del ítem 2

El ítem 2 tiene como características una presentación canónica de sumandos en orden decreciente, esto es, primero las unidades de millar, luego las decenas y las unidades simples. A diferencia del ítem 1, en el ítem 2 no hay agrupaciones de centenas en los sumandos y en el resultado (2082) se escribe un cero para representar esta ausencia.

2000 + *80* + *2* =

Se previó que en esta operación los alumnos pudieran llegar a un resultado apoyándose en la lectura en voz alta de los números. También esperábamos que pudieran ofrecer algunas explicaciones sobre la escritura del cero en la cantidad final. Por otro lado, se previó que en este ítem se presentaran algunas dificultades o dudas por parte de los niños sobre la escritura del cero en lugar de las centenas.

El análisis de los datos obtenidos nos permitió identificar los procedimientos de resolución que se muestran en la Figura 4, así como los conocimientos relacionados con el cero que se presentan en la misma figura; además de algunos errores en la escritura del resultado de la adición (2082).

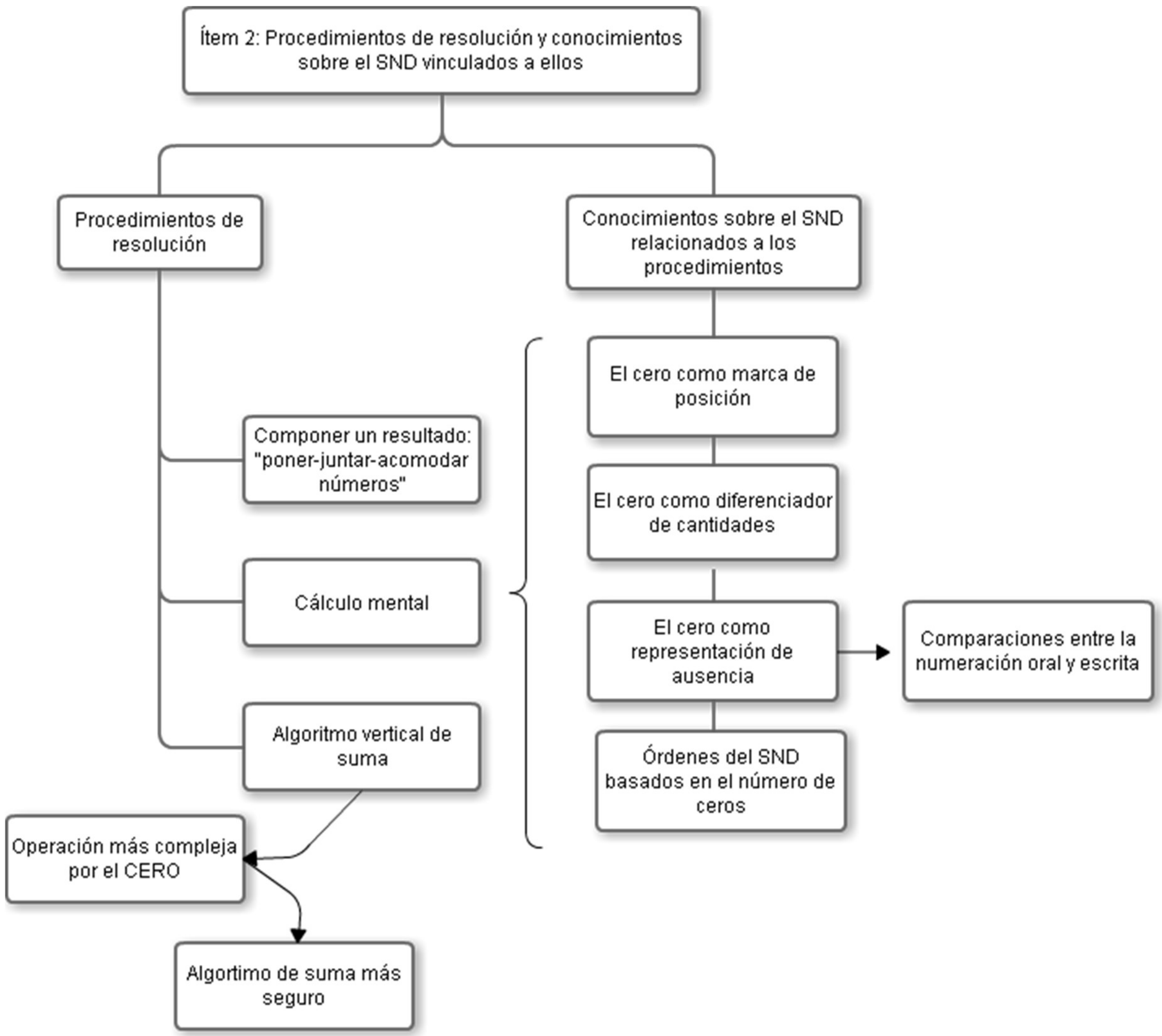


Figura 4. Procedimientos de resolución y conocimientos sobre el SND surgidos en el análisis de respuestas al ítem 2.

4.2.3.1 Procedimientos de resolución

Si bien el procedimiento de solución *Poner-Juntar-Acomodar números* es particularmente útil para este tipo de ítems donde los sumandos se presentan en orden decreciente, sólo se recurrió a él en tres respuestas. El cálculo mental y el algoritmo vertical fueron las otras vías de solución: las estrategias de cálculo mental se presentaron en cinco respuestas y en tres se usó el algoritmo en columnas. Al parecer, la ausencia de una agrupación de centenas pudo ser un factor para que recurrieran al algoritmo vertical o cometieran algunos errores al escribir el resultado.

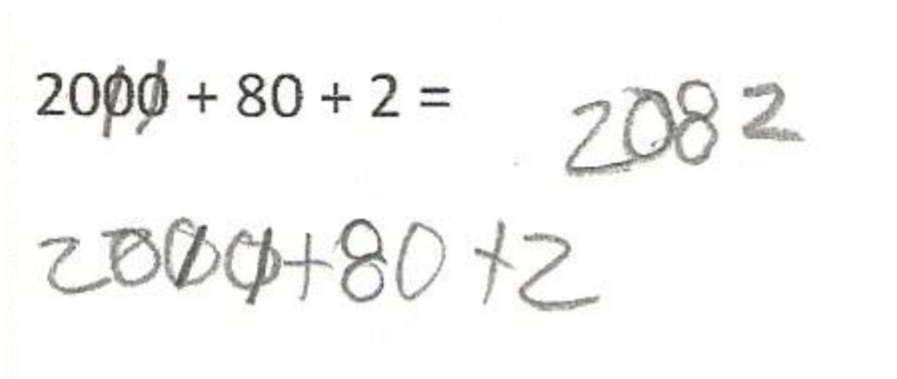
A continuación, se presenta de manera detallada la descripción de cada procedimiento.

Tipo 1. Componer el resultado

Tres alumnos utilizaron el procedimiento de acomodar números encima de los ceros del sumando mayor, sin que esto les implicara hacer cálculos, tal como se presentó en el ítem 1. Aa8 lo explica de la siguiente manera.

> *E- Pasamos a la que sigue ¿qué tienes? (Ítem 2000 + 80 + 2)*
>
> *Aa8- Dos mil más ochenta más dos. Si lo acomodamos sería dos, ocho... entonces aquí en el dos mil hay tres números (Aa8 se refiere a los tres ceros de 2000) y yo antes tengo dos, entonces como tengo dos (refiriéndose a las dos cifras de 82) marco los ceros y me queda veinte; el veinte lo pongo y aquí hay dos mil ochenta y dos. (PC, p.40).*

Aa8 acompaña su explicación de la siguiente producción gráfica.



Esta alumna procedió de la siguiente manera: primero ubicó el 2000 en la operación 2000 + 80 + 2, tacha los dos ceros a la derecha del 2000 cuando dice “y yo antes tengo dos”, refiriéndose a la cantidad de dos cifras que le resultan de 80 + 2, que es 82; luego dice “me queda veinte” (20 de 2000); lo escribe y después agrega el 82 para tener así la cantidad de 2082. Aa8 utiliza un procedimiento eficaz al que le subyacen conocimientos sobre la escritura numérica pues supo anticipar los lugares que le corresponden al 82 dentro del 2000.

Tipo 2. Cálculo mental

Encontramos cinco respuestas donde que los alumnos recurrieron a calcular mentalmente. Una vez que los alumnos manifestaron verbalmente cómo llevaron a cabo su cálculo, quedó claro que fueron adicionando sumando tras sumando (de corrido). Una de las entrevistadas indica que “es una suma fácil de resolver” por lo cual hizo el cálculo “en su cabeza”. Por su parte Aa4 indica su procedimiento en los siguientes términos.

> *E ¿Qué número te resultó?*
>
> *Aa4- ¿Son dos mil ochenta y dos…? (Dudando).*
>
> *E- Cuéntame, ¿cómo le fuiste haciendo para obtener ese resultado?*
>
> *Aa4- Mmm… me voy fijando que aquí son dos mil y en mi cabeza voy viendo dos mil más ochenta y después de eso dos mil ochenta, le sumo dos. (PC, p.13).*

Una de las características del cálculo mental es que posibilita llevar a cabo estimación de resultados y ejercer control sobre los mismos (Parra, 1994). Para ejemplificar la manera en que los alumnos mantienen control sobre la suma y los resultados se presenta el siguiente fragmento en el que Aa2 está a punto de cometer un error en la escritura del resultado (2082). Gracias a que “en su cabeza” lleva el control de la cantidad, logra corregir su falla de manera inmediata.

> *Aa2- Dos mil, ochenta y dos (escribe en su primer intento 282, borra y escribe 2082).*
>
> *E- Cuéntame, ahí veo un borrón ¿Qué iba a haber antes de ese borrón?*
>
> *Aa2- Era doscientos ochenta y dos, pero me equivoqué y le faltaba el cero. (PC, p.5).*

Cabe mencionar que en tres respuestas los alumnos escriben como primer resultado 282 en lugar de 2082. En otra respuesta, una alumna, tuvo dudas sobre cuál debía ser el resultado correcto entre 2082 o 2820. Estos errores se originaron en que no había agrupaciones de centenas y se tenía que escribir un cero.

Una manera posible en que las alumnas llevan a cabo el control de los resultados puede darse porque se apoyan en la lectura de los números, acompañadas de los conocimientos que poseen sobre las reglas de la numeración escrita como, por ejemplo, saber que los miles van con cuatro cifras.

Tipo 3. Algoritmo vertical

Para cuatro entrevistados el ítem 2 era una suma fácil de resolver, pero otros no lo consideraron así. Se obtuvieron tres respuestas en las que los alumnos optan por el algoritmo en columnas para resolver el cálculo; dos alumnas explican que el ítem 2 tiene algo de "difícil", refiriéndose a la ausencia de centenas agrupadas que origina un cero en el resultado. Por esta razón deciden escribir el algoritmo vertical y resolverlo para dar con la respuesta.

> *Aa10- Voy a hacer una aquí una operación porque pues aquí ya no hay cienes (refiriéndose a la operación 2000 + 80 + 2 =; Aa10 escribe un algoritmo vertical) … Pero como a veces te puedes confundir preferí hacer la operación para estar más segura.*
>
> *E- ¿Qué te pudo haber confundido en una operación así?*
>
> *Aa10- Que no hay cientos y no es igual que la de arriba. (Se refiere al ítem 1). (PC, p. 48).*

La alumna indica que el algoritmo es una forma segura de obtener el resultado, aspecto que coincide con la aplicación de esta técnica en el ítem 3 y el 5, como se expondrá más adelante.

4.2.3.2 Conocimientos sobre los componentes y el funcionamiento del Sistema de numeración decimal

El ítem 2 es una operación donde no hay una agrupación formada de centenas que sumar, lo cual deriva en que el resultado lleve un cero (2082; aunque podría no haber centenas y no tener que poner cero en el resultado -como en 4000 + 50 + 60 + 7= 4,117-, pero no es el caso de esta operación). Esta característica nos permitió indagar con los alumnos qué significaba para ellos escribir un cero en el resultado. Las respuestas obtenidas hicieron alusión a funciones del cero que ya han sido identificadas en investigaciones previas: el cero como representación de ausencia y el cero como diferenciador de cantidades (Lerner, 1992; Martín 2005). Además de esas funciones, los alumnos también dieron al cero otros usos: como indicador de cómo sumar y como marca de posición, como se mostró en el Ítem 1.

A continuación, se describen nuevamente y de manera más detallada, los usos y funciones del cero, centrándonos en los revelados por los alumnos al solucionar la operación 2.

- El *cero como representación de ausencia* en una suma implica que un número tiene un cero escrito porque falta alguna agrupación de decenas, centenas, millares, etc., una vez hechas todas las trasformaciones entre órdenes.
- El *cero como diferenciador de cantidades* se refiere a que el cero escrito en determinado lugar del número sirve para diferenciar dicho número de otro (por ejemplo, decir que 108 sin el cero sería 18).
- El *cero como marca de una posición,* es un conocimiento determinado por el carácter posicional de nuestro sistema de numeración en donde cada cifra vale por el lugar que ocupa; por lo tanto, si hay un cero, debe entenderse que no hay elementos por los cuales multiplicar esa potencia de base.

En seguida se ejemplificará cada una de estas funciones. Cabe precisar que damos cuenta de las respuestas, pero no siempre del número de alumnos que dieron tales respuestas, pues hubo casos en que un mismo alumno hizo referencia al cero en más de una manera posible.

Tipo 1. El cero como representación de ausencia

Las explicaciones que los alumnos dieron del cero como representación de ausencia se desprendieron de la pregunta hecha por el entrevistador, "¿qué significa ese cero que escribiste?". Se registraron seis respuestas en las que los alumnos respondieron que se pone un cero porque no hay centenas en la operación (sólo hay millares, decenas y unidades simples 2000 + 80 + 2 =).

Es valioso analizar el tipo de respuestas donde los alumnos indican que en la operación 2000 + 80 + 2 = "no hay centenas". Esta afirmación no es extrictamente cierta, pues en el sumando 2000 hay 20 centenas. Sin embargo, asumimos que están haciendo referencia a agrupamientos de centena formados y escritos en la posición de las centenas. En un trabajo de Lerner (1994), la investigadora hace referencia a este tipo de respuestas donde los órdenes se conciben como algo estático y no como una suceción de transformaciones. Al parecer, ese pensamiento también está respuesta.

Por otro lado, en algunas respuestas los alumnos van más allá en su reflexión. La alumna Aa6 menciona que el cero aparece escrito en representación de un número que no se tiene (las centenas). Ella indica que en el ítem 2 nada más se pronuncian el dos mil, el ochenta y el dos y el cero aparece porque no se tienen centenas.

E- Entonces aquí este cero que tu anotaste, ¿qué crees que significa?

Aa6- Mmmmm que no tiene ningún número y se... nada más se pronuncia dos mil, ochenta y dos.

…

E- ¿Qué más significara ese cero?

Aa6- Que no denomina una centena.

E- Que no denomina una centena ¿cómo?

Aa6- Que no tiene un número y eso es un cero, que no son como los demás que están el ocho y el dos y el otro dos… (C, p. 8).

Al parecer, de manera implícita y como "teorema en acto"[18], Aa6 reconoce diferencias entre el sistema numérico escrito y el sistema numérico oral. Una de esas diferencias es que el cero es un elemento del sistema escrito, por el contrario, a nivel oral el cero no se pronuncia.

Tipo 2. El cero como diferenciador de cantidades

Otra de las funciones que los alumnos atribuyeron al cero fue la de diferenciador de cantidades (tres respuestas). Resulta de interés que dos de ellas hayan surgido después de que las alumnas cometieran un error al escribir su primer resultado. La respuesta que habían dado al ítem era 282 y al leerla y compararla con el número que habían obtenido por cálculo mental (2082) pudieron corregir su error. Usaron como justificación que el resultado debía llevar un cero para ser de "los miles", contrario a "los cientos" que estaban escribiendo. Aa9 y Aa2 lo explican de la siguiente manera.

Aa9- (Escribe 2,82 con la coma)

E- ¿Así estaba la primera?,¿verdad, la que borraste?

Aa9- Mmmmm sí, algo así.

E- Cuéntame, ¿Qué pasó aquí? ¿Qué ocurrió?

---

[18] Retomamos el concepto de teorema en acto de G. Vergnaud (1990), el cual define como *"conocimientos contenidos en los esquemas de conocimiento que posee el sujeto"* (p.136). De esta manera, *"las decisiones que tome un alumno ante una determinada situación* (o problema matemático) *van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los conceptos en acto y teoremas en acto de los que disponga el sujeto para enfrentar la situación."* (Sureda y Otero, 2011).

Aa9- Es que aquí se me olvidaba que tenía que ponerle un cero y después el ochenta y dos, ya que es dos mil. (C, pp. 10-11).

Es claro que antes de producir su escritura numérica (2,82) ya estaba pensando en escribir "miles" lo cual se evidencia cuando hace uso de la coma; cabe mencionar que algunos alumnos han referido que los miles "llevan coma"[19] para poderse leer.

La alumna Aa2, escribe una primera respuesta (282) y la corrige (2082). Luego se llevan a cabo algunos intercambios para hablar sobre ese primer intento de respuesta erróneo.

Aa2- (Escribe 2082, pero borra y escribe 282).

E- ¿Ese (el 282) era el que primero ibas a poner?

Aa2- (Asiente y escribe 282)

E- Y luego, ¿en qué pensaste para corregirlo? ¿En qué diste cuenta?

Aa2- Se me olvidó el cero que iba.

E- ¿Cómo te acordaste de ese cero?

Aa2- Porque me acordé, porque siempre en el dos mil, para escribir un número tengo que llevar ceros aparte de los que lleva o sea no te sé explicar muy bien, pero… (C, p.4).

De esta manera, Aa9 y Aa2 usan el cero para distinguir entre números que son cientos de los que son miles. Una vez que las alumnas caen en cuenta de que quieren escribir dos mil echan mano de la escritura de ceros para lograrlo.

Aa2 por su parte, recurrió al tamaño de los números (cantidad de cifras y de ceros que llevan los miles) para decidir sobre una escritura numérica (2082) que le representaba dificultades.

---

[19] Sobre los usos y significado de la coma se ahondará en el aparatado dedicado al ítem 5.

Tipo 3. El cero como marca de posición

Cinco alumnos contestaron a la pregunta sobre la escritura del cero en el número 2082 haciendo referencia a la posición. Estas respuestas estuvieron relacionadas con la representación de ausencia de centenas agrupadas en el ítem (2000 + 80 + 2 =). Es decir, los alumnos indicaron que el cero se escribía en ese lugar porque era el que deberían ocupar las centenas que no hay en la operación. De ahí se desprende el uso del cero como marca de posición, en este caso de las centenas. Dos alumnos lo explican de la siguiente manera.

> *Ao7- Porque en el primer cero hacía la derecha del dos aquí (refiriéndose al 2 del 2000) no hay cientos y se tiene que poner de cientos a menores de cientos, se podría decir. (C, p.9).*
>
> *…*
>
> *Aa3- El cero va porque todavía no llega a tener centena, entonces pues se deja el espacio de la centena y ya se pone a partir de la decena. (C, pp. 4-5).*

En la respuesta del alumno Ao7 se puede identificar conocimientos sobre el valor posicional o el valor de “cientos” que otorgaría esa posición marcada con el cero; cuando indica que debe de ir de “cientos a menores de cientos” se refiere al orden decreciente en el que se deben presentar los órdenes. Aa3 indica, además, que el cero es como un “espacio” que sería llenado por centenas en caso de que las hubiera, lo cual coincide, además con el uso del cero para representar ausencia.

Este alumno, además, muestra una concepción sobre la agrupación decimal como una transformación continua y no estática, cuando indica que “todavía no llega a tener centena”.

4.2.4 Discusión de resultados del ítem 2

En este ítem volvieron a aparecer los tres procedimientos de resolución encontrados en el ítem 1: los alumnos pudieron componer el resultado sólo poniendo números encima del cero; por otro lado, hubo quienes acudieron al cálculo mental, mientras que otros usaron el algoritmo.

Lo que llama la atención es que algunos alumnos argumentaron que era un ítem fácil y lo resolvieron “de corrido” con cálculo mental; en cambio, otras alumnas indicaron que era un ítem más difícil que el primero (por la ausencia de centenas agrupadas) y que mejor usarían en algoritmo vertical para asegurar su resultado.

Nos referiremos ahora al papel jugado por el algoritmo en columnas al que recurrieron los alumnos durante la entrevista.

De acuerdo con Novembre (s/f) el cálculo algorítmico consiste en la aplicación de una serie de reglas que garantizan llegar a un resultado independientemente de los datos con los que se esté trabajando. Sin embargo, esta definición no contempla las decisiones que algunos de los alumnos pueden tomar antes de optar por el uso de esta técnica.

En nuestro análisis de resultados nos encontramos que los alumnos efectuaron un análisis de los datos numéricos que constituían el problema para, a partir de sus conclusiones, usar el algoritmo. En otras palabras, fue justamente en el momento de considerar los datos numéricos cuando algunos de los entrevistados tomaron decisiones respecto a usar o no el algoritmo en columnas y qué uso darle.

Los usos que encontramos para el algoritmo fueron los siguientes:

- Como técnica por excelencia; es decir, ante una operación dada se usa el algoritmo como primera instancia para llegar al resultado; (dos de diez alumnas)
- Como técnica más segura, cuando las características de los sumandos hacen más complejo el cálculo (por ejemplo: ausencia de algún orden y

transformación de órdenes, previsión de la escritura de ceros en el resultado); (dos de diez alumnas)

Sobre el uso del algoritmo como técnica más segura y como recurso de verificación coincidimos con los resultados de Ortiz (2014) quien encontró que niños de segundo grado de primaria hacen uso del algoritmo en columnas para verificar resultados y no como vía de solución en primera instancia. De hecho, anteponen la fiabilidad del algoritmo vertical a la del resultado obtenido con calculadora. Cabe precisar que los alumnos del estudio de Ortiz resolvieron cuentas en el transcurso de una simulación de compra-venta, la cual, si bien se llevó a cabo en un salón de clases, ocurrió al margen de la clase y los alumnos tuvieron la opción de elegir cómo resolver las cuentas.

La autora encuentra, además, que “el rango numérico o tamaño de los números” (operaciones con números grandes como 89 + 46) fue la que propicio el uso del algoritmo. En nuestro caso, la cualidad de los números que empujó el uso del algoritmo en columnas fue la ausencia de una agrupación en la operación (como es el caso del ítem 2), la presencia de dos grupos de decenas y centenas (como se verá en los ítems 3, 4 y 5) y la presencia de ceros en el resultado, como en el caso del ítem 2, 4 y 5.

En resumen, algunas de las reglas de funcionamiento del sistema de numeración, como la agrupación y desagrupación decimal están implícitas en el algoritmo en columnas. Esta técnica provee una solución eficaz y económica ante el problema que puede representar transformar órdenes o lidiar con la escritura de ceros. Es posible que ante ese problema los alumnos decidieran usar un medio seguro de resolución, que en este caso fue el algoritmo vertical.

En cuanto a los conocimientos sobre componentes del SND que fueron explícitamente manifestados por los alumnos, encontramos los referidos al cero y a su función. Este ítem en particular nos permitió indagar al respecto puesto que no hay centenas en la operación. Como ya se mencionó, surgieron interpretaciones del cero ya identificadas en la literatura: el cero como representación de ausencia y el cero como diferenciador de cantidades.

Si bien el cero tiene diversas funciones que se vinculan entre sí, en los argumentos de los alumnos pueden aparecer aisladas. En nuestro estudio tres de los diez entrevistados pudieron explicar simultáneamente que el cero representa la ausencia de alguno de los órdenes y marca, a su vez, la posición de esos órdenes faltantes. Los siete alumnos restantes indicaron que el cero es útil para diferenciar cantidades, o que representa una ausencia o que sirve como marca de posición, pero no mencionaron coordinadamente más de una función entre sí.

Por otro lado, el hecho de que los alumnos notaran una dificultad en esta operación relacionada con la escritura del cero en el resultado, nos remite al trabajo citado en nuestros antecedentes de Lerner (1992) cuando plantea a niños reflexionar en torno al papel del cero cuando está aislado y cuando está dentro de cantidades escritas. En ese trabajo la autora señala que el cero puede plantear problemas a los alumnos, al grado de generar importantes movilizaciones de conocimiento.

Resultó interesante en nuestro trabajo que, al resolver el ítem 2, los alumnos notaran algunas dificultades provocadas por la ausencia de centenas y la escritura de ceros en el resultado, como consecuencia de esa ausencia. Justo en ese momento algunos alumnos expresaron que prefieren usar algoritmo vertical para “estar seguros de dónde escribir el cero”. Para otros alumnos hubo que hacer un alto en el camino de la escritura del resultado (2082) para leer el número y corroborar si su resultado era correcto (algunos escribieron en un primer momento 282).

Cabe mencionar que la escritura e interpretación de números con ceros intermedios también resulta un reto para adultos no alfabetizados cuando están aprendiendo a escribir los números, según lo reportado por Delprato (2002). En su estudio, la entrevistada Carmen lee en un primer momento el 5030 como quinientos treinta y posteriormente a la lectura convencional de 5300, corrige su primera lectura diciendo que “Estos son cinco mil trescientos… entonces estoy mal ahí (señala el 5030) …aquí son cinco mil treinta” (p.84). El hecho de tener la posibilidad de releer el número, comparar lecturas de números del mismo rango y escribir números posibilitó la detección de errores de interpretación de las cantidades.

Los alumnos de nuestro trabajo también se detuvieron a releer sus escrituras numéricas algunas de las cuales fueron 282 en lugar de 2082 o inclusive, 2820 en lugar de 2082. En ambos casos es notable que la dificultad se encuentra a nivel de la colocación del cero en el numeral. Dicho tropiezo podría tener su origen en el problema que plantea la traducción del número de un sistema oral a un sistema escrito.

Estas dificultades en el paso del registro oral al registro escrito de los números, están documentadas en el trabajo de Palmas y Block (2011). En su investigación con adultos no alfabetizados dan cuenta de que estar en presencia de una *tira numérica*[20], favorecía que los participantes pudieran transitar de la forma oral de un número a su forma escrita (recordemos que carecían del conocimiento de escrituras numéricas). Ello se debió a que los adultos pudieron recuperar su conocimiento previo del conteo asociándolo a la forma escrita del número registrada en la tira. En todo caso lo que queremos enfatizar es que contar con un registro escrito propio o de un portador numérico, permite las acciones de comparar y releer números, lo que potencialmente puede actuar como un método para corregir errores en la producción e interpretación de cantidades, sobre todo de aquellas que tienen ceros.

En nuestro trabajo, se presentaron ocasiones en las que los alumnos se refirieron a la forma oral del número contrastándola con su forma escrita y viceversa, dando muestras de que saben que un número no se escribe como se dice y que ambos sistemas numéricos (el oral y el escrito) se rigen por principios diferentes.

[20] Recurso didáctico en el cual se presenta de manera escrita la sucesión de los números en cierto rango; en este caso Palmas y Block utilizaron una tira numérica del 1 al 20.

Pero en efecto, contar con el recurso de escribir el número, releerlo y compararlo con otros del mismo rango resultó funcional para decidir cómo escribir un número con ceros.

4.2.5 Resultados del ítem 3

En e ítem 3 se presentan los sumandos de manera diferente a la decreciente y dos de los sumandos son agrupaciones de decenas. El hecho de presentar más de un grupo de decenas dota al ítem de una marcada diferencia con los ítems previos, en los cuales sólo había un sumando por cada orden.

$$\boxed{300 + 4000 + 80 + 4 + 40 = 4423}$$

En este ítem se tuvo previsto que los alumnos pudieran calcular apoyándose en las propiedades asociativas y conmutativas de la suma, es decir, que pudieran agrupar las decenas primero, apartar el sumando mayor (4000) y reordenar el ítem de acuerdo al orden decreciente. Por otro lado, las características del ítem nos permitirían identificar conocimientos de los alumnos sobre la reagrupación decimal, específicamente sobre la transformación de órdenes.

El principal procedimiento de solución utilizado fue el cálculo mental; en cuanto a los conocimientos sobre el funcionamiento del SND, resalta las explicaciones sobre la transformación de órdenes dadas por los alumnos y la manera en la cual identifican a esos órdenes. Lo anterior se representa en la Figura 5.

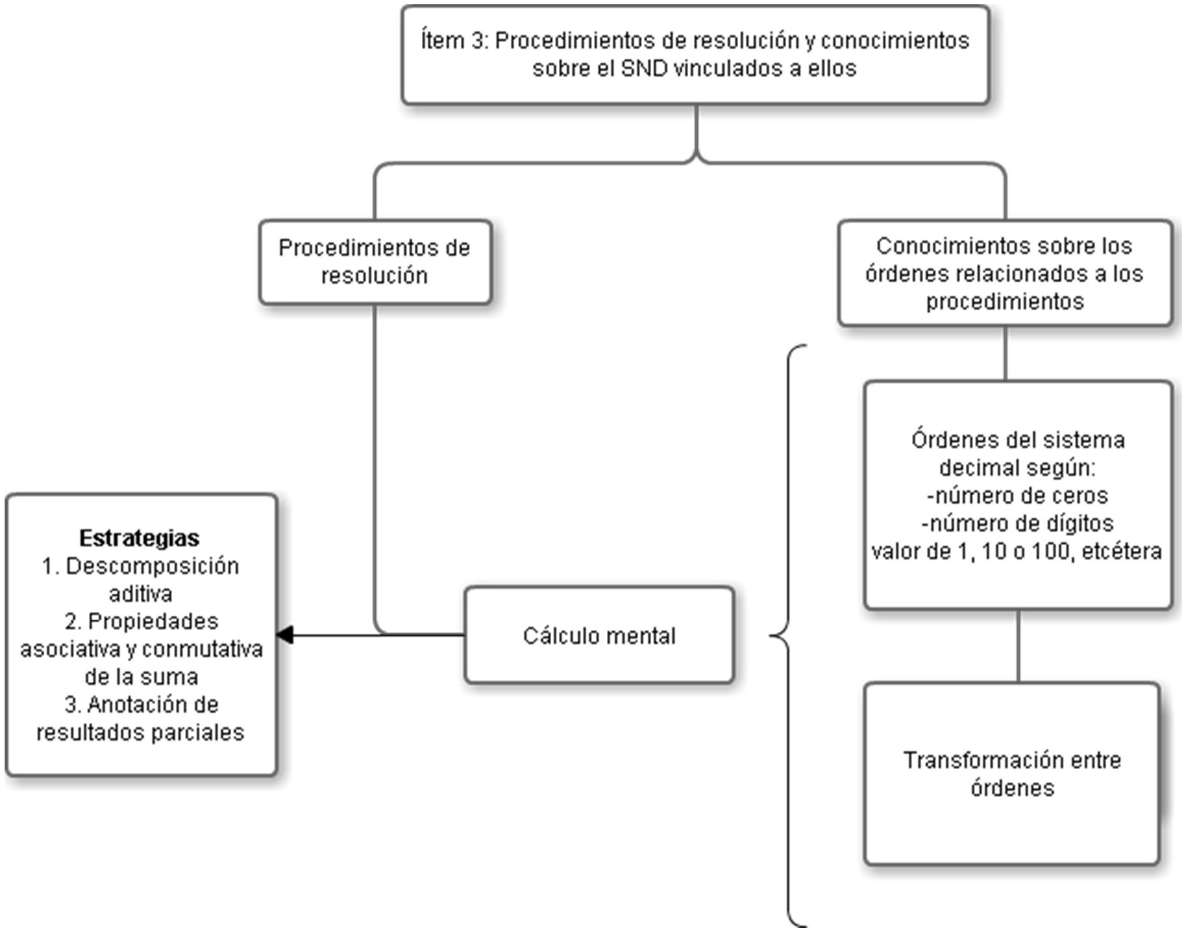


Figura 5. Procedimientos de resolución y conocimientos sobre la agrupación decimal del SND identificados en las respuestas al ítem 3.

4.2.5.1 Procedimientos de resolución

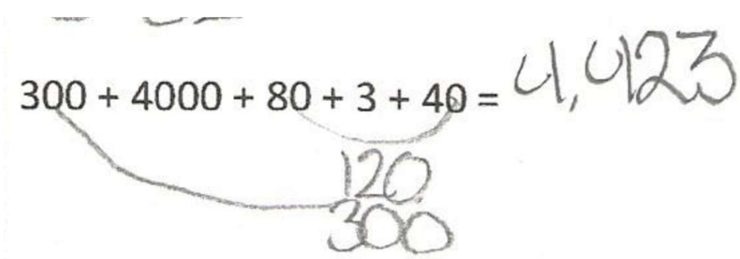
El procedimiento más utilizado en este ítem fue el cálculo mental. Nueve de los diez alumnos utilizaron estrategias como la descomposición numérica, se apoyaron en las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, usaron sumas conocidas a las que se les agrega cero; además, acompañaron sus cálculos con anotaciones de resultados parciales. Todos los anteriores son recursos de cálculo mental ampliamente reconocidos en la literatura (Parra, 1994; García, S., 2014; Wolman, 2006; Broitman, 2012, Novembre (s/f)).

Tipo 1. Aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición

Fue común que los alumnos utilizaran más de una estrategia de cálculo mental al resolver las operaciones. En el fragmento siguiente encontramos que Aa10 recurre a la propiedad asociativa de la adición cuando suma el 80 con el 40 y posteriormente suma el resultado (120) con el 300. Además, se apoya en la propiedad conmutativa al alterar el orden de los sumandos para facilitarse el cálculo. En la producción escrita de Aa10 encontramos a su vez, anotaciones parciales de los resultados.

> *E- Vamos a la que sigue. (Ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =)*
>
> *Aa10- (Aa10 dice en voz baja) Trescientos... pues ahora está todo revuelto, ya no está como en este orden (señala los ítems 1 y 2 donde los sumandos están en orden decreciente); entonces aquí son cuatro mil trescientos... ochenta y cuarenta son ciento veinte... estos dos lo que voy a hacer es poner aquí (debajo de la operación) ciento veinte (PC, p. 49).*

Al mismo tiempo Aa10 traza una línea en los sumandos 80 y 40 para operarlos primero. Obtiene 120, el cual suma a 300 y de ahí retoma los 4000 y los 3 restantes para obtener el total.



Tipo 2. Apoyo en la descomposición aditiva

La alumna Aa3 utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la suma para operar el ítem, pero además recurre a la descomposición aditiva de un resultado parcial (120) para obtener un número redondo (100). El apoyo en números cerrados (nombre dado a los números redondos o nudo por parte de algunos niños entrevistados) o redondos es un recurso eficaz de cálculo mental que facilita la estimación y el control sobre los resultados.

E- Pasamos a la que sigue, ¿qué dice? (Refiriéndome al ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =).

Aa3- Es cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- ¿Cómo fuiste haciendo el cálculo?

Aa3- Primero quité el trescientos y empecé a partir del cuatro mil, luego sumé trescientos, pero le aumenté a cuatrocientos porque como era ochenta más cuarenta, ya aumenté a cuatrocientos. Dejé los veinte, porque pues a éste (a la suma de 80 + 40 igual a 120) se le quita el veinte para completar el cien y ya sumé a los tres (refiriéndose a los 300 más los 80 más los 40) (PC, p. 10).

Además, la alumna se apoya en otro recurso que es el de ordenar los sumandos del mayor al menor.

Tipo 3. Estrategia de apoyo en sumas conocidas a las que se les agrega cero

La estrategia descrita como apoyo en sumas conocidas a las que se les agrega cero, es denominada como procedimiento “sí… entonces” en los trabajos de Lerner (2005)[21,] Esta estrategia fue utilizada por algunos alumnos en éste y en otros ítems; se ejemplificará más ampliamente en el ítem 5, donde fue más recurrente su uso.

[21] En este trabajo nos hemos referido a este procedimiento como suma de unidades conocidas a las que se les pone cero. También conocido como *atajo*, está vinculado a la comprensión de la multiplicación involucrada en el valor de la cifra correspondiente a cada orden por la base (decenas x por 10; centenas x por 100, millares x por 1000, etc.) (Lerner, 2005). Otra forma de llamarlo es “camino abreviado” para resolver operaciones si se entiende como estrategia de cálculo mental (Mochón y Vazquez, 1995).

La alumna Aa6 utilizó este recurso y ofrece la siguiente explicación.

E- ¿Cuéntame en qué te fijaste para sumar primero estos dos? Porque empezaste sumando el ochenta y el cuarenta. Cuéntame ¿cómo le hiciste?

Aa6- Este, pues supongamos que no tenemos el cero (el cero del 80 y el 40) y sumo ochenta (sic) más cuatro y da doce, más tres da ciento veintitrés… Perdón este, me equivoqué, ciento... daría (pensando) ciento... ciento... (PC, pp. 29-30).

…

E- Me habías dicho ocho más cuatro, igual a doce, ¿dónde está el ocho y dónde está el cuatro? ¿Éste qué es?, ¿un ocho? (señalo el 80 de la operación 300 + 4000 + 80 + 4)?

Aa6- Es un ochenta, pero supongamos que ahorita no está el cero, porque el cero se pondría al final o como si no existiera… (PC, p. 30).

La alumna Aa6 utiliza el *atajo* y parece que mediante este recurso economiza su cálculo. En todo momento mantiene control sobre las cantidades íntegras pues si bien es cierto que para el cálculo “ochenta más cuatro” dice “doce” como resultado, su cálculo mental es 80 + 40 = 120.

Además de usar cálculo mental, dos alumnos recurrieron al procedimiento de componer cantidades denominado “Poner-Juntar-Acomodar” pero sólo en una parte de su operación, Aa6 lo hace en el ítem 3 y Ao7 en el ítem 4. En el caso de Aa6, cuando ya había hecho las transformaciones pertinentes entre decenas y centenas, tomó el 4000 y sobre este acomodó los 423 restantes. Es decir, una parte del ítem la resuelven haciendo las transformaciones y otra parte acomodando los números sobre los ceros del sumando mayor. En sus palabras lo explica como sigue.

E- Ciento veintitrés más trescientos ¿cuánto te daría?

Aa6- Cuatrocientos veintitrés

E- ¿Y te falta sumarle algo?

Aa6- El cuatro mil... este cuatrocientos veintitrés es igual como el primero: (refiriéndose al procedimiento de poner una cantidad sobre los ceros de la otra, en este caso poner 423 sobre los ceros del 4000) lo podemos traspasar a las unidades *de decena... bueno de centenas perdón, y sería cuatro mil cuatrocientos veintitrés. (PC, p. 29).*

Aa6, además, explicitó que una parte este ítem se podía resolver como el ítem 1, es decir, reconoce dos procedimientos distintos que funcionan de acuerdo con las condiciones de la tarea: si en el ítem hay más de un agrupamiento u orden no se podría usar el procedimiento de Poner-Juntar-Acomodar números, pero si se tiene un número "ya junto" se puede "traspasar" a los ceros de un número de orden mayor. Cabe mencionar que esta distinción la hacen otros dos alumnos, además de Aa6.

4.2.5.2 Conocimientos sobre componentes y funcionamiento del sistema de numeración decimal

Los conocimientos sobre el sistema de numeración se manifestaron a través de:

a) la forma en que identificaron los órdenes del SND
b) la forma en la que explican la agrupación decimal o transformación entre órdenes.

a) Identificación de órdenes del sistema de numeración

Numerosos autores coinciden en que el manejo de los nombres convencionales de los órdenes por parte de los niños no necesariamente denota una comprensión a nivel conceptual (Kamii, 1994; Chandler y Kamii, 2009; Lerner, 1992, 2005). Por ello se quiso indagar la forma en la que los alumnos hicieron referencia a los diferentes órdenes del SND, así como en qué centran su atención para señalar que en un número determinado hay decenas, centenas, etc.

Obtuvimos una amplia diversidad de criterios que los alumnos usan para identificar un orden: por el número de cifras, por el número de ceros, por el lugar que ocupa cierta cifra en un numeral, etc. Cabe precisar que estas formas diversas de llamar a los órdenes se indagaron a lo largo de los cinco ítems y no de manera exclusiva en el ítem 3 que se expone en este apartado y quedarán expuestas a continuación (ver tabla 9).

El criterio de identificación que refiere a los órdenes según el número de dígitos y de ceros están determinadas en parte por la presentación de los sumandos en el ítem (300 + 4000 + 80 + 4 + 40 =), pues cada sumando indica el orden al que pertenece.

La forma de identificación "Según el lugar ocupado por cierta cifra en el numeral" surgió de la reflexión de los niños sobre cómo identificar los órdenes si el número ya está escrito como resultado de la adición (o "junto", como algunos mencionaron). De ahí la razón que dan de empezar a señalar por la derecha, la primera cifra sería unidad, la segunda decena, la tercera centena y así sucesivamente. En este tipo de identificación es muy importante marcar los órdenes empezando por la derecha y asignando un lugar a cada orden a partir de las unidades.

En cuanto al tipo de identificación "Según su valor de 1, 10 o 100" esta es una de las formas más comunes dentro de la escuela para identificar los órdenes, junto con el tipo explicado en el párrafo previo. Lo afirmamos con base en la revisión efectuada sobre el planes y programas de la SEP (2011) donde queda establecido que la identificación de los órdenes promovida por escuela sea mediante su valor: de diez, cien, mil, etc.

Por otro lado, la forma de identificación "Por ser un número cerrado" implica que los alumnos saben que los números nudo son, en efecto, agrupaciones base diez.

Finalmente, la forma "Según su lugar en la seriación numérica" da cuenta de una concepción más estática sobre los órdenes (Lerner, 1992); en ella podemos identificar que se concibe que el orden de las unidades comprende del 1 a 9, el de las decenas del 10 al 99, las centenas más de 100 (hacienda referencia al mayor agrupamiento que tiene el numeral).

La Tabla 9 resume una diversidad de formas en las que los alumnos hicieron alusión a los órdenes del sistema de numeración.

Tabla 9

Diversidad de formas para identificar a los órdenes del SND utilizadas por los alumnos entrevistados.

Formas de identificación de los órdenes	Ejemplo
Según el número de dígitos	*Aa1- Pues las decenas llevan dos dígitos... (O, p.1)*
Según el número de ceros	*Aa4- Yo siempre me fijo en si tiene tres ceros y son cinco mil, aquí son dos ceros y son seiscientos y aquí pues también tiene dos ceros (el 400). (O, p. 14).*
Según el lugar ocupado por cierta cifra en el numeral	*E- Entonces tú me dices que no viste que hubiera ninguna centena. ¿A qué le llamas tú centenas? Aa6- Al número que es el tercer número que está en el lado derecho (Aa6 indica que las centenas serían las que ocupan el tercer lugar si se observan los dígitos comenzando por la derecha del número). (O, pp.4-5).*
Según su lugar en la seriación numérica	*Aa8- La unidad llega del uno al nueve, la decena del diez al noventa... (O, p.3)*
Según su valor de 1, 10, 100, etc.	*Aa8- El cuatro como es uno, es unidad, el sesenta es como si fuera diez, la decena; el trescientos, centena como si fuera el cien… (O, p.2)*
Por ser números cerrados	*E- ¿A qué le llamas número cerrado? Ao5- Que ya no tiene más números y sólo es una cantidad. E- ¿Me puedes dar un ejemplo para entenderlo? Ao5- Como cinco mil, que ya no tiene ni decenas, ni centenas, ni unidades. (O, pp.16-17)*

b) Conocimiento sobre las trasformaciones (agrupación decimal) del sistema de numeración

Los ítems cuya operación implica una transformación de órdenes nos permitieron indagar acerca de las razones por las cuales los alumnos deciden sumarprimero los sumandos del mismo orden. En todos los casos, la motivación principal para sumar primero los sumandos del mismo orden, es formar un solo número, esto es, tener un solo sumando de cada orden. Sin embargo, encontramos diferentes maneras de expresarlo por parte de los niños.

Explicación tipo 1. "Sumar para obtener un número sólo o un solo resultado"

Dos alumnas recurrieron a este tipo de explicación en el ítem 3. Una de ellas, la alumna Aa1 habla de la transformación entre decenas como algo que cambia la naturaleza de los sumandos cuando dice "es como si ya no existiera", refiriéndose a los números implicados en una operación.

> *E- Cuando tú decides hacer esta parte (80 + 40) ya te resulta un número de tres dígitos, te da 120. ¿Ahora como decidiste sumárselo al trescientos?*
>
> *Aa1- Porque el resultado que me dé va a ser un número sólo y es como si ya no existiera ni el trescientos, ni el ochenta ni el cuarenta, simplemente existe el número que me dio al sumar estos dígitos, esos tres números. (O, p. 5).*

El alumno Ao5 justifica que primero debe sumar 80 y 40 porque así obtiene un solo resultado; también hace referencia a que encuentra este procedimiento como una manera de hacer sencilla la operación.

> *E- Ahí nos detenemos; dices "sumé ochenta más cuarenta y me dio mil doscientos", ¿por qué decides sumar ochenta más cuarenta en primer lugar?*
>
> *Ao5- Porque así me da un resultado y con eso se lo…, y con ese resultado de sumar el mayor número y con eso me da un resultado más fácil de sumar estos dos (80 más 40).*

Explicación tipo 2. "Se tiene que convertir a la centena"

Dos alumnas justifican la operación de 80 y 40 indicando que se tienen que formar centenas. Cabe enfatizar que este tipo de explicación tiene sentido en una operación cuyas decenas rebasen 99 unidades, el cual es nuestro caso. La alumna Aa3 ofrece la siguiente explicación.

> *E- Entonces tú te fijas en estos dos números que son los que sumas (80 y 40); ¿en qué te fijaste para sumar este par de números?*
>
> *Aa3- En el ochenta y en cuarenta y luego para completarlo al cien, le quité veinte al cuarenta y ya dejé los otro veinte del cuarenta. (O, p.6).*

En el momento en que la alumna utiliza la palabra "completar al cien", se busca indagar si puede extender la idea de completar cien como una regla general. Se le pregunta lo siguiente:

E- ¿Y eso siempre pasa o cuándo es cuando hay que hacer estos complementos a cierto número?

Aa3- Cuando, por ejemplo, o sea, si nada más fuera el ochenta pues ya no hay que completar nada, pero como eran ochenta más cuarenta no se puede poner cuatro mil trescientos ochenta cuarenta entonces ya hay que completar al cuatro mil cuatrocientos. (O, p.6).

Como apoyo a su respuesta, Aa3 indica que no se puede escribir el resultado de una suma sin hacer las transformaciones pertinentes: "no se puede poner cuatro mil trescientos ochenta cuarenta (40003008040)". Así finaliza su argumentación:

E- Cuando tú me dices que no puedes poner cuatro mil ochenta cuarenta o cuatro mil trescientos ochenta cuarenta, ¿en qué te fijas para decir que eso no se puede poner?

Aa3- Porque, o sea, sé que se tiene que convertir o sea que no puede hacer eso, que se tiene que convertir ya a la centena y dejar los demás ya a las decenas (refiriéndose al excedente de 120, que es 20) (O, p.6).

En las palabras de Aa3 se encontró la explicación más apegada a la regla de agrupamiento decimal de las recabadas en la entrevista.

Explicación tipo 3. "Sumar por las características de los sumandos"

Hubo otro tipo de respuestas que no se clasificaron en las anteriores puesto que los alumnos justificaron que deben sumarse el 80 y el 40 porque ambos sumandos tienen cosas en común como el número de cifras y ceros. Estas respuestas cobran importancia porque les subyace una justificación a la transformación de órdenes. Los alumnos deciden agrupar órdenes debidos a las características que pueden ver en los números, los ceros, las cifras o algo en común. La alumna Aa8 observa los sumandos del ítem, poniendo especial atención a los ceros. Encuentra que 80 y 40 tienen en común, precisamente el número de ceros; lo expresa como sigue.

Aa8- Aquí hay confusión, porque aquí hay dos números que tiene el mismo valor (refiriéndose al 80 y al 40 del ítem 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 =) que sería la decena. (O, p.7)"

Al preguntarle en qué basa su decisión de sumar 80 y 40 responde:

Aa8- En que por qué aquí había tres... dos y un cero y el siguiente número también tenía un cero. (O, p. 8)

En la explicación de Aa8 está ausente cualquier alusión al mecanismo por el cual se trasforman esas decenas en centenas, que sería hacer referencia a la agrupación recursiva decimal.

4.2.6 Discusión de resultados del ítem 3

En el ítem 3 pudimos indagar un mayor repertorio de estrategias de cálculo mental. Consideramos que hubo dos factores que contribuyeron para que los entrevistados recurrieran a dicho tipo de resolución:

- Los alumnos ya habían resuelto dos ítems, lo cual supone que en este punto ya estaban familiarizados con la tarea y con el tipo de entrevista. Ello pudo favorecer que los alumnos se sintieran confiados para usar otros procedimientos de solución diferentes al algoritmo vertical.
- Durante la entrevista, alentamos el uso de procedimientos diferentes al algoritmo en columnas.

Las características del ítem 3 propiciaron desplegar recursos de cálculo mental que en los ítems previos no era necesario desplegar; recordemos que las estructura del ítem 1 y 2 favoreció el uso de otros recursos de resolución.

En el ítem 3 reconocimos con mayor claridad el uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, la descomposición aditiva y la utilización de algunos otros recursos como apoyo en sumas conocidas a las que se les agrega cero y los registros de anotaciones de resultados parciales reconocidos como indicadores de cálculo mental.

Indagar sobre los procedimientos de cálculo mental resulta fundamental en nuestro análisis sobre conocimientos del sistema de numeración. De acuerdo con Parra (1994) y Mochón y Vázquez (1995) los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números, siendo el cálculo mental un proceso constructivo. Estos autores indican, además, la necesidad de enseñar explícitamente a calcular mentalmente como vía que podría favorecer la comprensión más profunda de otras áreas de las matemáticas. En nuestra muestra encontramos el uso de variadas estrategias de cálculo mental cuya vinculación con el SND puede no estar clara para los alumnos.

Consideramos que nuestros entrevistados sí han tenido oportunidad de reflexionar sobre las estrategias de cálculo mental que utilizan y su relación con las reglas y propiedades del sistema de numeración, aunque no se les haya enseñando sistemáticamente, Por lo tanto, sostenemos que poseen los conocimientos necesarios que podrían favorecer esa vinculación.

En este ítem se pudieron indagar de manera específica conocimientos sobre la identificación de los órdenes del SND. Se presentó una diversidad de respuestas y cada una está vinculada con algo que están viendo los alumnos, ya sea en la presentación de sumandos o en el resultado. Si se fijan en la operación o ítem, ponen atención a los ceros o al número de cifras. Cuando están identificando los órdenes en un numeral se fijan en la posición que ocupa cierta cifra empezando por la derecha. Y hay otras formas menos frecuentes en nuestro análisis de respuestas como lo son la de los números redondos y la de la sucesión numérica.

La manera en cómo los entrevistados aluden a los órdenes resulta de suma importancia, pues hablar de cada orden remite necesariamente a hablar de una posición y un valor diferente, como lo señala Brizuela (1997). Dicha autora enfatiza la necesidad de que sean los niños quienes llenen de sentido los conceptos de unidad, decena, centena, etc., en un proceso constructivo.

Ello es congruente con nuestros hallazgos sobre la diversidad de formas de identificar los órdenes. Puede ser que carezcan de la convencionalidad, pero son identificaciones descriptivas, adaptadas a la presentación de los números. Es decir, si un número se representa de manera convencional (como 5365, o 478, o 982873) la manera de saber cuáles son las centenas es contando de derecha a izquierda; “el tercer número” serán las centenas. Si, por el contrario, el número está desagrupado aditivamente (como en 400 + 50 + 3) la manera de identificar el orden es contando el número de ceros, contando el número de cifras o identificando el rango 1-9, 10-99, 100-999 de la serie en el que ese ubica el número.

Sin dejar de reconocer el valor de esa diversidad de formas de identificar los órdenes, nos preguntamos si algunas de esas formas pueden presentar alguna problemática. Nos llama particularmente la atención la referencia hecha por los alumnos de que las unidades van del 1 al 9, las decenas del 10 al 90 o 99 y las centenas más de 100. Este razonamiento es parcialmente cierto, pues en efecto los números del 1 al 9 sólo se forman con unidades. Pero si se entiende que las unidades son elementos diferenciados y completos que forman parte de un conjunto (Bedoya, et al., 1991), los niños tendrían que transitar: de saber que del 1 al 9 hay unidades a saber que en un número como 25 hay 25 unidades, sólo que se presentan de manera agrupada. En cuanto a los conocimientos sobre las transformaciones del SND, se encontraron sólo dos respuestas que son más cercanas a la regla de agrupación decimal. Los demás alumnos saben que, al sumar agrupaciones de decenas, a veces obtendrán centenas (en el caso de 80 + 40), pero no refieren que cada vez que se tenga diez de alguno de los órdenes, hay que convertir al siguiente orden, como sí lo hicieron respecto a las centenas las dos alumnas citadas.

Parece ser, que un conocimiento poco afianzado es la recursividad de la agrupación base diez, pues ninguno de los entrevistados pudo extender esta regla más allá de los casos particulares. Hace falta reconocer que la agrupación decimal es un proceso que pasa de agrupar unidades a decenas, de decenas a centenas y así de manera sucesiva. Sin embargo, debemos reconocer que es posible que esta situación de sumas horizontales no exige que se pongan en juego dichos conocimientos sobre agrupación decimal. Por lo tanto, el cuestionamiento sobre cuánto saben los alumnos de la agrupación decimal queda por explorarse con más profundidad.

4.2.7 Resultados del ítem 4

El ítem 4 se caracteriza por lo siguiente: la presentación de sumandos: es diferente al orden decreciente; tiene dos agrupaciones de centenas (600 y 400) y, a diferencia de la operación anterior (que tiene dos agrupaciones de decenas las cuales, al agruparse, quedan decenas restantes por lo cual en el resultado no había cero), aquí el 600 y 400 al agruparse, darán como consecuencia un cero en el resultado (6047).

$$\boxed{600 + 5000 + 7 + 400 + 4 =}$$

Anticipamos que los alumnos presentarían algunos procedimientos de resolución en los cuales reordenarían los sumandos de manera decreciente para resolver más “cómodamente” la operación. Por otro lado, esperábamos indagar conocimientos sobre la transformación de centenas y la escritura del cero en el resultado.

El procedimiento de resolución usado por los diez niños de la muestra fue el cálculo mental. En cuanto a los conocimientos sobre el sistema de numeración sobresalen los relacionados con la transformación de órdenes expresados como “Sumar para obtener un número solo o un solo resultado”. Por otro lado, los conocimientos en torno al cero que se manifestaron son los de la categoría “El cero como representación de ausencia”. En la Figura 6 se esquematizan los procedimientos de resolución y los conocimientos que se presentaron con más regularidad en las respuestas de los alumnos al ítem 4.

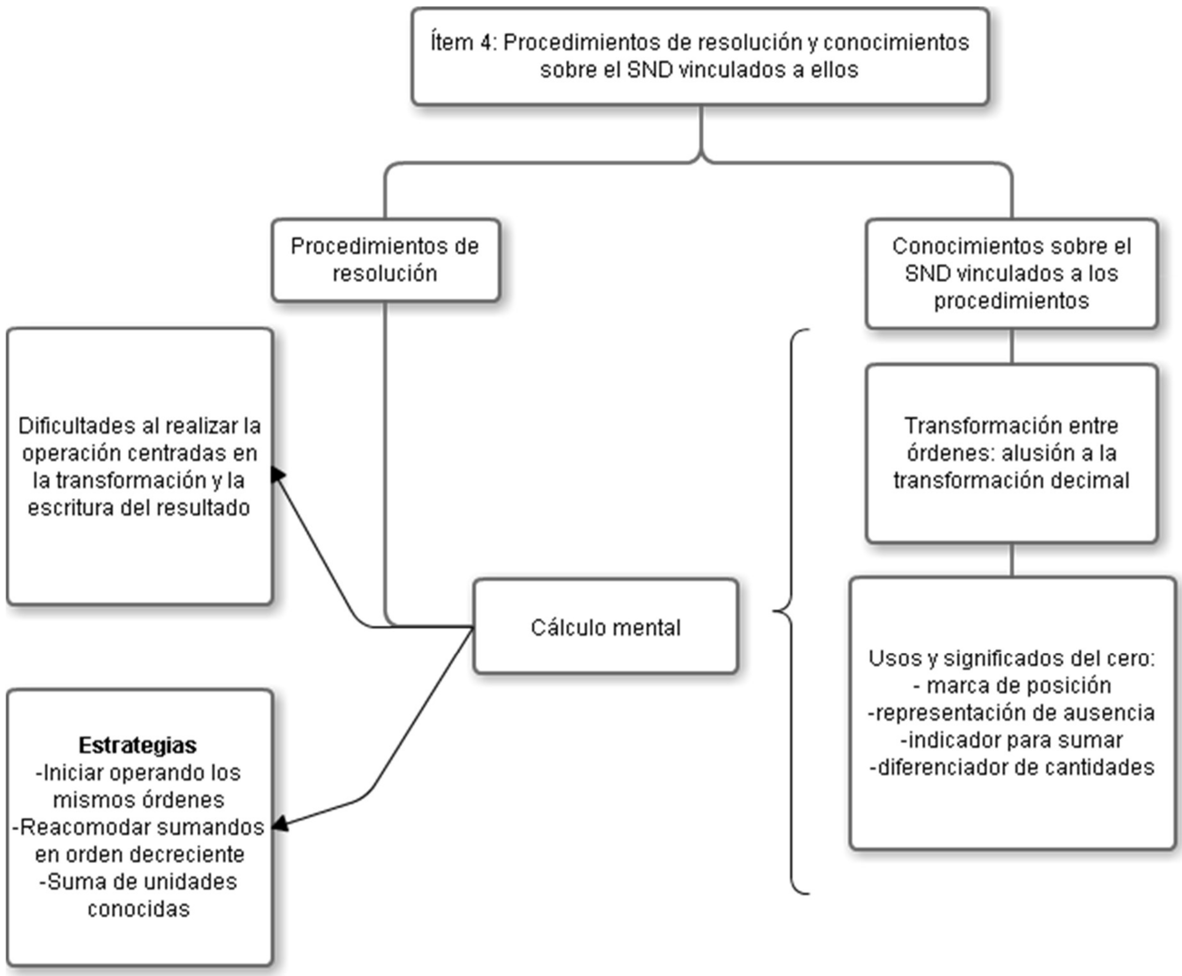


Figura 6. Procedimientos de resolución y nociones sobre el SND surgidos en el análisis de respuestas al ítem 4.

4.2.7.1 Procedimientos de resolución

Tipo 1. Cálculo mental

El procedimiento de resolución utilizado por los diez alumnos en este ítem fue el cálculo mental. Esta elección podría estar favorecida por los sumandos incluidos en la operación, pues al tener un 600 y un 400 rápidamente se puede identificar que dan 1000 y el resto de la operación es menos complicado.

Lo anterior se confirma por la preferencia que tuvieron los alumnos para empezar a resolver el cálculo apartando los “miles” o los 4000 y comenzando a operar las centenas 600 y 400. Nueve de los diez entrevistados optaron por sumar primero las centenas; algunas de las razones para hacerlo así son como las que da Ao5.

E- ¿Por qué eliges el cuatrocientos y el seiscientos para empezarlos a sumar?

Ao5- Porque con la suma me dio un número cerrado y con la suma de un número puede sumar un número cerrado más otro número cerrado me dio seis mil. (PC, p.25).

Ao5 describe las ventajas que tiene operar con números “cerrados” cuando se está calculando mentalmente.

Tipo 2. Dificultades en el cálculo mental

Tipo 2.1 Dificultades en la transformación de órdenes

Por otro lado, a pesar de que el ítem 4 no presentó mayores dificultades en su resolución para la mayoría de los alumnos, dos alumnas sí tuvieron algunos problemas.

Las entrevistadas Aa4 y Aa9, dieron como primera respuesta 6440 y 6447, respectivamente. Analizaremos cada caso por separado, aunque la causa que originó este intento erróneo es la misma.

Aa4 escribe como intento de respuesta el 6440, pero de inmediato se da cuenta de su equivocación.

E- Cuando te dio este resultado (6440), ¿cómo fue te diste cuenta que no era?

Aa4- Porque había sumado éste y éste (600 y 400) y son mil y se lo sumé a éste (al 5000) y son seis mil y luego pensé que no había sumado éste (refiriéndose al 400).

E- ¿El cuatrocientos?

Aa4- Ajá y lo puse, y estuvo mal porque nada más eran estos dos los que faltaban (el 40 y el 7). (PC, pp. 15-16)

Escribir el resultado le permitió hacer una revisión del mismo y darse cuenta de su error, identificando que su falla se debió a sumar nuevamente el 400 que ya había transformado a unidad de millar junto con el 600.

Aa9 comete el mismo error, pero no puede controlar el resultado y acepta como solución la cantidad de 6447.

> *Aa9- Cuarenta más cuatrocientos serían cuatrocientos cuarenta, más siete son cuatrocientos cuarenta y siete. (Aa9 ha sumado hasta ahora el 7 + 400 + 40 del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)*
>
> *E- Y ya aquí lo anotaste. Aquí veo que hay un seis mil en tu cifra final o un seis por lo menos (refiriéndome al 6 del 6,447 que Aa9 anotó como resultado), ¿ese de dónde salió?*
>
> *Aa9- Es que, de cuatrocientos cuarenta le sume a seiscientos que son mil, entonces más cinco mil serían seis mil y se le agrega el mil, serían seis mil cuatrocientos cuarenta y siete. (PC, p. 46)*

Ocurren otros detalles interesantes con la respuesta de Aa9. La alumna está usando cálculo mental oral y gracias a ello se puede identificar que inicia el cálculo por el sumando de la extrema derecha (el 40) y sigue sumando de corrido, sin agrupar primero las centenas (400 y 600). Creemos que esta estrategia de sumar iniciando por los sumandos de la derecha puede estar apoyada en la técnica propia del algoritmo vertical (en el cual se inicia sumando las cifras de la derecha). Aunque en este caso nuestra entrevistada sumó cantidades completas desde la derecha.

Una vez que Aa9 obtiene el resultado parcial de 440 lo suma al 600, con lo cual obtiene 1000 que agrega al 5000. En este punto de su cálculo Aa9 sí conmuta el orden de los sumandos, pues en lugar de agregar 5000, suma 600 a 440, en un intento por agrupar las centenas. El problema que se presenta es que a pesar de haber hecho la transformación de 400 y 600 que le da 1000, el paso es "olvidado" o el acto de transformar las centenas queda omitido de alguna manera y las vuelve a sumar. Aa9 hace lo contrario a Aa6: sí se da cuenta de que con el 600 y el 400 ya había obtenido 1000, por lo cual no podía tener otros 400 en el resultado.

Tipo 2.2 Dificultades al decir el nombre del número

Hubo errores en la denominación oral de las cantidades que, sin embargo, no causaron errores en el cálculo matemático mismo. Ello pone de manifiesto el control mental que los alumnos tienen sobre las cantidades, lo cual es una característica del cálculo mental. Un ejemplo de lo anterior lo presenta Aa6, quien a pesar de haber dicho quinientos para referirse al 5000, no pierde control sobre las cantidades que está operando.

E- Pasamos al que sigue, ¿qué dice? (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40=).

Aa6- Seiscientos más quinientos más siete más cuatrocientos más cuarenta.

E- Haz tú cálculo y ahorita me dices…

Aa6- Seiscientos más cuatrocientos da, mil, da mil. Y mil más quinientos, seis mil; más cuarenta más siete... seis mil cuarenta y siete (escribe 6047). (PC, pp.30-31).

Este tipo de error en el que los alumnos cambiaban el nombre del número, pero lo operaban de manera correcta se presentó en dos respuestas del ítem 1, en una respuesta del ítem 4 y en una respuesta del ítem 5.

4.2.7.2 Conocimientos sobre los componentes y el funcionamiento del sistema de numeración decimal

Tipo 1. Transformación de órdenes del SND

La estructura del ítem 4 permitió seguir indagando sobre las concepciones de los alumnos respecto de la transformación de órdenes. Seis de ocho respuestas son del tipo “Sumar para obtener un número solo o un solo resultado”. Como se mencionó en los resultados del ítem 3, este tipo de respuestas implican que los niños identifican dos agrupaciones del mismo orden y las operan para obtener una sola centena o millar o un “número solo”. Se hace hincapié en que este tipo de respuestas no hacen referencia explícita a la transformación que necesariamente debe hacerse al completar un grupo de diez unidades, o de diez decenas, o de diez centenas, etc.

Al intervenir para solicitar una explicación sobre las razones por las cuales Aa1 decidió sumar las dos agrupaciones de centenas, responde lo siguiente:

> *Aa1- Como aquí hay dos centenas (el 600 y el 400 del ítem) no se pueden poner los dos dígitos ya que le salió una suma… estos dos son centenas entonces se tendrían que sumar para hacer este sólo una centena o una unidad de millar. (O, p.11).*

Como puede leerse, la alumna Aa1 hace referencia a los órdenes del sistema de numeración. Además, está dando cuenta de conocimientos sobre la escritura numérica al indicar que “no se pueden poner los dos dígitos” (el 400 y el 600), pues sólo se escribe el dígito que indica el valor relativo de cada orden. Si bien es cierto que no indica explícitamente el principio de agrupamiento recursivo, la alumna hace alusión a la transformación que se opera entre órdenes: de ser dos centenas se transforman en una sola centena. Hasta este momento, la alumna no ha indicado nada explícito sobre la transformación o las razones que dan paso a dicho cambio entre órdenes. En ese sentido parece que con decir “se suma” bastase para justificar la regla de agrupamiento decimal, tal como muestran la mayoría de las respuestas sobre la razón de agrupar órdenes.

Sin embargo, al buscar una manera diferente de reflexionar sobre la transformación de órdenes, se le hace, a la misma alumna, el siguiente planteamiento.

> *Aa1- (Escribe 6047 como respuesta al ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)*
>
> *E- Dices que te da seis mil cuarenta y siete... oye aquí veo un cero, tú dime, ¿qué significa ese cero?*
>
> *Aa1- Pues que aquí no hay centenas.*
>
> *E- No hay centenas en seis mil cuarenta y siete. Oye, una pregunta, yo veo algunas centenas… el cuatrocientos y el seiscientos.*
>
> *Aa1- Sí hay centenas en la suma, pero no hay centenas en el resultado entonces es solamente que no hay centenas en el resultado.*
>
> *E- ¿Tú sabes qué pasó con esas centenas que ya no están en el resultado?*
>
> *Aa1- Las convertí en unidades de millar. (O, p. 10).*

Se tuvo que buscar otra forma de preguntar sobre la transformación para propiciar que la misma alumna hiciera referencia explícita a esa transformación, pues sí parece tener claro la conversión que se opera entre agrupaciones.

Tipo 2. Conocimientos sobre el cero

El cero en el resultado del ítem 4 nos permitió seguir indagando sobre usos y significados de este signo. Se recabaron ocho respuestas relacionadas con él, cuatro de ella se catalogan en la subcategoría "El cero como representación de ausencia", dos dentro de "El cero como indicador de cómo obtener el resultado" y los dos restantes en las subcategorías "El cero como marca de posición" y "El cero como diferenciador de cantidades", respectivamente.

Tipo 2.1 El cero como representación de ausencia

Las respuestas consideradas en esta categoría están vinculadas con las respuestas sobre la transformación de órdenes: cuando se les preguntaba a los alumnos sobre el significado del cero en el resultado 6047, respondían "pues que aquí no hay centenas" o cientos porque las centenas del ítem (600 y 400) ya se habían sumado o convertido a unidades de millar. El alumno Aa5 lo explica de la manera siguiente:

E- ¿Y cómo decidiste poner ahí ese cero (en el resultado 6047)?

Ao5- Porque no había centenas, sólo había las decenas y unidades después." (C, p.18).

Su compañero, además, ofrece una explicación sobre los órdenes y su relación con la escritura de ceros cuando alguno de ellos está ausente.

E- ¿Y el cero que significaría?

Ao7- Que no hay centenas.

E- ¿O cómo le llamarías tú de una manera que tú lo entiendas mejor?

Ao7- Que no hay un número mayor a cuarenta y sie... mayor de cien y menor de mil; por eso no puse la ninguna... porque no hay mayores de cien y menores de mil.

E- Entonces para ti eso sería (una centena); que no hay números mayores de cien, ni menores de mil. (C, p. 19).

Tipo 2.2 El cero como diferenciador de cantidades

Se presentó sólo una respuesta en esta categoría, la cual se expondrá a detalle por incluir diversos conocimientos sobre el sistema, además de considerar al cero como diferenciador de cantidades.

Oye, este cero de aquí (de 6047) que tú decidiste poner aquí ¿qué significa?

Aa2- Es el mil.

E- A ver cuéntame.

Aa2- Es seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Y cómo fue que lo decides poner ahí?

Aa2- Lo sumé y ya en mi pensamiento tenía que ser seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Oye y qué significa que ese cero este ahí?

Aa2- Que equivale a seis mil, si le quito el cero nada más me va a dar seiscientos cuarenta y siete. Equivale a mil. (C, p.16).

Resalta que la Aa2 indique que *el "cero equivale al mil".* Para esta alumna la escritura del cero repercute en la cantidad final, "la vuelve de los miles". Parece ser que la combinación 6 con 0 es la que se transforma en *miles*.

Tipo 2.3 El cero como indicador de "cómo sumar"

En este ítem al igual que en el ítem 1 dos alumnos argumentan que cero debe tomarse en cuenta para decidir en qué momento sumar. Es necesario aclarar que estas respuestas surgen ante un contra ejemplo del entrevistador en donde se les pregunta si creen que 65,744 podría ser el resultado del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =. Como se puede notar, la sugerencia del entrevistador es que con sólo poner las unidades de cada orden podría componerse el resultado, en este caso el 6 del 600, el 5 del 5000, el 7, etc. Las alumnas Aa2 y Aa4 identifican que ese procedimiento es incorrecto y que se debe poner atención en los ceros.

E- Una niña, cuando estaba resolviendo (las operaciones), me dijo que el resultado era (escribo 65744), ¿qué opinas de lo que hizo ella?

Aa2- No la resolvió bien porque ella se fijó en los... en éste sí está bien… (Aa2 se refiere al 6 que inicia la cantidad 65744)

E- ¿En cuál parte sí está bien?

Aa2- En el seis (refiriéndose a que el seis sí es el primer número de ambas escrituras, tanto de la respuesta correcta 6047 como de la respuesta no correcta 65744) sí está bien por el seis mil, en el cinco no está bien, éste tampoco (el 7), ni el cuarenta y cuatro porque nada más iba sumando los principales números no iba sumando los ceros que tenía... (C, pp.14-15).

…

E- ¿Qué le dirías?

Aa4- Que está mal porque nada más está poniendo los números del principio y los tiene que sumar todos con ceros, ¿no? (C, p.17).

Las respuestas de Aa4 y Aa2 refieren que se deben *sumar los ceros*. Los alumnos usan la cantidad de ceros de un número para tomar decisiones sobre cómo reordenar los sumandos para operarlos; también deciden si es conveniente adicionar como primer paso del cálculo aquellos sumandos del mismo orden (decenas o centenas primero).

Llama la atención el uso de un lenguaje particular para referirse a conceptos que los niños están detectando como importantes. Cuando la alumna indica que, desde su punto de vista, la otra niña (la del contra ejemplo propuesta por la entrevistadora) "iba sumando solo los principales numeros", en realidad está hacienda alusión a las cifras diferentes del cero de cada sumando o a las unidades de cada orden. La alumna usó el término "principales" para marcar una diferencia entre estas cifras y los ceros.

Tipo 2.4 El cero como marca de posición

Finalmente, una alumna más, Aa10, indica el cero como una posición que debería ser ocupada por los cientos que en el caso del ítem 4 no se tienen.

> *E- ¿Cómo decidiste que este cero va aquí? ¿Este cero qué significa? (señalo el cero de 6,047)*
>
> *Aa10- Significa que ahí va el lugar de los cientos. (C, p.19).*

Para Aa10, el cero en 6047 es el lugar de una agrupación de centenas que se podría tener y eso en términos de conocimiento del funcionamiento del sistema de numeración es importante, puesto que denota que la alumna reconoce al cero como una marca de posición. Ese cero es la posición que ocupan los cientos.

4.2.8 Discusión de resultados del ítem 4

El cálculo mental fue el procedimiento usado para este ítem por todos los entrevistados; ello nos permitió identificar algunas dificultades y también los recursos que los alumnos usaron para enfrentarlas.

La primera de ellas fue que, al estar haciendo cálculo mental oral, cambiaron los nombres de los números que están operando (por ejemplo, quinientos por cinco mil). Sin embargo, ese hecho no condujo a errores significativos, pues los alumnos mantuvieron control sobre la cantidad a pesar de cambiarle el nombre (lo cual no sucedió en el ítem 5, como se verá en el siguiente apartado).

La segunda dificultad identificada fue "olvidar" que ya se había hecho una transformación entre órdenes y volver a sumar un orden ya agrupado. Este hecho trajo como consecuencia que el resultado de 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 = 6047, fuera escrito como 6440 o 6447 porque se le volvieron a sumar 400 a los 600 + 400 ya transformados. Una alumna de las dos que cometieron este error pudo darse cuenta del mismo y corregirlo, la segunda de ellas no. Esta alumna inició el cálculo por la derecha sumando 40 + 400 + 7, que es una estrategia que corresponde más al cálculo algorítmico que al mental, hecho que podría haber contribuido a que perdiera el control sobre las trasformaciones.

Debido a esos desafíos reconsideramos la importancia de la escritura de resultados parciales como apoyo al control de los resultados. Tener la posibilidad de releer anotaciones de resultados parciales, dio la posibilidad a algunos entrevistados de corregir errores de cálculo.

Lo anterior refuerza la idea compartida por diversos autores de trabajar directamente con la escritura e interpretación de números en diferentes tareas matemáticas, para reconstruir sus principios de funcionamiento (Lerner, 1992, 2005, 2013; Lerner y Sadovsky, 1994; Fernández, 2008; Broitman, et al., 2011).

Al iniciar este trabajo de indagación esperábamos que los alumnos pudieran explicitar que llegar a diez unidades, decenas, centenas, etc., es el momento indicado para formar otra agrupación, pero este tipo de explicación no apareció. La explicación más cercana a esta regla de agrupamiento recursivo ha sido la de convertir a centenas o completar a centenas porque ya se tienen 100, número que hace referencia a la base 10. Sin embargo, ya se ha hecho la consideración de que nuestra tarea de sumas horizontales no exige, necesariamente, la puesta en juego de este saber. Por lo cual no podemos concluir que los alumnos no hayan construido el principio de agrupación recursiva.

Por el contrario, encontramos que en este ítem las explicaciones sobre la transformación de órdenes del tipo "sumar para obtener un número solo o un solo resultado" fueron las más frecuentes. Es probable que este sea un nivel de interpretación de la transformación que tiende más a explicar el procedimiento de transformación, pero no la regla que marca el cambio entre agrupaciones.

En lo que al cero respecta, encontramos que en esta operación los alumnos hicieron alusión a los diversos usos y significados del cero. Llama la atención el vínculo que se estableció entre la noción del cero como representación de ausencia con la categoría de transformación de órdenes, cuando los alumnos obtuvieron 1000 al sumar 600 + 400 y respondieron que en consecuencia apareció un cero en el resultado (6047) por esas centenas agrupadas en un millar. La referencia a dos características del sistema de numeración (las agrupaciones y la representación de ausencia mediante el cero) nos conduce a pensar en la diversidad de conocimientos relacionados que pueden aparecer cuando se resuelve una tarea de cálculo como las que conforman nuestro instrumento de indagación.

En este trabajo de análisis también nos ha sorprendido la multiplicidad de significados y usos que se le pueden dar al signo cero. En unos momentos se usa como información para decidir cómo calcular, cómo ordenar sumandos; el cero brinda elementos para decidir si un sumando es de un determinado orden. Esa multiplicidad de significados del cero ha sido posible de identificar en buena medida por presentar ítems que fomentaran una discusión al respecto.

4.2.9 Resultados del ítem 5

El ítem 5 de nuestro instrumento de evaluación tiene un nivel de complejidad mayor respecto de los anteriores por las siguientes características: se llevan a cabo dos transformaciones de órdenes, la primera entre centenas (1700 + 800); la segunda entre millares (9000 + 2500). Además, el resultado que se obtiene es del orden de las decenas de millar (11,105) y lleva un cero en su escritura por la ausencia de una cifra diferente de cero en la posición de las decenas.

$$\boxed{9000 + 1700 + 800 + 5 =}$$

Anticipamos procedimientos de resolución apoyados en estrategias de cálculo mental. Específicamente, esperábamos que los alumnos decidieran empezar su operación descomponiendo, por ejemplo, el 1700 en 1000 y 700, para operar el 700 y el 800 en primer lugar. Asimismo, anticipamos que los alumnos reordenarían los sumandos de mayor a menor para resolver de manera más “cómoda” la operación. Por otro lado, esperábamos indagar nociones sobre la transformación de centenas y la escritura del cero en el resultado.

Destaca en el análisis de las respuestas algunas de las dificultades con las que los alumnos se enfrentaron para resolver este ítem. La primera de ellas tiene que ver con algunos problemas en el cálculo para obtener el resultado correcto. La segunda dificultad tuvo que ver con la lectura e interpretación de la cantidad 1700, (Ver Figura 7).

Finalmente, se presentó como conocimiento no previsto en nuestro análisis previo: el uso y el significado dado por los niños a la marca gráfica de la coma.

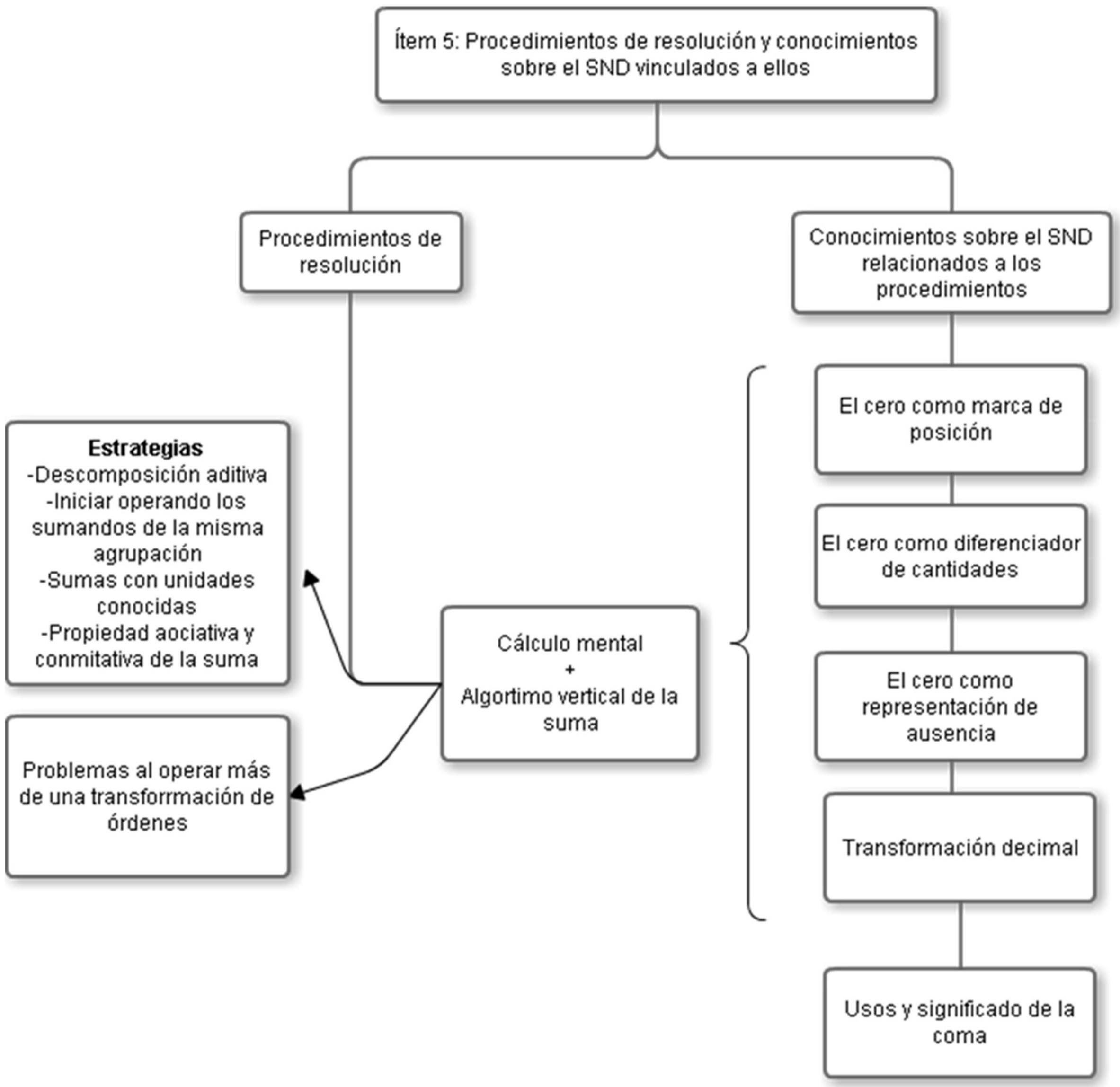


Figura 7. Procedimientos de resolución y nociones sobre el SND surgidos en el análisis de respuestas al ítem 5.

4.2.9.1 Procedimientos de resolución

Tipo 1. Cálculo mental

Los diez alumnos entrevistados recurrieron al cálculo mental para obtener su resultado. Sin embargo, dos de ellos reconocieron que esta operación tenía cierto grado de dificultad mayor que las demás y se apoyaron en una parte de su cálculo del algoritmo vertical o de la calculadora. A este respecto, cabe hacer mención de que la calculadora estaba a disposición de los alumnos por si ellos juzgaban conveniente su uso, o para corroborar si su resultado fue correcto o no, en lugar de que el entrevistador lo hiciera.

Para el análisis de los procedimientos de cálculo se separarán aquellos procedimientos de los niños que no tuvieron ninguna dificultad ni dudas para llegar al resultado. Posteriormente se expondrán los procedimientos de aquellos alumnos que encontraron algunas dificultades en su resolución.

Tipo 1.2 Procedimientos de resolución exitosos.

Las alumnas Aa1 y Aa3 usaron procedimientos de resolución donde la principal estrategia de cálculo fue obtener primero 10,000 sumando 9000 + 1000. Este último sumando (1000) lo obtienen a partir de descomponer el 1700 en 1000 y 700. Hay otra parte del cálculo que realizan estas alumnas y consiste en obtener 1500, el cual resulta de sumar 700 (obtenido en la descomposición de 1700) y 800.

Los alumnos Ao5 y Ao7 optan por obtener primero un 2500 que adicionarán al 9000. Lo hacen a partir de sumar las centenas 700 + 800. De igual manera han descompuesto la cantidad de 1700 en 1000 y 700, lo cual les permite sumar las centenas. Lo anterior es una de las estrategias de cálculo mental más reconocidas en la literatura, la obtención de números “redondos o nudo” para flexibilizar y economizar los cálculos.

Se cuenta con la justificación de un alumno (Ao5) que hace alusión al citado *atajo* de sumas de unidades conocidas a las que se les agrega cero. Llama la atención por el hecho de que conocer dicha técnica y utilizarla con éxito, aunque representó un desafío el poderla explicar.

Se le solicitó a Aa5 explicar su decisión de sumar 2500 a 9000, pensando que tal vez indicaría que 2500 son miles y que los miles se suman a los miles; sin embargo, ofrece una respuesta singular. El alumno hace referencia a la suma de unidades conocidas a las que se les agrega cero: el 9000 pasa a ser 9, el 2000 de 2500 pasa a ser 2, y 9 + 2 = 11. En otras palabras, pasa a la suma de los números anteriores sin los ceros, lo cual puede verse como un cambio de unidadad; de unidad = 1, a unidad = 1000. El problema surge cuando trata de expresar al 500 con la unidad 1000. Acude entonces al *atajo* diciendo que 2500 sería 2.5, cifra a la que repondrá su valor relativo una vez que le agregue dos ceros.

E- Que es lo que escribiste, ¿cómo decides ahora sumarle esos dos mil quinientos al nueve mil?

Ao5- Serían... nueve más dos... serían once...

E- ¿Y luego?

Ao5- Bueno es que ahí serían nueve más dos... ¿punto cinco?

E- Nueve más dos punto cinco...

Ao5- Serían nueve mil doscientos cinco… nueve mil quinientos, once mil quinientos. (PC, pp.25-26).

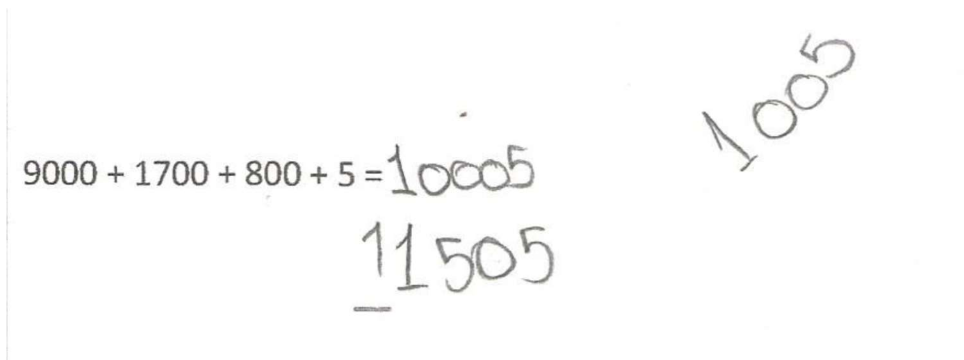
Como se puede notar, se presentan algunas dificultades para recomponer el valor absoluto del 2.5 y en un momento dado dice “doscientos cinco”. Sin embargo, el alumno está llevando el control mental de las cantidades y finalmente llega al once mil quinientos. Probablemente, el alumno estuvo llevando a cabo una cuenta paralela con el valor íntegro de los sumandos; este hecho puede estar favoreciendo que recupere el valor íntegro del 500 pese al 2.5 que obtuvo con la cuenta reducida a dígitos o *atajo*.

Cabe mencionar que este 2.5 es correcto si consideramos que el alumno está considerando (implícitamente) a la unidad como equivalente a mil; sin embargo, el 2.5 es difícil de interpretar para el alumno.

Tipo 1.2 Procedimientos de resolución con algunas dificultades

Tres alumnas de los diez entrevistados llegaron a una respuesta correcta tras haber enfrentado algunas dificultades. Se presentarán a detalle los casos de dos entrevistadas quienes fueron las que libraron más problemas al conformar su resultado.

La alumna Aa2 transita por una serie de intentos de escritura numérica de resultados que permite dar cuenta de su proceso de cálculo.



A continuación, se presenta el intercambio que se dio entre la investigadora y la entrevistada mientras escribe los resultados presentados en la imagen anterior.

(Aa2 está resolviendo mentalmente la operación 9000 + 1700 + 500 + 5 =)

E- Cuéntame ¿qué número te dio?

Aa2- (Escribe 10005 pero lee once mil cinco) once mil cinco, no pérame (sic).

E- Si quieres abajo (escribe lo que falta o un nuevo resultado).

Aa2- ¿Puedo usar la calculadora? o la calculadora solo en caso de...

E- En caso de dudas.

Aa2- Ah…

E- Si gustas así hacerla hasta donde tú puedas.

Aa2- Sí, once mil cinco (leyendo 10005).

E- ¿Ese número que tienes ahí es once mil cinco?

Aa2- Ajá.

E- Ok... Cuéntame cómo le fuiste haciendo ¿qué sumaste con qué?

Aa2- Novecientos más mil me da diez mil y luego ahí tiene un setecientos, le sume setecientos a ochocientos... (Calculando en su mente) mil quinientos cincuenta y cinco... sí estaba mal, yo sabía que me faltaba aquí un número (escribe un nuevo dato, el 1505).

E- ¿Qué dice ahí?

Aa2- Mil quinientos cinco...

E- Mil quinientos cinco...

Aa2- ¡Noooo! (ríe) Es once mil quinientos cinco (Agrega un cero a la derecha de 1505 resultando 11505).

E- ¿En qué te diste cuenta ahorita que no era mil quinientos cinco?

Aa2- Por los... es novecientos o mil... mil, es mil... (Refiriéndose al orden de los 9000 del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5) por los nueve mil y los mil de aquí y los mil que me da de los... aquí le quito doscientos al setecientos y los junto con los ochocientos y me da otros mil y los quinientos que me sobran los puse aquí (señala su resultado 11505) y los cinco pesos. Yo los pienso como pesos.

E- ¿Los estás pensando como pesos? ¿Y eso te ayuda?

Aa2- Sí.

E- Entonces tu resultado es...

Aa2- Once mil quinientos cinco.

E- Ok, ¿por qué crees que habías escrito esto? (refiriéndome a 10005).

Aa2- Porque no iba sumando bien y no estaba pensando lo que... porque aquí no puse ni los once mil (refiriéndose a cuando escribió 10005) puse nada más mil quinientos cinco, mil cinco...

E- ¿Este es mil cinco? (señalo 10005)

Aa2- Sí... ¡Noooo! (se detiene a leer) Porque puse... lo puse mal, me sobraría aquí el cinco para que fueran mil cinco (refiriéndose quizá no al cinco en sí, sino a una posición o a recorrer el cinco, quitando un cero).

E- A ver ¿cómo escribirías mil cinco?

Aa2- (Escribe 1005)

E- Pasamos ahora sí a la que sigue. (PC, 8 y 9).

En un primer momento obtiene a través de cálculo mental el resultado, el cual expresa oralmente diciendo: "once mil cinco"; sin embargo, escribe 10005. En su primer resultado expresado oralmente notamos la falta de 1000 (según lo que ella enuncia; pues según el cálculo correcto, faltarían 1500 por escribirse). Cabe destacar que el hecho de que la alumna haya escrito diferentes ensayos de la cantidad obtenida oralmente fue otro de los medios por los cuales pudo comparar entre sus cantidades "pensadas" y entre sus números escritos.

Una vez que se le pide explicarnos cómo realizó sus cálculos, se da cuenta de que le faltan 1505 en su resultado escrito. La alumna escribe entonces dicha cantidad debajo del 10005 que produjo antes. Aa2 sigue reflexionando y pide que la espere, entonces agrega un 1 antes del 1505, quedando 11505.Se le pide explicar cómo se dio cuenta de su error y comenta lo siguiente.

E- ¿En qué te diste cuenta ahorita que no era mil quinientos cinco?

Aa2- … Por los nueve mil y los mil de aquí (habla del 9000 de la operación y los mil desagrupados de 1700) y los mil que me da de los... aquí le quito doscientos al setecientos y los junto con los ochocientos y me da otros mil y los quinientos que me sobran los puse aquí (señala su resultado 11505) y los cinco pesos. Yo los pienso como pesos.

E- ¿Los estás pensando como pesos? ¿Y eso te ayuda?

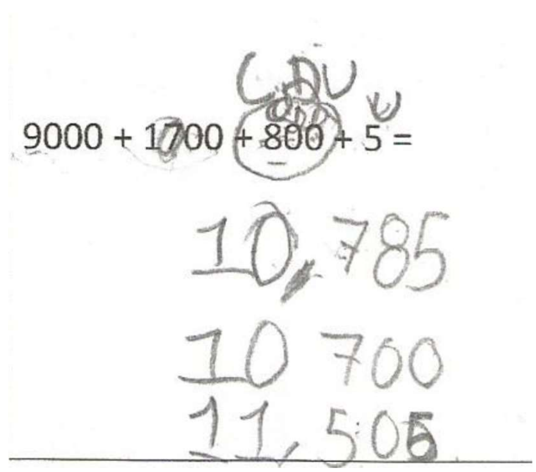
Aa2- Sí.

E- Entonces tu resultado es...

Aa2- Once mil quinientos cinco. (PC, p. 8).

La alumna controló los resultados apoyándose en la descomposición de las cantidades para ir formando miles. Los resultados parciales en los que se apoya son los 10,000 de 9000 + 1000 (descompuso 1700 en 1000 + 700); luego en otros 1000 obtenidos de 800 + 200 (descompuso 700 en 200 + 500). Esta vía de solución muestra mayor control sobre las sumas parciales que en su primer intento de resolución. Esta alumna, además, se apoya en pesos, tomando al dinero como contexto que en sus palabras le resulta de ayuda. La referencia al contexto del dinero ha sido reportada en otros trabajos como el de Broitman (2012).

Otro ejemplo de dificultad que se pudo controlar para obtener resultado correcto lo ofreció la alumna Aa8. (Ítem 5: 9000 + 1700 + 800 + 5 = 11,505) Su primer resultado fue 10,785; al pedirle que explique cómo llego a él, hace referencia al procedimiento de “Juntar-Poner-Acomodar” visto en el apartado del ítem 1, mismo que fue utilizado por la alumna al resolver el ítem 1 y el 2 (donde este procedimiento es completamente aplicable). Ese procedimiento podría aplicarse al ítem 5 una vez que se hicieran las transformaciones o sumas necesarias y se ordenaran los sumandos en forma decreciente. Sin embargo, Aa8 lo utiliza antes de llevar a cabo las transformaciones entre órdenes. Pero se debe de atender que, de hecho, sí hace la suma de la primera parte de la operación, los 9000 + 1000 de 1700; de lo cual resulta el 10,000 que encuentra. De ahí en delante, sólo intenta acomodar los números.



Como consta en el registro, Aa8 escribe como primer resultado el 10,785; Aa8 ha acomodado el 5, el 8 y el 7 de manera forzada en los lugares que le corresponderían a las unidades, decenas y centenas. Al pedirle una explicación más detallada de su procedimiento llega a un punto en que distingue que está acomodando números y no sumándolos “como una suma normal”, según las palabras de Aa8. En el siguiente fragmento queda claro cómo la alumna posee recursos de cálculo y conocimientos, aunque implícitos, sobre la escritura numérica del sistema de numeración.

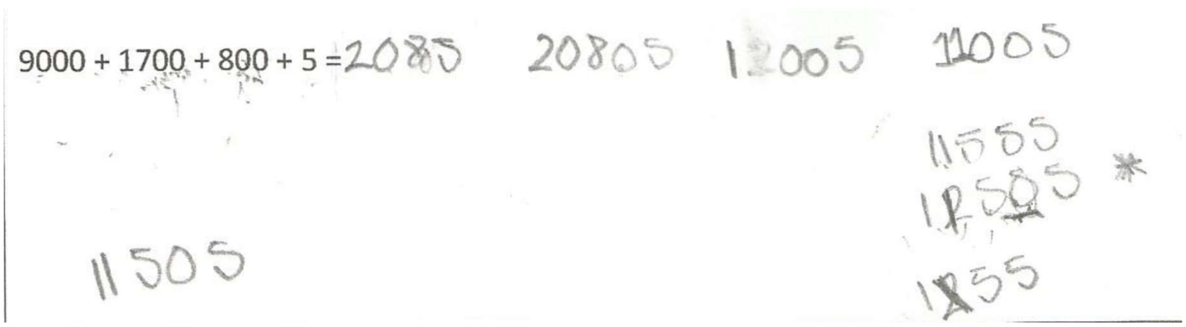
> *E- ¿Con cuál resultado te quedas?*
>
> *Aa8- Con este (refiriéndose al 11, 505).*
>
> *E- ¿De qué te diste cuenta?*
>
> *Aa8- De que aquí ya me da el resultado diez mil setecientos, pero si lo acomodo me dio diez mil setecientos ochenta y cinco; pero además de acomodarlo también lo puedo sumar como suma normal; me da otra cantidad porque ya no sería lo mismo acomodar que sumar.*
>
> *E- A ver, ¿cómo sería la diferencia?*
>
> *Aa8- Acomodar sería si tengo quinientos (escribe 500 + 90 + 8), más noventa más ocho ya sabría que es (escribe) que el cinco es normal; el nueve tomaría su lugar, el segundo cero (cero de las decenas) y el ocho el cero (refiriéndose al cero de las unidades); ese es acomodarlo. Y sumarlo como es la misma cantidad, me saldría lo mismo. Pero como aquí (señalando el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =) tengo dos números que tienen las mismas cifras, la misma cantidad de números, ya aquí sería diferente. (PC, pp. 43-44).*

Vale la pena enfatizar cómo la alumna nombra a la cifra diferente de cero del sumando mayor (en este caso el 5) como “normal”. Parece que concibiera que esa cifra al conservar su lugar y no tenerse que acomodar adquiere la cualidad de “normal” o con un valor ya asignado, por contraste con el 9 y el 8 que deben ser acomodados para adquirir su valor. Pareciera haber un interjuego entre el valor absoluto y el valor posicional de las cifras.

Tipo 1.3 Procedimientos de resolución no exitosos

En el apartado anterior se describieron los retos que enfrentaron dos alumnas tras un primer intento de respuesta no exitoso; sin embargo, las entrevistadas pudieron detectar la dificultad y controlar el resultado. En este apartado se expondrán ejemplos de respuestas no exitosas en los cuales, a diferencia del apartado anterior, las entrevistadas no lograron detectar el error y corregirlo.

El primer caso se presenta en las respuestas de Aa4. Esta alumna ofreció numerosos intentos de respuesta tal como se muestra en la imagen.



Los primeros dos números escritos por Aa4, el 2085 y el 20805 se desprenden del cálculo de 9000 + 1000 (1000 resultante de la descomposición de 1700 en 1000 y 700). En este punto la alumna lleva el cálculo mental oral de “diez mil setecientos más ochocientos… dos mil ochocientos cinco” como se presenta a continuación:

> *E- ¿Qué número te dio?*
>
> *Aa4- … Aquí eran nueve mil, más mil que son diez mil; más setecientos, son dos mil setecientos más ochocientos ya son...dos mil… Dos mil ochocientos cinco. (PC, p.16).*

La dificultad que la alumna presenta es un cambio de nombres de números que afecta el resultado. Aa4 va calculando mentalmente y en lugar de retener la cantidad “diez mil setecientos” la cambia por “dos mil setecientos” (nótese que las palabras diez mil y dos mil son muy próximas fonéticamente) y de ahí sigue sumando. Además, presenta dudas en la escritura de la cantidad dos mil ochocientos cinco lo que se muestra en sus dos intentos de escritura, uno 2085 y otro 20805.

En apartados anteriores presentamos el caso de alumnos que cambiaban el nombre de los números al enunciarlos, sin perder el control de la cantidad a nivel mental. Por el contrario, Aa4 cambia a nivel oral los números con los que está operando y en su caso sí deriva en errores en los cálculos. La complejidad mayor del ítem 5 con respecto de los anteriores pudo ser un factor que dificulta llevar el control del cálculo, más aún si no se tienen estrategias de cálculo mental desarrolladas.

Como se muestra en la imagen, Aa4 ofrece otras respuestas una vez que se dio cuenta de sus errores. La manera en que va controlando el resultado es una estimación previa que ha hecho del resultado, pues tras una breve conversación detectamos que ha anticipado obtener un resultado de más de 10,000. Gracias a ello, ofrece una respuesta muy próxima a la correcta (11,555):

E- Tú me dices, "sumo el nueve mil más el mil de aquí" (señalo 1700) y te da diez mil, ¿y por qué acá te da once mil?

Aa4- Porque son nueve mil más mil, son diez mil y setecientos más ochocientos son... mil quinientos y esos… a esos diez mil le sumo el otro mil, entonces serían… ¿once mil quinientos cincuenta y cinco? (dudosa)

E- Once mil quinientos...

Aa4- ¿Cincuenta y cinco? (insegura)

E- A ver, si quieres escríbelo aquí.

Aa4- (Escribe 11555) (PC, p.18)

El centro de la dificultad en estas respuestas consistió en la serie de cálculos parciales con doble transformación de órdenes (de centenas a unidades de millar, de unidades de millar a decenas de millar) que la alumna llevaba a cabo mentalmente. A esa última cifra escrita añade un 50 (en lugar de darle 11,505 le da

11,555) que no está en ningún sumando ni resulta de ninguna transformación de unidades.

Este problema con la transformación de órdenes también se presenta en la respuesta de la alumna Aa9, cuyo resultado de la operación le da 10,805. Se presentaron tres factores que dificultaron llegar a una respuesta exitosa en el caso de Aa9. El primero de ellos es que inició su cálculo por el orden menor, por las unidades. Está práctica es propia del algoritmo en columnas donde se empieza a sumar por las unidades, pero no es efectiva en cálculo mental donde hay transformación de órdenes. En el fragmento siguiente se advierte la dirección de sus cálculos.

E- A ver, cuéntame cómo le vas haciendo.

Aa9- Primero sumé el cinco más ochocientos que serían ochocientos cinco, más nueve mil son nueve mil ochocientos cinco, entonces aquí lo que voy a sumar sería diecisiete mil (refiriéndose al 1700) (PC.p.46).

La segunda dificultad se evidenció en la última línea del fragmento anterior cuando la alumna interpreta erróneamente el 1700. Este número fue leído en un primer momento como "diecisiete mil", pero al pedirle que colocara las comas en los lugares que ella creyera convenientes lo hace correctamente, con lo cual corrige su interpretación a "mil setecientos":

Aa9- Sería nueve mil ochocientos cinco, de nueve mil ochocientos cinco se le agregan diecisiete mil... (Pensativa, murmulla diecisiete mil).

E- ¿Cómo es que sabes que dice diecisiete mil?

Aa9- Aquí es diecisiete más dos ceros son diecisiete mil (pronuncia lentamente y señala el 1700 del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5=).

E- … Estoy notando que yo no agregué comas en mis números ¿dónde crees que en mis números debería haber comas?

Aa9- (Pone comas en cantidades de millares del ítem que son el 9000 y el 1700, quedando 9,000 y 1,700).

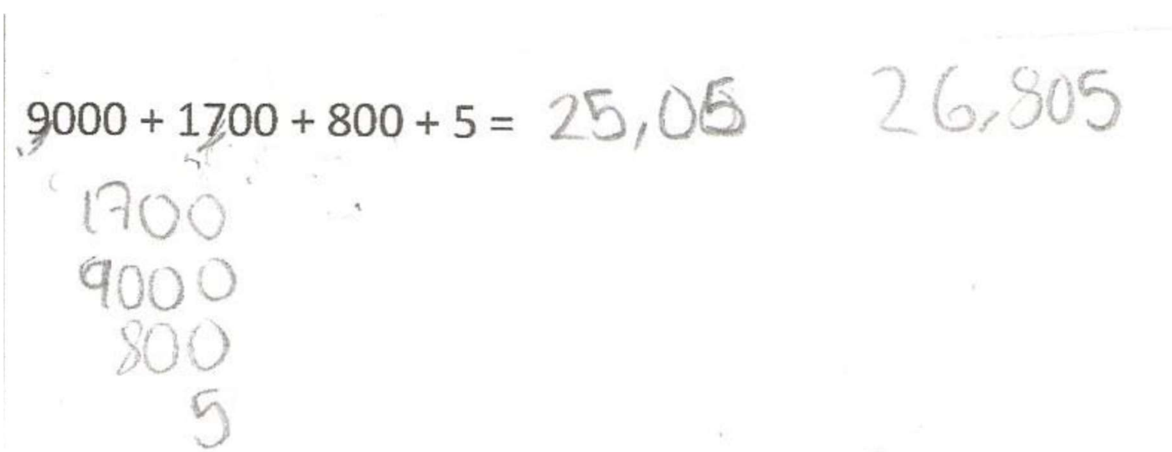
E- Sólo ahí agregarías comas, en el nueve mil....

Aa9- (Completa la frase) … Y en el diecisiete... en el mil setecientos (la coma cambio la forma en que Aa9 lee la cantidad de 1700) ... ya me di cuenta de que son mil setecientos. (PC, p.47).

Aa9 continúa con su cálculo, ahora interpretando correctamente el 1700. Llega al resultado 10,805. La alumna ha sumado –iniciando por las unidades– el 5, el 800, el 9,000 y finalmente el 1,000 de 1700. El problema ahora es que no opera el 800, es decir, no lleva a cabo la transformación de centenas en millares.

Otro de los procedimientos no exitosos se presenta en las respuestas de la alumna Aa6. Ella comete errores en la lectura de los números del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =, particularmente con la lectura del número 1700.

Como se mencionó antes, en numerosas ocasiones los alumnos cambiaron el nombre de algunos números manteniendo el control mental sobre la cantidad (por ejemplo, podían decir “quinientos” en lugar de “cinco mil”, pero lo operaban como 5000); el caso de Aa6 es diferente puesto que leyó el 1700 como “diecisiete mil” y así lo operó, obteniendo como resultado 26,805. Esta interpretación de 1700 como diecisiete mil también es evidente en el acomodó que hace del algoritmo en columnas, la cual fue una de las vías de resolución que intentó utilizar, como se muestra en la imagen.



El acomodo del algoritmo poniendo primero el 1700 sugiere que la alumna lo está interpretando como un número mayor, como “diecisiete mil”. Parece que la alumna encolumna los sumandos empezando por el que ha interpretado como mayor y va del mayor al menor. Interpretamos lo anterior porque en algunos intercambios con los alumnos entrevistados han referido que para hacer una suma hay que acomodar los más grandes primero, de arriba hacía abajo (con la técnica del algoritmo vertical). Sin embargo, esta interpretación de nuestra parte necesita mayor sustento empírico. Por ahora la tomamos como una posible explicación de su proceder.

Notando las dificultades en la interpretación de los números, se le pide a Aa6 que escriba “comas” en los sumandos para facilitarle su lectura. El 9000 pasa a 9,000 con la escritura correcta de la coma. Sin embargo, el 1700 pasa a 17,00 donde la coma es marcada de manera incorrecta y favorece la interpretación errónea del número y, como consecuencia, una suma incorrecta pero que resulta pertinente para la interpretación de la alumna: 17,000 + 9,000 + 800 + 5 = 26,805. Sobre el uso e interpretación de la coma se ahondará en otro apartado.

4.2.9.2 Conocimientos sobre los componentes y el funcionamiento del sistema de numeración decimal

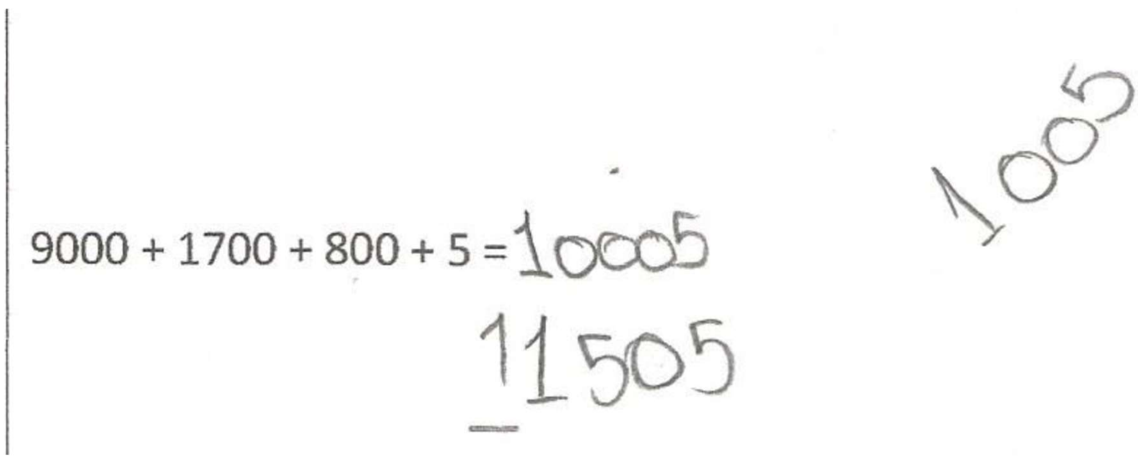
Tipo 1. Conocimientos sobre el cero

El uso que más se destacó fue el del cero como diferenciador de cantidades (tres alumnas). Le sigue el uso del cero como representación de ausencia y marca de una posición (dos alumnos) y un alumno más lo usa en la estrategia de cálculo del *atajo*, del cual ya se habló antes.

Tipo 1.1 El cero como diferenciador de cantidades

En este ítem se presentaron algunos desafíos en el cálculo, quizá debido a la complejidad mayor del ítem 5 respeto a los previos. De esta manera, algunos alumnos se vieron en mayor necesidad de ir anotando o diciendo resultados parciales para recuperarlos luego y conformar el resultado final.

Tal fue el caso de las alumnas Aa2 y Aa4 quienes produjeron escrituras parciales de los resultados donde la escritura del cero de 11,505 pareció ser fuente de dudas. La manera en la que las alumnas pudieron decidir sobre la escritura correcta del cero en 11,505 provino justamente de su uso como diferenciador de cantidades; esto es, de manera constante las alumnas estuvieron leyendo sus producciones numéricas contrastándolas con la cantidad que tenían pensada (resultado de sus cálculos mentales) y verificando si en efecto escribían lo que querían escribir. Revisaremos el caso de Aa2, quien escribió lo siguiente:



E- Ok, vamos a pasar a lo que sigue, bueno antes... ¿por qué crees que habías escrito esto? (refiriéndome a 10005).

Aa2- Porque no iba sumando bien y no estaba pensando lo que... porque aquí no puse ni los once mil (refiriéndose a cuando escribió 10005) puse nada más mil quinientos cinco, mil cinco...

E- ¿Este es mil cinco? (señalo 10005)

Aa2- Sí... ¡Noooo! (se detiene a leer) Porque puse... lo puse mal, me sobraría aquí el cinco para que fueran mil cinco (refiriéndose quizá no al cinco en sí, sino a una posición o a recorrer el cinco, quitando un cero).

E- A ver ¿cómo escribirías mil cinco?

Aa2- (Escribe 1005) (C, p.21).

En este fragmento la alumna Aa2 lee en un primer momento el diez mil cinco (10005 que fue su primer resultado) como "mil quinientos cinco", luego lo lee como "mil cinco". Al hacer una relectura de la cantidad se da cuenta de que para que 10005 sea mil cinco se le tiene que quitar una cifra. La alumna dice que le sobra el cinco, pero la cifra que en realidad elimina es el cero. De esta manera la escritura o no escritura del cero, diferencia las cantidades que se desean escribir.

Otro ejemplo del uso del cero como diferenciador de cantidades lo ofrece Aa10 cuando responde sobre las razones para escribir el cero en el lugar de las decenas en 11,505.

> *Aa10- Pues el cero debe estar aquí porque si quito el cero serían once mil cincuenta y cinco; entonces si no valiera el cero, pues sería otro resultado y el cero en este momento pues sí vale porque el cero está respetando el número por decir si aquí le pongo un seis ya sería el sesenta y cinco. El cero está marcando o sea para que pueda dar otro resultado. (C, p.27).*

Aunque en el argumento de Aa10 aparecen implícitos conocimientos sobre el cero como marca de posición, la alumna no hace alusión a la falta de decenas, cuya ausencia se representaría con el cero; lo que dice es que el cero se debe escribir ahí porque de lo contrario daría otro resultado, otro número.

Tipo 1.2 El cero como representación de ausencia y como marca de posición

La alumna Aa3 usa en su argumento dos ideas sobre el cero que no todos los alumnos presentaron de manera coordinada: el cero como representación de ausencia y el cero como marca de posición. Lo interesante de esta respuesta es la claridad con la que indica el proceso de transformación entre órdenes y como este proceso se vincula a la escritura numérica del resultado, que incluye ceros en este caso.

> *E- Ok, ¿cómo decides escribir ese cero en ese lugar?*
>
> *Aa3- Porque aquí pues ya estaban estos hasta las centenas (refiriéndose a que ha calculado 9000 + 1700 + 800 = 11500; pero le falta sumar 5 unidades) y después se les suma el cinco, entonces con el cinco ya no alcanza a las decenas entonces se deja el espacio de las decenas con cero y ya se pasan las unidades. (C, p.22).*

La idea de cálculo como un proceso dinámico de transformaciones entre órdenes es, según Lerner (1994), una de las concepciones menos frecuentes entre los escolares. Aa3 da muestra de conocer sobre ese proceso dinámico cuando dice "con el cinco ya no alcanza a las decenas entonces se deja el espacio de las decenas con cero". Además, llama la atención que la alumna esté usando conceptos como decenas, unidades como términos generales y no esté hablando de números particulares.

Otro ejemplo es el alumno Ao7, quien argumenta en términos similares a Aa3 al indicar que el último cinco del resultado (el de las unidades) se escribe en ese lugar y no en otro porque no tiene un cero a la derecha. Lo indica como sigue.

> *(Ao7 está explicando por qué el último 5 en 11,505 se escribe o "acomoda" en el lugar de las unidades).*
>
> *E- ¿Cómo le hiciste para acomodarlo?*
>
> *Ao7- Porque no tiene cero, entonces no es una cantidad mayor que nueve porque ya mayor que nueve ya tiene cero...*
>
> *E- ¿Te refieres al diez?*
>
> *Ao7- Al diez, al veinte, al treinta, o al cuarenta y siete; un número que sea mayor de diez.*
>
> *E- Entonces así fue como ya no más acomodaste el cinco... (C, p.25).*

Aunque Ao7 no está hablando directamente del cero, al explicar por qué el cinco va ahí implícitamente señala que ese cinco no es una decena, por lo que no puede ir en el lugar que ocupan las decenas. Además, Ao7 habla de manera implícita del cero como marca de una posición: el cero ocupa ese lugar porque no se tienen más de nueve unidades o número con dos cifras que potencialmente se debería escribir en el segundo lugar de izquierda a derecha. Es notable la distancia establecida entre el argumento de Aa3 y la explicación de Ao7, cuya diferencia principal es el nivel explícito - implícito de los conocimientos. En ese sentido, Aa3 es más explícita que Ao7.

Tipo 2. Usos y significado de la marca gráfica "coma"

No se previó en este trabajo indagar sobre la marca gráfica "coma". Sin embargo, en cinco de las entrevistas pudimos constatar que la escritura de este signo resultaba relevante para los alumnos. De manera espontánea los alumnos escribían coma en sus resultados y en ese momento se presentaba la ocasión de preguntarles al respecto.

Los significados dados por los niños a la coma son, principalmente, que facilita la lectura de los números y que marca la llegada a los miles; como puede interpretarse de lo dicho por Aa8 y Aa9 en los siguientes registros:

> *E- Veo que aquí (referencia a la escritura 5,364) pusiste una comita, ¿esa cómo decides dónde ponerla?*
>
> *Aa8- Porque, este, cuando hay tres números pues sí se sabe qué número es (Aa8 se refiere a una cantidad de tres cifras) ... pero cuando son cuatro (cifras en una cantidad) para decirlo bien yo pongo una comita, que esa me la enseñaron aquí en la escuela, pero...*
>
> *E- Me dices "me ayuda a decirlo bien". ¿Cómo es que te ayuda? ¿qué te indica?*
>
> *Aa8- Que…hay una separación que separa las unidades y centenas con los millares, millones, lo que sigue de cien... de mil. (MC, p.1)*

Para Aa8 si se tiene un número de tres cifras (por ejemplo 649) sí se sabe qué número es, pero cuando es un número de cuatro cifras se requiere de la coma para "decirlo bien".

De igual manera la alumna Aa9 indica que la coma es fundamental para leer una cantidad.

> *Aa9- (Anota 4,423)*
>
> *E- Oye aquí veo que les agregas una comita, ¿Qué significa esa comita que le agregas?*
>
> *Aa9- Es que a mí me han explicado muchas veces los maestros que si no le pongo la coma sería que no se podría identificar, sería que es un número que… no una cifra que es más larga o más corta, para poder identificar que es cuatro mil sería la coma para que se vea que es cuatro mil. Por ejemplo, aquí no tiene la coma, pero*

sé que es cuatro mil (señalando el 4000 del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =) porque tiene tres ceros entonces la coma representa los tres ceros. (MC, p.1)

Para Aa9 además de la coma, los ceros le indican el orden de los miles.

Como se mencionó antes, todos los sumandos del orden de las unidades de millar de nuestro instrumento fueron escritos sin comas (5000, 4000, 9000, 1700). Esto nos permitió percatarnos de obstáculos en la lectura numérica cuando no está presente una coma. Los siguientes casos muestran evidencia al respecto.

Para Aa9 la coma marca una diferencia total en la interpretación del 1700.

[La alumna está comparando la lectura que hace del 1700; una lectura sin coma (diecisiete mil) y una lectura una vez que le pone la coma (mil setecientos)].

Aa9- Bueno lo que sucedió fue que me revolví entre que eran diecisiete mil y ahorita que vi, puse la coma eran mil setecientos, entonces yo estaba haciendo el cálculo de diecisiete mil y lo que hice fue borrar ese diecisiete mil y poner mil setecientos. (MC, p.1)

La alumna Aa6 muestra inseguridades al leer una cantidad “grande”.

(Aa6 está tratando de leer la cantidad 52000 sin coma)

Aa6- Es que como no tiene la coma, este me confundo (pone coma y queda 52,000) ... este…cincuenta y dos mil (insegura) no, cincuent… y dos mil, no cincuenta y dos millones. (MC, p. 1)

Pese a que Aa6 coloca la coma en el lugar correcto en 52,000, aun así, persisten dudas en cuanto a la lectura de números “grandes”. Precisamente con esta alumna se presentó un interesante intercambio donde la coma, además de facilitar la lectura de cantidades, es usada como signo que cambia el valor de las mismas. Otras investigaciones como la de Wolman y Ponce (2013) documentan el significado que le otorgan los niños a las marcas como la coma –o punto, ya que la investigación es efectuada en Argentina[22]–; en dicho trabajo se asienta que algunos

[22] Cabe precisar que, en Argentina, la coma equivale al punto decimal en nuestro México.

niños piensan que la coma escrita en un lugar o en otro tienen la facultad de modificar el valor de los números.

Tal fue el caso de Aa6 quien muestra concepciones no convencionales sobre la coma. En un primer momento la alumna interpreta el 1700 del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 = como diecisiete mil y así lo opera obteniendo un resultado de 26,805. (Caso expuesto en el primer apartado del ítem 5).

Posteriormente, y para comprobar que en efecto la alumna está confiriendo un significado singular a la coma, se le dictan las siguientes cantidades:

E- Oye te voy a dictar unos números y los escribes ahí abajo ¿va?

Aa6- (Asiente)

E- Ocho mil.

Aa6- (Escribe 8000)

E- Diez mil.

Aa6- (Escribe 10,00)

E- Doce mil.

Aa6- (Escribe 12,00)

E- Diecisiete mil.

Aa6- (Escribe17,00) (PC, p.36)

Posteriormente se le pide que compare esos números y es cuando expone la idea de que el cambio del lugar de la coma puede cambiar la cantidad.

E- Ahora, éstos de acá abajo, ¿cuál será mayor? (refiriéndome a su serie de números 8000-10,00-12,00-17,00)

Aa6- Éste (señala el 8000 al que no le escribió coma en un principio) porque puedes poner la coma aquí (escribe sobre el 8000 algunas comas de manera que queda 80,00; Aa6 se refiere a cambiar la coma de después del ocho, a después del primer cero).

E- ¿Y qué diría?

Aa6- Ochenta mil.

E- Pero yo te dicté ocho mil, ¿por qué ahorita cambió a ochenta mil?

Aa6- Porque se puede cambiar la coma a ocho miles o aquí se pone la coma (marca un cambio de comas señalado anteriormente).

E- ¿O sea que si tú cambias una coma de lugar ya te dice otro número?

Aa6- Ajá

E- Sólo con (cambiarle) la coma, ¿ya no necesitas agregarle ceros?

Aa6- No, porque estos ya son dos números (el 80 de 8000) y estos otros dos números (los 00 al final de 8000) que hacen ochenta mil.

E- ¿Ya no necesita más ceros para ser ochenta mil?

Aa6- (Niega). (PC, p. 35-36)

Aa6 tiene la fuerte convicción de que la coma, acompañada de dos ceros, puede cambiar a miles una cantidad. Lo anterior explica por qué su cálculo 9000 + 1700 + 800 + 5= le da como resultado 26,805.

En esta respuesta de Aa6 notamos la interacción entre la lectura numérica mediada por las marcas gráficas y los resultados de los cálculos. En su caso la coma y ceros le indican cómo leer e interpretar una cantidad, lo que se reflejara en la operación de los números.

4.2.10 Discusión de resultados del ítem 5

En el análisis de respuestas de este ítem encontramos un mayor número de conflictos y errores para obtener el resultado que en ítems previos. Ello puede deberse a la mayor complejidad que implica este ítem dado que tiene más de una transformación de órdenes e implica operar unidades de millar y decenas de millar. Como se mencionó antes, los alumnos recurrieron al cálculo mental para resolverlo, lo cual requiere de más operaciones parciales que pudieron generar algunas de las contrariedades sobre las que discutiremos a continuación.

Respecto a los conflictos en la escritura de resultados parciales y del resultado final, encontramos dos posibles razones que originaron esos conflictos. La primera de ellas está relacionada con la insuficiente habilidad para ir registrando –oral o de manera escrita– los resultados parciales de los cálculos. La segunda razón tiene que ver con la interferencia que se da cuando los alumnos leen e interpretan incorrectamente los números.

Habíamos encontrado hasta el momento que en otras ocasiones los alumnos leyeron mal un número sin que esto afectara la cantidad que se encontraran operando mentalmente. En este ítem 5 encontramos que leer mal un número sí ocasionó errores en los registros (oral o escrito) parciales del cálculo y, por lo tanto, errores en el resultado.

Trabajos de investigación como los llevados a cabo por Saiz y Centurión (2014) y Wolman y Ponce (2013) dan cuenta de los nuevos desafíos que implica a alumnos de segundo ciclo de escuela primaria leer, interpretar y escribir los nombres de números grandes (más allá de los miles). En nuestro trabajo los alumnos escribieron números a partir de los miles y coincidimos en que les pudo representar un reto no sólo leer números "más grandes", sino también haber hecho cálculos mentales con ellos y haber escrito los resultados, sin la seguridad que otorga el uso del algoritmo en columnas. Llevar a cabo cálculo mental y decidir cómo juntar anotaciones parciales en un resultado final movilizó conocimientos sobre la escritura numérica que permanecen ocultos cuando se usa un algoritmo en columnas.

Por otro lado, en lo que se refiere a los conocimientos sobre el cero, encontramos que los alumnos pudieron hacer uso del cero para resolver diferentes partes de la tarea que se les planteó. Algunas veces los alumnos usan al cero como diferenciador de cantidades porque ese conocimiento les ayuda a resolver parte del problema que están enfrentando en un momento dado. Pero si se trata de justificar por qué un cero se escribió en el resultado (11,505), acuden de manera más inmediata a indicar que fue porque faltaban las decenas y el cero tienen que representar esa ausencia y esa posición.

Hace falta indagar en qué momentos o qué condiciones de las operaciones propician la aparición de unos u otros conocimientos sobre cero; en este trabajo sólo hemos podido dar cuenta de que los acudieron a diferentes argumentaciones sobre el cero para resolver diferentes partes de la tarea.

Finalmente, hemos mencionado la importancia que tuvo para los alumnos usar comas para leer y escribir números. Ello nos conduce a plantearnos relevancia que tienen las reglas de la escritura numérica y su interacción con las del sistema numérico oral. En palabras de las alumnas que reflexionaron sobre la coma, esta se usa llegando a los miles y con ella "lees e interpretas bien el número". Sin embargo, la investigación de Wolman y Ponce (2013) da cuenta de cómo el dominio de la lectura de números grandes no se da sin tropiezos. Una de las aportaciones que retomamos del trabajo de esos autores y que explica la afirmación de la alumna Aa6 de que la coma puede cambiar el número, es que en el complejo proceso constructivo de las reglas de la numeración, el punto escrito en uno u otro lugar de una cantidad puede cambiar el valor del número. Por ejemplo, en la investigación de estos autores una de las alumnas entrevistadas indica que el 1.0000 se lee como "un millón" si le cambias el punto a 10.000 se lee como "diez mil".

Nos preguntamos si estos hallazgos pueden contribuir a explicar los bajos porcentajes de logro en reactivos de las pruebas EXCALE donde se pide leer y decidir la escritura numérica números del orden de cientos de miles y millones con ceros intermedios, como por ejemplo "ciento treinta y cinco mil" (100,035). Nuestro trabajo y las citadas investigaciones apuntan a considerar que las reglas de la numeración oral y su vínculo con la numeración escrita representa un nuevo reto para los alumnos cuando trabajan con nuevas porciones de la seriación numérica.

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

A continuación, se expondrán los principales hallazgos que responden las preguntas de investigación.

5.1 Los procedimientos de resolución y su relación con conocimientos sobre el SND

Los alumnos recurrieron a tres procedimientos para resolver los ítems: el de componer un resultado (que hemos denominado también "Poner-Juntar-Acomodar números"); el cálculo mental y el algoritmo en columnas. Cada uno de ellos nos permitió indagar diferentes conocimientos del SND que poseen los alumnos.

5.1.1 Procedimiento de componer un resultado

El primer procedimiento consiste en escribir las cifras diferentes del cero sobre los ceros del sumando mayor. En el caso del ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =, se trata de colocar el 3, el 6 y el 4 sobre los ceros del 5000. Esta estrategia de solución es aplicable cuando los sumandos de una operación estén ordenados de manera decreciente y siempre y cuando no haya más de un sumando del mismo orden.

Al analizar los conocimientos sobre la escritura posicional que se manifiestan en tal procedimiento, identificamos las siguientes reglas sobre la escritura posicional: al escribir un número sólo se escribe, en orden decreciente, el número de agrupamientos de cada orden (o poner la cifra distinta del cero de cada sumando en el lugar que le corresponde sobre los ceros del sumando mayor); cuando no hay unidades en un orden se escribe un cero para representar ausencia y marcar la posición.

El uso del procedimiento de poner cifras sobre los ceros es significativo porque se centra en las reglas de escritura del sistema posicional y refleja un distanciamiento, al menos en esta investigación y con la metodología usada, del apoyo en el nombre de los números, el cual es sumamente importante para los niños pequeños en las primeras etapas de construcción de las reglas del SND.

Al inicio de esta investigación se pensó que los alumnos podrían apoyarse de manera importante en el nombre los números para componer el resultado, pero no fue así. Si bien es cierto que el apoyo en la numeración oral es fundamental para que niños pequeños produzcan e interpreten números, aparentemente no lo es en la misma medida para niños mayores, de acuerdo con los datos obtenidos en este estudio. Nos preguntamos si la larga experiencia de niños de sexto escribiendo y leyendo números de manera convencional, puede estar disminuyendo la dependencia del sistema oral para escribir números.

Sin embargo, aun cuando en esta investigación los alumnos parecen más conlfictuados por las reglas de escritura, mostrando con ello un alejamiento del apoyo oral (pues el nombre de los números no puede recuperarse tal cual para producir escrituras convencionales en el sistema decimal), la oralidad no está eliminada del todo. Es un importante recurso para develar el valor de los números y repensar las reglas de su escritura convencional. Esto se hizo evidente cuando algunas alumnas recurrieron a decir el nombre de un número para identificar su valor y encontrar “pistas” que les ayudaran a escribirlo convencionalmente. Por ejemplo, cuando una alumna dudó sobre cómo escribir el dos mil, dijo su nombre en voz alta y eso le ayudó a recordar cómo se escriben “los miles”: “dos mil, es de los miles, los miles llevan cuatro ceros”.

5.1.2 Cálculo mental

Al iniciar este trabajo de investigación no anticipamos suficientemente la riqueza que podrían tener los procedimientos de cálculo mental como manifestación de conocimientos sobre el SND. Sin embargo, a través del análisis de las diversas estrategias de cálculo mental que los alumnos presentaron, nos acercamos a sus concepciones sobre los órdenes y su transformación.

Las estrategias más recurrentes fueron apoyarse en las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, la descomposición aditiva y la utilización de algunos otros recursos como usar resultados de sumas ya conocidas a las que se les agrega ceros. Estos recursos aparecieron al resolver ítems como el 3, el 4 y el 5 donde había más de un sumando del orden de las decenas o centenas.

Las propiedades asociativa y conmutativa de la suma fueron utilizadas para agrupar sumandos del mismo orden; una vez hecho eso, conmutaron el orden de los sumandos para colocarlos de manera decreciente y operarlos con facilidad. De igual manera, recurrieron a la descomposición de cantidades buscando tener números “redondos”, múltiplos del 10 y del 100 para operarlos cómodamente.

Si bien no tenemos datos directos para afirmar que estos recursos favorecen la comprensión del funcionamiento del sistema de numeración, creemos que sería potente propiciar un trabajo dentro del aula sobre los mismos. Nos permitimos reflexionar sobre la necesidad de favorecer la toma de conciencia de dichas propiedades a través del trabajo con estrategías de cálculo mental. Ello contribuiría a dotar de sentido a las operaciones y propiciar un conocimiento más claro y explícito de las propiedades del SND.

Otro recurso que apareció por parte de los alumnos resolviendo los problemas de esta investigación es el de poner cero o ceros a las unidades, con lo cual se multiplica su valor. Tenemos la referencia de que este recurso fue usado por los babilonios hace más de cuatro siglos. Ellos utilizaban el cero como un operador artimético, con lo cual multiplicaban el valor de una representación cifrada por la base sexagesimal. Expusimos en este trabajo algunas investigaciones que dan cuenta de que los niños acceden a este recurso en etapas tempranas de la escolaridad (Lerner, 2005). Nos parece un recurso valioso que hace referencia directa a las potencialidades operativas del sistema de numeración, pero que no está exento de problemas en su uso.

Detectamos que se pueden presentar algunas dudas al recuperar el valor absoluto de las cantidades con las que se trabaja. Un ejemplo de ello es el que se reportó cuando un alumno que está sumando 9000 y 2500, y quiere usar este recurso diciendo que son "nueve más ¿dos, punto cinco?" Ello da cuenta de que mantener el control sobre las unidades que deben sumarse, para luego agregar cero, no es sencillo. Si bien notamos algunos tropiezos por parte de los alumnos, ellos mismos nos permitieron identificar sus recursos de control para sobreponerse a sus fallos. Uno de esos recursos fue, sin duda, haber efectuado un cálculo estimativo previo.

Estas situaciones nos conducen a pensar en la importancia de promover en la escuela un trabajo sistemático tanto con el cálculo mental preciso, como con el estimativo. En este trabajo, aquellos alumnos que tenían una estimación o un cálculo preciso pudieron sortear contradicciones, dudas o desafíos que planteaba la escritura del resultado.

Enfatizamos, además, la utilidad que tuvo para los alumnos de nuestra muestra y de otras investigaciones referidas en esta tesis, la oportunidad de escribir, releer, decir el número en voz alta y contrastar números con otros ya escritos para corregir posibles errores en sus escrituras y cálculos. Se presentaron situaciones en las que los alumnos hicieron cálculos correctos con errores en la escritura o cálculos incorrectos con escrituras que, además, no coincidían con lo que enunciaban verbalmente.

El hecho de tener en el papel dichos números producidos por ellos mismos en diferentes intentos de resolución, propició la identificación de errores. Resultó muy útil para los alumnos tener registros de pasos intermedios que les permitieron un retorno reflexivo sobre las propias producciones para contrastar, verificar, recuperar resultados parciales.

Dichas anotaciones guardan similitud con la práctica denominada “algoritmo ampliado” documentada en los trabajos de Solares (2012) y Delprato (2002), donde los entrevistados llevan a cabo “anotaciones marginales de los cambios realizados” mientras resuelven un algoritmo en columnas. La función potencial de dichas anotaciones es recuperar los resultados para corregir posibles errores en los cálculos. Cabe mencionar la importancia de que en el aula no sólo se acepte, sino que se propicie entre los alumnos el registro de sus cálculos parciales, de sus estimaciones, que se conserve incluso el registro de cálculos erróneos que les permitan analizar sus procedimientos de resolución e identificar lo que los llevó a algún procedimiento o resultado equivocado.

5.1.3 Algoritmo en columnas

Aunque no estaba dentro de los intereses de esta investigación indagar el uso del algoritmo en columnas, algunos alumnos lo usaron atendiendo a una necesidad particular: cuando las características del ítem los volvían “más complejos”, quisieron usar esta técnica como vía más segura para llegar a la solución. Esas características que los alumnos identificaron como “más difíciles” fueron la ausencia de algún orden (como en 2000 + 80 + 2); operaciones con agrupación y reagrupación de órdenes y aquellas cuyo resultado podría tener un cero.

Nos llamó la atención esta manera de hacer uso de la técnica. Cuando una alumna indica que mejor usa “la suma” porque no se quiere equivocar al escribir los ceros del resultado “dos mil ochenta y dos”, consideramos que ha hecho una anticipación del resultado. El uso de la técnica de algoritmo vertical queda supeditada a una anticipación del alumno; no es usada de manera mecánica o “en automático”.

Presenciamos entonces, en los alumnos entrevistados, un uso reflexivo del algoritmo en columnas respecto a cuándo era pertinente utilizarlo. Esto es significativo considerando que forma parte del quehacer matemático reconocer las técnicas con las que se dispone para solucionar un problema y recurrir a la que resulte mejor, de acuerdo con las características de la tarea.

5.2 Sobre los conocimientos de los componentes y funcionamiento del sistema de numeración

Como se señaló en apartados anteriores, se procuró identificar conocimientos sobre el SND en las explicaciones que los alumnos dieron sobre su procedimiento de resolución para cada ítem. Los conocimientos a los que los alumnos hicieron alusión pueden organizarse en cuatro categorías:

- Identificación de órdenes del sistema de numeración
- Transformación de órdenes del sistema de numeración
- Usos y significado del cero
- Uso y significado de la marca gráfica coma

5.2.1 Identificación y transformación de órdenes del SND

Encontramos variadas formas en las que los entrevistados identifican y nombran el orden al que corresponden las cifras de cada sumando de las operaciones. Una de esas formas fue identificando el orden que corresponde a determinada cifra por la cantidad de cifras (incluyendo el caso en que son ceros) que tiene a la izquierda; en otras por el valor relativo de las cifras (según valgan 1, 10 0 100); en otros casos los alumnos usaron los nombres convencionales de unidad, decena, centena, etc.

Cabe reflexionar que, aunque seis niños identificaron los ordenes según su nombre convencional, también se apoyaron de manera importante en aspectos evidentes de la tarea como el número de cifras incluidos los ceros.

El número de cifras y de ceros fue una de las referencias más claras a la hora de identificar los agrupamientos, lo cual además resultó un conocimiento operativo, pues gracias a la información que les daban los ceros pudieron tomar decisiones sobre cómo operar una cantidad. Adicionalmente, les dio elementos para argumentar frente a la entrevistadora las razones de sus procedimientos. Cabe mencionar que si bien los alumnos se están apoyando en las características más evidentes de la numeración (número de cifras y ceros), esto puede servir como un punto de apoyo para propiciar otras reflexiones sobre la escritura numérica.

Como todo trabajo de investigación, hubo preguntas que no se plantearon a los entrevistados pero que, tras analizar los resultados y discusiones, pudieran resultar de sumo interés. Consideramos que una pregunta valiosa que se pudo haber planteado en nuestro estudio con el propósito de hacer explícitos los mecanismos de funcionamiento "ocultos" del SND sería: ¿por qué al escribir el resultado de una suma como 5000 + 300 + 60 + 4 = 5364, no se ponen los ceros de cada agrupamiento? Dejamos la sugerencia para futuras investigaciones.

Otra reflexión a la que nos conducen estos resultados es la necesidad de que los alumnos trabajen directamente con la numeración, armando y desarmando números para operarlos, de acuerdo con numerosos trabajos revisados en esta tesis (Lerner y Sadovsky, 1994; Lerner, 2005; Broitman et al., 2011; Fernández, 2008). Ello implica que el alumno pueda descubrir varios caminos para resolver operaciones escritas o inclusive en contexto de cálculo mental.

Por cuanto concierne a los conocimientos revelados sobre la agrupación recursiva base diez (transformación de órdenes), encontramos que no hubo alumnos que se refirieran específicamente a ésta para explicar algún procedimiento de cálculo, pero no podemos afirmar que ningún alumno sepa lo que es la agrupación recursiva, pues es probable que la tarea o la entrevista misma no sean pertinentes para que se manifieste explícitamente ese conocimiento. Queda pendiente analizar nuestro protocolo de entrevista y los ítems para identificar si la aparición de ese conocimiento se hacía pertinente o no dadas las condiciones de la tarea.

Poder generalizar las reglas de funcionamiento del SND y de otros objetos matemáticos escolares, es un aspecto esencial del quehacer matemático. Es este nivel educativo esperábamos encontrar más alusiones directas a la regla de agrupación decimal, pero no se presentaron. Nos preguntamos si las situaciones y los recursos didácticos que actualmente se proponen en los materiales curriculares propician el aprendizaje explícito de esta regla.

5.2.2 Usos y significados del cero

Los ceros fueron utilizados bajo una multiplicidad de formas. En algunos casos "fijarse en los ceros" conducía a decidir sobre un procedimiento de cálculo. En otras situaciones, los ceros sirvieron para contrastar escrituras numéricas (el cero como diferenciador de cantidades). Respecto al significado que los niños le atribuyeron a este símbolo, el cero fue identificado como representación de ausencia y como marca de una posición.

Resalta el hecho de que los alumnos hayan puesto en juego diferentes conocimientos sobre el cero, en función del tipo de tarea que estuvieran resolviendo. Un ejemplo de ello es el caso de la alumna que usa el cero como diferenciador de cantidades cuando va a escribir 2082 y, en lugar de ello, escribe 282 (falta un cero en el lugar de las centenas); entonces reflexiona que quiere escribir dos mil ochenta y dos, y no dos mil ochocientos veinte.

Otro aspecto que figuró como relevante fue que las tareas que implicaron escritura del cero en el resultado condujeron a los niños a tener conflictos. El más común fue presentar errores en la escritura de resultados. Coincidimos en este punto con lo planteado con Lerner (1992): introducir situaciones que contemplen reflexionar sobre el cero puede problematizar los esquemas de conocimiento de los alumnos y, a la vez, hacerlos avanzar.

Se encontraron respuestas de algunos alumnos que explicaron el cero en términos de “marca de una posición”. Para ellos, el cero se pone en el lugar en el que potencialmente podrían ir las unidades, decenas, centenas, etc., que no hay por el momento. Un ejemplo de ello lo ofrece la alumna que menciona sólo tiene cinco unidades que ya no alcanzan para formar decenas, por ello, el espacio de las decenas se marca con cero “entonces, con el cinco ya no alcanza a las decenas entonces se deja el espacio de las decenas con cero”. Consideramos que esta manera de concebir al cero, como un lugar para algo que no se formó, pero que bien podría haberse formado, es un rasgo que caracteriza el pensamiento matemático, puesto que implica desprenderse de la tarea concreta y empezar a interpretar a los números como un sistema donde cualquier número puede ser representado.

5.2.3. Uso y significado de la marca gráfica coma

Otro aspecto no previsto en los planteamientos iniciales de esta investigación es la manera en que los alumnos se apoyan en la coma para poder interpretar los números. Hubo quien indicó, inclusive, que sin la coma no se puede leer un número. Este hecho nos conduce a poner atención en marcar gráficas que pueden ser relevantes para los alumnos ya que les proporcionan ciertas “pistas” sobre el orden al que pertenecen las cifras de un número. Nos preguntamos, por ejemplo, si los espacios que se dejan entre grupos de cifras (un espacio después de tres cifras) podría ser también una marca gráfica relevante para los alumnos.

Por otro lado, ese mismo hecho nos lleva a preguntarnos lo siguiente: ¿por qué al llegar a números más grandes (en este caso a las decenas de millar) la coma se vuelve un auxiliar necesario para que los niños puedan leer un número? Recientes investigaciones aquí consultadas dan cuenta de que podría darse un proceso reconstructivo con la representación de números grandes. Específicamente Wolman y Ponce (2013) documentan que para alumnos de 10 y 11 años no es sencillo leer y producir números con cero del orden de cien miles en delante. Hay evidencias de que la numeración oral vuelve a cobrar relevancia cuando los niños confrontan la escritura e interpretación de números más grandes (diez miles, cien miles, millones, etc.). La tensión entre el sistema oral y escrito está lejos de resolverse en esta etapa.

La investigación al respecto parece ser reciente, pero nos resulta fundamental prestar atención tanto a los conflictos que “los alumnos grandes” pudieran tener con “los números grandes”, como a las situaciones didácticas para abordar tales números, pues suponemos que ameritan un acercamiento diferente al que se ha dado a los números de menor rango. Recordemos que, históricamente, la necesidad de escribir números grandes empujó en gran medida el proceso de construcción de nuevas formas de escritura numérica.

Reflexiones finales

La diversidad de procedimientos y de justificaciones que los alumnos pusieron de manifiesto fue posible, en buena medida, por las variables didácticas que se consideraron en el diseño de la tarea de sumas horizontales. Este hecho subraya la importancia de poner especial atención y cuidado a la selección de tales variables, y nos invita al mismo tiempo a seguir preguntándonos sobre otras variables que puedan dar lugar a otro tipo de procedimientos y de argumentaciones por parte de los alumnos.

Otro aspecto metodológico importante es el de las intervenciones que se hicieron desde la entrevista. Si bien es fundamental que la situación problemática que se plantea exija de los niños variadas posibilidades de solución, que procure la emergencia de ciertos saberes en lugar de otros (en este caso conocimientos sobre aspectos específicos del SND, como lo fue el cero); también es fundamental que el entrevistador haga preguntas relevantes que empujen a los alumnos a reformular sus pensamientos, dando paso a nuevas construcciones de conocimiento.

Centrándonos específicamente en la técnica de entrevista, se tuvieron que superar algunos retos. El primero de ellos fue establecer un ambiente propicio para que los alumnos supieran que nos interesaba conocer de cerca su pensamiento; hubo que intervenir recordando a los entrevistados que la tarea no era un examen escolar, y que no se iba a calificar.

El siguiente reto consistió en aprender a no conformarse con la primera respuesta, más aún cuando es la respuesta correcta. Hubo que recobrar conciencia de que, como entrevistadora, el interés debe estar puesto en los caminos por los cuales se llega a la respuesta.

Uno de los aprendizajes más valiosos fue el de volver sobre nuestros pasos en cada entrevista. Hacer una revisión en retrospectiva nos permitió advertir: cuáles intervenciones funcionaron mejor, cuáles preguntas hicieron falta, así como documentar aquellos intercambios que resultaron sorprendentes o intrigantes.

En el afán de interpretar de la mejor manera posible el pensamiento y la acción de nuestros entrevistados, arribamos a la necesidad de saber más, de leer más y de transformar nuestra propia visión del objeto de estudio. Mirar el sistema de numeración a través de los ojos de los niños, de la interpretación infantil y de las dificultades que algunos de sus aspectos les suponen, nos condujo a revisiones críticas sobre los algoritmos, sobre el cálculo mental, sobre la historia de los sistemas de numeración. Hubo respuestas cuya interpretación podría haber pasado inadvertidas a nuestros ojos y oídos, de no habernos adentrado en la historia del sistema de numeración y en las numerosas investigaciones que han enriquecido nuestra mirada sobre el pensamiento infantil.

En particular, ameritó una revisión de ida y vuelta a los conceptos de valor posicional, a las reglas de la numeración escrita, a las tensiones entre numeración oral y escrita, al significado del cero, los agrupamientos y la agrupación recursiva. En esta revisión tuvimos que tomar el valor posicional como punto de convergencia de las demás características del sistema de numeración, para evitar así tomar por separado cada uno de esos conocimientos y evitar también la afirmación de que los alumnos carecen de conocimientos sobre el valor posicional solo por no hacer mención explícita al mismo. Por el contrario, procuramos analizar los conocimientos de los niños sobre agrupamientos en vinculación con el valor posicional; sobre la escritura numérica en relación con valor posicional; sobre el cero como elemento que potencializa los atributos del sistema posicional decimal, y así con cada uno de los saberes.

Además, tuvimos que remontarnos a trabajos sobre cálculo mental y algorítmico para poder interpretar el uso que los alumnos les dieron a estos recursos. Todo en el marco de la relación profunda que existen entre las operaciones y las características de funcionamiento del sistema de numeración.

Finalizamos indicando que hay un camino largo y complejo en el aprendizaje del valor posicional. Su aprendizaje representa un reto para niños pequeños el cual sortean a través de las vinculaciones con el sistema oral y sus contrastes con el sistema escrito. Nuestra investigación sugiere que, con alumnos de sexto grado, las tensiones se centran en la representación escrita y en el cero que, al parecer, plantea problemas interesantes a los usuarios del sistema de numeración.

Los alumnos de sexto recurrieron a diferentes significados del cero para poder sortear dichos retos. También reflexionaron en torno al proceso de agrupación decimal y a las reglas de la numeración escrita; en menor medida se apoyaron en la numeración oral. En contraste, los niños pequeños y adultos no alfabetizados de investigaciones referidas en este trabajo, se apoyan de manera importante en la numeración oral y/o en portadores de números.

Sin embargo, hay similitudes importantes entre los diferentes grupos: el apoyo en la numeración oral y en los números escritos parece favorecer el arribo a resultados pertinentes. Contar con referentes tales como los números "dichos" y los escritos, así como con resultados obtenidos a través de medios de verificación como la calculadora o el algorimo vertical, ayuda al sujeto a confrontar –ante él mismo y los demás– sus propias producciones y conocimientos, en la búsqueda de saberes mejor adaptados.

REFERENCIAS

Alvarado, M., y Ferreiro, E. (2000). El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años. *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, año 21, n°1, pp. 6-17.

Alvarado, M. (2002). *La construcción del sistema gráfico numérico en los momentos iniciales de la adquisición del sistema gráfico alfabético. (Tesis doctoral).* México, DF: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Artigue, M. (1995). Ingenieria didáctica. En Artigue, M, Douady, R, Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 33-69)*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. Margolinas, C, Abboud-Blanchard, M, Bueno-Ravel, L, Douek, N, Fluckiger, A, Gibel, P, Vandebrouck, F, y Wozniak, F. (coord.) (2009). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. VXe école d'été de didactique des mathématiques. CLERMONT-FERRAND (PUY-DE-DÓME) Volume 1*. Pp- 15-25. Francia: Le pensee Sauvage Editions.

Ávila, A, Carrasco, A, A, Gómez, Guerra, Ma. T, López, G, y Ramírez, J. (Coordinadores). Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México (2002-2011): matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras. México: COMIE.

Bedoya, E. y Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. En *Comunicación, Lenguaje y Educación*. 11-12, pp. 55-62.

Brizuela, (1997). El rol de las invenciones en la interpretación de notaciones matemáticas en los niños. En Simposium Homenaje Hermine Sinclair, 1919-1997. México. DF.

Brizuela, (2000). *Children´s ideas about the written number system. Tesis doctoral.* U.S.A: Escuela de Educación de la Universidad de Harvard.

Broitman, C, Grimaldi, V. y Ponce, H. (2011). *El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza*. Bueno Aires: Santillana

Broitman, C. (2012). *Adultos que inician la escolaridad: sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas. Tesis doctoral.* Argentina: Universidad Nacional de la Plata.

Broitman, C. (y cols.) (2013). Explorar en matemáticas 3 libro del docente. Argentina: Santillana.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2). Pp, 33-115.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las ciencias*, *9* (1), pp, 10-21.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cajori, F. (1909). *A History of Mathematics*. New York: The MacMillan Company.

Centurión, L. y Saiz, I. (Noviembre de 2014) Conocimientos, herramientas de control y conflictos en la producción de escrituras de números grandes en el nivel secundario. En Saiz, I. (2014) “La enseñanza de la numeración, la suma y la resta en el primer ciclo de la Educación Básica”. Conferencia llevada a cabo en la Subsecretaria de Educacion Básica de la Secretaria de Educación Pública. Ciudad de México.

Chamorro, Ma. de C. (2005). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En Chamorro Ma. de C. (coord.) (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Madrid: Pearson Prentice Hall

Chandler, C., y Kamii, C. (2009). Giving change when payment is made with a dime: The difficulty of tens and ones. *Journal for Research in Mathematics Education*, volumen 40, n°2, pp. 97-118.

Chevallard, Y., Gascón, J., y Bosch, M. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori e ICE.

Delprato, M. F. (2002). *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática. Tesis de maestría.* México, DF: Departamento de Invetigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Delval, Juan. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños: introducción a la práctica del método clínico.* España: Siglo XXI

Fernández, N. (2008). *Los numerales gráficos como herramientas de solución a problemas aditivos en edades tempranas*. (Tesis de maestría). México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Fregona, D., y Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

García, S. (2014). *El sentido numérico*. Materiales para apoyar la práctica educativa. México. INEE

Gómez, B. (1988). La numeración: evolución y comparación de sistemas*. En Numeración y cálculo. Matemáticas: cultura y aprendizaje, volumen III*, (pp. 31-59). Madrid: Síntesis.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *Explorador Excale*. <http://www.inee.edu.mx/explorador>, [enero 2015].

Ifrah, G. (1987). *Las cifras, historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.

Kamii, C. (1994). Las cifras y el valor de la posición como objetivos. En Kamii (1994) *El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget* (pp. 61-71*)*. España: Visor.

Lerner, D. (1992). El valor posicional. En Lerner, D. (1992) *La matemática en la escuela aquí y ahora* (pp.155-207). Bueno Aires: Aique.Lerner, D. (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante entre la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En Alvarado, M, y Brizuela, B. (comps.) (2005), *Haciendo Números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.147-197). México: Paidós.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, C. y Saiz, I. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Buenos Aires: Paidós.

Lerner, D. (2001). Didáctica y Psicología una perspectiva epistemológica. Castorina, J. A. (comp), *Desarrollos y problemas en Psicología Genética*. Buenos Aires, Eudeba.

Lerner, D. (2005). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. En En Alvarado, M, y Brizuela, B (comps.) (2005), *Haciendo Números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.147-197). México: Paidós.

Martí, E. (2005). Las primeras funciones de las notaciones numéricas. Una mirada evolutiva. En Alvarado, M, y Brizuela, B (comps.) (2005), *Haciendo Números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp.51-80). México: Paidós.

Novembre, A. (Coord) (s/f). Cálculo mental y algortímico. Buenos Aires: Subsecretaria de Educación. Dirección Provincial de Educación Primaria.

Mochón, S., y Vázquez, J. (1995). Cálculo mental y estimación: métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*,*7*(3), pp. 93-105.

Ortíz, Ma. Del C. (2014). *Procedimientos de resolución de problemas aditivos escolares en el contexto de compra-venta en niños de segundo año de primaria* (Tesis de maestria). México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Palmas, S, y Block, F, (2011). Acceso a la representación escrita de los números. Una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. Primera parte: números hasta 20. En Barrón, M. C (Presidencia), Aportes y reflexiones desde la investigación educativa: ¿qué sabemos…qué nos falta? Conferencia llevada a cabo en el XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Chihuahua.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. *Parra y Sáiz (comps.), Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. Margolinas, C, Abboud-Blanchard, M, Bueno-Ravel, L, Douek, N, Fluckiger, A, Gibel, P, Vandebrouck, F, y Wozniak, F. (coord.) (2009). (2009). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. VXe école d'été de didactique des mathématiques. CLERMONT-FERRAND (PUY-DE-DÓME) Volume 1*. Pp-57-78. Francia: Le pensee Sauvage Editions.

Ruiz, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En Chamorro, Ma. Del C. (Coord.) (2005). Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Saiz, I, y Parra, C. (2011) *Hacer Matemáticas en 5°.* Buenos Aires: Estrada

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M., & Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y aprendizaje*,*23* (90), pp. 31-50.

SEP (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México: Secretaria de Educación Pública.

Solares, D. (2012). *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolar migrantes (Tesis de doctorado).* Centro de investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Investigaciones Educativas, México.

Sureda, P., y Otero, M. R. (2015). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales.*Revista electrónica de investigación en educación en* *ciencias*, año *6, número 2, mes 12, pp.* 124-138. Recuperado de http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7466/6710

Terigi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*. 43 (2007), pp. 59-83.

Terigi, F, y Buitron, V. (2013). Los aprendizajes sobre el sistema de numeración en el primer ciclo en escuelas primarias urbanas. Estudio exploratorio en distintos contextos didácticos. *Educación, Lenguaje y Sociedad, volumen X N°10 (Diciembre 2013), pp. 13-39.*

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170

Wolman, S. (coord.) (2006). *Cálculo mental: apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires: Secretaria de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Wolman, S. y Ponce, H. (2013). Relaciones entre la escritura de números y su designación oral: el uso de puntos en niños que ya dominan un rango importante de la serie. En Broitman, C. (comp.) (2013). *Matemáticas en la escuela primaria (1). Números naturales y decimales con niños y adultos (pp 203-229)*. Buenos Aires: Paidós.

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Anexos

Anexo A: Transcripciones de las entrevistas

Entrevista 1

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa1 como entrevistado femenino.

Fecha de nacimiento 27 de junio de 2002

Edad: (12,11)

Duración: 00:20:18

Fecha de la entrevista: 3 de junio de 2015

E- Te voy a pedir que llenes tus datos (Nombre, grado, grupo y fecha).

Aa1- (Escribiendo sus datos)

E- Aa1, vamos a comenzar, te voy a leer las indicaciones; te voy a presentar unas operaciones te pido que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo haces. Si necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar usando la calculadora que aquí traigo. Vamos a comenzar, ¿Qué te parece? ¿Qué números tienes ahí? (Señalo 5000 + 300 + 60 + 4).

Aa1- Cinco mil más trescientos más sesenta más cuatro.

E- Si quieres hacerla y ahorita me cuentas cómo le haces.

Aa1- Lo que hago es localizarlos, es poner los números en unidades, decenas y centenas, entonces eso me daría cinco mil, trescientos, sesenta y cuatro.

E- Entonces tú para ponerlo te fijas en si son unidades, decenas, centenas, ¿y qué más?

Aa1- ... Este… unidades de millar, decenas de millar.

E- Cuéntame, para ti qué es eso de que sean unidades, decenas, ¿qué significa?

Aa1- Mmmmmm...

E- ¿Qué significa que sean por ejemplo decenas? ¿Dónde están las decenas en tu forma?

Aa1- Es el sesenta.

E- ¿Y ahí qué ves tú de decena?

Aa1- Pues las decenas llevan dos dígitos...

E- Así tú las puedes identificar, viendo que son dos dígitos ¿en algo más te fijas o así ya sabes que son decenas?

Aa1- Con eso...

E- Ok, pasamos a la que sigue ¿Qué números tienes?

Aa1- Dos mil ochenta y dos.

E- Dos mil ochenta y dos…

Aa1- Aquí puedo hacer lo que hice en la anterior, pero también puedo hacer la suma mentalmente que me daría dos mil ochenta y dos.

E- Ok.

Aa1- (Escribe 2082)

E- Tú me dices que, en la anterior, aquí (refiriéndome a ítem 2) también puedes sumar además de hacer lo que hiciste en la anterior, o sea que en esta no tuviste necesariamente que sumar (señalo ítem 2) …

Aa1- No, no tuve que sumar necesariamente.

E- Ok, más bien cómo le llamarías tú a esa forma de resolverla o cómo queda así que dices bueno voy poniendo unidades, decenas, centenas y unidades de millar... no necesariamente sumaste, pero aquí (en ítem 2) ...

Aa1- Aquí también lo pude haber hecho y este… también lo pude haber sumado mentalmente ya que es una suma fácil de resolver.

E- Bueno ahí vemos que tu resultado ¿cuál es?

Aa1- Dos mil ochenta y dos.

E- En tu resultado aparece un cero, ¿qué significa ese cero que pusiste ahí? ¿Qué te dice a ti ese cero?

Aa1- Mmmm me dice que en este dígito, no, en este resultado no lleva centenas ya que es un cero.

E- No lleva centena y ahí es un cero... ¿una centena cómo la distinguirías tú?

Aa1- Tiene, es que... si está separado de esta manera así (Señala ítem 5000 + 300 + 60 + 5)) lo puedo distinguir fácilmente ya que tiene tres dígitos.... (está fijándose en la operación que muestra claramente cada orden que la compone en cada sumando)... pero si es un número que ya está junto (se refiere a la escritura de una cantidad como 345 en comparación con otra que se encuentre desagrupada como 300 + 40 + 5, donde se ven a simple vista los diferentes órdenes del sistema de numeración decimal) puedo hacerle unidades, decenas, centenas (señala con el lápiz cada orden en la cifra integrada del resultado 2082) de aquí para acá (de derecha a izquierda); el tercer número sería la centena.

E- El tercer número sería centena; entonces tú ahí ya lo distinguirías si estuviera escrito en este resultado (refiriéndome a 2082); y aquí, (en la operación 2000 + 80 + 2) ¿cómo te das cuenta que no lo tienes?

Aa1- Porque dos es unidad, ochenta es decena y dos mil es unidad de millar entonces no hay aquí ninguna centena (refiriéndose a la operación del ítem 2).

E- Ok, pasamos a la que sigue.

Aa1- Ésta... (Se refiere a 300 + 4000 + 80 + 3 + 40, ítem 3)

E- ¿Qué números tienes ahí?

Aa1- Trescientos, cuatro mil, ochenta, tres y cuarenta; esta yo primero me, localizaría el número más grande que es cuatro mil luego sería trescientos ya llevo que es cuatro mil trescientos; luego aquí hay dos números que son este tiene dos dígitos así que sumo estos dos, ochenta más cuarenta y me da ciento veinte entonces sumo ciento veinte más trescientos y me da cuatrocientos veinte, más cuatro mil cuatrocientos... cuatro mil... cuatro mil cuatrocientos veinte...más tres, es cuatro mil... a ver, a ver... ochenta más cuarenta...ciento veinte... cuatrocientos veinte, aja, ... cuatro mil cuatrocientos y como aquí hay un tres, es cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Cuatro mil cuatrocientos veintitrés, ok ¿cómo es que tú decides primero empezar en el más grande? ¿Por qué lo eliges así?

Aa1- No sé, es que así... no sé.

E- ¿Casi siempre lo haces así fijándote en el más grande?

Aa1- No.

E- Algunos niños me han dicho que se les hace más fácil ¿no sé si a ti se te haga más fácil?

Aa1- En esta ocasión sí se me hace más fácil.

E- Oye, tú me dices voy a sumar el ochenta con el cuarenta ¿cómo decides sumar eso?

Aa1- Porque son dos números que son de dos dígitos también lo que pude haber hecho es sumar cuatro mil más trescientos más ochenta más cuarenta más tres.

E- ¿Y te hubiera salido lo mismo? Pero tú en este caso decides hacer primero esta parte.

Aa1- (Asiente)

E- Cuando tú decides hacer esta parte (80 + 40) ya te resulta un número de tres dígitos, te da 120. ¿Ahora como decidiste sumárselo al trescientos?

Aa1- Porque el resultado que me dé va a ser un número sólo y es como si ya no existiera ni el trescientos, ni el ochenta ni el cuarenta, simplemente existe el número que me dio al sumar estos dígitos, esos tres números.

E- Del trescientos, el ochenta y el cuarenta.

Aa1- (Asiente). Entonces ese resultado va a ser un sólo dígito y se me va a hacer más fácil sumar ese número más cuatro mil más tres.

E- Ok.

Tiempo transcurrido hasta esta parte de la entrevista- 0:10:03.6

E- Muy bien, pasamos a la que sigue ¿qué números tienes ahí?

Aa1- Seiscientos, más cinco mil, más siete, más cuatrocientos más cuarenta.... aquí primero empecé por el cinco mil; eso como que lo saco, me olvido de que existe ahorita, luego sumo seiscientos más cuatrocientos me da mil, entonces sumo mil más cinco mil y me da seis mil y aquí está el cuarenta y el siete así que los sumo, cuarenta más siete es cuarenta y siete; entonces con el resultado de estos tres que, es seis mil, (refiriéndome a lo que le da de 600 + 400 + 5000) entonces sumo más el siete, más el resultado que me dio en la suma de siete más cuarenta y me dio seis mil... este.. Seis mil cuarenta y siete.

E- Ok, escríbele.

Aa1- (Escribe 6047)

E- Dices que te da seis mil cuarenta y siete... oye aquí veo un cero, tú dime ¿qué significa ese cero?

Aa1- Pues que aquí no hay centenas.

E- No hay centenas en seis mil cuarenta y siete. Oye, una pregunta, yo veo algunas centenas… el cuatrocientos y el seiscientos.

Aa1- Sí hay centenas en la suma, pero no hay centenas en el resultado entonces es solamente que no hay centenas en el resultado.

E- ¿Tú sabes qué pasó con esas centenas que ya no están en el resultado?

Aa1- Las convertí en unidades de millar.

E- Una niña me decía que ésta (señalo ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) se resolvía como esta (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4)) y a ella en ese caso le dio este número (Escribo 65,744). A ella le dio ese número ¿cuál es?

Aa1- Sesenta y cinco mil setecientos cuarenta y cuatro.

E- ¿Qué le dirías? ¿Tú qué opinas?

Aa1- Pues primero analizaría si mi resultado está bien, o el de ella está bien o mal; si ella está bien yo le preguntaría le diría que me explicará cómo le hizo para sacar ese resultado y si ella lo tiene mal yo le diría que si quiere yo le explico cómo le hice o que revisara bien su operación, su resultado.

E- ¿Cómo le explicarías tú para que obtenga tu resultado? ¿tú que piensas de tu resultado?

Aa1- Yo pienso que yo estoy bien de mi resultado.

E- ¿Entonces qué crees que le pasó a ella?

Aa1- Pues no sé, si sí estoy cien por ciento segura que mi resultado está bien pues, le digo que su resultado está mal, "fíjate en cómo le estás haciendo para que te pueda salir bien".

E- ¿Y en qué parte crees que ella se equivocó? ¿Qué le faltó?

Aa1- Lo que hizo ella sí hubiera servido; sumar está igual que esta (señala el ítem 4 y luego el 1) pero solo tendría que cambiar de posición los números, pero yo creo que le salió ese resultado porque no lo sumo bien o no lo supo sumar.

E- ¿Qué parte no sumó bien?

Aa1- Mmmm

E- Digamos que los acomodamos. Ponemos el cinco mil ¿y luego cuál?

Aa1- El seiscientos, cuatrocientos, el cuarenta y el siete.

E- (Escribo 5000 + 600 + 400 + 40 + 7) ¿Y qué tal si ahora le da ésta (escribo 56447)?

E- Ya los acomodé, entonces ahora ya sí puedo hacerla así ¿qué crees que faltó?

Aa1- Que acomodó estas, a ver... si la hubiera hecho igual de unidades decenas y centenas, como aquí hay dos centenas no se pueden poner los dos dígitos ya que le salió una suma… un resultado de cinco dígitos, le tenía que salir no sé, de cinco dígitos) pero estos dos son centenas entonces se tendrían que sumar para hacer este sólo una centena o una unidad de millar.

E- Ya sea que te de una centena o una unidad de millar…

Aa1- Ajá.

E- Ok, pasamos a la que sigue.

Aa1- Nueve mil más mil setecientos más ochocientos más siete... este aquí sumo nueve mil más mil setecientos que me da diez mil setecientos, diez mil setecientos más ochocientos (toma la calculadora).

E- Antes de usar la calculadora, ¿cómo me dices que lo vas haciendo?

Aa1- Sumo nueve mil, más mil setecientos, me da diez mil setecientos, lo sumo más ochocientos.

E- ¿Le quieres sumar a diez mil setecientos ochocientos?

Aa1- Aja (resuelve con la calculadora) (ingresa primero 10000 borra escribe 10700 + 800 = 11, 500).

Aa1- Once mil quinientos y once mil quinientos le sumo cinco entonces me saldría once mil quinientos cinco.

E- En este caso veo que tú ahora sí fuiste sumando como me contabas; primero este (9000) luego este (1700) ... etc. no buscaste hacer como que un sólo dígito de las centenas que tenías. ¿Por qué crees que decidiste sumarlo así y no de la otra manera?

Aa1- Es que si cambio la posición de los números me sigue dando el mismo resultado, entonces ésta (señala ítem 9000 + 1700 + 800 + 5) la hice de esa manera ya que no necesité mover los números ya que están de una manera en la que se me puede hacer fácil resolverla más rápido.

E- Entonces así se te hizo más fácil y en estos casos ¿se te hacía más difícil resolverla de corrido?

Aa1- No, es que a mí se me hizo completamente lo mismo sólo que en esas tuve que hacer una operación aparte, porque no la pude hacer mentalmente (ítems con dos centenas o decenas). Pero para mí es completamente lo mismo no cambio la facilidad o la complejidad.

Entrevista 2

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa2 como entrevistado femenino.

Fecha de nacimiento: 3 de diciembre de 2003

Edad: (11,06)

Fecha de la entrevista: 17 de junio de 2015

Duración: 00:13:17

E- Me ayudas poniendo tu nombre.

E- (Recogida de datos personales: nombre del alumno, grado, grupo y fecha de la entrevista; Rapport).

E- Te voy a leer las indicaciones. Te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes la manera en que las vas haciendo. Si en algún momento necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar usando la calculadora. Vamos a ver, ¿Qué números tienes ahí?

Aa2- Cinco mil, trescientos, sesenta, cuatro. Te lo voy a poner en una sola, ¿es una sola?

E- (No resulta claro a qué se refiere con "una sola" y se procede a preguntar) A ver qué resultado te da ¿qué obtienes?

Aa2- (Hablando en voz baja) Cinco mil trescientos, trescientos… trescientos sesenta... cinco mil trescientos sesenta... (Conforme dice los nombres de los números va escribiendo 5364).

E- ¿Cómo le hiciste para ir sumando?

Aa2- Pues sumando poco a poco, sumé primero cinco mil más trescientos y de trescientos sumé sesenta y de sesenta le sumé los cuatro.

E- ¿Y cómo decidiste escribir este resultado (Me refiero a 5364)? ¿cómo decidiste poner el cuatro, el seis, el tres el cinco?

Aa2- Porque pensé que era la respuesta.

E- Pasamos a la que sigue.

Aa2- ¿Te la dicto? o ya...

E- Tú resuélvela, bueno dime qué números tienes.

Aa2- Dos mil, ochenta y dos (escribe en primer intento 282, borra y escribe 2082).

E- Cuéntame, ahí veo un borrón ¿qué pasó ahí?

Aa2- Es que le borré, pero está manchada (Se refiere a que no quedó limpia la hoja al intentar borrar el 282 y escribir en su lugar el 2082).

E- ¿Qué iba a haber antes de ese borrón?

Aa2- Era doscientos ochenta y dos, pero me equivoqué y le faltaba el cero.

E- A ver, ponle aquí abajo el que ibas a poner.

Aa2- ¿Abajo? (escribe 2082, pero borra y escribe 282).

E- ¿Ese era el que primero ibas a poner?

Aa2- (Escribe 282)

E- Y luego, ¿en qué pensaste para corregirlo? ¿En qué diste cuenta?

Aa2- Se me olvidó el cero que iba.

E- ¿Cómo te acordaste de ese cero?

Aa2- Porque me acorde, porque siempre en el dos mil, para escribir un número tengo que llevar ceros aparte de los que lleva o sea no se te explicar muy bien, pero…

E- O sea, tú te diste cuenta de que te faltaba un cero y te diste cuenta porque te fijaste en cómo lo ibas diciendo... o...

Aa2- Como lo escribí (refiriéndose a su primer intento 282) y vi que estaba incorrecta.

E- Cuando tu escribiste este doscientos ochenta y dos ¿tú lo leíste otra vez?

Aa2- Sí.

E- ¿Y dijiste "este no es", porque en tu cabeza tenías el dos mil ochenta y dos? ¿Fue así o fue de otra forma?

Aa2- Sí.

E- Entonces al escribir doscientos ochenta y dos lo lees y dices "¡ay! no es doscientos ochenta y dos yo quiero escribir dos mil ochenta y dos". Otros niños me han dicho que se fijan en otras cosas y yo quiero saber en qué te estás fijando tú. Ok. Pasamos a la que sigue ¿qué número tienes?

Aa2- Seiscientos más cinco mil más siete más cuatrocientos más cuarenta.

E- Muy bien.

Aa2- Seis mil cuarenta y siete.

E- Ok, cuéntame cómo le hiciste.

Aa2- Sumé a cinco mil, sumé los seiscientos más los cuatrocientos y me dio seis mil, sumé los cuarenta y los siete y medio a seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Cómo decidiste sumar el cuatrocientos y el seiscientos?

Aa2- Se me hace más fácil para resolverla; seiscientos más cuatrocientos ya lo voy sumando poco a poco. O sea, sumo lo más fácil ya hasta el último por lo más difícil.

E- ¿Ok qué seria para ti lo más fácil?

Aa2- Cinco mil y el seiscientos y el cuarenta... bueno caso todo.

E- Pero tú dices “primero saco éstos” (refiriéndome al 600 + 400 del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40)). Porque sumas el seiscientos más el cuatrocientos por ser lo más fácil; y tú, viendo los números, ¿qué los hace más fácil para ti?

Aa2- Porque el seiscientos más cuatrocientos me da más fácil a mil y que ir sumando poco a poco cinco mil, seiscientos mas cuatrocientos, se me hace más fácil así.

E- ¿Tú sabias que te iba a dar mil o querías formar los mil antes de empezar a hacerla?

Aa2- Mmmmm ya sabía que me iba a dar mil.

E- Porque ya conoces ese cálculo.

Aa2- (Asiente)

E-Una niña cuando estaba resolviendo me dijo que el resultado era (escribo 65744) ¿qué opinas de lo que hizo ella?

Aa2- No la resolvió bien porque ella se fijó en los... en éste sí está bien… (Aa2 se refiere al 6 que inicia la cantidad 65744)

E- ¿En cuál parte si está bien?

Aa2- En el seis (refiriéndose a que el seis sí es el primer número de ambas escrituras, tanto de la respuesta correcta 6047 como de la respuesta no correcta 65744) sí está bien por el seis mil, en el cinco no está bien, éste tampoco (el 7), ni el cuarenta y cuatro porque nada más iba sumando los principales números no iba sumando los ceros que tenía...

E- No sumó los ceros, sólo los números.

Aa2- Los primeros. No sumó ningún cero y va sumando el siete… Así (marca las unidades de los órdenes sin los ceros, señalando el 5 de 5000, el 7, el 4 de 400 y 4 de 40).

E- Pero si suma seis, más cinco, le da once más siete le da dieciocho... ¿entonces no sumó?

Aa2- Se le hizo más fácil no más ir escribiendo nada más los principiantes números y no sumó ningún número.

E- ¿Entonces no todas se resuelven de esta manera? (Me refiero al procedimiento de poner/juntar que se ha destacado en las entrevistas). (Ahora se señala el ítem 5000 + 300 + 60 + 4) Porque aquí sí sirve su manera, escribir los números principiantes (en el ítem 5000 + 300 + 60 + 4). Aquí sí y acá no (alterno señales entre ítem 5000 + 300 + 60 + 4 y el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

Aa2- En unas sí sirve y en otras no.

E- ¿En qué te fijarías para saber dónde te sirve y dónde no?

Aa2- Pues más o menos calcular, fijarme en los ceros qué tiene y cuál sería más fácil, en cuál si serviría esto que hizo ella.

E- Me dices que te fijarías en los ceros ¿qué de los ceros te ayudaría?

Aa2- Los ceros; porque si, por ejemplo, ella lo hizo nada más iba escribiendo los principales números... seiscientos, quinientos (dice quinientos en lugar de cinco mil) y es una diferencia entre escribo seis a seiscientos, a mi (Aa1 quiere decir, “para mi”) sí hay diferencia.

E-Para ti sí hay diferencia entre escribir el puro seis y el seiscientos. Oye, este cero de aquí (de 6047) que tú decidiste poner aquí ¿qué significa?

Aa2- Es el mil

E- A ver cuéntame.

Aa2- Es seis mil cuarenta y siete.

E- Es seis mil cuarenta y siete lo que te da y en esa cantidad que te da te resulto un cero. Me dices tú es del mil ¿De cuál mil?

Aa2- Del mil que estoy sacando acá (se refiere al mil que le resulta de sumar 600 + 400 en el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

E- ¿Del mil que sacaste de seiscientos y cuatrocientos?

Aa2- Ajá.

E- ¿Y cómo fue que lo decides poner ahí?

Aa2- Lo sumé y ya en mi pensamiento tenía que ser seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Oye y qué significa que ese cero este ahí? (El cero de 6047).

Aa2- Que equivale a seis mil, si le quito el cero nada más me va a dar seiscientos cuarenta y siete. Equivale a mil.

E- ¿Alguna otra cosa que te indique el cero?

Aa2- (Niega)

E- Pasamos a la que sigue.

(Pausa para cambiar de tarea)

E- Cuéntame ¿qué número te dio?

Aa2- (Escribe 10005 pero lee once mil cinco) once mil cinco, no pérame (sic).

E- Si quieres abajo (escribe lo que falta o un nuevo resultado).

Aa2- ¿Puedo usar la calculadora? o la calculadora solo en caso de...

E- En caso de dudas.

Aa2- Ah…

E- Si gustas así hacerla hasta donde tú puedas.

Aa2- Sí, once mil cinco (leyendo 10005).

E- ¿Ese número que tienes ahí es once mil cinco?

Aa2- Ajá.

E- Ok... Cuéntame cómo le fuiste haciendo ¿qué sumaste con qué?

Aa2- Novecientos más mil me da diez mil y luego ahí tiene un setecientos, le sume setecientos a ochocientos... (Calculando en su mente) mil quinientos cincuenta y cinco... sí estaba mal, yo sabía que me faltaba aquí un número (escribe un nuevo resultado 1505).

E- ¿Qué dice ahí?

Aa2- Mil quinientos cinco...

E- Mil quinientos cinco...

Aa2- ¡Noooo! (ríe) Es once mil quinientos cinco (Agrega un cero a la derecha de 1505 resultando 11505).

E- ¿En qué te diste cuenta ahorita que no era mil quinientos cinco?

Aa2- Por los... es novecientos o mil... mil, es mil... (Refiriéndose al orden de los 9000 del ítem 5 que está resolviendo y que es 9000 + 1700 + 800 + 5) por los nueve mil y los mil de aquí y los mil que me da de los... aquí le quito doscientos al setecientos y los junto con los ochocientos y me da otros mil y los quinientos que me sobran los puse aquí (señala su resultado 11505) y los cinco pesos. Yo los pienso como pesos.

E- ¿Los estás pensando como pesos? ¿Y eso te ayuda?

Aa2- Sí.

E- Entonces tu resultado es...

Aa2- Once mil quinientos cinco.

E- Ok, vamos a pasar a lo que sigue, bueno antes... ¿por qué crees que habías escrito esto? (refiriéndome a 10005).

Aa2- Porque no iba sumando bien y no estaba pensando lo que... porque aquí no puse ni los once mil (refiriéndose a cuando escribió 10005) puse nada más mil quinientos cinco, mil cinco...

E- ¿Este es mil cinco? (señalo 10005)

Aa2- Sí... ¡Noooo! (se detiene a leer) Porque puse... lo puse mal, me sobraría aquí el cinco para que fueran mil cinco (refiriéndose quizá no al cinco en sí, sino a una posición o a recorrer el cinco, quitando un cero).

E- A ver ¿cómo escribirías mil cinco?

Aa2- (Escribe 1005)

E- Pasamos ahora sí a la que sigue.

Entrevista 3

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa3 como entrevistado femenino.

Edad: 12 años

Fecha de entrevista: 2 de junio de 2015

Duración: 00:11:59

E- (Rapport)

E- Te voy leer las indicaciones. Te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas en la manera en que puedas y me cuentes cómo le vas haciendo. Si en algún momento necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar en la calculadora. Empezamos ¿qué números dice? (Ítem 5000 + 300 + 60 + 4).

Aa3- Cinco mil más trescientos más sesenta más cuatro

E- ¿Qué resultado te va a dar?

Aa3- Cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- Si quieres anótalo y me dices en qué te fijaste.

Aa3- (Anota 5364)

E- Cuéntame.

Aa3-Primero sumé quinientos (Aa3 cambia el nombre del número cinco mil por el de quinientos) y bueno sumé luego trescientos y ya los sesenta y los cuatro.

E- Fuiste sumando... ¿Y habrá otra forma en que lo puedas resolver o nada más haciendo la suma? ¿Cómo que hiciste la suma en tu cabeza?

Aa3- Sí.

E- Pasamos a la siguiente ¿qué dice? (Ítem 2000 + 80 + 2).

Aa3- Dos mil más ochenta más dos.

E- ¿Qué resultado te va a dar?

Aa3- Dos mil ochenta y dos.

E- Si quieres anótalo (Aa3 anota 2082).

E- ok. ¿Cómo le hiciste para hacer este cálculo?

Aa3- También lo sumé.

E- Y cómo decidiste, yo veo que escribiste un cero (refiriéndome al cero de 2082) ¿cómo sabes que ahí va un cero y qué significa?

Aa3- El cero va porque todavía no llega a tener centena, entonces pues se deja el espacio de la centena y ya se pone a partir de la decena.

E- ¿Qué significa este cero?

Aa3- Que no ha llegado a la centena.

E- Pasamos a la que sigue ¿qué dice? (Refiriéndome al ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40).

Aa3- Trescientos más cuatro mil, más ochenta más tres más cuarenta.

E- Cuéntame.

Aa3- Es cuatro mil cuatrocientos veint… no... Cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- ¿Cómo fuiste haciendo el cálculo?

Aa3- Primero quité el trescientos y empecé a partir del cuatro mil, luego sumé trescientos, pero le aumenté a cuatrocientos porque como era ochenta más cuarenta, ya aumenté a cuatrocientos. Dejé los veinte, porque pues a éste (a la suma de 80 + 40 igual a 120) se le quita el veinte para completar el cien y ya sumé a los tres (los 300 más los 80 más los 40, probablemente).

E- Entonces tú te fijas en estos dos números que son los que sumas (80 y 40); ¿en qué te fijaste para sumar este par de números (el 80 y el 40)?

Aa3- En el ochenta y en cuarenta y luego para completarlo al cien, le quité veinte al cuarenta y ya dejé los otro veinte del cuarenta.

E- ¿Cómo sabes que hay que completar a cien?

Aa3. Porque pues sé que, o sea, que tenía que completar cien, para que esta cantidad (el 80 de la operación 300 + 4000 + 80 + 3 + 40) aumentará y ya sacar la cantidad (aumentara o completara el 80 al 100 con 20 desagrupados del 40, para poder reagrupar una centena y sumársela a las tres centenas que ya tenía).

E- ¿Cuál tenías que aumentar?

Aa3- El trescientos.

E- ¿Y eso siempre pasa o cuándo es cuando hay que hacer estos complementos a cierto número?

Aa3- Cuando, por ejemplo, o sea, si nada más fuera el ochenta pues ya no hay que completar nada, pero como eran ochenta más cuarenta no se puede poner cuatro mil trescientos ochenta cuarenta entonces ya hay que completar al cuatro mil cuatrocientos.

E- ¿Entonces buscas completar ciertos números, en ese caso completaste a cien el ochenta y el cuarenta y esos cien se los sumaste al trescientos?

Aa3- Ajá

E- ¿Puedes escribir tu resultado?

Aa3- (Escribe 4423)

E- Cuando tú me dices que no puedes poner cuatro mil ochenta cuarenta o cuatro mil trescientos ochenta cuarenta, ¿en qué te fijas para decir que eso no se puede poner?

Aa3- Porque, o sea, sé que se tiene que convertir o sea que no puede hacer eso, que se tiene que convertir ya a la centena y dejar los demás ya a las decenas (refiriéndose al excedente de 120, que es 20).

E- Vamos a pasar a la que sigue (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

Aa3- Seiscientos más cinco mil más siete más cuatrocientos más cuarenta. Son, seis mil cuarenta y siete.

E- Cuéntame cómo le fuiste haciendo porque le haces como una calculadora de rápido.

Aa3- Primero dejé el cinco mil, pero después vi que eran seiscientos más cuatrocientos. Esos dos ya hacen otros mil, entonces se los sumé al cinco mil y ya eran seis mil y luego nada más se los sumé, el cuarenta y el siete y ya se los sumé a los seis mil.

E- ¿Lo puedes escribir?

Aa3- (Escribe 6047)

E- Una niña cuando me escribió ese resultado lo escribió así (escribo 65,744). Así lo escribió ella ¿tú que le dirías?

Aa3- Que está mal porque ya está poniendo sesenta y cinco mil y pues no alcanza el sesenta y cinco, sólo se quedan en el seis mil.

E- Tú en qué te guías para decir no va a ser sesenta y cinco mil, va a ser seis mil ¿en qué te guiaste de los números que tienes aquí?

Aa3- En que o sea, no alcanza sesenta y cinco mil porque para empezar no hay decenas de millar entonces ni siquiera alcanza a los diez mil, entonces pues menos a los sesenta y cinco mil.

E- Ni siquiera alcanza a los diez mil, menos a los sesenta y cinco mil...eso sería lo que tú le dices.

Aa3- Ajá.

E- ¿Y cómo crees que ella le hizo, porque le hizo así?

Aa3- Porque sumó que son seiscientos, aquí está el seis, el cinco mil, el cinco, el siete pues ya aquí se pasó, el cuatrocientos y el cuarenta.

E- Ok, me lo repites.

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:08:36.0[23]

Aa3- O sea, que fue poniendo el primer número de cada uno de éstos (se refiere a los primeros números de los sumandos, el 6 de 600, el 5 de 5000, el 7, el 4 del 400 y el 4 del

[23] A lo largo de la transcripción se introduce el tiempo transcurrido para favorecer la búsqueda de cierta parte del discurso del entrevistado en el archivo de vídeo y/o audio.

40) y los fue pasando aquí (señala los sumandos del ítem citado y luego la cifra escrita por E: 65,744).

E- Oye, pero eso se puede hacer aquí arriba ¿no? (señalo ítem 1, 5000 + 300 + 60 + 4).

Aa3- Ah pues sí, o sea, sí se puede, pero aquí si pones pues cada número si saldría bien (ítem 1.1 que es 5000 + 300 + 60 + 4), pero aquí no (ítem 1.4 que es 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) porque aquí está diferente acomodado.

E- Diferente acomodado. ¿Cuáles son esas diferencias que tú notas?

Aa3- Que aquí (ítem 1, 5000 + 300 + 60 + 4) el primer número son los miles y aquí (1.4 que es 5000 + 300 + 60 + 4) los primeros son las centenas.

E- ¿Y ella que necesitaría hacer en primer lugar para empezar a hacer el cálculo?

Aa3- Pues es que aquí, aunque cambiemos éste para acá, (refiriéndose a ordenar los sumandos, refiriéndose talvez a ordenar la operación de la siguiente manera: 5000 + 600 + 400 + 40 + 7) aun así no se puede porque hay que sumarle al cinco mil el seiscientos y los cuatrocientos.

E-Ok. Pasamos a la que sigue. ¿Qué números dice? (Ítem 9000 + 1700 + 800 + 5).

Aa3- Nueve mil. Mil setecientos, ochocientos y cinco.

E- Ok, cuéntame ¿ahí cuánto te da?

Aa3- Ah... once mil quinientos cinco.

E- Si quieres escríbele.

Aa3- (Escribe 11 505)

E- ¿Cómo te dio esa cantidad?

Aa3- El mil setecientos se los sumé al novecientos (dice novecientos en lugar de nueve mil) pero le quité el setecientos por el momento, entonces me dio diez mil, y luego ya le sumé los setecientos, son diez mil setecientos y luego le sumé el ochocientos y son diez mil... no… once mil quinientos y luego ya le sumé el cinco y ya once mil quinientos cinco.

E- ok, ¿cómo decides escribir ese cero en ese lugar?

Aa3- Porque aquí pues ya estaban estos hasta las centenas (refiriéndose a 11500) y después se les suma el cinco, entonces con el cinco ya no alcanza a las decenas entonces se deja el espacio de las decenas con cero y ya se pasan las unidades.

E- Oye el otro día una niña me dijo que esta cantidad eran diecisiete mil y ella le puso una comita aquí (marco sobre el 1700 una coma quedando 17,00) ¿tú qué piensas?

Aa3- Que no porque para que fueran diecisiete mil tendría que tener otro cero y como nada más tiene dos ceros se pasa la coma para acá (de 17,00 a 1,700).

E- Se pasa la coma entre el uno y el cero.

Aa3- Ajá.

E- Ella me dijo que ponerle esa comita cambiaba el nombre del número.

Aa3- ¿El nombre?

E- Sí, de diecisiete mil a mil setecientos tú lo podrías hacer solo poniéndole la comita. ¿Tú que piensas?

Aa3- Que no cambia porque sigue siendo mil setecientos, aunque tenga la coma porque para que cambiara tendrías que ponerle otro cero.

E- Ok, pasamos al que sigue.

Entrevista 4

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa4 como entrevistado femenino.

Edad (11,11)

Nacimiento: 27 de junio de 2003

Fecha de la entrevista: 1de junio de 2015

Duración: 00:37:09

E - (Presentación, rapport).

E- Vamos a comenzar, mira, te voy a leer las indicaciones. Te voy a presentar unas operaciones, quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo vas haciendo; si en algún momento necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar con la calculadora que traigo aquí. Ok. Entonces pues qué te parece si comenzamos. ¿Qué números tienes ahí? (Ítem 5000 + 300 + 60 + 4).

Aa4- Cinco mil, trescientos sesenta y cuatro.

E- ¿Qué resultado obtienes?

Aa4- ¿Tengo que hacerla?

E- Sí

Aa4- (Escribe algoritmo vertical).

E-Ok. ¿Cuéntame por qué decidiste hacerla así?

Aa4- Porque así es la manera en que yo la hago.

E- ¿Y por qué las acomodas de esta manera?

Aa4- Porque así nos enseña la maestra y creo que así es.

E- Bueno aquí veo que acomodas el cinco mil, el seiscientos, el sesenta y el cuatro ¿cómo le haces para elegir ese acomodo? ¿En qué te estás fijando para acomodarlos así?

Aa4- En los ceros.

E- ¿En qué te fijas de los ceros?

Aa4- En cuantos son, aquí por ejemplo (en 5000) son tres, aquí (en 300) son dos, aquí es uno (en 60) y aquí pues ya no tiene (en 4).

E- Oye y así sin hacer este tipo de cuenta que aquí usan en la escuela ¿crees que haya otra manera de hacerla?

Aa4- Mmmmmm…

E- O que tú pudieras viendo…

Aa4- ¿Este ejemplo? (refiriéndose a la operación).

E- Esa cuenta como está, tú dijeras “bueno puedo hacer de otra manera…”

Aa4- Sí, sí puedo.

E- ¿Cómo la harías?

Aa4- Primero me fijaría en el cinco mil más trescientos, son cinco mil trescientos y luego sumaría los sesenta, cinco mil trescientos sesenta y luego sumaría los cuatro, cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- Si quieres poner aquí también tu resultado.

Aa4- (Escribe 5364)

E- Cuando vas haciendo la cuenta ¿la vas haciendo en tu cabeza o te vas fijando en cómo suena?

Aa4- En mi cabeza.

E- Ok, pasamos a la que sigue ¿qué números tienes ahí? (Ítem 2000 + 80 + 2).

Aa4- Dos mil, ochenta y dos. ¿Lo mismo?

E- Me gustaría que intentaras esta forma que intentamos aquí (en el ítem 1, sin escribir el algoritmo vertical).

Aa4- (Escribe 2082)

E ¿Qué número te resultó?

Aa4- ¿Son dos mil ochenta y dos…? (Dudando).

E- Cuéntame ¿cómo le fuiste haciendo para obtener ese resultado?

Aa4- Mmm… me voy fijando que aquí son dos mil y en mi cabeza voy viendo dos mil más ochenta y después de eso dos mil ochenta, le sumo dos.

E - …Le sumaste los dos. Ok, ¿cómo elegiste escribir aquí, porque aquí veo que te resultó un cero, ese cero?

Aa4- Sí porque aquí son tres y es el inicio (Aa4 está atendiendo a los tres ceros del 2000).

E- ¿Son tres qué?

Aa4- Son tres ceros.

E- Ok, en el dos mil tienes tres ceros ¿y luego?

Aa4- Y pues yo me fijo que son los primeros tres (ceros) del dos mil y ya.

E- Son los primeros tres, ¿a qué te refieres?

Aa4- Son tres ceros y aquí si son dos mil ochenta y dos, se tiene que poner un cero.

E- ¿Un cero? ¿En ese lugar?

Aa4- (Asiente)

E- Tienes alguna duda, ¿no te convence? Te veo dudando.

Aa4- Ese no me convence (refiriéndose a 2082).

E- Podrías poner allí uno que te convenza más ¿o qué estás pensando?

Aa4- ¿Puedo hacer la suma (se refiere a hacer el algoritmo vertical)? Es que casi todas las hago así.

E- Bueno ahorita que la hagas me dices una cosa.

Aa4- (Escribe el algoritmo)

E- Tú me dices que no te convence este número (el 2082) ¿qué es lo que te hace dudar?

Aa4- El cero.

E- Sí… ahorita antes de que hagas esa cuenta (refiriéndome al algoritmo que escribió) ¿dónde pondrías tú el cero o dónde estás pensando ponerlo?

Aa4- Creo que yo lo pusiera acá o sí no aquí… (Aa4 está dudando entre poner el cero en el lugar de las centenas o en el de las unidades, quedando las cantidades como 2082 o como 2820).

E- Ponme ejemplo de dónde lo pondrías

Aa4- (Escribe 2820)

E- Ajá, algo me dijiste de allí o acá.

Aa4- Ahí (al final como en 2820) o acá (igual que en 2082).

E- En ese lugar donde lo tenías, ¿cuéntame con cuál te quedas?

Aa4- Creo que con este (refiriéndose a 2082).

E- ¿Con cuál?, léelo.

Aa4- Dos mil ochenta y dos (mirando el 2082).

E- ¿Y ésta (señalo que lea el 2820)?

Aa4- Dos mil ochocientos veinte.

E- Ok, ¿Con cuál te quedas entonces?

Aa4- Con este (señala 2082).

E- ¿Y en qué te fijaste para decidir en ésta (escoger 2082) ya ahorita que las comparaste?

Aa4- Porque aquí serían dos mil ochocientos veinte (señala 2820) y aquí dos mil ochenta y dos (refiriéndose a 2082) y en la suma son dos mil ochenta y dos, no dos mil ochocientos veinte.

E- ¿Te parece si pasamos a la otra?

Aa4- Sí.

E- ¿O crees que necesites hacer esta (refiriéndome a resolver el algoritmo que había escrito antes)?

Aa4- Ya no.

E- ¿O pasamos a la que sigue?

Aa4- (Asiente y empieza a resolver ítem 3, 300 + 4000 + 80 + 3 + 40)

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:08:49.3

Aa4- (Tarda dos minutos en tratar de resolverla mental, luego procede a escribir el algoritmo vertical).

E- A ver espérame poquito, bueno acaba de escribir tu cuenta.

(Interrupción, nos detenemos y esperamos que las personas se salgan del salón)

E- Ok. Vamos a ver, tú estabas haciendo cálculos (refiriéndome a que se oía en voz baja que decía los números) Me gustaría que me dijeras cómo lo estás pensando…

Aa4- Siempre empiezo con los más grandes, y luego voy de aquí (los más grandes) voy para los que siguen que es aquí los trescientos, me voy con los más grandes y luego con los más chicos.

E- Ahí ¿con cuáles grandes iniciarías tu cálculo?

Aa4- Con el cuatro mil, luego con el trescientos, con el ochenta más cuarenta y luego el tres.

E- ¿Y de ahí tienes alguna manera de obtener un resultado?

Aa4- Estaba pensando uno.

E- ¿Cuál pensabas?

Aa4- Sería, es cuatro mil cuatrocientos veinte…

E- A ver escríbelo.

Aa4- (Escribe 4420) ¡ah no!, son veintitrés (escribe 4423).

E- Cuéntame ¿Cómo fuiste haciendo ese cálculo?

Aa4- Este así, sumando todos.

E- ¡Ah! como me comentaste, ok. Cómo decides sumar tú… bueno dices, primero sumo el cuatro mil, luego el trescientos, luego el ochenta, luego el cuarenta y luego al final el tres. Aquí pues va cuatro mil y trescientos ¿qué resultado te da?

Aa4- Cuatro mil trescientos.

E- ¿Y luego?

Aa4- Cuatro mil trescientos ochenta.

E- ¿Y luego?

Aa4- Y luego ahí sería cuatro mil cuatrocientos porque ochenta más cuarenta ya son ciento veinte.

E- Ya son ciento veinte, ok. Entonces cuando ya sumas ochenta y cuarenta, esos ciento veinte que te sale ¿A dónde se los sumaste?

Aa4- Al trescientos.

E- ¿Y te fijaste en algo para sumárselo al trescientos?

Aa4- Pues sí, porque bueno se sumaría a éste (se refiere a adicionar la suma de 80 + 40 = 120 al 300) porque son los que están primero que el trescientos.

E- ¿A qué te refieres?

Aa4- Porque está más grande.

E- ¿Está más grande el cuál?

Aa4- El trescientos, que el ochenta y el cuarenta.

E- Entonces te fijas que ciento veinte son menos que trescientos y por eso se los sumas.

Aa4- Ajá.

E- Ok, muy bien qué te parece ahorita antes de que pasemos a la que sigue, me habías dicho acá arriba que elegiste poner el cero ahí (refiriéndome a 2082) ya que lo leíste dijiste, no pues es que mi cuenta me da dos mil ochenta y dos, no me da dos mil ochocientos veinte. Quiero que me cuentes un poquito, este cero cambiando de lugar ¿qué significa? ¿Por qué es importante que lo pongas aquí en el dos mil ochenta y dos?

Aa4- ¿Por qué es importante… por qué poner el cero en un lugar?

E- Ajá.

Aa4- Porque aquí yo creo que si lo movemos de un lugar ahora sería más, más por ejemplo dos mil ochenta y dos ya serían dos mil ochocientos veinte.

14:11.4

E- Ok en este caso lo moviste de lugar y te da más.

Aa4- Ajá y aquí nada más nos muestra un dos.

E- ¿Y en otras cantidades por qué es importante que este en cierto lugar y no en otro? En cualquier cantidad.

Aa4- Ah porque siempre se tiene que poner el cero en un lugar donde es y por si lo pones en otro lugar estaría mal.

E- ¿Pero este número está mal? (refiriéndome a 2820)

Aa4- Bueno no está mal, sino que el cero está mal acomodado y si está mal acomodado pues...

E- ¿O sea que si está mal acomodado el cero por esta cuenta?

Aa4- (Asiente)

E- ¿Oye y qué más significa el cero por ejemplo aquí (señalo 2082)?

Aa4- Ese cero se significa que no es otro número, por ejemplo, más grande que el ochenta y dos, que este cero divide a dos mil ochenta y dos, que no es por ejemplo, doscientos ochenta y dos porque si no estaría el cero y sería doscientos ochenta y dos, pero aquí son dos mil ochenta y dos.

E- ok. ¿Entonces ese cero está separando el dos mil del ochenta y dos?

Aa4- Sí.

E- ¿Qué más, alguna otra cosa que hayas pensado?

Aa4- (Niega)

E- Ok, pasamos ahora a la que sigue. ¿Me lees las cantidades por favor? (Ítem 4, 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

Aa4- Seiscientos, más cinco mil, más siete, más cuatrocientos más cuarenta.

Aa4- (Resolviendo; escribe 6440)

E- Cuéntame, ¿qué número te dio?

Aa4- No... Estoy mal (escribe ahora 5040, pero le encima al 5 un seis).

E- A ver, ¿qué número te dio primero?

Aa4- Seis mil cuatrocientos cuarenta.

E- ¿Y luego?

Aa4- Seis mil cuarenta

E- Cuando te dio este resultado (6440) ¿cómo te diste cuenta que no era?

Aa4- Porque había sumado éste y éste (600 y 400) y son mil y se lo sumé a éste (al 5000) y son seis mil y luego pensé que no había sumado éste (refiriéndose al 400).

E- ¿El cuatrocientos?

Aa4- Ajá y lo puse, y estuvo mal porque nada más eran estos dos los que faltaban (el 40 y el 7).

E- ¿Nada más te faltaban el cuarenta y el siete, no el cuatrocientos?

Aa4- (Asiente)

0:17:45.3

E- Ok y al final me das este resultado (señalo 6047) ¿cómo le?... Me cuentas que sumaste seiscientos y cuatrocientos ¿en qué te fijaste para sumar esos dos?

Aa4- En que son más grandes.

E- ¿Más grandes que cuáles?

Aa4- Que siete y cuarenta.

E- ¿Y qué los hace ser esos grandes y por qué sumar el cuarenta (sic) y no el cuarenta y el cinco mil, digo el cuatrocientos y el seiscientos y no el cuatrocientos y el cinco mil que también son grandes?

Aa4- Yo siempre me fijo en si tiene tres ceros y son cinco mil, aquí son dos ceros y son seiscientos y aquí pues también tiene dos ceros (el 400). Yo sumo cuatrocientos más seiscientos ya son mil, mil se los sumo al cinco mil y de ese cinco mil o sea cuarenta... y siete.

E- Ok, entonces te había faltado un siete. Ya se lo pusiste (del 6040 que tenía, encima el siete en el último cero y queda 6047).

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:19:07.3

E- Fíjate que una niña en otra escuela me dijo que el resultado de ésta (ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) se escribía así (escribo 65,744) ¿qué número es?

Aa4- Es... es... sesenta y cinco mil setecientos cuarenta y cuatro.

E- Me dijo, es que ésta se resuelve poniendo los números como acá (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4) dijo, yo puse los números del principio.

Aa4- ¡Ah!, ya vi cómo…

E- ¿Qué le dirías?

Aa4- Que está mal porque nada más está poniendo los números del principio y los tiene que sumar todos con ceros, ¿no?

E- ¿Con lo ceros? tú que crees que puso ella ¿nada más puso los del principio, no sumó todo con los ceros?

Aa4- Ajá.

E- ¿Y en ésta (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4) por qué sí funcionó?

Aa4- Porque… pues porque aquí en (ítem 5000 + 300 + 60 + 4) ¡ay!... (Pensando).... no no no no, pues yo creo que aquí sí está bien también ¿no? (refiriéndose a la contra sugerencia 65,477).

E- ¿Quién, la niña?

Aa4- Sí.

E- ¿Qué piensas?

Aa4- No, que está mal.

E. ¿Qué te hizo pensar que a lo mejor estaba bien?

Aa4- Que aquí no tiene, por ejemplo, un ocho o un cuatro o un cinco aquí... (Señala encima de los ceros de los sumandos del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

E- ¿Sobre alguno de los ceros? (posiblemente se refiriéndose a que sean cifras mayores)

Aa4- Ajá.

E- ¿Y eso que tendría que ver?

Aa4- Aquí son números… números sin cuatro ni seis, nada; sino que estaría el número solo.

E- Te refieres a que no tiene... por ejemplo el seiscientos es un número sólo, pero seiscientos ocho ya no sería u número sólo. Entonces en eso pensaste a lo mejor funciona; pero no, sigue estando mal. Ok ¿qué le dirías a esa niña para que no cometa ese error?

Aa4- Que también los sume con los ceros porque también valen, ¿no?

E- Que también se fije en los ceros porque también valen.

Aa4- Sí.

E. Pasamos a la que sigue ¿estás lista?

Aa4- (Asiente)

Aa4- (Resolviendo ítem 9000 + 1700 + 800 + 5; escribe algo y borra)

E- ¿Qué número habías puesto?

Aa4- El dos, es que estaba sumando el nueve mil, más mil setecientos más ochocientos y pues aquí eran nueve mil, más mil que son diez mil; más setecientos, son dos mil setecientos más ochocientos ya son...dos mil (pensando) (tarda y escribe 20805, intenta borrar).

E- A ver así déjala y escríbeme acá a un lado la otra (su intento dos de resultado).

Aa4- (Escribe 20805)

E- ¿Qué número te dio?

Aa4- Dos mil ochocientos cinco.

E- Dos mil ochocientos cinco... ¿dónde dice dos mil ochocientos cinco?

Aa4- ¡Ah, no!... Dos mil… ¿Me faltaría entonces un cero?

E- ¿Cuál estás leyendo?

Aa4- Sí, ésta (señala su segunda escritura 20805).

E- ¿Cómo dice? ¿Qué números es?

Aa4- Dos mil... ochocientos cinco… (Dudando).

E- Y tú qué número quieres escribir, ¿ese es el que quieres escribir?

Aa4- Ajá, pero creo que este cero no va (señala el cero en el lugar de las decenas de 20805), pero si se lo quitaría sería dos mil ochenta y cinco y aquí son (vuelve a pensar la suma)... once mil.

E- ¿Tiene que haber algún ochocientos?

Aa4- No no no, ya vi, son dos mil cinco (escribe 2005).

E- ¿Eso te da?

Aa4- Sí.

E- Entonces el cálculo de nueve mil más mil setecientos más ochocientos más cinco ¿te da dos mil cinco?

Aa4- Sí.

E- Oye el nueve mil, vamos a comparar estos números, el nueve mil y el dos mil cinco ¿cuál es más grande?

Aa4- El nueve mil.

E- Y si estás sumando nueve mil más otro tantos ¿te puede dar un número más chico?

Aa4- (Pensando, agrega un uno antes del 2005, quedando 12005)

E- Pusiste un uno antes del dos, ¿cómo dice ahora?

Aa4- Son doce mil cinco.

E- ¿Por qué pusiste ese uno ahí?

Aa4- Porque son nueve mil, y aquí serían más el uno (de 1700) serían diez mil... entonces se quitaría el dos (borra el dos de 12005, quedando 1 005).

E- Si quieres escríbelo acá.

Aa4 (Escribe a un lado 11005) Serían once mil cinco.

E- ¿Y ya esa es la cantidad con la que te quedas?

Aa4- Sí.

E- Tú decides primero sumar el nueve mil más el mil…

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:27:59.6

E- Tú me dices, "sumo el nueve mil más el mil de aquí" (señalo 1700) y te da diez mil, ¿y por qué acá te da once mil?

Aa4- Porque son nueve mil más mil, son diez mil y setecientos más ochocientos son... mil quinientos y esos… a esos diez mil le sumo el otro mil, entonces serían ¿once mil quinientos cincuenta y cinco? (dudosa)

E- Once mil quinientos...

Aa4- ¿Cincuenta y cinco? (insegura)

E- A ver si quieres escríbelo aquí.

Aa4- (Escribe 11555)

E- Entonces el mil ya me dijiste de dónde salió ¿porque si tenemos un ochocientos y un setecientos no se ven en tu cantidad final?

Aa4- Porque los sumé.

E-¿Y luego qué pasó?

Aa4- Esos los sumé y me dieron (pensando) mil cuatrocientos? ¿O mil quinientos?

E- Me habías dicho que mil quinientos.

Aa4- Sí, mil quinientos y pues el mil quinientos se pone aquí (señala encima de su escritura de 11555 pone u punto señalando el uno). O sea, el uno ya lo había...entonces son mil doscientos quinientos cincuenta y cinco (produce esta escritura 12505)

E- Mil doscientos quinientos cincuenta y cinco ¿ese así se lee, mil doscientos quinientos cincuenta y cinco?

Aa4- No, doce mil quinientos cincuenta y cinco.

E- Ok, vamos a ver cómo lo sumaste pues ya te dio el resultado. Ya sé de dónde me dices que salieron digo que pusiste el setecientos más ochocientos ¿y el cincuenta y cinco de dónde salió? (pero es 505).

Aa4- Porque…

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:30:47.6

Aa4- (Continúa pensando) No, entonces sería el cincuenta y cinco porque allí el setecientos y el ochocientos dieron mil quinientos y al mil quinientos le sume cinco.

E- Al mil quinientos le sumaste cinco ¿y cuánto da el mil quinientos más cinco?

Aa4- Mil quinientos cinco.

E- ¿Y el cincuenta, bueno ese cinco? ¿Cuál cinco es de los que están aquí es el que me estás diciendo?

Aa4- Es éste.

E- A ver subráyalo.

Aa4- Es éste, (subraya el 0 en 11505 y modifica su cantidad) éste, me equivoqué.

E- Te equivocaste, el cinco de al final. Ok, ¿cómo pondrías una nueva cantidad ahí abajito?

Aa4-(Escribe 1255)

E- ¿Qué número es?

Aa4- Mil doscientos cincuenta y cinco.

Aa4- Entonces estaría bien, esta sí es...

E- ¿La de arriba si es?

Aa4- Sí.

E- ¿Entonces te quedas con cuál? ponle un puntito.

Aa4- Con ésta (le pone un puntito a 12505).

E ¿Qué te parece si verificamos el resultado en la calculadora, sale?

Aa4- (Ingresa los números, pero me solicita ayuda, procedo a ingresar los números yo)

E- A ver ¿qué numero dice?

Aa4- Nueve mil más mil setecientos más ochocientos más cinco.

E- ¿Qué nos da?

Aa4- Lee de la calculadora, once mil quinientos cinco.

E- ¿Qué paso en tu cálculo?

Aa4- Sí, sí estaba con la duda...

E- Cuéntame.

Aa4- Que aquí sí va un cero en lugar del cinco (habla de la parte final de la escritura 12505 a la que previamente sugirió que iba un cinco en el lugar del cero). Porque aquí (señala una parte de la operación 9000 + 1700 + 800 + 5) ya no había otro cinco.

E- ¿En dónde ya no había otro cinco?

Aa4- En toda la suma, nos daba quinientos cinco y sí estaba con la duda; porque si quitaba el cero eran doce mil cincuenta y cinco y estaría mal y sí pensaba que había un cero.

E- Pero te fue difícil decidir de donde ponerlo…

Aa4- Ajá.

E- ¿De dónde crees que salen esa cantidad que nos está dando?

Aa4- Es que casi no me acomodo a hacerlas así, (en horizontal) siempre las hago así (sumas verticales).

E- Pero todas estas las pudiste realizar así, sin ésto (suma vertical) si te fijas ya ni las resolviste (refiriéndome a que no necesito terminarlas) ¿de dónde crees que salió el once mil quinientos cinco?

Aa4- ¡Ah!, ya vi porque, porque nueve mil más mil son diez mil, y setecientos más ochocientos son once mil y los quinientos cinco. Me equivoqué en el dos o sea si era once pero yo le puse los doce, entonces era once (sobre su escritura de 12505 pone un 1 sobre el dos y queda 11505).

E- Crees que te pasó lo mismo que acá arriba, fíjate me habías dicho que tenías un seiscientos y un cuatrocientos y al momento de escribir la cantidad lo habías repetido por eso te salió seiscientos cuarenta ¿aquí qué repetiste para poner doce?

Aa4- Ahí repetí otra vez la suma.

E- ¿De qué?

Aa4- Del setecientos más ochocientos.

Aa4- (Escribe finalmente 11505 diciendo), aquí sí serían once mil quinientos cinco.

E- Aquí vamos a detenernos.

Entrevista 5

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Ao5 como entrevistado masculino.

Edad (12,04)

Fecha de nacimiento: 30 de enero de 2003

Fecha de entrevista: 18 de mayo de 2015

Duración: 00:24:59

E- Vamos a comenzar te voy a leer las indicaciones. Dice, te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes cómo lo vas haciendo. Si tú en algún momento necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar usando la calculadora, aquí tengo una calculadora si la necesitas la puedes usar. ¿Qué te parece si comenzamos, me lees los números de ahí por favor? (Ítem 5000 + 300 + 60 + 4).

Ao5- Cinco mil, más trescientos más sesenta más cuatro.

E- ¿Puedes comenzar a resolverla?

Ao5- ¿Pongo toda la operación?

E- ¿Ya tienes el resultado?

Ao5- Ya.

E- A ver.

Ao5- (Escribe 5364 y dice en voz baja "cinco mil trescientos sesenta y cuatro".)

E- Cuéntame, ¿cómo le fuiste haciendo?

Ao5- Sumé primero éstos dos números (Ao5 se refiere al 5000 + 300 del ítem 5000 + 300 + 60 + 4) y luego ya éste con éste lo sumé (señala el 60 y el 4 de la operación del ítem.)

E- A ver, tú dices "primero sume el cinco mil más el tres mil y luego el sesenta más el cuatro" y luego lo que te dio en el sesenta más el cuatro lo pudiste en el trescientos ¿cuéntame cómo es eso de que pusiste en el trescientos?

Ao5- Bueno, lo... lo, este, lo sumé también y me dio trescientos sesenta y cuatro.

E- ¿Qué te parece si pasamos a la otra? (Ítem 2000 + 80 + 2).

Ao5- (Resolviendo)

E- ¿Ahí qué tenemos?

Ao5- Dos mil ochenta y dos.

E- Cuéntame ¿cómo le hiciste para obtener el cálculo?

Ao5- Sumé el ocho más dos y luego sume lo que me dio (el 80 más el 2 de 2000 + 80 + 2) más el dos mil, y me dio dos mil ochenta y dos.

E- Ahí ¿cómo decides dónde colocar ese cero que apareció? (Refiriéndome al cero en su resultado 2082).

Ao5- Sería aquí porque no hay centenas…porque en la operación no viene nada de cien para arriba.

E- ¿Nada de cien para arriba, por eso lo pones ahí (el cero)? Ok. Vamos a la que sigue.

Ao5- (Resolviendo ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40)

E- ¿En qué piensas?

Ao5- (Señala el 80 y el 40) En estos dos... aquí la suma de estos dos me daría mil doscientos, más cuatro mil me serían cinco mil doscientos, más trescientos serían cinco mil quinientos y tres (escribe 5503).

E- ¿Cómo le fuiste haciendo?

Ao5- Primero sumé el ochenta más el cuarenta, me dio mil doscientos (pero da en realidad ciento veinte, Ao5 temporalmente se confunde, pero no pierde el control de los números sobre los que opera que son 80 y 40), luego sumé el…

E- Ahí nos detenemos; dices "sumé ochenta más cuarenta y me dio mil doscientos" (sostengo lo que ha dicho Ao5) ¿por qué decides sumar ochenta más cuarenta en primer lugar?

Ao5- Porque así me da un resultado y con eso se lo…, y con ese resultado de sumar el mayor número y con eso me da un resultado más fácil de sumar estos dos (80 más 40, quizá, está señalando algo en la operación).

E- Dices que tomas el ochenta más cuarenta y los sumas. ¿Y por qué en particular ochenta más cuarenta y no otro? ¿En qué te fijas para sumar esos (ochenta más cuarenta)?

Ao5- Porque si sumo esos dos me da mil doscientos (Ao5 ha confundido la suma de 80 + 40 como 1200 en lugar de 120) y si los sumo con cuatro mil, me darían cinco mil doscientos; más trescientos sería cinco mil quinientos más el tres, serían cinco mil trescientos tres, esa la manera más fácil de obtener el resultado.

E- Fue la manera más fácil... Ahora que te parece si metes las cantidades a la calculadora y vemos qué pasa.

Ao5- (Hace los cálculos en la calculadora)

E- ¿Cuánto nos resultó?

Ao5- Cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- ¿Y tú que tienes?

Ao5- Cinco mil trescientos veintitrés.

E- ¿Qué crees que pasó?

Ao5- Que sumé mal estos dos. (Señala el 80 y el 40 del cálculo 300 + 4000 + 80 + 3 + 40)

E- Esos dos en especial, por qué, ¿qué crees que pasó?

Ao5- (Calculando y diciendo en voz baja) Cuatro mil trescientos ochenta y tres... más cuarenta (se detiene).

E- Ok, hasta aquí llevas… dices, "cuatro mil trescientos ochenta y tres, eso ya lo pudiste checar... más cuarenta ¿quieres utilizar la calculadora o alguna otra anotación para que saque tu resultado?

Ao5- En estos dos me equivoqué porque serían mil doscientos... (Se refiere al 80 + 40).

E- ¿El ochenta y el cuarenta serían mil doscientos?

Ao5- (Calcula con la calculadora) Ciento veinte...

E- Te habías fijado que ahí había algo que no te latía ¿qué fue lo que te confundió?

Ao5- Sumé en mi mente mil doscientos, ochocientos más cuatrocientos… (Ao5 explica que su confusión fue tomar el 80 por 800 y el 40 por 400 del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 +40).

E- ¿Por qué crees que hayas sumado ochocientos más cuatrocientos si aquí estás viendo ochenta más cuarenta?

Ao5- Me equivoque porque no es mil doscientos, es ciento veinte.

E- O más bien sumaste ochenta más cuarenta y pensaste en mil doscientos. ¿Qué crees que te hizo pensar en mil doscientos y no en ciento veinte? ¿Tiene que ver con los ceros que viste?

Ao5- Por ver los éstos números aquí (Ao5 se refiere a los ceros del 4000 del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 +40).

E- ¿Cuáles números?

Ao5- Los del cuatro mil.

E- ¿Y los convertiste a miles? Bueno primero a centenas...y luego a miles… Ya que contrastaste resultados, ¿cómo sería el procedimiento?

Ao5- Sería lo mismo, pero en lugar de sumar mil doscientos sería sumar ciento veinte.

E- ¿Puedes escribir el resultado que da ya, sumando ciento veinte y no mil doscientos?

Ao5- Cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Oye en esta suma tengo un ochenta y un cuarenta ¿por qué esos ochenta y cuarenta no aparecen en tu cantidad final?

Ao5- Porque... no entendí la pregunta.

E- Mira, tú acá arriba tienes cinco mil trecientos sesenta y cuatro (señalo ítem 5000 + 00 + 60 + 4)) y acá (en el resultado que es 5364) tienes todos esos números, el cinco, el tres, el seis, y el cuatro; aquí tú también tienes el ochenta y el cuarenta (en ítem 300 + 4000 + 80 + 3 +40) pero aquí (en el resultado que es 4423) ya no aparecen esos números (me refiero al 8 del 80 y al 4 del 40) ¿qué crees que pasaría que ya no salen?

Tiempo trascurrido hasta este punto de la entrevista- 0:14:56.8

Ao5- Es que serían cuatro mil cuatrocientos trescientos treinta y tres más cuarenta sería...cuatro mil cuatrocientos veintitrés...

E- ¿entonces qué les pasó a estos que ya no aparecen acá? (el 40 y el 80).

Ao5- Los sumé y me da esa cantidad (se refiere al resultado total de la operación que es 4423).

E- ¿Y cómo decides sumarlos?

Ao5- Cuando ya tengo un número, como ya tuve cuatro mil trescientos veintitrés le sumé cuarenta y con ochenta y tres, y me dio la suma cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Entonces cuando ya tienes un número vas haciendo la operación y eso es lo que te resultó. ¿Pasamos a la que sigue? (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

Ao5- (Señalando los sumandos de la operación dice) Primero sumo estos seiscientos más cuatrocientos; de esa suma me da mil, esos mil más cinco mil me da seis mil, más cuarenta y siete, seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Quieres escribirlo?

Ao5- (Escribes su resultado 6047)

E- ¿Por qué eliges el cuatrocientos y el seiscientos para empezarlos a sumar?

Ao5- Porque con la suma me dio un número cerrado y con la suma de un número puede sumar un número cerrado más otro número cerrado me dio seis mil (Ao5 puede estar denominando "número cerrado" a los números nudo que le resultan en este caso, como el 400 y el 600 que dan lugar a un solo número que es 1000; o puede estarlo pensando en término de formar un nuevo orden del Sistema de Numeración Decimal.)

E- ¿A qué le llamas número cerrado?

Ao5- Que ya no tiene más números y sólo es una cantidad.

E- ¿Me puedes dar un ejemplo para entenderlo?

Ao5- Como cinco mil, que ya no tiene ni decenas, ni centenas, ni unidades.

E- ¿Y cómo decidiste poner ahí ese cero (en el resultado 6047)?

Ao5- Porque no había centenas, sólo había las decenas y unidades después.

E- Oye, pero aquí yo veo... ¿el cuatrocientos qué viene a ser? (señalando el 400 en la operación 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) ¿unidad, decena, centena…?

Ao5- Centena

E- ¿Y el seiscientos?

Ao5- También

E- ¿Y el cinco mil?

Ao5- Unidades… ya es milésimo (Ao5 usa el nombre "milésimo" en lugar de unidad de millar) o algo así...

E- Oye ¿no que no había centena? Tú me dijiste que le seiscientos es centens y el cuatrocientos también… Me dijiste "no hay centena, por eso ahí va el cero..."

Ao5- (Pensando)

E- ¿Qué piensas de eso?

Ao5- ¿Son sumas verdad?

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:19:25.6

E-¿Son sumas? Sí, ¿por qué te llama la atención?

Ao5- Porque una amiga me dijo que tengo que descomponer y componer.

E- ¡Ah!, te comentó de qué se trataba la tarea... ¿Y luego?

Ao5- ¿El resto de las operaciones son como las primeras dos? (Ao5 está diferenciando los ítems 1 y 2 del 3, 4 y 5).

E- ¿Por qué te surge esa duda?

Ao5- Porque mi amiga me dijo que así tenían que ser.

E- Olvídate de lo que te dijo tu amiga, porque tú me estás dando tus resultados. Vamos a pensar cómo resuelve Ao5 (le digo su nombre) y no importa lo que te dijo tu amiga, ella lo resuelve de otra manera y tú de otra manera; todo lo que me digas es importante. Entonces, tú me decías que (en el resultado) aquí tenías cero porque no había centenas, pero yo aquí veo (en la operación 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) por lo menos veo dos centenas, bueno por lo menos dos partes que pueden ser centenas (el 400 y el 600) ¿tú qué piensas de eso?

Ao5- ¿Podría checar la operación para ver si estoy bien (Ao5 Se refiere a sacar la cuenta con la calculadora)?

E- ¿Qué quieres checar?

Ao5- La operación.

E- A ver, chécala.

Ao5- (Ao5 ingresa los números a la calculadora)

E- ¿Qué te dijo la calculadora?

Ao5- Seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Y tú tienes?

Ao5- Seis mil cuarenta y siete.

E- Bueno, está bien tú cálculo, ahora lo que yo te pregunto es ¿qué pasa con lo de las centenas?

Ao5- Las dos centenas las sumé y me dio ya milésimos (confusión de Ao5 entre el nombre de millares y el de milésimos) por eso ya no tengo centenas, tengo mil, mil más.

E- ok ya entendí; ahora por ejemplo otra niña no de esta escuela, me dijo que ésta (señalo el ítem .4, que es 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) se resolvía así (escribo 65744). ¿Qué opinas de su respuesta? Dijo “como se resuelven los de arriba (los ítems 1 y 2) así se resuelven también éstas (ítem 3, 4 y 5). ¿Qué piensas?

Ao5- (Pensativo)

E- ¿Qué número es?

Ao5- Sesenta y cinco mil setecientos cuarenta y cuatro.

E- ¿Qué opinas?

Ao5- No sé si está bien o está mal.

E- Pues ya lo hiciste con la calculadora ¿qué te dijo la calculadora?

Ao5- Que el resultado es este (señala 6047).

E- Yo te pregunto ¿qué opinas de la respuesta que ella me dio? ¿Qué le dirías a esa niña? ¿Puede hacerlo? ¿Le dará un buen resultado?

Ao5- (Niega) No está poniendo el resultado como va la operación, sino que tiene que sumar toda la operación para que le dé un resultado.

E- ¿Ella que está haciendo? Entonces tiene que sumar….

Ao5- Ella sumó seiscientos, más cinco mil y le puso sesenta y cinco mil y luego puso setecientos cuarenta y cuatro

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:24:13.8

E- Por ejemplo, dices ella sumó seiscientos más cinco mil y le dio sesenta y cinco mil ¿tú qué opinas seiscientos más cinco mil da sesenta y cinco mil? ¿Cuánto da?

Ao5- Cinco mil seiscientos.

E- Y en esta parte dices “sumó siete más cuatrocientos más cuarenta; le da setecientos cuarenta y cuatro”, ¿pero a ti cuánto te da?

Ao5- Me dio cuatrocientos cuarenta y siete.

E- ok, pasamos a la que sigue. (Ítem 9000 + 1700 + 800 + 5)

Ao5- (Resolviendo mentalmente, a continuación, escribe 11505 como resultado)

E- Cuéntame ¿cómo le hiciste ahí?

Ao5- Primero sumé estos dos, ochocientos más setecientos me dio mil quinientos y más estos mil, me dio dos mil quinientos (los mil que separó en 1700); luego mil quinientos más nueve mil, me dio once mil quinientos, más lo demás once mil quinientos cinco.

E- Primero decides sumar ochocientos más setecientos, cuéntame ¿cómo tomaste esa decisión? ¿Qué te fijaste de los números?

Ao5- Porque así serían ocho más sietes serían quince y luego como aquí tiene dos números más (ao5 se refiere a los ceros de 800 y 700) le agregas, serían… mil quinientos.

E- Dices “ocho más siete serían quince, pero como tienen dos números más (hago alusión a que Ao5 se refiere a los ceros) se lo agrego al quince” ¿y te da…?

Ao5- Mil quinientos.

E- ¿Cuáles son esos dos números más?

Ao5- Estos dos ceros (señala sobre los ceros de 1700 y 800).

E- Los dos ceros, ¿esos son los dos números más en los que te fijas? ok ¿Y luego qué más haces?

Ao5- Esos mil quinientos más este mil, y luego sumamos este dos mil quinientos más nueve mil, me dio once mil quinientos más cinco, once mil quinientos cinco.

E- Que es lo que escribiste, ¿cómo decides ahora sumarle esos dosmil quinientos al nueve mil?

Ao5- Serían... nueve más dos... serían once... (Ao5 pasó de un procedimiento de cálculo donde mantiene íntegra la cantidad al decir "*Esos mil quinientos más este mil, y luego sumamos este dos mil quinientos más nueve mil me dio once mil quinientos más cinco, once mil quinientos cinco"* a un procedimiento más corto basado en la suma de unidades del 1 al 9 a la que luego se le agregan los ceros pertinentes.)

E- ¿Y luego?

Ao5- Bueno es que ahí serían nueve más dos... ¿punto cinco?

E- Nueve más dos punto cinco...

Ao5- Serían nueve mil doscientos cinco… nueve mil quinientos, once mil quinientos.

E- Tú ahorita me dijiste una cantidad con un punto ¿qué te imaginas en tu cabeza para poderlo transformar? porque nueve mil, digo nueve más dos puntos cinco que me dices, no es lo mismo que once mil quinientos, ¿cómo le haces tú?

Ao5- (Pausa, parece confundido)

E- O sea, me dices, tengo nueve mil y le sumo dos mil quinientos me da once mil quinientos y luego ya le sumas los cinco, entonces yo te preguntaba cómo decides sumarle al nueve mil esos dosmil quinientos ¿en qué piensas para sumarlos?

Ao5- Porque así ya nada más me quedaría el cinco y (…) la operación.

E- El cinco no lo sumaste (el de las unidades) y la otra parte sí y ya nada más por último ¿cómo sumaste esa parte?

Ao5- ¿Cuál parte?

E- De los dos mil quinientos que tenías aquí al nueve mil.

Ao5-Porque ya así de los dos mil quinientos yo le podría sumar al nueve mil.

E- Ya lo podrías sumar ¿y antes no los podías sumar?

Ao5- O sea, sumar los nueve mil más mil setecientos, más ochocientos... (Asiente)

E- ¿O sea, sí se podía sumar, pero tú decidiste hacerlo así?

Ao5- (Asiente)

Entrevista 6

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa6 como entrevistado femenino.

Edad (11,10)

Fecha de nacimiento: 6 de agosto de 2003

Fecha de entrevista: 1 de junio de 2015

Duración: 00:32:38

E- Vamos a comenzar Aa6, me puedes poner tu nombre, tu grado, tu grupo y la fecha de hoy.

(Rapport)

E- Te voy a presentar unas operaciones, quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes como le vas haciendo. Si en algún momento necesitas comprobar algún cálculo te puedes apoyar usando la calculadora. ¿Qué te parece si comienzas? (Ítem 5000 + 300 + 60 + 4)

E- ¿Qué números tienes ahí?

Aa6- Quinientos, más trescientos, más sesenta más cuatro.

E- Ok, empieza.

Aa6- Es cinco mil más trescientos, o sea que nada más se pasa el tres al… al… Bueno que se suma, trescientos más sesenta es trescientos sesenta, más cuatro es trescientos sesenta y cuatro. Trescientos sesenta y cuatro se puede poner acá como quinientos mil trescientos sesenta y cuatro. (Aa6 cambia el nombre de cinco mil por el de quinientos mil, sin afectar la escritura del resultado que es 5364).

E- A ver anota tu resultado.

Aa6- (Escribe 5364)

E- ¿Qué dice tú resultado?

Aa6- Cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- ¿En qué es lo que te estás fijando para hacer tu suma?

Aa6- En los ceros, que puedes pasar esto (refiriéndose al 3 de 300, al 6 de 60 y al 4 de la adición 5000 + 300 + 60 + =); como son tres números aquí (refiriéndose a los tres ceros del 5000), los puedes pasar acá (Aa6 indica que en 5000 hay tres ceros, lugar que puede ocupar la cantidad de 364) y nada más sumas esto, y ya se hace el resultado no necesariamente puedes también calcular. Bueno o sea de las sumas, sumando.

E- Si no que tú lo acomodaste… ¿Podrías ser?

Aa6- Mmmm…

E- Me puedes ir anotando abajo (del ítem 1) cómo lo acomodas.

Aa6- (Escribe un 5000)

E- Ahí dice cinco mil ¿y luego?

Aa6- Es trescientos (hace pausa).

E- Si quieres táchalo o haz lo que tú quieras.

Aa6- Trescientos se pasa acá (escribe un 3 encima del primer cero que está a la derecha del cinco en su escritura anterior 5000) y luego éste se manda esos dos, sesenta y cuatro (la producción de Aa6 queda como sigue: escribe 5000, luego encima del primer cero a la derecha del 5 escribe un 3, en el segundo cero un 6, en el último cero un 4, quedando 5364).

E- Ya se ponen ahí encima... pasamos al que sigue... ¿Qué números tienes? (Ítem 2000 + 80 + 2)

Aa6- Dos mil, más ochenta más dos.

E- Dos mil más ochenta más dos; permíteme le voy a cerrar a la puerta.

Aa6- (Asiente) (En mi ausencia traza un acomodo de los sumandos parecido al algoritmo vertical)

E- Dos mil más ochenta más dos, ok, ¿qué resultado te da?

Aa6- Mmmm, dos mil ochenta y dos... suman…

E- ¿Cómo llegaste a ese resultado?

Aa6- Sumando, es que de aquí no estoy tan segura porque aquí no se puede traspasar acá, ahora se pasa acá el ocho y sumas ocho más dos, digo el ochenta más dos. (Aa6 se refiere a que no puede colocar el ocho de 80 en el lugar de las centenas, o del segundo cero ala derecha del 2 del sumando 2000 en el ítem 2000 + 80 + 2).

E- Dices, que no podrías poner el ocho en este cero que está después del dos (el cero que guarda el lugar de las centenas), sino que lo tienes que poner en el segundo cero (el cero de las decenas en 2000). ¿Lo podrías hacer aquí igual, así como le hiciste? (refiriéndome al procedimiento que realizó en el ítem 1.1, que fue acomodar sobre el 2000 el 8 y el 2 de 82).

Aa6- Mmmmmm.... ¿lo puedo sumar?

E- ¿A qué te refieres con poderlo sumar?

Aa6- Es que ahí yo lo intento sumar porque no estoy tan segura de ponerlo acá (señala sobre algún cero del 2000 y escribe el algoritmo vertical de 2000 + 80 + 2).

E- Bueno aquí escríbeme el resultado que te dio.

Aa6- Bueno, cero más cero no se puede así que el dos se baja nada más, porque no hay ningún número que lo pueda sumar; este igual no se puede sumar por el cero y se bajan estos dos números porque no tiene ningún número abajo (Aa6 verbaliza los pasos que sigue al resolver el algoritmo vertical de 2000 + 80 + 2).

E- Cuando tu decías que no podías poner el ochenta hasta acá (señalo los ceros del 2000) ¿cómo fue que te fijaste que eso no lo podías hacer?

Aa6- Porque trescientos es un número... son centenas, este número el tres; porque son tres números (está hablando del sumando 300 del ítem 5000 + 300 + 60 + 4). El ochenta es la decena que aquí lo puedes poner... (Aa6 se refiere a que el 80 en el ítem 2000 + 80 + 2, sí se puede poner en el cero que guarda el lugar de las decenas, mas no en el cero que guarda el lugar de las centenas porque no hay centenas en este ítem 2).

E- ¿Y luego?

Aa6- Ochenta y luego dos, ochenta y dos y ahí lo pones. (Aa6 se refiere a poner el 82 al final del 2000).

E- Entonces tú me dices que no viste que hubiera ninguna centena. ¿A qué le llamas tú centenas?

Aa6- Al número que es el tercer número que está en el lado derecho (Aa6 indica que las decenas serían las que ocupan el tercer lugar del lado derecho).

E- Entonces aquí este cero que tu anotaste ¿qué crees que significa?

Aa6- Mmmmm que no tiene ningún número y se... nada más se pronuncia dos mil ochenta y dos

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:06:43.9

E- Que no tiene ningún número y nada más se pronuncia dos mil ochenta y dos ¿qué número necesitaría haber ahí para que no hubiera cero?

Aa6- Otro número que pongas aquí.

E- ¿Por ejemplo cuál?

Aa6- Cualquier número se puede para que no esté el cero.

E- A ver ponme un ejemplo; si quieres escríbelo acá.

Aa6- (Escribiendo 2482)

E- Oye y si este cuatro estuviera aquí en esta suma (señalo la operación, el ítem 2) ¿cuál sería? (pregunto qué sumando sería, serían decenas, centenas, etc. O sería un cuatrocientos).

Aa6- Si estuviera aquí iría acá, el cuatro y se traspasaría a estos tres números.

E- Y sería por ejemplo así dos mil ¿más cuatro más ochenta más dos?

Aa6- Ajá… Mmm, o sea, que pusieras cuatrocientos más ochenta más dos.

E- Ok, entonces este número (su ejemplo 2482) podría salir si hubiera aquí un cuatrocientos, en esta suma (ítem 2, como si quedara 2000 + 400 + 80 + 2).

E- ¿Qué más significara ese cero?

Aa6- Que no denomina una centena.

E- Que no denomina una centena ¿cómo?

Aa6- Que no tiene un número y eso es un cero, que no son como los demás que están el ocho y el dos y el otro dos…

E- Y si lo quitamos o lo ponemos en otro lado ¿eso se puede?

Aa6- Sí y lo pones acá (Aa6 produce una escritura para ejemplificar que es 2820) y sería dos mil ochocientos veinte.

E- Dos mil ochocientos veinte... ¿Y en tu suma lo podemos quitar?

Aa6- No sé.

E- Si tenemos dos mil más ochenta más dos me da este resultado (señalo 2082) ¿lo podemos quitar ese cero?

Aa6- Sí y traspasarlo acá, bueno pasarlo a.… acá

E- ¿Al final después del último dos?

Aa6- Sí.

E- ¿Y ahí seria correcta esta suma (señalo el ítem 2)?

Aa6- No, no sería correcta.

E- ¿Sería otra?

Aa6- No, sería otra cantidad.

E- Oye pasamos a la que sigue ¿qué números tenemos ahí? (Ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40)

Aa6- Seiscientos más qui... más cinco mil más... (Leyendo ítem 600 + 5000 + 7 + 40 + 4, en lugar del ítem 3)

E- ¡Ay! pero nos faltó esta (señalo ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40)

Aa6- ¡Ah! Este trescientos, más cuatro mil, más ochenta más tres más cuarenta.

E- Ok.

Aa6- (Pensando)

E- ¿Qué resultado tendrías ahí?

Aa6- Este... Sumar cuatro mil... (Está comenzando a escribir algoritmo vertical).

E- A ver, espérame ya vi esta forma de sumar (refiriéndome al algoritmo) pero quisiera que tú intentaras la misma forma como acá arriba, por ejemplo.

Aa6- ¿La misma forma?

E- ¿Cómo le podrías hacer?

Aa6- Este... trescientos más ochenta más cuarenta este... da ciento veinte, más tres, ciento veintitrés, entonces seria, ciento veintitrés más trescientos... eh...

E- Ciento veintitrés más trescientos ¿cuánto te daría?

Aa6- Cuatrocientos veintitrés

E- ¿Y te falta sumarle algo?

Aa6- El cuatro mil... este cuatrocientos veintitrés es igual como el primero: (refiriéndose al ítem 1 o mejor dicho al procedimiento de poner una cantidad sobre los ceros de la otra, en este caso poner 423 sobre los ceros del 4000) lo podemos traspasar a las unidades de decena... bueno de centenas perdón, y sería cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- ¿Puedes poner tu resultado?

Aa6- ¿Acá abajo?

E- Sí.

Aa6- (Escribe 4423)

E- ¿Cuéntame en qué te fijaste para sumar primero estos dos? Porque empezaste sumando el ochenta y el cuarenta. Cuéntame ¿cómo le hiciste?

Aa6- Este, pues supongamos que no tenemos el cero (cero del 80 y el 40) y sumo ochenta más cuatro y da doce, más tres da ciento veintitrés… Perdón este, me equivoqué, ciento... daría (pensando) ciento... ciento...

E- A ver me decías ocho más cuatro doce... (¡Eso no me dijo!)

Aa6- Más tres... quince y quince más... tres, más trescientos darían cuatrocientos, cuatrocientos quince... digo cuatrocientos cinco...

E- Pero me habías dado un resultado de cuatrocientos veintitrés... ¿qué pasó?

Tiempo trascurrido hasta este punto de la entrevista- 0:12:35.0

Aa6- Me equivoqué en sumarlo.

E- ¿En cuál te equivocaste? ¿En el primero o en el que me estás diciendo ahorita?

Aa6- En el primero que dije.

E- Ok, ¿la primera vez que lo sumaste si lo pensaste así de “ocho más cuatro, igual a doce”?

Aa6- Sí…

E- Me había dicho ocho más cuatro, igual a doce ¿dónde está el ocho y dónde está el cuatro? ¿Este qué es un ocho (señalo el 80 de la operación 300 + 4000 + 80 + 4)?

Aa6- Es un ochenta, pero supongamos que ahorita no está el cero, porque el cero se pondría al final o como si no existiera…

E- Estás haciendo como que no existe y lo pones al final ¿en qué momento lo pusiste al final?

Aa6- ¡Ehhhh!

E- A ver la pregunta fue ¿Por qué sumaste primero el ochenta y el cuarenta? (regreso a la pregunta que dio pie a esta reflexión).

Aa6- Porque se me hace más sencillo sumarlos.

E- Se te hace más sencillo. ¿Por qué?

Aa6- Porque no hay un número aquí (quizá se refiere a que la suma no se presenta ordenada) y ya al final sumó este y este (el 80 + 40).

E- Ok, decides sumar el ochenta con el cuarenta... ¿Y por qué no decides sumar el ochenta con el trescientos por ejemplo?

E- Porque luego me equivoco, pero igual me equivoqué...

E- Si quieres vamos a verlo con la calculadora ¿va? porque tú me dices que este número está equivocado (su primer resultado correcto 4423) a ver mete lo números.

Aa6- (Aa6 ingresa los números en la calculadora y dice) … Ochenta más cuarenta más tres, da igual a ciento veintitrés... (Está comprobando su cálculo con *atajo* de 8 de 80 más 4 de 40 más 3)

E- Y tú me habías dicho hace rato que te daba ¿ciento…?

Aa6- Veintitrés… el primero.

E- ¿Y luego?

Aa6- Más trescientos, igual a cuatrocientos veintitrés (ríe) más cuatro mil...

E- ¿Crees que vas a estar bien o mal?

Aa6- Bien.

E- Entonces sí me estás dando bien el resultado ¿Por qué al explicarme me das otras cantidades?

Aa6- Porque me pongo nerviosa.

E- Ya viste que tienes bien el resultado ahora vamos viendo cómo le hiciste.

E- Me dices sumo el ochenta más el cuarenta, dices voy a dejar el cero luego lo agrego… sumas...

Aa6- Ocho más cuatro, doce (Aa6 volvió a retomar el cálculo basado en sumas del 1 al 9 a las que después se les agrega cero).

E- ¿Y luego?

Aa6- Este… como el cero estaba… se pone el ciento veinte y más tres, ciento veintitrés, ahora ya no es cero; ciento veintitrés, más trescientos cuatrocientos veintitrés, más cuatro mil, cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Pasamos al que sigue ¿qué dice? (Ítem 600 + 5000 + 7 + 40 + 4)

Aa6- Seiscientos más quinientos más siete más cuatrocientos más cuarenta.

E- Haz tú cálculo y ahorita me dices…

Aa6- Seiscientos más cuatrocientos da, mil, da mil. Y mil más quinientos seis mil, más cuarenta más siete... seis mil cuarenta y siete (escribe 6047).

E- Veo que eliges sumar primero el seiscientos y cuatrocientos ¿Por qué?

Aa6- Porque ahorita no sumé éste (Aa6 señala el 40 de la operación 600 + 5000 + 7 + 40 + 4) porque no había otro igual, un entero igual que el cuarenta (Aa6 se refiere a que no hay otra agrupación de decenas).

E- No había un entero igual que el cuarenta... ¿A qué te refieres con un entero?

Aa6- Un diez, un veinte, o un número que terminé en cero y no había, por eso sumé mejor éstos (400 y 600).

E- Me dices "un diez, un veinte o un número que termine en cero" ... éstos también terminan en cero, el cinco mil por ejemplo ¿por qué no elegiste ese?

Aa6- Porque es más grande y se me hace más fácil, los sumo, y ya tengo la respuesta y ya sumarlo al cinco mil.

E- Entonces como el cuarenta no tiene otro entero como un diez o un veinte ahí lo dejas... ¿Y luego?

Aa6- Sumo estos dos, da mil, (Aa6 se refiere a 400 y 600) más cuarenta y siete, cuarenta más siete, cuarenta y siete, mil cuarenta y siete más quince... cinco mil, seis mil cuarenta y siete (escribe su resultado 6047).

E- Oye una niña de otra escuela me dijo que el resultado de ésta (ítem 600 + 5000 + 7 + 40 + 4) era este (65744) ¿Qué número te escribí?

Aa6- Seis millones cinco mil setecientos cuarenta y cuatro. (Aa4 ha leído sesenta y cinco mil setecientos cuarenta y cuatro como seis millones cinco mil setecientos cuarenta y cuatro, pero en este momento lo que se está indagando es sobre la representación escrita de los números, no sobre su representación oral.)

E- ¿Qué piensas?

Aa6- Que está mal.

E. ¿Por qué?

Aa6- Que son cinco números (refiriéndose a las cinco cifras de 65744) y aquí son cuatro números (en su resultado 6047) porque estos números los sumas, mil más cinco mil, seis mil, más cuarenta y siete, seis mil cuarenta y siete, son cuatro números.

E- El resultado de ella le da cinco números, pero tú le dices no, son cuatro números lo que va a dar ¿cómo sabes que te va a dar cuatro números?

Aa6- Porque sólo se aparece mil y este mil más cinco mil seis mil, nada más.

E. ¿Qué necesitaría pasar para que te diera cinco números?

Aa6- ¿Cinco números? Que agregara otro número (agrega un cero al final de 5000 y queda 50000)

E- Que agregara otro número...

Aa6- Un cero.

E- ¿En vez de ser cinco mil sería qué?

Aa6- Cinco millones. (De igual manera Aa6 lee cinco millones en lugar de cincuenta mil, pero no se indaga más al respecto).

E- ¿No habría otra manera de que te de otro número más grande sin poner cero en el cinco mil? (Quisiera que dijera que alcanzando lo diez mil, por ejemplo, sumándole a 6047 un cuatro mil)

Aa6- ¿Otro número?

E- Un número de cinco cifras.

Aa6- ¿Que hubiera un número por aquí pero que no sea al final?

E- Quisieras escribirlo ¿cómo sería?

Aa6- (Escribe 52000)

E- ¿Como un cincuenta y dos mil? ¿O cómo sería? ¿Cómo lo lees tú?

Aa6- Es que como no tiene la coma, este me confundo (pone coma y queda 52,000) ... este…cincuenta y dos mil (insegura) no, cincuent… y dos mil, no cincuenta y dos millones

E- ¿cuál será, cincuenta y dos mil o cincuenta y dos millones?

Aa6- Cincuenta y dos millones.

E- ¿Sólo eso tendría que pasar para que te de un número de cinco cifras?

Aa6- Ajá.

E- Vamos a la que sigue. (Ítem 9000 + 1700 + 800 + 5)

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:22:10.1

Aa6- Nueve mil más mil setecientos, más ochocientos más cinco. Aquí se sumaría... (en voz baja va diciendo) siete, más ochocientos más cinco (escribiendo el algoritmo vertical).

E- A ver, quisiera que intentáramos de otra manera...

Aa6- ¿Con otro procedimiento?

E-¿Sale? ¿Qué números me dijiste que tienes?

Aa6- Nueve mil más diecisiete mil...

E- Me dijiste que a ti te sirve poner las comas para leer mejor el número ¿Se las quieres poner por favor? porque a mí se me fue ponerle las comas.

Aa6- (Pone comas en todos los miles de las operaciones de manera convencional quedando 9,000; excepto en 17,00).

E- Ahora sí, cuéntame qué números tienes.

Aa6- Nueve mil, más diecisiete mil, más ochocientos más cinco.

E- Ok, ¿Qué te da como resultado?

Aa6- (Murmura) veinticinco mil... veintisiete... treinta y nueve mil…

E- Treinta y nueve mil...

Aa6- Perdón, veinticinco mil aquí más cinco, veinticinco... éste, veinticinco... veinticinco mil cinco... aquí me confundí.

E- A ver escribe el que estás diciendo

Aa6- (Escribe 25,05).

E- ¿Qué número es?

Aa6- (Titubea al leer) veinticinco... ¿veinticinco mil cinco?

E-¿De dónde me decías que salió?

Aa6- De estos tres números (Aa6 se refiere a los sumandos del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5)

E- A ver ¿cómo los fuiste sumando?

Aa6- Primero éste... (Señala el 800)

E- ¿El ochocientos? ¿Más cuál?

Aa6- Más diecisiete mil (17,00), más nueve mil (señala el 9000).

E- ¿Y qué obtuviste de ochocientos más diecisiete mil?

Aa6- Pues veinticinco mil... ¡no! Aquí me equivoqué.

E- ¿Por qué?

Aa6- Porque aquí era ochocientos (refiriéndose a 800) y aquí son mil, miles (refiriéndose a 17,00).

E- ¿Cómo te diste cuenta que eran miles?

Aa6- Ay es que me di cuenta, es que luego tengo en el ojo falla (parece que la alumna tiene un padecimiento en su ojo).

E- ¿Entonces son miles, cuantos tenemos?

Aa6- (Insiste) Diecisiete.... veintiséis aquí en estas dos (señala 9,000 más 17,00), veintiséis mil... veintiséis mil ochocientos. (Aa6 ha interpretado el mil setecientos como diecisiete mil y ha efectuado los cálculos pertinentes bajo esa interpretación que quedaría 9000 + 17000 + 800 + 5 = 26805).

E- Veintiséis mil ochocientos... (Repito su respuesta).

Aa6- veintiséis mil ochocientos cinco.

E- Lo podemos escribir aquí

Aa6- (Escribe 26,805).

0:27:01.4

E- ¿Qué dice?

Aa6- Veintiséis mil ochocientos cinco.

E- ¿Qué te parece si ahora metemos en cálculo aquí en la calculadora?

Aa6- (Ingresa los números a la calculadora).

E- ¿Qué resultado te dio?

Aa6- Once mil quinientos cinco.

E- ¿Ahí qué crees que pudo haber pasado?

Aa6- Qué me equivoqué al sumar.

E- ¿Pero en qué parte pudo pasarte eso?

Aa6- En estos tres (Aa6 se refiere a 9000, 1700 y 800).

E- ¿En el nueve mil? ¿Y en cuál más?

Aa6- En el diecisiete mil y en el ochocientos.

E- ¿Crees que ahí estuvo el error?

Aa6- (Asiente)

E- Oye te voy a dictar unos números y los escribes ahí abajo ¿va?

Aa6- (Asiente)

E- Ocho mil.

Aa6- (Escribe 8000)

E- Diez mil.

Aa6- (Escribe 10,00)

E- Doce mil.

Aa6- (Escribe 12,00)

E- Diecisiete mil.

Aa6- (Escribe17,00)

E- Oye, cuando tú me decías antes que te fijabas en las cifras para sumar, yo te quería preguntar una cosa ¿cuál es mayor de los que te dicté?

Aa6- (señala el 17,00)

E- Diecisiete mil es el mayor de los que te dicté... bueno, ahora te voy a dictar otros números ¿va? Ochenta.

Aa6- (Escribe 80)

E- Diez.

Aa6- (Escribe 10)

E- Doce

Aa6- (Escribe 12)

E- Diecisiete.

Aa6- (Escribe 17)

E- ¿Cuál es mayor de los que te dicté?

Aa6- El ochenta.

E- Ok. ¿Cómo sabes?

Aa6- Este (el 80) es mayor número que el diecisiete por más cifras, es mayor que el diecisiete... porque el ochenta le gana al diecisiete con setenta y siete, no pérame...

E- Le gana con algunos números, vamos a decirle así. Ahora, éstos de acá abajo, ¿cuál será mayor? (refiriéndome a su serie de números 8000-10,00-12,00-17,00)

Aa6- Éste (señala el 8000 al que no le escribió coma en un principio) porque puedes poner la coma aquí (escribe sobre el 8000 coma, de manera que queda 80,00; Aa6 se refiere a cambiar la coma de después del ocho, a después del primer cero).

E- ¿Y qué diría?

Aa6- Ochenta mil.

E- Pero yo te dicté ocho mil, ¿por qué ahorita cambió a ochenta mil?

Aa6- Porque se puede cambiar la coma a ocho miles o aquí se pone la coma (marca un cambio de comas señalado anteriormente).

E- ¿O sea que si tú cambias una coma de lugar ya te dice otro número?

Aa6- Ajá

E- ¿Nada más por cambiarle la coma?

Aa6- (Asiente)

E- Por ejemplo, en este ochenta que tenemos (escribo ochenta) y yo le pongo una coma aquí (un coma entre el cero y el ocho así 8,0) ¿qué va a decir?

Aa6- (Ríe) ¿Ocho? Porque solo es un cero y para ser mil se necesitan más ceros.

E- ¿Cuántos ceros le pondrías?

Aa6- (Agrega dos ceros después de mi 80 así 8,000)

E- ¿Y ahí dice?

Aa6- Ocho mil.

E- Pero si yo le cambio la coma aquí (escribo una nueva coma así 8,0,00) ¿Qué va a decir?

Aa6- Ochenta mil.

E- Sólo con la coma, ¿ya no necesitas agregarle ceros como me estabas diciendo? (en el caso en que transformó el 80 a 8000 agregándole dos ceros)

Aa6- No, porque estos ya son dos números (el 80 de 8000) y estos otros dos números (los 00 al final de 8000) que hacen ochenta mil.

E- ¿Ya no necesita más ceros para ser ochenta mil?

Aa6-(Niega)

E- Bueno, pues entonces terminamos está primera parte.

Entrevista 7

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Ao7 como entrevistado masculino.

Fecha de nacimiento: 8 de octubre de 2003

Edad (11,08)

Fecha: 19 de mayo de 2015

Duración: 00:21:43

E- Te voy a leer las indicaciones, te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes como lo haces. Si en algún momento necesitas corroborar algún dato, algún cálculo te apoyas en la calculadora. Este no es ningún examen, respira profundo, no es examen me interesa todo lo que me digas y todo lo que piensen de lo que va sucediendo de cálculo. Mi nombre es Olivia y cualquier cosa me preguntas. Vamos a comenzar con la primera ¿me puedes leer ese cálculo? (Ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =)

Ao7- Cinco mil más trescientos más sesenta más cuatro.

E- Ahora si gustas empezarla a resolver.

Ao7- (Escribe la respuesta 5364)

E- ¿Cómo te fijaste para empezarlo a resolver?

Ao7- Pues primero que nada me fijo en los ceros, porque es la cantidad que se podría decir que representan... por ejemplo en cinco mil, cinco mil tiene tres ceros y un cinco (ríe)…

E- Sí, cinco mil tiene tres ceros y un cinco... dices que te fijas en los ceros para saber qué cantidad representan ¿y qué decides cuando ves los ceros?

Ao7- Se podría decir que voy colocando los números conforme a la cantidad y a su orden.

E- ¿Ahí (en ítem 5000 + 300 + 60 + 1 =) qué orden tú notas?

Ao7- Que empieza de miles a cientos.

E- ¿Aquí (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =) hiciste algún cálculo o ya ni siquiera hiciste algún cálculo?

Ao7- Hice uno para verificar que resultado iba a ser, pero sumar, así de ir sumando uno por uno, no.

E- ¿Entonces cómo le hiciste más bien?

Ao7- Lo que ya le había dicho, de que iba juntando los números o sea tres... (Ao7 se refiere al tres de 300 en 5000 + 300 + 60 + 4 =) de izquierda a derecha, voy: el tres en el primer cero (en el primer cero de 5000), luego el seis, luego el cuatro. Cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- Pasamos al que sigue ¿listo? (Ítem 2000 + 80 + 2 =)

Ao7- Sí.

E- Cuéntame ¿ya la tienes?

Ao7- No, la estaba resolviendo.

E- cuéntame ¿cómo le hiciste ahí?

Ao7- Me iba a equivocar, iba a poner el ocho en los cientos.

E- A ver ponlo aquí a un lado ¿cómo te hubiera quedado?

Ao7- (Escribe 282 a un lado de su respuesta 2082)

E- Y dime, ¿cómo te diste cuenta de que era éste (señalo 2082) y no éste (señalo282)?

Ao7- Porque vi el único cero, uno es de dos… (Ao7 está refiriéndose al único cero que tiene el ochenta, compuesto de dos cifras).

E- ¿Quién tiene ceros de los que te fijaste?

Ao7- Me fijé en el ochenta que tiene sólo un cero (quizá Ao7 esperaba que tuviera dos ceros, con lo cual correspondería a cientos, como es el caso del ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =).

E- Ok, entonces tiene sólo un cero y ¿dónde decidiste escribirlo?

Ao7- Es que... lo decidí poner ahí porque no son cientos son menos de cientos (está comparando entre la escritura 2082 y su primer intento de respuesta que fue 282).

E- ¿Te acuerdas cómo se llaman? porque tu hace ratito me dijiste esos son miles, estos son cientos... ¿eso te está atorando, que no te sabes los nombres?

Ao7- Un poco.

E- Pero sí sabes que son menos que los cientos. Entonces viste que el ocho tenía un cero a un lado (el 0 de 80) por eso no lo podías escribir, así como doscientos ochenta y dos, sino que lo tenías que escribir de esta manera (2082) (no es esa explicación precisamente, revisar lo que dice más delante porque de entrada no quería escribir doscientos ochenta y dos).

Ao7- Sí.

E- ¿Y cómo decidiste poner ese cero, el del dos mil ochenta y dos, en segundo lugar (refiriéndome al 0 de 2082)?

Ao7- Porque en el primer cero hacía la derecha del dos aquí no hay cientos y se tiene que poner de cientos a menores de cientos, se podría decir (probablemente Ao7 está pensando en un rango de números de tres cifras o de tres ceros que puedan ocupar ese lugar de las centenas, contra los que no pueden estar en las centenas por sólo tener dos cifras o un cero).

E- ¿Entonces no viste cientos y no los pusiste?

Ao7- Sí.

E- ¿Tú sabes por qué?

Ao7- No se sería ya como una costumbre que empecé a hacer sumas por eso; ya sólo es cuestión de ver y ya se pueden acomodar los números y todo eso.

E- Tú ya sabes cómo acomodar los números, ¿en qué es en lo que te fijas principalmente para acomodar los números?

Ao7- En las cantidades.

E- En las cantidades... ¿por ejemplo?

Ao7- De mayor a menor, por sus ¿cómo se llama? .... (Titubea) como van acomodados de menor a mayor… de mayor a menor.

E- Pasamos a la que sigue. (Ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =)

Ao7- (Escribe 438 e intenta borrar)

E- Si quieres ponla un lado, ahí déjame esa (su primer intento inconcluso de 438)

E- ¿Cómo le hiciste para resolver esa?

Ao7- Me fijé en las sumas.

E- ¿En qué de las sumas?

Ao7- En que ochenta... por eso me equivoqué aquí (refiriéndose a su primer intento 438) porque era ochenta más cuarenta son ciento veinte, más trescientos son cuatrocientos veinte más tres son cuatrocientos veintitrés, más los cuatro mil son cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Algo te dijo el ochenta que te detuviste y viste eso ¿cómo te decides a hacer esa cuenta? (Me refiero a la cuenta de 80 más 40 = 120)

Ao7- Porque pensé... “no había visto el cero” … pensé que era menor. (Ao7 señala el 40 en la operación 300 + 4000+ 80 + 3 + 40 =; probablemente pensaba que sólo tendría unidades en el siguiente sumando que viniera después del 3).

E- ¿No habías visto el cero del cuarenta, pensaste que era menor?

Ao7- Sí.

E- ¿Y cómo decides sumarle el cuarenta al ochenta para que te de ciento veinte?

Ao7- porque me di cuenta de que son... ¿múltiplos? (el 80 y el 40).

E- ¿Son como múltiplos?

Ao7- Sí, cuarenta por dos son ochenta... y sumé cuarenta más ochenta y salió ciento veinte.

E- ¿Y por qué ese ciento veinte que tu obtuviste ya no se ve en esta cantidad? (Refiriéndome a porque el 120 no figura en la respuesta o suma 4423).

Ao7- Porque se le suma a trescientos y da cuatrocientos veinte.

E- Porque en los que tenemos aquí (señalo los ítems 5000 + 300 + 40 + 7 = y 1.2 que es 2000 + 80 + 2 =) sí se ve... tenemos el ochenta (el 80 de 2082) tenemos el trescientos (300 de 5364) ¿cómo explicarías tú eso?

Ao7- Porque estos son menores, van como en orden del mayor a menor (señalando ítem 1.1 y 1.2); igual tiene… en esta cambian las posiciones y por eso (refiriéndose al ítem 1.3 que es 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =).

E- Oye un niño de otra escuela me dijo que este era el resultado (del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =; escribo 34834) ¿Me lo puedes leer?

Ao7- Es treinta y cuatro mil ochocientos treinta y cuatro.

E- ¿Qué le dirías a ese niño?

Ao7- Que esta incorrecto. Que solo se fijó en los números, en los principales, no se fijó en los ceros y por eso está acomodando de esa manera; si se da cuenta aquí va el tres cuatro ocho tres cuatro (señalando las unidades de cada sumando de la operación 300 + 4000+ 80 + 3 + 40 =) Es lo que tenemos aquí (subraya el falso resultado dado por E de 34834).

E- ¿Qué tendría que hacer ese niño para no tener esa escritura (señalo 34834)?

Ao7- Fijarse en las cantidades que está sumando y por qué está sumando y verificar, primero que nada.

E- ¿Qué verificaría?

Ao7- La cantidad, si está bien o incorrecta para poderla sustituir.

E- ¿Tú cómo le haces para verificar eso?

Ao7- ¿Para verificar la respuesta? Primero hago la operación y ya que tengo el resultado lo vuelvo a hacer, pero luego uso la calculadora para verificar si está correcto.

E- ¿Pasamos a la que sigue? (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

Ao7- ¿Ya?

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:12.33.3

E- Listo ¿Ya tienes el resultado?

E- ¿En qué te fijaste para resolver ese cálculo? ¿A ver qué te dio?

Ao7- ¿La cantidad, le leo la cantidad?

E- Ajá.

Ao7- Seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Cómo resolviste ese cálculo?

Ao7- Yo había visto el cinco mil... pero como en la anterior no me centré tanto en los miles, me fijé en los demás para no cometer errores y vi que está el cuatrocientos y el seiscientos y el cuatrocientos más seiscientos da mil y mil más el cinco mil da seis mil y cómo aquí el cero... como ya sumé esto, sumé… (Señala 600, 400, 5000 en el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =) (Ao7 está evitando su error anterior cambiando de estrategia, ya no se deja llevar por el orden).

E- ¿Te refieres al seiscientos, más el cuatrocientos más el cinco mil?

Ao7- (Repite seiscientos, cuatrocientos más el cinco mil) … y vi dos ceros y sumé cuarenta más siete, cuarenta y siete y los acomodé. (Ao7 "vio" dos ceros en el 6000 que le resulta de la suma de 600 + 400 + 5000, así procede ya no a sumar, sino a Acomodar).

E- Me interesa mucho la manera en la que tú los decides acomodar ¿Ahí cómo le haces para acomodarlos?

Ao7- Es que la maestra nos enseñó a que son de derecha a izquierda, creo, no me acuerdo muy bien…

E- ¿En qué sentido?

Ao7- De derecha a izquierda, como que es unidades, decenas, centenas, unidad de millar... y es como una costumbre el acomodar de tal forma de que no me equivoque al verificar.

E- Ok. Oye tú me dijiste de acuerdo a ese acomodo de unidades, decenas, centenas.... que aquí no había centenas (en su escritura 6047), pero aquí yo veo que cuatrocientos son centenas… ¿o me equivoco?

Ao7- ¿Cómo, en qué sentido?

E- En este cálculo (señalo 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =) yo veo que hay centenas ¿Por qué esas centenas ya no aparecen aquí (señalo 6047)?

Ao7- Porque esas centenas (los 400) las sumé a las centenas de seiscientos y sumé seis más cuatro; porque ya no podía sumar los ceros porque cero más cero (habla de hacer a un lado los ceros de 400 y los de 600) son cero, no hay otro resultado más grande, mayor, que sumar cuatro más seis los números principales.

E- Sumaste los números principales, no los ceros ¿Y qué pasó?

Ao7- Que me dio a diez pero los ceros son dos y diez, si le agregamos los ceros que tenía son mil y sumé mil más cinco mil y me dieron seis mil.

E- ¿Y el cero que significaría?

Ao7- Que no hay centenas.

E- ¿O cómo le llamarías tú de una manera que tú lo entiendas mejor?

Ao7- Que no hay un número mayor a cuarenta y sie... mayor de cien y menor de mil; por eso no puse la ninguna... porque no hay mayores de cien y menores de mil.

E- Entonces para ti eso sería (una centena); que no hay números mayores de cien, ni menores de mil ¿Eso fue lo que me dijiste? Pasamos a la que sigue. (Ítem que es 9000 + 1700 + 800 + 5 =)

E- Respira Ao7, ya mero terminas esa parte.

Ao7- (Resolviendo, escribe 11505)

E- ¿Me cuentas cómo le hiciste?

Ao7- Ya había visto el nueve mil y mejor me fui a los menores.

E- ¿Cuáles menores?

Ao7- El mil setecientos y el ochocientos... y los sumé... y me dieron dos mil quinientos; y sumé dos mil quinientos más nueve mil, me dieron a ciento… once mil, perdón, once mil quinientos y sólo acomodé el cinco; el cero, cinco (el cinco no lo suma, el cinco lo acomoda).

E- ¿Cómo le hiciste para acomodarlo?

Ao7- Porque no tiene cero, entonces no es una cantidad mayor que nueve porque ya mayor que nueve ya tiene cero...

E- ¿Te refieres al diez?

Ao7- Al diez, al veinte, al treinta, o al cuarenta y siete; un número que sea mayor de diez.

E- Entonces así fue como ya no más acomodaste el cinco...

Ao7- Sí.

E- Oye yo veo que al principio habías puesto un dos (primer intento 12.... resultado final 11 505). ¿Qué ocurrió ahí?

Ao7- Me confundí en la suma de esto, pensé que era doce mil, pero era once mil porque me revolví, no sumé bien las cantidades y me salió un número incorrecto.

E- ¿Y en qué te fijaste para decir “no es ese número”?

Ao7- Estaba inseguro del número que había puesto y mejor volví a sumarlo y me salió dos mil quinientos y lo sumé al nueve mil.

E- ¿Y cuánto te habías salido antes?

Ao7- No terminé la cantidad, sólo puse el dos y me di cuenta de que estaba errónea.

E- Bueno esa es la primera parte, ya la terminamos.

Entrevista 8

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa8 como entrevistado femenino.

Fecha de nacimiento: 27 de septiembre de 2003

Edad: (11, 09)

Fecha: 18 de mayo de 2015

Duración: 00:39:05

E- Vamos a comenzar el día de hoy poniendo tu nombre por favor ¿Eres de qué grupo y de qué grado? ¿Qué edad tienes Aa8?

Aa8- Once años.

E- ¿Qué día naciste?

Aa8- El veintisiete de mayo de dos mil tres.

E- Y hoy es dieciocho de mayo de dos mil quince. Muy bien, ¿aquí puedes poner la fecha? (señalando el espacio de fecha).

E- Bueno ahora sí vamos a comenzar a resolver. Vamos a ver Aa8, te voy a leer las indicaciones, dice: te voy a presentar unas operaciones, quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes como lo vas haciendo. Si tú en algún momento necesitas comprobar algún cálculo que tengas duda, yo aquí tengo una calculadora para que lo podamos comprobar. ¿Sale? Muy bien, te pido ahorita que empieces a resolverlas que trates de hablar lo más fuerte que puedas para que se grabe bien. Vamos a comenzar ¿sale?

E- ¿Qué tenemos ahí? (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =)

Aa8- Cinco mil más trescientos más sesenta más cuatro. Entonces si voy a resolverlo empiezo de la derecha a la izquierda...

E- De la derecha a la izquierda... A ver.

Aa8- Primero es el cuatro, aquí (Aa8 se refiere ahora al 60 en la operación 5000 + 300 + 60 + 4 =) el cero como no vale, es como si tuviéramos el cuatro, sigue el seis, el tres y el cinco, que me da cinco mil trescientos sesenta y cuatro, que es el resultado final.

E- Veo que aquí (referencia a la escritura 5,364) pusiste una comita, ¿esa cómo decides dónde ponerla?

Aa8- Porque, este, cuando hay tres números pues si se sabe qué número es (Aa8 se refiere a una cantidad de tres cifras) ... pero cuando son cuatro (cifras en una cantidad) para decirlo bien yo pongo una comita, que esa me la enseñaron aquí en la escuela, pero...

E- Me dices "me ayuda a decirlo bien”. ¿Cómo es que te ayuda? ¿Qué te indica?

Aa8- Que éste (señala unidades de millar, en este caso el 5000 de 5000 + 300 + 60 + 4 =) ... me ayuda a ------------ pero aquí hay una separación que separa las unidades y centenas con los millares, millones, lo que sigue de cien... de mil.

E- Las unidades decenas y centenas, lo separa de lo que sigue de ahí, dices que los millares, millones... aquí (señalo su escritura 5,364) ¿Cómo sería eso de unidades, decenas y centenas?

Aa8- El cuatro como es uno, es unidad, el sesenta es como si fuera diez, la decena; el trescientos, centena como si fuera el cien, después de la coma, éste ya es uno más (refiriéndose a la cifra extra que se tiene en 5000, es uno de más respecto de los de cien), la coma es para separar la unidad de millar, que es el cinco.

E- Y tú cuando me dices este seis (señalo el 6 de su escritura 5,364) es como si fuera diez, ahí no me queda claro, ¿es seis o es diez?

Aa8- Es seis, primero se empieza por... cuando te enseñan esto primero se empieza por el uno, diez, cien y así se va... Entonces ya cuando sabes que son dos, dices ¡ah! que son decenas, la unidad porque son uno, la decena porque son dos… (Aa8 habla de “son dos” para referirse a las dos cifras del orden de las decenas).

E- ¿Dos qué?

Aa8- Dos números que...

E- Son dos números, pero me dices a parte “pero son diez”. Lo que no me queda claro es ¿cómo son diez, de qué son diez?

Aa8- Porque decena son diez, entonces en sesenta como si fuera el diez, pero ya que aprendes eso te empiezan a poner números que son el seis... cualquier número, entonces ya sabes que ahí que es decena porque son dos (Aa8 se refiere a números de dos cifras), unidad es de uno, te lo marca, decena son dos, y centena son tres.

E ¿Te estás refriendo a dos de, por ejemplo, si tuviéramos sólo el 4? (Escribo un cuatro)

Aa8- Sería unidad, que es uno.

E- ¿Y si le pongo el seis? (Escribo un 6)

Aa8- Decena porque son dos (dos cifras).

E- Te refieres a que son decena porque tú estás viendo que hay dos cifras, como dos números y centenas porque ya son tres y cuando tú me dices "pero son de a diez o son diez" ahí es donde no te había entendido ¿son dos, son seis o son diez?

Aa8- Aquí (en el 60 de 5000 + 300 + 60 + 4 =) sí son seis.

E- ¿No son diez? ¿Y los diez que me decías?

Aa8- Diez porque el uno es como si fuera el uno y este ------- el cero y aquí --------- en vez del seis se pone el uno y hace el diez, en vez de éste se pone el uno, entonces ya en vez del uno se va poniendo uno, dos, tres y cuatro, y ya sabes que es decena.

E- ¿Y hasta donde llegan esas decenas?

Aa8- Hasta el millón, no las decenas llega hasta el.... noventa.

E- ¿Y el noventa y uno por ejemplo?

Aa8- Sí.

E- ¿Y hasta donde dices tú, ya no son decenas?

Aa8- Cuando ya no hay dos números. La unidad llega del uno al nueve, la decena del diez al noventa; porque si fuera noventa y uno no se pondría el cuatro se pondría el cero (Aa8 se refiere a un ejemplo donde no tuviera un cuatro al final como en 5000 + 300 + 60 + 4 =; sino a uno donde tuviera un uno. Aa8 es más clara en el siguiente fragmento).

E- Por ejemplo...

Aa8- (Se vuelve sobre la sumatoria de la hoja para escribir un ejemplo)

Aa8- Si aquí tengo sesenta y uno, más cero, el cero como no vale no se pondría; y en vez del cero el uno tomaría su lugar.

E- Ponme acá abajo cómo quedaría ese número que me estás diciendo.

Aa8- Como el cero no vale no se pone nada, entonces el uno toma su lugar (produce escritura sobre la sumatoria donde sobre 60 escribe 61 y sobre el 4 escribe 0), luego el seis, el tres y el cinco (produce la escritura 5361 para ejemplificar).

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:09:19.1

E- Pasamos a la que sigue ¿qué tienes? (Ítem 2000 + 80 + 2)

Aa8- Dos mil más ochenta más dos. Si lo acomodamos sería dos, ocho... entonces aquí en el dos mil hay tres números (Aa8 se refiere a los tres ceros 2000 en 2000 + 80 + 2) y yo antes tengo dos, entonces como tengo dos (refiriéndose a las dos cifras de 82) marco los ceros y me queda veinte; el veinte lo pongo y aquí hay dos mil ochenta y dos. (Aa8 ha procedido de la siguiente manera: primero ubica el 2000 en la operación 2000 + 80 + 2, tacha los dos ceros a la derecha del 2000 cuando dice “y yo antes tengo dos” pensando en la cantidad de dos cifras que le resulta de sumar 80 + 2, que es 82; de ahí dice que le “queda veinte”, lo escribe, luego completa con el 82 la cantidad de 2082).

E- Entonces tú lo decides porque dices "ya tengo esto (refiriéndome al 82), lo tacho" pero cuando me dijiste "hay tres números" ¿a cuáles tres números te referías?

Aa8- A los demás, a si yo tengo de mil en adelante los ceros significan los números; por decir, en tres mil quinientos cuarenta y dos esos números, si esa cifra la separas esos números en el mayor quedan marcados como el cero que ya tienen su lugar... (Aa8, al decir que hay números que en el mayor quedan marcados si separas o desagrupas una cantidad, está haciendo referencia a los ceros y a la posición que los ceros implican).

E- A ver ponme un ejemplo.

Aa8- Aquí en dos mil (escribe una suma 2000 + 80 + 2) y entonces tengo ochenta más el dos. Entonces ya acomodé la cifra, ya puse el dos y ya después el 8 (Aa8 ha tachado los dos últimos ceros del 2000).

E- ¿Alguien te enseño a hacer este procedimiento o tú lo descubriste?

Aa8- Me enseñaron las maestras desde tercero.

E- ¿Entonces qué número obtenemos como resultado?

Aa8- Dos mil ochenta y dos.

E- ¿Me podrías confirmar cómo decides escribir el cero ahí y no en otro lado?

Aa8- Porque el cero aquí está después del dos (el cero de las centenas en 2000), entonces sí el cero está después de un numero natural ahí se queda, toma valor.

E- ¿Y dónde no tendría valor?

Aa8- Si estuviera antes.

E- Ponme un ejemplo de dónde no tendría valor el cero.

Aa8- (Escribe 0242) Aquí no tendía valor porque este (cero) no cuenta como número.

E- Vamos a hacer la que sigue. (Ítem 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 =)

Aa8- Aquí hay confusión, porque aquí hay dos números que tiene el mismo valor (refiriéndose al 80 y al 40 del ítem 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 =) que sería la decena. Aquí sí está bien, los cuatro mil más tres mil me da cuatro mil trescientos (Aa8 se confunde y nombra tres mil al trescientos). Pero aquí ya tengo el ochenta más cuarenta que sería cuatro mil ochenta… cuatro mil ciento veintitrés...

E- A ver, escríbelo.

Aa8- (Escribe 4123)

(Antes de esta escritura María José intentó escribir un 3 en la hoja, en la entrevista se vuelve sobre ese intento)

E- ¿Por qué aquí tenías primero un tres? ¿Por qué lo estabas escribiendo ahí primero?

Aa8- Porque primero, yo en mi caso, yo empiezo primero por la derecha a la izquierda.

E- ¿Entonces qué te hubiera resultado si hubieras escrito así (refiriéndome a escribir de acuerdo al método usado por la alumna en ítem1 que fue ir “poniendo” los números sobre los ceros marcados en el sumando mayor)?

Aa8- Cuatro mil ciento veintitrés. Así como está esta suma, me hubiera dado cuatro mil ciento veintitrés... pero si el cuarenta no estuviera me hubiera dado cuatro mil trescientos ochenta y tres y.… y serían cuatro mil cuatrocientos veintitrés si estuviera el cuarenta. Pero si no estuviera serían cuatro mil trescientos ochenta y tres (Aa8 produce escrituras de todos los números que le van resultando)

E- Ahí me estás dando tres cantidades (refiriéndome a 4123, 4423 y 4383 que ha dicho y escrito) Ya no me quedó claro cuál es el resultado.

Aa8- El resultado total de toda está suma es cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Cuéntame ¿cómo decidiste hacerlo así? ¿Cómo llegaste a ese resultado?

Aa8- Porque primero para este caso empecé por el cuatro mil, cuatro mil seguía trescientos y ochenta, hasta ahí me quedé, son cuatro mil trescientos ochenta; pero aquí había un cuarenta, entonces a cuatro mil trescientos ochenta le sumé cuarenta y medio cuatro mil cuatrocientos veinte; y ya que hice ésto, le sumé tres y ya fue cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Tú antes habías hecho este procedimiento que creo que era el que ibas a comenzar aquí (refiriéndome al procedimiento usado en ítems 1.2 y 1.1 de acomodar o poner las cantidades de acuerdo a los ceros) ¿Por qué ya no lo usaste?

Aa8- Porque había aquí dos cifras que eran iguales, que eran decenas (refiriéndose al 80 y 40) aquí yo tuve una confusión.

E- ¿Y en qué consistió tu confusión?

Aa8- En que por qué aquí había tres... dos y un cero y el siguiente número también tenía un cero. (Aa8 se refiere a que esperaba un orden de los sumandos de mayor a menor, con los ceros marcados; los millares con tres ceros, las decenas con dos ceros, las decenas con un cero).

E- Y qué opinas ¿si se puede poner así o no?

Aa8- Pues sí se puede poner así.

E- Pasamos al que sigue.

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:16:27.9

E- Bueno, antes de que pasemos, aquí yo veo que tenemos un ochenta y un cuarenta. ¿Por qué esos ochenta y cuarenta ya no aparecen en tu cifra final?

Aa8- Porque ya que en mi cifra antes era cuatro mil trescientos ochenta me quedé ahí, porque lo hice del cuarenta y entonces a esa cifra, a ese número total que me dio, le sumé cuarenta y me salió cuatro mil cuatrocientos veinte; y por eso estos números (80 y 40) ya no aparecieron en esta cifra (en el resultado 4423).

E- ¿Y cómo decides sumar esos dos (el 80 y el 40) sumarlos?

Aa8- Porque para no estar que ya todos terminaron y yo no, ya que terminé esa cifra decidí sumar el cuarenta para que este cuarenta se sumara a este (señala 80) y fuera un solo número (sumando el 40 al 4380).

(En este momento la alumna se pone a resolver el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

E- ¿Listo? ¿Cuánto te dio?

Aa8- (Escribe 657,440) Seiscientos cincuenta y siete mil cuatrocientos cuarenta.

E- Seiscientos cincuenta y siete mil cuatrocientos cuarenta... (Repitiendo lo dicho por Aa8)

E- ¿Cuéntame cómo le hiciste para resolver ese cálculo?

Aa8- Porque aquí ya tengo los dos números------ el cuatro---- y este---- entonces aquí el siete...

E- A ver, explícame otra vez éste (refiriéndome al 440 de su escritura 657,440).

Aa8- Cuatrocientos cuarenta... cuatrocientos ya lo puse, el primer cuatro; a los dos ceros le sumo el cuatro (del 40) y el cero, que me dio cuatrocientos cuarenta. (Aa8 se refiere a que ha escrito el 4 de 400, luego sobre los dos ceros ha escrito el 40 y ha dejado el lugar del cero en las unidades, resultándole 440).

E- Ok, de aquí (señalo el 440 de 657,440).

Aa8- Después le pongo el siete de aquí (señala el 7 en 657,440) luego el cinco y el seis... porque el cero que sigue del seis (refiriéndose al cero de las decenas del 600) es el cinco y el que sigue del seis (refiriéndose el último cero de 600, el de las unidades) es el siete.

E- Ok, aquí me dices ahora el seis lo pongo, el lugar de este cero (el de las decenas) lo va a ocupar el cinco y el otro cero (el de las unidades) lo va a ocupar el siete. Yo quiero que me comentes, este siete (en la adición 600 + 5000 + 7 + 400 + 40) ¿qué es? ¿Cuánto vale?

Aa8- Vale----- unidad que es un número natural siete, pero yo aquí, para que aparezca en la cifra lo puse en un lugar específicamente que sí tuviera el valor y no quitarlo.

E- Me dices que vale unidad. Y en tú número que escribiste (el 657,440) ¿cuánto valdría ese siete?

Aa8- Valdría unidad de millar

E- ¿Y se puede hacer eso?

Aa8- Sí.

(En este momento pasamos a contrastar los procedimientos de Aa8 en dos ítems, el ítem 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 = contra el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

E- ¿Qué te parece si ahora?... Bueno, ahora me dices que ya vale por unidad de millar...a ver y en este caso de acá arriba donde tú me escribiste cuatro mil cuatrocientos veintitrés, tú también tienes un tres... (Haciendo referencia al último 3 del ítem 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 =)

Aa8- Sí.

E- ¿Qué vale?

Aa8- Unidades.

E- Vale por unidades... ¿por qué ese tres no lo cambiaste acá (señalo las unidades de millar) para que valiera por unidades de millar? (Indagando sobre la razón que hace que la alumna produzca una escritura como 657,440, en la cual no reorganizó los sumandos para integrar la cantidad final).

Aa8- Porque este tres como es el último ya no lo puedes cambiar, pero si lo cambiara por ochenta, ahí me equivocaría. (Aa8 está planteando un caso hipotético en el que ella en la operación 4000 + 300 + 80 + 40 + 3 = hubiera decidido cambiar el 3 al lugar del 80 o de las decenas, dándose cuenta de que sería un error).

E- Ahí te equivocarías, te daría otro resultado (eso no lo concluyó ella). Pero aquí (en ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =) dices que no lo puedes cambiar... ¿qué pasa si cambias ese siete a otro lugar?

Aa8- (Pensativa)... sí se podría cambiar, el siete sería… aquí en el resultado final.

E- A ver, si quieres intentarlo aquí abajo (abajo del ítem, la invito a escribir).

Aa8- (Escribe 65,447) Me daría sesenta y cinco mil cuatrocientos cuarenta y siete si pusiera el cuatrocientos lo pusiera aquí (señalando el cuatro de las centenas en su escritura) y cuarenta en el cuatrocientos y el siete en el cuarenta. (Aa8 ha procedido a acomodar el 7 sobre el último cero del 440 escrito previamente).

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:22:49.2

E- Permíteme (hago anotaciones). Te voy a pedir que introduzcas esos números aquí en la calculadora y vamos a ver cómo…

Aa8--------

E- Éstos (señalo la adición, el ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40).

Aa8- (Hace la suma en la calculadora, está atenta de las transformaciones como se deja notar en sus argumentos más delante).

E- ¿Cuánto nos dio?

Aa8- Seis mil cuarenta y siete.

E- Ese no se parece a los que tienes ahí (refiriéndome a su escritura de 65,447) ¿verdad? ¿Qué piensas, qué pudo haber pasado?

Aa8- Que aquí el cinco mil pudo haber cambiado... yo creo que cambié el cinco mil por el seiscientos, vi en la calculadora que me dio a cinco mil seiscientos, luego cinco mil seiscientos me dio cinco mil seiscientos siete, pero cuando le cambie más el cuatrocientos me dio seis mil; entonces en estás tres (Aa8 se refiere al introducir ciertos sumandos el 600 + 5000 + 7, el número se transformó) , el cinco mil se cambia al seiscientos y el seiscientos al cinco mil (Aa8 se refiere a que en la primera parte de la suma, en 600 + 5000 + 7, el cinco mil se acomoda primero y el seiscientos después, pese al orden en que ella los ingresa que fue primero el 600, luego el 5000); se intercambiaron, sumé el siete; pero el cuatrocientos ya cambió la cantidad que tenía antes por una más grande.

E- ¿Por una más grande que fue...?

Aa8- El seis mil. Seis mil cuarenta me dio, el seis mil cuarenta y siete; porque sumando estas cuatro cantidades me dio seis mil siete (600+5000+7+400), en total más cuarenta, seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Cómo crees que la calculadora hizo para obtener ese resultado?

Aa8- Que se cambió el cinco mil por el seiscientos.

E- ¿Y cómo se cambia un número por otro?, ¿cómo se cambia el cinco mil por el seiscientos?

Aa8- Porque el cinco mil tiene un valor mayor que el seiscientos entonces como tiene un mayor valor se pone aquí (señala un lugar antes del 600 de la adición del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =) y el seiscientos como tiene menor valor se pone a un lado.

E- Lo puedes ir haciendo aquí, como estás diciendo. ¿Cómo le podrías hacer tú para ir pensando cómo lo fue acomodando la calculadora?

Aa8- (Escribe 5000 + 600 + 7 + 400 + 40=)

E- ¿Y este nuevo acomodo te facilita a ti hacer el resultado?

Aa8- Sí.

E- ¿Qué harías para hacer el resultado?

Aa8- En este caso iniciaría por la izquierda, sería cinco mil. Luego el siguiente el seis, pero como el siete no tiene otro cero, el primer cero del seiscientos se pone de ahí agarra valor, luego el siete, pero el cuatrocientos, ahora el cero, la calculadora creo que lo quitó, y al seis mil siete le sumó cuatrocientos entonces...

(Aa8 ha procedido así, escribe un 5 del 5000, coma, luego un 6 de 600, piensa en el 7 que como es unidad requiere que uno de los ceros del 600 sea conservado para que el 7 "agarre valor"; obtiene un resultado parcial de 5,607. Luego piensa en el cuatrocientos y en un cero que "la calculadora quitó", pero esta respuesta no queda clara por no profundizarse en ella).

E- ¿A seis mil siete le sumó cuatrocientos?

Aa8- No al cinco mil seiscientos siete le sumó cuatrocientos y ahora el resultado es seis mil siete, sumó el cuarenta, y ahora fue el seis mil cuarenta y siete (escribe ambas cantidades en su hoja además de haber escrito 5,607, añade según las va mencionando el 6,007 y el resultado final 6,047).

E- ¿Cómo crees que la calculadora decidió sumar el seiscientos al cuatrocientos?

Aa8- Porque el seiscientos es como si fuera el seis, le quita los ceros y más el cuatro da diez que es mil, mil más en esta cifra; entonces cinco mil seiscientos más cuatrocientos dio un total de seis mil hasta… así, eso fue lo que pasó.

E- Bueno, eso fue lo que pasó. Pasamos a la que sigue. (Ítem 9000 + 1700 + 800 + 5)

Aa8- (Asiente)

Aa8- (Se pone a resolver la siguiente operación) Ya.

E- Bueno, cuéntame qué pasó. ¿Cómo le hiciste para resolver ese cálculo?

Aa8- Bueno, primero acomodé el mil, lo que pasó en mil setecientos es que el siete lo cambié por un cero y me dio diez mil, lo puse -------- entonces el siete tomó el primer cero que tiene la cifra, el ocho tomó el primer cero que la cifra ochenta... ochocientos y el cinco tomó el último (escribe 10, 785) y el resultado final fue diez mil setecientos ochenta y cinco.

E- A ver, me estabas hablando de que el siete toma el primer lugar (refiriéndome al lugar de las centenas en su escritura 10,785), el ochocientos toma el lugar de aquí (señalo las decenas en su escritura 10,785); ¿quiero que me platiques este ocho de aquí cuánto vale?

Aa8- ¿En la suma o en la cifra? (Aa8 tiene clara la diferencia de valor de los números que tienen en la operación o ítem propuesto y cómo cambian cuando ella decido acomodarlos como lo hace).

E- ¿En la sumatoria cuánto vale?

Aa8- (Escribe sobre el cinco de la operación 9000 + 1700 + 800 + 5) Aquí vale… (Escribe una U de unidad) la sumo por el cinco...

E- Le pusiste una U arriba del cinco.

Aa8- Que es unidad... entonces esta (el 800) valdría una decena.

E- ¿El ocho o cuál valdría una decena?

Aa8- Aquí (rodea con un circulo el 800 de la operación) hasta acá valdría una centena nada más.

E- No le entiendo a eso que escribiste, si quieres pónselo arriba (refiriéndome a arriba del número).

Aa8- El cero valdría unidad, el segundo cero, decena, y el ocho, centena.

E- ¿Valdría por centena? o sea que yo en este número que te pongo aquí (escribo 888) ¿lo puedes leer? ¿Cuál es?

Aa8- ochocientos ochenta y ocho

E- Aquí tenemos los tres repetidos (me refiero a los tres ochos) éste, ¿cuánto vale? (señalo el ocho de las unidades).

Aa8- Unidad.

E- ¿Y cuánto vale en total?

Aa8- Ocho.

E- ¿Y este de aquí? (señalo el ocho de las decenas).

Aa8- Decena.

E- Me dices “vale decena”, pero ¿cuánto vale?

Aa8- Ochenta.

E- ¿Y esté de aquí? (el ocho de las centenas)

Aa8- Ochocientos.

E- Entonces el ocho de aquí vale ocho, el otro ochenta y el otro ochocientos.

Aa8- (Repite lo anterior)

E- Entonces vamos a hacer lo mismo, pero con el resultado que tú me diste (refiriéndome a 10, 785); este cinco de aquí...

Aa8- Unidad...

E- ¿cuánto valdría?

Aa8- Cinco.

E- ¿Este ocho de aquí? (El ocho de su escritura 10, 785)

Aa8- Ochenta.

E- ¿Este siete de aquí? (el siete de su escritura 10, 785)

Aa8- Setecientos.

E- Mi pregunta es, ¿si en la suma de acá arriba (haciendo referencia al ítem 9000 + 1700 + 800 + 5) tenemos un ochocientos que valía por centenas porque ahora aquí vale por decena (En su resultado)?

Aa8- Porque yo aquí en mi nueve mil y el mil setecientos... al mil setecientos le quité los setecientos que vale y quedan mil; ese mil más el nueve mil da diez mil, entonces el siete por consiguiente ya... los números ya agarraron la cifra… entonces el siete...

E- ¿Cómo me dijiste, los números deben agarrar una cifra o qué me dijiste?

Aa8- El diez (de 10,785) con el nueve mil y el mil, hicieron una cifra que fue el diez mil; esa cifra ya terminé. El siete tomó el lugar del ocho, el ocho se pasó al lado que vale ochenta y el cinco el último.

E- ¿Y por qué en el lugar del cero (refiriéndome al 10 de 10,785) nadie tomo el lugar de nada?

Aa8- Porque estos hicieron una suma (el 9000 y el 1000 de 1700) y si me hubiera dado la suma me hubiera dado diez mil setecientos…

E- Y diez mil setecientos... A ver por qué no lo anotas.

Aa8- (Escribe 10, 700)

E- Por eso nadie toma el lugar del cero... (Del cero de diez mil en 10,785) ¿Qué harías con los demás?

Aa8- Sería sumarlo; aquí ya lo acomodé como va (refiriéndose a sus anotaciones de 10, 785) como se dice, pero si lo fuera sumando como una suma normal, este, aquí me daría mil quinientos (de 700 del 1700 más 800 en la operación ítem 9000 + 1700 + 800 + 5); entonces ya sería once mil quinientos, si lo hiciera como una suma normal; más el cinco daría mil quinientos cinco.

E- ¿Con cuál resultado te quedas?

Aa8- Con este (refiriéndose al 11, 505).

E- ¿De qué te diste cuenta?

Aa8- De que aquí ya me da el resultado diez mil setecientos, pero si lo acomodo me dio diez mil setecientos ochenta y cinco; pero además de acomodarlo también lo puedo sumar como suma normal; me da otra cantidad porque ya no sería lo mismo acomodar que sumar.

E- ¿A ver cómo sería la diferencia?

Aa8- Acomodar sería si tengo quinientos (escribe 500 + 90 + 8), más noventa más ocho ya sabría que es (escribe) que el cinco es normal; el nueve tomaría su lugar, el segundo cero (cero de las decenas) y el ocho el cero (refiriéndose al cero de las unidades); ese es acomodarlo. Y sumarlo como es la misma cantidad, me saldría lo mismo. Pero como aquí (señalando el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =) tengo dos números que tienen las mismas cifras, la misma cantidad de números, ya aquí sería diferente.

E- ¿Cómo le haces tú para saber que no te va a servir acomodar, que lo tienes que sumar?

Aa8- Porque acomodar es de la cifra más grande a la más chiquita, pero aquí (quiere decir, en el tipo de ítems presentados en desorden) sí sirve acomodar también; pero en el resultado, si me lo calificarían, me equivocaría porque no lo sumé como una suma normal, nada más lo acomodé para hacerlo más rápido.

E- ¿Y aquí como te diste cuenta que no te va a servir acomodar?

Aa8- Porque tengo dos números que tienen la misma cantidad (el 700 que separo del 1700 y el 800), ahí ya sería necesario acomodarlos, o sea sumarlos.

Entrevista 9

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa9 como entrevistado femenino.

Fecha de nacimiento: 12 de marzo de 2003

Edad: (12,03)

Fecha: 19 de mayo de 2015

Duración: 00:36:50

E- ¿Qué te parece si empezamos poniendo tu grupo grado y fecha? ¿Eres Aa9... qué más (pregunto por sus apellidos)?

Aa9-(Aa9 proporciona sus apellidos)

E- ¿De sexto A?

Aa9- De sexto B.

E- ¿Cuántos años tienes?

Aa9-Doce.

E- ¿Cuál es tu fecha de nacimiento?

Aa9- Doce de mayo de dos mil tres.

E- (Escribiendo los datos proporcionados por Aa9) Y hoy es diecinueve de mayo de dos mil quince y son las nueve veinticinco, muy bien Aa9 vamos a comenzar.

E-Te voy a leer las indicaciones. Te voy a presentar unas operaciones quisiera que las respondas de la manera que puedas y me cuentes como lo haces. Si en algún momento necesitas corroborar algún dato, algún cálculo te apoyas en la calculadora. Ya que tengas muchas dudas lo puedes consultar en la calculadora. Ahí está el primer cálculo. (Ítem 5000 + 300 + 60 +4)

Aa9- (Resolviendo ítem 1) Serían cinco mil, más trescientos, más sesenta más cuatro.

E- Cuéntame, ¿qué te da?

Aa9- Cinco mil trescientos sesenta y cuatro

E- ¿Lo puedes escribir?

Aa9- Ok, ahorita que lo estabas haciendo, oía que hacías unas operaciones (Aa9, en voz baja. decía algo) ¿Me puedes contar cómo le hiciste?

Aa9- Primero empecé sumando el cuatro más sesenta, después de sesenta sumé el trescientos que daba trescientos sesenta y cuatro; después del trescientos sumé el cinco mil y ya cuando vi eran cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- Cuando dices que “ya cuando viste daba cinco mil trescientos sesenta y cuatro”, ¿a qué te refieres con eso?

Aa9- Es que yo, en mi memoria, yo vi que estaba sumando ésto, cuando vi el cinco mil vi que el trescientos sesenta y cuatro eran trescientos sesenta y cuatro (señalando la operación 5000+300+60+4, parece que Aa9 habla de la coincidencia de su cálculo con el orden en que se presentaron los sumandos en el ítem).

E- ¿Entonces lo que tenías en tu memoria, coincidió con alguna parte de este cálculo?

Aa9- El sesenta y el trescientos, entonces ya que estaba haciendo la suma después volví a sumar del aquí para acá (señala la operación de izquierda a derecha) y me volvieron a dar cinco mil trescientos sesenta y cuatro. (Aa9 menciona la coincidencia de su cálculo “en la memoria” que empezó por la derecha, con el orden de los sumandos en el ítem 5000 + 300 + 60 + 4 = que repasó acabado su cálculo y que reviso de izquierda a derecha)

E- O sea, primero hiciste tu suma del cuatro, luego el sesenta, luego el trescientos... (De derecha a izquierda).

Aa9- Sí.

E- Después la hiciste de acá para acá (señalo de la izquierda a la derecha, empezando por el 5000)... A ver dime, ¿cómo es que decides empezarla por aquí (señalo el 4)?

Aa9- Bueno como es una operación larga siempre a veces le hago de arriba para abajo (como en el algoritmo vertical), pero ahorita como está así (se refiere a la operación escrita en horizontal) decidí empezarla de este lado para acá para que no se me dificultara tanto la operación (de derecha a izquierda, empezando por el 4, luego el 60, luego el 300, luego el 5000).

E- ¿Tú decides empezarla por el cuatro para que no se te dificulte?

Aa9- Aja.

E- ...Pero por lo general dices que la acomodas de alguna manera… ¿Cómo la acomodas?

Aa9- Así (acomoda los números empezando por el cinco mil luego el 300 y así a manera de algoritmo vertical).

E- Qué te parece si pasamos a la que sigue. ¿Qué dice? (Ítem 2000 + 80 +2)

Aa9- Dos mil, ochenta y dos.

E- ¿Puedes escribir tu resultado? Bueno no sé si ya hayas hecho el cálculo.

Aa9- (Escribe282 y borra; ahora escribe 2,082).

E- Cuéntame ¿cómo le hiciste?

Aa9- Primero vi que eran dos mil, después vi que eran ochenta; entonces, si sumamos dos mil más ochenta son dos mil ochenta, más dos son ochenta y dos, entonces serían dos mil ochenta y dos. Entonces vi que el dos y el ochenta eran ochenta y dos, más el dos mil, eran el dos mil ochenta y dos (Aa9 parece que está verificando el cálculo tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, tal como lo hizo en el ítem 1).

E- Ok, en tu primera escritura ¿La puedes volver a escribir como la habías puesto al principio, la que borraste?

Aa9- Escribe 2,82.

E- ¿Así estaba la primera verdad, la que borraste?

Aa9- Mmmmm sí, algo así.

E- Cuéntame ¿Qué pasó aquí? ¿Qué ocurrió?

Aa9- Es que aquí se me olvidaba que tenía que ponerle un cero y después el ochenta y dos, ya que es dos mil.

E- Ya que es dos mil le tenías que poner un cero.

Aa9- Sí.

E- ¿Y cómo decides ponerle un cero y después del primer dos y no al final por ejemplo (escribo en 2820)?

Aa9- Bueno, porque serían dos mil ochocientos veinte (refiriéndose a mi escritura de 2820).

E- ¿Y cómo sabes tú dónde va, en qué te fijas (refiriéndome a en qué se fija para escribir el cero)?

Aa9- La maestra nos ha explicado que siempre que se hace una división o multiplicación así que sea… se le pone un cero, para que no se vea que son dos mil ochenta y dos, sino que se le agrega un cero ya que no se cuenta, para que se vea que son dos mil y no nada más doscientos ochenta y dos...

E-...Para que se vea que son dos mil y no nada más doscientos ochenta y dos. Oye, por eso, pero yo aquí (señalo 2820) también le estoy poniendo un cero...

Aa9- Sí, pero acá sería como si estuviéramos diciendo que son dos mil ochocientos veinte ya no sería dos mil ochenta y dos, sino sería dos mil ochocientos veinte.

E- Me puedes repetir...cuando tú escribiste esta (282) ¿Cómo te diste cuenta de que no era?

Aa9- Porque he hecho algunas veces estás operaciones en matemáticas, entonces me acordé que esta ya la hicimos y la maestra nos la puso con un cero aquí (en el lugar de las centenas) en vez del ocho.

E- Un cero ahí en vez del ocho, bueno eso es lo que dice la maestra, pero tú cómo te fijaste, porque seguramente tú también tienes formas en que te fijas si un cálculo no está bien ¿Tú en que te fijas?

Aa9- Yo, en lo que me fijé era que era un número muy corto, no era muy largo, entonces dije aquí me faltó un cero.

E- En eso te fijas en que te dio un número corto y no largo y tú esperabas un número largo…

Aa9- Sí.

E- ¿Y a qué le llamas tú número corto y número largo?

Aa9- Los números cortos son los que tienen dos o tres cifras, los que son más largos son los que tienen más de cuatro.

E- Vamos a pasar a la siguiente. (Ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =)

Aa9- (Resolviendo)

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:08:59.7

(La alumna está tardando en resolver el ítem 300+ 4000+ 80 + 3+ 40 =)

E- Cuéntame ¿en qué estás pensando?

Aa9- Es que ahorita noooo.... aquí me pusieron primero el número, como se podría decir, chico (refiriéndose al 300, quizá ha intentado el cálculo empezando por la izquierda). Pero aquí es donde se me está dificultando si yo sumo cuarenta más tres (volvió a retomar el cálculo por la derecha) son cuarenta más tres, más ochenta, es lo que se me está dificultando.

E- ¿Lo quieres hacer con la calculadora?

Aa9- (Ingresa los números a la calculadora) ¡Ah!, sí era el número que tenía más o menos en mente...

E- ¿Cuál era el número que tenías en mente?

Aa9- Cuatro mil cuatrocientos veintitrés, entonces se acercaba más.

E- ¿A cuál se acercaba cuatro mil cuatrocientos veintitrés?

Aa9- A cuatro mil cuatrocientos treinta.

E- A ver, ya que comprobaste que más o menos te da, ¿cómo lo harías tú?

Aa9- Cuatro mil cuatrocientos cuarenta y tres más ochenta seríann... ciento trece... cuatro mil quinientos trece... cuatro mil trescientos... cuatro mil cuatrocientos treinta y ocho. (Aa9 sobre el cálculo del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 = realiza un cálculo como sigue: primero suma 4000 más 400, que posiblemente memorizó del resultado que le dio anteriormente la calculadora, más 40, que es uno de los sumandos del ítem 3, más otro sumando que es el 80 y en efecto se acerca a los cuatro mil quinientos trece, de hecho, sería cuatro mil quinientos veinte. En este punto se pasa de la cantidad que verificó en la calculadora y ajusta su respuesta a cuatro mil trescientos, luego a cuatro mil cuatrocientos y llega al cuatro mil cuatrocientos treinta y ocho).

E- ¿Cuatro mil cuatrocientos treinta y ocho? ¿A ver lo quieres anotar? ¿Cuéntame cómo decidiste como ir haciendo el cálculo?

Aa9- Aquí lo que sumé fueron cuarenta y tres más ochenta serían ciento trece, después de aquí serían cuatro mil ciento trece más trescientos serían cuatro mil cuatrocientos treinta y ocho.

E- (Repito su respuesta "cuatro mil cuatrocientos treinta y ocho) A ver, me habías dicho cuarenta más treinta (sic)… cuarenta y tres más ochenta ciento trece más trescientos... a ver si quieres antes de que... bueno ya vi cómo vas haciendo el cálculo o sea primero el cuarenta más el tres y luego el ochenta, obtienes un resultado ese resultado se lo sumas al trescientos y luego ese resultado se lo sumas al cuatro mil ¿cómo decides sumar esos primero y luego el cuatro mil (señalando los números 80 + 3 + 40)?

Aa9- porque para mi forma de pensar sería resolver estos resultados (40 + 3 + 80 =) para apoyarme, así y ya sumando el cuatro mil ya daría el resultado y aparte el resultado de éstos se le suma (el resultado de "los más chicos" se le suma al grande, 4000).

E- ¿Y por qué esos en particular y no empezar por otro lado o por los grandes?

Aa9- Porque se me dificultaría más; porque si yo sumara cuatro mil más ochenta serían cuatro mil ochenta más tres y se me dificultaría ahí porque sería más cuatro mil más trescientos, cuatro mil más tres, cuatro mil más cuarenta, a mí se me dificulta.

E- ¿Podemos comprobar el resultado (4438) con la calculadora?

Aa9- (Ingresa los números a la calculadora)

(No le da el resultado que ella tenía)

E- ¿Qué era?

Aa9- Cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- ¿Qué crees que pudo haber pasado?

Aa9- Que se me dificultó un poquito el cuarenta y el ochenta.

E- Podrías intentarla de nuevo a ver cómo te daría un resultado ¿cómo le podrías hacer?

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:14:34.6

E ¿Te puedo proponer algo? ¿No quisieras ir anotando tus resultados para que no se te olvide lo que vas obteniendo? Si quieres intentarlo así....

Aa9- (Anota 113)

E- A ver, estás anotando ciento trece ¿de qué es ese resultado?

Aa9- De ochenta más tres más cuarenta.

E- ¿Quisieras verificarlo en la calculadora?

Aa9- (Ingresa los números)

E- ¿Qué paso?

Aa9- Lo que sucedió es que sumé mal el ochenta, sumé más veces que lo que era necesario.

E- ¿Cómo?

Aa9- Porque sumé cuarenta más tres que eran cuarenta y tres, y de esos cuarenta y tres sumé ochenta, entonces lo que sucedió es que sumé más de los normales; y lo que sucedió es que me dio ese resultado y después le menos agregué menos de los que tenían que ser y por eso me dio ciento tres.

E- Bueno ahora que tenemos el resultado de ciento veintitrés, ¿quieres intentar tú el cálculo?

Aa9- Se sumaría cuarenta más tres son cuarenta y tres, y de esos cuarenta más tres serían ochenta que serían ciento veintitrés, más trescientos que serían... ya se me dificultó.

E- ¿No te serviría anotar algo para que ayude a tu memoria al cálculo que llevas en la cabeza?

Aa9- (Anota 123 y 300) Serían cuatrocientos entonces serían más cuatro mil, serían cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- Gustas anotar el resultado por favor.

Aa9- (Anota 4,423)

E- Oye aquí veo que les agregas una comita, ¿Qué significa esa comita que les agregas?

Aa9- Es que a mí me han explicado muchas veces los maestros que si no le pongo la coma sería que no se podría identificar, sería que es un número que… no una cifra que es más larga o más corta, para poder identificar que es cuatro mil sería la coma para que se vea que es cuatro mil. Por ejemplo aquí no tiene la coma pero sé que es cuatro mil (señalando el 4000 del ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =) porque tiene tres ceros entonces la coma representa los tres ceros.

E- La coma representa los tres ceros... Ok, vamos al cálculo siguiente. (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

Aa9- (Resolviendo el ítem 4).

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:19:41.1

(Aa9 escribió un resultado parcial de 447 debajo del ítem 4, luego procedió a escribir 6,447).

E- Aquí tenemos una primera cantidad ¿qué significa éste o de dónde sacaste este cuatrocientos cuarenta y siete?

Aa9- Cuarenta más cuatrocientos serían cuatrocientos cuarenta, más siete son cuatrocientos cuarenta y siete. (Aa9 ha sumado hasta ahora el 7 + 400 + 40 del ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

E- Y ya aquí lo anotaste. Aquí veo que hay un seis mil en tu cifra final o un seis por lo menos (refiriéndome al 6 del 6,447 que Aa9 anotó como resultado), ¿ese de dónde salió?

Aa9- Es que, de cuatrocientos cuarenta le sume a seiscientos que son mil, entonces más cinco mil serían seis mil y se le agrega el mil, serían seis mil cuatrocientos cuarenta y siete. (Aa9 aparentemente ha notado que tiene que sumar 400 al 600 y agregar ese resultado de 1000 al 5000, sin embargo, ha pasado por alto que ya el 400 ha sido sumado y que junto con el 600 se ha transformado en un nuevo millar, dejando el orden de las centenas sin unidades, donde se tiene que escribir cero).

E- Entonces este cuatrocientos se lo agregas al seiscientos, ¿cómo decides agregar ese cuatrocientos al seiscientos?

Aa9- Para que no se me dificulte tanto agregar el seiscientos, prefiero saltarme del cuatrocientos cuarenta y siete al seiscientos y después con la siguiente cantidad que sería el cinco mil.

E- para que no se te dificulte… ¿Y en qué te fijas para que no se te dificulte?

Aa9- (----------------) Para que no se me dificulte tanto porque ese problema más o menos tengo sería que el seiscientos tendría una capacidad para que el cinco mil se me dificulte por que serían mil, más cinco mil serían seis mil y en lo que aquí yo veo es que en mi mente tendría primero el cuatrocientos cuarenta y siete y no me podría concentrar en el que sigue (el 5000), entonces me salto al seiscientos para que ya sepa cuánto es y aquí son, es mil, más cinco mil ya serían seis mil, seis mil cuatrocientos cuarenta y siete.

E- Y si ese seiscientos en lugar de seiscientos tuviera otro cero aquí (agregó cero al final del 600 para convertirlo en 6000) ¿Qué harías?

Aa9- Igual lo mismo serían seis mil más cinco mil serían once mil…

E- ¡Ah! pero entonces ya no es lo mismo, ya te sumaste otros (refiriéndome a que ahora el recién formado 6000 se suma al 5000 y da once mil) ¿ahora por qué decidiste sumar esos otros?

Aa9- Porque te fijas en los números para sumarlos, ya serían más complicado… sumar… es más fácil sumar éstos porque ya son miles (el supuesto 6000 y el 5000) y éstos siguen siendo cien (los 400 y el 600). Si sumo estos ya son miles (6000 y 5000) ya no más le sumaria los cien (los otros sumandos de la operación que son el 400 y el 600).

E- ¿Entonces te estás fijando en que sean miles, cienes, para poder elegir dónde empezar a sumar?

Aa9- Sí.

E- Ahora qué te parece si hacemos la comprobación con la calculadora.

(Aa9 ingresa los números a la calculadora, el resultado es diferente de su respuesta).

E- ¿Qué te dio?

Aa9- Seis mil cuarenta y siete.

E- ¿Y cuál era el resultado que tú tenías?

Aa9- Seis mil cuatrocientos cuarenta y siete.

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:23:36

E- ¿Qué crees que pudo haber pasado?

Aa9- Lo que pudo haber pasado fue que a lo mejor yo me confundí con el seis que el seiscientos que sería un cero y nada más el cuarenta y siete que sería un cuarenta y siete lo que me daría y no cuatrocientos cuarenta y siete.

E-Serían cuatrocientos los que te darían y no cuarenta y siete... y no cuatrocientos cuarenta y siete. ¿Pero que pudo haber ocurrido entre los números que te llevó a este cálculo de seis mil cuatrocientos cuarenta y siete?

Aa9- Lo que pudo haber ocurrido es que sumé mal el seiscientos.

E- ¿A qué lo sumaste mal o entre qué lo sumaste mal?

Aa9-Como son cuarenta y siete aquí lo sumé mal acá, entonces serían seis mil cuarenta y siete por eso me dio seis mil cuatrocientos cuarenta y siete.

E- Entonces ¿sumaste mal el seiscientos?... pero aquí lo que yo veo que te sobra, bueno no son seiscientos, yo no veo ningún seiscientos aquí (señalo 6447), pero sí veo un cuatrocientos cuarenta y siete. ¿Qué pudo haber pasado?

Aa9-Lo que pudo haber pasado fue que a lo mejor, fue que a lo mejor yo me guíe por estos números que son cuarenta y siete y me fui hasta el seiscientos que son seiscientos son mil (quizá pensando en el 600 de la operación 600+5000+7+400+4) entonces por eso puse cuatrocientos cuarenta y siete; porque aquí son cuatrocientos más cuarenta son cuatrocientos cuarenta, más siete son cuatrocientos cuarenta y cuatro (sic) entonces, si sumo seiscientos serían mil, más cinco mil serian seis mil.

E- ¿Y ese seiscientos cómo le hace para que se vuelvan mil y se lo sumes al cinco mil?

Aa9- Como son cuatrocientos cuarenta y siete tengo que sumar seis, son cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, que serían mil, más cinco mil serían mil... serían seis mil.

E- Esta parte la entiendo, pero entonces sé que sacas mil ¿de dónde sacaste esos mil?

Aa9- Del seiscientos, del cuatrocientos cuarenta y siete para acá (señala 600) del seiscientos.

E- ¿De dónde salió el mil? No me queda claro todavía. ¿De qué números o cómo le hiciste para obtener un mil?

Aa9- De... (Pensando) si yo sumara seiscientos más cinco mil serían seiscientos... más cinco mil… Serían...

E- ¿Seiscientos más cinco mil cuánto serían?

Aa9-. Cinco mil seiscientos.... cinco mil... seiscientos (bajito pronuncia).

E- Dices “cinco mil seiscientos.... cinco mil más seiscientos...”

Aa9- Serían cinco mil seiscientos (se nota insegura).

E- Si gustas escríbelo.

Aa9 (Escribe 5600)

E- ¿Sí son o no son? ¿Estás convencida?

Aa9- Sí.

E- ¿Y luego? ¿Qué le agregarías?

Aa9- (Escribe 5,6447)

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:27:52

E- Acá es cinco mil seiscientos y luego le agregas...

Aa9- El cuatrocientos cuarenta y siete.

E- ¿Y sí da el mismo número que nos había dado la calculadora?

Aa9- No.

E- ¿Cuál nos había dado la calculadora?

Aa9- Seis mil cuarenta y siete.

Aa9- Cinco mil seiscientos... serían cincuenta seis mil cuatrocientos cuarenta y siete (leyendo 5,6447) Por eso yo le decía que del cuatrocientos cuarenta y siete se sumaba el seiscientos y quedaba mil, más cinco mil, serían seis mil más cuarenta y siete; serían seis mil cuatrocientos cuarenta y siete que ya no se le agregaría el cuatro sino el cero y ya nos quedarían estos cuarenta y siete.

E- A ver repíteme eso ¿Cuéntame cómo me dices?

Aa9- Por eso yo le decía que del cuatrocientos cuarenta y siete más seiscientos daban mil, más cinco mil son seis mil, más cuatrocientos cuarenta y siete son seis mil cuatrocientos cuarenta y siete, aquí ya nada más se le agregaría el cero y ya no se le agregaría el cuatro y ya nada más serían cuarenta y siete.

E- ¿Y el cero de dónde te resulta?

Aa9- El cero resulta de, si yo aquí me salió el seis mil más cuatrocientos cuarenta y siete sería un cero, porque es la regla de tres ceros... entonces…

E- ¿Esa regla de donde aplica o cómo la aplicas?

(A continuación, Aa9 va indicando todos los ceros que nota en los sumandos del ítem 1.4; los dos ceros del 600 y los dos del 400, respectivamente y los tres ceros del 5000.

Aa9- Aquí son tres (ceros), aquí son dos más otros dos son cuatro (ceros) y más éste son cinco; entonces si yo le quito dos (ceros) serían la regla de tres porque aquí son cuatro ceros, cinco ceros, más estos que serían cinco mil, entonces la regla de tres ceros, serían en el cinco mil y en el seiscientos y en el cuarenta y ya no se toman en cuenta los ceros del cuatrocientos.

E- ¿Entonces tú conoces esa regla o te la dijeron los maestros?

Aa9- Aplicado sí, los maestros nos han explicado que se agrega la regla de los tres ceros, entonces si son mil... se agrega la regla de los tres ceros por ejemplo si yo agrego cuatrocientos y arriba tengo mil sería otro cero y entraría la regla de los tres ceros.

E- Ok vamos a seguir con éste (señalo el ítem 9000 + 1700 + 800 + 5).

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:31:33.3

Aa9- (Toma la calculadora, hace un cálculo parece que parcial)

E- A ver, cuéntame cómo le vas haciendo.

Aa9- Primero sumé el cinco más ochocientos que serían ochocientos cinco, más nueve mil son nueve mil ochocientos cinco, entonces aquí lo que voy a sumar sería diecisiete mil (refiriéndose al 1700).

(Aa9 escribe sus cálculos parciales de 805 y de 9,805)

E- ¿Cómo le harías?

Aa9- Sería nueve mil ochocientos cinco, de nueve mil ochocientos cinco se le agregan diecisiete mil... (Pensativa, murmulla diecisiete mil).

E- Ahorita vamos a mantener ese cálculo ahí, a nueve mil ochocientos cinco le quieres agregar diecisiete mil ¿Dónde dice diecisiete mil?

Aa9. Aquí, son nueve mil más diecisiete mil, más ochocientos, más cinco (señalando cada sumando de 9000 + 1700 + 800 + 5 =).

E- ¿Cómo es que sabes que dice diecisiete mil?

Aa9- Aquí es diecisiete más dos ceros son diecisiete mil (lento).

E-Vamos a seguir.

Aa9- (Continua su cálculo)

E- Oye ahora que me dijiste de las comas, me parece importante y estoy notando que yo no agregué comas en mis números ¿dónde crees que en mis números debería haber comas?

Aa9- (Pone comas en cantidades de millares del ítem que son el 9000 y el 1700, quedando 9,000 y 1,700)

E- Sólo ahí agregarías comas, en el nueve mil....

Aa9- (Completa la frase) … Y en el diecisiete... en el mil setecientos (la coma cambio la forma en que Aa9 lee la cantidad de 1700) ... ya me di cuenta de que son mil setecientos.

E- ¿Entonces nos ayudó la coma para darte cuenta? ¿Me podrías ayudar a agregárselas a los demás cálculos?

Aa9- (Escribe las comas correctamente en los millares de los ítems previos que son el 5,000; el 2,000; el 4,000 y el 5,000)

E- Entonces dices ahora que no eran diecisiete mil...

Aa9- Eran mil setecientos. (Aa9 a pesar de leer el 1700 como diecisiete mil, lo operó como mil, separando el 700 para sumar el 1000 al 9000, lo que le dio una cantidad inicial de 10,805).

E- Podemos continuar entonces.

Aa9- (Sigue resolviendo ítem 5)

(Aa9 escribe 10,805)

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:35:06

E- Veo que has puesto diez mil ochocientos cinco, cuéntame.

Aa9- Bueno lo que sucedió fue que me revolví entre que eran diecisiete mil y ahorita que vi, puse la coma eran mil setecientos, entonces yo estaba haciendo el cálculo de diecisiete mil y lo que hice fue borrar ese diecisiete mil y poner mil setecientos (no lo borró, nunca lo escribió quizá se refiere a que mentalmente dejo de pensar en diecisiete mil) y lo que me dio, si yo sumo mil setecientos me dan diez mil, más ochocientos cinco son diez mil ochocientos cinco. Ese es el resultado.

E- ¿Ya no te falta nada?

Aa9- No.

E- Bueno, ahora hacemos una pausa.

Entrevista 10

En la siguiente transcripción se considera E como el entrevistador y Aa10 como entrevistado femenino.

Edad (11,11)

Fechad de nacimiento: 30 de mayo de 2003

Fecha de entrevista: jueves 21 de mayo de 2015.

Duración: 00:15:36

(Ítem 5000 + 300 + 60 + 4 =)

E- ¿Qué números tenemos ahí?

Aa10- Cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- ¿Qué resultado nos da?

Aa10- Nos da quinientos... digo perdón, no da cinco mil más trescientos, son cinco mil trecientos, si le sumamos sesenta son cinco mil trescientos sesenta, más cuatro, cinco mil trescientos sesenta y cuatro.

E- Cuéntame ese cálculo, ¿en qué te fijaste para saber el resultado?

Aa10- Porque primero ocupamos, o sea, mil, después ocupamos cientos, después ocupamos sesenta y cuatro; entonces, pues sería si empezamos con mil, serían cinco mil trescientos o sea, de acuerdo a como está aquí, sesenta y ya nada más le sumamos el cuatro. (Aa10 cuando dice "de acuerdo a como está aquí" probablemente se refiere a calcular de acuerdo al orden en que se presentaron los sumandos de este ítem, primero las unidades de millar, luego las centenas, decenas y unidades).

E- ¿Lo puedes escribir?

Aa10- (Escribe 5364)

E- Pasamos a la que sigue. ¿Qué números tenemos? (Ítem 2000 + 80 + 2 =)

Aa10- Tengo el dos mil, y el ochenta y el dos.

E-Cuéntame...

Aa10- Voy a hacer una aquí una operación porque pues aquí ya no hay cienes (refiriéndose a la operación 2000 + 80 + 2 =; Aa10 escribe un algoritmo vertical).

E- ¿Porque ahí ya no tienes cientos (en 2000 + 80 + 2 =), entonces elegiste hacer esta operación (el algoritmo vertical)?

Aa10- Sí. Son dos mil ochenta y dos.

E- Y sin haber hecho esta operación (señalo el algoritmo vertical) ¿crees que habrías hecho el cálculo como el que hiciste arriba (refiriéndome al procedimiento que usó para el ítem 1.1, de respetar el orden de cada sumando)?

(A continuación, Aa10 pone un ejemplo sobre el ítem 5000 + 300 + 60 + 5 =, en el que se imagina que quita el 300 para que quede con una forma similar al ítem 2000 + 80 + 2 =; en ambos ítems, el imaginado y el 2 faltaría el orden de las centenas).

Aa10- Sí, es lo mismo; pero aquí ya no estamos utilizando los cientos entonces sería aquí cinco mil sesenta y cuatro (señala ítem 1 y se figura que no hay 300 en la operación para poder dar este ejemplo, como si le quitáramos los 300). Pero como a veces te puedes confundir preferí hacer la operación para estar más segura.

E- ¿Qué te pudo hacer confundido en una operación así?

Aa10- Que no hay cientos y no es igual que la de arriba. (Aa10 dice que el ítem 2 no es igual al ítem 1)

E- Aquí yo veo que tú ocupas un cero en tu resultado ¿cómo sabes que ahí va un cero? (Refiriéndome a su resultado 2082)

Aa10- Porque ahí a la hora de hacer la suma (su algoritmo vertical) pues bajé el cero.

E- Pero tú hace rato me habías dicho que no había cientos, ¿tiene que ver con eso este cero?

Aa10- Sí, porque este lugar ocuparía el de cientos... y si hubiera sido cien, pues este lugar lo habría ocupado el cien el del cero.

E- Vamos a la que sigue. (Ítem 300 + 400 + 80 + 3 + 40 =)

Aa10- (Aa10 dice en voz baja) Trescientos... pues ahora está todo revuelto, ya no está como en este orden (señala los ítems 1 y 2 donde se respeta el orden decreciente, de mayor a menor, de las unidades de millar, centenas, decenas, unidades); entonces aquí son cuatro mil trescientos... ochenta y cuarenta son ciento veinte... estos dos lo que voy a hacer es pone aquí (debajo de la operación) ciento veinte.

E- Un ochenta y un cuarenta, pones abajo el ciento veinte.

Aa10- Ajá (continúa resolviendo).

(Pausa)

Aa10-...Porque son cientos, entonces aquí el trescientos va el ciento veinte... (Escribiendo algoritmo vertical)

E- Si lo pudieras hacer sin este cálculo cuánto te daría... ¿Trescientos con ciento veinte?

Aa10- Bueno trescientos con ciento veinte serían cuatrocientos veinte… entonces aquí son cuatro mil cuatrocientos veintitrés.

E- … Cuatrocientos veintitrés

Aa10- Aquí son cuatro mil cuatrocientos veintitrés (escribe su resultado 4423).

E- Cuéntame un par de cosas, aquí tú unes con una línea el ochenta y el cuarenta (señalo los trazos que ha estado realizando en el ítem 3) ¿En qué te fijas para unirlos así?

Aa10- Para que sea más fácil. Me estoy fijando en esta operación (señala el ítem 1) para obtener un número de cientos que sea más fácil sumarlo, pues primero sumé los cientos para dar el resultado. Por decir, que aquí ya me dio los cuatrocientos veinte y luego ya lo ocupo como si fuera un ciento (Aa10 ha sumado entonces el 80 y el 40, que le han dado 120 y ve la necesidad de integrarlos en un solo resultado con el 300, para obtener cientos).

E- Oye yo veo que aquí teníamos un ochenta y un cuarenta que no aparecen aquí (señalo el resultado) ¿qué pasó con ellos?

(Pausa)

E- Aquí por ejemplo (señalo ítem 5000 + 300 + 60 + 4) yo veo un trescientos (señalo el trescientos) y aquí puede aparecer (señalo el tres de 5364) ...

Aa10- ¡ah... ya sé!

E- Aquí tengo el ochenta y aparece el ochenta (señalo el 80 del ítem 2000 + 80 + 2 y el 8 en el resultado 2082) pero aquí ni el ochenta ni el cuarenta aparecen (en el ítem 300 + 4000 + 80 + 3 + 40 =, el en resultado 4423 el 80 y el 40 se han transformado en una nueva decena) ¿qué crees que paso?

Aa10- Los sumé, entonces se juntaron y dieron otro número o sea dieron otro resultado y por eso ya no está ni el ocho ni el cuatro.

E- ¿Y cómo decidiste ochenta y cuarenta que los tienes que sumar para que te den otra cosa?

Aa10- Los sumé para que me pueda dar cientos... son números y para que me pueda ya dar cientos fuera más fácil por eso lo hice así.

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:07:29.5

E- ¿En qué momento te da cientos o ya sabemos que llegamos a cientos?

Aa10-Pues cuando te da cien o más de cien.

E- Pasamos a la que sigue. (Ítem 600 + 5000 + 7 + 400 + 40 =)

Aa10- Aquí voy a hacer los mismo, tenía estos dos y son seiscientos más cuarenta, me darían cuarenta… (Escribe 1000 debajo de la operación o ítem.4) Aquí son seis mil cuarenta y siete (escribe 6,047).

E- Oye ¿qué pasaría si no estuviera esta coma? (Señalo la coma en su escritura de 6,047)

Aa10- Para una persona es más fácil identificar cuando hay una coma de que son mil. De hecho, en el primero yo pensé que eran quinientos (señala ítem 1.1) porque lo ceros te pueden engañar si los ves de lejos. En cambio, si te fijas en la coma pues dices luego luego, que son cinco mil porque pues eso marca que sean mil en cambio si nada más ponemos ceros nada más se ve así y es más difícil identificar a primera vista si son quinientos o si son cinco mil.

E- Ok, entonces para eso usas tú las comas.

E- ¿Cómo decidiste que este cero va aquí? ¿Este cero qué significa? (señalo el cero de 6,047)

Aa10- Significa que ahí va el lugar de los cientos.

E- ¿Oye aquí tenemos cientos no (señalo la operación 600 + 5000 + 7 + 400 + 40, las centenas)?

Aa10- Sí.

E- Y aquí ya no aparece (señalo el resultado) ¿qué fue lo que pasó?

Aa10- Al sumarlo me dio mil, entonces pues ya le sumé mil a cinco mil; me dio igual a seis mil.

E- Ok pasamos a la que sigue. (Ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 =)

Aa10- (En voz baja va diciendo los números y empieza a escribir el algoritmo vertical)

E- ¿Podrías intentar hacerlo sin este tipo de cálculo?

Aa10- Pues sí pero sería más difícil.

E- A ver vamos a intentarlo ¿cómo lo harías?

Aa10- Primero me voy por los números más grandes, nueve mil y mil setecientos. Nueve mil más mil son diez mil, le sumamos los setecientos son diez mil setecientos...

E- Que es lo que anotaste aquí (señalo debajo del ítem 1.5 donde Aa10 ha anotado el resultado parcial 10,700 y debajo de éste ha anotado un 800).

Aa10- Ajá.

Aa10- Más ochocientos (calcula mentalmente) ... ¿dije diez mil setecientos? ya me hice bolas... (Ríe) son diez mil setecientos y setecientos más ochocientos (cuenta con dedos) … son once mil quinientos cinco.

E- Once mil quinientos cinco. ¿Podrías escribir tu resultado?

Aa10- (Anota 11, 505) De ese sí no estoy tan segura (va dictándose el número en voz baja).

E- ¿Qué parte te hace sentir insegura?

Aa10- A la hora de sumar setecientos y ochocientos me confundió porque pues me confundí en sumar setecientos más ochocientos, entonces a la hora de estar sumando y acordándote de qué número tenías antes eso es lo que te hace que te revuelvas que digas qué número es el que tenías primero.

E- ¿Estás segura de que es ese número? (Refiriéndome por número a su resultado 11,505)

Aa10- ¿Que es once mil quinientos cinco?... Sí.

E- Oye un niño me dijo que él no podía escribir aquí el cinco (señalo el último cinco de 11,505) al final por que este cero antes del cinco no valía (señalo el cero de las decenas) ¿qué piensas de lo que él me dijo? su resultado era once mil quinientos cincuenta.

Aa10- ¿Por qué el cero antes de cinco?...

Tiempo transcurrido hasta este punto de la entrevista- 0:12:33.4

Aa10-Pues bueno para mi yo digo que está mal, que cinco si yo lo compruebo con la calculadora me da ese resultado (toma la calculadora e ingresa los números de la operación 9000 + 1700 + 800 + 5 = 11,505). Me dan igual a once mil quinientos cinco.

E- Como a ti te salió. ¿Entonces tú que piensas que ese niño estaría pensando o qué pasa?

Aa10- Que confundió al poner el cinco; revolvió estos dos números el cero y el cinco y a la hora de ponerlos (señala el 0 y 5 de su resultado) pues puso aquí el cinco y aquí y el cero... a lo mejor sucedió eso.

E- Puede ser que lo revolviera, pero él sí me aseguraba que aquí no valía el cero (señalo el 0 de 11,505).

Aa10- Pues no sé.

E- ¿Tú que piensas? ¿Vale no vale?

Aa10- Pues el cero debe estar aquí porque si quito el cero serían once mil cincuenta y cinco entonces si no valiera el cero, pues sería otro resultado y el cero en este momento pues sí vale porque el cero está respetando el número por decir si aquí le pongo un seis ya sería el sesenta y cinco. El cero está marcando o sea para que pueda dar otro resultado.

(Aa10 está pensando en que el este caso del ítem 9000 + 1700 + 800 + 5 el cero del resultado 11,505 debe de ir porque está “respetando” el número que salió y no otro como lo sería el mismo ejemplo que da que fuera 60 + 5 = 65).

E. ¿Qué es lo que respeta el cero?

Aa10- Es lo que hace que dé otro resultado y que no sea…

(Interrupción breve)

E- ¿El cero evita que te dé otro resultado?

Aa10- Sí.

E- ¿Algo más que quieras agregar de esto?

Aa10- No. Primero es que los números son confusos, aunque sean sencillos, algunas veces. Primero dudé de mis resultados, pero después los confirmé.

Anexo B: Carta de invitación

Estimado(a) Señor(a):

Introducción/Objetivo:

La Facultad de Psicología, de la Universidad Autónoma de Querétaro está realizando un proyecto de investigación. El objetivo del estudio es conocer a detalle conocimientos de niños de sexto grado acerca del sistema de numeración decimal. El estudio se está realizando en la escuela xxxxxxx, del municipio de Corregidora, Querétaro.

Procedimientos:

Como parte de su participación en el estudio le pedimos nos permita tomar fotografías/videograbación de su hijo/hija, con objeto de obtener datos sobre los procedimientos y justificaciones que ofrecen los alumnos al resolver problemas matemáticos. En las fotografías/videograbación que tomaremos no aparecerá el rostro del alumno, sólo su voz y las anotaciones que elaboré en la hoja de respuestas. Las fotografías/videograbación se utilizarán para fines de investigación educativa.

Beneficios: Usted no recibirá un beneficio directo por las fotografías/videograbación que se le tomarán, sin embargo, si usted acepta que su hijo/hija participe, estará colaborando con el Universidad Autónoma de Querétaro para contribuir a ampliar el conocimiento sobre las condiciones de enseñanza y aprendizaje escolar.

Confidencialidad: Su nombre siempre será confidencial, ya que no se mencionará en las fotografías/videograbación. Tampoco aparecerá en los documentos relacionados al proyecto, ni en la exposición/publicación de las mismas. Las fotografías/videograbación original las conservará el investigador responsable en un lugar seguro.

Riesgos Potenciales/Compensación: No hay riesgo alguno ya que no podrá ser identificado(a) en las fotografías/videograbación. Usted no recibirá ningún pago por permitirnos tomar las fotografías/videograbación, y tampoco implicará algún costo para usted.

Participación Voluntaria/Retiro: Su participación es totalmente voluntaria. Es decir, Usted no está obligado(a) a permitir que se le tome una fotografía. Tiene todo el derecho de negarse a participar y esta decisión no le traerá consecuencia alguna.

Números a Contactar:

Si usted tiene alguna pregunta, comentario o preocupación con respecto al proyecto, por favor comuníquese con el/la investigadora responsable del proyecto:

Olivia Avalos Esparza al siguiente número de teléfono (xxx), en un horario de 9:00 am a 12:00 pm.

Si usted acepta participar en el estudio, le entregaremos una copia de este documento que le pedimos sea tan amable de firmar.

Nombre del participante (escribir el nombre del niño o niña que ha de participar): ____

Fecha:

____

Día / Mes / Año

Firma: __________________________

Nombre y firma de la persona que da el consentimiento (padre/ madre/ tutor)

Fecha:

____

Día / Mes / Año

Yo, el Sr./Sra.____ en mi calidad de

Padre/madre/tutor del alumno____

del grupo de sexto (A) (B), ofrezco mi permiso para que mi hijo/hija participe en la investigación cuyos detalles he leído y acepto.