Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Psicología
Maestría en Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas

PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS ESCOLARES EN EL CONTEXTO DE COMPRA-VENTA EN NIÑOS DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Maestra en Aprendizajes de la Lengua y las Matemáticas

Presenta:
María del Carmen Ortiz Flores

Dirigido por:
Dra. Diana Violeta Solares Pineda

SINODALES

Dra. Diana Violeta Solares Pineda
Presidente
Firma

Dr. David Francisco Block Sevilla
Secretario
Firma

Dra. Avenilde Romo Vázquez
Vocal
Firma

Dra. Gabriela Calderón Guerrero
Suplente
Firma

Mtro. Zorobabel Martiradoni Galindo
Suplente
Firma

M.D.H. Jaime Eleazar Rivas Medina
Director de la Facultad de Psicología

Dr. Irineo Torres Pacheco
Director de Investigación y Posgrado

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Octubre de 2014
México

RESUMEN

Este trabajo de investigación explora las relaciones entre problemas aditivos planteados en el contexto de la compra-venta y los procedimientos de resolución de alumnos de segundo grado de primaria. Para ello se recurre a dos vías de indagación: 1) se identifican los procedimientos de resolución que presentan 10 alumnos de segundo grado al resolver problemas aditivos en una simulación de compra-venta y, 2) se realiza un *análisis previo* de los problemas aditivos en contexto de compra-venta que propone el libro de texto gratuito de segundo grado. El análisis de las características semánticas y numéricas de los problemas aditivos se apoya en la Teoría de los Campos Conceptuales; mientras que la revisión de las condiciones didácticas en las que se plantea un problema matemático se apoya en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Para analizar las características contextuales de los problemas y su posible incidencia en los procedimientos de solución de los alumnos, se consideran estudios psicogenéticos sobre las nociones de los niños en torno al dinero y la compra-venta; a su vez, esos estudios son una referencia para identificar conocimientos en torno al dinero y compra-venta que los alumnos de la muestra ponen de manifiesto. Los resultados obtenidos ponen en evidencia que los alumnos de segundo grado recurren a procedimientos convencionales y no convencionales, siendo estos últimos los predominantes. Los procedimientos identificados tienen relación con las características semánticas, numéricas y contextuales de los problemas aditivos; son estos tres tipos de características los que determinan la complejidad de un problema. La consideración de tales características por parte de los docentes es fundamental para tomar decisiones didácticas que favorezcan aprendizajes con sentido por parte de los alumnos.

Palabras clave: Educación Primaria, Didáctica de las Matemáticas, Problemas Aditivos, Contexto de Compra-Venta.

ABSTRACT

This research paper explores the relations between additive problems posed in the context of buying and selling and the resolution procedures of second grade elementary students. Two inquiry routes are followed: 1) the resolution procedures of 10 second grade students when presented with additive problems in a buy-sell simulation are identified, and 2) a *previous analysis* of the additive problems in a buy-sell context proposed by the second grade free textbook is carried out. The analysis of the semantic and numeric characteristics of the additive problems is based on the Theory of Conceptual Fields; whereas the review of the didactical conditions where mathematical problem is presented is based on the Theory of Didactical Situations. In order to analyze the contextual characteristics of the problems and their possible incidence on the students' solution procedures, psychogenetic studies on the notions of children about money and buy-sell activities are taken into account. In turn, those studies are a reference for identifying the knowledge about money and buy-sell activities that the students in the sample reveal. The results obtained highlight that second grade students resort to conventional and non-conventional procedures; the latter are predominant. The procedures identified are related to the semantic, numeric and contextual characteristics of the additive problems; these three types of characteristics are the ones that determine the complexity of the problem. That teachers take into account such characteristics is essential to make the didactical decisions that enhance learning processes that are meaningful for the students.

Key words: Elementary Education, Mathematics Education, Additive Problems, Buy-Sell Context.

A la educación escolar de nuestro país, con todos sus matices y actores,

porque sigo creyendo en ella.

Para la elaboración de esta tesis se contó con el apoyo de una beca del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

AGRADECIMIENTOS

“Las palabras nunca alcanzan cuando lo que hay que decir, desborda el alma”

Julio Cortázar

Faltan palabras para agradecer a la vida y a Dios procesos como el que representa esta tesis, momentos en los que uno sabe que ha crecido, que ha cambiado, que es otro. Esta tesis compromete a una docente a seguir luchando por la educación de su país, a ir buscando las “maneras adecuadas” de promover aprendizajes con sentido en sus alumnos —casi hijos—, a compartir con sus colegas sus experiencias y escucharse mutuamente para seguir aprendiendo juntos.

Sé que este proceso de investigación, y el compromiso que de él surge, ha estado apoyado en muchas personas sin las cuales este logro habría sido impensable. Agradecer a cada una de ellas no será posible a través de estas letras porque éstas no son suficientes para tantos nombres y para representar mis más sincero: GRACIAS.

Especialmente quiero agradecer a algunas personas claves en la construcción de este estudio. En primer lugar mi profundo agradecimiento a la Maestra Diana Solares, y lo digo así: Maestra, porque es este “título” el que lleva en el alma: maestra, profesora, docente. Gracias **Dra. Diana Solares** porque detrás de la construcción de esta tesis, permitiste y apoyaste que mis preocupaciones docentes estuvieran presentes. Gracias porque esta tesis se construyó desde lo humano, más allá que únicamente lo académico; por tu paciencia, siempre suficiente, tus correcciones más que eficaces y tu ejemplo por dar siempre más de lo que nos corresponde.

Gracias infinitas a la mirada cautelosa, prudente y certera del **Dr. David Block, Dra. Avenilde Romo, Dra. Gabriela Calderón y Mtro. Zorobabel Martiradoni**, siempre presentes

no sólo al final de esta tesis, sino durante todo el transcurso de su construcción. Sin lugar a dudas sus observaciones ayudaron a enriquecer este documento, sus palabras, ideas y aportaciones están tejidas entre las mías, no puedo decir que esta tesis es sólo mía, es también de ustedes. Sobre todo quiero agradecerles porque su actitud de colaboración, respeto y profesionalismo me han ayudado a construir otra parte fundamental de mi identidad como investigadora. Espero seguir sus pasos.

A todos los miembros de la Maestría en Aprendizajes de la Lengua y las Matemáticas por su entrega y profesionalismo que hace de esta maestría un posgrado de calidad. Sobe todo agradezco a la **Dra. Karina Hess** por su actitud siempre pendiente y atenta, por hacer lo que le corresponde —y más— con calidad, humanidad y corazón. A mis amigas y compañeras de generación, las ahora Maestras **Ana Forzán, Cynthia Maldonado, Elissabeta Migni y Laura Bonilla**, por los momentos de desequilibrios compartidos que nos hicieron construir y aprender tanto, por el gusto que da saber que la vida te cruza con excelentes personas. Sobre todo, gracias a ti **Laura**, por compartir más allá de la fecha de cumpleaños, por compartir tan de cerca este proceso de crecimiento, siempre te lo dije: admiro tu capacidad de equilibrar tu vida en lo profesional, laboral y familiar, gracias amiga porque a tu lado aprendí y crecí mucho.

A **Érika Padilla** quien preocupada por tener elementos que ayuden a comprender las maravillas que han aprendido los niños más allá de la escuela, construyó una hermosa investigación, sobre todo gracias porque este andar de la tesis nos permitió acompañarnos con cariño y comprensión, aún ante la distancia, hasta poder poner ese esperado punto final.

Mi sincero agradecimiento al **Profr. Valentín García** y a la **Profra. Angélica Rodríguez** por su apertura y contribución a este trabajo de Tesis, por sus atenciones para realizar las

entrevistas de esta investigación. Gracias a cada uno de los niños de segundo grado que participaron en ellas y que permitieron maravillarme con sus respuestas creativas e inteligentes.

Al escritor y amigo **Eduardo Garay** y la **Dra. Araceli Rodríguez** gracias por su lectura y recomendaciones de estilo en algunos momentos del proceso de esta tesis.

A todos mis **amigos y familia que son colegas** y que siguen creyendo en la educación como motor de transformación. A los que como yo, día a día llegan al aula a dar lo mejor de sí, aún ante nuestras deficiencias personales y profesionales –y las grandes deficiencias de nuestro sistema educativo-. Deseo de todo corazón que el objetivo personal de esta tesis sea cumplido: “enriquecer” nuestra mirada para comprender una pizca más del laborioso trabajo que está en nuestras manos y las maravillas que nos permiten ver nuestros alumnos.

Por último, gracias a mi familia. A **mis padres Dulce y Sergio** porque este grado académico muestra no sólo el esfuerzo de tres años, habla del esfuerzo de una vida que comenzó así: luchando por vivir, y ustedes como en aquel tiempo hoy siguen a mi lado. Gracias a mi madre por su apoyo constante, por no cansarse de recordarme que debo seguir dando lo mejor de mí, aún cuando desistir parece más fácil. A mi **hermano Israel y su familia** por su apoyo constante y su presencia prudente. A mis hermosas sobrinas **Marifer y Natalia** por hacerme jugar y reír cuando los problemas aditivos ya llenaban mi cabeza y a **Emiliano** por jugar con nosotras desde el cielo.

Gracias a todos, amigos y familia, los que sus nombres están escondidos detrás de esta líneas, por su apoyo, su paciencia y compartir la felicidad de este logro.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas suele vincularse de manera directa a la resolución de problemas. Diversas perspectivas de la educación matemática afirman, incluso, que es resolviendo problemas como los alumnos construyen determinados conocimientos matemáticos. Resolver problemas es, por lo tanto, el centro de la actividad matemática (Charnay, 1994).

Otro planteamiento que parece tener una presencia fuerte en el medio escolar, es asumir que entre más próximas sean las matemáticas escolares a la vida cotidiana, mayores posibilidades habrá de que los conocimientos matemáticos sean accesibles para los alumnos. En ese sentido, recurrir a contextos “familiares” como el de la compra-venta y el uso del dinero parece ser una práctica recurrente.

Como docente de educación primaria he procurado que mis alumnos construyan conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas, atendiendo así a los planteamientos curriculares que guían la enseñanza matemática en la educación básica. Asimismo, procuro apoyarme en situaciones que les resulten familiares con el propósito de que los alumnos puedan comprender con mayor facilidad las relaciones matemáticas implicadas en las situaciones que les planteo. Sin embargo, me he percatado de algunas dificultades que los alumnos ponen de manifiesto al enfrentar ciertos problemas matemáticos, por ejemplo no saber elegir la operación que resuelve un problema o no comprender cuál es el dato por el que se pregunta. Ello me ha motivado a analizar esas dificultades y los problemas matemáticos en sí mismos: ¿qué hace que un problema sea más complejo que otro?, ¿por qué son recurrentes ciertos errores y dificultades?, ¿qué contextos de la vida cotidiana son los más adecuados para abordar ciertos contenidos matemáticos?

Las preguntas anteriores tuvieron una relevancia particular en mis prácticas de enseñanza en segundo grado de educación primaria. En este grado escolar se enfatiza la resolución de problemas de tipo aditivo[1] procurando el abordaje de una variedad de significados de la suma y resta y el acceso al cálculo por medio de los algoritmos convencionales.

El libro de texto gratuito de segundo grado presenta varios problemas aditivos evocando actividades de compra-venta o actividades en las que se usa el dinero. Al parecer, ese contexto permitiría a los niños comprender más fácilmente las relaciones implicadas en los problemas. Sin embargo, ante las dificultades y errores que mis alumnos seguían presentando, me pregunto hasta dónde ese contexto ayuda a la comprensión del problema y qué tan familiarizado estará un alumno de segundo grado con las prácticas de compra-venta. Por otro lado, me cuestiono cuáles de esas dificultades son independientes del contexto y tienen que ver más bien con las características de los problemas aditivos que se abordan en segundo grado.

Con el apoyo de algunos planteamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), de la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) y de otras investigaciones que desde la didáctica de las matemáticas abordan los problemas aditivos (por ejemplo, Puig y Cerdán, 1990), decidí indagar las preguntas anteriores. A partir de la consideración de ciertas características de los problemas aditivos, analizo los procedimientos de resolución que se ponen en marcha –o que son susceptibles de ponerse en marcha– en dos tipos de situaciones didácticas: en una simulación de compra-venta y en problemas verbales tomados del libro de texto gratuito.

La estructura de la tesis es la siguiente:

[1] Vergnaud (1991) señala que los problemas aditivos son caracterizados por guardar relaciones aditivas y su solución se da por sumas y/o restas.

En el capítulo 1 describo la problemática que da lugar a esta investigación. Ubico primero el papel de los problemas aditivos en la educación primaria, para después dar cuenta de las dificultades que he identificado en mis alumnos al enfrentar problemas aditivos en contexto de compra-venta. Con base en ello enuncio las preguntas y los objetivos de esta investigación.

En el segundo capítulo presento la fundamentación teórica que sustenta este trabajo. Abordo categorías principalmente de la TSD y de la TCC, que fungen como criterios para analizar los problemas aditivos. Al ser el contexto de compra-venta y el uso del dinero parte del objeto de investigación, recurro a algunos estudios de corte psicogenético que enriquecen los criterios de análisis de los problemas aditivos. Por último, hago alusión a ciertas investigaciones que dan cuenta de la presencia del dinero como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas.

El recorrido metodológico y las decisiones tomadas para abordar el objeto de estudio las presento en el capítulo 3. Explicito ciertos planteamientos de la Ingeniería Didáctica que dan sustento a las decisiones metodológicas de este estudio. Asimismo, describo las herramientas y criterios empleados para analizar cada uno de los dos tipos de situaciones didácticas que se abordan en esta tesis: la actividad simulada de compra-venta y los problemas aditivos del libro de texto.

En el capítulo 4 presento los resultados de la implementación de una actividad simulada de compra-venta en la que participaron 10 alumnos. Estos resultados son de dos tipos: 1) los conocimientos sobre el dinero y la compra-venta que fueron identificados en los alumnos entrevistados; 2) los procedimientos de resolución que estos alumnos llevaron a cabo al enfrentar ciertas tareas de compra-venta. Los resultados de los conocimientos sobre el dinero y compra-venta se presentan antes del análisis de los problemas del libro de texto, ya que los datos de la actividad simulada sirvieron como herramienta de análisis para observar el papel del contexto en dichos problemas.

En lo que se refiere al análisis de los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto, se retoman los criterios de análisis expuestos en la metodología, posteriormente se hace un análisis general de siete lecciones que proponen problemas aditivos en contexto de compra-venta y, finalmente, se presenta un análisis exhaustivo de cinco problemas. Los resultados de dicho análisis se presentan en el capítulo 5.

Por último, pongo a consideración las conclusiones a las que arribo al desarrollar este trabajo; retomo las preguntas de investigación y las pongo en relación con los resultados encontrados. Asimismo, planteo reflexiones y nuevas preguntas que emanan de la realización de esta investigación.

Capítulo 1
Problemática

1.1 Problemas Aditivos en Educación Primaria

Cuando se habla de la enseñanza de las matemáticas escolares sin duda alguna se asocia directamente con la actividad de resolver problemas. El mismo plan de estudios y los programas de matemáticas para la educación primaria de nuestro país subrayan, entre las diversas competencias y conocimientos a desarrollar en los alumnos, que ellos "resuelva problemas de manera autónoma" (Secretaría de Educación Pública, 2012).

Una de las necesidades que he experimentado como docente ante el planteamiento anterior, es contar con criterios para elegir problemas matemáticos que efectivamente promuevan el trabajo autónomo por parte de los alumnos. ¿Cuándo decimos que estamos ante un "buen problema"?, ¿qué entendemos por "un buen problema matemático escolar"?

La noción de "problema" ha ido modificándose gradualmente en el ámbito de la educación matemática. En lo que habitualmente se denomina "formas tradicionales de enseñanza", los problemas son concebidos como situaciones que requieren la aplicación de un mecanismo anteriormente aprendido y practicado por los alumnos (Ávila, Aguayo, Eudave, Estrada, Hermosillo, Saucedo y Becerra; 2004). Esto ha llevado a los docentes a centrar el interés en que los niños aprendan los algoritmos de las operaciones básicas para después aplicarlos en la resolución de problemas. Desde la perspectiva de la "escuela activa" según especificaciones de Charnay (1994) se entiende a los problemas como las situaciones en los que los niños resignifican sus conocimientos construidos desde situaciones de su vida, siendo estas situaciones fundamentales para la construcción de herramientas y conocimientos matemáticos. Sin embargo, señala el mismo autor, que las situaciones "naturales" que los niños viven, continuamente son complejas y dependientes de lo "ocasional" lo que dificulta poder construir algunos conocimientos. Estas dos perspectivas –"enseñanza tradicional" y "enseñanza de la escuela activa" dejan a un lado aspectos que se pudiera decir determinan un "buen problema" lo cual implica considerar su dimensión matemática y cognitiva simultáneamente. En otras palabras, un buen problema matemático no es sólo un planteamiento matemático de una situación con datos e incógnita sino además es "bueno" porque reta y moviliza los recursos matemáticos de los niños.

Esa última manera de concebir un "buen problema" es tomada en cuenta dentro de la didáctica de las matemáticas por la perspectiva que puede denominarse como "aprendizaje a través de problemas" (Charnay, 1994) la cual plantea que es por medio de los propios problemas que los alumnos se enfrentan a la necesidad de construir conocimientos matemáticos que les permitan resolver el reto planteado.

En mi práctica docente he procurado ser congruente con esa última perspectiva; he tratado de plantear a mis alumnos problemas que efectivamente contribuyan a la construcción de conocimientos matemáticos. Particularmente siendo profesora de segundo grado de primaria, grado en el cual los problemas aditivos ocupan un espacio relevante en el programa escolar, me di a la tarea de seleccionar situaciones y recursos didácticos que contribuyeran al aprendizaje acerca del reconocimiento de los problemas que implican la suma y la resta –con ello promover el aprendizaje de los diversos significados de estas operaciones- y del desarrollo de técnicas para resolverlas.

Esa búsqueda me ha llevado a plantear, ante cada situación didáctica, preguntas como las siguientes: ¿esta situación será adecuada para los conocimientos previos de mis alumnos?, ¿será lo suficientemente compleja?, ¿en qué contribuye para la construcción de los conocimientos sobre la suma y la resta?

Las preguntas anteriores cobran mayor relevancia cuando me encuentro con dificultades y errores que parecen ser comunes en varios de mis alumnos, por ejemplo: la aplicación directa de un algoritmo sin comprender las relaciones del problema, dificultades para identificar la operación que resuelve el problema, establecer relaciones equivocadas entre los datos, entre otros. Tales dificultades me plantean la necesidad de analizar con mayor cuidado los procedimientos de los alumnos y de indagar qué relación hay entre esos procedimientos y las características de los problemas que les planteo.

Añado a lo anterior mi preocupación de que los conocimientos matemáticos que mis alumnos aprenden en la escuela, les sean útiles también en su vida cotidiana. De hecho, el mismo programa de estudio de la Secretaría de Educación Pública (en adelante, SEP) plantea que "la formación matemática que permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana depende en gran parte de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica" (SEP, 2012, p.75).

Con base en ese planteamiento, procuro proponer a mis alumnos problemas aditivos cercanos –desde mi perspectiva- a sus contextos cotidianos, bajo la premisa de que así podrían identificar, con mayor facilidad, las relaciones entre los datos y, en consecuencia, la operación que resuelve el problema. Cabe matizar que algunos contextos "cotidianos" aunque conocidos no son sencillos de resolver, por lo cual algunos alumnos pudieran presentar las dificultades que se mencionarán en el siguiente apartado.

Recurrir a contextos y situaciones familiares es una tendencia que he identificado tanto en los materiales curriculares en los que nos apoyamos los profesores, como en nuestras prácticas de enseñanza. Uno de los contextos más recurrentes en los que se plantean los problemas aditivos, es la compra-venta y otras situaciones que implican el uso del dinero.

Aún cuando es uno de los contextos que parecen ser más factibles para abordar el estudio de problemas aditivos, dada la familiaridad que los alumnos podrían tener con este, en mi práctica docente me he enfrentado a ciertas dificultades, de las que hablaré enseguida.

1.2 El Contexto de Compra-Venta y el Uso de Dinero en Problemas Aditivos. Dificultades en el Aula

Tanto la compra-venta como el uso del dinero se hacen presentes en una actividad que parece ser común en las aulas de la escuela primaria: “La tiendita”. Se trata de una situación en la que se compra y se vende en una tienda simulada. Uno de los propósitos de esa simulación, es aprovechar la compra-venta para que los alumnos resuelvan situaciones que implican a la suma y a la resta. Cuando he implementado esta actividad, suele suceder que la mayoría de los niños se muestran interesados, se inmiscuyen en la tarea y se enfrentan a los problemas que se les plantean.

También he identificado que a los alumnos se les posibilita desempeñar con mayor facilidad el papel del comprador que el del vendedor. Teniendo como parámetro mi experiencia personal y las observaciones de las prácticas de algunos colegas, he de mencionar que en la implementación de esta actividad, la mayoría de las ocasiones los alumnos juegan el rol de compradores. Las escasas ocasiones en que he asignado a mis alumnos el papel de vendedores, varios de ellos tienen dificultades para determinar el "cambio", esto es, para devolver al "cliente" la diferencia entre lo que se cobra y lo que se paga. Ante ello me pregunto ¿Qué conocimientos les falta por aprender por lo cual la situación como vendedor les es difícil?, ¿qué tanta familiaridad tienen los alumnos con prácticas de venta?, ¿la misma situación de "La tiendita" les permitirá superar esas dificultades?

Además de la situación de "La tiendita" el contexto de la compra-venta y el uso del dinero tienen una presencia fuerte en los problemas aditivos que propone el libro de texto gratuito de segundo grado de la SEP. Como se mostrará en el capítulo 5, de 12 lecciones que presentan problemas aditivos, más de la mitad de ellas (7 de 12) se contextualizan en la compra-venta y el uso del dinero.

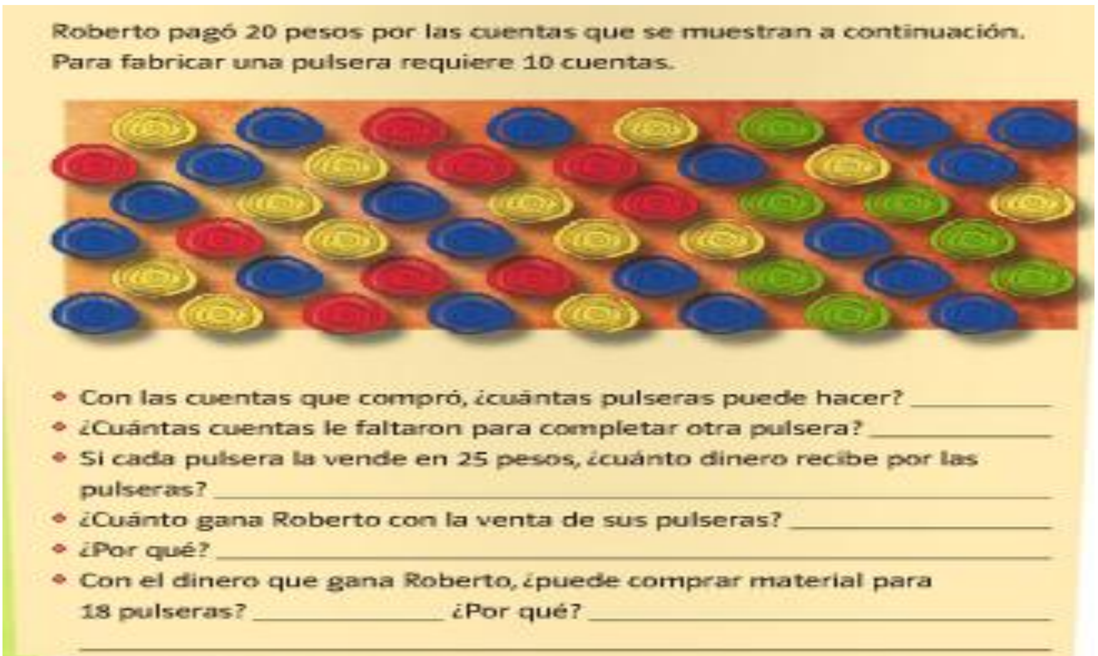
Al abordar en el aula varios de esos problemas aditivos, mis alumnos ponían de manifiesto ciertas dificultades; particularmente les resultaba difícil resolver aquellos problemas en los que el dato desconocido se encuentra en el primer o segundo sumando y no en el total. Por ejemplo: "Esther compró un oso que costaba 25 pesos. Su papá le dio 14 pesos para que pudiera completar. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Esther?" (SEP, 2012, p. 89)

Otras dificultades que manifestaron los alumnos fue el uso de dinero simulado (de papel) que proporciona el mismo libro de texto (material recortable). En la lección número 16 (SEP, 2012, P.62), los niños debían calcular el monto del dinero sobrante al tener \$275 y pagar \$215 por la compra de unos zapatos. Algunos niños para componer la cantidad 275 incidían en el siguiente error: al contar las monedas de $1 lo hacían de una en una asignándoles el valor de 1y continuaban asignando el mismo valor de 1 a las de $10 de la misma manera. No consideraban el valor de la moneda de $10 sino que la tomaban como $1 por ser UNA moneda. Este tipo de dificultades se relacionan con lo localizado por Vergnaud (1991) acerca del cálculo relacional y numérico, aspectos que serán desarrollados a mayor profundidad en la fundamentación teórica.

Las dificultades descritas me han llevado a preguntarme: ¿qué características o qué condiciones de los problemas pueden hacerlos más fáciles o más difíciles?, ¿será que el uso de este material dificulta más la solución del problema?, ¿qué características del dinero podrían resultar complejas de manejar para los alumnos?

Uno de los problemas en el contexto de la compra-venta que provocaron mayores dificultades a mis alumnos, y que ilustran una de mis inquietudes respecto a la familiaridad que los alumnos realmente pudieran tener con ciertos conocimientos implicados en dicha actividad, es un problema perteneciente a la lección 41, p. 164 del libro de texto de segundo grado (SEP, 2012), el cual implica el cálculo de una ganancia (Cuarta viñeta. Figura 1). Cabe advertir que, además de la complejidad que implica el concepto de “ganancia”, en esta lección hay varios descuidos en su diseño que aumentan la dificultad; entre ellos la redacción confusa y la amplia gama de conceptos relacionados con la compra-venta que el niño debe atender a lo largo de los problemas planteados –compra de materia prima (cuentas), elaboración de productos (pulseras) y venta-. Estas características conforman un problema complicado para el segundo grado.

Figura 1. Lección 41. Ejemplo de problema aditivo en contexto de compra-venta que implica la noción de ganancia



Al intentar resolver este problema, los alumnos no lograron identificar que para obtener la ganancia era necesario considerar la cantidad gastada en la compra del material para hacer las pulseras, el costo al que se vende cada pulsera y el total obtenido al vender las pulseras; tampoco identificaron que la diferencia entre ese total y el dinero invertido es la ganancia. Tuve que guiar demasiado la realización de este problema, siendo en realidad yo quien lo resolvió. Esa experiencia me ha llevado a cuestionarme ¿las dificultades tendrán que ver con la familiaridad de los niños con el dinero y la compra-venta? O bien ¿las dificultades se dan por la manera en la que está planteado el problema? Los procedimientos, dificultades y errores que he identificado en mis alumnos, me animan a indagar cómo las características de los problemas aditivos en el contexto de compra-venta impactan en el aprendizaje de la resolución de problemas aditivos y por ende en el aprendizaje de las operaciones aditivas en el segundo grado de la escuela primaria.

La revisión de diferentes problemas aditivos en el contexto de compra-venta, me ha permitido identificar dificultades en su realización. Considero necesario llevar a cabo un análisis de tales problemas considerando los siguientes aspectos y las relaciones que entre tales aspectos pudieran darse: el contexto del problema que se propone, las relaciones entre los datos (relaciones semánticas), el cálculo numérico implicado, los conocimientos previos de los estudiantes y los propósitos de aprendizaje que se esperan lograr. El análisis fino de cada uno de esos aspectos y de sus relaciones, me permitirá construir una respuesta a las preguntas de investigación que a continuación se presentan.

1.3 Preguntas de Investigación y Objetivos

La alta recurrencia al contexto de compra-venta para plantear problemas aditivos y las dificultades descritas en el apartado anterior me llevan a formular las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los procedimientos que alumnos de segundo grado ponen de manifiesto al resolver problemas aditivos en el contexto de la compra-venta y/o el uso del dinero? ¿Qué dificultades presentan y qué relación tienen esas dificultades con las características de los problemas aditivos planteados?

Para responder a esa pregunta analizo dos recursos de enseñanza comúnmente utilizados en el aula: la situación didáctica que emula la compra-venta ("La tiendita") y los problemas aditivos que se plantean en el libro de texto. Ello me lleva a preguntar:

- Considerando los problemas aditivos más comunes que tienen lugar en situaciones escolares que emulan la compra-venta ("La tiendita"), ¿qué procedimientos utilizan alumnos de segundo grado de primaria al resolver tales problemas?

- ¿Cuáles son las características semánticas (el tipo de relaciones entre los datos del problema) y numéricas (el tipo y tamaño de los números implicados) de los problemas aditivos en contexto de compra-venta que se plantean en el libro de texto de segundo grado?, ¿cuáles son los procedimientos de resolución que los alumnos podrían llevar a cabo ante dichos problemas?, ¿qué dificultades y/o errores podrían presentarse?

El hecho de que las preguntas de investigación se centren en los procedimientos de los alumnos, es porque considero que éstos pueden dar cuenta del impacto de ciertas características semánticas y numéricas de los problemas aditivos, así como del posible efecto que pudiera tener el contexto de compra-venta y el uso del dinero. En otras palabras elegí identificar los procedimientos ya que –como señala Brousseau (s/f)- en los cambios de procedimiento se observa el valor de la variable didáctica. Por una parte la actividad simulada permitirá identificar directamente cómo la variable didáctica influye en la puesta en marcha de los procedimientos, por otra parte el análisis previo posibilitará, precisamente, prever dicha influencia de acuerdo a las características de los problemas.

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, es necesario realizar las siguientes tareas:

- Identificar y caracterizar los conocimientos que algunos niños de segundo de primaria han construido en torno al dinero y la compra-venta.

- Identificar los procedimientos a los que recurren los alumnos al plantearles problemas de tipo aditivo en una actividad que emula la compra-venta.

- Realizar un análisis a priori de los problemas aditivos en contexto de compra-venta planteados en el libro de texto de segundo grado de primaria. Dicho análisis, además de identificar las características (semánticas, numéricas y contextuales) de los problemas aditivos, implica prever los posibles procedimientos, errores y dificultades que pudieran manifestar los alumnos de acuerdo a las características reconocidas.

Lo que pretendo es contar con un bagaje de herramientas y conocimientos que, como maestra, me permitan comprender –y anticipar– los procedimientos, errores y dificultades que presentan los alumnos al enfrentar determinados problemas aditivos. Para ello requiero de criterios que me ayuden a analizar las características de los problemas aditivos, el contexto en el que se presentan y la manera en que esas características podrían influir en los procedimientos de los alumnos. Todo ello con el propósito de tener intervenciones de enseñanza más asertivas.

Para construir los criterios de análisis mencionados y diseñar las tareas exploratorias que he utilizado en esta tesis, ha sido necesario acercarme a referentes teóricos que me permitan cumplir los objetivos que he establecido. A continuación se describen las perspectivas y planteamientos teóricos con los que abordo el objeto de estudio de esta investigación.

Capítulo 2
Fundamentación Teórica

En este capítulo se presentan los planteamientos teóricos que permitirán abordar la problemática antes descrita. Dado que el objeto de estudio de esta investigación son los procedimientos de resolución que pueden tener lugar ante problemas aditivos en contexto de compra-venta, ha sido necesario acudir a las distintas perspectivas teóricas, sobre todo de tipo didáctico, pero también de tipo psicogenético, pues como se verá a lo largo de este capítulo y del mismo estudio, "la naturaleza" del objeto de estudio así lo requiere.

2.1 Perspectivas Teóricas que Sustentan esta Investigación

Como punto de partida precisaré a qué me refiero al hablar de problemas matemáticos escolares y de problemas de tipo aditivo. Recurriré a la definición usada por Barriendos (2005), quien a su vez se apoya en Gerofsky (1996) y Verschaffel, Greer, y De Corte (2000) para especificar a qué se denomina problemas matemáticos escolares:

> Los problemas matemáticos (escolares) han sido definidos como descripciones de situaciones problemáticas que plantean alguna historia enmarcada en un contexto, en los que al menos aparecen dos datos numéricos y una o más preguntas dirigidas generalmente a la obtención de otro dato numérico que pueden responderse realizando una o más operaciones entre los datos numéricos dados. La situación esbozada en el texto y que contextualiza los datos numéricos suele ser hipotética y puede o no ser cercana a problemas reales. La forma de presentación varía y puede incluir una tabla, un gráfico o un dibujo o plantearse oralmente. (Barriendos, 2005, p.17)

Con base en esa definición señalaré ciertos aspectos de los problemas matemáticos escolares que se analizan en este trabajo: el contexto en el que se presentan los problemas es la compra-venta y otras actividades que implican el uso de dinero; la respuesta a las preguntas presentes en los problemas se obtienen realizando cálculos con sumas y/o restas, de ahí el nombre de "problemas aditivos".

Vergnaud (1991) define a los problemas aditivos como "aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones". En esos problemas se pueden encontrar distintos tipos de estructuras aditivas que, según el mismo autor, son "las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones y sustracciones" (p.164). Tales relaciones se construyen entre dos datos conocidos y uno que se debe encontrar, por lo cual el autor especifica que son relaciones ternarias. En síntesis, lo que caracteriza a un problema aditivo es que tanto la estructura que está en juego como la solución del problema, son aditivas[2].

Para abordar los problemas aditivos escolares ha sido necesario acercarme a dos perspectivas de la didáctica de las matemáticas: la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de Campos Conceptuales.

La Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante TSD) propuesta originalmente por Guy Brousseau, me permite contar con un marco general para la construcción de esta investigación; los planteamientos de esta teoría aportan elementos que ayudan a identificar qué conocimientos

[2] Para comprender mejor la diferencia con otros problemas podría pensarse en un problema multiplicativo que puede ser resuelto también con una adición, pero la estructura que guarda el problema no es aditiva, sino multiplicativa, es una estructura cuaternaria en donde hay cuatro datos en juego. Por ejemplo: Lourdes compró en la tienda 5 refrescos. Si cada uno cuesta ocho pesos ¿cuánto pagó en total? Este es un problema multiplicativo en donde están implicados cuatro datos, tres conocidos (un refresco, ocho pesos y 5 refrescos) y un desconocido (el total de los cinco refrescos) que soluciona el problema. El problema guarda una relación multiplicativa en la que las relaciones son 1refresco - $8

5 refrescos – X

La solución canónica sería 8 x 5 = 40. Aunque pueda ser resuelto por suma: 8+8+8+8+8 = 40.
En cambio en un problema aditivo la estructura es ternaria en donde hay sólo tres datos en implicados.

matemáticos se movilizan en una situación didáctica determinada y qué características de la situación inciden en los procedimientos de solución de los alumnos. Por su parte, la Teoría de Campos Conceptuales (TCC), cuyo autor es Gérard Vergnaud, aporta herramientas para identificar características específicas de los problemas aditivos.

Existe un concepto fundamental que pone en contacto a ambas teorías, el concepto de "situación":

- Para Brousseau los saberes y conocimientos matemáticos están necesariamente involucrados en situaciones donde éstos funcionan. Especifica que "a todo conocimiento matemático se le puede hacer corresponder una colección de situaciones que este conocimiento permite resolver". (Brosseau, s/f, p. 6) Además señala que los elementos que componen las situaciones también permiten identificar los conocimientos que los alumnos activan al enfrentar dichas situaciones, esos elementos pueden ser intencionadamente elegidos para promover la construcción de determinado conocimientos matemático, lo que es conocido como variable didáctica y se retomará más adelante.

- Por lo que toca a la Teoría de los Campos Conceptuales, Vergnaud hace su análisis centrado en las características del conocimiento matemático en juego y en la acción del alumno en torno a las situaciones a las que se enfrenta. Vergnaud (1991) señala que el sujeto conceptualiza a partir de situaciones específicas que enfrenta (por ejemplo, situaciones aditivas). De ahí que el estudio que el autor realiza sea de campos matemáticos conceptuales, por ejemplo el aditivo o multiplicativo, identificando las características de las situaciones que implican estos campos.

Además de sustentar este trabajo en las dos teorías didácticas ya señaladas, surgió la necesidad de contar con herramientas que permitieran indagar los conocimientos y experiencias de los niños con el dinero y con actividades de compra-venta, ello debido a que los problemas aditivos que se eligen como objeto de estudio son aquellos que se plantean en este contexto. Para ello, me apoyo en estudios de corte psicogenético, los cuales aportan esas herramientas para llevar a cabo la indagación y para reflexionar sobre los datos obtenidos.

2.2 Conocimiento Matemático, Medio y Situación Didáctica en la TSD

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Guy Brousseau en 1970, es una teoría sobre la enseñanza que estudia las condiciones que permiten la construcción "artificial" de conocimientos matemáticos (Panizza, 2003).

El concepto de situación didáctica es central en la TSD, pues es en relación con la situación específica que los conocimientos matemáticos toman sentido; dicho de otra manera, la funcionalidad de un conocimiento matemático tiene que ver con el conjunto de situaciones que permite resolver. Al respecto, Brousseau (2000) señala:

> La definición de los conocimientos en relación con su función en una situación ratifica el hecho de que para una misma noción matemática, cada actor (sociedad, profesor, alumno) desarrolla conocimientos diferentes a priori según las condiciones en las cuales los utiliza, los crea o los aprende. (p. 23).

De lo anterior se deriva que, dada la posibilidad de una diversidad de situaciones que impliquen a un mismo conocimiento matemático, entonces es factible que haya diversos significados para ese conocimiento. Por ejemplo, la operación "resta" tiene lugar en situaciones en las que se trata de "quitar" una cantidad a otra: "Tengo 15 manzanas, ¿cuántas quedan si me como dos?" También tiene lugar en situaciones en las que se trata de encontrar la diferencia entre dos cantidades: "Tengo 15 manzanas, ¿cuántas me faltan para tener 27?"

Según Brousseau, el sentido de un conocimiento matemático tiene que ver con tres conjuntos de elementos que lo definen:

a) la colección de situaciones en las que este conocimiento se realiza en cuanto a teoría matemática (semántica).
b) la colección de problemas en los que este conocimiento interviene como solución (pragmática)
c) el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que él rechaza (historia individual y colectiva)

(Citado por Peltier, 2003, p. 31)

Brousseau define la situación didáctica –en un sentido amplio– de la siguiente manera:

> Un conjunto de relaciones establecida explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, citado por Gálvez, 1994, p. 42)

Una de las aportaciones de ese concepto, es que permite analizar un conocimiento matemático considerando todos los elementos de la situación didáctica que dan lugar a tal conocimiento (las relaciones entre los alumnos, el medio, el cual incluye la diversidad de problemas, y el sistema educativo). Para fines de este trabajo, centraré la mirada en las situaciones didácticas que ponen en juego la suma y la resta, analizando la diversidad de situaciones que implican a esas operaciones y que contribuyen a la construcción del sentido de la suma y de la resta. Como he mencionado, particularmente me concentraré en las situaciones didácticas cuyo medio implica el contexto de compra-venta y el uso de dinero.

2.2.1 La noción de "medio".

De acuerdo con los planteamientos de Guy Brousseau, esta teoría se ubica en un marco constructivista del aprendizaje:

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios…Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, citado por Panizza, 2003, p. 61)

El medio es entonces un factor central para producir aprendizajes. Se entiende por "medio" al conjunto de circunstancias exteriores al sujeto; tales circunstancias, al entrar en interacción con el sujeto, generan resistencias que son propicias para que tengan lugar aprendizajes específicos (Fregona y Orús, 2011). La importancia de esta noción radica en que el medio al que el alumnos se enfrenta, según Brousseau (1998, p.59), es un "factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios". El aprendizaje que logra el alumno y que se manifiesta por respuestas nuevas, es resultado de las adaptaciones que logra hacer el sujeto.

Al respecto de la intención didáctica de la que está cargada el medio para que los alumnos aprendan determinados conocimientos matemáticos Brousseau (1998) señala que "un medio sin intenciones didácticas es evidentemente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera" (p.59).

Para los propósitos de esta investigación, la noción de medio me ayuda a identificar qué circunstancias de una situación didáctica que implique problemas aditivos en el contexto de compra-venta, podrían dar lugar a una interacción en la que el medio "se resista" a los conocimientos previos del alumno, dando lugar a la posibilidad de aprendizajes específicos. En los problemas que en esta investigación se analizan, el dinero funge parte del papel del "medio material" con el que el alumno interactúa. Otras investigaciones como la de Delprato y Fregona (2013), la cual se retomará más adelante, analizan el uso de este medio material (el dinero) como recurso de enseñanza en la didáctica de la aritmética.

2.2.2 El papel de las variables didácticas en la conformación de un conocimiento matemático.

Considerando que el medio tiene características que lo determinan y que son antagónicas al alumno, las modificaciones que se realicen a ciertas características del medio pueden incidir en los procedimientos de los alumnos. Brousseau se refiere a ellas con el término variables didácticas: "Las características de un problema que se pueden modificar y que tienen un efecto cualitativo importante sobre las evoluciones de los procedimientos se llaman variables didácticas" (Brousseau, 1981, citado en Block, 2010, p. 50).

Para comprender esta noción presento como ejemplo dos problemas. Al realizar una variación en el tamaño de los números -variable didáctica- se incide en los posibles procedimientos de los alumnos.

Problema uno, este problema puede ser resuelto a través de conteo: *Juan tiene $15 ahorrados en su alcancía si su mamá le da $8 para meterlos en su alcancía ¿cuánto tiene ahora?*

Para el siguiente problema se plantea la misma estructura aditiva, inclusive el mismo contexto y personajes de la “historia”, pero los números implicados son mayores. El procedimiento de conteo quedaría “corto” y los niños se verán “forzados” a resolverlos a través de otros procedimientos.

El problema dos es: *Juan tiene $38 ahorrados si su mamá le da $64 para su alcancía ¿cuánto tiene ahora?*

Para identificar qué características de ciertos problemas aditivos pueden provocar cambios en los procedimientos de resolución de los alumnos, fue necesario recurrir a planteamientos de la Teoría de Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud y de otras perspectivas que abordan los problemas de tipo aditivo. Un poco más adelante presentaré tales planteamientos.

Las características del medio que han sido mencionadas, fueron fundamentales para el diseño de las actividades exploratorias de esta investigación, así como para el análisis de los problemas del libro de texto gratuito. Reconocer las características que favorecen el desarrollo de estrategias de los niños y establecer las variables didácticas de los problemas, son aspectos que fueron considerados para indagar los conocimientos de los alumnos en el marco de la TSD.

Si bien las nociones que se han descrito hasta ahora desde la perspectiva de la TSD (variable didáctica, medio antagónico, etc.) pudieran aplicarse a cualquier disciplina de conocimiento (lengua, ciencia u otra), una aportación relevante que se desprende de la Teoría de Situaciones Didácticas es la importancia del papel que juega el conocimiento matemático en relación con la situación didáctica. Esta teoría se ocupa de dar en sus análisis un lugar fuerte a la relación entre el alumno, el docente y el saber matemático (triada didáctica), considerando que el saber matemático en sí mismo es importante como objeto de conocimiento.

2.3 Diversas Aproximaciones Teóricas a los Problemas Aditivos

La historia del estudio de los problemas pertenecientes al campo aditivo (en los que intervienen la suma y la resta) inició con el estudio de lo que se ha denominado “problemas verbales” o *words problems* (Martiradoni, 2014, en comunicación personal). Dellarosa (1991) define este tipo de problemas como aquellos que para su solución no se presenta una ecuación a resolver de manera inmediata sino que se proponen como representaciones verbales (por ejemplo, contar un suceso que plantee un problema) o pictóricas (apoyados en dibujos plantear el problema) y para solucionarlos deben ser interpretados de manera simbólica, manipulados y resueltos. Sobre este tipo de problemas Ginsburg, Klein y Starkey (1988) señalan que éstos problemas ofrecen contextos del mundo real, que presumiblemente motivan a los niños y les facilita la aplicación de sus habilidades matemáticas, lo cual tiene estrecha relación con lo que se plantea en esta tesis por el contexto de compra-venta utilizado en problemas aditivos que forma parte del objeto de estudio.

Los distintos acercamientos y clasificaciones realizadas sobre los problemas verbales han puesto atención en diversos aspectos: “Las primeras clasificaciones atendían a criterios lingüísticos, estudiando aspectos como el tiempo verbal, el número de palabras, el tipo de vocabulario” (Nesher, 1982, citado en Caballero, 2005). Por su parte, Díaz (2004) identifica en diferentes momentos de la historia del estudio de los problemas aditivos, tres aproximaciones que centran la mirada en distintos aspectos de los problemas (Díaz. 2004, p. 35):

La primera (aproximación) clasifica los problemas en términos de sintaxis, nivel de vocabulario, número de palabras de un problema, etc. (Jerman, 1973; Suppes, Loftus y Jerman, 1969), la segunda distingue entre los problemas en términos de las sentencias que representan (Grows, 1972; Lindvall e Ibarra, 1980; Rosental y Resnick, 1974) y la tercera considera las características semánticas de los problemas (Gibb, 1956; Greeno, 1978; Nesher y Katriel, 1978; Vergnaud, 1982).

Como se puede observar, son variados los criterios en los que se centran los análisis y clasificaciones de diversos autores para abordar los problemas aditivos. Cabe destacar que en dichas aproximaciones no ha sido un criterio fundamental observar o analizar el papel del contexto como un elemento destacado de los problemas, aspecto que interesa en esta investigación. Vergnaud (1991) en su Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) sí hace algunos planteamientos sobre el "tipo de contenido y de relaciones consideradas", los cuales son cercanos a lo que en esta investigación se analiza como contexto; eso se abordará en el apartado referente a la TCC.

En la siguiente tabla (Tabla 1)[3] tomada de Caballero (2005) se presentan las clasificaciones representativas que a lo largo del estudio de los problemas aditivos diversos autores han realizado. En el contenido de esta tabla se aparean tipos problemas que tienen las mismas características semánticas, aunque en cada clasificación son nominados de manera distinta. Cabe precisar que el objetivo de presentar esta información no es hacer un análisis exhaustivo de las clasificaciones, sino mostrar una panorámica general de las mismas.

[3] Se respeta el formato de la tabla original.

Tabla 1

Diversas Clasificaciones de Problemas Aditivos. Caballero (2005)

Bermejo y col. (1998)	**Carpenter y Moser (1996, 1999)**	**Fuson (1992)**	**Carpenter y Moser (1983)**	**Vergnaud (1982)**	**Carpenter y Moser (1982)**	**Heller y Greeno (1978)**
Problema de cambio	Problema de unión Problema de separación	Activa con operación unitaria	Problema de cambio	Transformación que une dos medidas Composición de dos transformaciones Transformación que une dos relaciones estáticas	Problema de unión Problema de separación	Problema de cambio
Problema de combinación	Problema de Parte-parte-todo	Activa con operación binaria Estática con operación binaria	Problema de combinación	Composición de medida	Problema de Parte-parte-todo	Problema de combinación
Problema de comparación	Problema de comparación	Estática con operación binaria	Problema de comparación	Relación estática que une dos medidas	Problema de comparación	Problema de comparación
Problema de igualación		Activa con operación binaria	Problema de igualación		Problema de igualación[4]	
				Composición de relaciones estáticas		
Problema relacional						

[4] Los problemas de igualación fueron denominados por Carpenter y Moser en 1982 como “igualación añadir” e “igualación quitar”. Sin embargo, esta tabla ha sido tomada de la tesis doctoral de Caballero (2005), quien no hace tal especificación, por lo cual se respeta el formato y contenido.
Puede observarse que Vergnaud no contempla este tipo de problemas en su clasificación. Según Bermejo y Rodríguez (1991) “los problemas de igualación constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, puesto que hay una comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de esos dos subconjuntos para hacerlo igual al otro” (p. 36)

Como se puede observar, en las distintas clasificaciones es compartida la existencia de tres categorías: cambio, combinación y comparación. Sobre las diferencias que se encuentran en las distintas clasificaciones Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo y Fernández (1998) señalan:

> “no hay un acuerdo unánime en aspectos parciales (sobre las clasificaciones de problemas aditivos). Por ejemplo, la categoría semántica de igualación es admitida por unos investigadores y rechazada por otros. Otro ejemplo: en la categoría de combinación lo más usual es considerar dos tipos de problemas: desconocer el todo o desconocer una parte…pero la diferencia entre estos dos tipos de problemas de combinación también puede realizarse en términos de que en un problema se produce un aumento (hallar el todo) y en el otro una disminución (hallar una parte)”. (p.64)

Para entender a qué se refiere cada una de esos tipos de problemas, éstos se ilustran con un ejemplo usando la terminología de Heller y Greeno y que Carpenter y Moser retoman (los ejemplos son tomados de SEP, 1992):

a) Problema de cambio: Iván tiene 8 caramelos y Tere le dio 4 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Iván?

b) Problema de combinación: Iván tiene 8 caramelos y Tere tiene 4 ¿Cuántos caramelos tienen los dos juntos?

c) Problema de comparación: Iván tiene 8 caramelos. Tere tiene cuatro caramelos más que Iván ¿Cuántos caramelos tienen Tere?

d) Problema de igualación: Iván tienen 8 caramelos pero necesita 4 caramelos más para tener los mismos que Tere. ¿Cuántos caramelos tiene Tere?

Como ya se mencionó, las clasificaciones anteriores se basan en las estructuras semánticas en juego: los problemas de cambio e igualación conllevan relaciones dinámicas, mientras que los de combinación y comparación, relaciones estáticas.

Las estructuras semánticas, así como otras características de los problemas, implican dificultades distintas para los niños. Diversos autores (Vergnaud, 1991; Bermejo y Rodríguez, 1991) han coincidido en que el tipo de relación (dinámica o estática), el lugar de la incógnita y el tamaño de los números en juego son características que determinan la complejidad o facilidad de un problema. En cuanto a la dificultad implicada por las relaciones semánticas, Díaz señala que:

> La mayoría de los trabajos (Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987) confirman que los problemas más sencillos son, en general, los de Cambio, seguidos por los problemas de Combinación, después los de Igualación y, finalmente, los problemas de Comparación resultan ser los más complicados. (p. 68)

Las diferentes aproximaciones a los problemas aditivos es una muestra de lo importante que ha sido el estudio de este tipo de problemas a lo largo del tiempo. De ese conjunto de perspectivas destacaré la Teoría de Campos Conceptuales (TCC), desarrollada por Gérard Vergnaud (1991), pues es un referente teórico que me permite contar con herramientas para llevar a cabo un análisis del tipo de situaciones didácticas de las que me ocupo en esta tesis.

2.4 Los Problemas Aditivos desde la TCC

Dentro de la Didáctica de las matemáticas, la Teoría de Campos Conceptuales ha contribuido al estudio de las estructuras relacionadas con los problemas de tipo aditivo, además de otros campos conceptuales como el campo de los primeros números, el sistema de numeración decimal, problemas multiplicativos, por mencionar algunos.

Vergnaud plantea que el conocimiento se organiza en campos conceptuales (de ahí el nombre de su teoría), y es a lo largo de varios años que el alumno se va apropiando de los conocimientos implicados en un mismo campo conceptual (Barrantes, 2006). Por “campo conceptual” se entiende:

> Un conjunto de situaciones, cuyo análisis y tratamiento requiere algunas clases de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras… Es un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere algunos conceptos interconectados. Al mismo tiempo, es un conjunto de conceptos con diferentes propiedades, cuyo significado se deriva de una variedad de situaciones (Vergnaud, 1990, citado por Flores, 2005, p.11).

Vergnaud especifica que los conceptos matemáticos que conforman un campo conceptual están constituidos por tres elementos: “a) el conjunto de diferentes **situaciones** que otorgan sentido al concepto (la referencia), b) el conjunto de **relaciones** y **propiedades** ligadas a una noción determinada (el significado) y c) el conjunto de las diferentes **formas que permiten representar simbólicamente** el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de resolución (el significante)” (Quaranta, 2007, p. 9).

Con base en lo anterior es posible delimitar características del campo conceptual de las estructuras aditivas, el cual puede entenderse como el cúmulo de situaciones en las que es necesario utilizar adiciones y sustracciones (o combinación de estas dos) para su solución, así como el conjunto de conceptos y teoremas que permiten hacer un análisis de las situaciones didácticas que implican dichas operaciones (Vergnaud, 1991).

Ya se ha mencionado que al igual que la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría de Campos Conceptuales (TCC) subraya la importancia de las situaciones al considerarlas como aquello que moviliza determinada acción matemática. Según Vergnaud, al enfrentarse a las situaciones que conforman un mismo campo conceptual (en este caso el de estructuras aditivas) los niños ponen en funcionamiento diversos esquemas[5] que les permiten la solución del problema.

La descripción densa que hace Vergnaud del campo conceptual de estructuras aditivas, permite advertir la diversidad de aspectos que pueden influir en el grado de dificultad de un problema. Uno de esos aspectos, y que constituye una de las aportaciones más emblemáticas de la TCC, son las categorías de problemas aditivos.

Como se ha mostrado en el sub-apartado anterior (tabla 1) Vergnaud (1991) presenta seis grandes categorías de relaciones aditivas que ofrecen una variedad de estructuras aditivas. Este autor propone un análisis teórico en dos vías: una matemática y otra psicogenética. En la primera analiza el objeto de estudio en sí mismo (en este caso las categorías de problemas aditivos y sus

---

[5] "El esquema es una forma invariante de organización de la actividad, cuya función primaria es generarla a medida que se actúa en una situación… (los esquemas) poseen una función asimilatoria. Ante situaciones u objetos nuevos, los esquemas formados para situaciones conocidas son evocados y probados… Puede suceder que ocurra una asimilación de la nueva situación, pero también que el esquema evocado no se ajuste y sea necesario un proceso de acomodación para separar y recombinar los componentes del esquema existente o construir nuevos esquemas" (Vergnaud, 2000, citado en Flores, 2005, p.12)

características); en el sentido psicogenético realiza el análisis contemplando al niño como sujeto didáctico, el cual construye sus propios conocimientos a través de su actividad con los problemas.

Desde los planteamientos de este autor se entiende que los problemas de tipo aditivo pueden variar su complejidad en dos aspectos: el cálculo numérico y el cálculo relacional. De manera sintética mencionaré algunos rasgos que ayudan a comprender cada uno de esos aspectos, los cuales se irán desarrollando a mayor profundidad a lo largo de este apartado:

- El cálculo numérico se refiere al tamaño de los números implicados en el problema y si estos números son enteros o decimales.

  El cálculo numérico no se reduce a planteamientos del tipo “si los números son más grandes, el cálculo será más complejo”, sino hay que identificar cómo los números se relacionan entre sí. Por ejemplo, puede haber un problema en los que se opere con los números 5000 y 2000 en una resta; aunque por su lugar en la serie numérica pudieran ser considerados “números grandes”, el cálculo numérico no es complejo; lo contrario sucedería si los números para operar son 865 y 498, pues siendo “números más chicos” que los anteriores, el cálculo que conllevan es más complejo, porque -a diferencia del primer par de números- operar con éstos en una resta no se facilita a través del cálculo mental, y si se quisiera resolver a través del algoritmo escolar, éste implicaría varias desagrupaciones entre los diferentes órdenes de números.
- Sobre el cálculo relacional, Vergnaud señala que éste tiene que ver con las relaciones entre los datos del problema; esas relaciones son las que hacen que un problema sea más fácil o difícil y deben ser desentrañadas por los niños. En el caso de los problemas

aditivos las relaciones implicadas son de tipo ternario[6], las maneras diferentes en las que se relacionan los datos dan lugar a las estructuras aditivas que se explican a continuación.

Para comprender qué es una estructura aditiva es importante señalar que Vergnaud (1991) denomina "estructuras" a las maneras en las que se relacionan y ponen en juego los datos de un problema; en este caso esas relaciones se dan por medio de sumas y restas. Dichas estructuras están definidas de acuerdo al tipo de números que conforman el problema (si es una medida, un estado o una transformación), dependiendo de esto las estructuras y dificultad del problema son distintas. El papel que juegan las estructuras aditivas es explicado claramente por Alvarado y Brizuela (2013) cuando señalan que "los problemas aritméticos de tipo aditivo no serán siempre los mismos, ni en estructura, ni en complejidad, sino que variarán dependiendo de las relaciones aditivas que permeen el problema" (p. 101).

El autor se basa en esas relaciones para describir seis categorías de problemas aditivos o ternarios. Al respecto, Vergnaud (1991, p. 164) explicita:

> Vamos a restringirnos a seis esquemas ternarios fundamentales:
>
> Primera categoría: dos medidas se componen para dar lugar a una medida.
>
> Segunda categoría: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.
>
> Tercera categoría: una relación une dos medidas.
>
> Cuarta categoría: dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
>
> Quinta categoría: una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

[6] Según Vergnaud (1991) los esquemas ternarios relacionan tres elementos entre sí. El autor explica que un "gran número de relaciones ternarias están constituidas por dos elementos y una relación-elemento" (p. 46), por ejemplo en la relación *María es 7 años mayor que Lulú,* María y Lulú son dos elementos y los siete años de más es la relación entre ambos.

Sexta categoría: dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Lo que distingue a una categoría de otra, es la existencia de distintas combinaciones entre números naturales y números relativos. Los números más sencillos son los naturales, “no son positivos ni negativos, pues corresponden a medidas” (Vergnaud, 1991, p. 163), por ejemplo, 10 pesos. Por el contrario los números relativos “representan las transformaciones que experimentan las medidas” (Vergnaud, 1991, p. 163), por lo tanto sí tienen signo, pueden ser positivos o negativos; por ejemplo, la transformación que actúa en tu dinero cuando el señor de la tienda te cobra algo: si te cobra 8 pesos el número que está en juego es relativo (-8, es decir te quita 8 pesos). Dependiendo de las medidas, transformaciones y estados relativos implicados en los problemas, éstos conllevan mayor o menor dificultad para ser resueltos. El tipo de número en juego (medida, transformación o estado) es una característica fundamental de las categorías expuestas por Vergnaud. Al respecto, Greeno y Heller estarían de acuerdo con este autor en que estos números indican o describen el tipo de acción que ocurre en el problema: por ejemplo juntar, agregar o comparar.

Vergnaud realiza dos tipos de modelaje para explicar las categorías de relaciones aditivas: sagital (esquema) y algebraico (ecuación). En las representaciones de esos modelajes el autor simboliza las diferencias entre una categoría y otra, enfatizando en cómo se construyen las relaciones desde el papel de los números como estado, transformación o medida. La finalidad del modelaje es centrar la atención en las relaciones en juego. Es de llamar la atención cómo para representar que la suma de dos números medida o naturales (sin signo) es distinta de la adición de dos números relativos (con signo), y a su vez diferente de la suma de un número relativo y un natural; el autor utiliza un signo de adición distinto para cada una de esas adiciones.

La siguiente imagen (figura 2) muestra los símbolos que Vergnaud (1991, p.165) utiliza como códigos para los esquemas y ecuaciones que presenta. Posteriormente se muestra una tabla (Tabla 2) que ilustra cada una de las categorías de Vergnaud con su representación sagital (esquema) y algebraica (ecuación) (Vergnaud, 1991, pp. 166-169).

Figura 2. Símbolos utilizados por Vergnaud para modelar el tipo de relaciones aditivas

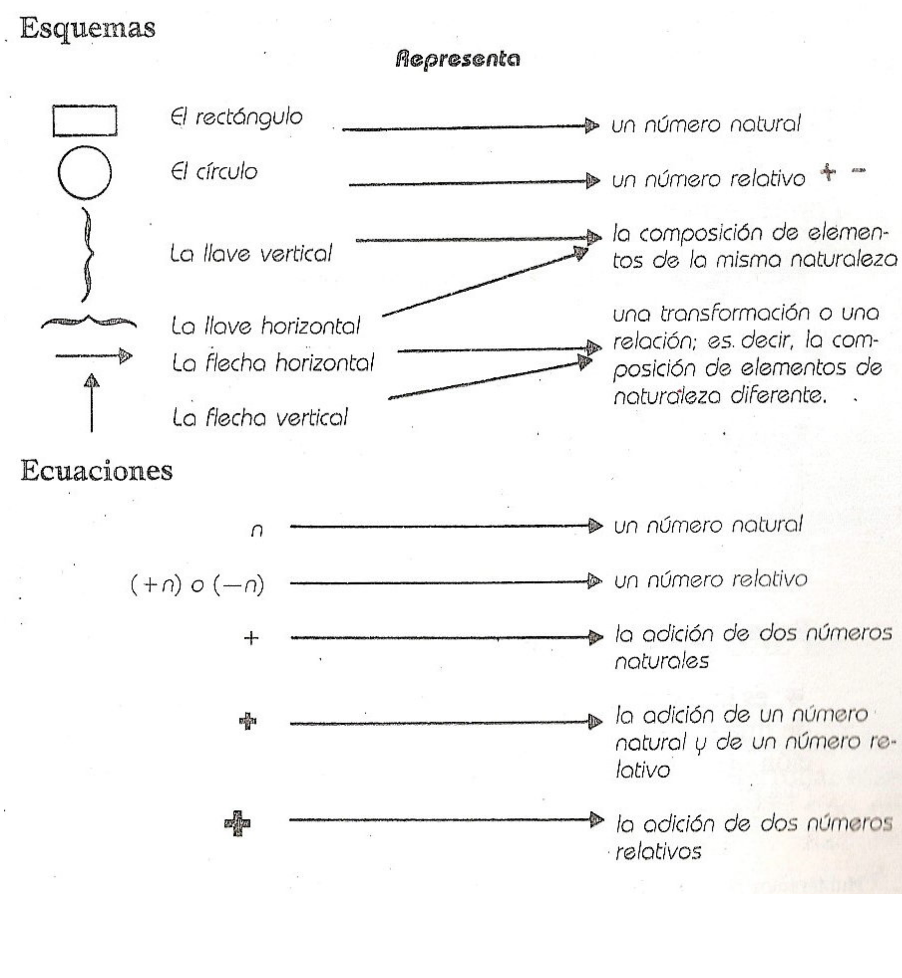
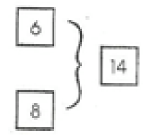
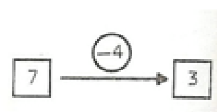
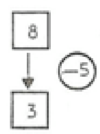
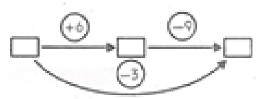
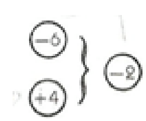
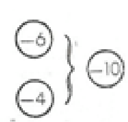


Tabla 2

Categorías de Vergnaud para los Problemas de Tipo Aditivo. Modelización Sagital y Algebraica

CATEGORÍA	PROBLEMA EJEMPLO	MODELIZACIÓN SAGITAL (ESQUEMA)	MODELIZACIÓN ALGEBRAICA (ECUACIÓN)
1ª. Se componen dos medidas para dar lugar a una medida	Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas.		$6 + 8 = 14$
2ª. Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida	*Transformación positiva* Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 4 canicas. Ahora tiene 11.		$7 + (+4) = 11$
	Transformación negativa Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Perdió 4 canicas. Ahora tiene 3.		$7 + (-4) = 3$
3ª. Una relación une dos medidas	Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene cinco menos; entonces tiene 3.		$8 + (-5) = 3$
4ª. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación	Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. En total perdió 3.		$(+6) + (-9) = (-3)$
5ª. Una trasformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.	Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2.		$(-6) + (+4) = (-2)$
6ª. Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.	Pablo le debe 6 canicas a enrique, pero Enrique le debe 4. Pablo le debe entonces sólo 2 canicas a Enrique.		$(-6) + (+4) = (-2)$
	Pablo le debe 6 canicas a Enrique y 4 canicas a Antonio. Debe 10 canicas en total.		$(-6) + (-4) = (-10)$

Como puede observarse en las modelizaciones, el cálculo relacional entre las categorías es distinto, el cálculo relacional implica mayor dificultad en algunos problemas que en otros; por ejemplo, no es igual de complejo operar dos estados relativos que dos medidas.

Se ha explicado en estos párrafos que la complejidad de los problemas aditivos según Vergnaud está determinada por el tipo de relaciones semánticas (cálculo relacional) y numéricas (cálculo numérico). A continuación se abordan con mayor detalle algunos otros elementos que, según desde la TCC y otras perspectivas, complejizan los problemas aditivos.

2.4.1 Complejidad de los problemas aditivos.

Además de esas categorías ya descritas, la complejidad de un problema está determinada por otros aspectos, los cuales se enlistan en la siguiente tabla (Tabla 3). Es importante precisar que algunos de esos aspectos no pertenecen a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, sino que son tomados de otras perspectivas teóricas que también abordan a los problemas aditivos. Esas precisiones se irán haciendo en la descripción de cada aspecto.

Tabla 3

Elementos que Complejizan los Problemas de Tipo Aditivo

Lugar de la incógnita	• Incógnita en el estado final o en el total • Incógnita en transformación o en segundo sumando • Incógnita en el estado inicial o primer sumando
Tipo de relación implicada en el problema	• Relación estática • Relación dinámica
Orden y manera en que se presenta la información	• Información necesaria • Información innecesaria • Información en orden • Información en desorden • Información en orden inverso
Número de etapas del problema	• Problema de una etapa (simples) • Problema de dos etapas o más (compuestos)

Enseguida se explica cada uno de esos aspectos.

- *Lugar de la incógnita*

Vergnaud (1991) señala que existen diferentes subcategorías dentro de las categorías de problemas aditivos que se han mencionado. Estas otras subcategorías –que generan nuevos tipos de problemas– se determinan por el lugar que juega la incógnita en un problema aditivo; en el caso de los problemas que implican transformaciones, también se debe considerar si dicha transformación es negativa o positiva.

Los lugares en los que se puede encontrar la incógnita dentro de un problema, son: en el estado final o total, en la transformación o segundo sumando, y en el estado inicial (este último caso representa una mayor dificultad para los niños).

La siguiente tabla que presenta Belmonte (2006; p. 140) para los problemas de transformación de medidas, permite ejemplificar las diferentes posiciones de la incógnita[7] (tabla 2):

Tabla 4

Tipos de Problemas Según la Posición de la Incógnita

	Incógnita Estado inicial	**Incógnita Transformación**	**Incógnita Estado final**
t+	Ej.1 Eva va a hacer 75 fotocopias. Cuando va a empezar el contador de la máquina marca 335. ¿Cuánto marcará el contador al terminar?	Ej.2 Enrique tiene 75 globos. Se ha comprado una bolsa y ahora tiene 96. ¿Cuántos globos tenía la bolsa?	Ej.3 El último censo de mi pueblo asegura que somos 3546 habitantes. Si ha crecido 348 en el último año, ¿cuántos habitantes tenía hace un año?
t-	Ej.4 Yo tenía 25 canicas en mi colección y he regalado 12. ¿Cuántas tengo ahora en mi colección?	Ej.5 Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene 18. ¿Cuántas canicas perdió?	Ej.6 José ha sacado de su cuenta corriente 350 euros para realizar unas compras. Si después le quedan 1625 euros en la cuenta ¿Cuánto tenía antes?

La complejidad de estos problemas es distinta; para los niños es más fácil resolver los problemas que se encuentran en la columna de la derecha, cuya incógnita está en el total. La dificultad va creciendo hacia la izquierda de la tabla, siendo los problemas con incógnita en el estado inicial los más difíciles.

[7] En la tabla t+ es transformación positiva y t- es transformación negativa

- *Tipo de relación*

Cada una de las categorías descritas ponen en juego relaciones de distinta índole: estática o dinámica. De acuerdo al tipo de relación implicada en los problemas la dificultad es distinta: “la forma misma de la relación puede desempeñar un papel. No es necesariamente igual para el chiquillo decir que <ganamos 12 canicas> a decir que <tenemos 12 canicas más>” (Vergnaud, 1991, p. 177).

Estas relaciones (dinámicas y estáticas) están vinculadas a las categorías a las que pertenece un problema. Los problemas que presentan un tipo de relación dinámica son los que Heller y Greeno (según Caballero, 2005) refieren como categoría de “cambio” (o transformación desde la TCC) y los problemas de “igualación”, pues para resolverlos es necesario identificar la relación de incremento o decremento en los conjuntos. Las relaciones estáticas se presentan en problemas de que los mismos autores llama de “comparación” y “combinación”, éstos no implican el decremento o incremento de ninguno de los conjuntos (SEP, 1992)[8].

- *Orden y presentación de las informaciones*

La cantidad de información y el orden en que esa información se presenta en un problema, determinan también grados distintos de complejidad. Vergnaud (1991) señala que es más difícil para los niños resolver problemas que presentan información innecesaria para la solución.

Por otra parte, si la información está ordenada conforme al desarrollo temporal de “lo narrado” y de acuerdo a la estructura de solución, es menos difícil para el niño la resolución, que

[8] Martiradoni (2014, en comunicación personal) señala que el análisis más detenido de la 6ta categoría parece indicar que ésta puede ser considerada como “comparación de estados relativos en una forma estática”, es decir, una categoría donde se tensa lo dinámico y lo estático.

si se encuentra en un orden distinto a la estructura de solución o en un orden inverso. Al respecto Vergnaud (1991) señala que "un problema se puede complicar seriamente si se invierte el orden de las informaciones pertinentes, o si se presenta en desorden, y más todavía si están sumergidas en otras informaciones" (p.176).

Para comprender este elemento de complejidad de los problemas aditivos se presentan dos ejemplos:

Problema con información ordenada

Lucas tiene dinero en su alcancía, si mete en ella $20 que le dio su mamá tendrá $82 ¿cuánto tiene en su alcancía?

Problema sin información ordenada

La mamá de Lucas le dio $20, ¿Cuánto dinero tenía en su alcancía si metió los 20 y ahora tiene $82?

El cálculo relacional del segundo problema es más complicado que el del primer problema.

- *Número de etapas*

Dentro de la clasificación y descripción que Vergnaud realiza sobre las estructuras aditivas, aborda las seis relaciones ternarias que ya han sido descritas, pero no hace comentarios sobre los problemas que implican más de una operación. Por lo cual, me ha sido necesario apoyarme en otras investigaciones que aportan elementos teóricos acerca de este tipo de problemas.

Existen problemas aditivos que requieren más de una operación para ser resueltos; puede ser que deban realizarse dos o más operaciones del mismo tipo (por ejemplo dos sumas) o de distinto tipo (una suma y una resta). El número de cálculos necesarios para resolver incide también en el grado de complejidad de un problema.

La variedad de problemas aritméticos que pueden resultar de la combinación de distintos cálculos en un mismo problema, ha sido estudiada desde la didáctica de las matemáticas por autores como Puig y Cerdán (1990) y Castro, et al. (1998).

Puig y Cerdán (1990) identifican la existencia y posibilidad de plantear distintos problemas de varias operaciones combinadas y los identifican con la sigla PAVOC (Problemas Aritméticos de Varias Operaciones Combinadas). En general, ellos analizan la combinación de estructuras multiplicativas y aditivas y cómo los niños realizan el proceso de traducción de un PAVOC (es decir, cuál es el proceso de comprensión de los niños para resolverlo). Al ser operaciones aditivas y multiplicativas las combinadas en estos problemas pueden darse los siguientes casos: problemas aditivo-multiplicativo, multiplicativo-multiplicativo, aditivo-aditivo y multiplicativo-aditivo. En esta investigación me centraré en los problemas aditivo-aditivo (combinaciones de sumas y restas).

De acuerdo al número de operaciones implicadas en el problema, los autores señalan que "conviene distinguir entre los problemas de una etapa, esto es, lo que se resuelven mediante una única operación, y los de más de una etapa" (p.1). De acuerdo con el número de operaciones implicadas se determina en número de etapas: dos operaciones, dos etapas; tres operaciones, tres etapas, y así, consecutivamente.

Cabe señalar que Puig y Cerdán (1990) identifican que más allá de que un problema de varias operaciones combinadas implique traducir por medio de una "mera yuxtaposición, en el orden adecuado, de las traducciones correspondientes a cada una de las operaciones" (p.2), la resolución de problemas tipo PAVOC es compleja, pues implica considerar distintos aspectos:

"Para que el enunciado sea traducible al lenguaje aritmético, es preciso realizar un trabajo sobre el texto del problemas que lo transforme en un nuevo texto en el que se hagan explícitos los elementos que han de intervenir en cada una de las traducciones elementales y que muestren la manera como éstas han de enlazarse en la expresión aritmética" (p.2).

En la siguiente tabla[9] se muestran las diferencias entre problemas de una etapa los PAVOC:

Tabla 5

Diferencias entre Problemas de una Etapa y Problemas Aritméticos de Varias Operaciones Combinadas

	UNA ETAPA	PAVOC
Estructura del problema	Datos: dos Las relaciones entre los datos y la incógnita son más simples	Datos: más de dos Las relaciones entre los datos y la incógnita son más complejas
Decisiones para resolver	Una decisión que tomar: elegir la operación que hay que realizar	Varias decisiones que tomar: qué operaciones, entre qué cantidades y en qué orden

Castro, et al. (1998) abordan también este tipo de problemas, pero centrándose en la identificación de las estructuras aditivas implicadas en ellos. Considerando que estos problemas de más de una etapa conllevan más de una operación para su solución, es necesario identificar detrás de esas operaciones qué tipo de relaciones aditivas están inmersas, pues es en esas relaciones aditivas que los autores centran su atención. Es importante señalar que al parecer

[9] Las características que los autores especifican son considerando problemas de una etapa en su enunciado típico (por ejemplo sin información adicional ni en desorden)

dependiendo del número de relaciones aditivas del problema -sean estas de la misma categoría o no- se determina el número de operaciones del problema; por ejemplo, si son necesarias dos operaciones para resolverlas entonces hay dos relaciones semánticas en juego.

La categorización que Castro, et al. (1998) hacen de los problemas en los que está implicada más de una relación, se puede resumir en este planteamiento que hacen los mismos autores:

"Atendiendo al número de relaciones que aparecen explícita o implícitamente en la información que se proporciona en el enunciado se puede hablar se problemas *simples* o *compuestos.* La información suministrada en un problema *simple* contiene sólo una relación entre dos datos numéricos en función de la cual el resolutor tiene que operar para obtener un resultado. Cuando interviene más de una relación en el enunciado de un problema lo llamamos *compuesto". (p. 63)*

Ambas perspectivas (Puig y Cerdán, 1990; Castro, et al., 1998) dan oportunidad de hacer conciencia una vez más de la complejidad de los problemas aditivos, tanto por el número de operaciones implicadas y la complejidad que ello conlleva y por las relaciones semánticas que determinarían la facilidad o no de los problemas. Los planteamientos de estos autores permitirán contar con elementos para analizar los problemas del libro de texto que tengan tales características.

Hasta ahora he presentado referentes teóricos que permiten dar cuenta de las características matemáticas que complejizan los problemas aditivos. Son precisamente esas características las que fungirán como criterios de análisis de los problemas que se abordan en esta investigación.

Ya se han dado elementos teóricos para comprender los elementos matemáticos que complejizan un problema, sin embargo, al ser el contexto de compra-venta una característica de los problemas que aquí se analizan, fue necesario hacerme de herramientas teóricas que permitieran acercarme a los conocimientos de los niños en cuanto al uso del dinero y la compra-venta. A continuación muestro dichos referentes teóricos.

2.5 Estudios sobre Nociones Económicas

Los niños se relacionan con el mundo social desde los primeros años de vida. Caracterizar el proceso de construcción que llevan a cabo los infantes sobre diferentes nociones sociales (política, economía, noción de país) ha sido materia de estudio de diversas investigaciones de corte psicogenético (Delval, 1989; Bacoiquea, 2000). Estas investigaciones permiten identificar las construcciones de los niños en torno al dinero y a la compra-venta.

Delval (1989) subraya la participación activa de los niños en la construcción de las representaciones que se hacen del mundo social. El niño construye las nociones sociales "a partir de elementos fragmentarios que recibe y selecciona, de tal manera que el niño realiza una tarea personal" (p. 245). El autor reconoce que hay una transmisión de información dada por la sociedad, sin embargo organizar esa información es tarea del propio individuo.

Las representaciones elaboradas por los niños son sustancialmente diferentes a las concepciones que los adultos ya tienen construidas. De hecho, Delval afirma que se hace conciencia de esas construcciones a través de la oposición de las representaciones del adulto. Esa conciencia sobre el mundo social va evolucionando en niveles, según el autor, el proceso culmina cuando el niño concibe la sociedad como un conjunto de sistemas múltiples que están en interacción.

La importancia que da el autor al estudio de las nociones económicas en el niño se fundamenta en dos ideas (Delval, 1989, p. 267):

1) Las nociones económicas constituyen un eje de la organización social y además el niño está en contacto con ellas desde muy pronto, posiblemente antes que otras nociones sociales, como por ejemplo las políticas.

2) Estudiar este campo dentro de las representaciones sociales se presta con mayor facilidad que otras nociones sociales, ya que tiene elementos más objetivables (como el problema del cambio y el problema de la ganancia).

La idea de que la construcción de nociones de dinero y compra-venta se da por medio de un proceso evolutivo es una constante en diversos estudios (Berti y Bombi, 1986; Berti y Bombi, 1988; Delval, 1989; Delahanty; 1989; Delval y Echeita, 1991; Bacoiquea, 2000).

- Enseguida presentaré los planteamientos que considero centrales para bosquejar el proceso de desarrollo de las nociones sobre el dinero y la compra-venta en los niños. Esos planteamientos son una referencia que incorporo al análisis de los procedimientos de resolución de problemas aditivos en el contexto de compra-venta, como lo mostraré más adelante.

- Berti y Bombi (1988) señalan que a pesar de que los niños han estado involucrados en distintas operaciones de compra-venta no advierten todos los aspectos que tienen lugar en esa operación. Plantean que es importante considerar los distintos niveles de comprensión de esos aspectos de la compra-venta que no son evidentes para los niños, para entender así la dificultad que puede representar para los niños la comprensión del uso del dinero.

- Uno de esos aspectos de la compra-venta que son poco “transparentes” para los niños, es la ganancia. En su estudio de 1986 Berti y Bombi identifican que es hasta los 10 años que los niños construyen la noción convencional de ganancia. Antes de esa edad los niños creen que los vendedores dan sus mercancías a costos iguales o más bajos de lo que ellos pagan.

- Las autoras señalan tres factores por los que la noción de ganancia no es construida con antelación: 1) los niños no conectan o manejan al mismo tiempo varias piezas de información inmiscuidas en la ganancia, por ejemplo un niño puede en sus explicaciones dar luces de cómo los vendedores reabastecen sus negocios con sus ganancias y cómo las usan también para solventar sus necesidades, pero cuando se le preguntas directamente qué hacen los vendedores con sus ganancias se le dificulta tener en cuenta todos los tipos de gastos, 2) los niños creen que los precios se establecen basándose en las cualidades de los objetos (como su tamaño, color, brillantez), e ignoran otros factores que dependen del proceso en los que se prepararan los productos para ser vendidos, por ejemplo la transportación, si hubo afectaciones a los cultivos en determinado producto, etc., y 3) los niños creen que sólo por el hecho de comprar al mayoreo, los vendedores obtienen ganancias porque ellos compran paquetes grandes de producto y pagan poco por ellos.

- Por su parte, Delval y Echeita (1991) determinan que las dificultades que los niños tienen para comprender el proceso de compra-venta que tiene lugar en una tienda, así como la noción de ganancia, son de dos tipos: cognitivas y socio-morales.

- Los autores señalan que todos los niños saben que “a la tienda hay que llevar dinero, que el dinero sirve para comprar y que sin dinero no se puede comprar” (1991, p.77). Sin embargo el papel que juega el dinero es distinto en las diferentes etapas de desarrollo; en primera instancia, para los niños pequeños el papel que juega el dinero sólo es parte de un ritual; es decir, el dinero debe ser entregado para que te den lo que pediste al comprar, no hay una relación con el costo del producto.

- Delval y Echeita coinciden con los planteamientos de Berti y Bombi al señalar que para el niño hay elementos observables de la transacción de compra-venta pero que otros, con los que no tiene contacto, permanecen ocultos. Estos últimos deben ser construidos por medio de experiencias de lo que sí le es evidente.

- Para Delval y Echeita una de las nociones económicas que no son evidentes, es precisamente la noción de ganancia, la cual, señalan, no está construida en los niños menores de 10 años. Para esta noción existen dificultades de índole cognitivo, como no poder manejar varias informaciones a la vez, coincidiendo con lo planteado por Berti y Bombi (1988). También existen dificultades socio-morales, como la aplicación de reglas como el altruismo y la justicia que, según los niños, debe reinar en las relaciones sociales. Desde la perspectiva de los niños, si un vendedor cobra más de lo que él pagó por el producto, esa acción sería injusta.

- Una de las conclusiones a las que estos autores arriban en sus estudios, es que las explicaciones económicas que los niños formulan no se deben al azar, sino que tienen una lógica interna clara, y los progresos que van logrando en sus explicaciones son resultado de una construcción original que el niño realiza con sus instrumentos intelectuales, los cuales interactúan con la realidad social.

- Por último, presentaré algunos de los planteamientos de Delahanty (1989). Las aportaciones de este autor han resultado fundamentales para llevar a cabo las exploraciones sobre nociones del dinero y compra-venta en esta investigación.

- Delahanty determina que las nociones de dinero se construyen en un proceso evolutivo. Apoyado en Piaget, el autor analiza el proceso de construcción que siguen los niños en torno a las nociones de dinero. Identifica que este proceso se lleva a cabo a través de des-equilibrios, acomodaciones, asimilaciones, re-equilibrios y equilibraciones maximizadoras que marcan el aprendizaje de nuevos elementos sobre las nociones económicas. Delahanty también hace énfasis en cómo el medio social influye en el desarrollo de las nociones económicas del niño, pues éste "desempeña un papel acelerador y transmite además una multitud de ideas que tienen por su parte una historia colectiva" (p. 41). De ahí la importancia de indagar sobre las experiencias sociales de los niños con la compra-venta en esta investigación, pues el autor plantea que "el niño adquiere el concepto de dinero en el intercambio social y se genera con la práctica del manejo de monedas y billetes que da o recibe para adquirir algún objeto o satisfactor" (p.139)

- A través de diversas tareas propuestas a los niños, Delahanty identifica algunos de los conocimientos sobre la noción de dinero que los niños han construido (dichas tareas serán expuestas en el capítulo metodológico de esta tesis). Por las respuestas de los niños a las actividades que les planteó, el autor establece cuatro niveles de desarrollo por los que atraviesan los niños al construir nociones del dinero; en cada uno de esos niveles los niños van avanzando hacia las convencionalidades sociales. A continuación se presentan los niveles identificados por Delahanty y algunas de las características de éstos:

- Nivel 1. De 2 a 4 años. Son indiferentes a las nominaciones de monedas y billetes. Los niños conciben el dinero como un símbolo. Utilizan el dinero como parte de un juego. Identifican el uso del dinero en la compra-venta, pues cuando se compra se paga. Tienen conciencia de la acción de comprar y vender como parte de un juego, pero no hay comprensión del valor del dinero. Las experiencias familiares son la fuente de sus construcciones sobre el dinero.
- Nivel 2. De 4 a 5.5 años. En este nivel los infantes ya conocen algunas denominaciones de monedas, existen algunas confusiones en los niños para determinar si los billetes deben ser considerados dinero. La seriación que hacen del dinero no es constante aún al tener en cuenta el valor de las distintas denominaciones. Realizan ya operaciones de compra-venta sencillas realizando acciones por imitación, y establecen relaciones entre mercancía y dinero, es decir saben que para obtener una mercancía hay que dar dinero. Para ellos el precio de las mercancías es algo arbitrario que ha conseguido consenso social.
- Nivel 3. De 5.5 a 7-8 años. Identifican y comprenden el valor de las monedas; incluyen tanto monedas como billetes en la categoría de dinero. Hacen diferencias entre mercancías caras y baratas. Realizan operaciones de compra-venta más complejas (por ejemplo, manejan varias monedas, intercambia dinero por mercancía). Ya tienen conciencia del precio, es decir saben que el precio especifica cuánto dinero deben pagar por el producto. Aparece en este nivel la relación entre dinero y trabajo, es decir saben que trabajando es como se obtiene dinero. Los niños creen que los objetos no pueden compartir el precio, el precio es único para cada producto.

- Nivel 4. De 7-8 a 12 años. Identifican el valor nominal de monedas y billetes, realizan la clasificación por esta característica. Realizan fácilmente la seriación de la mercancía teniendo en cuenta el valor de los objetos en cuanto cuan caros o baratos pueden ser. Han reconocido que para realizar intercambio en la compra-venta el monto del dinero depende del valor, no sólo del número de monedas. Identifican que en ausencia de dinero no se puede realizar ninguna compra. Utilizan sumas y restas al realizar compras.

Para los fines de esta investigación los niveles descritos no pretenden ser un parámetro, es decir, no se buscó establecer niveles de desarrollo en exploraciones que se hicieron con un grupo de niños, como se describirá en el capítulo de Metodología. Los resultados del trabajo realizado por Delahanty permiten contar con herramientas que ayudan a identificar algunos conocimientos de los niños en torno al dinero, su uso y la compra-venta. De igual manera algunas de las tareas diseñadas por Delahanty dieron pautas para el diseño de las tareas exploratorias que se llevaron a cabo en este trabajo. En el siguiente capítulo haré especificaciones al respecto.

2.6 El Uso del Dinero como Recurso Didáctico

Dado que esta investigación parte de preocupaciones didácticas, ha sido necesario acercarme a investigaciones que abordan el uso del dinero como recurso didáctico. Algunos de estos estudios tienen lugar en la educación infantil y otros en la educación para adultos.

Con el objetivo de indagar qué aprendizajes asociados al uso del dinero tienen los adultos no escolarizados, Delprato y Fregona (2013) hacen una revisión del uso del dinero como recurso didáctico en materiales destinados a la educación matemática de adultos y en materiales destinados para niños.

Las autoras identifican que hay diversos usos didácticos del dinero; asimismo, identifican que el uso del dinero en materiales didácticos para adultos, difiere del uso que se le da en materiales para niños.

En los materiales destinados para adultos, las autoras señalan que el dinero se usa "predominantemente como contexto de trabajo de problemas". Para la enseñanza específica del número, el dinero se utiliza para presentar los usos cotidianos de la numeración, para analizar escrituras numéricas y para explicitar la regla de cambio entre los agrupamientos. En lo que se refiere a la enseñanza de la suma y de la resta, el dinero se usa para explicar los algoritmos, sobre todo el de la suma. La situación de dar "cambio o vuelto" se usa para iniciar el trabajo con la resta, así como para mostrar las transformaciones del algoritmo convencional. Asimismo, el dinero se utiliza como un recurso de verificación, junto con la calculadora. Todos estos usos didácticos del dinero se apoyan en la familiaridad que se supone los adultos tienen con el manejo del dinero.

Respecto a materiales para niños, Delprato y Fregona identifican que principalmente el dinero se utiliza como "contexto de trabajo", es decir recurren al dinero para plantear situaciones didácticas, y que aparece pocas veces la sugerencia de recurrir al uso de billetes y monedas. En cuanto a los conocimientos acerca del número, se utiliza el dinero para ampliar los conocimientos de la escritura numérica que ya ha sido trabajada con otros soportes y estrategias (por ejemplo, tabla de números). De igual manera se trabaja el valor posicional a través de la descomposición de billetes y monedas y se recurre a la idea de canje para reforzar el agrupamiento. También se emplea el dinero para conteo "de a tanto", para ejercitar cálculo mental. Una peculiaridad del uso del dinero en los materiales para niños es que el sistema monetario se toma como objeto de enseñanza.

Como puede observarse, el uso del dinero como recurso en materiales para enseñanza es diverso y frecuente. Cabe subrayar una diferencia importante: en el caso de los materiales para niños el sistema monetario es objeto de enseñanza en sí mismo, los niños deben aprender a manejar el dinero. Esto no sucede en materiales para adultos, ya que se considera que ellos tienen un manejo "experto" del dinero por usarlo frecuentemente en sus actividades cotidianas. Esta diferencia señalada por las autoras me ha llevado a cuestionarme sobre la "naturalización" que puede hacerse de los conocimientos de los niños sobre el dinero, por ejemplo homogeneizar las experiencias de los alumnos - dar por hecho que todos los niños compran en el mismo tipo de establecimiento, que incurren en tipos de prácticas similares o realizan los pagos bajo las mismas circunstancias-; además, es importante tener en cuenta las consecuencias que dicha "naturalización" pudiera tener.

En ese sentido, Chandler y Kamii (2009) plantean algunas reflexiones sobre el uso del dinero en la educación infantil, particularmente cuando se le utiliza para introducir el estudio de algunos aspectos del Sistema de Numeración Decimal. Al respecto, las autoras identifican tres posturas en diversas investigaciones: a) el dinero puede apoyar aprendizajes sobre valor-posicional porque está compuesto bajo el sistema base-diez (Hatfield, Edwards, Bitter y Morrow; 2000); b) no es recomendable el uso de monedas, bloques base 10 o cubos unifix para enseñar decenas y unidades; el razonamiento sobre estos conceptos son abstracciones mentales, el razonamiento no es realizado con objetos externos (Kamii 2000, 2004); y c) una postura neutra de Van de Walle´s (2007) quien recomienda el uso de bloques base 10 y el trabajo con dinero para abordar el valor posicional.

La posición que Chandler y Kamii asumen es la que se señala en el inciso b del párrafo anterior. Los resultados del estudio que realizaron muestran que a los niños de primer y segundo grado de primaria les cuesta trabajo dar el cambio cuando tienen que desagrupar monedas de 10 centavos (en inglés: dime) en centavos (en inglés: pennies) para poder restar. Las autoras explican cómo es difícil para los niños comprender que "dentro" de una moneda de diez centavos se encuentran "contenidas" diez monedas de un centavo, pues los niños deben comprender que diez unidades conforman una nueva unidad llamada decena. Ello da pauta para subrayar la importancia de cuestionarse si el dinero es tan "transparente" para los niños como a veces lo suponemos; si bien es cierto que ciertas características del dinero podrían hacer más accesibles algunos contenidos matemáticos, también es cierto que, en algunos casos, tales características tienen sus propias complejidades que requieren ser tomadas en cuenta.

Una de esas características que resulta importante tener en cuenta al trabajar con dinero, es la "cardinalidad implícita" de este recurso: por una parte el dinero implica una magnitud discreta (por ejemplo, cuando se trata de contar la cantidad de monedas que se tienen), pero a su vez ese dinero tiene un valor, lo cual conlleva que los alumnos tengan en cuenta siempre que el valor de una moneda en conjunto con la cantidad de monedas que se tienen, lo cual es que determina la cantidad de dinero con el que se cuenta. Se pueden tener 5 monedas, pero si el valor de cada moneda es de \$2, entonces se tiene un valor total de \$10. Los niños, al trabajar con dinero, deben ir haciendo consciente esta característica del mismo[10].

Dicha característica, según lo plantean Chandler y Kamii (2009) tiene que ver con uno de los tipos de conocimientos que están relacionados con el dinero. Basándose en los estudios de Piaget, las autoras señalan que existen tres tipos de conocimiento relacionados con el dinero: a) conocimiento físico, por ejemplo: color, peso, tamaño de monedas y billetes; b) conocimientos

[10] Además de esta peculiaridad del dinero (cardinalidad implícita) otra particularidad es que "el conteo del dinero de diferentes denominaciones donde se repiten varios valores nos mete involuntariamente a relaciones de tipo aditivo-multiplicativa, evidentemente en una estructura semántica aditiva" (Martiradoni, 2014, en comunicación personal).

de convencionalidades sociales, por ejemplo: basar el sistema monetario en el sistema base 10 y no en otra base; y c) conocimientos lógicos matemáticos, como lo es la abstracción de los órdenes de unidades y decenas implicadas en comprender que una moneda de $10 "contiene" 10 monedas de $1. Como puede advertirse, en el conocimiento de tipo lógico-matemático se encuentra la abstracción que permite a los niños comprender equivalencias entre ciertas cantidades de dinero conformado con diversas denominaciones de monedas y billetes. Las autoras enfatizan que esos conocimientos lógicos matemáticos son construcciones que los niños deben elaborar mentalmente por medio de la abstracción independientemente del material externo que lo represente. Al respecto sobre apoyar construcciones matemáticas –en específico el aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal y la adición- en distintos materiales externos, Vergnaud (1991) alude que es necesario que los niños pasen del uso de algún material a otro, lo cual permitirá a los niños construir distintas maneras de representar las mismas cantidades. El trabajo que el autor propone es un trabajo paralelo con distintos materiales, sí bien no especifica nada acerca del uso del dinero como un tipo material externo, pudiera considerarse este recurso como uno más que amplíe la gama de materiales de la que habla Vergnaud.

Así como los planteamientos de Chandler y Kamii (2009), y Delprato y Fregona (2013) me ayudan a reflexionar sobre los usos del dinero en la enseñanza y sobre los alcances de esos usos, el estudio de Ferreiro (1986) aporta elementos interesantes sobre la utilización del dinero para promover cálculos escolares.

Ferreiro hace un estudio sobre las nociones de dinero, de compra-venta y cálculo matemático con dinero en alumnos trabajadores pertenecientes a escuelas urbanas marginadas. La autora reporta que los niños "tienen una posibilidad de cálculo con dinero que es superior a lo que la escuela constata, al ocuparse [la escuela] solamente por la representación del cálculo (con lápiz y papel)" (p. 21). A lo largo de su escrito la investigadora enfatiza cómo alumnos trabajadores han desarrollado habilidades variadas que les permiten realizar cálculos con dinero de manera eficiente y cómo esta realidad es desaprovechada en la escuela. Estos planteamientos me invitaron a estar atenta a las habilidades de cálculo que los niños mostraran y a su vez a cuestionar si esas habilidades eran o no promovidas y/o aprovechadas en la escuela.

Los planteamientos de los distintos estudios que se han comentado en este sub-apartado, me llevan a advertir la complejidad que implica tanto el uso de dinero como la actividad de compra-venta. Sin embargo, si bien es cierto que se trata de construcciones conceptuales complejas, también es cierto que son próximas a los niños, que desde muy temprana edad ellos se hacen hipótesis sobre cómo funcionan esos "objetos" y, de hecho, los niños pueden participar en algunas prácticas sociales que conllevan el uso del dinero y de la compra-venta sin necesariamente tener "todo el panorama" de lo que esos conceptos implican.

Por último, me parece importante destacar que la diversidad de perspectivas teóricas que se han abordado en este capítulo (teorías didácticas sobre los problemas aditivos, estudios de corte psicogenético sobre nociones económicas, estudios que abordan el dinero como recurso didáctico) obedece a la complejidad misma del objeto de estudio. Pretender identificar los procedimientos de resolución que tienen lugar en problemas aditivos en contexto de compra-venta, implica considerar los distintos aspectos que pueden intervenir en las resoluciones de los niños. Aun cuando centro la atención en las relaciones semánticas y numéricas de los problemas, considero también la posible influencia que las experiencias y conocimientos previos de los niños sobre el dinero y la compra-venta pudieran tener en los procedimientos de resolución.

La consideración de elementos teóricos de diversas perspectivas implica ir discerniendo lo que cada una de ellas puede aportar a la comprensión del objeto de estudio y, al mismo tiempo, demanda ir creando relaciones entre esas perspectivas. Al parecer podemos ir adelantando el planteamiento de que enseñar a través de problemas aditivos en contexto de compra-venta, puede ser una tarea docente más compleja que lo que se supone.

Los elementos teóricos mostrados en este capítulo permitieron contar con bases que fundamentan las decisiones metodológicas que se muestran en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Decisiones Metodológicas

Esta investigación centra la mirada en los procedimientos de los alumnos al resolver problemas de tipo aditivo; para ello, se recurre a dos vías de indagación: por una parte, se identifican los procedimientos de resolución que ponen de manifiesto diez alumnos de segundo grado al participar en la simulación de una actividad de compra-venta ("La tiendita"). Por otra parte, se realiza un análisis previo de los problemas aditivos en contexto de compra-venta que se presentan en el libro de texto gratuito de segundo grado; es decir, se identifican las características matemáticas que componen esos problemas y, con base en ellas, se trata de anticipar los posibles procedimientos de resolución.

La actividad simulada de "La tiendita" (la cual es una situación didáctica muy recurrente en las clases de matemáticas en el nivel primaria) es considerada en esta indagación en la modalidad de tienda de artículos escolares o "papelería". Se recurre a entrevistas video-grabadas de cada uno de los 10 alumnos y posteriormente se analizan esas entrevistas, bajo ciertos criterios que presentaré más adelante. Respecto a la muestra de alumnos elegida es importante señalar las siguientes características:

- El 50% de la muestra son mujeres y 50% son hombres
- Se eligieron alumnos que representaran la edad promedio de los alumnos del grupo de segundo al que pertenecían: 7 y 8 años

- La docente de grupo determinó el desempeño académico de los alumnos en tres niveles “bajo, medio y alto” según su perspectiva, y se optó porque en la muestra de alumnos estuvieran considerados alumnos de todos los “niveles”

- Se esperaba poder considerar a alumnos cuyos padres se dedicaran al comercio, para indagar si los acercamientos que los alumnos tuvieran con las prácticas que emanan del trabajo de sus padres, influirían en el desempeño de sus hijos en las entrevistas, sin embargo ningún alumno del grado participante cumplía con esta característica

Como mencioné, el propósito central de la simulación fue identificar y caracterizar los procedimientos que los niños llevan a cabo al resolver problemas aditivos en contexto de compra-venta; sin embargo, esa simulación fue a la vez un medio para indagar algunos de los conocimientos de los niños respecto al dinero y a la actividad de compra-venta.

En lo que se refiere al análisis previo de las lecciones del libro de texto, éste tiene el propósito de anticipar los posibles procedimientos de resolución, así como los errores y dificultades que los alumnos pudiesen enfrentar, en función de ciertas variables didácticas presentes en los problemas. En este caso no se pidió a los alumnos que resolvieran los problemas del libro de texto, sino que a partir del análisis de las variables didácticas de los problemas, apoyándome en investigaciones que ya han documentado ciertos procedimientos y recuperando algunos de los hallazgos de la implementación de “La papelería”, es que procuro llevar a cabo este análisis previo.

En términos metodológicos, estas dos estrategias utilizadas para el abordaje de las preguntas de investigación conforman un estudio de tipo cualitativo transversal, con alcances exploratorios y descriptivos (Hernández, Fernández, y Baptista, 2007). Se considera de tipo transversal dado que el estudio se realiza a una población en un sólo momento, con intención de identificar sus conocimientos sobre el dinero y los procedimientos aditivos que llevan a cabo. Las indagaciones efectuadas en torno a los conocimientos de dinero y compra-venta y los procedimientos de los alumnos son de tipo exploratorio, es decir, se trata de un acercamiento a algunos esos saberes. Por último la nominación de “alcance descriptivo” se adjudica a las descripciones que se hacen en este estudio sobre los procedimientos, los aprendizajes sobre el dinero y compra-venta que han construido y las características de los problemas del libro de texto.

Cabe recordar las preguntas de investigación que me propuse abordar y que justifican las decisiones metodológicas expuestas en este capítulo:

- ¿Cuáles son los procedimientos que alumnos de segundo grado ponen de manifiesto al resolver problemas aditivos en el contexto de la compra-venta y/o el uso del dinero? ¿Qué dificultades presentan y qué relación tienen esas dificultades con las características de los problemas aditivos planteados?

Para responder a esa pregunta analizo dos recursos de enseñanza comúnmente utilizados en el aula: la situación didáctica que emula la compra-venta (“La tiendita”) y los problemas aditivos que se plantean en el libro de texto. El análisis de ambos recursos está orientado por lo siguiente:

- Considerando los problemas aditivos más comunes que tienen lugar en situaciones escolares que emulan la compra-venta (“La tiendita”), ¿qué procedimientos utilizan alumnos de segundo grado de primaria al resolver tales problemas?
- ¿Cuáles son las características semánticas (el tipo de relaciones entre los datos del problema) y numéricas (el tipo y tamaño de los números implicados) de los problemas

aditivos en contexto de compra-venta que se plantean en el libro de texto de segundo grado?, ¿cuáles son los procedimientos de resolución que los alumnos podrían llevar a cabo ante dichos problemas?, ¿qué dificultades y/o errores podrían presentarse?

Como he mencionado, para responder a las preguntas de investigación fue necesario realizar tareas en torno a tres aspectos: 1) diseño e implementación de la situación “La papelería” para identificar los procedimientos que usa un grupo de niños para resolver problemas aditivos, 2) diseño e implementación de “La papelería” para indagar los posibles conocimientos de los niños sobre el uso del dinero y la compra-venta y, 3) análisis de los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto.

Es importante subrayar cómo las tareas propuestas se enriquecían de forma recíproca: las indagaciones en “La papelería” permitieron construir parámetros y preparar la mirada (junto con otros estudios teóricos) para el análisis del libro de texto, a su vez dicho análisis implicó mirar con “nuevos ojos” y enriquecer el análisis de los resultados de la actividad simulada de compra-venta. Por otra parte, identificar algunos de los conocimientos de los niños en torno a la compra-venta y el uso del dinero, permitió reflexionar sobre las posibles implicaciones que el contexto tiene sobre los procedimientos de los alumnos y dar cuenta de la importancia de la “no naturalización” del contexto.

En los siguientes apartados se explicitan con mayor detalle los elementos metodológicos que conforman cada una de las indagaciones realizadas.

3.1 Ingeniería Didáctica. El Papel de los Análisis Preliminares y A Priori

Como se mencionó en el capítulo teórico, una de las referencias centrales de este trabajo es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), la cual proporciona un marco para interpretar los conocimientos matemáticos considerando las situaciones en las que tales conocimientos tienen lugar. Asimismo, la TSD ofrece herramientas teóricas y metodológicas que permiten no sólo comprender los procedimientos de los alumnos ante una situación determinada, sino incluso, anticiparlos. En este apartado presentaré algunos de los planteamientos que dan sustento a la metodología de investigación de la TSD –la ingeniería didáctica – y que justifican buena parte de las decisiones metodológicas tomadas para este trabajo.

La ingeniería didáctica puede ser considerada desde dos acepciones: "llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica" (Artigue, 1995, p. 36). En este trabajo de investigación es tomada en el segundo sentido. La ingeniería didáctica busca estudiar procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, a través del diseño y experimentación de situaciones que permitan la génesis artificial de un saber matemático en el aula.

El término de ingeniería didáctica fue acuñado por Y. Chevallard en la década de los ochentas. Según Artigue (1995), su denominación como ingeniería hace referencia al trabajo de los ingenieros en el sentido siguiente:

> Al realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo se encuentra obligado a trabajar con ciertos objetos mucho más complejos que los

objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (pp. 33-34)

Uno de los propósitos de la ingeniería didáctica es diseñar, implementar y analizar situaciones didácticas que permitan aprendizajes matemáticos de la manera menos accidentada para los aprendices. Se busca encontrar el camino más eficaz que permita que el alumno construya conocimientos matemáticos con sentido (Chamorro, 2003).

Artigue (1995) señala que una característica importante de esta metodología de investigación, comparada con otras metodologías basadas en la experimentación en clase, es el tipo de registro que se elabora y sus formas de validación. Mientras que en las otras metodologías se recurre a un enfoque comparativo de validación externa, comparando los resultados de un grupo experimental con uno control, la ingeniería didáctica se ubica en el registro de casos y su validación es interna comparando los resultado de un análisis a priori (que se realiza antes de la implementación de la situación didáctica) y un análisis a posteriori (una vez realizada la implementación).

Según la misma autora la realización de una ingeniería didáctica consta de cuatro fases, a saber: 1) análisis preliminares, 2) concepción y análisis a priori, 3) experimentación didáctica y, l 4) análisis a posteriori y evaluación.

El análisis preliminar consiste en contar con los elementos necesarios para llevar a cabo decisiones suficientemente informadas en el diseño didáctico, algunos elementos que permitirían contar con un buen parámetro de información son: a) el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, b) el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos,

c) el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, d) El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva (Artigue, 1995; p. 38).

La fase de concepción y análisis a priori consiste en tomar todas las decisiones necesarias para controlar los significados que se movilizan en la situación didáctica, es momento de decidir qué variables poner en juego de acuerdo al conocimiento matemático que se espera se construya. “En esta segunda fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema… Estas son las variables de comando” (Artigue, 1995; p. 42). El análisis realizado en esta fase está conformado por hipótesis que se realizan teniendo en cuenta las características del conocimiento matemático y las decisiones tomadas sobre las variables. Dichas hipótesis serán aceptadas o rechazadas una vez que se realice la comparación en la última fase de la metodología en donde se compara el análisis a priori con el análisis a posteriori.

En la fase de experimentación didáctica se lleva a cabo la implementación de la situación didáctica realizando el registro de casos que anteriormente se mencionaba como característica de esta metodología. Una vez recabados los datos emanados de la investigación se lleva a cabo el análisis a posteriori sobre lo que sucedió en la implementación, comparando dichos datos con el análisis a priori realizado anteriormente, cumpliéndose así la cuarta fase de esta metodología.

De las cuatro fases que integran la ingeniería didáctica, considero que este trabajo se inscribe en dos de ellas: los análisis preliminares y el análisis a priori. Se relaciona con los análisis preliminares en dos tipos de análisis[11]: el “análisis epistemológico de los contenidos” y

---

[11] En cierto sentido esta tesis también podría inscribirse en “análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos”. (cambiando la palabra “tradicional” por “actual”), considerando el análisis que se hace de los problemas del libro de texto. Sin embargo, lo central en esta investigación es realizar un análisis a priori de los problemas centrando la

el análisis de “las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución”.

Particularmente en lo que se refiere al “análisis epistemológico de los contenidos” no es que en este trabajo se propongan nuevas categorías para el análisis de problemas aditivos, pues éste se basa en aportaciones como las que Vergnaud y la escuela inglesa ya han hecho, pero sí se muestra una forma de utilizar dichas categorías como herramientas de análisis de situaciones específicas, lo cual de alguna manera contribuye con el enriquecimiento del mismo análisis epistemológico.

En cuanto al análisis de “las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución”, esta tesis se inscribe en este aspecto de los análisis preliminares por la aproximación a los conocimientos sobre dinero y compra-venta de los niños de segundo grado, llevada a cabo a través de actividades exploratorias. Consideré importante tomar en cuenta investigaciones relevantes al respecto y aportaciones que desde perspectivas psicogenéticas enriquecieran el análisis del contexto de compra-venta como móvil para problemas aditivos.

Ya se ha mencionado que esta investigación contribuye al mejor conocimiento de las situaciones aditivas mediante el análisis de los problemas aritméticos que se realizan tanto de las lecciones del libro de texto, como de las situaciones que se diseñan para la exploración de la “La papelería”. Si bien en este trabajo no se realiza el diseño de una secuencia didáctica, sí se recurre al análisis a priori para analizar situaciones ya diseñadas, utilizando como herramientas resultados de otras investigaciones. De igual manera es importante señalar que en la situación

---

mirada en los procedimientos, lo que lleva a considerar la caracterización de los problemas aditivos del libro como un medio y no como un fin.

“La papelería” sí se cumplieron las otras fases de la metodología: la implementación y el análisis a posteriori, fase que arroja los resultados que se presentarán en el capítulo 4.

Cabe destacar que un análisis a priori, de acuerdo con las características de la situación didáctica, está constituido por una parte descriptiva y otra predictiva (Artigue, 1995). La parte descriptiva del análisis a priori en esta investigación, está conformada por la descripción de las variables de los problemas del libro de texto. La parte predictiva queda asentada en las hipótesis sobre los posibles procedimientos, errores y dificultades, generadas a partir de las características de los problemas aditivos analizados.

El análisis de los problemas del libro de texto se hace en torno a la identificación de las variables didácticas en juego. Artigue (1995) señala que existen dos tipos de variable “comando”: las globales o macro-didácticas, que tienen relación con la información global de la ingeniería y las locales o micro didácticas que se relacionan con la organización local de una secuencia didáctica. En esta investigación se consideran las variables micro-didácticas presentes en los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto, por ser lo que el docente pudiera variar en los problemas para promover en sus alumnos la construcción de otros sentidos de la suma y la resta.

Por último, respecto al uso del análisis a priori dentro de esta investigación, se utilizó para re-diseñar una actividad cotidiana en el aula como lo es “La tiendita” y transformarla en una actividad exploratoria. Se puede considerar como re-diseño a las decisiones tomadas en torno a: la elección de las consignas, los precios a utilizar, el tipo de problemas a plantear, los rangos numéricos implicados, los materiales proporcionados para la solución de los problemas, entre otros.

Como se ha mencionado en este apartado, la aplicación de entrevistas dentro de la actividad simulada “La papelería” y el análisis del libro de texto fueron las dos vías de indagación llevadas a cabo para abordar el objeto de estudio de esta investigación. En los siguientes sub-apartados se describen de manera específica decisiones metodológicas tomadas para llevar a cabo ambas tareas.

3.2 Simulación de la Actividad de Compra-Venta. Situación Didáctica “La Papelería”

He señalado anteriormente que la situación didáctica de “La papelería” constituye un recurso metodológico para acercarse a los procedimientos de los niños y así dar cumplimiento a algunos de los objetivos de esta investigación. El siguiente cuadro sinóptico (figura 3) presenta la relación entre los objetivos que se persiguen y las tareas que se plantearon en las entrevistas individuales de la actividad simulada:

Figura 3. Relación entre objetivos de investigación y tareas planteadas en entrevistas individuales

.

Objetivos de la actividad simulada “La papelería”

- Identificar conocimientos de los niños sobre el uso del dinero y la compra-venta
  - Conversación sobre dinero y compra-venta
  - Clasificación de monedas y billetes
  - Seriación de monedas y billetes
    Nombrar el valor nominal de monedas y billetes
  - Seriación de mercancía. Concepto de “caro y barato”
  - Conversación para indagar noción de ganancia y cambio
- Identificar procedimientos de resolución al enfrentar problemas aditivos en contexto de compra-venta
  - Resolución de problemas aditivos de composición de medidas (determinar el monto a cobrar)
  - Resolución de problemas aditivos de transformación de medidas (determinar el monto del cambio a devolver)
  - Interacción e indagación sobre procedimientos de los niños

Tres características importantes de esta simulación y que serán explicitadas más adelante son:

- Los roles jugados por los participantes: alumno- vendedor, entrevistadora-comprador
- Las intervenciones realizadas por las entrevistadora
- Las categorías de problemas planteados y sus características

3.2.1. Entrevistas semi-estructuradas.

Las entrevistas llevadas a cabo en el transcurso de la simulación tienen las siguientes características: son entrevistas semi-estructuradas, con la flexibilidad necesaria para realizar preguntas en función de las respuestas que dan los niños, de tal manera que pueda hacerse una indagación más profunda. Al llevarse a cabo en el contexto de una actividad simulada de compra-venta en la que quien entrevista hace el papel del comprador y el entrevistado hace el papel de vendedor, el entrevistador no es un observador de las acciones del sujeto, como lo señalan Carraher, Carraher y Schiliemann (1995), sino que él mismo está inmiscuido en la actividad.

Los autores anteriores denominan a ese método “observación participativa”, y es el mismo que utilizan al entrevistar a niños trabajadores de Brasil, a quienes les plantean problemas en su actividad laboral. Los autores señalan que en este método como el entrevistador formula preguntas en el transcurso de una interacción entre el vendedor y el cliente, el cliente se convierte en un cliente-examinador que pregunta y verifica el proceso de obtención del resultado.

Aunado a ese método, también el método clínico piagetano fungió como sustento relevante para la implementación de las actividades exploratorias. Con este método, las respuestas de los niños daban lugar a nuevas preguntas que permitieran conocer a mayor profundidad la lógica de la acción del niño. Este método clínico ha sido utilizado en numerosas investigaciones de la didáctica de las matemáticas. De hecho, desde los inicios de la TSD Brousseau recurre a fundamentos planteados por Piaget para dar respuesta a sus preguntas y realizar sus investigaciones (Brousseau, 2000).

La manera en la cual se iban construyendo las nuevas preguntas, de acuerdo con el desarrollo de la entrevista, se dio en el mismo sentido que Delval (2011) señala sobre el método clínico. Este autor explica que de acuerdo con lo que el entrevistado va manifestando sobre sus procedimientos de resolución y sus justificaciones, el entrevistador va formulando hipótesis sobre lo que el niño explica. Estas hipótesis le permiten generar nuevas preguntas o plantearle al niño contradicciones para indagar su forma de resolverlas. Delval afirma: "el experimentador… realiza intervenciones motivadas por la actuación del sujeto y que tienen como objetivo esclarecer cuál es el sentido de lo que el sujeto está haciendo" (p. 513). Como puede suponerse este aspecto demanda flexibilidad por parte del entrevistador, considero que precisamente esta característica en las entrevista, es lo que permitirá contar con elementos que ayuden a identificar los procedimientos, errores y dificultades de los alumnos al solucionar los problemas planteados.

Es así que a lo largo de las tareas desarrolladas en la simulación de compra-venta, fui realizando preguntas que me permitieran contar con elementos para analizar y comprender lo que los niños muestran en sus respuestas. Sí existía un guión de preguntas previamente preparado para las entrevistas, pero no eran determinantes pues de acuerdo al desarrollo de las tareas se iban realizando otras cuestionantes que permitieran conocer lo que se pretendía indagar. Dichas preguntas se harán explícitas en líneas posteriores cuando se describa con mayor profundidad las tareas de la actividad simulada.

3.2.2 Los roles en la actividad simulada.

Como ya se dijo, durante la actividad simulada de compra-venta los alumnos jugaron el rol del vendedor y la entrevistadora el papel del comprador. Esta decisión metodológica se llevó a cabo por los siguientes motivos:

a) Como vendedor era necesario acomodar y preparar los productos y el dinero que se utilizarían en la actividad simulada, lo cual permitía un escenario ideal para indagar algunos conocimientos de cada niño sobre el dinero y la compra-venta.

b) En las actividades reales de compra-venta, el papel del vendedor conlleva la realización de tareas que implican distintos cálculos, como calcular el total a cobrar y lo que debe darse de cambio (el dinero sobrante). El rol del vendedor no es un papel que los alumnos participantes estén habituados a llevar a cabo en actividades reales de compra-venta, por lo cual estar en ese papel permite que se posicionen frente a los problemas aditivos desde otra perspectiva y que se les planteen otro tipo de retos. Enfrentar a los niños a un rol distinto al que están habituados a vivir permite que realicen tareas matemáticas que ponen en juego procedimientos que me interesa analizar.

c) Siendo la entrevistadora quien realiza la compra puede ir eligiendo, según el desarrollo de la entrevista, los artículos a adquirir y decidir así el rango numérico de los problemas. De la misma manera, ella decide el monto con el cual se efectúa el pago, incidiendo de esta forma en el grado de dificultad de los problemas planteados a los alumnos.

d) El papel de comprador da a la entrevistadora la oportunidad de realizar preguntas sobre los procedimientos de cálculo de los alumnos ("¿Por qué me estás cobrando $45?"), o hacer señalizaciones cuando, por ejemplo, se entrega una cantidad incorrecta de cambio ("Creo que me falta cambio").

3.2.3 El material utilizado en la actividad simulada.

Se puede clasificar el material utilizado durante la entrevista en dos grupos, el primero es el material para llevar a cabo la actividad simulada (billetes, monedas, artículos de compra, etiquetas con los precios, caja con divisiones para acomodar el dinero), y el segundo es el material dispuesto para la resolución de problemas (lápiz y papel, calculadora y también las monedas y billetes).

Se buscó que los materiales utilizados en la actividad simulada fueran en la medida de lo posible apegados a la realidad. Las monedas utilizadas y los artículos para realizar las compras eran verdaderos, mientras los billetes eran de juguete similares a los reales, excepto en el tamaño. Ningún niño tuvo objeción por trabajar con los valores de los billetes como si fueran reales.

Durante la puesta en marcha de las entrevistas se señalaba a los niños que para dar el cambio y para cobrar podían utilizar, si así lo querían, calculadora, lápiz y papel y el dinero. Se decidió poner estos recursos al alcance de los alumnos para abrir el abanico de posibilidades de procedimientos, bajo la premisa de que el recurso elegido puede incidir en los procedimientos de cálculo. También se decidió proveer a los alumnos de tales herramientas para analizar la frecuencia de su uso al resolver los problemas. Los argumentos para la inclusión de cada uno de esos recursos se presentan a continuación:

El lápiz y el papel permitirá a los niños contar con una herramienta con la que pueden hacer algoritmos escritos, pero también les permitirá poder representar los problemas por medio de dibujos en caso que así lo decidan, o bien utilizar diferentes marcas (como palitos o bolitas) para acompañar sus procedimientos.

El dinero, además de tener que estar presente para poder llevar a cabo el "juego" de una manera más apegada a la realidad, podría ser utilizado por los niños como una herramienta para resolver los problemas, por ejemplo descomponer la cantidad con la que fue pagada la compra y quitar de ahí el costo total de los productos.

Se determina poner a disposición de los alumnos la calculadora ya que interesa conocer los diferentes usos que pueden hacer de ella los alumnos (Solares, 2012 da cuenta de cómo los alumnos utilizan éste artefacto de distintas maneras). Mi interés por indagar cómo utilizan los alumnos la calculadora al solucionar problemas aditivos surge de la importancia que desde la didáctica de las matemáticas se da a este recurso para el trabajo en la escuela. Por otra parte los Estados del Conocimiento realizados por el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (en adelante COMIE) en 2013 señalan que "llama la atención que en la década que nos ocupa no se realizaron investigaciones acerca del uso de la calculadora" (Ávila, A., Block, D., Camarena, P., Carvajal, A., Eudave, D., Sandoval, I., Solares, A. 2013, p. 49), lo cual, considero justifica las indagaciones que se ha decidido realizar en este estudio.

Por último, mencionaré un aspecto que pudiera parecer insignificante, pero resultó importante en el análisis de las videograbaciones: fue necesario utilizar una calculadora grande, no de bolsillo, que permitiera tener mejor visión de lo tecleado por los niños, la forma en que ellos la utilizan y sus resultados.

3.2.4. Tareas de la actividad simulada para indagar conocimientos de dinero y compra-venta.

Como he mencionado, durante esta investigación fue necesario acercarme a estudios de corte psicogenético que me permitieran indagar sobre los conocimientos de los niños acerca del dinero y la compra-venta. En el capítulo 1 en el que planteo la problemática que se trabaja en esta tesis, señalo las dificultades que mis alumnos de segundo grado enfrentaban al resolver los problemas del libro de texto y al participar en "La tiendita". Ante dichas dificultades preguntas como: ¿por qué para algunos niños es difícil manejar dinero?, ¿qué familiaridad tienen los alumnos con las prácticas de venta?, ¿será que el uso del dinero dificulta más la solución de algunos problemas?, ¿qué características del dinero podrían resultar complejas de manejar para los alumnos?, fueron haciendo evidente la necesidad de aproximarme a lo que los niños saben sobre el dinero y la compra-venta.

Entonces decidí darme a la tarea de acercarme de manera exploratoria a algunos conocimientos de los niños de segundo sobre el dinero y la compra-venta. Los hallazgos de los estudios de Berti y Bombi (1986), Delval (1989), Delahanty (1989), Delval y Echeita (1991) fueron referencia para identificar, en las respuestas de los niños, algunas de las nociones de dinero y compra-venta que los autores identifican. Principalmente las tareas desarrolladas por Delahanty (1989) y por Delval (1989) y Delval y Echeita (1991) fungieron como base para el diseño de las tareas que se plantearon al grupo muestra de 10 alumnos de segundo grado que fueron entrevistados.

Las tareas propuestas por Delahanty (1989) a sus sujetos de estudio fueron siete: clasificación espontánea de mercancías, clasificación de monedas, seriación de monedas y mercancías, conversación general sobre el dinero, intercambio entre pesos y mercancías (un peso por una mercancía), clasificación por el valor de uso de la mercancía y operación de compra-venta. Para las exploraciones que yo realicé tomé como base las primeras cuatro actividades enlistadas de Delahanty, realizando algunas modificaciones.

Fueron en total seis las tareas que propuse a los alumnos para indagar sus conocimientos de dinero y compra-venta. Esas tareas fueron propuestas a los niños bajo el pretexto de "acomodar y preparar" los materiales con los que íbamos a "jugar" a "La papelería". Las tareas son:

- *Conversación sobre el dinero y la compra-venta*

Bajo el pretexto de preparar el material necesario para jugar a "La tiendita o papelería" se presentó a cada uno de los niños una caja con dinero (monedas reales de .10¢, .20¢, .50¢, $1, $2, $5 y $10 y billetes de juguete parecidos a los reales, excepto en el tamaño, de $20, $50, $100, $200, $500 y $1000). Con esa caja de dinero se realizaron algunas tareas y, en el transcurso de las mismas, se tuvo una conversación sobre determinados aspectos del dinero.

Apoyada en las preguntas realizadas por Delahanty, pregunté a los niños a lo largo de la entrevista cuestiones como ¿qué es el dinero?, ¿quién lo hace?, ¿para qué sirve?, ¿cómo se consigue?, ¿tú vas a comprar?, ¿en dónde compras? En función de las respuestas dadas por los niños se iban agregando preguntas para obtener mayor información.

Durante la conversación libre con los niños era necesario aproximarse a las actividades de compra-venta real en las que ellos participan, pues ello permite tener un idea sobre en qué sentido se da su participación en dicha actividad. Para contar con más elementos sobre este aspecto se entrevistaron a los padres de familia de los alumnos participantes. La información aportada por los padres de familia ya no se consideró para este trabajo, pues el análisis de los datos excedía el tiempo disponible para la realización del mismo. Sin embargo, considero relevante la aproximación a las prácticas de compra-venta reales en las que participan los alumnos desde la perspectiva de los papás, pues algunas de esas prácticas podrían enriquecer los contextos de compra-venta que solemos usar en el aula. Recuperaré este planteamiento en las conclusiones generales de la tesis.

Las preguntas que realicé a los alumnos, son: ¿tú vas a la tienda?, ¿vas solo o acompañado? y ¿cuánto dinero te dan cuando vas a comprar?

La pregunta que formulé al papá o a la mamá de cada alumno entrevistado, fue "¿en qué actividades de su casa o la calle en las que se usa dinero, participa su hijo?"

- *Clasificación del dinero*

Delahanty identificó diversos aspectos en los que los niños centran su atención al clasificar las monedas (color, tamaño, valor). Indagué los criterios utilizados por los niños al clasificar el dinero, me interesaba tener referentes para saber si el valor nominal de las monedas y billetes imperaba como criterio de clasificación. El autor únicamente utiliza monedas para pedir a los niños que las clasifiquen, en mi caso también utilicé billetes: di a los alumnos una caja llena de monedas reales y billetes de juguete (revueltos) y les pedí que los acomodaran en otra caja que contaba con divisiones del mismo tamaño. La consigna fue: "acomoda en esta caja el dinero que ocuparemos para jugar".

Cabe mencionar que la caja estaba dividida en 16 espacios y que el tamaño de todos esos espacios era el mismo previendo no dar pista alguna a los niños sobre cómo debían realizar la clasificación. La finalidad de esta tarea es saber si los niños usan el criterio del valor de cada denominación de billetes y monedas como criterio primordial de clasificación.

- *Seriación del dinero*

La seriación que se planteó a los sujetos de Delahanty se dio a través de una correspondencia entre dinero y mercancía. En la presente investigación las seriaciones que se pidieron fueron por separado: primero el dinero y como otra tarea la seriación de la mercancía.

Una vez acomodados los billetes y las monedas en la caja (tarea de clasificación del dinero), se tomó un billete y moneda de cada denominación y se les entregaba a los niños sin orden alguno dándoles la siguiente consigna: "acomoda estos billetes y monedas del que vale más al que vale menos". Esta tarea tenía como objetivo explorar si los niños identificaban la diferencia de valores entre las monedas y billetes y conocer si identifican el orden correcto de acuerdo al valor.

Una vez realizada la seriación se pedía a los alumnos enunciaran cuánto valía cada moneda y billete. Con ello se esperaba saber si los alumnos conocían el valor de cada denominación de billetes y monedas.

- *Seriación de mercancías para indagar los conceptos de "caro y barato"*

Como se mencionaba, la clasificación de mercancía se realizó por separado al dinero.

La tarea que enseguida se describe tiene como objetivo indagar los conocimientos que los niños han construido sobre los conceptos de "caro" y "barato", los cuales son términos que frecuentemente usamos en transacciones de compra-venta.

Una vez que se terminaron las tareas con el dinero, se colocaron frente al niño los objetos que se utilizarían como “mercancía” para la situación de “La papelería”: una computadora, un cuaderno, una calculadora, una pluma o bolígrafo, un libro de cuentos, un sacapuntas, un celular, un juego de geometría, una mochila y una almohada o cojín. Los objetos se colocaron sin un orden particular. La consigna que se dio es: “Acomoda los objetos del más caro al más barato”.

Con la seriación de mercancía se indagan los conocimientos que los niños han construido sobre el valor de los objetos, no el valor exacto como precio determinado, sino el valor en términos de lo “caro” o “barato” de un objeto. También permite aproximarse a los criterios en los que los niños se basan para determinar ese valor (qué tan a caro o barato es un objeto). Cuando los niños iban realizando la seriación se efectuaban preguntas sobre los criterios que ellos elegían para determinar que un objeto fuera caro o barato. Al final los niños apareaban la mercancía con el precio en tarjetas con cantidades que se les daban.

- *Conversación para indagar noción de cambio*

Es usual que en los problemas aditivos que se plantean a los alumnos en el contexto de compra-venta, se les pida determinar el cambio. ¿Qué entienden los niños sobre el cambio?, ¿saben cómo se calcula?

Para indagar al respecto, durante la conversación con los niños sobre su participación en actividades de compra-venta se les preguntaba: “¿siempre que compras algo te van a dar cambio?” y “por ejemplo si voy a la tienda y me llevo un billete de $50 y compro un refresco que cuesta $25 ¿me van a dar cambio o no?”

- *Conversación para indagar noción de ganancia*

Apoyada en las tareas y preguntas realizadas por Delval (1989) y Delval y Echeita (1991), se planteó a los alumnos una pregunta en torno a la noción de ganancia. Me resultaba interesante constatar el hallazgo sobre la construcción de la noción de ganancia de manera tardía hasta los 10 años.

Una vez que los niños habían colocado los precios a las mercancías se centraba la atención en el precio de un cuaderno y se preguntaba: "si este cuaderno la señora de la papelería lo da a $16 ¿Cuánto le habrá costado a ella? ¿Más de 16, menos de 16 o igual?"

Después de plantear a los alumnos las tareas descritas, se les plantearon también problemas aditivos a través de la implementación de la transacción de compra-venta. Las características de esos problemas se describen a continuación.

3.2.5. Tareas de la actividad simulada para indagar procedimientos aditivos.

Específicamente las tareas planteadas a los alumnos para indagar sobre sus procedimientos fueron problemas de tipo aditivo. Para elegir los problemas a implementar hubo que reflexionar: ¿Cuándo podemos decir que una situación plantea un verdadero problema matemático al sujeto? En otras palabras, ¿cuándo una situación didáctica presenta un medio que realmente provoca desequilibrios en los sujetos? Los planteamientos anteriores permiten establecer criterios básicos para responder a esas preguntas, tales criterios se hacen más explícitos en la siguiente caracterización propuesta por Brousseau (2000, p. 13):

> 1) En una situación "de aprendizaje"… es necesario que la consigna o el proyecto de acción pueda ser concebido por el sujeto mismo sin el auxilio de su solución, puesto que se trata de construir o de adquirir y

2) el alumno debe poder esbozar, con sus conocimientos actuales, una estrategia de base que corresponda a la consigna que se le dio. El conocimiento nuevo es entonces el recurso para producir el efecto esperado mediante una estrategia más eficaz, más segura, más económica, etc.

Dentro de la actividad de “La papelería” los problemas que se les plantearon a los alumnos fueron de tipo aditivo. Cabe recordar que en la simulación el niño jugaba el rol del vendedor. Los criterios que en general fundamentaron la elección de los problemas que se plantearon durante la simulación, son los siguientes:

- Se decidió enfrentar a los niños únicamente a dos problemas: determinar el monto a cobrar y determinar el monto del cambio o vuelto. El primer problema corresponde a las categorías de composición de medidas (dos medidas se unen para dar lugar a una medida) de acuerdo a la manera en la que es enfrentado por los alumnos, mientras que el segundo corresponde a la categoría de transformación de medidas (una transformación opera sobre una medida o estado inicial para obtener otra medida o estado final).

  Respecto al problema “determinar el monto a cobrar”, es importante señalar que existen dos posibilidades de modelizar el problema: una manera de modelizarlo es como problema de “composición de transformaciones”, ya que la acción de comprar y vender conllevan estados relativos (si yo compro un dulce de $6 y lo pago, ahora tengo -6 o si soy el vendedor ahora tengo +6). Sin embargo, dado que el cálculo relacional implicado no requiere reversibilidad, es decir no implica aplicar la operación contraria despejando la incógnita, los niños enfrentan este tipo de problemas como si fuesen problemas de “composición de medidas”, .el problema se puede modelizar como una composición de medidas. Dado que en esta investigación nos centramos en cómo los alumnos enfrentan el problema –es decir, qué procedimientos llevan a cabo- ubicaremos a estos problemas en la categoría “composición de medidas”[12].

La tarea de “determinar el monto del cambio o vuelto” se modeliza como una transformación de medidas, en la cual una transformación opera sobre una medida o estado inicial para obtener otra medida o estado final.

- La decisión de plantear únicamente este tipo de problemas se basa en que las actividades reales de compra-venta que los niños de la muestra están habituados a realizar (tanto en la escuela cuando participan en la situación didáctica de “La tiendita” como más allá de la escuela cuando compran en las tiendas) implican predominantemente ese tipo de categorías aditivas.
- Los dos tipos de problemas planteados se presentaban de manera intercalada: uno de composición de medidas y uno de transformación de medidas, pues se realizaba la transacción de compra-venta de manera completa: “el cliente” compraba, “el vendedor” cobraba, se pagaba y el vendedor daba el cambio,
- La posición de la incógnita no se varió en los problemas, siempre se preguntaba por el total o estado final. Esta decisión está relacionada con las características de una transacción de compra-venta “común”.
- La complejidad de los problemas se fue incrementando de la manera siguiente: en primera instancia se realizaban compras de un artículo y se pagaba con montos exactos, de tal manera que esto permitiera a los niños entender de qué se trataba la actividad. Posteriormente se realizaban compras de un producto pagando un monto pequeño del que debían dar cambio, la diferencia implicada no era muy grande, por ejemplo comprar un

[12] La misma decisión se tomó para los problemas aditivos del libro de texto que impliquen determinar el monto a cobrar o el monto que se debe pagar.

cuaderno de $16.00 y pagar con un billete de $20.00. Después, de acuerdo al desempeño de los alumnos, aumentaba el rango numérico y las operaciones implicadas; por ejemplo, se compraba más de un producto, el alumno tenía que calcular el monto total de la compra (por ejemplo, un monto de $68.00), se paga con un billete de $100.00 y debía calcular el cambio.

Durante la resolución de los problemas que se le planteaban a los niños, la entrevistadora-compradora realizaba intervenciones como las siguientes: pedía la verificación de los cálculos, hacía preguntas sobre la forma de proceder de los alumnos, advertía a los niños los errores sin señalarlo explícitamente (usando por ejemplo frases como: “creo me está dando mal el cambio, mi mamá me va a regañar”).

Sobre el diseño de los problemas de composición de medidas implicados en la tarea de cobrar por la compra de dos productos, es importante señalar las siguientes decisiones:

- El número de sumandos implicados fue dos (se compraban dos productos)

- Los precios fueron en su mayoría compuestos por números naturales de dos cifras. Al realizar las compras de dos productos, algunos precios podían favorecer el cálculo mental (por ejemplo, cobrar por la compra de un cuaderno de $16 y un juego de geometría de $22), mientras que otros precios podrían favorecer el uso del algoritmo (por ejemplo cobrar por la compra de un cuaderno de $16 y una mochila de $89)

- En algunos casos se usaron números con punto decimal, pues había precios con centavos (el sacapuntas costaba $3.50 y la pluma $4.50). Se procuró “comprar” esos productos de manera conjunta. Si bien los números decimales no son objeto de enseñanza en segundo grado, era de mi interés aproximarme a los procedimientos de los alumnos cuando calculan con estos precios, dada la estrecha cercanía que los niños tienen con las monedas de .50 ¢ en las actividades reales de compra-venta (los niños saben que dos monedas de .50¢ son equivalentes a una de $1.00).

- El valor desconocido correspondía a números de hasta dos cifras; sólo en uno de los problemas el valor desconocido fue de tres cifras.

- Se plantearon problemas que implicaban sumas que conllevan transformaciones de unidades a decenas y de decenas a unidades, así como problemas cuyas sumas no requerían de esas transformaciones.

En lo que se refiere a los problemas de transformación de medidas implicados en la tarea de determinar el monto del cambio, se señalan las siguientes características:

- En algunos de los problemas de transformación negativa que se plantearon a los alumnos se trataba de cobrar únicamente un producto y de calcular el cambio, mientras que otros se trataba de cobrar dos productos a la vez, por lo que el vendedor debía determinar el monto a cobrar y también el cambio[13]
- La entrevistadora/compradora buscaba que existiera una diferencia entre el pago y el costo de los productos, por lo que siempre pagaba con cantidades “cerradas” como $20, $50, $100, $200, según fuera el monto de la compra.

[13] En cierto sentido los problemas en los que se compraban dos productos y luego el vendedor debía dar el cambio podrían ser considerados de dos etapas, pero la dinámica de la actividad de “La tiendita” -a diferencia de los problemas verbales escritos- hace que las etapas se den en momentos diferenciados: yo compro, y el vendedor determina el monto que me cobra y después le pago y determina lo que me regresa de cambio.

- En caso de que los alumnos recurrieran al algoritmo de la resta para determinar el cambio, el hecho de que las cantidades con las que se pagaba terminaran en cero implica, forzosamente, que el algoritmo conlleve desagrupar. Aunque la resta con desagrupación con cantidades que implican cero es la situación más complicada que un niño de segundo grado puede enfrentar (sobre todo restarle a 100), esa característica de los problemas amplían el abanico de posibilidades de procedimientos.
- La variable didáctica que distinguía un problema de otro, era el valor de la diferencia entre el pago y el costo. Por ejemplo, en un problema en el que el vendedor cobra $16 y el comprador paga con $20, la diferencia sólo es de $4; en un problema en el que el vendedor cobra $68 y el comprador paga con $100 la diferencia es de $32. La decisiones sobre ir acrecentando o aminorando la diferencia fueron tomadas en el transcurso de la entrevista, dependiendo del desempeño de los alumnos.

Como se ha mencionado, las tareas llevadas a cabo a través de la actividad simulada tienen la intención, entre otras, de aproximarme a los conocimientos sobre la compra-venta y el uso del dinero que ha construido los alumnos. Los datos que se espera obtener de la actividad simulada también servirán como una referencia más para el análisis de las lecciones del libro de texto, parte fundamental de este trabajo de investigación que a continuación se describe.

3.3. Análisis Didáctico de Lecciones del Libro de Texto

En este apartado se especifican las decisiones teórico-metodológicas para abordar el análisis de los problemas del libro de texto. En primer lugar se explicitan los motivos que justifican la elección del libro de texto gratuito para llevar a cabo esta tarea; posteriormente se presentan los criterios de selección de los problemas a analizar, continuando con los criterios utilizados para analizar los problemas una vez elegidos. Por último, se realiza la descripción de las herramientas metodológicas utilizadas y la manera en que fueron empleadas.

3.3.1. ¿Por qué el libro de texto gratuito?

Si bien existen diversos materiales escritos a los cuales los docentes posiblemente acuden para plantear a sus alumnos problemas aditivos, decidí centrar la mirada en los problemas del libro de texto gratuito “Matemáticas. Segundo Grado” (2012) de la Secretaría de Educación Pública (en adelante, SEP) por los siguientes motivos:

- En el libro de texto se encuentran actividades que se suponen relacionadas con el Plan y Programa de Estudios que rigen nuestro sistema educativo. Si se miran los problemas planteados en éste se podría tener un panorama de las situaciones que se espera los niños sean capaces de resolver. Al respecto Gimeno Sacristán (1991) señala que el libro de texto es el “currículum envasado” que se proporciona a los docentes y que pueden utilizar de manera inmediata.
- Como lo han documentado algunas investigaciones (cfr. García Herrera, 2001; Sacristán, 1991)[14], los profesores recurren constantemente al libro de texto para gestionar su práctica. El libro de texto, en muchos de los casos, juega el papel del currículum en el que los maestros nos basamos para dosificar y elegir las actividades que proponemos a los alumnos, convirtiéndose así en un “programa rector”.
- Al ser una publicación de la SEP, el libro de texto llega a manos de casi todos los docentes y alumnos del país (aunque hay regiones a las que no llega o no a tiempo), por lo que

[14] En su estudio sobre el uso de los libros de texto en primaria en México, Adriana Piedad García Herrera destaca que el uso de este tipo de libro se extiende a los momentos de planeación y evaluación de la enseñanza: “Las maestras no sólo utilizan el libro de texto en el momento mismo de la clase: el libro está presente antes de la clase, en actividades de planeación o preparación; al concluirla, como tarea extraescolar, y al finalizar un determinado periodo de tiempo, en la elaboración de exámenes” (pp. 186-187)

puede decirse que la gran mayoría de estudiantes y maestros tienen contacto con las actividades sugeridas en dicho texto. Cabe destacar que en la edición analizada el tiraje fue de 3, 004,633 libros.

- Es muy probable que la mayoría de los problemas presentados en las lecciones sean abordados en los salones de clase, y también es posible que los docentes tomen esos problemas como ejemplos para plantear a los alumnos otros problemas, cambiando algunos datos.
- Los Estados del Conocimiento sobre investigaciones en didáctica de las matemáticas, realizados en 2013 por el COMIE, argumentan que en las investigaciones revisadas durante el periodo 2002- 2011 no se encuentra registrada ninguna investigación que aborde el tema de problemas aditivos en la categoría de recursos para la enseñanza. De igual manera los autores señalan que "sigue siendo pertinente investigar acerca de otros recursos para la enseñanza de las matemáticas, tales como los libros de texto gratuitos y de editoriales privadas debido a la importancia que, se ha mostrado, tienen en la organización del trabajo en las aulas". (p.49). Esta investigación pretende abordar las ausencias registradas en tales Estados del Conocimiento.

Por último, la relevancia de analizar estos problemas del libro de texto radica en que al conocer las características matemáticas y didácticas del problema, se puede anticipar una serie de aspectos (procedimientos, dificultades y errores) que podrían ayudar al docente a realizar intervenciones didácticas acertadas.

3.3.2. Criterios de selección de los problemas.

La selección de los problemas del libro de texto se llevó a cabo bajo un primer criterio: considerar exclusivamente los problemas aditivos que se presentarán en un contexto de uso de dinero y de compra-venta. Cabe precisar que los problemas que se plantean en el contexto de compra-venta, pero que no recurren al uso del dinero, fueron descartados; mientras que los problemas planteados en un contexto que implica el uso del dinero, aunque no haya una situación de compra-venta, sí fueron considerados. Enseguida se presenta un ejemplo de cada uno de esos dos casos.

a) Problemas que no se consideraron: problemas aditivos en contexto de compra-venta que no incluye uso de dinero. "Las vacas de doña Julia produjeron 63 litros de leche el martes y 81 litros el miércoles. Doña Julia tenía vendidos 70 litros cada uno de los días. ¿Cuál de los dos días le sobró leche?" (Lección 16; p. 62 y 63).

b) *Problemas que sí se consideraron: problemas aditivos que implican el uso de dinero aunque no haya contexto de compra-venta.* "En el grupo de segundo grado, los alumnos se organizaron para ahorrar dinero durante el ciclo escolar. Falta entregar sus ahorros a Pedro y Marta, pero Roberto, quien guarda los ahorros, sólo tiene dos billetes de 50 y otro de 100 pesos. Como Pedro ahorró 72 y Marta, 78 pesos, Roberto decidió dar a Pedro el billete de 50 y a Marta el de 100 con la condición de que Marta le diera a Pedro lo que faltaba. ¿Cuánto dinero le debe dar Marta a Pedro?" (Lección 26; p. 99).

Otro tipo de problemas en el contexto de compra-venta que fueron descartados, son los problemas de tipo multiplicativo. Éstos son problemas con relaciones cuaternarias (es decir donde hay cuatro datos en juego, de los cuales uno es desconocido). Por ejemplo: se presenta a los niños una lista de precios. En ella se observa que el costo del bote de alimento es 5 pesos; el problema dice: "¿Cuánto debes de pagar por tres botes de alimento?" (Lección 4; p. 18).

La dificultad para descartar este tipo de problemas se dio por la relación directa que tienen éstos con el procedimiento de suma iterada[15] al que pudieran recurrir los niños; incluso, en el caso del ejemplo anterior, es probable que los autores del libro de texto lo consideraran como problema de tipo aditivo, pues esa lección está indicada como “problemas de suma y resta”, aunque la relación implicada no es de ese tipo. Sin embargo se decide descartarlos por implicar estructuras multiplicativas, las cuales pertenecen a otro campo conceptual donde aparecen conceptos matemáticos distintos a los aditivos.

3.3.3. Criterios de análisis de los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto.

Una vez seleccionados los problemas del libro de texto que se iban a considerar, se construyó una herramienta de análisis para identificar las características de este tipo de problemas (problemas de tipo aditivo en contexto de compra-venta). Esta herramienta se nutrió de los referentes teóricos que ya han sido descritos en el capítulo 2.

En dichos referentes se hace alusión a los elementos que complejizan los problemas de tipo aditivo y que han sido materia de estudio de perspectivas teóricas como la TCC y lo propuesto por Bermejo y Rodríguez (1991) y Puig y Cerdán (1990). Cada uno de esos elementos conforma un criterio de análisis, una característica a identificar y describir en los problemas analizados. Además se consideran también los estudios de corte psicogenético y los resultados de las indagaciones obtenidas por medio de la situación didáctica de “La papelería” que permiten construir un criterio para analizar el papel de las actividades de compra-venta y uso del dinero implicados en los problemas.

[15] Suma en la que se repite uno de los factores tantas veces como indique el otro factor, para así encontrar el resultado.

La siguiente tabla muestra enlistados los criterios de análisis construidos para examinar los problemas del libro de texto.

Tabla 6

Herramienta de Análisis para Examinar Problemas de Tipo Aditivo en Contexto de Compra-Venta en el Libro de Texto. Criterios de Análisis

Categoría de relación aditiva implicada en el problema	• Composición de medidas • Transformación de medidas • Comparación de medidas • Composición de transformaciones • Transformación sobre estados relativos • Composición de estados relativos • Problemas de igualación
Lugar de la incógnita	• Incógnita en el estado final o en el total • Incógnita en transformación o en segundo sumando • Incógnita en el estado inicial o primer sumando
Tipo de relación implicada en el problema	• Relación estática • Relación dinámica
Cálculo numérico necesario para resolver el problema	• Números implicados en el problema
Orden y manera en que se presenta la información	• Información necesaria • Información innecesaria • Información en orden • Información en desorden • Información en orden inverso
Número de etapas del problema	• Problema de una etapa (simples) • Problema de dos etapas o más (compuestos)
Conocimientos sobre dinero y compra-venta implicados en el problema	• Comparar dos cantidades de dinero • Determinar el monto del dinero con el que se cuenta • Determinar la cantidad de dinero que falta para comprar • Determinar el monto del cambio • Conocimientos referentes al dinero implicados en el problema (ganancia, ahorro y descuento)

Considero conveniente realizar especificaciones sobre algunos de los criterios que se han enlistado[16]:

- **Categoría de relación aditiva implicada en el problema**: Criterio basado en la clasificación de categorías creadas por Vergnaud (1991), pero nombradas de la manera en que lo hace Belmonte (2006). Además son agregados los problemas de igualación propuestos por la escuela inglesa de Carpenter y Moser en 1982.

  Es importante recordar que el tipo de número (medida, transformación o estado) implicado en la relación aditiva es el elemento que complejiza los problemas y que diferencia las categorías. Por último cabe recordar que la facilidad de los problemas aditivos -en los que coinciden todas las categorías que han trabajado estos problemas- se da de la siguiente manera: los problemas de transformación (o cambio) son los más sencillos, seguidos por los de composición de medidas (combinación), después los de igualación y finalmente los de comparación resultan los más complicados (Díaz, 2004)

- **Lugar de la incógnita.** Como se mencionó en el marco teórico, dentro de las categorías en las que se clasifican los tipos de problemas aditivos se pueden encontrar otros tipos de problemas éstos dependen del lugar o posición dónde se encuentre la incógnita a resolver.

  Cabe recordar que los lugares en los que se puede encontrar la incógnita dentro de un problema de tipo transformación de medidas, igualación de medidas y comparación de medidas la incógnita puede estar en tres lugares diferentes: el estado final (o primer sumando), la transformación (segundo sumando) o el estado inicial (total), este último

[16] Además de los criterios aquí enlistados, cuando el problema aditivo lo amerita se analizan características relacionadas con la manera de presentar la información (de manera icónica, narrada o mixta), si se presentan imágenes que repercutan en la solución del problema, o si los problemas presentan lenguaje claro y cercano para los niños o no.

caso representa una mayor dificultad para los niños. Para los problemas de tipo composición de medidas la incógnita puede estar en dos lugares: en el total o en uno de los sumandos.

- **Tipo de relación implicada en el problema.** Los problemas aditivos pueden presentar dos tipos de relaciones: estáticas (problemas de composición y comparación de medidas) y las dinámicas (problemas de transformación de medidas, igualación, composición de transformaciones, transformación sobre estados relativos y composición de estados relativos). Las relaciones de tipo dinámico son más complejas que las de tipo estático.

- **Cálculo numérico implicado.** Ya se ha explicitado qué se entiende por cálculo numérico, por lo cual basta señalar que se analizarán los tamaños de los números y la relación entre ellos.

- **Orden y manera en que se presenta la información.** Se analiza si existe únicamente información necesaria en el problema o si hay información adicional. Desde mi perspectiva la información necesaria / innecesaria se puede dar en dos sentidos: información numérica e información del contexto.

  También se observa si en la información de "lo narrado" se da en el mismo orden que la estructura de solución.

- **Número de etapas del problema.** Ya se ha mencionado en los referentes teóricos que el número de etapas también complejiza un problema. De acuerdo a lo planteado por Puig y Cerdán (1990) es necesario identificar en los problemas el número de operaciones que son necesarias para resolverlos. Ese número de operaciones determinan el número de etapas que tiene el problema.

Una vez identificado el número de operaciones necesarias se analiza a qué estructura semántica aditiva está asociada cada una. Castro, et al. (1998) analizan este tipo de problemas que ellos llaman "compuestos", considerando las estructuras semánticas implicadas.

- **Conocimientos del dinero y compra-venta.** Tomando en cuenta tanto los estudios psicogenéticos mencionados, como los resultados de la actividad simulada "La papelería", se definieron criterios que irán puntualizando las características del contexto dentro del problema aditivo analizado. Éstos son:

  Actividades matemáticas implicadas en una transacción de compra-venta

- Comparar dos cantidades de dinero. Aplica en el caso en que el alumno necesite comparar la cantidad de dinero con la que se cuenta, con el precio del producto para determinar si es suficiente. En caso del vendedor, implica comparar para identificar si con el monto que le han pagado es suficiente para realizar el pago.
- Determinar el monto que resulta de la suma de varias cantidades. Se puede dar esta tarea cuando es necesario sumar por ejemplo varios precios para determinar el monto a cobrar en el caso del vendedor.
- Determinar el monto del dinero con el que se cuenta. Ya sea para pagar o para cobrar los niños deben calcular la cantidad total de dinero que está compuesta por monedas y/o billetes de distinta denominación. Ello implica identificar el valor de las monedas y/o billetes que se utilizan, y establecer algunas equivalencias (por ejemplo, saber que una moneda de 5 pesos equivale a 5 monedas de un peso).

- Determinar la cantidad de dinero que falta para comprar. Se trata de encontrar una diferencia entre la cantidad de dinero con la que se cuenta y el precio del producto a comprar para identificar el monto faltante.
- Determinar el monto del cambio. Se pide a los alumnos que calculen la diferencia entre la cantidad de dinero que se pagó y el precio del producto. En las exploraciones realizadas en la simulación de "La papelería", en su papel de vendedores, resultó mucho más complejo para los niños determinar el monto a regresar (el cambio) que saber cuánto iban a cobrar. Por lo cual, es posible que los problemas aditivos que impliquen esta tarea conlleven mayor dificultad para los alumnos que cuando se les posiciona en el lugar del comprador.

Otras prácticas y conocimientos relacionados con dinero y compra-venta

- Ahorro y descuento. Se aplica este criterio si se identifica que en el problema existe referencia a alguna de estas prácticas.
- Noción de ganancia. Este criterio es relevante en el análisis de los problemas debido a las dificultades de construcción de esta noción en alumnos de segundo grado que ya han sido señaladas anteriormente.

El análisis de los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto será realizado bajo los criterios que aquí se han presentado. Como podrá verse en el capítulo 5, se presenta primero un análisis general de las características predominantes de los problemas del libro de texto (veintisiete problemas en total) y, después, se presenta un análisis específico de cinco problemas. Esos cinco problemas fueron seleccionados bajo los parámetros que a continuación se enuncian.

3. 3.4. Criterios de selección de los 5 problemas para análisis previo.

Una vez realizado el análisis general se eligieron cinco problemas que presentaran una o más relaciones complejas que permitieran reflexionar sobre la complejidad de los problemas aditivos en contexto de compra-venta. Un primer criterio de selección fue que estos problemas cumplieran con presentar características diferentes en relación a las "características promedio" de los problemas analizados. Enseguida se enlistan esas características (un mismo problema podría tener más de una de ellas):

a) Problemas más complejos que los demás, ya sea por el tipo de cálculo relacional implicado o por la dificultad del cálculo numérico

b) Problemas con más de una etapa, lo cual implica una dificultad distinta a los problemas "comunes"

c) Los conocimientos de dinero y compra-venta implicadas en el problema son complejos, de acuerdo a los resultados de las indagaciones realizadas y a los planteamientos de estudios psicogenéticos

Los cinco problemas elegidos fueron analizados bajo la misma herramienta descrita en el apartado anterior.

3.3.5. Herramientas para el análisis de los problemas aditivos.

Es necesario hacer una diferenciación entre dos tipos de herramientas utilizadas para el análisis de las lecciones del libro de texto. Por un lado se encuentran las herramientas de tipo teórico-metodológico, y por otro las que han sido utilizadas para procesar información.

El primer tipo de herramientas ya se ha ido mostrando desde el capítulo 2, se especifican en este capítulo y se retoman en los posteriores. Tales criterios se apoyan sobre todo en la TCC de Vergnaud (1991) y se ven enriquecidos por algunos de los datos que aportó la indagación sobre los conocimientos de dinero y compra-venta.

Respecto a las herramientas utilizadas para procesar la información he recurrido al programa ATLAS.Ti. El objetivo de esta herramienta tecnológica es facilitar el análisis cualitativo de datos textuales (Muñoz, 2005). El autor señala sobre este programa: "puesto que su foco de atención es el análisis cualitativo, no pretende automatizar el proceso de análisis, sino *simplemente* ayudar al intérprete humano agilizando considerablemente muchas de las actividades implicadas en el análisis cualitativo y la interpretación, como por ejemplo…la codificación…" (p. 2). Precisamente este programa ayudó a la codificación de los criterios de análisis para cada uno de los problemas; una vez seleccionados los problemas, se transcribieron en un procesador de textos (Word), posteriormente se enlazaron éstos al programa ATLAS. Ti y se fue realizando el análisis de cada problema utilizando los criterios que han sido descritos en los sub-apartados anteriores.

Para finalizar la presentación de este capítulo es importante enfatizar cómo las dos herramientas metodológicas –la actividad que emula la compra-venta y el análisis del libro de texto- que conducen esta investigación aportarán elementos que permitirán responder las preguntas de investigación de este estudio.

Considerando que han sido preocupaciones didácticas las que han gestado esta investigación, el hecho de elegir dos recursos didácticos para hacer las indagaciones está fuertemente vinculado a esas preocupaciones didácticas. Se espera que los datos que arrojen las tareas llevadas a cabo con estos dos recursos se enriquecerán de manera recíproca, los datos de "La papelería" enriquecerán la mirada para el análisis del libro de texto y viceversa.

La actividad que emula la compra-venta permitirá explorar dos elementos importantes en esta investigación: por una parte, los procedimientos de los alumnos ante problemas aditivos, y por otra parte, sus conocimientos en torno al uso del dinero y la actividad de compra-venta. Las decisiones metodológicas tomadas en torno a esta situación didáctica implica en primera instancia re-diseñar la situación como un dispositivo para hacer investigación, a su vez esas modificaciones realizadas permiten proponer innovaciones que la actividad simulada pudiera tener en su puesta en práctica en el aula. Los datos que se obtengan de la implementación de esta actividad simulada proporcionan elementos que enriquecen el análisis didáctico de los problemas del libro de texto gratuito, especialmente al indagar las implicaciones del contexto de compra-venta en los procedimientos y en contar con elementos para poder hipotetizar sobre los posibles procedimientos que los niños pudieran llevar a cabo de acuerdo a las características de los problemas.

Por su parte, el análisis didáctico del libro de texto ha implicado construir una herramienta teórica que ayude a analizar la complejidad de los problemas aditivos. Además de que dicha herramienta contribuye al logro de los objetivos de esta investigación, a través de ella pueden identificarse elementos que los docentes deberíamos tener en cuenta para seleccionar, diseñar y modificar problemas aditivos, de tal manera que promovamos en el aula la construcción de conocimientos matemáticos con sentido.

Así como se pretende que la identificación de los procedimientos en la actividad simulada enriquezca el análisis del libro de texto, este último podría contribuir también al diseño de la actividad simulada; por ejemplo ¿cómo plantear en "La Tiendita" problemas aditivos en los que se desconoce el estado inicial, si en la actividad simulada de compra-venta se recurre habitualmente a preguntar por el estado final?

Capítulo 4

Procedimientos Aditivos, Conocimientos de Dinero y Compra-Venta Identificados en la Actividad Simulada

En este capítulo se presenta los datos arrojados en la implementación de la actividad de "La papelería", la cual como se ha mostrado en el capítulo anterior, innova a la tradicional "Tiendita" al proponer un rol distitito a los estudiantes ahora "vendedores" y a aprovechar el rol de "comprador" a la investigadora, permitiendo que puedan indagarse algunos de los conocimientos de los niños acerca del dinero y la actividad de compra-venta. Esto, particularmente, a través de preguntas y tareas, basadas en resultados evidenciados por distintos estudios de corte psicogenético que ya han sido abordados desde los referentes teóricos. De igual manera se indaga sobre los procedimientos que los alumnos llevan a cabo al resolver los problemas aditivos que les son planteados por medio de dicha situación didáctica.

Se presentan a continuación las nociones y los procedimientos que los alumnos pusieron de manifiesto en la implementación de la situación didáctica "La papelería".

4.1. Conocimientos de Dinero y Compra-Venta Identificados

Como se mencionó en las decisiones metodológicas, el objetivo de aproximarme a las experiencias y conocimientos que diez niños de segundo grado han construido en torno al dinero y la actividad de compra-venta, es contar con criterios que enriquezcan el análisis de la complejidad de los problemas aditivos en contexto de compra-venta. En ese sentido, cabe precisar que aún cuando mis referentes son investigaciones psicogenéticas que establecen niveles de construcción de nociones económicas, mi propósito no es determinar "el nivel" de de los niños entrevistados, sino el de aproximarme a los conocimientos que han construido de cada uno de los aspectos que a continuación se presentan.

Justo en el capítulo anterior (decisiones metodológicas) se han descrito las tareas que se plantearon a los alumnos. Enseguida se presentan los datos obtenidos en la realización de cada tarea.

4.1.1 Conversación sobre el dinero.

En el transcurso de cada entrevista se tuvo una conversación con los alumnos sobre determinados aspectos del dinero: diferencia entre dinero real y ficticio, definir qué es el dinero y para qué sirve el dinero e indagar si participan en actividades reales de compra-venta y cómo lo hacen. Lo que los alumnos expresaron en esa conversación pone de manifiesto la heterogeneidad de experiencias que tienen al comprar. Lo dicho por Diana Paola (D.P.[17]) da cuenta de ello:

D.P. ¿A poco tú juntaste todo este dinero?
E: Sí lo junté para hacer el juego
D.P.: Ah entonces tú sí eres ahorradora
E: ¿Qué es eso de ahorradora?
D.P.: Que guardas dinero
E: Y para qué ahorra la gente ¿tú sabes?
D.P.: Para comprar algo, comprarse algo. Si no en ese caso cómo nos compramos.
E: ¿Cómo nos lo compraríamos?
D.P.: Pues nada más con dinero.
E: ¿No se puede comprar con otra cosa? ¿Si no tengo dinero?
D.P.: Con tarjeta puedes comprar, o a veces con vales que te dan
E: ¿Y esos vales en donde los dan?
D.P.: No sé de eso porque mi mamá nunca nos ha llevado
E: ¿Pero sí sabes que hay vales? ¿Con quién los has visto o en donde?
D.P.: Es que mi papá nos da
E: Ah, ¿Y qué compra tu mamá con eso?
D.P.: Comida
E: ¿Pero ese no es dinero entonces?
D.P.: No, pero lo puedes cambiar por dinero
E: ¿Y dónde los cambias?
D.P.: Mi mamá piensa cambiarlo con mi tía que es La China, la de la lonchería (había platicado que su mamá trabajaba ahí cocinando)

[17] En los fragmentos de entrevista que se presenten en este capítulo y en los subsecuentes, se utilizará la letra E para marcar lo dicho por la entrevistadora en el diálogo. Los nombres de los niños serán representados por sus iniciales.

La alusión que hace Diana Paola a la actividad de ahorrar y al uso de vales de despensa da pauta para identificar que las experiencias de los niños en torno al dinero y compra-venta son variadas.

A continuación se enlistan otros datos importantes que identificados durante las conversaciones con los niños:

- Distinguen claramente entre el dinero real y el de juguete.
- Para definir qué es el dinero, la mayoría de los niños se remiten a la utilidad del mismo, y esa utilidad está fuertemente vinculada a la compra; enuncian frases como "el dinero es lo que sirve para comprar"[18].
- Las experiencias de los niños con el dinero son de diversa índole. En sus conversaciones hacen referencia al uso de tarjetas de crédito, tarjetas de débito, asistencia a bancos, práctica del ahorro, uso de vales de despensa, pedir fiado, entre otros.

Como se mencionó en la sección metodológica, también fue tema de esta conversación la participación de los alumnos en actividades de compra-venta reales. Comentaré aquí de manera breve algunos datos sobre la participación de los niños en ciertas actividades de compra-venta. Esos datos, además de ser explicitados por los alumnos en las entrevistas individuales, fueron obtenidos a través de entrevistas que hice a las madres o padres de los alumnos. El análisis exhaustivo de esa información arrojada por los padres de familia ya no se consideró para este trabajo, pues excedía el tiempo disponible para la realización del mismo. Sin embargo, considero relevante la aproximación a las prácticas de compra-venta reales en las que participan los

[18] Definir el dinero es una tarea difícil, el dinero mide la riqueza. Al igual que ocurre con otro tipo de conceptos, los niños lo definen por su uso. Esa definición de acuerdo a la utilidad de los objetos es documentado desde hace tiempo por estudios de Piaget.

alumnos, pues algunas de esas prácticas podrían enriquecer los contextos de compra-venta que solemos usar en el aula. Recuperaré este planteamiento en las conclusiones generales de la tesis.

Las preguntas que realicé a los alumnos fueron: ¿tú vas a la tienda?, ¿vas solo o acompañado? y ¿cuánto dinero te dan cuando vas a comprar?

La pregunta que formulé al papá o a la mamá de cada alumno entrevistado, fue "¿en qué actividades de su casa o la calle en las que se usa dinero su hijo participa?" De las respuestas que dieron, recupero lo siguiente:

- Del total de diez niños, seis compran de manera autónoma en alguna tienda sin compañía de nadie, siendo ellos responsables de todo el proceso. Los otros cuatro niños van a la tienda, pero siempre acompañados de alguien más, generalmente alguien mayor, quien suele hace los cálculos por ellos.
- Todos los alumnos indican que "les dan poco dinero" para comprar, (la mayoría oscila entre \$20 y \$50). Algunos niños (Héctor, Santiago, Érick) expresan que les dan únicamente monedas para ir a comprar; Luis Alberto explica que a veces le dan monedas o billetes. La mamá de Edwin explica que le da exactamente lo que debe pagar porque "el señor de la tienda es conocido por quedarse con dinero".
- Los establecimientos en donde los niños realizan compras son: miscelánea, tianguis[19], mercado, supermercado… La diversidad de los tipos de establecimientos da lugar, entre otros aspectos, a diversidad de formas de pago. En los supermercados o "tiendas de auto-servicio" tiene lugar el pago con tarjetas, el uso de cajas registradoras, de

[19] La "miscelánea" es el establecimiento comercial, en donde venden principalmente alimentos, pero también otros productos para el hogar y/o comida. En general en México la llamamos "tienda" o "tiendita" (RAE: f. Col., Méx. y Pan. Tienda pequeña de esquina). El "tianguis" es un mercado que se establece en la calle y suele ser itinerante (a diferencia de los mercados que son fijos). Según la RAE, la palabra proviene del náhuatl tianquiztli.

lectores de códigos de barras para verificar de precios; mientras que en las misceláneas se puede "pedir fiado", como lo expresa Samantha.

- Aun cuando los responsables de las compras son los adultos, algunos niños participan en la actividad de distintas maneras: Santiago va realizando con una calculadora la cuenta de lo que su mamá va comprando; ella le informa cuánto dinero tiene para comprar la despensa, él va sumando los precios que la mamá le dice cada vez que ella elige un producto y lo pone el carrito de compras; Santiago le avisa si falta mucho o poco para llegar al monto que pueden gastar. Cuando pagan en la caja verifican que lo que le resultó a Santiago en la calculadora sea próximo con lo que les están cobrando Por su parte, Érick le lleva a su mamá los productos que su mamá le encarga de algún pasillo del súper-mercado y revisa el costo de algunos productos usando el verificador (el aparato para leer códigos de barras).
- Los niños tratan de interpretar, desde sus experiencias y recursos, la propaganda comercial a la que están expuestos. La mamá de Luis Alberto comenta que alguna vez en una oferta de "3 x 2" Luis Alberto le dijo "me voy a comprar dos de éstos al fin que traigo tres pesos" (interpretó el 3 como "tres pesos"); la mamá de Érick expresó que ante una oferta del 20% de descuento, Érick pensó que al precio del producto se le restaban $20.

4.1.2 Criterios para clasificar el dinero.

Se entregó una caja con monedas y billetes, de todas las denominaciones, revueltos. Se dio la consigna: "acomoda en esta caja el dinero que ocuparemos para jugar".

La mayoría de los alumnos clasificó tanto las monedas como los billetes según el valor de cada uno de ellos. Sin embargo, se dieron variaciones en los criterios de clasificación de algunos alumnos, como se verá enseguida.

Ocho de los diez niños clasificaron todas las monedas por el valor de cada denominación. De esos ocho niños, cinco clasificaron también los billetes por su valor, mientras que los otros tres clasificaron los billetes por su color.

Los dos niños que no clasificaron todas las monedas por su valor son Samantha y Luis Alberto: la primera realiza la clasificación de casi todas las monedas bajo el criterio de valor de cada denominación, exceptuando las de .50¢ y .20¢ "porque son amarillas"; a los billetes los acomoda todos juntos. Luis Alberto se guía también por el color de algunas de las monedas va tomando las monedas y enuncia su valor "un peso… dos pesos", pero las acomoda en el mismo espacio, los mismo sucede con las monedas de .50¢ y .20¢ para los que ocupa otro compartimento de la caja. A las preguntas "¿cómo las separaste?, ¿en qué te fijaste?" Luis Alberto responde "Como de color por color y de amarillo con otro amarillo".

El hecho de que tres de ocho niños no usen el criterio del valor de las denominaciones para la clasificación de billetes probablemente tenga que ver con un uso poco frecuente de los billetes; generalmente a los niños se les confía el uso de monedas más que de billetes, sobre todo si éstos son de alto valor. En lo que respecta a las monedas que representan centavos, es probable que su trato diferenciado también tenga que ver con su valor (con su mínimo valor), como se mostrará en el siguiente apartado. Es importante señalar que aunque algunos niños no hayan tomado en cuenta el criterio del valor de las denominaciones al clasificar, eso no determina que no conozcan el valor de monedas y/o billetes. Los siguientes datos dan cuenta de su conocimiento al respecto.

4.1.3 Seriación de monedas y billetes.

Una vez acomodados los billetes y las monedas en la caja, se tomó un billete y moneda de cada denominación y se les entregaba a los niños sin orden alguno dándoles la siguiente consigna: “acomoda estos billetes y monedas del que vale más al que vale menos”.

El criterio utilizado por la mayoría de los niños (9/10)[20] para realizar la seriación fue el valor de las denominaciones de cada billete y moneda, sin embargo surgieron algunas confusiones entre los billetes de $100 y de $1000, entre los de $50 y $500, y entre los de $20 y $1,000, al parecer por la similitud entre los colores de dichas parejas de billetes y en sus escrituras numéricas similares.

Todos los niños identifican el valor de cada billete y moneda, dos niños comentan que las monedas de 10 y de 20 centavos no valen; tal vez esto se debe a la depreciación de esas monedas en las actividades reales de compra-venta (algunos comerciantes ya no reciben esas monedas para comprar productos).

[20] Los resultados en cuanto a la frecuencia de los niños se mostrarán en algunas ocasiones a manera de fracción. El denominador indica el número de niños que recurrieron a esa respuesta y el denominador el número de alumnos entrevistados.
En este caso son 9 de los 10 alumnos los que serian las monedas y billetes de manera correcta. El niño que no lo realizó así fue Edwin. No es posible identificar el criterio que utilizó Edwin para la seriación. El alumno realiza el siguiente acomodo: $200, $100, $1000, $500, $50, $20, $5, $1, $2, .10¢, .20¢, $10 y .50¢. Al parecer va seriando por valor de las denominaciones y sus confusiones entre $100 con $1000 y $500 con $50, por la escritura cercana, pero la posición en las que pone $1 y $10 son confusas.

4.1.4 Concepciones sobre caro y barato.

Decir que algo es “caro” o “barato” es parte del lenguaje comúnmente utilizado ante transacciones de compra-venta. Es probable entonces que algunos problemas aditivos en este contexto que son planteados en las aulas aparezcan estos conceptos. De ahí la necesidad y pertinencia de saber qué es lo que comprenden los niños sobre éstos.

Ante los objetos que se ocuparían como mercancía se dio a los alumnos la consigna: “Acomoda los objetos del más caro al más barato”.

Todos los niños coincidieron en el orden de las mercancías que inician y finalizan la serie: la computadora como lo más caro y el sacapuntas como lo más barato. Sin embargo, dos alumnos (Edwin y Marisol) presentaron confusiones ante los conceptos caro y barato. En el siguiente fragmento de la entrevista realizada a Karla Marisol se muestra cómo la alumna no tiene claridad sobre el concepto de “barato”. Aunque fui yo quien definió el concepto barato[21] al responder a su pregunta, considero que la duda de Karla Marisol (KM) es relevante pues da cuenta de que algunos conceptos relacionados con la actividad de compra-venta aún están en proceso de ser comprendidas por algunos alumnos.

[21] El concepto de barato puede tener dos acepciones:

1) Barato: que cuesta poco dinero, en relación, por ejemplo, con la cantidad de dinero con la que contamos, o en una comparación con otro precio: ¿Qué lápiz está más barato?, es decir, cuál cuesta menos. Entra también el ejemplo de “una libreta es más cara que un lápiz”.

2) Barato: que cuesta poco dinero en relación con sus atributos: esa libreta está barata considerando su tamaño, el número de hojas que tiene, etc.

En este fragmento de entrevista se sugiere a KM la definición de barato tomando el primer sentido que se ha descrito. En líneas posteriores puede notarse que las referencias que dan los alumnos sobre los conceptos de “barato” se acercan más a la segunda acepción.

E: ¿Cuál será lo más caro?
KM: Ésta (la computadora)
E: Muy bien; de todo ¿cuál es lo más barato?
KM: (Señala la computadora)
E: ¿Esa es cara o barata?
KM: Cara
E: Entonces cuál es lo más barato
KM: ¿Qué es barato?
E: Lo que cuesta más poquito
KM: El sacapuntas

Los criterios en los que los niños se basan para determinar el valor de un objeto en términos de caro y barato que pude identificar, son los siguientes:

- Por la utilidad del objeto y por las necesidades que es posible satisfacer por medio de éste
- Por el número de piezas que lo componen
- Por la tecnología implicada en el objeto

El siguiente fragmento de la entrevista con Héctor permite ejemplificar algunos de los criterios enunciados:

(Héctor coloca el cojín o almohada y pone enseguida el juego de geometría)

E: ¿Por qué crees que ése (señala el juego de geometría) y no éste (señala el libro)?
H: Porque ése (señala el juego de geometría) se necesita un poquito más para trabajo de la escuela. Estos (las escuadras y el compás del juego de geometría) son para hacer las figuras, así para hacer círculos. Y éstos (los libros) son (para) ver y leer.
E: Entonces ése es más caro porque haces más cosas con él
H: Y tiene cuatro cosas, al igual que esto (libro) (se puede deducir que en lugar de "al igual que esto" quería decir a diferencia de esto, porque lo que está realizando es una comparación)

Cabe señalar que en las argumentaciones de los niños no aparece el criterio de "valor monetario" de los objetos para significar o determinar lo caro o barato es decir no dicen: es barato porque cuesta tanto (aproximan un precio). Pudiese ser esto porque la magnitud de dinero es muy abstracta y los niños intentan ver las cualidades o atributos de los objetos para "concretizar" dichos conocimientos.

Las respuestas que los niños dieron en esta tarea me llevan a reflexionar sobre la posible heterogeneidad de concepciones que pueden entrar en juego cuando en algún problema aditivo en contexto de compra-venta aparecen los términos "caro" y "barato".

4.1.5 Conocimientos sobre "el cambio" en la compra-venta.

Para indagar al respecto, se les preguntaba: "¿siempre que compras algo te van a dar cambio?" y "por ejemplo si voy a la tienda y me llevo un billete de $50 y compro un refresco que cuesta $25 ¿me van a dar cambio o no?"

Ante estas preguntas las respuestas de los niños denotan que los diez alumnos que entrevisté identifican la expresión "dar el cambio" como parte de la transacción de compra-venta. Todos ellos tienen claro que no siempre que se compra se recibe cambio, sino sólo cuando se entrega más dinero del que se debe pagar.

Cuando preguntaba a los niños cómo se aseguran que les dieron el cambio correcto, la mayoría de ellos responde que cuentan el dinero para ver si reciben lo que les dijeron. Lo expresado por Érick (Er) es un ejemplo de ello:

> *(Erick platica que siempre acompaña a su hermano mayor a la tienda a comprar lo que su mamá les pide)*
>
> **E:** Oye y cómo le hacen tú y tu hermano para estar seguros de que el cambio que les dan está bien
> **Er:** Antes de irnos le digo a mi hermano cuenta el cambio y primero preguntamos cuánto cuesta y cuando nos lo dan vemos cuánto dinero tenemos y si no nos sobra, si nos falta un peso le preguntamos
> **E:** Ya. Y quién se da cuenta cuando falta un peso ¿tu hermano o tú?
> **Er:** Mmmm más él, a veces yo

E: ¿Tú te has dado cuenta cuando falta el dinero?
Er: (Mueve la cabeza como afirmación)
E: ¿Y cómo te das cuenta que te falta el dinero?
Er: Porque primero pregunto ¿cuánto vale? Y me dicen y luego le digo "hermano está bien el cambio" y le cuento y si veo que no, le preguntamos

Sólo Luis Alberto (LA) se remite al uso de la resta cuando se le cuestiona sobre el cambio:

E: ¿Cómo sabes si te dan bien o mal el cambio?
LA: Restando
E: Ah le restas. Oye y alguna vez ¿te han dado mal el cambio?
LA: Sí
E: ¿Y qué haces?
LA: Voy con mi mamá y le digo - ¿mamá está bien el cambio?
E: Ajá ¿y luego?
LA: Ella me dice no, diles que no está bien el cambio y voy otra vez a la tienda
E: Ah muy bien. Pero ¿tú no lo checas solito? ¿No lo revisas? ¿Siempre vas con tu mamá y le dices mamá está bien?
LA: Yo también me fijo (inaudible)…

Durante la entrevista todos los alumnos expresan saber en qué momentos les darán cambio y cuando no, bajo qué circunstancias. Sin embargo sólo uno (Luis Alberto) de los diez alumnos comenta qué cuenta le permite calcular el cambio.

4.1.6 Noción de ganancia.

Para constatar en mi muestra de estudio si los alumnos han construido ya la noción de ganancia, preguntaba a los niños "Si la señora de la papelería vende esta libreta a $16 ¿A cuánto la compró ella? ¿Más barata, más cara o igual?".

Ninguno de los niños respondió que la compraba más barata. Todos dijeron que la compraba más cara o al mismo precio, explicando algunas veces que las venden más baratas o igual para que "se le vendan rápido" o "para poder comprar más libretas".

El fragmento de la entrevista de Érick (Er) ilustra las respuestas que tuvieron lugar, además muestra cómo el vendedor para determinar el precio tiene en cuenta el tipo de producto que vende:

> **E:** Oye y cuando tú vas a la tienda ¿quién dice cuánto cuestan las cosas?
> **Er:** El señor
> **E:** ¿El señor dice cuánto van a costar? Y ¿cómo sabe él cuánto cuestan las cosas?
> **Er:** Porque tiene una lista de cuánto cuesta
> **E:** Ah muy bien y él tiene que comprar esas cosas antes ¿verdad?
> **Er:** Ajá
> **E:** Oye y por ejemplo si el señor de la papelería compra esta libreta a ti te la vende en dieciséis, pero ¿a él cuánto le costaría?
> **Er:** (se queda en silencio)
> **E:** **¿**Más o menos o igual?
> **Er:** Más
> **E:** Más ¿a él le cuesta más?
> **Er:** Más, a veinte
> **E:** ¿A veinte? Él la compra a veinte y cando tú vas y se la compras él te la da a dieciséis
> **Er:** Sí
> **E:** Te la da más barata
> **Er:** Ajá
> **E:** Y por ejemplo sí… por ejemplo ¿esta mochila a cuánto la compraría él? Para vendértela a ti
> **Er:** Así
> **E:** **¿**Así igual a ciento sesenta y siete?
> **Er:** Y me la vendería así
> **E:** Así igual. Y ¿por qué esta más cara? (la libreta)
> **Er:** Ahí le bajó porque pensó que iba a ser mucho precio

Cabe recordar ahora las explicaciones que estudios como los de Berti, Bombi y De Beni (1986), Delval (1989), Delval & Echeita (1991) dan sobre este tipo de respuestas relacionados a la noción de ganacia. Señalan, por ejemplo, que los niños tienen en cuenta aspectos como la justicia para pensar que un vendedor no debe dar más caro el producto. Además, estos autores afirman que no todos los elementos de la compra-venta son evidentes para los niños, aun cuando hayan participado en distintas transacciones de compra-venta.

Comentarios en torno a los Conocimientos de Dinero y Compra-Venta.

Los datos anteriores muestran por un lado que, en efecto, la compra-venta es una práctica que resulta familiar para los niños; todos los alumnos entrevistados han tenido experiencias con esa práctica, lo cual les permite construir conocimientos sobre el dinero y su uso. Por otro lado, los datos ponen de manifiesto la diversidad de experiencias y de prácticas de compra-venta; tal diversidad está asociada a las características de los comercios en los que realizan las compras y a las prácticas de compra-venta de la propia familia. Reconocer esa diversidad me lleva a preguntarme qué tan pertinente es generalizar y homogeneizar las experiencias de los alumnos en relación con la compra-venta, es decir, creer que todos los alumnos participan de la misma manera en esta transacción, que todos compran en el mismo tipo de tiendas de la misma manera y que todos comprenden los conocimientos asociados con esta actividad.

Por otra parte, recuperando los conocimientos de los alumnos sobre el dinero y la compra-venta que comenté en los sub-apartados anteriores, puedo concluir que más allá de las diferencias detectadas, los alumnos de la muestra cuentan con conocimientos básicos para trabajar con dinero: identifican las denominaciones de las billetes y monedas, lo cual les permite abordar problemas aditivos que pongan en juego monedas y billetes de distintas nominaciones. Constaté que todos los niños participan en actividades de compra-venta como compradores e identifican en qué circunstancias les entregan cambio y cuándo no (aunque no saben calcularlo). Algunos de estos conocimientos fueron identificados anteriormente en los estudios psicogenéticos ya citados (Berti y Bombi, 1988; Delahanty, 1989), los cuales señalan que los niños de edades como las de la muestra de este estudio, han construido ya un bagaje importante de nociones económicas cercanas a lo convencional.

Los datos también permiten identificar y constatar cómo algunos conocimientos económicos aún no son tan claros para los niños: la ganancia no es comprendida por ningún participante. Además aunque los alumnos identifican en qué circunstancias les darán cambio no se remiten a algún tipo de cálculo para saber cuánto les darán y existen en algunos niños confusiones entre los conceptos de “caro” y “barato”. Se confirmó así algunos hallazgos de investigaciones como las de Berti, Bombi, y De Beni (1986) y Delval y Echeita (1991) que dan cuenta de que algunos elementos de las transacciones de compra-venta no son evidentes para los niños.

Los resultados emanados de estas indagaciones me permitieron identificar que algunas de las dificultades que mis alumnos enfrentaban, y que habían abonado a la génesis de esta investigación, son compartidas con otros niños y constituyen su desarrollo en la construcción de conocimientos acerca del dinero y la compra-venta. Considerar que no todos los elementos de la transacción de compra-venta son evidentes para los niños y que hay pluralidad en sus experiencias, son resultados enriquecedores.

4.2. Procedimientos de Resolución de Problemas Aditivos en la Actividad Simulada “La Papelería”

Como se mencionó en la descripción metodológica, en esta actividad simulada de compra-venta se propusieron a los niños problemas aditivos que debían enfrentar en el rol vendedores. Los problemas planteados fueron de dos tipos: debían determinar el monto total a cobrar de dos productos y determinar el monto del cambio.

Enseguida se da cuenta de los procedimientos utilizados por los alumnos al enfrentarse a los tipos de problemas mencionados. La presentación de los datos se da de la siguiente manera: descripción de cada uno de los procedimientos, se especifica el número de alumnos que recurrieron a dicho procedimiento, se muestran las dificultades que se lograron identificar y los recursos usados por los alumnos para llevar a cabo su procedimiento de resolución (calculadora, cálculo escrito, cálculo mental o dinero). Las categorías consideradas para el análisis de los datos han sido tomadas, en su mayoría, del trabajo de investigación de Solares (2012).

4.2.1. ¿Cuánto debo cobrar por dos productos? Procedimientos en los que se componen dos medidas.

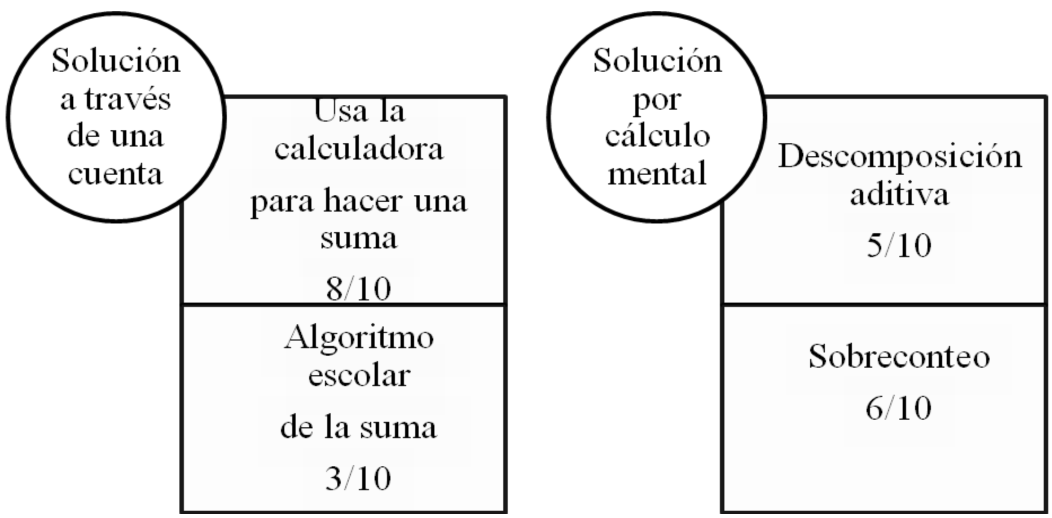
La actividad de cobrar es una de las tareas que debía realizar el niño como vendedor, y se les puso en situación de cobrar el pago total de dos productos. Al resolver esa tarea los alumnos realizaban una composición de medidas (dos medidas se unen para dar lugar a otra medida; Vergnaud, 1991). La solución canónica[22] a estos problemas es una suma.

Cabe mencionar que para este tipo de problemas hubo un alto porcentaje de respuestas correctas. Del total de veintinueve problemas de composición de medidas –considerando el total de 10 entrevistas- veinticuatro fueron resueltos correctamente. Estos resultados, por el alto grado de frecuencia en respuestas correctas, son similares a los encontrados en estudios como los de Nunes y Bryant (1997), que reportan la solución de este tipo de problemas desde la edad preescolar con números pequeños; Belmonte (2006) quien muestra resultados de los problemas plateados a un grupo de alumnos de primaria de España, y Solares (2012), quien plantea este tipo de problemas a una muetsra de niños jornaleros-migrantes. Todos estos autores señalan un grado de éxito importante en este tipo de problemas y la alta frecuencia en la identificación de la suma como medio de solución.

[22] "La solución canónica es la que comporta los procesos más económicos, lo que no quiere decir que sean los más simples desde el punto de vista cognitivo" (Belmonte, 2006; p. 139)

El siguiente esquema expone los tipos de procedimientos a los que recurrieron los alumnos de la muestra. En primer lugar se señala el cálculo relacional que los alumnos enfrentan ante el problema de determinar el monto a cobrar. Dentro de los círculos se señalan, de manera general, las formas de resolver los problemas que presentaron los alumnos. Posteriormente, para cada una de esas formas, se mencionan los tipos de procedimientos específicos que tuvieron lugar, así como el número de alumnos que recurrieron a ese procedimiento (el total de alumnos de la muestra es 10).

Figura 4. Tipos de procedimientos a los que recurrieron los alumnos entrevistados al solucionar problemas aditivos que implican determinar el monto a cobrar



Es importante precisar que durante las entrevistas los alumnos no usaron siempre el mismo procedimiento para todos los problemas que se le plantearon. Por ejemplo, para un problema un alumno pudo recurrir a la "suma efectuada con la calculadora", mientras que para otro problema ese mismo alumno pudo usar el "algoritmo escolar de la suma". Es por ello que la suma de la cantidad de niños que se reportan para cada procedimiento, pareciera no coincidir con el total de alumnos de la muestra. La intención de mostrar el “dato cuantitativo” que indica cuántos niños recurrieron a cada procedimiento, es tener referentes sobre la presencia de procedimientos convencionales y no convencionales.

A continuación se muestran los datos que dan cuenta de los procedimientos enlistados:

A) Solución a través de una cuenta.

Suma efectuada con la calculadora.

Este fue uno de los procedimientos a los que recurrieron los alumnos con mayor frecuencia (ocho niños lo utilizaron). Llama la atención que aún cuando la mayoría usó inmediatamente a la calculadora para hacer la suma, hayan tenido errores y dificultades, lo que hace suponer poca familiaridad con este artefacto.

Durante las entrevistas se pueden identificar dos momentos en el uso de la calculadora: primero los niños debieron familiarizarse con este artefacto y posteriormente se nota un uso más sistemático de ella. Las dificultades que manifiestan inicialmente, son las siguientes.

No identificaron rápidamente la tecla para encenderla, tampoco la tecla para borrar sus cálculos. Algunos niños confundían las teclas, por ejemplo, al buscar la tecla (+) para realizar la suma, tecleaban botones como (M+) o el signo de división; Esemeralda utilizó el signo de raiz cuadrada como si fuera el signo igual (=).

Un caso particular fue el de Santiago, quien no sabía qué teclas eran necesarias para determinar el monto total de la compra de un cuaderno ($16) y un juego de geometría ($22), pues tipea 1622, sin usar ninguna otra tecla que pusiera en relación a esas dos cantidades (16 y 22).

Otros errores en el tecleo consistieron en teclear sólo una cifra de un número de dos cifras sin darse cuenta; por ejemplo, quieren poner 89 y al momento de teclear sólo se marca el 9. Los alumnos aceptaban el resultado que la calculadora les ofrecía.

También hubo dificultades con el uso de la calculadora cuando los alumnos intentaron operar con centavos, éstas serán abordadas más adelante.

Es muy importante señalar, que a pesar de todos los errores que se han referido en esta sección, los alumnos siempre mostraron "seguridad" en el tipo de cálculo que debían realizar (en este caso una suma).

Algoritmo escolar de la suma.

La definición de algoritmo la que recurro para categorizar este análisis es presentada por Vergnaud (1991), en ella el autor señala:

> "Un algoritmo es una regla (*o un conjunto de reglas*) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o dado el caso, mostrar que no hay solución.
>
> Hay que subrayar que se puede decir que una regla "conduce a una solución", sólo si lo hace en un número finito de etapas; si este número no es finito, la regla podría aplicarse indefinidamente sin éxito. Ésta no sería, entonces, "efectiva", y no sería un algoritmo" (p.258).

En otras palabras, los algoritmos debiesen cumplir con las siguientes características:

1) Lleven al éxito, es decir a solucionar el problema, o bien a comprobar que no tiene solución, 2) La serie de pasos a seguir deben ser sistemáticos e invariantes, teniendo una

regularidad y 3) Debe servir para todo problema en donde esté implicada la operación, sin importar el tamaño de los números

El algoritmo que usan los niños de la muestra se basa en las reglas habitualmente enseñadas en la escuela: acomodar los dos sumandos de manera vertical haciendo coincidir los órdenes de las cifras de ambos números (unidades, decenas, centenas…), comenzar sumando el orden de las unidades haciendo las transformaciones necesarias hacia el orden de las decenas y continuar en el mismo sentido con los siguientes órdenes.

Sólo tres de los diez alumnos recurrieron al algoritmo de la suma, y resolvieron correctamente tanto las sumas que no requerían transformación o agrupación de diez unidades en una decena, como las que sí requerían de esa transformación.

Ahora bien, hay que precisar que dos de esos tres alumnos usaron el algoritmo pero no para resolver en primera instancia, sino para verificar el resultado que habían obtenido con la calculadora. En cambio, la alumna que sí resolvió con el algoritmo desde el principio, recurrió después a la calculadora para verificar. Resulta interesante la “confianza” o “desconfianza” que esos tres alumnos establecen con ambos procedimientos, como se verá enseguida:

Para determinar el monto a cobrar de una mochila ($89) y una calculadora ($46), Diana Paola primero realiza la suma con la calculadora, obteniendo 135; luego recurre al algoritmo para verificar: hace la suma de unidades de manera correcta, realiza la transformación a decenas (llevando uno), pero al sumar las decenas se equivoca (obtiene 14 en lugar de 13 decenas), resultando 145 en lugar de 135. Al no coincidir este resultado con el obtenido en la calculadora, vuelve a sumar con la calculadora; obtiene nuevamente 135, borra el resultado del algoritmo y lo realiza por segunda vez, concluyendo que lo que debe cobrar es $135.

Al igual que Diana Paola, Luis Alberto recurre al algoritmo para verificar su cálculo realizado en la calculadora. Llama la atención el que ambos alumnos no otorguen a la calculadora mayor credibilidad que al uso del algoritmo.

Por su parte, ante ese mismo problema Karla Marisol identifica la operación a realizar (89 + 46) y ejecuta el algoritmo de manera correcta, pero el resultado le causa “desconfianza”, lo cual la lleva a sumar con la calculadora obteniendo el mismo resultado, pero tampoco la convence (al parecer se le hace “muy grande”). Entonces hace un cambio y realiza una resta en la calculadora (89 - 46) y cobra $43. Aun cuando le pido que compare ese monto resultante de la suma de dos productos, con el precio de la calculadora sola ($46), no advierte su error.

Las decisiones que va tomando Karla Marisol y su preocupación por encontrar el resultado que cree correcto, pues el que obtuvo no le convence, daría elementos para reflexionar acerca de la importancia de la estimación previa de los resultados en la resolución de problemas aditivos. Si la alumna estima una cantidad cercana al menos mayor de 100 -considerando los sumandos con los que está trabajando-, descartaría con facilidad el resultado de $43 que determina como solución. Sin embargo, también este ejemplo anima a reflexionar acerca de la posible influencia del contexto en la acción de Karla Marisol: considerando que se trata de un juego en el que debe “cobrar”, puede suceder que el resultado quizá le pareciera “demasiado caro”, es decir, “no le puedo cobrar tanto sólo por eso”. Entonces Marisol se replantea el problema, tal vez pensando que como esto es un juego, “se vale entonces ajustar los precios.

B) Solución por cálculo mental.

Ocho de diez alumnos recurrieron al cálculo mental para solucionar el problema. Para la caracterización de este procedimiento me baso en la definición de cálculo mental de Parra (1994), quien señala que el cálculo mental es

> "el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados. Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números, así como diversas relaciones entre los números" (pp. 222-223)

La autora también aclara que el cálculo mental no está excento del uso de registros escritos con lápiz y papel, sobre todo cuando éstos son intermedios en el proceso de cálculo mental. Por ello, cuando los alumnos recurren a esos registros los recupero en la descripción de los procedimientos de este tipo de cálculo.

Son dos los procedimientos que se presentaron: descomposición aditiva y sobreconteo.

Descomposición aditiva

El procedimiento de descomposición aditiva fue utilizado por cinco de los diez niños entrevistados. Cuatro de ellos recurrieron a él únicamente ante problemas que involucraban precios con centavos, de lo cual hablaré más adelante; en lo que se refiere a los números naturales, este procedimiento se presentó en uno de los alumnos.

Este procedimiento consiste en descomponer las cantidades implicadas en un problema en cantidades menores que permitan realizar cálculos con mayor facilidad, en este procedimiento en algunas ocasiones se "deja de lado" alguno de los números surgido de las descomposiciones y se retoma al final del cálculo (Carraher, Carraher, y Schiliemann, 1995). Una de las cualidades de este procedimiento es que ayuda a no "perder de vista" las cantidades totales con las que se está trabajando, pues al sumar se sigue pensando en los valores completos de los números. Por ejemplo para sumar 39 y 11 si se descomponen los números en 30 y 9 y 10 y 1 se operará con el 9 y 1 y con el 30 y el 10 y no como en el algoritmo en que se opera sólo con un 3 que representa tres decenas y un 1 que representa una decena.

Aunque presentó un error, Edwin fue el único alumno que recurrió a este procedimiento para determinar el monto a pagar en un problema que implicaba números naturales; no dio muestras de que el uso de este procedimiento lo realice de manera sistemática. El alumno debía calcular el monto a cobrar por un cuaderno ($16) y un juego de geometría ($22), para lo cual, al parecer descompone los números en (10+6) y (20+2) y opera sólo con los números 10+20, pues su resultado es 30. La dificultad de Edwin radica en que olvidó considerar nuevamente los números que había "dejado de lado" (6 y 2).

Sobreconteo

Este procedimiento es frecuentemente utilizado por los niños considerados en este estudio, un total de seis alumnos de la muestra recurren a él para solucionar los problemas planteados. Bermejo y Rodriguez (1991) consideran al sobreconteo como una estrategia de solución a problemas aditivos y lo definen como "contar a partir del primer sumando o del sumando mayor" (p.37). Por su parte, Parra (1994) señala que este procedimiento es un avance, en comparación con el conteo, el cual es un procedimiento inicial al que recurren los niños pequeños para la solución de problemas.

Dos de las características recurrentes del sobreconteo que llevan a cabo la mayoría de los diez niños que entrevisté, son: comenzar a sobrecontar desde el número más grande (por ejemplo si suman 16 y 22, comienzan del 22) y el apoyo de los dedos para controlar lo que van sobrecontando,otorgándole el valor de uno a cada dedo. Este apoyo en dedos es funcional cuando los niños calculan con números pequeños, porque con números grandes se pierden al sobrecontar -dificultad que en seguida se aborda con mayor detenimiento-.

Respecto a sobrecontar a partir del número más grande, Parra (1994) señala que esta estrategia está relacionada con el uso que hacen los niños de la propiedad de conmutatividad de la suma que consiste en que sin importar el orden de los sumandos el resultado es el mismo: "por ejemplo, para 3+9 hacen …10, 11, 12" (p. 247).

Como se mencionó una dificultad recurrente que los alumnos manifestaron al usar el sobreconteo se dio al utilizarlo con "número grandes". Por ejemplo para sumar 35 + 46 u 89 + 46, los alumnos perdían fácilmente el control del conteo, por lo que terminaban abandonando este procedimiento (el sobre conteo es fàcil de controlar cuando el sumando que se agrega es hasta 10, pues los dedos de la mano permiten controlar; de ahí en adelante, se debe llevar una doble cuenta mental, la del total que se va acumulando, y la del sumando que se va agregando y esto es muy difícil). Cabe decir que esta dificultad motivó en los alumnos la búsqueda de otros procedimientos más eficaces (como realizar el algoritmo escrito o la suma a través de la calculadora), lo cual da cuenta de cómo el tamaño de los números es, en este caso, una variable didáctica relevante.

Conclusiones sobre los procedimientos en los que se componen dos medidas.

De acuerdo con el análisis realizado, nueve de los diez niños participantes identificaron la suma como la operación que permite resolver esta clase de problemas[23]. Este es un porcentaje significativo que muestra cómo este tipo de problemas es comprendido por los alumnos . Dicha facilidad está relacionada con las características de estos problemas: El cálculo relacional es sencillo en el sentido que se opera de manera directa, es decir, para nada se involucra -ni requiere- el pensamiento reversible.

En el mismo sentido cabe mencionar que ya ha sido documentado en las diversas clasificaciones de problemas aditivos los problemas de composición de medidas son resueltos con mayor facilidad por los alumnos que los problemas de otras categorías como la comparación e igualación (Díaz, 2004).

Los niños que identifican la suma recurrieron a los procedimientos anteriormente descritos: operación directa en la calculadora, cálculo mental (descomposición aditiva y sobreconteo) y algoritmo escolar de la suma. Es importante destacar el alto grado de uso de los procedimientos de suma con calculadora y cálculo mental a diferencia del uso del algritmo escolar. A pesar de las dificultades a las que los niños se enfrentaron, la mayoría de los problemas de esta categoría fue resuelta de manera correcta. El éxito que tuvieron estos alumnos en sus procedimientos están relacionados con los siguientes aspectos:

[23] Cabe recordar que contemplando a todos los niños fueron 29 problemas los planteados de esta categoría. El número de problemas propuestos a cada niño varió de acuerdo al desarrollo y las posibilidades de los alumnos (en promedio fueron 3 problemas por niño).

- Una vez familiarizados con el uso de la calculadora, los alumnos que habían identificado la suma como operación que resuelve los problemas y que utilizaron este artefacto, lograron responder correctamente y de manera consistente.

- Los pocos alumnos que recurrieron al algoritmo escolar de la suma lograron resolver los problemas de forma correcta. Cabe recordar que en algunas ocasiones recurríeron a este procedimiento para verificar el cálculo que habían realizado en la calculadora.

- El sobreconteo favoreció la solución de problemas en donde el tamaño de los números no era tan grande.

- Los alumnos al enfrentarse a algunas de las dificultades descritas y darse cuenta que el procedimiento que habían elegido con antelación no era tan apropiado para resolver el problema optaban por apoyarse en otro procedimiento con el que lograban resolver.

Cabe resaltar que el uso frecuente de la calculadora para solucionar los problemas es muy notorio, aunque los alumnos presentaban dificultades en su uso. Considero que este resultado invita a reflexionar sobre la importancia del uso de la calculadora en las actividades escolares Si los niños tienen interés en su uso, ¿por qué no permitir y aprovechar este recurso para plantear problemas a los alumnos y reflexiones sobre sus procedimientos?, propuestas como las de Broitman (2011) invitan al uso de la calculadora en este sentido: no para evitar los alumnos aprendan procedimientos algorítmicos sino para potenciar el aprendizajes de otras fromas de solucionar.

La descomposición aditiva como procedimiento de cálculo mental permite a los alumnos descomponer los números –apoyándose en la base decimal y el valor posicional- de tal manera que los cálculos se les faciliten. Sólo uno de los niños recurre a este procedimiento lo cual lleva a preguntarse si los alumnos de la muestra han tenido la oportunidad de conocer este procedimiento como una posibilidad para resolver problemas de composición de medidas, tal vez no se favorece su aparición en la escuela. Esta realidad invita a reflexionar sobre la importancia de permitir el uso de este tipo de procedimientos no convencionales en el aula y fomentar su análisis, y tal vez incluso dar lugar a su enseñanza planteando actividades que motiven descomposiciones. El análisis y enseñanza de las descomposiciones decimales ha sido ya propuesto en trabajos como los de Lerner y Sadovsky (1994), quienes señalan que este conocimento debe ser enseñado de manera previa a la enseñanza del algoritmo convencional.

La poca recurrencia al uso del algoritmo escolar también llama la atención. Durante las entrevistas los alumnos participantes mostraron conocer y dominar el procedimiento para resolver sumas a través del algoritmo, sin embargo recurrían muy poco a él cuando se les plantearon problemas, inclusive dos de los tres alumnos que lo utilizaron recurrieron a él sólo para verificar su cálculo realizado con otro procedimiento. Ante ello surgen dudas como ¿valdrá la pena invertir tanto tiempo en enseñar sólo los algoritmos convencionales en la escuela? ¿Habrá que permitir a los niños explorar y aprender otros algoritmos?

La heterogeneidad de procedimientos que los datos arrojan permiten señalar que: los niños no recurren a un solo tipo de procedimiento al solucionar los problemas, al enfrentarse a dificultades deben ir ajustando la selección de procedimientos que hacen, los alumnos se apoyan con mayor medida en procedimientos no convencionales que convencionales. Todo ello da pie a reflexionar sobre la importancia de fomentar el uso, el aprendizaje y el análisis de distintos procedimientos desde el aula. Será importante pensar también en la riqueza de la comunicación entre pares que debiese afectuarse en la escuela, de tal manera que los niños vayan acrecentando su bagaje de procedimientos.

4.2.2 ¿Cuánto dar de cambio? Procedimientos en problemas de tipo transformación de medidas (transformación negativa).

Ahora abordaré la descripción de los procedimientos identificados al proponer a los alumnos problemas de tipo cambio (transformación de medidas, con transformación negativa). En este tipo de problemas una transformación opera sobre una medida obteniendo un estado final. Para solucionar los problemas los niños deben encontrar la diferencia entre la cantidad con la que se paga y el costo del producto; el procedimiento canónico que lo soluciona es una resta.

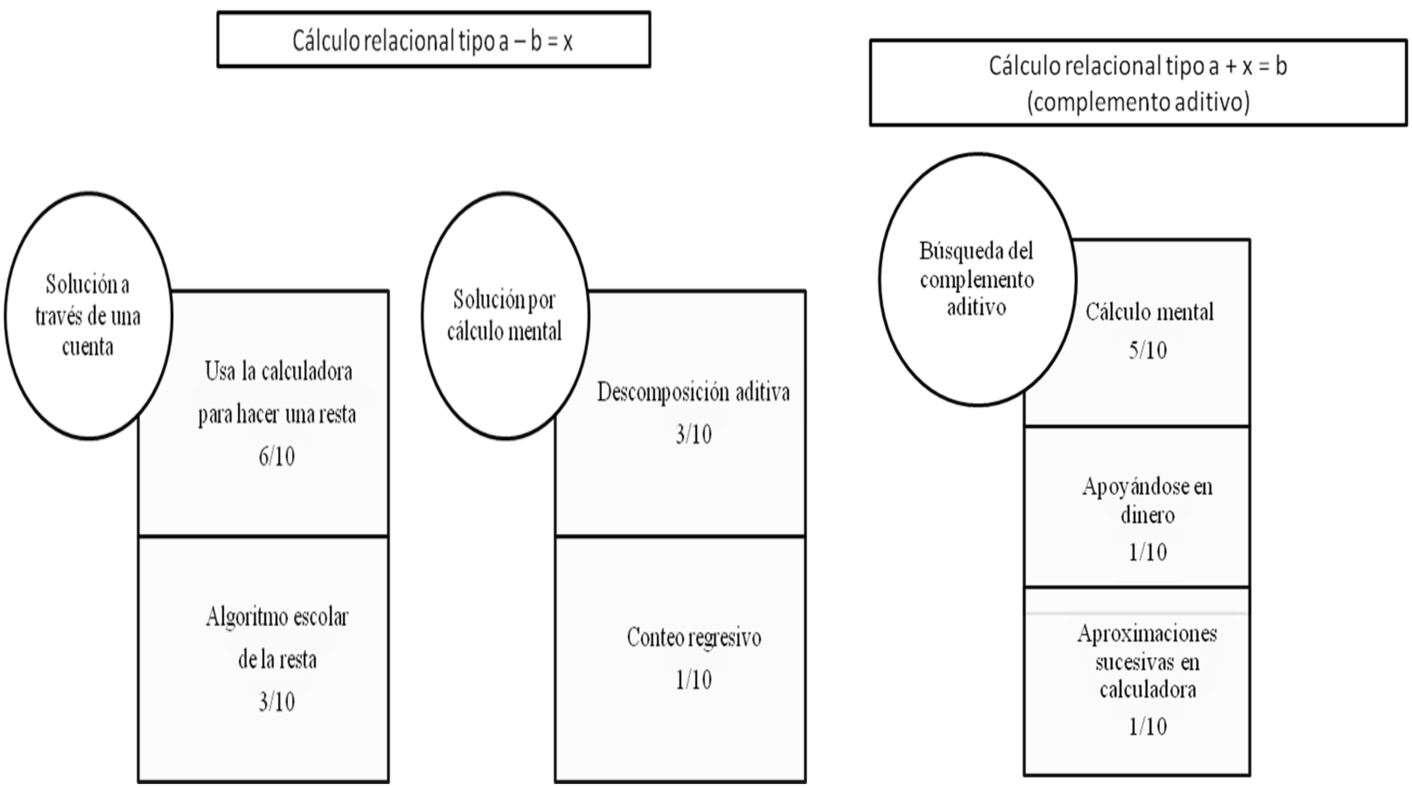
Flores (2005) señala que son varios significados de la sustracción los implicados en los problemas aditivos. En el caso de los problemas de dar el cambio son dos los significados de la sustracción en juego, el significado implicado dependerá de cómo se afronte el problema.

El problema de dar el cambio puede ser visto como un problema de “decremento de cantidades” o como “la diferencia como medida de una relación entre conjuntos”. El primer significado descrito “decremento” se relaciona a la acción que hace el vendedor de “quitar dinero” del monto pagado –por ejemplo si cobran $8 y se paga con $10, quitan 8 de los 10 con los que se pagaron-, el significado de “encontrar la diferencia” tiene que ver con la búsqueda del complemento aditivo –en el mismo ejemplo, cuánto le falta al 8 para tener 10-. Es así que en este tipo de problemas son dos tipos de cálculos relacionales los que pueden estar presentes, dependiendo de cómo se encare el problema.

Los procedimientos que se identificaron durante la actividad simulada de “La papelería” se han clasificado de acuerdo a los tipos de cálculos relacionales de los que ya se ha hecho referencia.

A continuación se da cuenta de los procedimientos llevados a cabo por alumnos de segundo grado al enfrentarse al problema de determinar el monto del cambio. A diferencia del problema anterior en el que sólo hay un cálculo relacional, este tipo de problemas, como se ha comentado, puede presentar dos tipos de cálculos relacionales: uno que plantea una resta directa y otro que se resuelve encontrando el complemento aditivo. Para cada cálculo relacional se presenta un esquema que muestra los diversos procedimientos que tuvieron lugar y el número de alumnos que usaron cada procedimiento.

Figura 5. Tipos de procedimientos a los que recurren los alumnos entrevistados al resolver problemas aditivos que implican determinar el monto del cambio



Cabe mencionar, que el rol de vendedor que se asignó a los alumnos en la simulación de compra-venta, les implica enfrentarse a tareas a las que no están expuestos tradicionalmente, como lo es “determinar el cambio”. Según lo muestran las indagaciones sobre el dinero y compra-venta realizadas con estos alumnos, sólo uno de ellos refiere hacer cálculos para verificar si el “cambio” es correcto; el resto de alumnos únicamente cuentan el dinero para corroborar que se les dio el monto que el mismo vendedor les dijo les daría. Con base en esa información, se esperaba que se presentaran dificultades para resolver estos problemas, lo cual es constatado por los resultados que aquí se presentan.

Es importante señalar que el número de respuestas correctas en estos problemas disminuye en comparación a los problemas de composición de medidas. Del total de cuarenta y seis problemas de tranformación negativa que se plantearon –considerando las diez entevistas– únicamente en veintinueve problemas los niños dieron respuestas correctas. A continuación se describen los procedimientos que los alumnos llevaron a cabo así como las dificultades y los errores más frecuentes asociados a éstos.

A) Solución a través de una cuenta.

Resta efectuada en la calculadora.

Este procedimiento es utilizado por seis de los diez niños participantes. De esos seis, dos alumnos recurren a él casi en la totalidad de los problemas, sin importar el valor de los datos, mientras que cuatro alumnos recurren a él cuando se modifica alguna variable en el problema. Es importante precisar que esos seis alumnos utilizan la calculadora para realizar la resta directa (utilizando la tecla menos -), aspecto significativo considerando que ellos han establecido ya una relación directa entre la tarea de dar “el cambio” y la operación resta.

Los casos de Érick y Karla Patricia ilustran el primer grupo de niños que ocupan con frecuencia este procedimiento de resta directa con la calculadora. Érick resuelve a través de este procedimiento cuatro de los seis problemas que se le plantearon, y Karla Patricia resuelve cinco de los seis problemas; cabe mencionar que el problema restante lo resuelve por sobreconteo, pero recurre a la operación en calculadora para comprobar su resultado. El uso frecuente de este procedimiento que hacen estos alumnos da cuenta de la funcionalidad y eficacia que han encontrado en él, habría que preguntarse entonces si ellos podrían resolver sin calculadora los problemas planteados. Esto lleva a reflexionar sobre las restricciones que deben considerarse, en el trabajo en el aula, al solucionar problemas aditivos de este tipo, para que exploren otros procedimientos.

En el caso del grupo de alumnos que emplean la calculadora en pocas ocasiones para hacer la resta, está el ejemplo de Luis Alberto, quien recurre a este procedimiento al cobrar $38 de $100, lo que no hace con problemas donde hay números más pequeños como cobrar $8 de un billete de $20.

Otras dificultades identificadas en el uso de la calculadora para resolver los problemas de tipo transformación de medidas, son:

- Confusión entre los datos implicados en el problema. Karla Patricia en el primer problema de este tipo que resuelve (cobra $35 de $50) comprueba su resultado obtenido por sobreconteo utilizando la calculadora, pero en lugar de oprimir 50-35 oprime 50-50.
- Al teclear una de las cantidades se centran en las decenas. Samantha cobra $27 de $30. Teclea en la calculadora 30-20.
- No identifica el procedimiento más eficiente de acuerdo a los números implicados en el problema. Si bien Samantha identificó el procedimiento canónico para resolver el

problema (resta) el procedimiento que elije le dificulta la resolución. Dicho problema (30-27) sería resuelto de manera más fácil por sobreconteo o con cálculo mental.

- Tipeo incorrecto de las teclas. Luis alberto para cobrar $38 de $100 teclea 100-28=, lo que le hace obtener un resultado incorrecto de 72. Una vez obtenido el resultado Luis Alberto no parece percatarse del error y entrega $72 de cambio. Es importante mencionar que según comentarios hechos por los niños durante las entrevistas impera en ellos la idea de que la calculadora es una artefacto que facilita de sobre manera los cálculos, o bien como dice Héctor tiene dentro de ella todos los resultados a todas las operaciones. Estas ideas pudieran fomentar por parte de los alumnos una sobrevaloración de la calculadora y no cuestionar ningún resultado que emane de ella.

Algoritmo escolar de la resta.

Es importante destacar que este procedimiento, al igual que el algoritmo de la suma en los problemas de composición de medidas, apareció pocas veces en las acciones llevadas a cabo por los niños al resolver problemas de este tipo (sólo tres niños recurren a él). Es importante tener en cuenta que en segundo grado el aprendizaje del algoritmo escolar de la resta es un contenido a enseñar y que lo más probable es que varios alumnos estuvieran en proceso de apropiación, pero por el tiempo en el que se llevan a cabo las entrevistas (4to bimestre) pudiera pensarse que la mayoría de alumnos lo ha aprendido aunque aún les dfalte consolidar algún paso. Considerando lo anterior, el poco uso de este procedimieno pudiera llevar a cuestionar, como ya se ha hecho en otros estudios, la gran cantidad de tiempo que se invierte en la escuela para el aprendizaje de los algoritmos, pero sobre todo su preponderancia en comparación con otros procedimientos.

Cabe decir que los tres alumnos que sí usaron el algoritmo, tuvieron notables dificultades para realizarlo, pues se requería desagrupar centenas en decenas y decenas en unidades para poder resolver la sustracción. Esta característica de los cálculos, se debe a la decisión metodológica de utilizar cantidades cerradas para realizar los pagos de las compras ($20, $50, $100) de tal manera que siempre existiera la necesidad de dar cambio. Es cierto que este tipo de cálculos que implican la desagrupación de varios órdenes de números son bastante complicados para alumnos de segundo grado, incluso su enseñanza apenas es incipiente en este grado, sin embargo, podría ser posible que los niños "intentaran" hacer restas algorítmicas aunque en el camino se dieran cuenta de que no sabían realizarlas. Ello daría pauta a pensar que sí ven en el algoritmo un resurso factible para solucionar estos problemas.

Las dificultades en el desagrupamiento, a la vez puede llevarnos a reflexionar en una posible fortaleza de utilizar la compra-venta para la construcción de conocimientos sobre suma y resta. Si se opta por usar el algoritmo de la resta, dado que los problemas de dar el cambio tienen como minuendo frecuente cantidades cerradas (10, 20, 50, 100), serà necesario hacer des-agrupamientos, lo cual en otros contextos no sucede necesariamente pero puede suceder). Ello permitiría a los docentes abordar la institucionalización de este algoritmo sin la necesidad de presentarlo únicamente en un contexto numérico.

Las dificultades encontradas en este procedimiento –algoritmo escolar de la resta- son las siguientes:

- No realizar la transformación o desagrupamiento de centenas a decenas o de decenas a unidades. La "acomodación" que hacen es o bien "bajar" el cero o "bajar" las unidades del número debido a que "no alcanza". En otras palabras se puede decir que lo que los niños hacen es "restar lo restable": al número mayor le quitamos el menor sin importar si se encuentra el minuendo o en el sustraendo. Este error lo presentaron los tres alumnos que usaron el algoritmo.

El actuar de Karla Marisol (KM) permite ilustrar este error, aunque la alumna menciona "hago una suma" lo que escribe inmediatamente es una resta.

> *Se compra a Karla Marisol una calculadora ($46) y se paga con un billete de $50.*
>
> **KM:** Ahora hago una suma. (escribe en la hoja de papel blanco 50 – 46 de forma vertical)
>
> *Realiza el algoritmo de la siguiente manera*

$$\begin{array}{rcc} & 5 & 0 \\ - & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

- Otro error es no Identificar el procedimiento de mayor eficiencia de acuerdo a los datos del problema. Del mismo modo que sucedió con el uso de la calculadora, algunos niños utilizan este algoritmo cuando sería mucho más fácil resolver el problema por medio de otros procedimientos, como el cálculo mental. Por ejemplo Luis Alberto en el problema donde cobra $136 de $200 recurre al cálculo escrito por medio de algoritmo (que es de suma dificultad por las transformaciones) y no al complemento aditivo, descomposiciones aditivas, o incluso a la calculadora. Que le habría resultado más eficiente.
- Acomodo incorrecto de los datos numéricos al escribir el algoritmo[24] (no acomodar unidades con unidades, decenas con decenas…).

[24] Esto puede dar elementos a reflexionar sobre la práctica común en la escuela de dar a los alumnos ya las sumas acomodadas.

El algoritmo realizado por Luis Alberto da cuenta de ello. Además, “invierte” el minuendo y el sustraendo de la columna de las decenas, como se verá enseguida.

Se compra sacapuntas ($3.50) y pluma ($4.50). Se pagan $8 con $20:

$$\begin{array}{rcc} & 2 & 0 \\ - & 8 & \\ \hline & 6 & 0 \end{array}$$

Cabe señalar que ante estas dificultades el alumno rechaza su respuesta como correcta y posteriormente utiliza el procedimiento de desconteo (Duhalde y González, 1996) el cuál es parte de los procedimientos de cálculo metal que se abordan a continuación.

B) Solución por cálculo mental.

Descomposición aditiva apoyada en dinero.

Como se ha mencionado en el apartado sobre procedimientos al resolver problemas de composición de medidas, la descomposición aditiva implica desarmar las cantidades en otras más pequeñas que faciliten realizar los cálculos, ello basado en el valor posicional. Algunas veces se dejan “de lado” números que se retoman al finalizar el cálculo. Ahora en este procedimiento el cálculo mental es apoyado en el dinero.

Tres de los diez alumnos utilizan este procedimiento para resolver sus problemas (Esmeralda, Héctor y Karla Marisol). El problema en el que Héctor utiliza este procedimiento implica precios con centavos, será abordado más adelante. Esmeralda recurre a este procedimiento apoyándose en el material “dinero” para realizar sus cálculos.

Se compra a Esmeralda un sacapuntas ($3.50) y una pluma ($4.50). Cobra $8 y se le paga con un billete de $20. La alumna toma el billete lo coloca en la caja y toma dos monedas de $10. Deja una moneda de $10 a un lado, y la otra en su mano con ella realiza el cálculo de manera mental y determina que “el cambio” son $2, echa la moneda de $10 a la caja, toma dos monedas de $1 y las entrega junto a la moneda de $10 que ha dejado a un lado, da $12 de cambio. Considero importante destacar cómo el apoyo del dinero, al menos en esta descomposición resulta muy favorecedor.

¿Qué sucede cuando no se utiliza un solo billete o moneda para realizar el pago? Existen otros dos procedimientos realizados por Karla Marisol y Esmeralda que por la configuración del dinero con el que se les paga parece ser que motivan la descomposición. A Esmeralda se le pagan $89 con $90 –un billete de $50, uno de $20 y dos monedas de $10-, ella opera de forma similar a la descrita en su otro procedimiento: deja en la caja $80 y opera sobre $10, determinando $1 de cambio. A Karla Marisol se le pagan $38 con $40 –cuatro monedas de $10-. Karla Marisol deja $30 en la caja inmediatamente y entrega $10 de cambio (sólo opera con las decenas) cuando se le cuestiona opta por utilizar el algoritmo escolar.

Conteo descendente.

Dentro de los procedimientos relacionados con el cálculo mental aparece un procedimiento llamado desconteo (Parra, 1994 y Duhalde y González, 1996) o conteo descedente o regresivo como lo nombran algunos otros didactas -Fuson (1988) lo nombra sobreconteo descendente y señala que es la etapa más avanzada de la construcción de la sere numérica oral -.

Dicho procedimiento ha sido identificado por Parra (1994) como una estrategia de cálculo mental que consiste en contar de atrás para adelante para restar un número de otro.

Al parecer este procedimiento es presentado en el proceso de solución que Luis Alberto realiza para un problema. Se compra al alumno una pluma (\$4.50) y un sacapuntas (\$3.50), cobra \$8 y se le paga con \$20. Como ya se señaló en primer lugar el alumno intenta resolver el problema por medio del algoritmo de la resta, pero presenta dificultades (que ya han sido señaladas en el apartado anterior), al rechazar el resultado obtenido Luis Alberto recurre al desconteo.

Si bien en el video que documenta este procedimiento es inaudible el conteo regresivo que realiza el alumno, las observaciones hechas en el momento de la entrevista dan cuenta de ello. Lo que realiza Luis Alberto es comenzar a contar de forma descendente y va poniendo dedos de uno en uno hasta llegar a ocho dedos levantados (observa sus dedos) y determina que son \$12 lo que debe entregar de cambio y lo da. Lamentablemente, por los minutos inaudibles, no se ha podido esclarecer en qué número comienza Luis Alberto a realizar el desconteo.

C) Búsqueda del complemento aditivo.

Se entiende por complemento aditivo el procedimiento que consiste en "buscar, sin hacer una sustracción, lo que hay que añadir (o quitar) al estado inicial para llegar al estado final" (Vergnaud, 1991, p. 172). En otras palabras, como lo explica Solares (2012) este procedimiento "consiste en encontrar la diferencia entre dos cantidades buscando el número que, sumando al sustraendo, permite llegar al minuendo" (p.198). El complemento aditivo ya ha sido identificado como una de las formas de resolver problemas aditivos que implican el cálculo de una diferencia (Vergnaud, 1991; Broitman, 1999). Para ilustrarlo, se presenta el siguiente ejemplo:

El vendedor debe cobrar \$25 y el pago se realiza con \$30.

La estructura que plantea el problema y la que lo soluciona es la misma: 30-25 = X

La adecuación que hacen los niños para solucionarlo es: $25 + X = 30$

Este procedimiento fue, junto con la resta en calculadora, el más utilizado por los alumnos: seis de los diez alumnos recurrieron a él.

Para llevar a cabo este procedimiento los alumnos se apoyaron en tres recursos: aproximaciones con calculadora, cálculo mental y uso del dinero. Estas formas de calcular el complemento aditivo coinciden con las que se identificaron en el estudio de Solares (2012). A continuación describe cada una de ellas:

Complemento aditivo a través de cálculo mental.

La mayoría de los niños que buscaron el complemento aditivo recurrieron al cálculo mental (5 alumnos). Para ilustrarlo se presenta a continuación lo realizado por Héctor (H) quien al igual que otros alumnos, recurre al uso de dedos[25] y movimientos de cabeza para acompañar su cálculo:

Se le compra a Héctor un libro de fábulas ($89) y se paga con un billete de $100

H: (Determina por cálculo mental que el cambio son $11.00 y los entrega)
E: ¿Y cómo está usted seguro que son once pesos?
H: Le sumé… para que me diera… este para que me diera cien. Le sumé diez y apenas me dio noventa y nueve
E: Ajá
H: Y luego más uno, cien.

La explicación de Héctor permite reconocer que para determinar el complemento su primera acción es sumar diez, lo cuál resulta ser una práctica que economiza el procedimiento: sumar primero diez y después ajustar.

[25] "Los dedos de las manos y el 'pensar en voz alta' son dos instrumentos poderoso que apoyan el cálculo mental. Y el manejo de ambos instrumentos, en ocasiones, llega a ser en tal grado interiorizado que resulta imperceptible hasta al observador más atento" (Ávila, 1987, p. 42; citada por Martín-Lunas, 1992, p. 76).

La búsqueda del complemento aditivo puede llevarse a cabo apoyándose en diversas estrategias de cálculo mental: a través de aproximaciones sucesivas, sobreconteo o descomposición de números. En los resultados de esta investigación la mayoría de los niños encuentran el complemento a través de la estrategia de sobreconteo ascendente[26], que Parra (1994) identifica como una estrategia de cálculo mental y la cual ha sido abordada ya en los problemas de composición de medidas.

Acerca del uso del sobreconteo como estrategia de cálculo mental destacaré tres aspectos: a) las condiciones que cumplen los problemas en los que deciden recurrir al sobreconteo; b) cómo los alumnos apoyan (o abrevian) el sobre conteo recurriendo a resultados memorizados y, c) las dificultades que los niños enfrentan cuando recurren al sobreconteo.

a) Los niños que recurrieron al sobreconteo para encontrar el complemento aditivo hallaron en éste un procedimiento bastante cómodo cuando la diferencia era pequeña, pero no recurrieron a él cuando la diferencia entre pago y cobro era grande. Por ejemplo, para cobrar $35 de un billete de $50 Karla Patricia recurre al sobreconteo (la diferencia sólo era de $15), pero para cobrar $167 de un billete de $200 usa la calculadora y realiza directamente la resta (la diferencia era de $33). Esto me permite subrayar nuevamente la incidencia del tamaño de los números en los procedimientos de los niños (el tamaño de los números como una variable didáctica).
b) Las acciones emprendidas por Diana Paola al solucionar un problema permiten dar cuenta de cómo los alumnos pueden utilizar más de una estrategia de cálculo mental al solucionar los problemas. En uno de los problemas esta niña comienza a encontrar el complemento

[26] Fuson (1988) identifica el sobreconteo ascendente como una etapa avanzada del proceso de construcción de la serie numérica oral, siendo la cuarta etapa y seguida de una etapa aún más compleja que es el sobreconteo descendente.

aditivo a través del sobreconteo, pero en el camino se ayuda de los cálculos memorizados para encontrar la respuesta final.

Diana Paola debe cobrar $38 y se le paga con un billete de $50. Primero realiza sobre conteo de uno en uno aumentando diez unidades y llegando hasta el 48. Los dos pesos faltantes los determina de manera memorística, en un instante sabe que a 48 le faltan 2 para 50 y determina que son $12 de cambio. Recurrir a resultados memorizados ha sido ya identificado como estrategias de solución en problemas verbales aditivos (Bermejo Y Rodríguez , 1991). Por su parte, Parra (1994) citando a Groen y Parkman, se refiere a esos resultados memorizados como "los métodos reproductivos" que los niños emplean para recuperar resultados de la memoria a largo plazo. Tres de los diez niños entrevistados recurrieron a resultados ya memorizados.

c) Aunque las dificultades aquí enunciadas son presentadas por pocos alumnos (3 alumnos) y además son dificlutades que aparecen esporádicamente, son de llamar la atención pues por el grado escolar en el que se realiza la investigación se esperaría que dichas dificultades ya fuesen sorteadas por los alumnos.

Una dificultad que se presentó es no identificar en qué número debe detenerse el sobreconteo o incluso, en qué número se debe iniciar. Esta dificultad se encuentra íntimamente relacionada con el cálculo numérico y el desarrollo de la secuencia numérica. El error de estos alumnos, según los planetamientos de Fuson (1988), tienen que ver con problemas de no consolidación con la fase de sobreconteo (cuarta fase de la construcción de la cadena de numeración), sin embargo por la poca frecuencia del error puede considerarse que sólo fue causada por una distracción de los alumnos.

El ejemplo que enseguida se muestra es el de Esmeralda (Es), quien manifestó la dificultad de no saber hasta qué número detenerse aún tratándose de un rango numérico pequeño.

A Esmeralda se le compra una calculadora ($46) y se paga con $50

Es: (Recibe los $50.00 en tono muy bajo dice) le tengo que quitar. (Comienza el sobreconteo, inicia en el 47 y continua hasta el 59.. se queda pensando… y entrega $10.00 de cambio)
E: ¿Me sobran 10? ¿Con cuánto le pagué?
Es: 50
E: Y si me da 10 entonces usted me cobró 40.
Es: (Cara de sorpresa)

Después de algunos cuestionamientos por parte de la entrevistadora, la alumna hace otros intentos más de sobreconteo. En uno de ellos comienza desde el 46 y llega hasta el 59… Mira sus manos, tiene 8 dedos “levantados”, duda sobre el valor de esos 8 dedos. La entrevistadora le recuerda cuánto dinero le entregó, cuánto debe cobrarle y le pregunta nuevamente cuánto dinero le sobra. La alumna vuelve al sobreconteo comenzando en 47 y llegando hasta el 59… Ve sus manos y entrega $12.00. La entrevistadora le dice que le está sobrando más dinero que al inicio (Esmeralda le había entregado al principio $10). La alumna entonces le quita un peso y entrega $11.

La dificultad anteriormente descrita tiene relación con la complejidad del sobreconteo pues en este procedimiento está implicada la necesidad de coordinar dos series numércias a la vez: una serie que va representada con lo dedos y otra serie que va siendo enunciada de manera oral.

En otro ejemplo, Karla Patricia comienza el sobreconteo en un número equivocado: la entrevistadora pide a Karla Patricia un cojín o almohada ($35) y paga con $50. Para determinar el monto del cambio Karla Patricia realiza sobreconteo, pero comienza en el término 35, por lo cual al llegar al 50 dice que lo que sobra es 16. (La respuesta correcta es 15). Karla Patricia cuenta dos veces el númro 35 por lo cuál su resultado es incorrecto[27].

Complemento aditivo apoyándose en el dinero.

En las transacciones de compra-venta reales existe un procedimiento altamente recurrente al momento de dar el cambio: ir realizando el complemento aditivo a través de las cantidades de dinero que se van entregando al comprador. En su estudio, D. Solares (2012) identifica que varios de los niños a quienes les planteó situaciones de compra-venta, utilizaron ese procedimiento para calcular el cambio: "a partir de la cantidad que debía cobrarse se iban agregando billetes y/o monedas hasta llegar a la cantidad entregada por el cliente (…) siguiendo este procedimiento, tanto el que cobra como el que recibe el cambio tienen la certeza de que éste es correcto, aunque no sepan de manera inmediata a cuánto asciende" (p.199).

A diferencia de esa investigación, los alumnos del presente estudio recurren poco a este procedimiento; sólo un alumno lo utiliza para dar el cambio en una ocasión, y otros tres alumnos muestran indicios de querer hacer uso del procedimiento, pero se les dificulta y lo abandonan casi de inmediato, y buscan otra forma de proceder. Este hecho me lleva a preguntarme por qué estos niños no utilizan esta práctica que parece ser habitual en las actividades de compra-venta. Considerando que los papás comentan sobre la poca frecuencia con que los dejan ir a la tienda (algunos de los alumnos apenas empiezan a hacerlo), ¿será que la participación incipiente en actividades de compra-venta por parte de estos niños no les ha permitido apropiarse todavía de este procedimiento? Otra opción posible es que los rangos numéricos que conllevan los

[27] Este tipo de errores es identificado por Baroody (2000, p. 98) como error de enumeración por partición y falta de regla cardinal y lo asocia a edades preescolares en los que la construcción de la serie numérica está en construcción.

problemas planteados no fomentan el uso de este procedimiento, tal vez ante rangos numéricos más cortos los alumnos sí pudieran recurrir a éste.

El único alumno que se apoya en el dinero para resolver el problema por complemento aditivo, es Héctor. Él realiza para sí sólo el complemento aditivo apoyándose en el dinero, cuando lo entrega al comprador no hace explícito el complemento aditivo entregando billete por billete como en muchas actividades de compra-venta real sucede, es decir, no va entregando cantidades de forma parcial hasta llegar al monto con el que se pagó.

Cabe mencionar que el cálculo de Héctor presentó un error, por lo que entrega un monto incorrecto, todo el proceso que realiza da cuenta de cómo este alumno se apoya en el mismo dinero para hacer sus cálculos. Además, cuando la entrevistadora le pregunta cómo puede estar seguro de que su cálculo es correcto, Héctor hace una suma por medio de calculadora cuantificando lo que había ido completando con billetes y monedas y sumándolo al precio del producto. El hecho de que se remita a dicha operación para comprobar, da cuenta de que Héctor sabe que puede recurrir a la suma para comprobar su resultado.

En este problema el comprador pide un libro de fábulas ($89.00) y un cuaderno ($16.00) se paga con $200

H: (Determina el total a cobrar por medio de una suma en la calculadora obteniendo 105)
E. (Paga con un billete de $200.00)
H: (Coloca el billete de $200.00 frente a él) Tomamos cien (coloca un billete de $100.00 frente a él, después toma 4 monedas de $10.00 y las coloca encima del billete de de $100.00, también toma una moneda de $5.00… después toma un billete de $50.00 y lo coloca junto al dinero que fue reuniendo –ha reunido $195.00–, entonces coge el billete de $200.00 y lo coloca en su caja con el resto del dinero de "su tienda").
H: Aquí está (entrega $195.00 de cambio)
E: ¿Y cómo puede estar usted seguro de que me dio bien?

H: Porque me dio doscientos, aquí le sobran cien (señalando el billete de 100 que entregó como parte del cambio) y eran ciento cinco (señalando la calculadora) y me dio doscientos así que le sobran ciento noventa y cinco.
E: ¿Me sobran ciento noventa y cinco? ¿Y habrá alguna manera de que esté seguro de que es eso?
H: Sumando (señala la calculadora)
E: ¿Quieres hacerlo?
H: Cincuenta más… (Comienza a señalar las monedas y a hacer cálculo mental)… noventa y cinco. (Teclea 105+95=). Doscientos.
E: Sí. Sumaste ciento cinco más noventa y cinco ¿verdad? ¿Aquí hay noventa y cinco?
H: Sí. Aquí cien, porque sobran cien (señalando el billete de 100) y aquí noventa y cinco, aquí en estas cuatro monedas y estos son cinco pesos.

Complemento aditivo por aproximaciones sucesivas en la calculadora.

El mismo alumno (Héctor), se apoya en la calculadora para encontrar el complemento aditivo a través de aproximaciones sucesivas. En ocasiones anteriores a la que aquí se presenta, este alumno había solucionado problemas por medio del complemento aditivo apoyándose en el cálculo mental, pero al aumentar el valor de la incógnita recurre a otros procedimientos, como el uso del dinero.

En primera instancia Héctor recurre a la resta en la calculadora, pero presenta un error al teclear primero el sustraendo y luego el minuendo, obteniendo un resultado negativo[28].

La entrevistadora compra una calculadora ($46) y un juego de geometría ($22). Se paga con un billete de 100.

H: (Ya había obtenido el total a cobrar por cálculo mental siendo éste $68.00)
E: (Paga con un billete de $100.00)
H: (Se queda pensando) Sesenta y ocho…Usted me dio cien ¿verdad?

[28] Esta es una limitación que se encuentra en la calculadora. Los niños no son sensibles a resultados negativos por el orden incorrecto en el que teclean los números, no hay forma que la calculadora les retroalimente al respecto.

E: (Asiente)
H: (Después de pensar un momento) es que ese no me lo sé así, no… no.
E: ¿Está un poco más difícil? Ahí hay papel y lápiz por si quieres usarlo, también hay una calculadora por si quieres usarla
H: Ajá es que para que se me haga más (inaudible)
E: Si has visto que en las tiendas luego tienen calculadoras, entonces tú también en tu papelería tienes
H: Ahora a sesenta y ocho le quito cien ¿verdad?
E: Inténtalo, lo que tú decidas hacer
H: (Oprime varias teclas hasta que logra encender la calculadora. Teclea 68-100, obteniendo -32) Treinta y dos[29]

Dada esta circunstancia, la entrevistadora lo invita a revisar su cálculo sugiréndole el procedimiento del complemento aditivo que el alumno ya había realizado en otro momento; entonces Héctor vuelve a hacer sus cálculos mediante complemento aditivo, pero esta vez usando la calculadora: al monto que cobra ($68) le suma una cantidad hipotética (lo que sería el monto del cambio) y a partir de ahí va haciendo modificaciones aproximándose sucesivamente a la cantidad con la que se pagó ($100) hasta hallar el monto exacto del cambio.

E: Oye y hace rato que tú hacías las cuentas, por ejemplo cuando me cobraste dieciséis pesos de un billete de veinte ¿te acuerdas? Te compré el cuaderno y te pagué con un billete de veinte ¿a dieciséis le quitaste veinte?
H: No, le sumé más dinero para que me diera veinte.
E: Ah ya. Y aquí me vas a cobrar sesenta y ocho ¿verdad?
H: Ya entendí, tengo que sumar un número, para que sesenta y ocho más otro número que me dé cien.
E: A ver, inténtalo.
H: (Oprime 68+46 =) Ciento catorce. Ciento catorce ya me pasé.
E: ¿Cuánto le sumaste?
H: Sesenta y ocho más cuarenta y cinco (borra y teclea 68 + 34 =) 102. Me volví a pasar.
E: Aunque ya te acercaste más ¿verdad?
H: (Borra, oprime 68 + 30 = obtiene 98) Ahora sí me faltó (borra y oprime 68 + 31 =; obtiene 99) son treinta y dos, son treinta y dos

[29] Una posible pregunta que se podría haber realizado a Héctor es ¿al 68 le puedo quitar 100? Para ver si entonces se percataba del número negativo.

E: ¿Cómo podríamos estar seguros que son treinta y dos?
H: Sumando (borra el resultado de la calculadora y oprime 68+32= obtiene 100).
Si es. (Toma 32 y los entrega de cambio)

Considero importante subrayar que las aproximaciones de Héctor van siendo elegidas de una manera eficiente, no elige números "disparatados" sino que va haciendo modificaciones que le permiten aproximarse gradualmente al resultado. El uso que Héctor hace de la calculadora me permite reflexionar sobre cómo el uso de este artefacto va acompañado de decisiones que el sujeto debe ir tomando. Esto puede ayudar a desmitificar ideas erróneas que se tienen sobre el uso de la calculadora. Gálvez, Navarro, Riveros y Zanocco (1994) señalan que dentro de la escuela "una objeción común es que el uso de la calculadora enfatiza mecanizaciones sin sentido y no apoya el desarrollo de la capacidad para pensar" (p.8), considero el ejemplo de Héctor ayuda a discutir dicha objeción.

Conclusiones sobre los procedimientos en los que se aplica una transfromación a una medida.

La mayoría de los alumnos identifican a la resta como la operación que resuelve este tipo de problemas, pero no calculan la resta de manera directa. El procedimiento al que más recurren es la solución por búsqueda del complemento aditivo apoyados en diversos recursos (cálculo mental especialmente sobre conteo, dinero, calculadora). Otros procedimientos poco frecuentes, pero que muestran estrategias de cálculo mental, son: el uso del desconteo y la descomposición aditiva.

De acuerdo al análisis realizado, ocho de los diez niños participantes identificaron, al menos para un problema, la resta como la operación que resolvía esta clase de problemas de transformación[30]. Los ocho alumnos utilizaron esta operación apoyándose en el algoritmo escrito o en el uso de la calculadora para determinar “el cambio”. Este dato es significativo, pues nos lleva a suponer que estos alumnos relacionan a la resta como la operación que permite encontrar una diferencia. Aún cuando los resultados que obtuvieron no fuesen correctos, vincular a la resta con este tipo de problemas es un avance importante en la construcción de significados de esta operación. El número de niños que logran identificar esta operación es significativamente más alto que el encontrado en el estudio de Solares (2012) en donde únicamente dos de seis alumnos relacionan ese tipo de problemas aditivos con la operación “resta”. Cabe precisar que en el estudio de Solares se trata de alumnos de 4º, 5º y 6º grado de primaria, quienes si bien tienen mayor escolaridad que los alumnos de este estudio (son de 2º grado), su trayectoria escolar se ha visto interrumpida por su condición de migrantes y de trabajadores. Esto lleva a preguntarme ¿entonces la escuela sí está proveyendo a los alumnos (de la muestra de este estudio) de herramientas que le permiten solucionar problemas de su vida cotidiana?

Sobre los procedimientos identificados al resolver problemas de “dar el cambio”, es importante resaltar la preponderancia de procedimientos no formales a comparación del algoritmo de la resta que fue utilizado en muy pocas ocasiones. Este resultado coincide con los registrados en los problemas de tipo composición de medidas. Al igual que el uso frecuente de la calculadora.

[30] Los dos niños que al parecer no identifican dicha operación son Edwin y Esmeralda. Esmeralda soluciona los problemas a través de complemento aditivo, mientras que Edwin en cinco de los seis problemas de esta categoría que le fueron presentados determinó el monto del cambio de manera arbitraria.

De igual manera se resalta el uso frecuente del cálculo mental para la resolución de problemas de transformación, lo que lleva a reflexionar nuevamente sobre la importancia de permitir este tipo de estrategias en el aula, de analizarlas y aprender sobre ellas.

El complemeto aditivo resultó ser un procedimiento eficaz para la resolución de estos problemasy puede destacarse que en este procedimiento los intentos que algunos niños hacían apoyándose en el dinero para realizar el complemento, sin embargo su frecuencia de uso de monedas y de billetes fue bajo comparado con los resultados de Solares (2012). Pudiera pensarse que la experiencia incipiente de los alumnos en realizar compras de manera autónoma, no les ha permitido aún apropiarse de este tipo de estrategias que son altamente utilizadas en actividades de compraventa reales.

Los errores y dificultades presentados por los niños al intentar resolver los problemas planteadospor medio del algoritmo, llevan a reflexionar sobre la necesidad de intervenciones docentes al enfrentar dichos errores y dificultades ¿Qué hacer en el aula? ¿Cómo ayudar a los alumnos a sortear esas dificultades y errores y a aprender de ellos? Por otra parte, es importante señalar el papel de la estimación previa de los resultados que podría permitir a los niños controlar los resultados que obtienen a través del algoritmo. Dichas estrategias estimativas parecieran estar ausentes en algunos niños.

4.2.3. Procedimientos para problemas aditivos que implican precios con centavos en ambos tipos de problemas .

Por último en este capítulo abordaré algunos aspectos interesantes que permitieron obtener los problemas que implicaban precios con centavos. Se presenta en una apartado distinto por dos motivos: primeramente porque se reporta los sucedido tanto en problemas de tipo composición de medidas como los de transfromación de medidas y porque los precios con centavos, al ser números decimales, poseen carácterísticas específicas.

Aunque no es la intención de este trabajo investigar la resolución de problemas aditivos con números decimales, para la simulación de compra-venta se consideraron precios con centavos (cincuenta centavos) para tener una aproximación a los procedimientos que los niños eligen al operar con este tipo de números. Esta decisión se tomó considerando que en las actividades de compra-venta reales estos precios son frecuentes. Además, como se manifestó en las inadagaciones sobre los conocimientos de dinero, los alumnos identifican las monedas con valor de centavos y saben que hay productos cuyo precio incluye centavos.

A continuación se presentan brevemente los diferentes procedimientos a los que los niños recurrieron al planteárseles problemas con números decimales así como algunos errores o dificultades relevantes.

- Descomposición aditiva. Este procedimiento fue muy recurrente en problemas de composición de medidas cuando se planteaba la compra de una pluma de \$4.50 y de un sacapuntas de \$3.50; el alumno debía determinar el monto a cobrar. Los cuatro alumnos que recurrieron a este procedimiento descomponían los precios en pesos y centavos para operar con ellos. El cálculo del total de pesos era realizado por sobreconteo, mientras que el cálculo de los centavos se hacía mediante una suma memorizada en la que demostraban saber de antemano de .50¢ más .50¢ son un peso. Un error que se presentó en algunos de estos procedimientos realizados por los niños es que los alumnos no toman en cuenta los centavos una vez que han operado con los pesos, o bien sólo toman los centavos del precio de uno de los productos y olvidan el otro. Cabe señalar que aún cuando en las indagaciones realizadas en las tareas descritas al principio, algunos alumnos leyeron 350 en lugar de 3.50, al momento de operar con estos números los tomaron como “tres pesos con cincuenta centavos” y así operaron con ellos.

En los problemas de transformación de medidas Héctor también recurre a este procedimiento. A él se le compra un sacapuntas ($3.50) y se le paga con $5. Descompone el número con decimales en (3 y .50) opera sólo con los enteros apoyándose en complemento aditivo y después recupera los .50¢, aunque los agrega para dar el cambio, entregando un monto equivocado.

H: (hace un cálculo mental y entrega $2.50 de cambio)
E: Y ¿cómo sabremos que si estoy bien?
H: Me dio 5
E: Ajá
H: Y 3 para 5 me sobran 2 y 50 centavos, 50 centavos, 2.50
E: Yo creo que voy a venir con usted más seguido, a su papelería… porque me está dando de más… me conviene venir con usted
H: Sí son 2.50
E: ¿Seguro?
H: (Asiente)

- Realizar operaciones con calculadora. Tres alumnos recurrieron al uso de la calculadora para solucionar los problemas en los que se encuentran números decimales, sin tener éxito en respuestas correctas. Es notable la dificultad que tuvieron para identificar las teclas necesarias para escribir los decimales. Por ejemplo, Karla Patricia intenta sumar con la calculadora 4.50 más 3.50 (ya la había obtenido, de manera errónea, 7.50 mediante otro procedimiento; quiso verificar con la calculadora):

KP: Cuatro (marca 4 y luego duda pasando su dedo por todo el teclado) cincu…cincuenta (marca 450)

E: Ajá
KP: (Se detiene y duda) ¿cómo? Es que casi no sé hacerle así con la calculadora (borra)
E: Como tú creas
KP: (Oprime 450 + 350 = 800) ¡Ay! Es que no… son siete…

Sería interesante indagar en otras investigaciones los procedimientos con precios con centavos, más allá de manejar únicamente precios con .50¢.

4.3. Conclusiones del Capítulo

Los resultados de este capítulo ponen en evidencia el uso diverso de procedimientos que lleva a cabo los alumnos. Las decisiones que ellos van tomando respecto a utilizar un procedimiento u otro están asociadas con el tipo de problema que se les presenta y las características que tiene, por ejemplo el tamaño de los números y la categoría aditiva implicada.

Respecto al tamaño de los números es importante señalar que en esta investigación se constata la importancia de dicha característica como variable didáctica. Mientras que había alumnos que utilizaban un tipo de forma sistemática y eficaz con varios problemas, enfrentarse problemas con números más grandes les implicaba realizarlos a través de otros procedimientos. Sobre la categoría aditivas implicada se notan diferentes procedimientos para una categoría que para otra.

Ante ambos tipos de problemas el uso de procedimientos no convencionales es más elevado que el de procedimientos convencionales. Esto lleva por una parte a cuestionar las prácticas de enseñanza que se tienen respecto a esos procedimientos convencionales y la cantidad de tiempo que se invierte en enseñarse sólo es tipo de procedimientos. Por otra parte, cabe destacar la importancia que tiene promover, analizar y enseñar en las prácticas escolares, los distintos tipos de procedimientos no convencionales.

El uso frecuente de la calculadora como recurso para solucionar los problemas y apoyar algunos procedimientos lleva a voltear la mirada hacia la práctica de actividades en el aula con este artefacto. No se puede negar la existencia de este tipo de herramientas en las actividades cotidianas de los niños entonces caben preguntas como ¿por qué no aprovechar en el aula el trabajo reflexivo sobre la solución de problemas con este artefacto?

Respecto a la relación directa de determinados procedimientos con el contexto de compra-venta en el que fueron planteados los problemas, se pueden identificar como procedimientos íntimamente relacionados con el contexto, los siguientes: el complemento aditivo y la descomposición aditiva. Si bien estos procedimientos pueden ser utilizados por los alumnos –y ya lo han documentado otras investigaciones- en problemas aditivos en otros contextos, parece ser que el contexto de compra-venta los motiva y promueve con mayor énfasis.

No cabe duda que el papel de vendedores que se ha propuesto a los alumnos ha sido una decisión certera en esta investigación. Este rol que juegan los alumnos les obliga a enfrentarse a ciertos problemas y cálculos que como compradores no están “forzados” a enfrentar. Es una de las innovaciones que las decisiones metodológicas proponen para esta situación didáctica de “La tiendita”

Para finalizar cabe destacar que los conocimientos identificados en las entrevistas sobre el uso del dinero y la compra-venta, permiten dar cuenta que los niños cuentan con conocimientos construidos que les ayudan a enfrentar y resolver los problemas que se les plantean, a su vez existen conocimientos que aún están en construcción y que no son entendidos por algunos alumnos de segundo grado. Habrá que considerar esto al plantearles a los alumnos problemas que recurran a este contexto.

CAPÍTULO 5
Análisis Didáctico de Problemas Aditivos en el Contexto de Compra-Venta del Libro "Matemáticas. Segundo Grado. SEP"

En este capítulo se presenta un análisis didáctico de las características de los problemas aditivos en el contexto de compra-venta que están presentes en el "Libro de texto gratuito. Segundo grado. SEP (2012)". Dicho análisis forma parte de un análisis a priori que se presenta como resultado este capítulo. Para realizar estas tareas, analizar las relaciones semánticas y numéricas de los problemas así como el papel del contexto de compra-venta y el análisis previo, ha sido necesario establecer una herramienta de análisis recurriendo a distintas perspectivas.

La herramienta de análisis mencionada está constituida por dos elementos: 1) en cuanto al análisis del papel del contexto de compra-venta se diseñan criterios de análisis como: identificar las situaciones o tareas en el contexto de compra-venta que dan lugar a cálculos aritméticos (determinar el monto del cambio, comparar dos cantidades, determinar la cantidad de dinero que falta para comprar, entre otras) y 2) en cuanto a las estructuras semánticas y numéricas se eligen criterios como: identificar la categoría de la relación aditiva implicada, se analiza el lugar de la incógnita en el problema, el tamaño de los números en juego, entre otros.

La implementación de la actividad emulada de "La papelería" –abordada en el capítulo anterior- y sus datos arrojados se retoman en el análisis del libro de texto en dos sentidos: 1) por un lado permite contar con elementos que funjan como parámetro para indagar el papel del contexto implicado en el problema y los conocimientos que de compra-venta y uso de dinero a los que se hacen referencia y 2) los procedimientos, errores y dificultades identificados a través de la situación que emula la compra-venta serán considerados para realizar el análisis a priori en el que se hipotetiza sobre los posibles procedimientos, errores y dificultades.

La estructura del capítulo es la siguiente: se presentan primero los criterios de análisis; posteriormente, con base en esos criterios, se hace una revisión general de los problemas aditivos en contexto de compra-venta presentes en el libro de texto. Después, de esa totalidad se retoman cinco problemas aditivos para hacer un análisis más puntual. La elección de esos problemas responde a que tienen características peculiares que dan lugar a ciertas reflexiones sobre los posibles procedimientos, dificultades y errores de los alumnos, así como al diseño didáctico de problemas aditivos en el contexto de compra-venta.

5.1 Criterios de Análisis

Como ya se mencionó en el capítulo metodológico, los criterios que uso para analizar los problemas aditivos se apoyan principalmente en lo planteado por la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC), pero han sido enriquecidos también por la clasificación de Bermejo y Rodríguez (1991) y por las aportaciones de Puig y Cerdán (1990) y Castro, et al. (1998) sobre los problemas de varias etapas. Así mismo, me apoyo en algunos de los conocimientos sobre el uso del dinero y la actividad de compra-venta de diez niños de segundo grado, cuyos resultados ya fueron expuestos. Para ayudar al lector a tener presentes dichos criterios se muestra en seguida la tabla con los criterios de análisis que se presentó en el capítulo metodológico p. 99

Cabe mencionar que algunos de los elementos de la teoría propuesta por Vergnaud han sido trabajados por otros autores, entre ellos Broitman (1999) y Belmonte (2006), cuyas interpretaciones también me han servido para la construcción de criterios utilizados en este análisis.

Categoría de relación aditiva implicada en el problema	• Composición de medidas • Transformación de medidas • Comparación de medidas • Composición de transformaciones • Transformación sobre estados relativos • Composición de estados relativos • Problemas de igualación
Lugar de la incógnita	• Incógnita en el estado final o en el total • Incógnita en transformación o en segundo sumando • Incógnita en el estado inicial o primer sumando
Tipo de relación implicada en el problema	• Relación estática • Relación dinámica
Cálculo numérico necesario para resolver el problema	• Números implicados en el problema
Orden y manera en que se presenta la información	• Información necesaria • Información innecesaria • Información en orden • Información en desorden • Información en orden inverso
Número de etapas del problema	• Problema de una etapa (simples) • Problema de dos etapas o más (compuestos)
Conocimientos sobre dinero y compra-venta implicados en el problema	• Comparar dos cantidades de dinero • Determinar el monto del dinero con el que se cuenta • Determinar la cantidad de dinero que falta para comprar • Determinar el monto del cambio • Conocimientos referentes al dinero implicados en el problema (ganancia, ahorro y descuento)

Estos criterios han sido descritos en el capítulo metodológico, a continuación se presentan los resultados de la aplicación de éstos, pero antes de describir los resultados es importante recordar que para el criterio “categoría de relación aditiva implicada en el problema”

5.2 Análisis General de los Problemas

El libro de texto está conformado por un total de cuarenta y siete lecciones, de las cuales doce presentan problemas de tipo aditivo y de esas doce, siete plantean problemas en el contexto de compra-venta o se hace referencia al uso del dinero. Cabe precisar que no todos los problemas de esas siete lecciones se contextualizan en la compra-venta o en el uso del dinero, pues hay otros problemas de éstas que utilizan otros contextos.

Realizando el conteo de los problemas que nos interesan, se tiene un total de veintisiete problemas[31]. En esos veintisiete problemas se encontraron treinta y cuatro estructuras aditivas por los problemas que implican más de una operación, por ello algunos datos cuantitativos del análisis general que aquí se presenta sobrepasarán la frecuencia de veintisiete. Cada uno de esos veintisiete problemas -y de las 34 estructuras aditivas- fue sometido a la herramienta de análisis descrita.

Con la intención de mostrar una revisión general de los problemas que conforman el libro de texto gratuito, en la siguiente tabla se muestran los datos arrojados en la implementación de tres criterios de análisis: categoría de la relación aditiva implicada, lugar de la incógnita, y orden y presentación de las informaciones de los problemas. Estos criterios permiten dar cuenta de características generales de los problemas señalando los datos de frecuencia en cada criterio. Cabe mencionar que la intención de mostrar estos “datos cuantitativos” es tener referentes sobre las características generales de los problemas aditivos en contexto de compra-venta del libro de texto. Posterior a la tabla se mencionarn algunos elementos más sobre estos datos y sobre los criterios que en la tabla no se muestran.

[31] En estos 27 problemas fueron también registrados problemas que se encuentran en secciones del libro de texto llamadas “Evaluación” e “Integro lo aprendido”. Estas secciones son definidas por los autores de la siguiente manera:
“Evaluación. En la que te darás cuenta del avance de tu aprendizaje durante el bloque
Integro lo aprendido. Donde resolverás problemas de los aprendizajes del bloque” (SEP, 2012, p.4)

Tabla 7.

Análisis general. Datos Arrojados por la Implementación de los Criterios: Categoría de la Relación Aditiva, Lugar de la Incógnita y Orden y Presentación de las Informaciones.

Criterio de análisis	**Frecuencia**			
Categoría de la relación aditiva implicada	Composición de medidas 14	Transformación de medidas 18	Igualación 1	Composición de transformaciones 1
Lugar de la incógnita	Total 14	Estado final 13 Transformación 2 Estado incial 3	Segundo sumando 1	Total 1
Orden y presentación de las informaciones	En todos la infromación es sólo la necesaria	Orden distinto a la estructura de solución 4 Es necesario recurrir a respuestas dadas en otras preguntas 1 En todos la información es a necesaria Información en orden 13	En todos la información es sólo la necesaria	Es necesario recurrir a respuestas dadas en otras preguntas 1

Destaco los siguientes datos de este análisis general, que llevé a cabo con ese conjunto de veintisiete problemas. Se especifican algunos datos que no han sido expuestos en la tabla.

- ✓ En los problemas analizados se identifican la presencia de cuatro categorías: composición de medidas, composición de transformaciones, igualación y transformación (negativa y positiva). Son los problemas de tipo composición de medidas y transformación negativa los que se encuentran con mayor frecuencia.
- ✓ En la mayoría de problemas la incógnita se encuentra en el estado final (hablando de problemas de transformación) o en el total (hablando de problemas de composición). De un total de 34 estructuras aditivas analizadas, 28 presentan la incógnita en ese lugar.
- ✓ Existen en mayor medida problemas de una etapa. Los problemas de dos etapas o más ascienden a 12 problemas.
- ✓ Es reducido el número de problemas que presentan información innecesaria en su redacción y que la presentan en un orden distinto a la estructura de solución. En general, los problemas presentan únicamente la información necesaria para resolver el problema y ésta se presenta en orden.
- ✓ Los problemas son planteados desde la perspectiva del comprador, sólo hay dos casos en el que se coloca al alumno o a los personajes del problema que se plantea en el papel del vendedor.
- ✓ Los precios se indican con letra o con números sin especificar los centavos; los números que se emplean son naturales. Sólo uno de los problemas presenta precios en los que se encuentran representados los centavos, aunque en todos los precios de esa lección los centavos están en cero.

Se han presentado a grosso modo elementos significativos de los problemas analizados en todos los bloques del libro de texto, lo cual puede dar una perspectiva de las líneas generales que guían el recorrido didáctico planteado en el libro de texto. Sin embargo, considero necesario realizar puntualizaciones de elementos claves de algunos problemas localizados en el libro de texto y que permiten ampliar las reflexiones. Esto se hará en el siguiente apartado.

5.3 Análisis específico de cinco problemas

La mayoría de problemas que se presentan en el libro de texto, como ya lo señalé, pertenecen a las categorías de composición de medidas y de transformación de medidas y la incógnita se encuentra en mayor medida en el estado final o total. En este apartado presentaré el análisis de cinco problemas con características peculiares, distintas a las predominantes que ya he mencionado. Estos problemas presentaran una o más relaciones complejas en cuanto al cálculo relacional, al cálculo numérico o a los conocimientos de dinero y compra-venta implicados. Se eligen dichos problemas ya que permiten reflexionar sobre la complejidad de los problemas aditivos en contexto de compra-venta presentes en el libro de texto.

A continuación se enuncian los problemas electos para el análisis haciendo énfasis en las características singulares que los identifican:

- Problema con incógnita en el estado inicial
- Problema de dos etapas con rango numérico grande
- Problema contextualizado en el ahorro, con incógnita en un sumando
- Problema de tres etapas que implica la noción de ganancia y categoría de composición de transformaciones
- Problema en el que el número de etapas depende de las decisiones de solución del alumno

Para el análisis de cada problema señalo el número y nombre de la lección en la que se ubica el problema, el contenido que se aborda (según lo dicho por el libro de texto) y algunas notas que son necesarias para comprender el planteamiento. Se muestra un cuadro donde indico, en la primera columna, los criterios de análisis, en la segunda ubico las características identificadas en el problema analizado. Asimismo, presento algunos comentarios generales y reflexiones que han surgido del análisis.

Cabe recordar que el análisis didáctico presentado en este capítulo forma parte de lo que en la ingeniería didáctica de la Teoría de Situaciones Didácticas se llama "Análisis *a priori*." Artigue (1995) define como objetivo del análisis *a priori* "determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior este análisis se basa en un conjunto de hipótesis" (p. 45). Es así que aunado al análisis didáctico se realizarán hipótesis de los posibles procedimientos, dificultades y errores que pueden tener los alumnos de acuerdo con las características de los problemas analizados. En la sección de anexos se muestran algunas especificaciones sobre las formas de proceder en los procedimientos que aquí se prevén, se hace la señalización en los problemas con esta característica.

5.3.1 Problema con incógnita en el estado inicial

Como se mencionó en el análisis general, de un total de treinta y cuatro estructuras aditivas identificadas en los veintisiete problemas del Libro de Texto, veintiocho presentan la incógnita en el total o en el estado final. A continuación se presenta uno de los problemas que, contrario a la mayoría, presenta la incógnita en el estado inicial. La finalidad de haberlo elegido es comprender la complejidad que esta clase de problema conlleva y reflexionar sobre la pertinencia –o no– de plantear este tipo de problemas a los alumnos.

Lección 4. Agrego, quito y comparo[32]

Contenido: Problemas aditivos. Problemas de suma y resta

En la lección se muestra la siguiente lista de precios y, a partir de ella, se plantea el problema

Pez beta	\$5
Pez guppy	\$10
Pez molly	\$15
Pez cebra	\$10
Pez neón	\$20
Alimento para pez	\$5

Problema:

Si compras un pez beta y te sobran 15 pesos, ¿cuánto dinero tenías?[33]

Tabla 8

Análisis de Problema con Incógnita en el Estado Inicial

CRITERIO	ANÁLISIS
Categoría	Transformación de medidas (transformación negativa)
Lugar de la incógnita	Estado inicial
Cálculo numérico	Sumandos: 15 y 5 Incógnita: 20
Estructura que plantea el problema	X - 5 = 15
Estructura de solución	15 + 5 = X
Orden y presentación de la información	Información en desorden
Conocimientos de uso de dinero y compra-venta implicados	En el problema se sitúa al alumno como comprador

El cálculo relacional para este tipo de problemas es complejo pues, como dice Vergnaud (1991), en estos problemas “la solución canónica (válida en todos los casos) implica la inversión de la transformación directa y el cálculo del estado inicial por aplicación al estado final de dicha

[32] En el anexo 1 se encuentra la imagen de la lección a la que pertenece este problema.
[33] En la edición del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013) ya no aparece este problema en la lección citada.

transformación inversa" (p.173). Para resolver este problema los niños deben aplicar la transformación inversa (en lugar de quitar 5 hay que sumarlo).

El cálculo numérico en este problema está controlado, es decir, los números son pequeños y de fácil cálculo, por ello el grado de dificultad es bajo. Los números son menores a 20 y están elegidos de tal manera que facilitan el cálculo, inclusive el mental.

Sobre el señalamiento que se hace de la información en desorden, puede resultar esclarecedor plantear el problema según el orden de la estructura aditiva del problema. Sería así:

"Tú tenías algo de dinero, compraste un pez beta y te sobraron 15 pesos, ¿cuánto tenías?"

La estructura se representa así: X-5 = 15.

Este problema se plantea en una de las primeras lecciones del libro de texto (la cuarta), lo cual da lugar a la interpretación de que desde el inicio del ciclo escolar los alumnos son capaces de realizar cálculos relacionales de esta dificultad[34]. Sin embargo, es mucho más adelante (Lección 23. Bloque 3) que se encuentran nuevamente otros dos problemas –y sólo dos– que presentan la incógnita en el estado inicial.

La importancia de proponer a los niños estos tipos de problemas aditivos con incógnita en el estado inicial radica en que por el pensamiento reversible implicado en ellos los niños pueden descubrir que la suma es la inversa de la resta y la resta de la suma. Este aprendizaje relevante debe ser atendido desde el nivel preescolar y primaria.

[34] Los estudios realizados por Nunes y Bryant (1997) dan cuenta que este tipo de problemas que implican reversibilidad ya son resueltos correctamente por una parte de los sujetos de preescolar que conforman su muestra (cerca de 10%) y por cerca del 80% de niños de segundo grado. Lo cual da elementos para decir que el planteamiento de este tipo de problemas en este grado escolar es un acierto.

Sobre los aspectos relacionados con el contexto de compra-venta utilizado en este problema cabe señalar que la escritura de los precios no lleva punto decimal, es decir, no se hace referencia a los centavos. Considero que este aspecto es relevante en dos sentidos: primero por la decisión de los autores de restringir–como era de esperarse para segundo grado– el cálculo numérico a números naturales, ya que operar con ellos es más sencillo, y en segundo lugar, por las dificultades que algunos de los alumnos tuvieron en la entrevista al leer precios con centavos.

Por último, es necesario llamar la atención sobre un detalle de diseño de la lección: la lista de precios aparece en la página posterior a la que presentan los problemas. Los niños tendrían que cambiar de hoja para ver la información y resolver los problemas, lo cual puede generarles cierta dificultad. A ese detalle se agrega que el tamaño de la tipografía utilizada en la lista de precios es pequeño, tanto que dificulta la lectura del listado.

Debido a la estructura aditiva implicada en este problema y dadas las características que se han identificado, podría esperarse que los alumnos presenten los siguientes procedimientos, errores y dificultades:

- ✓ La **solución canónica**[35] que da respuesta a este problema consiste en aplicar la transformación +5 (opuesta a la transformación -5) al estado final 15 y encontrar así 20. En otras palabras sumando 15 + 5. Este procedimiento podría ser llevado a cabo a través de la suma algorítmica o bien por cálculo mental.
- ✓ Procedimiento de "**estado inicial hipotético**", el cual según Vergnaud (1991) "consiste en plantear la hipótesis de un cierto estado inicial, aplicarle la transformación directa, encontrar un estado final, y corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido"

[35] "La solución canónica es la que comporta los procesos más económicos, lo que no quiere decir que sean los más simples desde el punto de vista cognitivo" (Belmonte, 2006; p. 139)

> (p.173). Por ejemplo: un niño hipotetiza que contaba con $30, entonces le resta los $5 que costaba el pez y le quedan $25 y no quince como esperaba, al ver que "se pasa" modifica la cantidad inicial al $25 y repite el procedimiento. Al final lograría a través de "aproximaciones sucesivas" llegar a la respuesta correcta: $20.

Como se ha mencionado, en problemas de este tipo los alumnos se enfrentan a la dificultad de aplicar una transformación inversa, por lo cual es probable pudiera suscitarse el siguiente error: restar 5 al dinero sobrante (15), obteniendo un resultado incorrecto (10).

Algunas otras especificaciones sobre los posibles errores y dificultades se presentan en el anexo 2.

El lugar en el que se ubica la incógnita es lo que motivó la selección de este problema para el análisis. Aunque se ha mencionado que la relación semántica de este problema es más difícil que otras, el problema es adecuado para el segundo grado pues el cálculo numérico implica números pequeños, lo que permitirá a los niños centrarse en las relaciones establecidas en el problema.

Por ello llama la atención que se presenten pocos problemas con esta característica en el libro de texto; son pocas las oportunidades que se ofrecen para que los alumnos lleguen a hacerse de una estrategia para resolver este tipo de problemas.

Sería deseable proponer a los alumnos más problemas de este tipo para confrontarlos con las relaciones reversibles. De igual manera considero importante que el plantear esos problemas se tomen consideraciones pertinentes sobre el diseño como poner la lista de precios cerca de los problemas, con una tipografía adecuada. Tal vez sería pertinente también que los primeros problemas de este tipo que se propongan puedan plantearse con la información ordenada de acuerdo a la estructura que plantea el problema y después ir variando esta característica.

5.3.2 Problema de dos etapas con rango numérico "grande"

Ahora daré lugar a la descripción de otro problema, perteneciente a la lección número 16.

Aunque una de las dos estructuras aditivas implicadas en este problema pertenece a la misma categoría que el problema anterior (transformación negativa) la complejidad de este problema es distinta.

Lección 16. ¿Cuánto me sobró?[36]

Contenido: Problemas aditivos. Resolver problemas de resta.

Para este problema se propone el uso de material recortable para la resolución: 10 monedas de $1, 10 monedas de $10 y 10 billetes del $100. La consigna dice "En equipos, lean el problema de la página siguiente y después contesten las preguntas con ayuda del recortable <El dinero>" (ver recortable en el anexo 4).

Existen imágenes que acompañan la lección (pares de zapatos con su precio cada uno), pero no sirven de apoyo para resolver el problema puesto que en los problemas ya se dan los precios de los zapatos, además, las imágenes se encuentran en la parte opuesta a la página y no se hace alusión a ellas en la consigna.

Cabe mencionar que los tres problemas que se plantean en esta lección, en torno a los pares de zapatos, son los únicos problemas aditivos en contexto de compra-venta de todo el libro

[36] En el anexo 3 se encuentra la imagen de la lección a la que pertenece este problema.

de texto que presentan un rango numérico de tres cifras (pudiese considerarse números “grandes” para segundo grado).

Para estos tres problemas se hace un planteamiento general: “Raúl le dio a cada una de sus tres hijas $275 para que se compraran un par de zapatos”. A partir de ese planteamiento se presentan situaciones más específicas.

Problema:

Lorena pagó $239 por sus zapatos y quiere comprar una lapicera que cuesta $50. ¿Le alcanza el dinero para las dos cosas? ¿Cuánto dinero le falta o le sobra?

Para este problema se pueden identificar dos vías de solución:

A. 275 – 239 = 36   50 -36= 14
B. 239 +50 = 289   289–275 = 14

Cada una conllevaría distinto nivel de complejidad. Para resolver la primera pregunta (*¿Le alcanza el dinero para las dos cosas?)* bastaría realizar cualquiera de la primer operación de A o de B y compararlas ya sea con el 50 (valor de la lapicera) o con el 275 (el monto del dinero que tiene Lorena. Y no sería necesario otro cálculo.

Pero para resolver la segunda pregunta *(¿cuánto dinero le falta o le sobra?)* es necesario encontrar la diferencia. En el caso del procedimiento A la relación se da entre el costo de la lapicera y lo que le había quedado de dinero y en el caso B se da entre el total del dinero que debía pagar y el dinero que tenía.

En la tabla de análisis que se presenta a continuación se ha tomado en cuenta únicamente el procedimiento de solución A, pues la expresión “Lorena pagó” indica que esa acción se hizo antes de la compra de la lapicera, por lo tanto la categoría que implica es la de una transformación de medidas.

Cabe mencionar también que a este problema analizado le anteceden otros dos problemas de la misma familia en donde existe una transformación negativa aplicada a un estado inicial y se pregunta por el estado final (¿cuánto dinero le sobró?). Presentar problemas concatenados de la misma familia y estructura, considero también llevaría a los alumnos a la elección de la opción de solución A.

Tabla 9

Análisis de Problema de dos Etapas con un Rango Numérico "Grande"

CRITERIO	**ANÁLISIS**
Número de etapas	Dos
ETAPA UNO	
Categoría	Transformación de medidas (transformación negativa)
Lugar de la incógnita	Total
Cálculo numérico	Sumandos: 275 y 239 Incógnita: 36
Estructura del problema	275 – 239 = X
Estructura de solución	275 – 239 = X
ETAPA DOS	
Categoría	Igualación
Lugar de la incógnita	Segundo sumando
Cálculo numérico	Minuendo y sustraendo: 50 y 36 Incógnita: 14
Estructura del problema	36+X = 50
Estructura de solución	50-36 = X
Conocimientos de uso de dinero y compra-venta implicados	Perspectiva del comprador Comparación entre el dinero que se tiene y el costo de un producto para determinar "si alcanza"

Respecto a la primera etapa del problema, por la categoría a la que pertenece (transformación de medidas, transformación negativa), y por el lugar de la incógnita en juego (estado final), puede suponerse que no presenta gran dificultad pues el sentido de la resta presente en este tipo de problemas es de los primeros construidos en los alumnos (Broitman, 1999). Sin embargo, el rango numérico hace más complejo al problema, se utilizan números “grandes”, el cálculo de 275 menos 239 es un cálculo que no se puede llevar a cabo con facilidad de manera mental, y si los alumnos recurrieran al cálculo escrito, particularmente al algoritmo de la resta, se añade la dificultad de tener que realizar transformaciones de decenas a unidades.

Cabe destacar que el algoritmo de la resta con transformación en ese rango numérico difícilmente se presentaría a alumnos de segundo grado a las alturas del ciclo escolar en el que se propone el problema (segundo bloque y por lo tanto segundo bimestre). Tal vez por ello los autores del libro de texto proponen el uso de material concreto (monedas y billetes de juguete), aspecto sobre el cual se reflexiona en líneas posteriores (ver anexo 4).

La estructura semántica implicada en la segunda etapa del problema: igualación con incógnita en el segundo sumando, es un tanto más compleja que la etapa anterior si es que se quisiera resolver a través de la solución canónica, pero el rango numérico “pequeño” de los números en juego ayudaría a que no fuera tan complicado. Por otra parte la estructura del problema invita fácilmente a los alumnos a realizar el cálculo por medio del “complemento aditivo”.

Cabe recordar ahora que el número de etapas que conforman un problema también aportan mayor complejidad al mismo. Si el alumno se centra sólo en la primera etapa y da como resultado total sólo lo que obtuvo en ésta, su resultado sería incorrecto. O si el cálculo realizado en esa primera etapa da un resultado incorrecto, la segunda etapa también se vería afectada.

Sobre las nociones de dinero implicadas en este problema, al igual que el descrito anteriormente, presenta sus precios sin centavos. El problema está planteado desde la perspectiva del comprador lo cual enfrenta al alumno con el papel que habitualmente está acostumbrado a cumplir en actividades reales de compra-venta por lo cual puede conllevar un cierto grado de facilidad.

Dada la estructura semántica de la primera etapa los procedimientos, errores y dificultades que pudieran presentarse los describo a continuación:

La **solución canónica** es la **resta**, ésta puede ser solucionada a través del **algoritmo**, pero dados los conocimientos que se supone los alumnos de segundo construyeron en el momento de plantearles el problema, es mayormente posible recurran a procedimientos como la **descomposición** o el **complemento aditivo**.

- ✓ Los alumnos podrían recurrir a **procedimientos heurísticos** como el de **descomposición** definido por Carraher, Carraher, & Schiliemann (1995), el cuál se caracteriza por ser un cálculo no escrito. Cabe señalar que si se utilizara el material recortable para este procedimiento sería suficiente.

  Por ejemplo, es posible que los niños descompongan los números y operen con ellos de la siguiente manera:

  - Descomponen: 275 en 200 y 75, y el 239 en 200 y 39
  - Dejan los 200 de lado considerando que ya se restaron. Operan con el 75 y el 39.

- Descomponen el 75 en 50 y 25. Reservan el 25 y operan con el 50 y el 39

-Encontrar la diferencia entre 50 y 39 es más fácil. Determinan que es 11.

- Operan con el 11 y el 25 que han reservado y concluyen que el resultado es 36.

Si los alumnos recurren a procedimientos como este de descomponer números un error que pudiera ocurrir al momento de realizar los cálculos finales, es que olviden los números que han dejado “reservados” mientras hacían las descomposiciones

Por último es importante señalar que este procedimiento de descomposición motiva a pensar en la complejidad de tareas y cálculos matemáticos que los niños realizan. Descomponer un número conlleva a tener un conocimiento complejo sobre cómo está conformado el mismo y a realizar distintos cálculos parciales que se reúnan en un cálculo final. Si se está hipotetizando que los alumnos pudieran recurrir a este tipo de procedimiento de descomposición, es importante recordar la estrecha relación de éste con el valor posicional. Dado que este conocimiento matemático aún está en construcción en la edad escolar de segundo grado, será difícil –aunque no imposible- llevar a cabo este procedimiento.

- ✓ Si bien como he señalado, realizar el **algoritmo** a través del **cálculo escrito** poco probable, de acuerdo a la ubicación temporal de ese contenido en los programas, para niños de segundo, considero que dicho algoritmo podría realizarse a través del **uso del material recortable** que se provee en la lección y que incluso se indica sea utilizado. Pudiera ocurrir que algún alumno intentara utilizar el material siguiendo el proceso del algoritmo (aunque aún no lo sepan por escrito) y entonces representen en primera instancia los $275 con los que cuenta Lorena y posteriormente traten de “extraer” de ellos el costo de los zapatos $239. Es importante recordar que al inicio de la lección se invita a los niños a utilizar el uso de material recortable (monedas y billetes) en equipos. Si no se hace de esa manera (trabajar en equipos, mínimo en binas), la cantidad de monedas y billetes (10 monedas de $1, 10 monedas de $10 y 10 billetes del $100) con la que cuenta un solo alumno no serían suficientes para hacer los desagrupamientos necesarios: para restar de 275 la cantidad de 239 no son suficientes las unidades (o monedas de $1.00) para "quitar" 9, por lo que deben "tomar" una decena (moneda de $10.00) y cambiarla por 10 monedas de $1.00 y entonces sí quitar las 9. Considerando lo anterior, sería necesario que por lo menos los niños contaran con 14 monedas de un peso para poder realizar las operaciones descritas –y el material recortable sólo tiene 10 monedas de $1.00-. Además se atravesaría en este procedimiento la peculiaridad de cardinalidad en el dinero que ya ha sido mencionada desde el análisis de "La tiendita" en la que los niños deben comprender que "dentro" de una moneda de $10 están "contenidas" diez monedas de $1.

Una posible manera de "solucionar" la dificultad de no poder quitarle 9 a 5 en las unidades o monedas de $1, los niños podrían "forzar" la operación cometiendo el error de invertir el sustraendo y el minuendo para que "así sí les alcance".

✓ Los alumnos pudieran también resolver la resta a través del **complemento aditivo** apoyado éste en el **sobreconteo**, comenzar del 239 hasta llegar al 275. Es probable que los niños recurran a este procedimiento pues fue altamente recurrido en los problemas planteados en las indagaciones de "La papelería" realizadas en esta investigación, sin embargo la dificultad de este procedimiento es alta ya que deben tener control sobre 36, una cantidad "alta" para este procedimiento.

- ✓ Por último, otro procedimiento de cálculo mental podría ser el **conteo descendente** sin embargo se enfrentaría, al igual que en el sobreconteo, con la poca economía de éste. Comenzarían contando de forma regresiva partiendo del 275 hasta llegar a 239, pero tendrían que tener el control de 36 números, lo cual es sumamente difícil y más con números “grandes” para ellos y contando “hacia atrás” y contemplando que son dos series numéricas las que deben coordinar.

Ahora, dada la estructura semántica de la segunda etapa (36+X = 50. Igualación con incógnita en el segundo sumando) los procedimientos, errores y dificultades que pudieran presentar los alumnos son:

La **solución canónica**: una **resta** (50-36). Puede ser muy probable que esa resta sea resuelta a través del **complemento aditivo** debido a que la misma estructura semántica de esa etapa plantea la búsqueda de un número que sumado a 36 dé 50, para saber cuánto le falta a Lorena. Sería esperado que principalmente la búsqueda del complemento esté apoyada en el **sobreconteo** y hay que considerar la posibilidad de que se utilice el **material** recortable para ese complemento y sobreconteo.

Al igual que en la etapa anterior es sumamente difícil considerar apareciera el uso de algoritmo escrito.

Algunas reflexiones emanadas del análisis realizado se presentan en seguida:

Se puede apreciar en este problema cómo, desde el punto de vista de la dificultad, el cálculo numérico es predominante respecto al cálculo relacional y ser un problema de dos etapas también lo complejiza. Sin embargo parece ser que por la premura del momento del curso de segundo grado en el que se presenta este problema se opta por “ayudar” a los niños presentando material recortable para su manipulación.

Desde mi experiencia personal considero que los docentes hemos construido el paradigma que presentar a los alumnos material manipulable les facilitaría construir conocimientos matemáticos. Como ya se ha mencionado, el dinero tiene una ventaja frente a otros materiales manipulables en la escuela por el uso social implicado en él. Sin embargo es importante recordar que aspectos como la cardinalidad para el trabajo con dinero es esencial (los niños al ver una moneda de $5.00 deben entender que están “contenidas” ahí 5 monedas de $1.00)[37]. Considero importante tener en cuenta dicho aspecto ya que –aunque los niños de segundo tienen dominada la cardinalidad implicada en el dinero- puede pasar que en algún conteo (como con alguno de mis alumnos ha ocurrido) los niños cuenten como unidades las monedas diferentes a $1. Con el uso del dinero como material que apoya la solución y teniendo en cuenta las especificaciones sobe su uso que ya se han mencionado a lo largo del análisis, puede pensarse que este tipo de problemas son adecuados, pero hay que plantearlos con cautela.

5.3.3 Problema contextualizado en el ahorro, con incógnita en un sumando

Son pocos los problemas aditivos en contexto de compra-venta que presentan la incógnita en uno de los sumandos, por ello se ha elegido el análisis del presente problema. Aunado a ello, existe una actividad que implica el uso del dinero y que pocas veces es referida en los problemas:

[37] Por las dificultades que el uso del dinero pudiese representar para trabajar el algoritmo de la suma y resta y que ya han sido mencionadas, habría que cuestionar el “papel protagónico” que este recurso juega en las actividades de la escuela para la enseñanza de tal algoritmo. Tal vez sería importante entonces apoyar el uso de distintos materiales que apoyen el aprendizaje de este conocimiento matemático. Al respecto señala Vergnaud (1991) “Nada es más fecundo, en el plano pedagógico, que los ejercicios de tránsito de un material a otro o de una representación a otra. Pasar de un material a número escrito correspondiente, en forma recíproca, pasar de un dibujo de conjuntos a un material A, de un material A a un material B, de un material B al número escrito, y del número escrito a un dibujo de conjuntos, es un medio seguro para hacer entender sin dificultad a los niños el sistema de numeración” (pp. 141 y 142)

el ahorro. Realizar el análisis de estas características permitirá contar con elementos que den cuenta de su riqueza y de los cuidados que habrá de tener al implementar problemas similares.

Es importante también señalar que una aspecto peculiar de este problema es la redacción poco clara del mismo, pues también se reflexionará sobre el impacto de este posible descuido al plantear el problema. Si bien, esta característica no tiene que ver con una decisión didáctica tomada por los autores –como si lo son las variables didácticas del rango numérico o la posición de la incógnita-habrá que reflexionar sobre las implicaciones que esta característica tiene.

Lección 26. El misterio revelado de las sustracciones[38]

Contenido: Realiza restas utilizando distintos procedimientos.

En el grupo de segundo grado, los alumnos se organizaron para ahorrar dinero durante el ciclo escolar. Falta entregar sus ahorros a Pedro y Marta, pero Roberto, quien guarda los ahorros, sólo tiene dos billetes, uno de 50 y otro de 100 pesos. Como Pedro ahorró 72 y Marta, 78 pesos, Roberto decidió dar a Pedro el billete de 50 y a Marta el de 100 con la condición de que Marta le diera a Pedro lo que le faltaba. ¿Cuánto dinero le debe dar Marta a Pedro?[39]

[38] En el anexo 5 se encuentra la imagen de la lección a la que pertenece este problema.
[39] En la versión actualizada del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013), este problema ha sido modificado. La redacción es la siguiente: "Roberto tiene un billete de 100 pesos y debe dar a Martha 78 pesos. Si Martha tiene 2 monedas de 10 pesos y 5 monedas de 1 peso, ¿cómo podrías resolver el problema?" (p.69)

Tabla 10. *Análisis de Problema con Incógnita en un Sumando y Redacción poco Clara*

CRITERIO	ANÁLISIS
Categoría	Composición de medidas
Lugar de la incógnita	Segunda medida
Cálculo numérico	Minuendo y sustraendo: 72 y 50 y 100 y 78 Incógnita: 22
Estructura que plantea el problema	50 + X = 72 y 100 – Y = 78
Estructura de solución	72 – 50 = X y 100 – 78 = Y
Orden y presentación de la información	Información abundante redactada de manera compleja que dificulta la relación de los datos
Conocimientos de uso de dinero y compra-venta implicados	Ahorro Manejo de billetes de 50 y 100

Es innegable la complejidad de la redacción en este problema[40]. Los alumnos se verán en la necesidad de enfrentarse a una redacción confusa y extensa y, aún más importante, identificar claramente cuál es la pregunta que se debe contestar y qué datos son necesarios. Si bien, no hay información innecesaria en este problema, la forma en la que es presentada a información es una variable que complejiza el problema de sobremanera, dificulta la comprensión por ser una redacción tan larga.

Durante el análisis fue necesario leer varias veces el problema para identificar qué es lo que se pregunta. La resolución puede abordarse ya sea calculando lo que le falta a Pedro para completar sus 72 pesos o bien, calculando cuánto es lo que le sobra a Marta si toma de los 100 pesos los 78 que le corresponden; eso es lo que le debe dar a Pedro. En ambos casos los 100 pesos se descomponen en dos cantidades para determinar cuánto le toca a Pedro de esos 100

[40] Aunado a ello habrá que considerar la posibilidad de que algunos alumnos de segundo de primaria aún están en proceso de consolidación de la lecto-escritura.

pesos. Por ello este problema es considerado en la categoría de composición de medidas, que también es conocido –como ya se ha mencionado- como problemas de combinación[41].

Desde mi perspectiva la intención de los autores de presentar la incógnita en uno de los sumandos se ve atravesada –y obstaculizada- por una redacción confusa. En lugar de plantear a los niños una situación comprensible en donde deban discernir qué información les sirve y cuál no, la falta de claridad en la redacción lleva a poca comprensión de las relaciones implicadas en el problema y que deben ser desentrañadas.

Aunado a lo anterior, es importante destacar que si bien el ahorro es una actividad que se pudiera pensar "habitual" entre los niños, la manera en la que se plantea no es común, pues se trata de un ahorro colectivo.

Otro aspecto sobre el dinero que se puede observar en este problema, es la referencia al uso de billetes de \$50.00 y de \$100.00 en él. Esto implica para el niño poder representarse el valor de tales billetes para operar con ellos. Lo que observé en las entrevistas individuales reportadas en el Capítulo 4, es que todos los niños identifican el valor de dichos billetes, por lo cual es probable que el valor de estos billetes no represente una dificultad.

De acuerdo con la caracterización de problemas de Vergnaud, el lugar donde está localizada la incógnita juega un papel importante en el planteamiento de problemas aditivos. Si la incógnita de un problema de comparación de medidas está en algunas de las medidas (sumandos) y no en el total, se trata de un problema sumamente complejo, pues para solucionarlo

[41] "En este problema está implicada una relación entre un conjunto total y los subconjuntos. Aquí ninguno de los dos conjuntos se modifica" (SEP, 1992; p. 91) Otra manera de llamar a estos problemas es como problema parte-todo.

es necesario realizar el cálculo en dirección reversible (por ejemplo despejar la incógnita[42]). Los problemas de resta con el significado de separar –como este caso- implica necesariamente la reversibilidad del pensamiento. Hay que destacar que esta es la única resta que no es directa, a diferencia de los problemas de decremento.

Sobre el cálculo numérico, el rango numérico no sobrepasa de la centena y la diferencia entre minuendo y sustraendo no es grande (22). Este aspecto, junto a la categoría a la que pertenece la estructura semántica, seguramente influirá en los tipos de procedimientos, errores y dificultades que los niños pueden llevar a cabo, los cuales se describen a continuación:

Dependiendo de la manera de abordar el problema (es decir, calculando lo que le falta a Pedro: 50 + X = 72, o calculando lo que le sobra a Martha: 100 – 78 = X) los procedimientos podrían ser distintos.

- ✓ Los alumnos podrían recurrir a realizar la **solución canónica** de **resta**. Esta pudiera ser resuelta por medio del **algoritmo** o buscando el **complemento aditivo**.

  Si los niños pretendieran utilizar el **algoritmo** de la resta para calcular 100-78, el cálculo numérico se complica, pues esa resta implica doble desagrupamiento o transformaciones desde las centenas hasta las unidades, debido esto a que las decenas y unidades son 0 lo cual implica dificultad. Durante las entrevistas realizadas durante la actividad simulada de “La papelería” se pedía a los alumnos resolvieran un algoritmo con las mismas características y ningún niño lo logró.

  Considero que el procedimiento del **complemento aditivo** sería un procedimiento usado con mayor recurrencia que el de la resta, con mayor razón si los niños abordan el

[42] Cuando se menciona “despejar la incógnita” no es porque se crea que debe enseñarse ese procedimiento a los alumnos, es porque en la búsqueda de la solución esto es lo que está detrás.

problema como 50+X=72. Es posible que los alumnos realicen aproximaciones de acuerdo con los complementos que vayan proponiéndose, por ejemplo, tal vez primero el niño estima que el complemento puede ser 20 y al no darle el resultado esperado seguramente optará por otro número que no sea muy lejano.

- ✓ Los niños podrían apoyarse en el **conteo** o **sobreconteo** para encontrar la diferencia. Sin embargo, 22 sería un número "grande" y podrían perderse en lo que se va contando y esta dificultad pudiera impedir la solución correcta o la necesidad de que recurran a otro procedimiento.
- ✓ El uso de la **descomposición** podría facilitar a los niños operar con los números; por ejemplo, para resolver el cálculo 72 – 50 podrían descomponer el 72 en 50 y 22 y entonces descartar los 50 y quedarse con el resultado de 22.

Un aspecto que los alumnos deben cuidar en este procedimiento es no olvidar los números que van "dejando de lado" al momento de calcular su resultado final.

Para finalizar con la presentación de este problema, es importante señalar que las características identificadas del mismo permiten evidenciar que las operaciones que resuelven el problema no son complicadas, hay al menos dos maneras accesibles de llevarlas a cabo, pero la trama es excesivamente compleja por varias razones que se han señalado. Por lo tanto el problema tal cual está redactado no parece adecuado para los alumnos de segundo grado.

5.3.4 Problema de tres etapas que implica la noción de ganancia y categoría composición de transformaciones

El siguiente problema elegido para analizar conlleva una noción de la transacción de compra-venta que aún no está construida en alumnos de segundo grado: la ganancia. Además la categoría a la que pertenece la estructura aditiva que esta noción plantea, composición de transformaciones, es compleja para los alumnos de segundo grado. Aunado a ello dicha estructura aditiva se encuentra relacionada con dos estructuras multiplicativas más, lo que genera un problema de tres etapas. Por las reflexiones que estas características puedan propiciar se ha elegido presentar este problema.

Lección 41. ¿Cuántas operaciones más?[43]

Contenido: Resuelve problemas donde se hacen varias operaciones

Se presentan el siguiente contexto general del problema:

"Roberto pagó 20 pesos por las cuentas que se muestran a continuación. Para fabricar una pulsera requiere 10 cuentas". (Se muestra una imagen con 48 cuentas: 13 amarillas, 19 azules, 9 rojas y 7 verdes).

Después de ese "contexto general" se plantean los siguientes problemas:

- Problema de división agrupamiento. *"Con las cuentas que compró, ¿cuántas pulseras puede hacer?"* (Etapa uno)
- Problema de multiplicación función[44]. Se especifica que Roberto vende cada pulsera a \$25 *"¿Cuánto dinero recibe por las pulseras?"* (Etapa dos)

[43] En el anexo 6 se encuentra la imagen de la lección a la que pertenece este problema.

- Problema aditivo. *"¿Cuánto gana Roberto con la venta de las pulseras?"*[45]. Este problema es el que a continuación se analiza. (Etapa tres)

Tabla 11

Análisis de Problema de Tres Etapas que Implica la Noción de Ganancia y Categoría Composición de Transformaciones

CRITERIO	**ANÁLISIS**
Número de etapas	Tres
ETAPA UNO	
Categoría	Estructura multiplicativa (división agrupamiento)
ETAPA DOS	
Categoría	Estructura multiplicativa (multiplicación función)
ETAPA TRES	
Categoría	Estructura aditiva Composición de transformaciones
Lugar de la incógnita	Estado final
Rango numérico	Minuendo y sustraendo: 1375 y 150 Incógnita: 1225
Estructura del problema	1375-150= X
Estructura de solución	1375-150= X
Conocimientos de uso de dinero y compra-venta implicados	Descuento Determinar el monto a pagar

En primer lugar es interesante identificar como desde la consigna este problema presenta ciertas ambigüedades: por ejemplo, cuando se pregunta *¿cuántas pulseras puede hacer?* No se especifica si las pulseras son de colores combinados o de un solo color.

[44] Es un tipo de multiplicación en la que "se establece una relación proporcional entre dos medidas". (SEP, 1995, p.110)
[45] En la versión actualizada del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013) este problema ya no se presenta.

Este problema presenta elementos interesantes en tres aspectos:

- Las relaciones que debe ir “tejiendo” el alumno con la información que se presenta en el transcurso de todo el apartado de la lección. El ser un problema de tres etapas implica que sea necesario se solucionen de manera correcta las etapas anteriores, lo cual conlleva dificultad
- La noción de ganancia que está implicada en el problema
- La complejidad de la categoría presente en el problema

Si bien la pregunta que implica una estructura aditiva, y que aquí se analiza, no presenta información innecesaria, es indispensable que el niño recurra a información contextual que se muestra desde el principio de los problemas *“Roberto pagó 20 pesos por las cuentas que se muestran a continuación. Para fabricar una pulsera requiere 10 cuentas”*. Los alumnos tendrían que ir y venir dentro de los distintos problemas, sus informaciones y sus resultados, lo cual puede dificultar la resolución.

Respecto a la noción de ganancia, cabe recordar que según estudios realizados por Delval (1989) y Delval & Echeita (1991), esta noción no es construida sino hasta los 10 años. Esto ha sido constatado en las entrevistas que realicé. Por lo anterior, es altamente probable que los alumnos tengan dificultades para comprender la pregunta, pues calcular la ganancia es una de las tareas del vendedor que no es necesariamente “transparente”, para los niños.

Por último, la categoría “composición de transformaciones” implica para los niños trabajar con números relativos (uno negativo y uno positivo). Si bien es cierto que ante este tipo de transformaciones los niños pueden recurrir a estrategias de solución que no pasan necesariamente por el uso de números con signo (por ejemplo, no considerar los $20 que el niño gastó en las cuentas para hacer las pulseras como un estado relativo “-20” sino que restarlo únicamente al 100 porque es lo que había gastado antes), también es cierto que esta tarea es muy difícil de manejar para alumnos de segundo grado de primaria, ello debido a que el problema implica alterar el orden cronológico en que sucedieron lo hechos y se debe reconstruir desde el estado final: se recibieron $100, “de los cuales” se habían gastado anteriormente $20. En contra parte a dicha complejidad, el cálculo numérico implicado en este problema está acotado al uso múltiplos de 10, lo cuál sería de una dificultad menor para los niños.

Otra complejidad que este problema presenta y que es necesario enfatizar es el número de estapas que conforman este problema, ya que necesariamente para resolver el problema aditivo es necesario resolver las dos etapas anteriores. Como se ha señalado al inicio de este análisis las etapas enteriores a éste conllevan problemas de división y multiplicación –definidos por Verganud (1991) como relaciones cauternarias en las que hay 4 datos en juego-, considerando que esos dos problemas ponen en juego ocho datos y el problema aditivo pone en juego otros tres datos, el alumno se enfrenta a trabajar con once datos para solucionar el problema, esto es de innegable dificultad.

Cabe destacar que el contexto de compra-venta permita proponer problemas de cuarta categoría (composición de transformaciones) es un aspecto relevante, sin embargo el grado escolar en el que este tipo de problemas se plantea es cuestionable, pues como se ha mencionado, los niños aún no son “sensibles” a esta parte de la transacción.

Por otra parte, habrá que plantearse si sólo por el hecho de que los niños aún no construyen nociones como la de ganancia estos problemas rotundamente no tienen cabida. O ¿será que plantearle estas nociones en un problema les ayudaría a construirlas? Entonces, se podría hablar de un enriquecimiento recíproco: el contexto extra-escolar (compra-venta real) se utiliza para proponer problemas que provocan la construcción de conocimientos matemáticos y dichos problemas (contexto escolar) ayudan a la comprensión de conocimientos inmiscuidos en la transacción de la compra-venta. La concatenación de problemas y respuestas planteados en esta sección de la lección permite cuestionar la pertinencia de ello. Si ya se está dejando un peso determinado a la complejidad de los problemas planteados (por el contexto y el cálculo relacional), habrá que "limpiar el camino" de los niños sobre el ir y venir que deben hacer entre los problemas anteriores.

Considero entonces que tal vez es conveniente plantear este tipo de problemas a los alumnos a partir de segundo grado[46], pero de una manera cuidadosa de tal forma que la información que se presenta pueda favorecer la comprensión de las relaciones implicadas en el problema. Además en la implementación es necesario que los docentes estemos concientes de las complejidades que enfrentarán los niños, preparando así nuestras intervenciones. [47]

5.3.5 Problema en el que el número de etapas depende de las decisiones de solución del alumno

Como se ha ido mencionando, tanto las lecciones del libro de texto como los apartados de "Evaluación" e "Integro lo aprendido" recurren a plantear varios problemas bajo un mismo contexto. Al igual que el problema analizado anteriormente, el problema que aquí se aborda se ha diseñado de tal manera que la información del problema anterior o la respuesta obtenida son pautas que ayudan a encontrar soluciones posteriores, se conforman varias etapas. Reflexionar

[46] Queda como una posibilidad de investigación implementar estudios que indaguen sobre la resolución de estos problemas de ganancia por parte de los alumnos.
[47] Los posibles procedimientos de resolución de este problema se encuentran en el anexo número 7. Se consideró importante que en esta ocasión se centrara la mirada en la importancia del cálculo relacional del problema por lo cual no se presentan estos procedimientos dentro de la descripción del problema.

sobre los procedimientos, errores y dificultades que ocurren en tales casos es el objetivo por el cual se presenta el siguiente análisis.

Todos los problemas de la sección de evaluación de donde se extrae este problema implican estructuras de tipo multiplicativo, pero en el caso del que se elige para analizar conlleva una resta para hallar la solución final. De igual manera todas las preguntas que se plantean cuentan con opción múltiple para ser respondidos: cuatro opciones de las cuales una es la respuesta correcta.

Lección de Evaluación. Bloque IV[48]

Al inicio se explica que *"Mario, su papá, su mamá y sus dos hermanos viajaron de la capital de Oaxaca a Puerto Escondido.*" También se presenta una imagen de un boleto de autobús que explicita que el costo de cada boleto es de $275.

A partir de lo anterior, se presenta un problema multiplicativo *"¿Cuánto pagaron los papás de Mario por los 5 boletos?"* La respuesta es $1375. Después de éste se presenta el siguiente problema aditivo:

Si les descontaron $30 del precio a cada boleto ¿cuánto pagarían en total?[49]

a) $975

b) $1 225

c) $1 025

d) $1 250

[48] En el anexo 8 se encuentra la imagen de la lección a la que pertenece este problema.
[49] En la versión actualizada del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013) este problema ya no se incluye.

Este problema tiene –al menos– dos formas de solucionarse, cada una conllevaría distinto nivel de complejidad:

A. Determinar el descuento total y restarlo al total a pagar

30 x 5 = 150 1375 – 150 = 1225

B. Determinar cuánto se debe pagar por un boleto considerando el descuento y después averiguar cuánto es de los 5 boletos

275 – 30 = 245 245 X 5 = 1225

Dependiendo la vía de solución elegida por los niños, la cantidad de etapas a las que se enfrentaría sería distinta.

Vía de solución A. Tres etapas.

- Etapa uno: Determinar la cantidad total a pagar por los cinco boletos. Estructura multiplicativa 275 X 5 = 1375[50]

- Etapa dos: Determinar el monto del descuento. Estructura multiplicativa

  30 X 5 = 150

- Etapa tres: Determinar el total a pagar ya con el descuento aplicado. Estructura aditiva. 1375 – 150 = 1225

Vía de solución B. Dos etapas.

[50] El 1375 ya habría sido calculado por los niños en la primera pregunta *¿Cuánto pagaron los papás de Mario por los 5 boletos?* Es muy probable que los autores del libro de texto esperen que los alumnos recurran a esa respuesta.

- Etapa uno: Determinar el costo de un boleto considerando el descuento que se le hará. Estructura aditiva 275 – 30 = 245

- Etapa dos: Determinar el pago total de los 5 boletos ya con el descuento aplicado. Estructura multiplicativa 245 X 5 = 1225

De acuerdo a lo señalado por Puig y Cerdán (1990) y Castro (1998) respecto a los problemas de más de una operación, se ha planteado desde el marco teórico que existe una relación directa entre las relaciones semánticas implicadas en un problema y el número de operaciones necesarias para resolverlo (por ejemplo: un problema con dos relaciones semánticas conlleva dos operaciones para su solución). Sin embargo el problema aquí analizado permite dar cuenta de un dato interesante: la relación entre estructuras semánticas y operaciones no es tan directa como parece, el número de etapas se ve atravesado por las decisiones que tome el alumno sobre las maneras de solucionarlo. Un mismo problema puede ser problema de dos etapas o de tres etapas, dependiendo la vía de solución.

En la tabla de análisis que a continuación se muestra se ha tomado en cuenta únicamente la solución marcada como A, ello debido a que se esperaría que los niños consideren la respuesta de un problema anterior que pregunta *"¿Cuánto pagaron los papás de Mario por los 5 boletos?"* Como ya cuentan con esa información ($1375), es probable que la usen. La descripción del análisis a priori posterior se realiza centrándose en la estructura de tipo aditivo.

Tabla 12

Análisis de Problema en el que el Número de Etapas depende de las Decisiones de Solución del Alumno

CRITERIO	ANÁLISIS
Número de etapas	Dos
ETAPA UNO	
Categoría	Estructura multiplicativa (275 X 5 = 1375)
ETAPA DOS	
Categoría	Estructura multiplicativa (30 X 5 = 150)
ETAPA TRES	
Categoría	Estructura aditiva Transformación de medidas (transformación negativa)
Lugar de la incógnita	Estado final
Rango numérico	Minuendo y sustraendo: 1375 y 150 Incógnita: 1225
Estructura del problema	1375-150= X
Estructura de solución	1375-150= X
Conocimientos de uso de dinero y compra-venta implicados	Descuento Determinar el monto a pagar

Como ya se comentó es muy probable que se espere que los niños recurran a respuestas anteriores para solucionar el problema aditivo. La complejidad de este problema radica en: el número de etapas que lo conforman y la noción de descuento implicado en el problema.

Sobre el primer aspecto habrá que pensar además si el niño recuerda o vincula aquella información de la primera etapa que viene en una pregunta anterior, con el nuevo problema. Si el alumno elige la respuesta del problema anterior de manera equivocada (recordemos que son problemas con respuestas de opción múltiple), esto influirá en su nueva respuesta, que también estaría mal.

Por ser un problema de más de dos etapas, subrayo cómo la existencia de otras dos estructuras diferentes a la aditiva (en este caso multiplicativas), ponen en mayor reto al niño. La estructura multiplicativa que implica la operación 275 X 5 es de una dificultad notable, aunque los niños la intentaran resolver por suma iterada el cálculo numérico es complejo, ya que es un número de tres cifras, no es número que termine en cero, por lo que intentar resolver la suma iterada por cálculo mental sería difícil y realizándola a través del algoritmo implicaría dos transformaciones (llevar de las unidades a decenas y de las decenas a las unidades). El caso de la estructura multiplicativa que conlleva la operación 30 X 5 es una multiplicación más fácil de realizar por suma iterada.

Respecto a la complejidad de la estructura aditiva, ésta implica un problema de transformación de medidas en la que se pregunta por el estado final. Dadas esas características este problema puede ser considerado de un nivel de complejidad bajo por el cálculo relacional implicado. Sin embargo el cálculo numérico en cierto sentido sí es complejo, los siguientes procedimientos, errores y dificultades que pudiese esperarse sean enfrentados por los niños, dan cuenta de la dificultad.

- ✓ Los alumnos podrían recurrir a solucionar este cálculo por medio del **algoritmo convencional de la resta**. Si lo resuelven a través del **cálculo escrito,** el algoritmo no implica dificultades en cuanto a transformaciones, pues no son necesarias. Sin embargo habría que estar pendiente de un error en el que algunos alumnos inciden y que afectan su resultado o les imposibilita realizar el cálculo: acomodar de manera incorrecta las cifras de los números ya que un número es de cuatro cifras y otro de tres.
- ✓ Es posible también que los niños recurran a **descomposiciones de los números** para operar con ellos, por ejemplo:

1375 = 1000 + 300 + 50 + 25 150 = 100 + 50

Dejan el 1000 y 25 "de lado" operan con el 300 y el 50.

Quitan 100 del 300 y 50 de 50 quedándoles 200.

Vuelven a operar con lo que han dejado de lado 1025 y aumentan los 200 = 1225

En caso de recurrir a este procedimiento un error posible es que los niños se olviden de considerar las cantidades que habían dejado "reservadas" para operar al final.

Respecto a la relación de la estructura aditiva con la etapa anterior de estructura multiplicativa, cabe señalar lo siguiente:

¿Será posible que si en la etapa anterior el alumno elige una respuesta incorrecta (de las respuestas dadas como de opción múltiple, ésta pueda relacionarse con alguna de las opciones del problema que se analiza? Estudiando las opciones que tienen los alumnos para elegir en el problema anterior, sólo la respuesta correcta da lugar a una de las respuestas del problema analizado. Observemos:

Opciones de respuestas en problema anterior *¿cuánto pagaron los papás de Mario por los cinco boletos?:* a) 1100 b) 1375 c) 2750 d) 3025

Opciones de respuesta en el problema analizado. *Si les descontaran $30 del precio a cada boleto, ¿cuánto pagarían en total?:* a) 975 b) 1225 c) 1025 d) 1250

En ambos problemas la respuesta correcta es la opción b). Si el niño llegara a elegir en el primer problema cualquier otra respuesta y le aplicara el descuento, no coincidiría con ninguna respuesta del problema dos. Por ejemplo si eligiera a letra a) 975 y le aplica el descuento (150) la respuesta 825 no se encuentra en el otro problema. ¿Qué harán los niños en tal situación? ¿Será que elegirían la opción más “próxima” a la respuesta encontrada? O el hecho de que no la encuentren, ¿los llevaría a buscar otro procedimiento?, ¿o no encontrar la respuesta los llevaría a cuestionar su resultado del problema anterior?

Pudiera pensarse que plantear a los niños distintos problemas bajo un contexto general les ayuda a relacionar las informaciones de manera más fácil, pues la información que aporta el problema anterior ayudaría a resolver de manera más sencilla el nuevo problema.

Ante las dificultades señaladas cabe preguntar ¿qué indicios permitirán a los niños saber cuándo se espera de ellos que recurran a lo que encontraron en el problema anterior y cuando no? En este problema ¿relacionarán que la respuesta anterior se convierte en la primera etapa de este problema?

Al respecto cabe señalar que ciertos lineamientos para la construcción de reactivos de pruebas (como los que se usan en el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación[51]), subrayan la importancia de contar con reactivos que nos den luces sobre los procedimientos que llevaron a cabo los niños y sobre lo que los niños saben y no saben, o el nivel en que se encuentran en determinado proceso. En el caso de las opciones que el libro de texto propone para

[51] En el manual técnico. Construcción de reactivos (INEE, 2005) especifica que los reactivos de opción múltiple que se construyen para los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (Excale) están conformados esencialmente por: una base de reactivo y las opciones alternativas que están conformadas por la respuesta correcta y los distractores.

Estos últimos, los distractores se definen como “opciones incorrectas pero plausibles. Se les llama de esta manera pues, en ocasiones, se dice que distraen a los estudiantes que no conocen la respuesta correcta. El INEE considera que la función de estos elementos no es distraer, sino atraer a los estudiantes que tienen niveles de logro insuficiente para poder distinguir la respuesta correcta” (p.13) en otras palabras estos distractores serían las respuestas incorrectas.

Se especifica también que “Los distractores deberán reflejar errores comunes o malos entendidos, concepciones simples o ingenuas, u otro tipo de error, de tal forma que las respuestas correctas demuestren lo que los alumnos realmente saben o pueden hacer. Y que los distractores no tendrán la intención de confundir al estudiante, por lo que no deberán ser variantes cercanas a la respuesta correcta” (p.29). Entonces es considerable que si esos “errores comunes” permitan conocer en qué parte del proceso de construcción de determinado conocimiento matemático, se encuentra el alumno que resuelve el reactivo.

la evaluación de este reactivo, no me fue posible identificar alguno de los errores que típicamente presentan los alumnos para este tipo de problemas aditivos (por ejemplo el mal acomodo del minuendo y sustraendo), por lo que ese ejercicio de evaluación no me aportaría, como profesora, información relevante sobre los aprendizajes de mis alumnos.

5.4 Conclusiones del Capítulo

La aplicación de los criterios de análisis elegidos en esta investigación para realizar el análisis de los problemas aditivos en contexto de compra-venta en el libro de texto me permite considerar que la complejidad de éstos depende de cuatro factores: las características del cálculo numérico, las relaciones entre los datos implicados en el problema (cálculo relacional), el número de etapas implicadas en el problema y las nociones en juego sobre el uso del dinero y la actividad de compra-venta. Conocer la complejidad que implica cada uno de esos factores es sumamente importante para las decisiones didácticas que se toman tanto al diseñar problemas aditivos (por parte de los autores del libro de texto) como al elegirlos e implementarlos (por parte de los docentes). La herramienta de análisis didáctico diseñada resultó eficiente para identificar dicha complejidad en los problemas aditivos.

El análisis que presenté en este capítulo me ha llevado a tomar conciencia de la complejidad de estos problemas por todos los elementos que lo conforman y las variables que pueden utilizarse. Entre los docentes suele ser frecuente la idea de que la “facilidad” es una de las características de los problemas matemáticos que se plantean a los alumnos de segundo grado. Los resultados del análisis que aquí muestro invitan a cuestionar ese “sentido común”.

Los problemas aditivos en contexto de compra-venta presentes en el libro de texto de segundo grado de primaria (SEP, 2012) en general tienen las siguientes características: son de categoría de composición de medidas (calcular el monto a pagar) o transformación de medidas (calcular el cambio), se pregunta por el estado final o el total, son problemas de una etapa.

Acotar uno de los tipos de cálculos (numérico o relacional) y complejizar el otro parece ser una cuestión acertada en lo que a problemas aditivos refiere. Se han encontrado en el libro de texto, indicativos de problemas que complejizan el cálculo relacional, pero mantienen rangos numéricos pequeños o de fácil cálculo, o también a la inversa cálculo numérico complejo y relacional sencillo.

El análisis realizado en torno a los posibles procedimientos, errores y dificultades permite –entre otros aspectos- dar cuenta de la influencia que tienen las variables didácticas en la dificultad de los problemas de tipo aditivo. Se identificaron algunos problemas que presentan características peculiares como el lugar de la incógnita en el estado inicial o un rango numérico “grande”, los cuales influyen fuertemente en los posibles procedimientos, errores y dificultades.

Plantear problemas desde la perspectiva del vendedor, permitiendo a los niños reflexionar sobre las tareas de éste, es un tema pendiente en el libro de texto. Puede ser que sea uno de los aspectos que aún no han sido valorados ni aprovechados dentro de la actividad de compra-venta, al menos en los problemas verbales aditivos en este contexto.

Nociones como la de ganancia pueden ser elementos tomados desde el contexto de compra-venta para plantear problemas de cuarta categoría (composición de transformaciones), pero su uso en el planteamiento de problemas escolares debe ser cuidadoso, tal vez sería prudente también presentar en primera instancia a los alumnos este tipo de problemas a través de situaciones que emulen esta parte de la transacción de la compra-venta: “determinar la ganancia” o “determinar el costo al que será vendido el producto considerando el precio que fue pagado al invertir en ello”.

Sería interesante implementar en otro trabajo de investigación algunos problemas que manejen nociones relacionadas con la compra-venta y el uso del dinero como la de ganancia, el ahorro o los descuentos, pues resultaría enriquecedor tener la oportunidad de reflexionar en torno a todas las cuestiones emanadas de los problemas que se ha encontrado en el libro. Su constatación permitiría realizar un mejor análisis.

CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo de investigación me ha permitido hacer conciencia de la complejidad del objeto de estudio abordado. Si bien como docente he tenido la oportunidad de seleccionar, diseñar e implementar problemas de tipo aditivo y mirar procedimientos que mis alumnos llevan a cabo, no prestaba atención a la gama de aspectos que conforman este tipo de problemas. Tal complejidad se ve reflejada en el hecho de que las respuestas que he ido construyendo para cada una de las preguntas de investigación, han dado lugar a otras preguntas. Es así que además de las reflexiones y conclusiones emanadas del trabajo de tesis, presentaré también nuevas interrogantes.

Las tres preguntas de investigación que dieron lugar a este estudio y las cuales es pertinente recordar, son:

- ¿Cuáles son los procedimientos que alumnos de segundo grado ponen de manifiesto al resolver problemas aditivos en el contexto de la compra-venta y/o el uso del dinero? ¿Qué dificultades presentan y qué relación tienen esas dificultades con las características de los problemas aditivos planteados?

  En específico:
- Considerando los problemas aditivos más comunes que tienen lugar en situaciones escolares que emulan la compra-venta (“La tiendita”), ¿qué procedimientos utilizan alumnos de segundo grado de primaria al resolver tales problemas?
- ¿Cuáles son las características semánticas (el tipo de relaciones entre los datos del problema) y numéricas (el tipo y tamaño de los números implicados) de los problemas aditivos en contexto de compra-venta que se plantean en el libro de texto de segundo

grado?, ¿cuáles son los procedimientos de resolución que los alumnos podrían llevar a cabo ante dichos problemas?, ¿qué dificultades y/o errores podrían presentarse?

Los datos arrojados en esta investigación permiten dar las siguientes respuestas:

Procedimientos aditivos identificados en la simulación de compra-venta.

Los procedimientos que los alumnos llevan a cabo para resolver los problemas aditivos en contexto de compra-venta son variados. Recurren tanto a procedimientos formales como no formales –estos últimos con mayor frecuencia–. La elección de los procedimientos que llevan a cabo está estrechamente relacionada con las características semánticas (tipo de relación aditiva) y numéricas (tamaño y tipo de números) que definen a los problemas. Dichas características fungen el papel de variables didácticas que pueden ir siendo modificadas por los docentes de tal manera que permitan propiciar la construcción de distintos sentidos de la suma y la resta. El papel del contexto de compra-venta también desempeña un papel relevante en las situaciones aditivas que se les presentan a los alumnos, sin embargo es necesario realizar más estudios en torno a este contexto que permitan identificar si el contexto pudiera ser definido como variable didáctica.

Las dificultades y errores que enfrentan los alumnos al resolver dichos problemas –al igual que los procedimientos- están relacionados de manera directa con tres elementos: el cálculo relacional, el cálculo numérico y las nociones de compra-venta y uso de dinero implicados en los problemas.

En los problemas planteados en la actividad simulada de “La tiendita” los alumnos presentan distintos procedimientos de acuerdo a los tipos de problemas planteados:

- Para los problemas en los hay que determinar el monto a cobrar se presentaron tres procedimientos: Realizar una cuenta de suma (con mayor frecuencia a través de la calculadora y con menor frecuencia utilizando el algoritmo), hacer una descomposición aditiva y hacer sobreconteo.

- Para los problemas en los que se requiere determinar el monto del cambio de presentaron los siguientes procedimientos: Realizar la cuenta resta (con mayor frecuencia a través de la calculadora, restando al minuendo el sustraendo, y con menor frecuencia utilizando el algoritmo), descomposición aditiva, y un frecuente uso de la búsqueda del complemento aditivo apoyado en varios recursos.

Como se puede observar, según sea el tipo de problema que enfrentan los alumnos, se movilizan procedimientos específicos; estos procedimientos están relacionados con el cálculo relacional en juego. Entre los procedimientos utilizados por los alumnos existen algunos que pudiese pensarse son motivados por el contexto de dinero y compra-venta en el que se plantean los problemas, específicamente la búsqueda del complemento aditivo es uno de ellos, pues éste es comúnmente utilizado en las actividades reales de compra-venta. La descomposición aditiva apoyada en dinero, cuando se realiza el pago con diferentes denominaciones, también es un procedimiento que puede ser asociado al contexto.

Otra característica que determina el procedimiento que llevan a cabo los alumnos, es el tamaño de los números que intervienen en el cálculo. Los procedmientos puestos en marcha ante los problemas aditivos planteados en la actividad de “La tiendita”, constatan esta afirmación. Un ejemplo de la influencia de esta variable didáctica (el tamaño de los números) es el procedimiento de Héctor: ante un problema en el que debe determinar el monto del cambio cuando se cobra $16 de un billete de $20, el alumno recurre a encontrar el complemento aditivo a través del cálculo mental; en cambio, en un problema en el que debe calcular el cambio cuando se cobra $68 de un billete de $100, lleva a cabo la operación resta apoyándose en la calculadora utilizando el signo de menos para restar el sustraendo al minuendo.

Características de problemas aditivos en contexto de compra-venta identificadas en el libro de texto.

En lo que se refiere al análisis de los problemas del libro de texto, es importante señalar que el contexto de compra-venta es utilizado sobre todo para plantear problemas aditivos de composición de medidas (calcular el monto a pagar) y en los de transformación negativa (calcular el cambio); los problemas del tipo igualación de medidas y composición de transformaciones tienen menor presencia (sólo existe un problema de cada uno), mientras que los del tipo comparación de medidas definitivamente no aparecen.

Otra característica que ha sido identificada de los problemas del libro de texto y que llama la atención, es la poca variedad del lugar de la incógnita. En gran medida en los problemas se pregunta por el estado final o total, cuando ya se ha mostrado en otras investigaciones (por ejemplo, Nunes y Bryant, 1997) también la pertinencia de plantear desde este grado problemas en los que la incógnita esté en el estado inicial o en la transformación. Es importante señalar que este tipo de problemas implica una dificultad mayor para los niños, pero no les son imposibles.

De igual manera existen pocos problemas que requieren más de una etapa para ser solucionados. El análisis específico de cinco problemas da cuenta que el número de etapas si puede ser considerada como una variable didáctica. Al parecer por los resultados del análisis esta variable no está siendo tan explotada.

Una decisión certera que se puede identificar en las decisiones de algunos problemas del libro de texto es el equilibrio entre cálculo relacional y cálculo numérico. Si el cálculo relacional es complejo, se plantea entonces un cálculo numérico más sencillo, y viceversa.

El análisis previo realizado a los problemas del libro de texto, de acuerdo a las características de dichos problemas, señala que para los problemas en los que se deba determinar el monto a cobrar o el monto a dar de cambio en los que se pregunta por el estado final o total, los niños podrían llevar a cabo los procedimientos que han sido identificados en la actividad simulada. Aparecen otros procedimientos como el estado inicial hipotético para los problemas en los que la incógnita se encuentra en uno de los sumandos.

Por último, habrá que identificar de las categorías de problemas que no son planteados, cuáles sería conveniente plantear en segundo grado y cuáles no. A partir de los datos que obtengo en esta investigación, me parece que sería prudente aprovechar el contexto de compra-venta para plantear problemas de igualación y problemas de comparación de medidas ya que existen situaciones reales en este contexto que permitieran plantearles estos problemas a los niños. Por ejemplo: Lola tiene $37 y Lucía $56 ¿cuánto dinero más que Lola tiene Lucía? (comparación) y tengo $74 si quiero comprar una mesa de $238 ¿cuánto me falta? Considero el contexto de compra-venta pudiera permitir de manera fácil plantear a los alumnos problemas de estas categorías y no sólo de composición de medidas y transformación.

Los datos con los cuales se han construido las respuestas a las preguntas de investigación, dan lugar las siguientes reflexiones.

El contexto de compra-venta adecuado para presentar problemas aditivos

La relación directa que establecen los niños entre el dinero y la compra-venta, da certidumbre sobre la conveniencia de usar este contexto para plantear problemas aditivos a los alumnos de segundo grado. Todos los integrantes de la muestra participan en actividades reales de compra-venta, lo que les permite tener elementos para enfrentar tareas simuladas de este tipo, como la que se utilizó en estas indagaciones, pues reconocen la relación entre pago-costo-cambio e identifican el valor nominal de monedas y billetes.

Sin embargo, habrá que considerar que si bien los niños cuentan con conocimientos que les permiten enfrentar problemas en este contexto, existen elementos que aún no son claros para ellos. Por ejemplo, hay que tener en cuenta que aunque los niños saben cuándo deben recibir cambio, no tienen mucha claridad en cuanto a la manera de calcular su monto. Otro aspecto importante a considerar cuando se usa el dinero como contexto para plantear problemas, es la peculiaridad del valor del dinero (la cardinalidad implícita). Es decir, que los niños identifiquen, por ejemplo, que si se tienen dos monedas de $5 el valor no es dos, sino diez. Este es el primer conocimiento que los niños deben lograr para que efectivamente el dinero sea un recurso para el aprendizaje; en el caso de los alumnos de 2° grado que conformaron la muestra, se constata que ya han logrado construir este conocimiento y lo utilizan sistemáticamente. De igual manera será importante considerar otros conocimientos matemáticos que podrían ser enseñados utilizando el contexto de la compra-venta y el uso dinero; por ejemplo la composición aditiva de cantidades con diferentes denominaciones (por ejemplo armar 8 pesos de distintas maneras) y el manejo de relaciones multiplicativas (por ejemplo cuando tengo que decir cuánto dinero tengo si me dan 3 moneas de $5).

También se ha constatado en la realización de este trabajo, que existen nociones de la compra-venta que aún no son construidas por los alumnos. En particular me refiero a la noción de ganancia. Cabe preguntarse entonces si es conveniente utilizar esta noción para plantear problemas aditivos en segundo grado de primaria. En ese sentido, considero que si el contexto de compra-venta ayuda a los alumnos a construir conocimientos matemáticos, los problemas matemáticos también pueden ayudar a construir conceptos que se refieren a la compra-venta. Se puede plantear un enriquecimiento recíproco. Sin embargo, habrá que tener sumo cuidado en preparar la situación didáctica y en prever intervenciones docentes que les permitan ir avanzando en el proceso, ya que además de las dificultades de la noción en sí misma, el tipo de categoría implicada en problemas de ganancia (composición de transformaciones) es una categoría compleja de comprender para los niños de este grado escolar.

Las dificultades de los alumnos identificadas respecto a la noción de ganancia, invitan a su vez a poner atención en la posible "homogenización" de la actividad de compra-venta que se pudiera establecer desde la escuela, pensando que la generalidad de los niños comprenden todo lo que implica dicha actividad, y que sus experiencias con ella son iguales. En ese sentido, un aspecto interesante que pude advertir con este trabajo de investigación, es la heterogeneidad de experiencias de los alumnos al realizar compras reales. Ejemplo de ello son las prácticas de pedir fiado, el uso de vales de despensa o tarjetas de crédito a las que los alumnos hicieron alusión.

Por último, me parece importante subrayar que proponer problemas desde la perspectiva del vendedor es un tema pendiente tanto en la implementación que habitualmente se hace de "La Tiendita", como en el libro de texto. Es posible que tareas matemáticas como determinar el cambio y asignar los precios de los productos considerando una ganancia que tienen lugar desde la perspectiva del vendedor sean más factibles de abordarse a través de “La Tiendita”, aunque ello implica un cuidadoso –y arduo– trabajo de planeación.

Enriquecer el bagaje de procedimientos, la importancia del análisis y enseñanza de procedimientos no formales.

Los resultados de la implementación de la actividad simulada que emula la compra-venta permiten constatar por una parte, que existe una gama amplia de procedimientos a los que los niños recurren para solucionar los problemas aditivos planteados, y por otra parte, que los niños recurren en mayor medida a procedimientos no formales que a los formales.

Los algoritmos escolares tanto de suma como de resta son poco socorridos por los niños, lo cual coincide con los resultados de otros estudios (Carraher, Carraher, & Schiliemann, 1995; Lerner y Sadovsky, 1994; Solares 2012). Si bien es cierto que en este estudio los alumnos cursan segundo grado y este algoritmo es consolidado en ese grado escolar, considerando el momento en el que fue realizada la entrevista (4to bimestre) se esperaría que los niños recurrieran más al algoritmo, aunque con errores, lo cual no sucedió.

Es importante reflexionar entonces sobre el énfasis en los procedimientos algorítmicos que aún persiste en la escuela. ¿Sería pertinente retomar estos procedimientos informales para que los niños los sistematicen y “les saquen” mayor provecho? Por ejemplo, realizar más actividades que impliquen la descomposición aditiva. Pienso que es factible propiciar en el salón de clases el desarrollo y comunicación de estos procedimientos, pero sobre todo su análisis, para que junto con los procedimientos formales conformen un bagaje más amplio de procedimientos de solución del que los niños pueden disponer. Por otra parte, el dinero es quizá un referente especialmente adecuado para estudiar los algoritmos, éste podría ser uno de sus usos didácticos potenciales dentro del aula.

De igual manera, el uso de la calculadora y del cálculo mental fueron recursos altamente utilizados por los niños de la muestra:8 de los 10 alumnos recurren a la calculadora y 6 al cálculo mental en problemas donde hay que determinar el monto a cobrar; y frecuencias similares aparecieron en los problemas de determinar el cambio. Esos datos dan cuenta de las posibilidades de solución que esos recursos ofrecen, así como de la apropiación que los alumnos han logrado de los mismos. Entonces, ¿por qué no convertir a la escuela en potencializadora del uso estos recursos? ¿Por qué no permitir el uso de la calculadora más allá de sólo utilizarla para verificar los resultados? ¿Por qué no enseñar estrategias y técnicas de cálculo mental?

Contrariamente al pensamiento común de que el uso de la calculadora “atrofia” las habilidades de cálculo de los alumnos, considero que es una herramienta que apoya sus procedimientos, pues es en el alumno, en su actividad cognoscitiva, en quien recae la responsabilidad de decidir el procedimiento y su desarrollo para encontrar la solución. Habrá entonces que reflexionar qué uso darle a este artefacto en la escuela, cuándo permitir los alumnos recurran a él y cuándo restringir su uso. Definitivamente es necesario promover en la escuela distintos usos de la calculadora, más allá que utilizarla sólo para la verificación.

Las decisiones metodológicas al elegir “La tiendita” y el libro de texto como recursos para la investigación

Usar “La tiendita” como recurso de indagación fue una elección metodológica certera, pues realizar entrevistas clínicas semi-estructuradas en el transcurso de la implementación. Las características de esta situación didáctica permiten proponer tareas a los alumnos que facilitan la indagación sobre sus conocimientos sobre las actividades de compra-venta y el uso del dinero y sobre sus procedimientos aditivos.

Transformar la actividad de “La tiendita” de “situación didáctica de aula” a “situación didáctica de investigación” implicó replantearse las tareas que comúnmente se llevan a cabo con esta actividad. Las decisiones metodológicas tomadas para el diseño de “La tiendita” estuvieron basadas en distintas perspectivas teóricas, cuyos planteamientos resultaron esclarecedores. A grandes rasgos se puede mencionar que: la TSD permitió identificar el tipo de conocimiento que se moviliza en relación con la situación didáctica que se planteaba a los alumnos, ayudó a identificar las variables didácticas en juego (aunque para definirlas el apoyo estuvo en la TCC) y fue parámetro para plantear a los alumnos tareas que pudieran enfrentar desde una estrategia base. La TCC permitió definir las variables didácticas que se pondrían en juego durante la implementación, en concreto el tipo de categorías a las que pertenecían los problemas y las características del cálculo numérico. Por último los estudios de corte psicogenético sobre la construcción de las nociones de dinero y compra-venta, dieron luz para que el diseño de la situación de “La tiendita” permitiera indagar los conocimientos sobre el dinero y compra-venta en los niños. Como señalé anteriormente, la necesidad de recurrir a distintas perspectivas teóricas para abordar un solo objeto de estudio, habla de la complejidad del mismo.

Las adecuaciones que se decidieron realizar para utilizar esta situación didáctica –La tiendita- como instrumento de indagación, resultaron ser pertinentes: el rol del vendedor asignado a los alumnos permitió que ellos se enfrentaran a tipos de problemas aditivos que desde el lugar de compradores no enfrentan. Por su parte, el rol de comprador-entrevistador sin duda alguna permite indagar a mayor profundidad los conocimientos sobre dinero y compra-venta y los procedimientos aditivos que llevaron a cabo los alumnos. Esta situación didáctica permite crear un ambiente adecuado para profundizar en dichos conocimientos y procedimientos proponiendo a los alumnos actividades en las que se inmiscuyen de manera fácil y con interés.

Por otro lado los criterios utilizados para el análisis de los problemas de libro (ver tabla 6 pág. 99) resultaron convenientes para dar cuenta de las características de los mismos, para realizar reflexiones sobre la complejidad o facilidad de los problemas y prever algunos posibles procedimientos, errores y dificultades.

Considero que estos criterios pueden ser parámetros para que los docentes elijamos qué aspectos vamos a considerar en un problema. Por ejemplo, si elegimos una categoría de comparación (que resulta difícil para los alumnos), habremos de cuidar el tamaño de los números para que el cálculo numérico no sea difícil y puedan centrar su atención en la relación entre los datos. O bien, si es un problema de dos etapas, habría que tener cuidado en que la estructura aditiva de una de las etapas fuera más sencilla que la otra.

Posibilidades didácticas de “La tiendita” y su relación con el libro de texto

Es importante también destacar sobre este recurso que dado el alto índice de respuestas correctas en actividades de composición de medidas en comparación con los de transformación de medidas, la actividad de “La tiendita” parece favorecedora para plantear problemas de transformación, en los que se paguen con números cerrados (por ejemplo 200, 100, 50) que les “obliguen” a buscar estrategias de solución para problemas en los que implicaría desagrupamiento.

La implementación de “La tiendita” como forma de indagación de los procedimientos de los alumnos, aporta elementos para reflexionar sobre cómo ambos recursos –“La tiendita” y los problemas del libro de texto–, pueden complementarse para presentar diversos tipos de problemas aditivos a trabajar en el salón de clases.

Al emular la compra-venta real, “La tiendita” reduce la posibilidad de plantear la diversidad de tipos de problemas aditivos que las investigaciones didácticas han identificado. Ante ello me pregunto si en el libro de texto podrían plantearse los problemas aditivos que en “La tiendita” serían poco factibles de ser planteados, por ejemplo, problemas en donde se pregunte por el estado inicial (“¿Cuánto dinero traías si compraste un producto de $23 y te sobraron $12?”).

Otros aportes de esta investigación

El establecimiento de criterios de análisis y el diseño de las situaciones exploratorias me han ayudado a redimensionar el trabajo con mis alumnos en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general, y de los problemas aditivos en particular. Hacer conciencia de algunos de los múltiples procedimientos que los alumnos llevan a cabo al abordar problemas aditivos, me convence cada vez más de la importancia de permitir y fomentar el uso de procedimientos diversos al solucionar problemas.

Por último mencionaré que esta investigación estuvo atravesada, aunque no expresamente, por preocupaciones didácticas sobre la necesidad de crear puentes entre la escuela y las actividades extra-escolares con la finalidad de fomentar aprendizajes con sentido. La compra-venta ha sido uno de los contextos extra-escolares más recurrentes en esta búsqueda de vínculos entre los conocimientos escolares y extra-escolares.

Al inicio de este proceso de investigación miraba al uso del dinero y a la compra-venta como la “panacea” para que los niños construyeran conocimientos matemáticos sobre la suma y la resta aprovechando los conocimientos aprendidos en prácticas extra-escolares. La experiencia que obtuve con este estudio me invita a considerar que si bien es cierto que algunos conocimientos extra-escolares y escolares se entrelazan y enriquecen de manera recíproca, habrá elementos que no logren encontrarse, pues existen características de la actividad escolar que sólo conciernen a ese contexto, así como los hay en las actividades reales y que es imposible llevar al aula. Es fundamental entonces que en la escuela se lleven a cabo esos aprendizajes que difícilmente tendrían cabida más allá de ella.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, M. Y Brizuela, B (2013) Herramientas notacionales en la solución de problemas aditivos con niños de primer año de primaria. En C. Broitman (comp) *Matemáticas en la escuela primaria: números naturales y decimales con niños y adultos II.* (pp. 97-119). Buenos Aires: Paidós

Artigue, M. (1995) Ingeniería didáctica. En Artigue, M.; Régine, D.; Moreno, L.; Gómez, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-69) Bogotá: Iberoamérica

Ávila, A. (2014). Del saber de la experiencia al saber en la experiencia: 25 años de investigación sobre saberes matemáticos y escolarización tardía en México. *Educación Matemática*, 52-72.

Ávila, A., Block, D., Camarena, P., Carvajal, A., Eudave, D., Sandoval, I., Solares, A. (2013). La investigación en educación matemática en México 2002-2011. En: *Estados del Conocimiento.* México: COMIE

Bacoiquea, F. (2000). La construcción de nociones sociales. *Revista de Psicodidáctica* (9), 33-47.

Baroody, A. (2000). Técnicas de contar. En: *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Editorial Visor.

Barrantes, H. (2006). "La Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud". En: Cuadernos de Investigación y Formación En *Educación Matemática* 2006, Año 1, Número 2. Versión en línea: www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes

Barriendos, A. (2005). Problemas matemáticos escolares. En *¿Es de suma o de resta? Experiencias con situaciones aditivas para maestros de primaria.* (pp. 17-21) México: DIE-CINVESTAV.

Belmonte, J. (2006). El cálculo en la enseñanza primaria. La adición y la sustracción. En Didáctica de las matemáticas. Madrid. Ed. Pearson. (pp. 133 – 158). En C. Chamorro, *Didáctica de las matemáticas* (pp. 133 – 158). Madrid: Pearson.

Bermejo, V., & Rodríguez, P. (1991). La operación de sumar: el caso de los problemas verbales. *SUMA*(8), 35-39.

Berti, A., Bombi, A.; De Beni, R. (1986). Acquiring economic notions: profit. *International Journal of Behavioral Development*, 15-2

Berti, A., & Bombi, A. (1988). *The child´s construction of economics.* Cambridge: Cambridge Univerrity Press.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la Educación Básica*. México: SM Ediciones.

Brotiman, C. (1999). Sumar no es siempre agregar ni restar es siempre quitar. En *Las operaciones en el primer ciclo* (pp. 9 – 21). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Broitman, C. (2011). *Estrategias de cálculo con números naturales: Segundo ciclo.* -2da ed.- Buenos Aires: Santillana, 2011

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Francia : La Pensée Sauvage, éditions

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Revista Educación Matemátcia, 12* (1), 5-38.

Brousseau, G. (s/f). *Investigaciones en educación matemática.* <http://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/brusseau-investigaciones-matemc3a1ticas.pdf> (18 de septiembre 2014)

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil. Tesis doctoral.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Carraher, T., Carraher, D., & Schiliemann, A. (1995). *En la vida diez, en la escuela cero.* México, D.F.: Siglo XXI editores s.a. de c.v.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., . . . Fernandez, F. (1998). Problemas aritméticos compuetsos de dos relaciones. Ponencia. *I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* , (pp. 63-76). Zamora .

Chamorro, M. (2003). Herramientas de anláisis en didáctica de las matemáticas. En M. Chamorro, *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 69-94). Madrid: Pearson.

Chandler, C., y Constance, K. (2009). Giving Change When Payment Is Made With a Dime: The Difficulty of Tens and Ones. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (2), 97.118.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra, & I. Saiz, *Didáctica de a matemáticas. Aportes y Reflexiones.* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós Educador.

Delahanty, G. (1989). *Génesis de la noción del dinero en el niño.* México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Dellarosa, D. (1998) Children´s Interpretations of Arithmetic Word Problems. J*ournal for Research in Mathematics Education. 29 (*4), 436-442.

Delprato, M., y Fregona, d. (2013) De usuario competente del sistema monetario al dominio de la escritura de los números. En C. Broitman (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria: números naturales y decimales con niños y adultos I.* (pp. 73-95). Buenos aires: Paidós

Delval, J. (1989). La representación infantil del mundo social. In E. Turiel, I. Enesco, & J. Linaza, *El mundo social en la mente infantil* (pp. 245-328). Madrid: Alianza.

Delval, J., & Echeita, G. (1991). La comprensión en el niño del mecanismo de intercambio económico y el problema de la ganancia. *Infancia y aprendizaje*(54), 71-108.

Delval, J. (2011). *Cómo sabemos lo que hacen y piensan los niños*. En: El desarrollo humano. (pp. 499-528). México: Siglo XXI

Díaz, J. (2004). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano. Tesis Doctoral.* Madrid : Universidad Complutense de Madrid.

Diccionario de la Lengua Española. http://lema.rae.es/drae/?val=miscel%C3%A1nea http://lema.rae.es/drae/?val=tianguis (15 de enero de 2014).

Duhalde, M. y González, M. (1996). *Encuentros cercanos con las matemáticas. Aportes a la Educación Inicial*. Buenos Aires: AIQUE

Ferreiro, E. (1986). El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria. In *Alfabetizao em processo.* San Pablo: Cortez Editora.

Flores, R. (2005). El significado de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática*, *17*(2), 7-34.

Fregona, D., & Órus, P. (2011). Las nociones de medio y situación. In *La noción de medio en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas.* (pp. 21-61). Argentina: Libros del Zorzal.

Fuson, K. (1988).*Children's Counting and Concepts of Number, Springer Series in Cognitive Development,* New York: Springer-Verlag

Gálvez, G. (1994). La Didáctica de las Matemáticas. En C. Parra, & I. Saiz, *Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós Educador.

Gálvez, G., Navarro, S. R., & Zanocco, P. (1994). *Aprendiendo matemáticas con calculadora* . Chile: ARGE Limitada .

GarcíaHerrera, A. (2001). *Los usos del libro de texto en la práctica docente cotidiana de tercero y cuarto de primaria: un estudio cualitativo. Tesis Maestría*. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ginsburg, H., Klein, A., Stakey, P. (1998). El desarrollo del pensamiento matemático de los niños: conexión la investigación y la práctica. En: *IE Sigel, KA Renniger (Eds) Manual de psicología infantil,* Vol. 4. Nueva York: Wiley

INEE (2005). *Manual técnico. Construcción de reactivos Excale*. México, D.F.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En: C. Parra, & I. Saiz, *Didáctica de a matemáticas. Aportes y Reflexiones*. (pp.95-1884). Buenos Aires: Paidós Educador.

Martín-Lunas, Eugenia. (1992). *Conocimientos matemáticos de adultos no alfabetizados un México: Un estudio comparativo.* Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias. UNAM. México.

Muñoz, J. (2005). *Manual del ATLAS.Ti.* Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. In M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB* (pp. 59-71). Buenos Aires: Paidós.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra, e I. Sainz, *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 219-272). Argentina: Paidós Educador.

Peltier, M. (2003). Problemas Aritméticos, articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática, 15*, 29-55.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). *Conferencia plenaria invitada en la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación Matemática Educativa*. Acapulco, México.

Quaranta, M. (2007). Gérard Vergnaud: sus aportes a la Didáctica de la Matemática y a las prácticas de enseñanza. *12(ntes) Enseñar Matemática. Nivel inicial y Primario, 1*(1), 7-15.

SEP. (1995). *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Lecturas* (pp. 89-97). México: SEP-PRONAP.

SEP. (2012). *Matemáticas segundo.* Toluca: SEP.

SEP. (2013). *Matemáticas segundo.* Toluca: SEP.

SEP. (2012). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro.* México, D.F.: SEP.

Sacristán, G. (1991). *El currículm: una reflexión sobre la práctica.* Morata, España: Colección Pedagogía. Manuales.

Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, L. (2007). Capítulo 5. Definición del alcance de la investigación a realizar: exploratoria, descriptiva, correlacional o explicativa. En Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, L., *Metodología de la Investigación* (pp. 99-120). México: Mc. Graw Hill.

Solares, D. (2012). *Conocimientos de Niñas y Niños Jornaleros Agrícolas Migrantes. Tesis Doctoral*. México, D.F.: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Vergnaud, G. (1991). Los Problemas de Tipo Aditivo. In G. Vergnaud, *El Niño, las Matemáticas y la Realidad* (pp. 161-184). Ciudad de México: Trillas.

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ANEXOS

Anexo 1. Lección 4 (SEP, 2012)[52]

Significado y uso de los números

Problemas aditivos
Problemas de suma y resta

4
Agrego, quito y comparo

Lo que conozco. De cada colección, colorea de azul el grupo de tarjetas cuya suma es igual a 24.

Colección 1

4	12	5	9	6

Colección 2

4	8	6	5	3	7

- ¿Qué tarjeta falta para que en la primera colección la suma total sea igual a 40? ______
- ¿Qué tarjeta agregarías para que la suma de las dos colecciones sea igual a 100, contando la tarjeta que has agregado? ______

Raquel les contó a Gerardo, Lolita y Margarita su aventura en el campamento donde hay un criadero de tortugas; esto los motivó a comprar algunos peces, así que fueron al acuario para adquirir lo necesario para su pecera.

17

[52] En este y en los siguientes anexos se señalan con una flecha roja los problemas que han sido analizados en el capítulo 5.

1. En parejas, observen la ilustración de la página anterior y contesten.

- Margarita pagó al vendedor 15 pesos, ¿cuántos y cuáles peces pudo comprar?____________________
- Gerardo tiene 25 pesos. ¿Le alcanzará el dinero para un pez neón, un guppy y un beta?____________________
  ¿Por qué?____________________
- ¿Cómo obtuvieron la respuesta a la pregunta anterior? ____________________
- Comparen sus resultados con los de otra pareja.
- ¿Obtuvieron las mismas respuestas? ____________________
- Consulten los resultados con su maestro.

Recortable
Páginas 9-10

2. Recorten las tarjetas "El dinero" y contesten las preguntas realizando las operaciones mentalmente.

- ¿Cuánto debes pagar por cuatro peces molly?________________
- ¿Cuánto debes pagar por un pez cebra y dos peces beta? ________
- ¿Cuánto tienes que pagar por tres botes de alimento? ________
- Si compras un pez beta y te sobran 15 pesos, ¿cuánto dinero tenías? ____________________
- Pregunten a otros de sus compañeros cuáles son sus resultados, en caso de que tengan respuestas diferentes, expliquen cómo las obtuvieron y, con ayuda de su profesor, decidan cuál es la correcta.

Consulta en...

www.thatquiz.org/es/practice.html?arithmetic
Practica sumas y restas.

Anexo 2. Especificaciones sobre procedimientos del problema con incógnita en el estado inicial.

Problema:

*Si compr**as** un pez beta y te sobran 15 pesos, ¿cuánto dinero tenías?*[53]

Debido a la estructura aditiva implicada en este problema y dadas las características que se han identificado, podría esperarse que los alumnos presenten los siguientes procedimientos, errores y dificultades:

- ✓ La **solución canónica**[54] que da respuesta a este problema consiste en aplicar la transformación +5 (opuesta a la transformación -5) al estado final 15 y encontrar así 20. En otras palabras sumando 15 + 5. Este procedimiento podría ser llevado a cabo a través de la suma algorítmica o bien por cálculo mental.

  En caso de utilizar el a**lgoritmo** los niños podrían cometer un error de acomodo entre los sumandos, debido a que uno de éstos es de dos cifras y el otro de una cifra. Tal vez podrían acomodar el cinco en el lugar de las decenas obteniendo un resultado erróneo.

  En caso de solucionar a través del **cálculo mental** los alumnos pudiesen recurrir al **conteo** o al **sobreconteo.**

  El **conteo** pudiese ser apoyado por la representación icónica de las colecciones (bolitas o palitos). Este procedimiento consistiría en representar ambas colecciones (15 y 5) y luego contar todo. Este procedimiento ha sido identificado por Bermejo y Purificación

[53] En la edición del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013) ya no aparece este problema en la lección citada.

[54] "La solución canónica es la que comporta los procesos más económicos, lo que no quiere decir que sean los más simples desde el punto de vista cognitivo" (Belmonte, 2006; p. 139)

(1991)[55] como “estrategia de modelado directo”, la cual consiste en “representar ambos conjuntos o cantidades propuestas en el problema mediante objetos físicos… y recontar después dichos objetos” (p.37).

Si los alumnos recurren a procedimientos en donde el conteo esté presente, pudieran tener dificultades al no aplicar el principio de “correspondencia término a término”[56] que caracteriza la acción de contar (en niños de segundo grado el conteo ya está bien consolidado, pero podría suceder que, por alguna distracción, no realicen bien el conteo).

Para el **sobreconteo** los niños podrán resolver la adición 15+5 por medio de sobreconteo agregando a 15, cinco unidades más. Es probable que algunos niños recurran a la representación de una colección de 5 por medio de sus dedos.

En caso de recurrir a este procedimiento los alumnos podrían cometer el error de comenzar el sobre conteo en un término incorrecto, por ejemplo, en este caso tal vez haya niños que comiencen nombrando el 15 en lugar del 16.

- ✓ Procedimiento de “**estado inicial hipotético**”, el cual según Vergnaud “consiste en plantear la hipótesis de un cierto estado inicial, aplicarle la transformación directa, encontrar un estado final, y corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido” (p.173). Por ejemplo: un niño hipotetiza que contaba con $30, entonces le resta los $5 que costaba el pez y le quedan $25 y no quince como esperaba, al ver que “se pasa” modifica la cantidad inicial al $25 y repite el procedimiento. Al final lograría a través de “aproximaciones sucesivas” llegar a la respuesta correcta: $20.

---

[55] Para los autores las estrategias que han denominado “de conteo”, “implica contar sin modelos (objetos físicos)” (p.37) remiten también el uso de movimientos físicos como de la cabeza. Lo que en este trabajo se nombra como sobreconteo los autores lo engloban en estas “estrategias de conteo”.

[56] Según Chamorro (2005) “este principio necesita… que el alumno sepa hacer una correcta tarea de enumeración que le permita no dejar elementos sin contar o contar otro varias veces”. (p. 155)

Nota. En problemas parecidos a éste que presenten la incógnita en el estado inicial, pero que la transformación aplicada sea positiva, los niños podrían recurrir al procedimiento de "**complemento aditivo**", que como se ha mencionado consiste en "encontrar la diferencia entre dos cantidades buscando el número que, sumando al sustraendo, permite llegar al minuendo" (Solares, 2012, p.198).

Anexo 3. Lección 16 (SEP, 2012)

Raúl le dio a cada una de sus tres hijas $275 para que se compraran un par de zapatos.

- Claudia pagó un par de zapatos de $215. ¿Cuánto dinero le sobró? ______________________
- Beatriz compró un par de $195. ¿Cuánto dinero le quedó? ______________________
- Lorena pagó $239 por sus zapatos y quiere comprar una lapicera que cuesta $50. ¿Le alcanza el dinero para comprar las dos cosas? ____________ ¿Cuánto dinero le falta o le sobra? ______________________

Consulta en...

Para practicar sustracciones, entra a la siguiente página:
www.thatquiz.org/es/practice.html?arithmetic

2. En parejas, resuelvan los problemas siguientes.

- Roberto tiene 47 años y su hija Leslie 6. ¿Cuántos años es más grande el papá que la hija? ______________________
- Verónica tiene en su bolsa un billete de 50 pesos, dos monedas de 10 pesos, dos de 5 pesos y una de 2 pesos. Ella compró arroz, frijol y huevo, y pagó en total $65. ¿Cuánto dinero le sobró? ______________________
- A las playas de Guerrero llegaron 2 tortugas a depositar sus huevos: una puso 87 y la otra, 99. ¿Cuántos huevos faltaron para que las dos tortugas desovaran la misma cantidad de huevos? ______________________
- Las vacas de doña Julia produjeron 63 litros de leche el martes y 81 litros el miércoles. Doña Julia tenía vendidos

70 litros para cada uno de los dos días. ¿Cuál de los dos días le sobró leche? ____________________ ¿Cuántos litros le sobraron? ____

- Ana quiere comprar una mochila de $167 y tiene $132. ¿Le alcanza para la mochila? ________________ ¿Cuánto dinero le sobra o le falta? __________________________________

3. Escribe el número que hace falta para completar correctamente las restas siguientes.

a)	34	-		-	16			
b)		-	33	-	17			
c)	68	-		-	41			
d)	83	-		-	26			
e)		-	39	-	52			

En la resta o sustracción, al primer número se le llama **minuendo** y al segundo, **sustraendo**. El resultado de la resta también se nombra como diferencia.

minuendo	−	sustraendo	=	diferencia
9	−	7	=	2

Para comprobar que una resta o sustracción está resuelta correctamente, suma al resultado el número que restaste (sustraendo); debe darte el otro número (minuendo).

$$\begin{array}{r} 78 \\ -12 \\ \hline 66 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 66 \\ +12 \\ \hline 78 \end{array}$$

Anexo 4. Recortable para trabajar la lección 16

Anexo 5. Lección 26 (SEP, 2012)

Cálculo mental

Suma y resta
Realiza restas utilizando distintos procedimientos.

26

El misterio revelado de las sustracciones

Lo que conozco. En equipos observen las siguientes tarjetas y contesten las preguntas.

- Encierra las tarjetas en las que el resultado de la operación sea mayor que 30.
- Traza una (×) sobre las tarjetas en las que el resultado es menor que 30.
- Dibuja un triángulo sobre las tarjetas en las que el resultado sea igual a 30.
- Escriban cómo encontraron las respuestas.

$$\begin{array}{r}40\\-10\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}70\\-20\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}80\\-60\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}90\\-30\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{r}60\\-10\\\hline\end{array}$$

1. Resuelve el ejercicio de acuerdo con el ejemplo.

Resta	Proceso	Resultado
30 − 20	3 veces 10 − 2 veces 10 = 1 vez 10	30 − 20 = 10
40 − 10		
50 − 20		
60 − 40		
70 − 30		
80 − 40		
90 − 50		

2. En equipos, resuelvan los problemas.

- En el grupo de segundo grado, los alumnos se organizaron para ahorrar dinero durante el ciclo escolar. Falta entregar sus ahorros a Pedro y Marta, pero Roberto, quien guarda los ahorros, sólo tiene dos billetes, uno de 50 y otro de 100 pesos. Como Pedro ahorró 72 y Marta, 78 pesos, Roberto decidió dar a Pedro el billete de 50 y a Marta el de 100 con la condición de que Marta le diera a Pedro lo que le faltaba. ¿Cuánto dinero le debe dar Marta a Pedro?

  ____

- María tiene un billete de 50 pesos y una moneda de 5 pesos; va a la dulcería y compra unas alegrías que cuestan 23 pesos. En la caja de la dulcería solamente hay monedas de 10 pesos y cuatro monedas de 1 peso. ¿Podrán completar el cambio con el dinero que se tiene en caja? ____________________

  ¿Por qué? ____________________________________

  ____

  ____

3. Realiza las restas mentalmente y escribe el resultado.

19 - 14 - ______________

25 - 19 -______________

23 - 16 -______________

34 - 28 -______________

47 - 12 -______________

Después, compara tus resultados con un compañero y describe cómo hiciste para resolver la resta.

Consulta en...

Prueba qué tan bueno eres para realizar sustracciones en el menor tiempo posible:
http://www.thatquiz.org/es/practice.html?arithmetic

Anexo 6. Lección 41 (SEP, 2012)

Significado y uso de los números

Problemas aditivos y multiplicativos
Resuelve problemas donde se hacen varias operaciones.

41

¿Cuántas operaciones más?

Lo que conozco. Resuelve las operaciones.

5 + 7 - 6 =

8 + 4 - 10 =

10 + 3 + 7 - 8 =

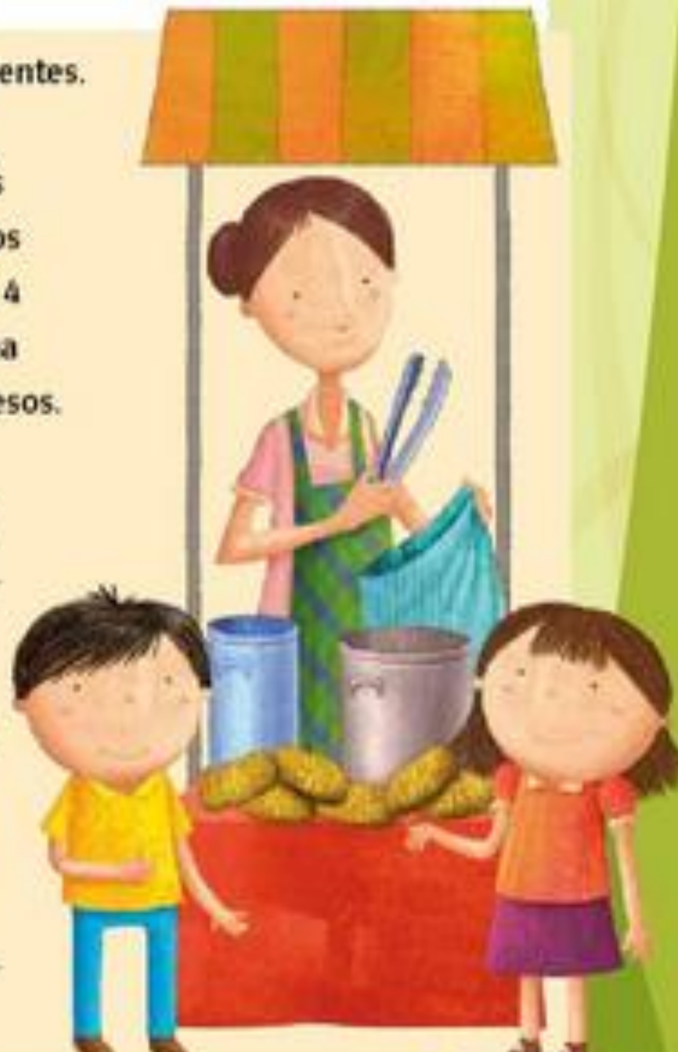
35 - 11 - 12 + 20 =

1. En equipo, resuelvan los siguientes problemas por medio de cálculos mentales.

- Éric compró 2 dulces y 2 paletas, y pagó con una moneda de 10 pesos. ¿Cuánto dinero le dieron de cambio? ______________________
- Layla compró 2 chocolates y una bolsa de cacahuates. Pagó con un billete de 20 pesos. ¿Cuánto le dieron de cambio? ______________________
- Beti compró 20 bombones y pagó con una moneda de 10 pesos. ¿Cuánto le dieron de cambio? ______________________
- Joaquín y Brenda compraron entre los dos 10 dulces, 10 paletas y 10 chocolates. ¿Cuánto pagó cada uno si dividen en partes iguales la cantidad a pagar? ______________________
- Alejandra compró 8 caramelos y pagó con 4 monedas de 10 pesos. ¿Cuánto le dieron de cambio? ______________________
- Manolo tiene 2 monedas de 10 pesos y quiere comprar cacahuates. ¿Para cuántas bolsas le alcanza? _____ ¿Cuánto le sobra? ______________

2. En parejas, resuelvan los problemas siguientes.

Los hermanos Daniel y Juana juntaron sus ahorros para comprar tamales oaxaqueños y desayunar con sus papás. Daniel aportó 4 monedas de 10 pesos y 7 de 2 pesos, Juana aportó 2 monedas de 10 pesos y 3 de 5 pesos.



- Los tamales cuestan 9 pesos, ¿cuántos tamales pueden comprar? __________
- Si cada uno de los miembros de la familia comió el mismo número de tamales, ¿cuántos tamales comió cada uno? ______________________
- Si compran la mayor cantidad posible de tamales, ¿cuánto dinero les sobra?

____

Roberto pagó 20 pesos por las cuentas que se muestran a continuación. Para fabricar una pulsera requiere 10 cuentas.

- Con las cuentas que compró, ¿cuántas pulseras puede hacer? _________
- ¿Cuántas cuentas le faltaron para completar otra pulsera? __________
- Si cada pulsera la vende en 25 pesos, ¿cuánto dinero recibe por las pulseras? ______________________________
- ¿Cuánto gana Roberto con la venta de sus pulseras? ______________
- ¿Por qué? ______________________________
- Con el dinero que gana Roberto, ¿puede comprar material para 18 pulseras? __________ ¿Por qué? ____________________

____

3. En equipos, lean el siguiente texto y respondan las preguntas.

Los grupos A, B y C de segundo grado de la escuela Leona Vicario se están preparando para la fiesta de fin de cursos. Para ello, les prestarán un local que cuenta con 12 mesas y 8 paquetes de 15 sillas cada uno.

En segundo A hay 39 alumnos, en segundo B, 37 y los estudiantes de segundo C completan los 116 alumnos que hay en total en los tres grupos de segundo grado. ¿Cuántos alumnos hay en segundo C? ______________

Anexo7. Especificaciones sobre procedimientos del problema de tres etapas que implica la noción de ganancia y categoría composición de transformaciones

Contenido: Resuelve problemas donde se hacen varias operaciones

Se presentan el siguiente contexto general del problema:

"Roberto pagó 20 pesos por las cuentas que se muestran a continuación. Para fabricar una pulsera requiere 10 cuentas". (Se muestra una imagen con 48 cuentas: 13 amarillas, 19 azules, 9 rojas y 7 verdes).

Después de ese "contexto general" se plantean los siguientes problemas:

- *"Con las cuentas que compró, ¿cuántas pulseras puede hacer?"*
- Más adelante se especifica que Roberto vende cada pulsera en 25 pesos y se hace una pregunta que implica la multiplicación*: "¿Cuánto dinero recibe por las pulseras?"*
- Por último, se presenta una pregunta de orden aditivo, que es la que aquí analizaré: *"¿Cuánto gana Roberto con la venta de las pulseras?"*[57]

Se realiza el análisis de esta última pregunta que propone un problema de tipo aditivo:

Dadas la estructura semántica implicada en este problema y las características del mismo, se podría esperar que los alumnos presenten los siguientes procedimientos, errores y dificultades:

- ✓ Una vez que los niños hayan identificado –lo cual es sumamente difícil por la organización del problema- que los números con los que tienen que operar son 100 (el dinero que le pagaron a Roberto) y 20 (el dinero que invirtió en la compra de material)

[57] En la versión actualizada del libro de texto para el ciclo escolar 2013-2014 (SEP, 2013) este problema ya no se presenta.

podrían recurrir a la **solución canónica** de la **resta.** Ésta podría ser resuelta en mayor medida a través de procedimientos apoyados en **cálculo mental**, ya que la resta a través del algoritmo implicaría mayores dificultades.

Sobre estrategias de cálculo mental es probable que los alumnos cuenten con un bagaje de **cálculo memorizados** – identificar rápidamente que 100 menos 20 son 80. De igual manera los niños podrían realizar un **desconteo** de 10 en 10 partiendo del 100 hasta llegar el 20 o bien **sobreconteo** de 10 en 10 iniciando en 20 hasta llegar a 100.

- ✓ Considero que los errores podrían ser cometidos, principalmente, en la comprensión de lo que la ganancia implica: saber qué representa cada uno de los números en la transacción de compra-venta y cómo se relacionan esos números para calcular la ganancia, no es evidente para los niños. Dada esta dificultad, es posible que algunos niños determinen que la ganancia de Roberto sería el total de dinero con que le fue pagado (en este caso $100.00), pues por la noción no construida de ganancia no identifiquen la necesidad de poner en juego lo que había gastado con antelación.

Anexo 8. Evaluación bloque IV

Evaluación

A continuación resolverás problemas en los que aplicarás los conocimientos aprendidos en el bloque.

Instrucciones. Encierra la letra que corresponda a la respuesta correcta.

Mario, su papá, su mamá y sus dos hermanos viajaron de la capital de Oaxaca a Puerto Escondido. Su papá le dio los boletos a Mario mientras llegaba la hora de salida.

1. El precio del boleto correctamente escrito es:
   a) Dos siete cinco pesos.
   b) Doscientos cincuenta y siete pesos.
   c) Doscientos setenta y cinco pesos.
   d) Doscientos siete cinco pesos.

2. ¿Cuánto pagaron los papás de Mario por los 5 boletos?
   a) $1 100
   b) $1 375
   c) $2 750
   d) $3 025

3. Si les descontaran $30 del precio a cada boleto, ¿cuánto pagarían en total?
   a) $975
   b) $1 225
   c) $1 025
   d) $1 250

4. En Puerto Escondido, Mario compró 5 artesanías para regalar a sus amigos. Si cada una costó $33 pesos, ¿cuánto pagó por ellas?
   a) $175
   b) $99
   c) $155
   d) $165

5. Al comprar el boleto de regreso en la terminal, observaron en la pizarra lo siguiente:

Origen	Destino	Línea de autobús	Hora de salida
Puerto Escondido	Oaxaca	El Sureste	7:00
Puerto Escondido	Oaxaca	La Oaxaqueña	11:00
Puerto Escondido	Oaxaca	La Mexicana	15:00
Puerto Escondido	Oaxaca	El Bicentenario	18:00

Si estaban en la terminal a las 12:00 h, ¿qué línea de autobús ofrecía la salida más próxima?

   a) El Bicentenario.
   b) El Sureste.
   c) La Mexicana.
   d) La Oaxaqueña.