



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Física

**ANÁLISIS DE MODELOS COSMOLÓGICOS DISIPATIVOS
MEDIANTE OBSERVACIONES ACTUALES**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Ingeniero Físico

Presenta:

Leopoldo Herrera Zamorano

Asesor:

Dr. Alberto Hernández Almada

SINODALES

Dr. Alberto Hernández Almada

Director

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Secretario

Dr. Aldrin M. Cervantes Contreras

Vocal

Firma

Firma

Firma

Campus Aeropuerto
Querétaro, Qro.
Febrero 2021

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Física

**ANÁLISIS DE MODELOS COSMOLÓGICOS DISIPATIVOS
MEDIANTE OBSERVACIONES ACTUALES**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Ingeniero Físico

Presenta:

Leopoldo Herrera Zamorano

Asesor:

Dr. Alberto Hernández Almada

SINODALES

Dr. Alberto Hernández Almada

Director

Firma

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Secretario

Firma

Dr. Aldrin M. Cervantes Contreras

Vocal

Firma

Campus Aeropuerto
Querétaro, Qro.
Febrero 2021

*Dedicado a
mis padres.*

Dirección General de Bibliotecas de la UNAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Griselda Zamorano Ríos y Leopoldo Herrera López, por todo su apoyo, esfuerzo y dedicación para ayudarme a alcanzar mis sueños y metas.

A mi asesor, el Dr. Alberto Hernández Almada, por su apoyo durante tres años, en los cuales fue mi guía en el camino de la investigación científica.

A mis sinodales, el Dr. Aldrin M. Cervantes Contreras y el Dr. Octavio Cornejo Pérez, por sus comentarios y sugerencias acerca de la presente tesis.

Finalmente, al Dr. Miguel Ángel García Aspeitia por su guía y apoyo en la elaboración del artículo “Constraints and cosmography of Λ CDM in presence of viscosity”.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica del Universo considerando efectos disipativos. Con la finalidad de acotar los parámetros libres de los modelos, se realiza un análisis Bayesiano basado en el método de cadenas de Markov Monte Carlo usando las observaciones provenientes de las mediciones directas del parámetro de Hubble y de Supernovas del tipo Ia. Cuando se compara estadísticamente los modelos disipativos con Λ CDM, el criterio de información de Akaike indica que tanto los fluidos disipativos como Λ CDM son igualmente preferidos por las observaciones. Sin embargo, el criterio de información Bayesiano indica que existe una evidencia en contra de los modelos disipativos. Finalmente, se confirma que los fluidos viscosos presentan una transición más temprana entre las etapas de desaceleración-aceleración que la obtenida por Λ CDM, se estiman desviaciones en los parámetros cosmográficos para épocas actuales menores a 3σ y se obtiene que la edad del Universo aumenta cuando estos términos disipativos se toman en cuenta.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Justificación	4
1.3. Hipótesis	4
1.4. Objetivos	4
1.4.1. Objetivo general	4
1.4.2. Objetivos particulares	4
2. Cosmología general	5
2.1. Ecuación de Friedmann	5
2.2. Ley de Hubble	7
2.3. Corrimiento al rojo	8
2.4. Ecuación de continuidad	11
2.5. Contenido del Universo	11
2.5.1. Materia tipo polvo	12
2.5.2. Radiación	12
2.6. Parámetros de densidad	13
2.7. Edad del Universo	13
2.8. Parámetros cosmográficos	14
2.9. Diagnóstico de estado	15
2.9.1. Statefinder	15
2.9.2. Gráfica $E^2(z) - (1+z)^3$	15
3. Introducción a la estadística	17
3.1. Estimación de máxima verosimilitud	17
3.2. Inferencia bayesiana	18
3.3. Métodos de cadenas de Markov Monte Carlo	20
3.4. Selección de modelos	21
3.4.1. Criterio de información de Akaike	21
3.4.2. Criterio de información Bayesiano	21
4. Modelos cosmológicos	23
4.1. Modelo estándar de la cosmología Λ CDM	23
4.2. Fluidos disipativos	24
4.2.1. Fluido de materia disipativo (v-CDM)	24
4.2.1.1. Viscosidad polinomial (vp-CDM)	26
4.2.1.2. Viscosidad constante (vc-CDM)	28
4.2.2. Λ CDM disipativo	28
4.2.2.1. Viscosidad polinomial (vp- Λ CDM)	30
4.2.2.2. Viscosidad constante (vc- Λ CDM)	31
5. Observaciones cosmológicas	33
5.1. Observaciones al parámetro de Hubble	33
5.2. Supernovas del tipo Ia	34
5.3. Observaciones en conjunto	34

6. Análisis de modelos	37
6.1. Ajustes a los modelos cosmológicos	37
6.2. Cosmografía	40
6.3. Diagnósticos de estado	42
7. Conclusiones	45
A. Publicaciones	47

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Índice de figuras

1.1. Cúmulo global Messier 75.	1
2.1. Representación gráfica de las coordenadas comóviles.	7
2.2. Efecto Doppler relativista.	9
2.3. Gráfico $E^2 - (1 + z)^3$	16
6.1. Intervalos de confianza para los modelos v-CDM.	38
6.2. Intervalos de confianza para los modelos v- Λ CDM.	39
6.3. Reconstrucción del parámetro de Hubble.	39
6.4. Reconstrucción de los parámetros cosmográficos para Λ CDM y los modelos disipativos.	41
6.5. Comportamiento de E^2 respecto a $(1 + z)^3$	43
6.6. Evolución de los modelos disipativos en el espacio fase statefinder.	43

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Índice de tablas

5.1. Probabilidades a priori consideradas para el acotamiento de los parámetros libres de los modelos.	34
6.1. Valores de los parámetros libres obtenidos del análisis MCMC.	38
6.2. Valores de los criterios de selección de modelos AIC y BIC.	40
6.3. Valores de los parámetros cosmográficos en $z = 0$	41

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 1

Introducción

La cosmología es la rama de la ciencia que estudia el origen y la evolución del Universo a grandes escalas [1, 2]. Los avances más significativos en esta área han sido presentados a lo largo de los últimos 100 años, en específico, a partir de 1915, cuando Albert Einstein publicó su famosa teoría de la Relatividad General, sentando las bases modernas de la cosmología. La cosmología moderna se basa en la hipótesis de un Universo homogéneo (no se distinguen componentes) e isotrópico (no existe una dirección de medición privilegiada). Dicho enunciado es conocido como el principio cosmológico. En primera instancia, este principio no parece cumplirse, ya que al observar el Universo obtenemos imágenes como la que se muestra en la figura 1.1, en donde se aprecia una variedad de objetos celestes, con distintas luminosidades y otras propiedades que no hacen válido el principio cosmológico. Pero desde el punto de vista estadístico, el principio comienza a aplicarse a escalas mayores de 100 Mpc, consideradas como escalas cosmológicas [2, 3].



Figura 1.1: La imagen obtenida por el telescopio espacial Hubble muestra el cúmulo global Messier 75 compuesto por diversos objetos celestes unidos por interacciones gravitacionales. Observando este tipo de imágenes es difícil pensar que el Universo pueda cumplir ser homogéneo e isotrópico [4].

Las observaciones cosmológicas son las herramientas principales para el estudio del Universo. A finales de los años noventa, Adam G. Riess, Brian P. Schmidt y Saul Perlmutter, observando Supernovas del Tipo Ia (SNIa), llegaron a la conclusión de que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada [5, 6]. Observaciones inde-

pendientes provenientes de la radiación de fondo de microondas (CMB) [7], oscilaciones acústicas de bariones (BAO) [8] y mediciones directas al parámetro de Hubble (OHD) respaldan dicha fase de expansión, siendo su explicación uno de los más grandes retos de la cosmología. Por otro lado, la astrónoma Vera Rubin, al analizar las curvas de rotación de galaxias, encontró las primeras evidencias de la existencia de un exceso de materia aún no observada [9]. Actualmente, las observaciones a galaxias espirales [10] y cúmulos de galaxias [11] proporcionan una evidencia directa de que el Universo contiene más materia de la observada. Para explicar la expansión acelerada y el exceso de materia aún no observada, se proponen dos componentes conocidos como energía oscura y materia oscura, respectivamente.

Hasta ahora, el modelo cosmológico más sencillo para entender dichos componentes es conocido como Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM). En este modelo, la energía oscura es un tipo de materia exótica, con presión negativa y descrita mediante la constante cosmológica (Λ). La materia oscura se describe como materia fría, lo que refiere a que la velocidad de sus partículas es mucho menor que la velocidad de la luz. Usando a Λ CDM como referencia, se estima que el 69% del contenido del Universo corresponde a la energía oscura, mientras que la materia oscura ocupa un 26%. El 5% restante corresponde a la materia observable comúnmente llamada bariónica y a la radiación, que generalmente se considera despreciable debido a que es del orden 10^{-4} en la época actual [12].

A pesar del éxito de Λ CDM para modelar el Universo a grandes escalas, el modelo presenta ciertos problemas, lo que causa que se cuestione el origen de la constante cosmológica. Un ejemplo de los problemas del modelo de concordancia son las diferencias en el valor de la constante de Hubble, obtenidas mediante observaciones provenientes de distintas épocas del Universo. Este problema es conocido como las tensiones de Hubble [13]. Aunado a esto, otro problema importante es el de la constante cosmológica, en donde la problemática radica en el valor de la constante cosmológica predicho por Λ CDM y la teoría cuántica de campos (QFT). En QFT, el valor de la constante cosmológica es obtenido mediante la energía cuántica de vacío, estimando un valor de $\rho_\Lambda \simeq 10^{72} \text{ GeV}^4$, en comparación con $\rho_\Lambda \simeq 10^{-47} \text{ GeV}^4$ obtenido por Λ CDM, teniendo así, una diferencia de aproximadamente ciento veinte órdenes de magnitud [14, 15]. De igual manera, a escalas galácticas se tienen problemas como el de los satélites faltantes, que consiste en el hecho de que las simulaciones numéricas basadas en Λ CDM predicen diez veces más galaxias enanas de las que sea han observado en los cúmulos de galaxias [16].

Debido a estos problemas, diversos modelos alternativos han sido propuestos, tal es el caso de los modelos con ecuaciones de estado parametrizadas. Entre estos modelos se encuentra ω CDM, en donde la ecuación de estado para la energía oscura es $\omega \neq -1$, siendo el caso más sencillo para una energía oscura dinámica. De manera similar, se tiene el modelo Chevallier–Polarski–Linder (CPL), en donde la ecuación de estado fenomenológica es $\omega(z) = \omega_0 + \omega_a z (1+z)^{-1}$ donde ω_0 y ω_a son constantes, y z el corrimiento al rojo [17]. Por otro parte, para explicar la materia oscura se han propuesto diversos candidatos. Desde el punto de vista de la física de partículas, se tienen los WISPs, partículas masivas que interactúan débilmente, y los axiones, partículas ultraligeras propuestas para resolver problemas de simetría en el modelo estándar de QFT [18, 19]. Por otro lado, desde una perspectiva cosmológica se proponen campos escalares [20] e incluso fluidos disipativos de materia. Estos últimos han sido de gran interés en los últimos años debido a que resuelven problemas como el de la constante cosmológica

y las tensiones en el parámetro de Hubble [21].

Los efectos disipativos son introducidos mediante viscosidades de dos tipos: de bulto ξ y de corte η . En épocas actuales, la viscosidad de corte, a diferencia de la de bulto, no contribuye en la evolución del Universo debido a que no satisface el principio cosmológico. Formalmente, la viscosidad de bulto es introducida a partir de la termodinámica fuera del equilibrio. Existen principalmente dos teorías para esto, el formalismo de Eckart [22] y el de Israel-Stewart-Hiscock (ISH) [23]. El formalismo de Eckart resulta ser el más sencillo, pero como consecuencia se tiene el problema de la causalidad, que consiste en que la velocidad de propagación de las perturbaciones es infinita. Por otra parte, la teoría de ISH resuelve el problema de la causalidad, pero su complejidad aumenta en gran medida, siendo tal, que solo se tiene solución analítica para ciertos casos. Debido a esto, el formalismo de Eckart es una buena aproximación, además, existen propuestas para resolver el problema de la causalidad [24]. En este contexto, algunas propuestas interesantes unifican la materia y energía oscura en un solo componente oscuro considerando viscosidades: constantes [25], polinomiales en función del corrimiento al rojo [26], hiperbólicas dependientes del parámetro de Hubble adimensional [27], entre otras. De igual manera, existen propuestas donde se considera que el Universo contiene más de un fluido. En [28] consideran tres componentes, un fluido viscoso de materia polvo que interactúa con un fluido perfecto de energía oscura; además, se considera el componente de radiación no interactuante. Otro ejemplo interesante es estudiado por [29], quienes proponen una aproximación para modelos de fluidos viscosos, en donde se puede introducir cualquier componente y tipo de viscosidad.

En este trabajo se estudian dos modelos de Universos. El primero se encuentra compuesto por un único fluido imperfecto de materia tipo polvo, mientras que el segundo considera dos componentes: un fluido imperfecto de materia tipo polvo y el clásico fluido perfecto de energía oscura. Los efectos disipativos para ambos escenarios son modelados mediante una viscosidad constante y el término polinomial función del corrimiento al rojo propuesto por [26]. Con la finalidad de acotar los parámetros libres de los modelos, se realiza un análisis Bayesiano basado en el método de cadenas de Markov Monte Carlo usando las observaciones provenientes de las mediciones directas del parámetro de Hubble y Supernovas del tipo Ia, compiladas en [30] y [31], respectivamente. Además, se reconstruyen los parámetros cosmográficos, el diagnóstico statefinder [32] y el diagrama $E^2 - (1+z)^3$ [33], con la finalidad de comparar los modelos disipativos con el modelo de concordancia Λ CDM.

El presente trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: en los capítulos 2 y 3 se abordan los conceptos básicos de cosmología y estadística, respectivamente. En el capítulo 4 se describe el modelo de concordancia Λ CDM y los modelos disipativos. El capítulo 5 se dedica a la explicación de las observaciones OHD y SNIa. Por último, en los capítulos 6 y 7 se abordan los resultados y las conclusiones del análisis a los modelos disipativos, respectivamente. A continuación se describe el planteamiento del problema, la justificación, la hipótesis y los objetivos de este trabajo.

1.1. Planteamiento del problema

Las observaciones cosmológicas indican que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada. El modelo estándar de la cosmología, Lambda Cold Dark Matter, explica dicha fase al introducir la constante cosmológica Λ . A pesar del éxito de Λ CDM para modelar el Universo a grandes escalas, el modelo presenta problemas al reproducir

las observaciones a escalas galácticas, tensiones en el valor de la constante de Hubble e incluso problemas directamente relacionados con la constante cosmológica [14, 15].

1.2. Justificación

El modelo cosmológico Λ CDM considera que el Universo se encuentra compuesto por un conjunto de fluidos perfectos que representan los componentes de materia oscura, energía oscura y radiación, respectivamente. Este modelo presenta problemas como el de la constante cosmológica y la tensiones en el valor del parámetro de Hubble. Sin embargo, estos problemas pueden ser solucionados al introducir efectos disipativos en la evolución del Universo [21].

Motivados por lo anterior, en este trabajo se estudia la evolución de dos distintos tipos de Universos considerando efectos disipativos. En primer lugar, se considera un Universo compuesto por un único fluido disipativo de materia tipo polvo. Por otro lado, se considera que el Universo está compuesto por dos componentes: un fluido imperfecto de materia y el clásico fluido perfecto de energía oscura. Los efectos disipativos, para cada Universo, son modelados mediante una viscosidad constante y un término polinomial función del corrimiento al rojo propuesto por [26].

1.3. Hipótesis

Si se considera un factor de viscosidad constante o polinomial en la evolución del Universo, los modelos cosmológicos con un único fluido o dos componentes, son igualmente compatibles con las observaciones cosmológicas que el modelo Λ CDM, al obtener un $\Delta AIC < 4$; además, reproducen los parámetros cosmográficos del modelo de concordancia con un nivel de confianza de 99.7% .

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar cuatro modelos cosmológicos disipativos mediante el ajuste de sus parámetros libres por medio del método de Cadenas de Markov Monte Carlo, usando observaciones provenientes de mediciones directas del parámetro de Hubble y Supernovas del Tipo Ia, con la finalidad de compararlos estadísticamente con el modelo de concordancia Λ CDM y recrear sus parámetros cosmográficos.

1.4.2. Objetivos particulares

- Estudiar la evolución del Universo compuesto por un fluido disipativo de materia tipo polvo, considerando una viscosidad constante y una polinomial, respectivamente; con el propósito de acotar los parámetros libres y reconstruir la dinámica de los parámetros cosmográficos.
- Analizar la evolución del Universo constituido por dos componentes, un fluido disipativo de materia tipo polvo y el clásico fluido perfecto de materia oscura, considerando una viscosidad constante y una polinomial, respectivamente; con la finalidad de estimar los parámetros libres del modelo y recrear su respectiva cosmografía.

Capítulo 2

Cosmología general

En este capítulo se estudian los conceptos básicos de la cosmología. En primer lugar, se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein considerando el principio cosmológico, se obtiene la ecuación de Friedmann y la ecuación de continuidad. Posteriormente, se explica la relación entre la ecuación de Friedmann, el parámetro de Hubble, el corrimiento al rojo y las densidades de materia del Universo. Finalmente, se abordan cantidades como la edad del Universo y los parámetros cosmológicos, que son útiles para comparar modelos.

2.1. Ecuación de Friedmann

La relatividad general es la teoría base de la cosmología, debido a su excelente descripción de las interacciones gravitacionales a grandes escalas. Las ecuaciones principales de la relatividad general son las ecuaciones de campo de Einstein definidas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, Λ es la constante cosmológica, $g_{\mu\nu}$ es la métrica y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento definido como

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

siendo p y ρ la presión y densidad respectivamente, $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la velocidad macroscópica del medio en coordenadas comóviles. En estas coordenadas se fija la posición de un objeto en un punto mientras el espacio se expande (figura 2.1).

El término $R_{\mu\nu}$ es el tensor Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} , \quad (2.3)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ son los símbolos de Christoffel, escritos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) , \quad (2.4)$$

y R es el escalar de Ricci definido como,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

que junto con el tensor Ricci representan la curvatura del espacio-tiempo.

Uno de los componentes principales de la ecuación de campo es la métrica $g_{\mu\nu}$, la cual describe la distancia física entre dos puntos y para propósitos de la cosmología debe considerar la homogeneidad, isotropía y expansión acelerada del Universo. La métrica que considera estas tres condiciones es la de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) definida como,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.6)$$

que en forma matricial,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

en donde $a(t)$ es el factor de escala que indica dependencia temporal entre la distancia relativa de dos puntos del universo (figura 2.1) y k la curvatura que determina la geometría del Universo y puede tomar tres valores, $k < 0$, $k = 0$ y $0 < k$, lo que corresponde a una geometría hiperbólica, plana y esférica, respectivamente. La métrica FLRW describe al Universo de manera isotrópica al no contener términos cruzados entre espacio y tiempo, por lo que no hay ninguna dirección privilegiada, la simetría esférica nos hace referencia a la homogeneidad.

El tensor de curvatura de Ricci para la métrica FLRW es

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

mientras que el escalar es

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.9)$$

La ecuación que describe la evolución del Universo es la ecuación de Friedmann. Para determinarla se parte de la ecuación de campo de manera que

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + \Lambda g_{00} = 8\pi G T_{00}, \quad (2.10)$$

sustituyendo el primer componente del tensor de Ricci y del tensor de energía-momento,

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1) \left[6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] + (-1)\Lambda = 8\pi G [(p + \rho) + p(-1)], \quad (2.11)$$

obteniendo finalmente,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.12)$$

la cual es la ecuación de Friedmann para un Universo homogéneo e isotrópico [18, 34].

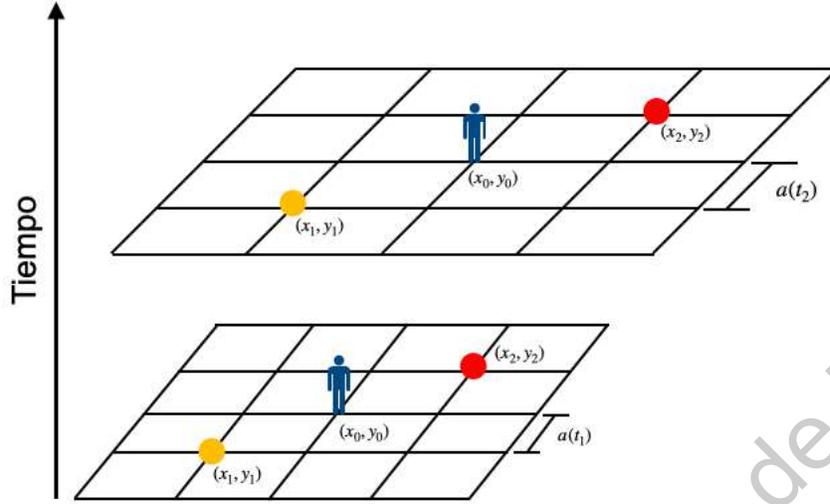


Figura 2.1: Representación gráfica de las coordenadas comóviles $\vec{r} = a(t)\vec{x}$. En la figura se muestran dos diagramas bidimensionales a distintos tiempos. Las coordenadas se mantienen constantes conforme pasa el tiempo, mientras que el factor de escala $a(t)$ se encarga de reescalar las distancias entre los distintos objetos.

2.2. Ley de Hubble

Las observaciones cosmológicas indican que las galaxias y cúmulos de galaxias a gran escala se están alejando unos de otros de tal manera que entre mayor es la distancia que los separa, mayor es la velocidad con la que se alejan, siendo la evidencia de la expansión acelerada del Universo. El astrónomo Edwin Hubble se dio cuenta de este fenómeno y demostró que la velocidad de alejamiento, comúnmente llamada velocidad de recesión, es proporcional a la distancia.

La ley de Hubble se define como

$$\vec{v} = H\vec{r}, \quad (2.13)$$

donde H es parámetro de Hubble.

La ecuación de Friedmann permite explicar el descubrimiento de Hubble al relacionar el factor de escala con el parámetro de Hubble, para ello se escribe la velocidad en la forma,

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|}\vec{r}. \quad (2.14)$$

Dado que el Universo es homogéneo, \vec{r} puede ser escrito en coordenadas comóviles de tal manera que

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.15)$$

donde la homogeneidad asegura que el factor de escala sea únicamente función del tiempo y \vec{x} es una coordenada fija en el espacio.

Al sustituir la ecuación (2.15) en (2.14) se tiene

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}|\vec{x}|}{a|\vec{x}}\vec{r}, \quad (2.16)$$

que se reduce a

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (2.17)$$

Al comparar las ecuaciones (2.13) y (2.17) se obtiene que la relación directa entre el parámetro de Hubble y el factor de escala es dada por

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.18)$$

que al sustituirse en la ecuación (2.12), la ecuación de Friedmann se compacta a la forma,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \Lambda, \quad (2.19)$$

obteniendo una forma directa de relacionar la ecuación de Friedmann con las observaciones cosmológicas actuales [18].

2.3. Corrimiento al rojo

Las velocidades de recesión de las galaxias son medidas a través del corrimiento al rojo, que básicamente es un efecto Doppler aplicado a la luz. El principio básico del efecto consiste en que las galaxias tienen un espectro de emisión que es bien conocido por los observadores, pero debido a que el Universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, las galaxias se alejan de nosotros, que como consecuencia origina que la longitud de onda de las líneas espectrales que se observan aumente tendiendo al rojo (figura 2.2).

El corrimiento al rojo se define como

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.20)$$

donde λ_e y λ_r son las longitudes de onda de emisión de las galaxias y las recibidas por los observadores, respectivamente.

Si una galaxia cercana tiene una velocidad de recesión v el corrimiento al rojo es

$$z = \frac{v}{c}, \quad (2.21)$$

donde c es la velocidad de la luz.

El corrimiento al rojo puede ser relacionado directamente con el factor de escala, para ello consideremos de la ley de Hubble que la velocidad relativa dv es

$$dv = H dr = \frac{\dot{a}}{a} dr. \quad (2.22)$$

Al considerar que los objetos se encuentran a una distancia cercana, podemos aplicar el efecto Doppler directamente considerando que el cambio de la longitud de onda entre la emisión y recepción se encuentra dada por

$$d\lambda = \lambda_r - \lambda_e, \quad (2.23)$$

con lo cual la ecuación (2.20) puede ser escrita como

$$dz = \frac{d\lambda}{\lambda_e}. \quad (2.24)$$

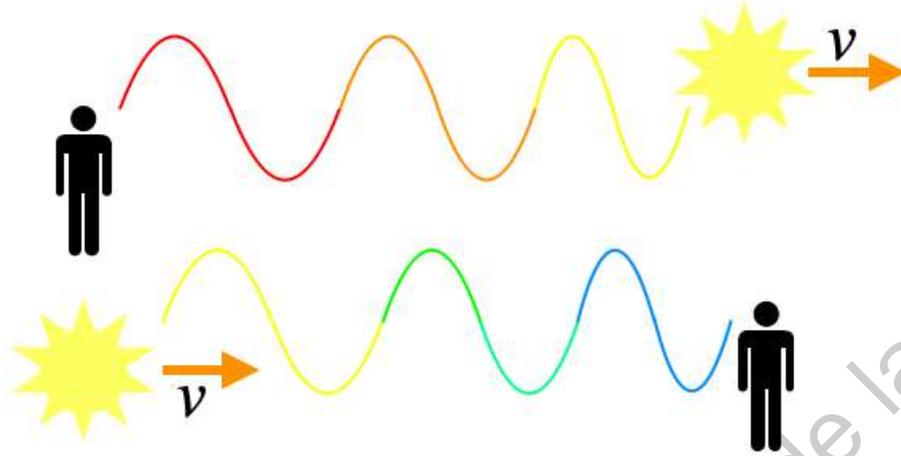


Figura 2.2: El efecto Doppler relativista de la luz consiste en el ensanchamiento o acortamiento en la longitud de onda de una fuente debido a su movimiento. El primer caso describe el corrimiento al rojo, en donde la fuente se aleja del observador lo que provoca que la longitud de onda observada tienda al color rojo. Por otro lado, el segundo caso es conocido como corrimiento al azul, en donde la fuente se acerca al observador y por consecuencia la longitud de onda detectada tiende al azul.

Comparando las ecuaciones (2.21) y (2.24) se obtiene

$$dv = \frac{d\lambda}{\lambda_e} c, \quad (2.25)$$

donde $d\lambda$ es siempre positivo dado que la longitud de onda aumenta. Considerando que el tiempo entre la emisión y recepción es dado por

$$dt = \frac{dr}{c}, \quad (2.26)$$

la ecuación (2.22) toma la forma de

$$dv = \frac{\dot{a}}{a} c dt = \frac{da}{a} c. \quad (2.27)$$

Igualando las ecuaciones (2.25) y (2.27) se llega a

$$\frac{d\lambda}{\lambda_e} = \frac{da}{a}. \quad (2.28)$$

Analizando las ecuaciones (2.27) y (2.28) se concluye que

$$\lambda \propto dt \propto a. \quad (2.29)$$

Ahora, consideremos que un rayo de luz no recorre distancia alguna en el espacio-tiempo, lo cual se representa como

$$ds = 0. \quad (2.30)$$

Por otro lado, si se considera que los rayos de luz se propagan únicamente en dirección radial, se tiene

$$d\theta = d\phi = 0. \quad (2.31)$$

Usando las ecuaciones (2.6), (2.30) y (2.31), se tiene

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} = 0, \quad (2.32)$$

lo cual puede ser reescrito como

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.33)$$

Para obtener el tiempo en el que el rayo de luz va de $r = 0$ a $r = r_0$ se integra la ecuación anterior, teniendo

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.34)$$

donde t_e y t_r son el tiempo de emisión y recepción del rayo de luz, respectivamente. Al considerar que el rayo de luz fue emitido en un lapso de tiempo pequeño, las galaxias se mantienen en las mismas coordenadas y los tiempos de emisión y recepción cambian de tal manera que la ecuación (2.34) es reescrita como

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.35)$$

Igualando las ecuaciones (2.34) y (2.35) se obtiene,

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.36)$$

y al reorganizar los límites se tiene

$$\int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.37)$$

Los intervalos de integración de los tiempos de emisión y recepción son iguales, por lo que la ecuación (2.37) se reduce a

$$\frac{dt_r}{a(t_r)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}, \quad (2.38)$$

y al utilizar la relación obtenida en la ecuación (2.29) se tiene

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (2.39)$$

Al comprar las ecuaciones (2.20) y (2.39) se obtiene

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = 1 + z, \quad (2.40)$$

donde t_0 es el tiempo en la época actual y por definición $a(t_0) = 1$, lo cual reduce la ecuación anterior a

$$a(z) = \frac{1}{1 + z}, \quad (2.41)$$

siendo esta ecuación la relación directa entre el factor de escala y el corrimiento al rojo [18].

2.4. Ecuación de continuidad

La ecuación de Friedmann por sí sola no es capaz de modelar el Universo, para ello se necesita de una ecuación que brinde la información de cómo la densidad ρ evoluciona respecto al tiempo, dicha ecuación es conocida como la ecuación de continuidad y puede ser obtenida directamente del tensor de energía-momento.

Para encontrarla, reescribimos el tensor de energía-momento, ecuación (2.2), en la forma

$$T_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} . \quad (2.42)$$

La ecuación de continuidad es obtenida a través de la conservación de la energía, expresada como la divergencia covariante del tensor de energía-momento:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 , \quad (2.43)$$

aplicando la divergencia se tiene

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} . \quad (2.44)$$

Al calcular las componentes espaciales $i = 1, 2, 3$ en la ecuación (2.44), se obtienen las soluciones triviales

$$\nabla_{\mu} T_i^{\mu} = 0 . \quad (2.45)$$

La ecuación de continuidad es obtenida de la componente temporal $\nu = 0$,

$$\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = \partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_0^{\alpha} - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} . \quad (2.46)$$

Sustituyendo los componente no nulos en la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 , \quad (2.47)$$

que en términos del parámetro de Hubble se reduce a

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 , \quad (2.48)$$

siendo la forma más común de la ecuación de continuidad.

La contribución al comportamiento de la densidad se debe a los dos términos entre paréntesis, el primero representa la dispersión de la densidad debido a la expansión del Universo, mientras que el segundo corresponde a la pérdida de energía debido al trabajo realizado por la presión para la expansión, cabe resaltar que dicha pérdida de energía se transforma en energía potencial gravitacional [18, 34].

2.5. Contenido del Universo

La ecuación de continuidad contiene la información de como evolucionan los componentes del Universo respecto al tiempo, pero para poder resolverla es necesario contar con una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad. Por lo general se consideran dos componentes principales de materia: la tipo polvo, la cual se refiere a toda aquella no relativista, y la radiación que al contrario de la materia tipo polvo, estas partículas se mueven a la velocidad de la luz.

2.5.1. Materia tipo polvo

La materia tipo polvo, como ya se mencionó, en el contexto cosmológico hace referencia a toda aquella que se mueve a velocidades mucho menores a la de la luz, además, cumple la propiedad de que ejerce una presión insignificante ($p = 0$). Un Universo sin presión es una buena aproximación, debido a que a grandes escalas los átomos se encuentran separados y sus interacciones se dan raramente.

Al conocer la presión que ejerce la materia podemos resolver la ecuación de continuidad para dicho componente. Sustituyendo la presión de la materia en la ecuación (2.47) se tiene

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0. \quad (2.49)$$

Reorganizando la ecuación anterior se llega a

$$\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} = -\frac{3}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.50)$$

lo cual se simplifica a la expresión

$$\int \frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3 \int \frac{da}{a}. \quad (2.51)$$

Integrando en ambos lados se obtiene

$$\ln \rho_m = -3 \ln a + \rho_{m0}, \quad (2.52)$$

que es igual a

$$\ln \rho_m = \ln a^{-3} + \rho_{m0}. \quad (2.53)$$

Finalmente, aplicando la función exponencial e se obtiene

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (2.54)$$

donde ρ_{m0} es la densidad de materia en nuestros días.

La ecuación (2.54) hace referencia a que la densidad de materia disminuye proporcionalmente al volumen del Universo que se encuentra en expansión [18].

2.5.2. Radiación

La radiación es la clase de materia que naturalmente se mueve a la velocidad de la luz, su energía cinética da como resultado una presión que puede ser obtenida a través de las teorías clásicas, dicha presión toma el valor $p = \rho/3$, de manera similar al introducir este valor en la ecuación de continuidad, ecuación (2.47), se obtiene

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_r + \frac{1}{3}\rho_r \right) = 0, \quad (2.55)$$

que se reduce a

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0. \quad (2.56)$$

Al despejar la ecuación anterior se llega a

$$\frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dt} = -\frac{4}{a} \frac{da}{dt}, \quad (2.57)$$

que equivale a la integral

$$\int \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \int \frac{da}{a}, \quad (2.58)$$

cuya solución resulta ser

$$\rho_r = \rho_{r0} a^{-4}, \quad (2.59)$$

siendo ρ_{r0} la densidad de radiación actual [18].

2.6. Parámetros de densidad

Las observaciones cosmológicas modernas indican que el Universo tiene una geometría plana, $k = 0$ [12]. Para que esto se cumpla en la ecuación (2.19) es necesario que para cualquier H exista un valor especial de la densidad. Dicha densidad es conocida como “densidad crítica”, y se define como

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.60)$$

Es de suma importancia aclarar que $\rho_c(t)$ no es la densidad verdadera del Universo debido a que su curvatura no es necesariamente plana, pero es de utilidad para establecer una escala natural para la densidad, de tal manera que en lugar de reportar el valor de la densidad ρ se considera el valor adimensional de la misma, dado por

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}, \quad (2.61)$$

donde el subíndice i denota el componente (materia, radiación, entre otros). De manera similar el valor de la densidad actual se denota como $\Omega_{i0} = \rho_{i0}/\rho_c$ con la densidad crítica actual dada por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.62)$$

donde H_0 es la constante de Hubble [18].

Actualmente las mediciones obtenidas por [12] indican que $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ Km/s/Mcp, siendo esta cantidad la velocidad de expansión del Universo en nuestros días.

2.7. Edad del Universo

Una cantidad importante que puede ser inferida a partir de los modelos cosmológicos es la edad del Universo t_A . La expresión para calcular la edad del Universo puede ser obtenida a partir de parámetro de Hubble en términos del factor de escala, ecuación (2.18), y de la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, ecuación (2.41). Expresando el parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo se obtiene

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.63)$$

Aplicando separación de variable se obtiene la integral

$$\int_0^{t_A} dt = \int_\infty^0 -\frac{dz}{(1+z)H(z)}, \quad (2.64)$$

de donde se obtiene la expresión para la edad del Universo

$$t_A = \int_0^\infty \frac{1}{H(z)(1+z)} dz, \quad (2.65)$$

la cual depende directamente del parámetro de Hubble, por lo que para cada modelo cosmológico se estimará un t_A diferente [19]. Según [12], se estima que el Universo tiene una edad de 13.787 Gyrs.

2.8. Parámetros cosmográficos

El Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada. El parámetro de Hubble representa la velocidad de expansión, pero ¿qué cantidad nos brinda la información del cambio de la velocidad en el tiempo? Para encontrarla expandimos en serie de Taylor el factor de escala respecto a un tiempo t' alrededor de t ,

$$\begin{aligned} a(t') = & a(t) + \dot{a}(t) [t' - t] + \frac{1}{2!} \ddot{a}(t) [t' - t]^2 + \\ & + \frac{1}{3!} \dddot{a}(t) [t' - t]^3 + \frac{1}{4!} \dots + \frac{1}{5!} \frac{d^5}{dt^5} a(t) [t' - t]^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

dividendo entre el $a(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{a(t')}{a(t)} \approx & \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} [t' - t] + \frac{1}{2!} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} [t' - t]^2 + \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\dddot{a}(t)}{a(t)} [t' - t]^3 + \frac{1}{4!} \frac{\dots}{a(t)} + \frac{1}{5! a(t)} \frac{d^5}{dt^5} a(t) [t' - t]^5. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Cada término de la ecuación (2.67) se encuentra relacionado directamente con un parámetro cosmográfico, los cuales son útiles para describir la dinámica del Universo y sirven como método de comparación entre modelos. El primer término de la aproximación contiene el ya conocido parámetro de Hubble $H(t)$, el segundo se encuentra relacionado con el parámetro que describe la aceleración, conocido como parámetro de desaceleración

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{a} H^{-2}, \quad (2.68)$$

que puede tomar tres valores: para $q(t) > 0$ el Universo se encuentra en desaceleración, $q(t) = 0$ en una fase estacionaria y cuando $q(t) < 0$ la aceleración se hace presente. El tercer parámetro cosmográfico es conocido como jerk,

$$j(t) = \frac{\dddot{a}}{a} H^{-3}, \quad (2.69)$$

el cual brinda información sobre el comportamiento de la energía oscura. Este parámetro es interesante porque brinda una clara distinción con el modelo Λ CDM, siendo su valor $j(z) = 1$.

Por último se tienen los parámetros snap,

$$s(t) = \frac{\dots}{a} H^{-4}, \quad (2.70)$$

y lent

$$l(t) = \frac{1}{a} \frac{d^5 a}{dt^5} H^{-5}, \quad (2.71)$$

para los cuales no se tiene una interpretación física concreta, pero sirven como contraste entre modelos cosmológicos [18].

Los parámetros pueden ser expresado en términos del corrimiento al rojo usando la relación (2.41), con lo cual se tiene

$$q(z) = \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH(z)}{dz} - 1, \quad (2.72)$$

$$j(z) = q(z) + 2q^2(z) + (1+z) \frac{dq(z)}{dz}, \quad (2.73)$$

$$s(z) = j(z) - 3j(z)[1+q(z)] - (1+z) \frac{dj(z)}{dz}, \quad (2.74)$$

$$l(z) = s(z) - 4s(z)[1+q(z)] - (1+z) \frac{ds(z)}{dz}. \quad (2.75)$$

En $z = 0$ los parámetros cosmográficos toman su valor en la época actual, siendo representados por $q(0) = q_0$, $j(0) = j_0$, $s(0) = s_0$ y $l(0) = l_0$ [35].

2.9. Diagnóstico de estado

2.9.1. Statefinder

Con la finalidad de comparar los modelos cosmológicos, se utiliza el diagnóstico geométrico statefinder, el cual nos brinda información sobre las propiedades de la energía oscura. El statefinder se encuentra construido por medio de los parámetros cosmográficos

$$r = j(z), \quad s = \frac{r(z) - 1}{3(q(z)) - 1/2}, \quad (2.76)$$

donde $q(z)$ y $j(z)$ son los parámetros de desaceleración y jerk, respectivamente. Es de suma importancia resaltar que en el diagnóstico statefinder, el modelo de referencia Λ CDM es un punto en las coordenadas $\{1, 0\}$ [32].

2.9.2. Gráfica $E^2(z) - (1+z)^3$

Una propuesta interesante para comparar modelos es la que se presenta en [33], en donde se gráfica el parámetro de Hubble adimensional E^2 respecto a $(1+z)^3$ como se muestra en la figura (2.3). Este método permite clasificar la ecuación de estado sin involucrarla directamente, de tal manera que se puede saber si $\omega > -1$, lo que corresponde a modelos de quintaesencia, o si $\omega < -1$, la cual es conocida como la zona fantasma.

Para los modelos que tienen una ecuación de estado en la zona fantasma, el gráfico muestra que el parámetro de Hubble diverge para $z < 0$, mientras que para los modelos de quintaesencia $E \rightarrow 0$. Ambos casos son comparados con el modelo de concordancia Λ CDM, el cual tiene una ecuación de estado $\omega = -1$ para la energía oscura.

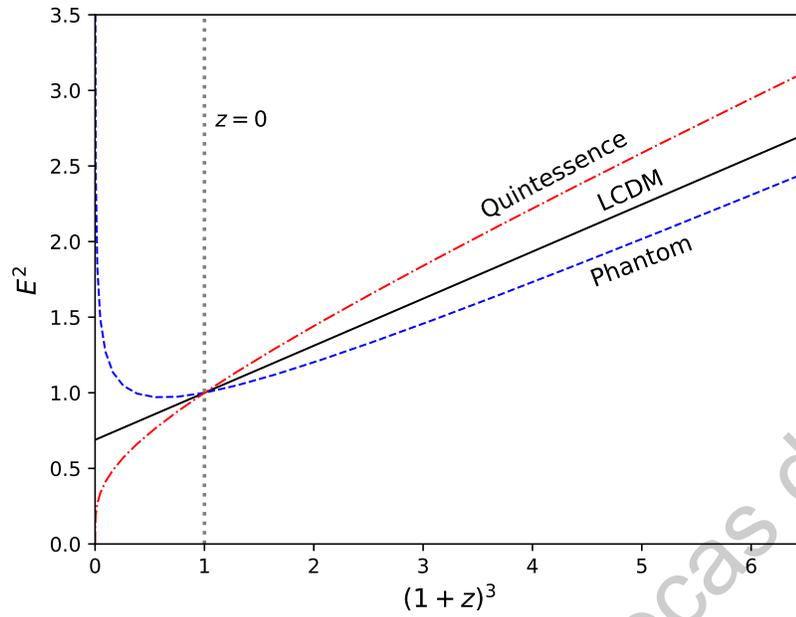


Figura 2.3: Comportamiento del parámetro de Hubble adimensional E^2 respecto a $(1+z)^3$. Los modelos por encima de Λ CDM presentan una ecuación de estado $\omega > -1$, comportándose como modelos de quintaesencia, mientras que los modelos por debajo de Λ CDM tiene una ecuación de estado $\omega < -1$ siendo modelos fantasmas [33].

Capítulo 3

Introducción a la estadística

En este capítulo se describen los métodos estadísticos usados para el análisis de modelos. En primera instancia, se explica el método de maximización de la función verosimilitud y el método de cadenas de Markov Monte Carlo para la acotación de parámetros. Por otro lado, para la comparación estadística de los modelos se define el criterio de información de Akaike y el criterio de información Bayesiano.

3.1. Estimación de máxima verosimilitud

Uno de los métodos más usados para la estimación de los parámetros libres es la maximización de la función verosimilitud, definida como

$$\mathcal{L}(z|\theta) = \prod_{i=1}^n f(z_i, \theta), \quad (3.1)$$

donde f representa la función de densidad de probabilidad, z_i las mediciones independientes y θ los parámetros libres del modelo.

Considerando que los datos no se encuentran correlacionados, las mediciones pueden seguir una distribución normal,

$$f(z_i, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (3.2)$$

con un valor medio \bar{y}_i y una desviación estándar σ_i .

Sustituyendo la ecuación (3.2) en (3.1), la función verosimilitud toma la forma

$$\mathcal{L}(z|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es la función objetivo a maximizar. En la práctica, trabajar con la función verosimilitud puede resultar complicado. Debido a esto, suele ser más sencillo maximizar el logaritmo natural de la función verosimilitud.

Aplicando logaritmo natural a la ecuación (3.3) se obtiene

$$\ln \mathcal{L}(z|\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln 2\pi\sigma_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.4)$$

El primer término de la ecuación (3.4) resulta ser una constante, ya que no depende de los parámetros libres del modelo y puede ser descartada debido a que no contribuye en

el criterio de la primera derivada con el cual se encuentran los máximos y mínimos de una función. Considerando lo anterior, la ecuación (3.4) se reduce a

$$\ln \mathcal{L}(z|\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.5)$$

El término restante contiene la distribución ji-cuadrada, definida como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6) en (3.5), se obtiene

$$\chi^2 \propto -\ln \mathcal{L}(z|\theta). \quad (3.7)$$

A partir de la expresión anterior se concluye que maximizar el logaritmo natural de la función de verosimilitud es equivalente a minimizar la función ji-cuadrada.

La ecuación (3.2) considera que los datos no se encuentran correlacionados. La distribución normal que considera correlación en la muestra de datos es definida como

$$f(z, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{Cov}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}] \mathbf{Cov}^{-1} [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}]^T}, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{Cov} es la matriz de covarianza, $[\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}]$ y $[\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}]^T$ son los vectores fila y columna que contiene las diferencias entre el valor predicho por el modelo y el observado.

Considerando la ecuación (3.8), la función de verosimilitud para este caso es

$$\mathcal{L}(z|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{Cov}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}] \mathbf{Cov}^{-1} [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}]^T}, \quad (3.9)$$

mientras que la función ji-cuadrada se define como

$$\chi^2 = [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}] \mathbf{Cov}^{-1} [\mathbf{y}(z, \theta) - \mathbf{y}]^T. \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.10) son las funciones objetivo a minimizar, en donde los parámetros libres que mejor ajustan a los datos son con los cuales estas funciones alcanzan su valor mínimo [36, 37].

3.2. Inferencia bayesiana

La inferencia estadística tiene como uno de sus principales objetivos la estimación de los parámetros libres de un modelo a partir de una muestra de datos. Existen dos aproximaciones, la frecuentista y la bayesiana. La inferencia frecuentista considera que la probabilidad solo puede ser asignada a eventos que pueden ser replicados, por lo que los parámetros e hipótesis son constantes. Por otro lado, en la inferencia bayesiana, la probabilidad puede ser asignada a cualquiera parámetro o hipótesis [36, 37].

La inferencia bayesiana se basa en obtener la distribución posterior $f(\theta|z)$, a través del teorema de bayes definido como

$$f(\theta|z) = \frac{\mathcal{L}(z|\theta)\pi(\theta)}{c}, \quad (3.11)$$

donde $\mathcal{L}(z|\theta)$ es la función verosimilitud, $\pi(\theta)$ es la distribución de probabilidad a priori y c es la constante de normalización

$$c = \int_{\theta} \mathcal{L}(z|\theta)\pi(\theta)d\theta. \quad (3.12)$$

La distribución a priori $\pi(\theta)$ es de suma importancia en la inferencia bayesiana debido a que contiene la información que se conoce sobre los parámetros θ previo al análisis Bayesiano. ¿Cómo afecta la distribución a priori en la maximización del logaritmo de la función verosimilitud? Para responder esta pregunta se aplica el logaritmo natural a la probabilidad posterior, ecuación (3.11),

$$\ln f(\theta|z) = \ln \mathcal{L}(z|\theta) + \ln \pi(\theta) - \ln c. \quad (3.13)$$

El primer término del logaritmo de la distribución posterior es el logaritmo de la función verosimilitud, ecuación (3.5), el tercer término es el logaritmo de la constante de normalización, el cual puede ser depreciado por el criterio de la primera derivada. El término $\ln \pi(\theta)$ corresponde a la contribución de la distribución a priori y depende de qué tipo de distribución se proponga para los parámetros.

Comenzamos considerando una distribución a priori uniforme o plana, $U \sim [a, b]$, donde a y b son los límites de un intervalo en donde cada punto dentro de este rango tiene la misma probabilidad de ocurrir.

La función a priori para este caso es

$$\pi(\theta) \propto c, \quad (3.14)$$

que al sustituirla en el logaritmo de la distribución posterior, ecuación (3.13), se obtiene

$$\ln f(\theta|z) = \ln \mathcal{L}(z|\theta) + \ln c. \quad (3.15)$$

A partir de la ecuación (3.15) y considerando el criterio de la primera derivada, se concluye que una distribución a priori plana no contribuye en la maximización del logaritmo de la función verosimilitud debido a que es una constante. Sin embargo, la distribución uniforme delimita el rango de búsqueda del valor de los parámetros con los cuales el logaritmo de la función verosimilitud toma su máximo.

Ahora, si se considera una distribución gaussiana, $\text{gauss} \sim (\mu, \sigma)$, donde μ y σ son la media y la desviación de la distribución, la distribución a priori para este caso es

$$\pi(\theta) \propto e^{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.5) y (3.16) en la ecuación (3.13), se llega a

$$\ln f(\theta|z) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \frac{(\theta - \mu)^2}{\sigma^2}. \quad (3.17)$$

Analizando la ecuación (3.17) se puede observar que las distribuciones a priori gaussianas resultan ser un factor de peso estadístico al momento de maximizar el logaritmo de la función verosimilitud. Cabe resaltar que esta conclusión se aplica para cualquier tipo de distribución a priori cuya contribución no sea una constante.

La función objetivo (3.17) puede ser sustituida con la distribución ji-cuadrada considerando su relación con el logaritmo de la función verosimilitud, ecuación (3.7), obteniendo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y(z_i, \theta) - \bar{y}_i]^2}{\sigma_i^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\sigma^2}. \quad (3.18)$$

De igual manera, en la ecuación (3.18) se confirma que las funciones a priori gaussianas resultan ser un factor de peso en el momento de minimizar ji-cuadrada [36, 37].

3.3. Métodos de cadenas de Markov Monte Carlo

Una de las herramientas más exitosas para la estimación de parámetros a partir de la estadística bayesiana son los métodos de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC). Estos métodos se basan en la simulación Monte Carlo, donde se resuelven problemas a partir de la generación de números aleatorios, y en las Cadenas de Markov, las cuales son un conjunto de variables aleatorias cuya probabilidad $P(\theta_i)$ en un tiempo t_i únicamente depende de la estado anterior θ_{i-1} en un tiempo inmediato anterior t_{i-1} [36, 37].

El algoritmo de Metropolis - Hasting es uno de los métodos MCMC más comunes para la estimación de parámetros de un modelo [38, 39]. El algoritmo se basa en la consideración de una distribución $q(\theta_{i-1}|\theta_i)$, conocida como distribución propuesta o de transición, que mapea el espacio de los parámetros θ .

Las cadenas de Markov son generadas con el siguiente algoritmo:

1. Se selecciona un valor inicial θ_0 como punto de partida.
2. Posteriormente, para $i = 1, 2, \dots, n$, se genera un valor aleatorio θ_i como candidato para ser incluido en las cadenas.
3. Se calcula la probabilidad de aceptación mediante

$$\alpha = \min [r(\theta_i, \theta_{i-1}), 1] , \quad (3.19)$$

donde $r(\theta_i, \theta_{i-1})$ es el radio de las densidades posteriores definido como

$$r(\theta_i, \theta_{i-1}) = \frac{f(\theta_i|z)q(\theta_{i-1}|\theta_i)}{f(\theta_{i-1}|z)q(\theta_i|\theta_{i-1})} \quad (3.20)$$

donde $f(\theta_i|z)$ y $q(\theta_{i-1}|\theta_i)$ son la distribución posterior y la distribución propuesta evaluada en el valor candidato θ_i , mientras que $f(\theta_{i-1}|z)$ y $q(\theta_i|\theta_{i-1})$ son las mismas funciones, pero evaluadas en el estado anterior θ_{i-1} .

4. Para aceptar o rechazar a θ_i se genera $U \sim (0, 1)$ y se sigue la condición

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_i & \text{si } \alpha < U \\ \theta_{i-1} & \text{si } \alpha > U \end{cases} . \quad (3.21)$$

Una ventaja del algoritmo de Metropolis - Hasting es la consideración del radio de las densidades posteriores $r(\theta_i, \theta_{i-1})$, debido a que al realizar el cociente se elimina la dependencia de la constante de normalización de la densidad posterior, ecuación (3.12), que en ocasiones resulta ser un problema por la dificultad para ser calculada.

Finalmente, al concluir el algoritmo, los valores que minimizan o maximizan las funciones objetivos resultan ser aquellos cuya probabilidad de ser observados resulta ser la más alta en las densidades posteriores generadas a partir de la cadenas obtenidas [36, 37].

3.4. Selección de modelos

En la selección de modelos se busca encontrar el modelo más simple que reproduzca las observaciones de manera correcta. Para ello es útil usar distintos criterios que brinden información de los modelos con la finalidad de compararlos. Entre los más usados se encuentra el criterio de información de Akaike y el criterio de información Bayesiano [36].

3.4.1. Criterio de información de Akaike

El criterio de información de Akaike (AIC), es un indicador estadístico que penaliza al modelo según el número de parámetros libres que tenga, y se encuentra definido como

$$AIC = \chi^2 + 2k, \quad (3.22)$$

donde k es el número de parámetros del modelo [40, 41]. Para comparar distintos modelos respecto a uno de referencia es conveniente definir

$$\Delta AIC = AIC_m - AIC_r \quad (3.23)$$

donde AIC_r es el valor del criterio para el modelo de referencia y AIC_m el valor para el modelo propuesto. Usando el valor ΔAIC se puede brindar información de que tan compatibles es un modelo a las observaciones con respecto a un modelo de referencia.

Según [42] se puede concluir que:

- Si $\Delta AIC < 4$, los datos son igualmente compatibles para ambos modelos.
- Cuando se tiene que $4 < \Delta AIC < 10$, los datos aún son compatibles con el modelo de prueba, pero de menor manera con respecto al de referencia.
- Por último, cuando $10 < \Delta AIC$, los datos no son compatibles con el modelo de prueba.

3.4.2. Criterio de información Bayesiano

El criterio de información Bayesiano (BIC), además de penalizar los modelos según su número de parámetros libres, lo hace considerando el número de datos de las muestras. El BIC se define como

$$BIC = \chi^2 + k \ln(N), \quad (3.24)$$

donde N es la cantidad de datos de la muestra [43].

Al igual que para el AIC, se define la cantidad

$$\Delta BIC = BIC_m - BIC_r, \quad (3.25)$$

donde BIC_m y BIC_r es el criterio BIC para el modelo propuesto y el de referencia, respectivamente.

El valor del ΔBIC se puede encontrar en los siguientes casos:

- Cuando $\Delta BIC < 2$, no existe evidencia en contra del modelo propuesto.
- Si $2 < \Delta BIC < 6$, existe evidencia en contra del modelo propuesto.
- Por último, cuando $6 < \Delta BIC$, la evidencia en contra del modelo propuesto es fuerte.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 4

Modelos cosmológicos

En este capítulo se describen los modelos cosmológicos que se estudian en este trabajo. Primero, se explica el modelo estándar de la cosmología conocido como Λ -Cold Dark Matter. Posteriormente, se plantean los modelos disipativos, en donde el primer modelo se encuentra compuesto por un único fluido imperfecto de materia tipo polvo, mientras que el segundo, consiste en el modelo Λ -Cold Dark Matter en presencia de viscosidades.

4.1. Modelo estándar de la cosmología Λ CDM

La teoría de la relatividad general fue desarrollada creyendo que el Universo era estático, pero esto no era posible debido a que la materia se atrae gravitacionalmente; además, ninguna de las soluciones que se encontraron correspondían a un Universo estático. Para solucionar este problema Einstein propuso la famosa constante cosmológica Λ . La ecuación de Friedmann que considera dicha constante se encuentra dada por

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.1)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$.

La constante cosmológica puede ser descrita como un fluido al definir $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa^2$, reescribiendo la ecuación de Friedmann como

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (4.2)$$

donde $\rho = \rho_m + \rho_r$, además, según [12] el Universo tiene una curvatura plana ($k = 0$).

Los parámetros ρ_m y ρ_r corresponden a las ecuaciones (2.54) y (2.59), respectivamente. Para ρ_Λ , la ecuación de estado es $p = -\rho$ debido a su carácter repulsivo. Considerando lo anterior la ecuación de continuidad para la constante cosmológica es

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \quad (4.3)$$

por lo que la solución a esta ecuación resulta ser una constante denotada como ρ_Λ . Sustituyendo las ecuaciones (2.54) y (2.59) en (4.2), se tiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_\Lambda \right). \quad (4.4)$$

De la ecuación (2.62) se obtiene que

$$\frac{\kappa^2}{3} = \frac{H_0^2}{\rho_c}, \quad (4.5)$$

con lo cual, la ecuación (4.4) puede ser expresada como

$$H^2 = \frac{H_0^2}{\rho_c} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_\Lambda \right), \quad (4.6)$$

en donde usando la relación $\Omega_{i0} = \rho_{i0}/\rho_c$ se obtiene la ecuación de Friedmann con densidades de materia adimensionales

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \Omega_\Lambda \right). \quad (4.7)$$

Finalmente, usando la relación del factor de escala con el corrimiento al rojo, ecuación (2.41), se obtiene el modelo de concordancia en términos de z ,

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda]. \quad (4.8)$$

La ecuación anterior es la forma más conocida del modelo Λ CDM, que al evaluarlo en $z = 0$ se obtiene la constricción

$$\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_\Lambda = 1, \quad (4.9)$$

con lo cual se puede reducir el número de parámetros del modelo. Tomando de referencia este modelo se estima que $\Omega_\Lambda = 0.69$, $\Omega_{m0} = 0.31$ y $\Omega_{r0} = 10^{-4}$ [12].

4.2. Fluidos disipativos

Una alternativa para el modelo de concordancia Λ CDM, que modela el Universo con fluidos perfectos, es considerar efectos disipativos en la evolución del Universo debido a viscosidades de bulto ξ . Las viscosidades de bulto son introducidas siguiendo el formalismo termodinámico propuesto por Eckart [22].

4.2.1. Fluido de materia disipativo (v-CDM)

Comenzamos considerando un Universo modelado con la métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, ecuación (2.6), con geometría plana ($k = 0$) y $\Lambda = 0$. Para este caso la ecuación de Friedmann resulta ser

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho, \quad (4.10)$$

El componente Π , que contiene la viscosidad de bulto, es introducido como una presión en el tensor de energía-momento, obteniendo

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + (p + \Pi) (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu). \quad (4.11)$$

El tensor de energía-momento viscoso tienen la misma forma que el tensor para un fluido perfecto, por lo que la ecuación de continuidad viscosa es

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p + \Pi) = 0. \quad (4.12)$$

Para este modelo se considera un único fluido oscuro de materia tipo polvo, el cual tienen como ecuación de estado $p = 0$. Debido a esto, la ecuación de continuidad se reduce a

$$\dot{\rho} + 3H\rho = -\Pi, \quad (4.13)$$

donde el componente viscoso se define como

$$\Pi = -3\xi H, \quad (4.14)$$

debido a que en la mecánica de fluidos los factores disipativos son proporcionales a la velocidad, la cual en este caso es la velocidad de expansión del Universo medida por $H(z)$ [25, 26, 27].

Al sustituir la ecuación (4.14) en la ecuación (4.13) se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 9\xi H^2. \quad (4.15)$$

A partir de la ecuación (4.10) y usando la densidad crítica se define el parámetro adimensional de Hubble, como

$$E^2(t) = \frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (4.16)$$

que al diferencial respecto al tiempo,

$$2E \frac{dE}{dt} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_c}. \quad (4.17)$$

De la ecuación (4.15) se obtiene que

$$\dot{\rho} = -3H\rho + 9\xi H^2, \quad (4.18)$$

con el cual, al sustituirlo en la ecuación (4.17), se obtiene

$$2E \frac{dE}{dt} + 3H \frac{\rho}{\rho_c} = 9 \frac{\xi H^2}{\rho_c}, \quad (4.19)$$

que puede ser reescrito usando la relación (4.16) como

$$2E \frac{dE}{dt} + 3H_0 E^3 = 9 \frac{\xi E^2 H_0^2}{\rho_c}, \quad (4.20)$$

reduciéndose a

$$2 \frac{E}{H_0} \frac{dE}{dt} + 3E^3 = 9\lambda(t)E^2, \quad (4.21)$$

donde se define la viscosidad adimensional como

$$\lambda = \frac{\xi H_0}{\rho_c}. \quad (4.22)$$

La ecuación anterior puede ser escrita en términos del factor de escala. Para ello, se aplica la regla de la cadena, con lo que se llega a

$$2 \frac{E}{H_0} \frac{dE}{da} \dot{a} + 3E^3 = 9\lambda(a)E^2. \quad (4.23)$$

Sustituyendo \dot{a} , usando $H = \dot{a}/a = EH_0$, la ecuación anterior se reescribe como

$$2\frac{E}{H_0}\frac{dE}{da}EH_0a + 3E^3 = 9\lambda(a)E^2, \quad (4.24)$$

lo que se reduce a

$$2a\frac{dE}{da} + 3E = 9\lambda(a). \quad (4.25)$$

De igual manera, con la finalidad de poder comparar el modelo con las observaciones cosmológicas, la ecuación (4.25) puede ser expresada en términos del corrimiento al rojo.

Usando la relación (2.41) y aplicando la regla de la cadena, la ecuación (4.25) toma la forma

$$2\frac{1}{(1+z)}\frac{dE}{dz}\frac{dz}{da} + 3E = 9\lambda(z), \quad (4.26)$$

lo cual equivale a

$$-2\frac{1}{(1+z)}\frac{dE}{dz}(1+z)^2 + 3E = 9\lambda(z), \quad (4.27)$$

y finalmente

$$-2(1+z)\frac{dE}{dz} + 3E = 9\lambda(z). \quad (4.28)$$

La ecuación de Friedmann para este caso es obtenida al resolver la ecuación diferencial para cierta viscosidad $\lambda(z)$ [26].

4.2.1.1. Viscosidad polinomial (vp-CDM)

Para obtener la ecuación de Friedmann, se considera el término polinomial como una función del corrimiento al rojo propuesto en [26], definido como

$$9\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_1(1+z)^n, \quad (4.29)$$

donde λ_0, λ_1 y n son parámetros libres que se obtienen mediante el ajuste a las observaciones cosmológicas.

Sustituyendo el término polinomial en la ecuación (4.28), la ecuación Friedmann es obtenida al resolver

$$-2(1+z)\frac{dE}{dz} + 3E = \lambda_0 + \lambda_1(1+z)^n. \quad (4.30)$$

La solución de la ecuación diferencial puede ser encontrada por medio del método de coeficientes indeterminados. La solución general es dada por

$$E = E_h + E_p, \quad (4.31)$$

donde E_h y E_p son la soluciones para la ecuación homogénea y particular, respectivamente.

La ecuación homogénea es

$$-2(1+z)\frac{dE}{dz} + 3E = 0, \quad (4.32)$$

la cual puede ser resuelta aplicando el método de separación de variables,

$$\int \frac{dE}{E} = \frac{3}{2} \int \frac{dz}{(1+z)}, \quad (4.33)$$

integrando se obtiene

$$\ln E = \frac{3}{2} \ln(1+z) + \lambda_2, \quad (4.34)$$

lo que es equivalente a

$$\ln E = \ln(1+z)^{3/2} + \lambda_2, \quad (4.35)$$

finalmente, aplicando la función exponencial se obtiene la solución

$$E_h = \lambda_2(1+z)^{3/2}, \quad (4.36)$$

donde λ_2 es una constante de integración.

Por otro lado, para encontrar la solución particular se propone el polinomio

$$E_p = A(1+z)^n + B, \quad (4.37)$$

donde A y B son los coeficientes que son obtenidos al sustituir E_p y

$$E'_p = nA(1+z)^{n-1} \quad (4.38)$$

en la ecuación diferencial (4.30), de tal manera que

$$-2n(1+z)^n(1+z)^{n-1}A + 3(1+z)^nA + 3B = \lambda_0 + \lambda_1(1+z)^n, \quad (4.39)$$

agrupando los coeficientes,

$$-(1+z)^n(2n-3)A + 3B = \lambda_0 + \lambda_1(1+z)^n. \quad (4.40)$$

Los coeficientes A y B son obtenidos al igualar los términos que los acompaña con términos $(1+z)^n$ del mismo orden,

$$-(1+z)^n(2n-3)A = \lambda_1(1+z)^n, \quad 3B = \lambda_0, \quad (4.41)$$

por lo cual finalmente se obtiene,

$$A = -\frac{\lambda_1}{2n-3}, \quad B = \frac{\lambda_0}{3}. \quad (4.42)$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación (4.37) se obtiene que la solución particular es

$$E_p = -\frac{\lambda_1}{2n-3}(1+z)^n + \frac{\lambda_0}{3}. \quad (4.43)$$

Finalmente, al sumar las ecuaciones (4.36) y (4.43), se obtiene la ecuación de Friedmann

$$E(z) = \lambda_2(1+z)^{3/2} - \frac{\lambda_1}{2n-3}(1+z)^n + \frac{\lambda_0}{3}. \quad (4.44)$$

Al considerar que la ecuación de Friedmann cumple con $E(0) = 1$, se obtiene que la constante de integración λ_2 es

$$\lambda_2 = 1 + \frac{\lambda_1}{2n-3} - \frac{\lambda_0}{3}. \quad (4.45)$$

4.2.1.2. Viscosidad constante (vc-CDM)

La ecuación de Friedmann para una viscosidad constante $\lambda(z) = \lambda_0$ es obtenida al reducir la ecuación (4.44) considerando $\lambda_1 = 0$, obteniendo

$$E(z) = \lambda_2(1+z)^{3/2} + \frac{\lambda_0}{3}, \quad (4.46)$$

en donde λ_2 se reduce a

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\lambda_0}{3}. \quad (4.47)$$

4.2.2. Λ CDM disipativo

Para modelar el Universo con distintos fluidos, consideramos el formalismo propuesto en [29]. Partimos expresando la ecuación de continuidad viscosa, ecuación (4.15), en términos del factor de escala. Para ello, aplicamos la regla de la cadena, con la cual se obtiene

$$\frac{d\rho}{da} \frac{da}{dt} + 3H(\rho + p) = 9\xi H^2, \quad (4.48)$$

lo que equivale a

$$\frac{d\rho}{da} \dot{a} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 9\xi \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (4.49)$$

y finalmente

$$a \frac{d\rho}{da} + 3(\rho + p) = 9\xi \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.50)$$

Para resolver esta ecuación de continuidad, se considera una ecuación de estado barotrópica

$$p = \omega_i \rho_i, \quad (4.51)$$

en donde el subíndice i corre para energía oscura y materia oscura. Sustituyendo la ecuación de estado en la ecuación (4.50), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$a \frac{d\rho_i}{da} + 3\rho_i(1 + \omega_i) = 9\xi_i H. \quad (4.52)$$

La solución general de este sistema de ecuaciones se encuentra dada por

$$\rho_i = \rho_{ih} + \rho_{ip}, \quad (4.53)$$

la cual es una combinación lineal de la solución homogénea y particular del problema.

El caso en donde no se tiene viscosidad ($\xi = 0$) corresponde al caso del sistema homogéneo, el cual ya fue resuelto en el capítulo 2, y tiene como solución general

$$\rho_h = \rho_{i0} a^{-3(\omega_i+1)}. \quad (4.54)$$

Para la solución particular, se considera la propuesta en [29], dada por

$$\rho_p = \rho_{i0} a^{-3(\omega_i+1)} u_i(a, \xi_i), \quad (4.55)$$

donde $u_i(a, \xi_i)$ contiene la viscosidad para cada fluido.

Usando las ecuaciones (4.54) y (4.55) se obtiene que la solución general de la ecuación (4.52) es

$$\rho(a) = \rho_{i0} a^{-3(\omega_i+1)} + \rho_{i0} a^{-3(\omega_i+1)} u_i(a, \xi_i), \quad (4.56)$$

$$\rho(a) = \rho_{i0} a^{-3(\omega_i+1)} [1 + u_i(a, \xi_i)] . \quad (4.57)$$

Para simplificar el formalismo, se considera que solo se introduce una viscosidad para todos los componentes, con lo cual la ecuación (4.57) se simplifica a

$$\rho(a) = \rho_h [1 + u(a)] . \quad (4.58)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (4.10) se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_h [1 + u(a)] , \quad (4.59)$$

la cual, usando la relación (4.16) puede ser expresado como

$$E^2(a) = \Omega(a) [1 + u(a)] , \quad (4.60)$$

donde

$$\Omega(a) = \frac{\rho_{i0}}{\rho_c} a^{-3(\omega_i+1)} = \Omega_{i0} a^{-3(\omega_i+1)} . \quad (4.61)$$

El siguiente paso es encontrar la función $u(a)$. Para ello, sustituimos la ecuación (4.58) en la ecuación de continuidad viscosa, ecuación (4.52), obteniendo la ecuación

$$a \frac{d}{da} \{ \rho_h [1 + u(a)] \} + 3 \rho_h [1 + u(a)] (\omega_i + 1) = 9 \xi H , \quad (4.62)$$

la cual, al expandir la derivada resulta ser

$$a \rho_h \frac{du}{da} - 3 \rho_h [1 + u(a)] (\omega_i + 1) + 3 \rho_h [1 + u(a)] (\omega_i + 1) = 9 \xi H , \quad (4.63)$$

que se reduce a

$$a \rho_h \frac{du}{da} = 9 \xi H . \quad (4.64)$$

Usando la ecuación (4.59), se sustituye el parámetro H en la ecuación anterior, obteniendo la expresión

$$a \rho_h \frac{du}{da} = 9 \xi \sqrt{\frac{\kappa^2}{3} \rho_h [1 + u(a)]} , \quad (4.65)$$

en donde utilizando las ecuaciones (4.5) y (4.22) se puede reescribir como

$$a \frac{du}{da} = 9 \frac{\lambda(a) \rho_c}{H_0} \sqrt{\frac{H_0^2}{\rho_c \rho_h} [1 + u(a)]} , \quad (4.66)$$

$$a \frac{du}{da} = 9 \lambda(a) \sqrt{\frac{1 + u(a)}{\Omega(a)}} . \quad (4.67)$$

La ecuación anterior puede ser reescrita en términos del corrimiento al rojo al aplicar la regla de la cadena, de tal manera

$$- \frac{1}{(1+z)} \frac{du}{dz} (1+z)^2 = 9 \lambda(z) \sqrt{\frac{1+u(z)}{\Omega(z)}} , \quad (4.68)$$

$$- (1+z) \frac{du}{dz} = 9 \lambda(z) \sqrt{\frac{1+u(z)}{\Omega(z)}} . \quad (4.69)$$

Para resolver la ecuación anterior, se aplica el método de separación de variables

$$-\int \frac{du}{\sqrt{(1+u)}} = 9 \int \frac{\lambda(z)}{(1+z)\sqrt{\Omega(z)}} dz. \quad (4.70)$$

Finalmente, integrando la ecuación anterior se tiene la integral,

$$1 + u(z) = \left[\frac{9}{2} \int_0^z \frac{\lambda(z)}{(1+z)\sqrt{\Omega(z)}} dz + I_0 \right]^2, \quad (4.71)$$

para múltiples fluidos a partir de una viscosidad $\lambda(z)$.

4.2.2.1. Viscosidad polinomial (vp- Λ CDM)

Usando el formalismo descrito anteriormente modelamos el Universo considerando dos fluidos: materia y energía oscura. La densidad total $\Omega(z)$ considerando estos dos componentes es

$$\Omega(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{de}, \quad (4.72)$$

donde Ω_{de} corresponde a la densidad de energía oscura y Ω_{m0} contiene la densidad de materia oscura.

Para obtener la ecuación de Friedmann consideraremos el término polinomial propuesto por [26]. Sustituyendo (4.29) en (4.71), se tiene

$$1 + u(z) = \left[\frac{1}{2} \int_0^z \frac{\lambda_0 + \lambda_1(1+z)^n}{(1+z)\sqrt{\Omega(z)}} dz + I_0 \right]^2, \quad (4.73)$$

donde I_0 es una constante de integración.

Para resolver la integral se utilizó el módulo de cálculo simbólico SymPy de Python [44], obteniendo

$$1 + u(z) = \left[\frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}}} \right) - \frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}(1+z)^3}} \right) + \frac{\lambda_1(z+1)^n}{2n\sqrt{\Omega_{de}}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{3}, 1 + \frac{n}{3}, -\frac{\Omega_{m0}(z+1)^3}{\Omega_{de}} \right) - \frac{\lambda_1}{2n\sqrt{\Omega_{de}}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{3}, 1 + \frac{n}{3}, -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{de}} \right) + I_0 \right]^2, \quad (4.74)$$

donde asinh es la función inversa del seno hiperbólico y ${}_2F_1$ es conocida como una función hipergeométrica.

Sustituyendo la ecuación (4.74) en (4.60) se obtienen la ecuación de Friedmann,

$$E(z) = \sqrt{\Omega(z)} \left[\frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}(1+z)^3}} \right) - \frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}}} \right) + \frac{\lambda_1(z+1)^n}{2n\sqrt{\Omega_{de}}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{3}, 1 + \frac{n}{3}, -\frac{\Omega_{m0}(z+1)^3}{\Omega_{de}} \right) - \frac{\lambda_1}{2n\sqrt{\Omega_{de}}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{3}, 1 + \frac{n}{3}, -\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{de}} \right) + 1 \right], \quad (4.75)$$

en donde la constante de integración I_0 es obtenida a partir de $E(0) = I_0 = 1$.

4.2.2.2. Viscosidad constante (vc- Λ CDM)

Para obtener el modelo donde el Universo contiene un viscosidad constante, se considera que $\lambda_1 = 0$, con lo cual la ecuación (4.75) se reduce a

$$E(z) = \sqrt{\Omega(z)} \left[\frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}}} \right) - \frac{\lambda_0}{3\sqrt{\Omega_{de}}} \operatorname{asinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{de}}{\Omega_{m0}(1+z)^3}} \right) + 1 \right]. \quad (4.76)$$

Es importante notar, que para $\lambda_0 = 0$ se recupera el modelo Λ CDM.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 5

Observaciones cosmológicas

En este capítulo se describen las observaciones cosmológicas provenientes de mediciones directas del parámetro de Hubble y las Supernovas del Tipo Ia. Además, se explica como se relacionan dichas observaciones con los modelos cosmológicos y los métodos estadísticos.

5.1. Observaciones al parámetro de Hubble

Una manera de obtener la velocidad de expansión del Universo es mediante mediciones directas del parámetro de Hubble (OHD). La muestra de datos compilada en [30] consiste en 51 mediciones del parámetro de Hubble en el rango de $0.07 < z < 2.36$. De la muestra total de OHD, 31 mediciones fueron obtenidas a través del método de edad diferencial.

El método se basa en que la velocidad de expansión del Universo puede ser escrita como

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}, \quad (5.1)$$

por lo que conociendo un variación edad Δt en un Δz puede ser determinado $H(z)$. Para las mediciones es necesario considerar galaxias en donde se tenga poblaciones de estrellas relativamente homogéneas, lo que refiere a que la mayoría de estrellas que conforman las galaxias tengan la misma edad, y por lo tanto una intensidad lumínica similar. Entre los distintos tipos de galaxias, las más usadas son las galaxias rojas luminosas, las cuales carecen de polvo estelar, evitando así la formación de estrellas jóvenes [45].

Por otro lado, las 20 mediciones restantes fueron obtenidas mediante observaciones de las oscilaciones acústicas de bariones. Las mediciones del parámetro de Hubble son obtenidas mediante

$$H(z)_{\text{true}} = \frac{r_{\text{BAO}}}{r_{\text{WMAP}}} H(z)_{\text{ref}}, \quad (5.2)$$

donde $H(z)_{\text{ref}}$ es el modelo de referencia con el cual se estima la escala aparente de las oscilaciones acústicas de bariones r_{BAO} , y r_{WMAP} es la escala acústica inmovilizada obtenida de la radiación de fondo de microondas [45, 46].

Con la finalidad de obtener los parámetros libres de los modelos usando la muestra OHD, se define la función objetivo usando la ecuación (3.6), teniendo

$$\chi_{\text{OHD}}^2 = \sum_i^{51} \left(\frac{H_{\text{th}}(z_i) - H_{\text{obs}}^i}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.3)$$

donde H_{th} es el valor teórico del parámetro de Hubble, H_{obs} y σ_{obs}^i son el valor del parámetro de Hubble observado y su respectiva incertidumbre.

5.2. Supernovas del tipo Ia

Las estrellas pasan a través de distintas etapas a lo largo de su existencia. Para ciertas estrellas, que son suficientemente masivas, el final de su ciclo de vida se da por medio de una explosión conocida como supernova. Las supernovas se clasifican en dos tipos, I y II, según la forma de la curva de luminosidad. Las supernovas del tipo II toman lugar en estrellas como nuestro sol pero con 15 veces más masa. Por otro lado, las supernovas del tipo I se originan en sistemas binarios de estrellas, entre ellas existen del tipo Ia, Ib y Ic, siendo las del tipo Ia de suma importancia para probar modelos cosmológicos [3].

Las supernovas del tipo Ia (SNIa) se originan en sistemas binarios de estrellas, en donde una de ellas es una enana blanca. La explosión de supernova se da cuando la enana blanca supera el límite de Chandrasekhar (1.4 masa solares) al adquirir masa de su compañera binaria. La intensidad lumínica de la supernova alcanza rápidamente su pico máximo en pocos días, para posteriormente descender lentamente [3].

Las SNIa fueron la primera evidencia de que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada [5, 6]. Actualmente la muestra más grande de SNIa es la compilada por Pantheon [31]. La muestra consiste en 1048 mediciones de la magnitud bolométrica aparente en el rango de $0.1 < z < 2.3$. Los parámetros libres de los modelos son obtenidos al utilizar la muestra de datos SNIa minimizando la función,

$$\chi_{\text{SNIa}}^2 = (\mathbf{m}_{th} - \mathbf{m}_{obs}) \mathbf{Cov}^{-1} (\mathbf{m}_{th} - \mathbf{m}_{obs})^T, \quad (5.4)$$

donde \mathbf{Cov} es la matriz de incertidumbre, m_{obs} es la magnitud aparente bolométrica observada y m_{th} la teórica, definida como

$$m_{th} = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z)}{10 \text{pc}} \right] + \mathcal{M} \quad (5.5)$$

donde \mathcal{M} es un parámetro de ruido y

$$d_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (5.6)$$

la cual es conocida como distancia lumínica.

Parámetro	Prior
λ_0	$U[0, 2]$
λ_1	$U[0, 2]$
n	$U[-5, 0]$
h	$\text{Gauss}(0.6766, 0.0042)$
Ω_{m0}	$\text{Gauss}(0.3111, 0.0056)$

Tabla 5.1: Probabilidades a priori consideradas para el acotamiento de los parámetros libres de los modelos.

5.3. Observaciones en conjunto

Los modelos cosmológicos deben ser capaces de reproducir las muestras de OHD y SNIa por separado, pero también en conjunto. Considerando esto, la función objetivo

total a minimizar se define como

$$\chi_{\text{OHD+SNIa}}^2 = \chi_{\text{OHD}}^2 + \chi_{\text{SNIa}}^2 \quad (5.7)$$

donde χ_{OHD}^2 es la función objetivo individual para el ajuste usando la muestra OHD, ecuación (5.3) y χ_{SNIa}^2 es la función objetivo para los datos SNIa, ecuación (5.4).

En la tabla 5.1 se resumen las distribuciones a priori usadas para la estimación de los parámetros libres de los modelos disipativos. Según [25], el rango en el que se encuentra la viscosidad efectiva en la época actual resulta encontrarse en el rango aproximado de $0.0 < 9\lambda(z=0) < 2.3$ dependiendo del método con el cual se estima el valor de dicho parámetro. Usando los resultados obtenidos en [27], se considera una distribución a priori uniforme $U \sim [0, 2]$ para λ_0 y λ_1 , mientras que para n se considera una distribución a priori $U \sim [-5, 0]$. Por otro lado, para los parámetros h y Ω_{m0} se consideran los resultados de [12], por lo cual se proponen las distribuciones a priori gaussianas que se reportan en la tabla 5.1.

Dirección General de Bibliotecas de la UNQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Capítulo 6

Análisis de modelos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del análisis de los cuatro modelos disipativos. En primer lugar, se reportan los resultados estadísticos obtenidos del análisis Bayesiano. Posteriormente, se discute la reconstrucción de los parámetros cosmográficos. Finalmente, se presentan los resultados de la comparación de los modelos mediante los distintos diagnósticos de estados.

6.1. Ajustes a los modelos cosmológicos

Los resultados del análisis Bayesiano por medio del método MCMC se muestran en las figuras 6.1 y 6.2, para los modelos v -CDM y v - Λ CDM respectivamente, con un 68 % (1σ), 95 % (2σ) y 99 % (3σ) de nivel de confiabilidad. La tabla 6.1 muestra los valores de los parámetros libres de los modelos disipativos con una incertidumbre de 1σ . En la figura 6.3 se muestran las curvas de los modelos disipativos que mejor ajustan a OHD usando los valores del caso OHD+SNIa, además de compararse con el modelo de concordancia Λ CDM en donde se usa $\Omega_{m0} = 0.311$ y $h = 0.677$ como valores.

Los resultados de la selección de modelos mediante análisis estadístico son reportados en la tabla 6.2, en donde se muestran los valores de los criterios AIC y BIC de los modelos disipativos para cada muestra de datos. Con la finalidad de comparar los modelos disipativos, se calcularon las cantidades ΔAIC y ΔBIC usando como referencia a Λ CDM con los valores $\Omega_{m0} = 0.3111$ y $h = 0.6766$ reportados en [12], mientras que para las muestras SNIa y OHD+SNIa se considera $\mathcal{M} = -19.420$. Usando dichos valores, se estima para el modelo Λ CDM un $\chi^2 = 26.2, 1027.2, 1053.4$ para OHD, SNIa y OHD+SNIa, respectivamente.

Considerando los criterios descritos en el capítulo 3 y los valores del AIC (tabla 6.2), se obtiene que la muestra OHD es igualmente compatible con los modelos disipativos y el modelo de concordancia Λ CDM. De manera similar, considerando la muestra de datos de SNIa se tiene que los modelos disipativos con viscosidad constante son igualmente compatibles que el modelo Λ CDM, mientras que los modelos con viscosidad polinomial son compatibles en menor manera con esta muestra. Con la muestra OHD+SNIa, los modelos vp -CDM y vc - Λ CDM son igualmente compatibles con esta muestra en comparación con Λ CDM, mientras que los modelos vc -CDM y vp - Λ CDM son menos compatibles. Por otro lado, considerando los valores del BIC, el modelo vc -CDM no presenta evidencia en contra usando las muestras OHD y SNIa, mientras que con la muestra OHD+SNIa existe evidencia en contra del modelo. Para los modelos, vp -CDM y vc - Λ CDM existe evidencia en contra de estos modelos con la muestra de

datos OHD, mientras que para los casos restantes se encuentra una fuerte evidencia en contra de los modelos disipativos.

Datos	χ^2	h	Ω_{m0}	λ_0	λ_1	n	\mathcal{M}
Fluido de materia disipativo							
Viscosidad Constante							
OHD	23.4	$0.675^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.684^{+0.042}_{-0.043}$	–	–	–
SNIa	1029.1	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.887^{+0.061}_{-0.067}$	–	–	$-19.421^{+0.017}_{-0.016}$
OHD+SNIa	1059.0	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.738^{+0.036}_{-0.037}$	–	–	$-19.390^{+0.012}_{-0.012}$
Viscosidad Polinomial							
OHD	20.9	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.290^{+0.215}_{-0.439}$	$0.771^{+0.472}_{-0.397}$	$-2.331^{+1.582}_{-1.841}$	–
SNIa	1028.6	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.205^{+0.404}_{-0.499}$	$1.063^{+0.584}_{-0.609}$	$-2.455^{+1.486}_{-1.677}$	$-19.428^{+0.019}_{-0.019}$
OHD + SNIa	1052.4	$0.678^{+0.004}_{-0.004}$	–	$1.208^{+0.202}_{-0.428}$	$1.010^{+0.390}_{-0.330}$	$-2.455^{+1.519}_{-1.631}$	$-19.423^{+0.015}_{-0.015}$
Λ CDM disipativo							
Viscosidad Constante							
OHD	25.9	$0.679^{+0.004}_{-0.004}$	$0.312^{+0.005}_{-0.005}$	$0.053^{+0.047}_{-0.035}$	–	–	–
SNIa	1027.0	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	$0.311^{+0.006}_{-0.005}$	$0.079^{+0.070}_{-0.052}$	–	–	$-19.430^{+0.016}_{-0.016}$
OHD+SNIa	1052.8	$0.679^{+0.004}_{-0.004}$	$0.312^{+0.005}_{-0.005}$	$0.051^{+0.043}_{-0.033}$	–	–	$-19.417^{+0.012}_{-0.012}$
Viscosidad Polinomial							
OHD	21.7	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$0.574^{+0.549}_{-0.270}$	$0.880^{+0.480}_{-0.397}$	$-2.785^{+1.130}_{-1.473}$	–
SNIa	1029.0	$0.677^{+0.004}_{-0.004}$	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$0.620^{+0.778}_{-0.407}$	$0.601^{+0.627}_{-0.420}$	$-1.647^{+1.124}_{-2.036}$	$-19.420^{+0.019}_{-0.019}$
OHD+SNIa	1052.7	$0.678^{+0.004}_{-0.004}$	$0.311^{+0.006}_{-0.006}$	$0.424^{+0.556}_{-0.232}$	$0.550^{+0.475}_{-0.311}$	$-2.416^{+1.036}_{-1.663}$	$-19.400^{+0.014}_{-0.014}$

Tabla 6.1: Valores de los parámetros libres obtenidos del análisis MCMC usando las muestras OHD, SNIa y OHD+SNIa, con 1σ .

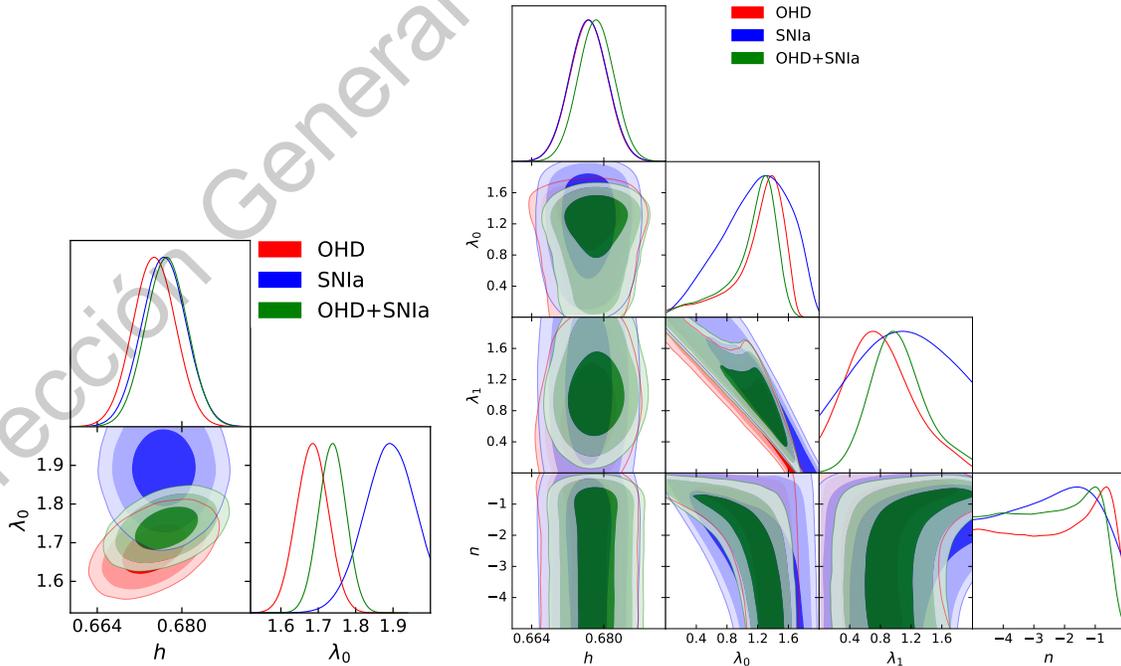


Figura 6.1: Intervalos de confianza a $1\sigma, 2\sigma$ y 3σ para los modelos disipativos v -CDM. Los paneles izquierdo y derecho muestran los parámetros de los modelos vc -CDM y vp -CDM respectivamente.

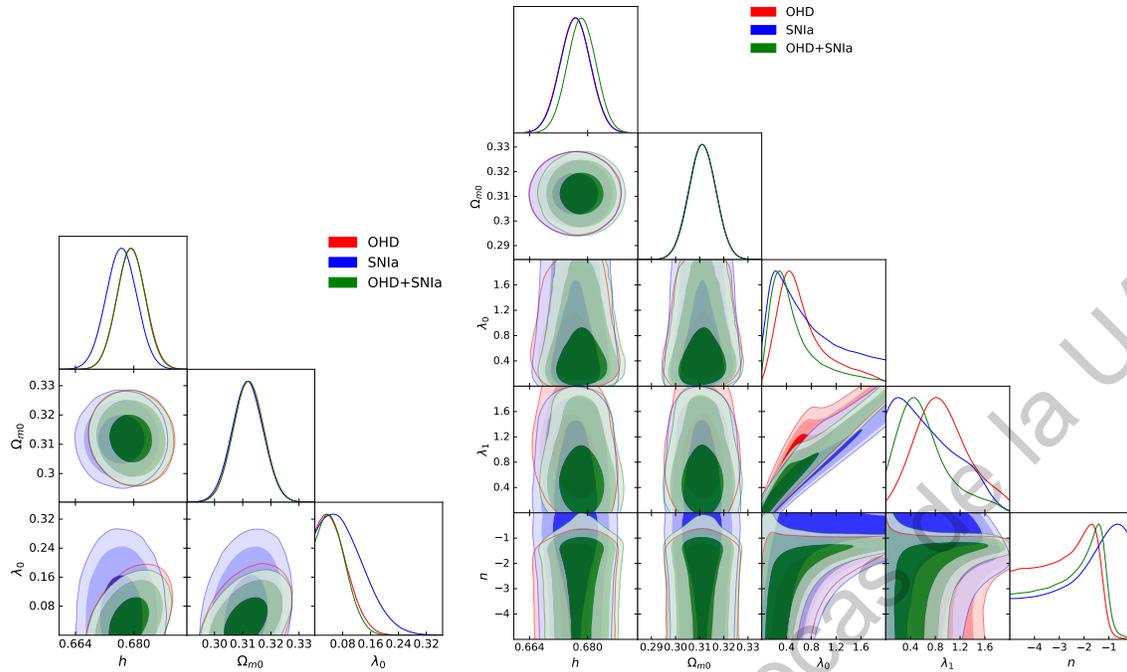


Figura 6.2: Intervalos de confianza a $1\sigma, 2\sigma$ y 3σ para los modelos $v\text{-}\Lambda\text{CDM}$. Los paneles izquierdo y derecho muestran los parámetros de los modelos $vc\text{-}\Lambda\text{CDM}$ y $vp\text{-}\Lambda\text{CDM}$ respectivamente.

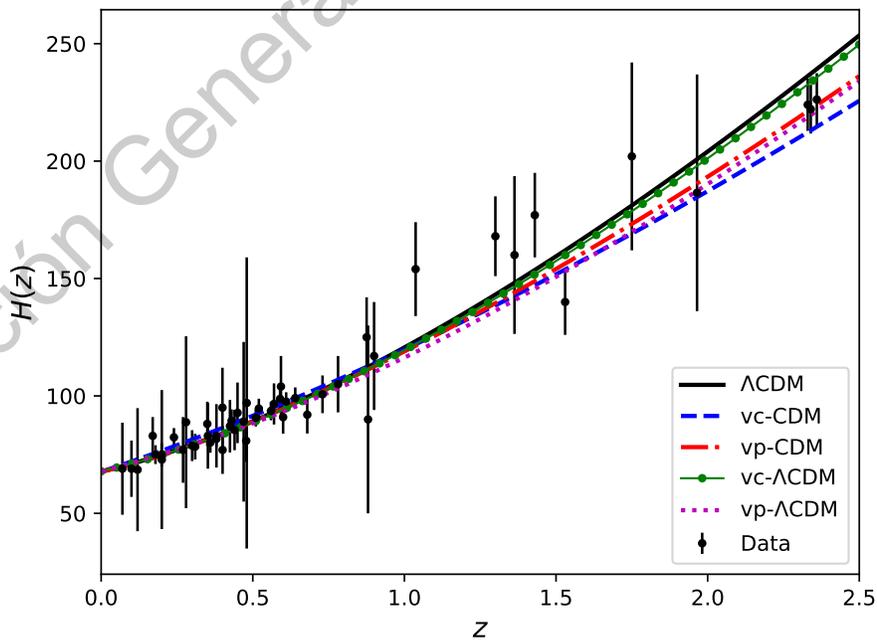


Figura 6.3: Reconstrucción del parámetro de Hubble usando los resultados obtenidos de la muestra OHD+SNIa. Para ΛCDM (línea negra sólida) se consideran los valores $\Omega_{m0} = 0.311$ y $h = 0.677$.

Datos	AIC	BIC	ΔAIC	ΔBIC
Λ CDM				
OHD	30.2	34.1	–	–
SNIa	1033.2	1048.1	–	–
OHD+SNIa	1059.4	1074.4	–	–
Fluido de materia disipativo				
Viscosidad constante				
OHD	27.4	31.3	–2.8	–2.8
SNIa	1035.1	1050.0	1.9	1.9
OHD+SNIa	1065.0	1080.0	5.6	5.6
Viscosidad polinomial				
OHD	28.9	36.6	–1.3	2.5
SNIa	1038.6	1063.4	5.4	15.3
OHD+SNIa	1062.4	1087.4	3.0	13.0
Λ CDM disipativo				
Viscosidad constante				
OHD	31.9	37.8	1.7	3.7
SNIa	1035.0	1054.8	1.8	6.7
OHD+SNIa	1060.8	1080.8	1.4	6.4
Viscosidad polinomial				
OHD	31.7	41.6	1.5	7.5
SNIa	1041.0	1070.7	7.8	22.6
OHD+SNIa	1064.7	1094.7	5.3	20.3

Tabla 6.2: Valores de los criterios de selección de modelos AIC y BIC para Λ CDM y los modelos disipativos. Los valores ΔAIC y ΔBIC son obtenidos considerando a Λ CDM como el modelo de referencia.

6.2. Cosmografía

Usando los resultados obtenidos de la muestra de datos OHD+SNIa, se reconstruyeron los parámetros cosmográficos en la región del corrimiento al rojo $0 < z < 2.5$, los cuales se muestran en la figura 6.4. En el panel superior izquierdo, se muestra la comparación del parámetro de desaceleración de los distintos modelos disipativos y Λ CDM. La región donde $q > 0$ representa la zona de desaceleración, mientras que en $q < 0$ los modelos presentan una aceleración, siendo una característica esencial que los modelos alternativos deben cumplir. En específico, los modelos v -CDM, consideran un solo componente en la evolución del Universo, introduciendo un factor de viscosidad para generar aceleración, lo cual se puede observar que se cumple en la reconstrucción del parámetro de desaceleración, reemplazando el componente de energía oscura con éxito.

Por otro lado, los modelos v - Λ CDM, consideran el componente de energía oscura, siendo este el responsable de la aceleración, además, al incluir dicho componente se satisface la condición cercana al equilibrio $|\Pi|/p \ll 1$ en épocas actuales. En la tabla 6.3 se reportan los valores del corrimiento de transición z_t , los cuales indican el momento en el que se presenta la transición de desaceleración-aceleración, cabe resaltar, que para los cuatro modelos disipativos dicha transición se presenta en épocas tempranas en comparación con Λ CDM, teniendo una desviación respecto a dicho modelo de 5.0σ (0.6σ) para vc -CDM (vp -CDM), mientras que para vc - Λ CDM (vp - Λ CDM) se tiene 1.5σ (2.8σ).

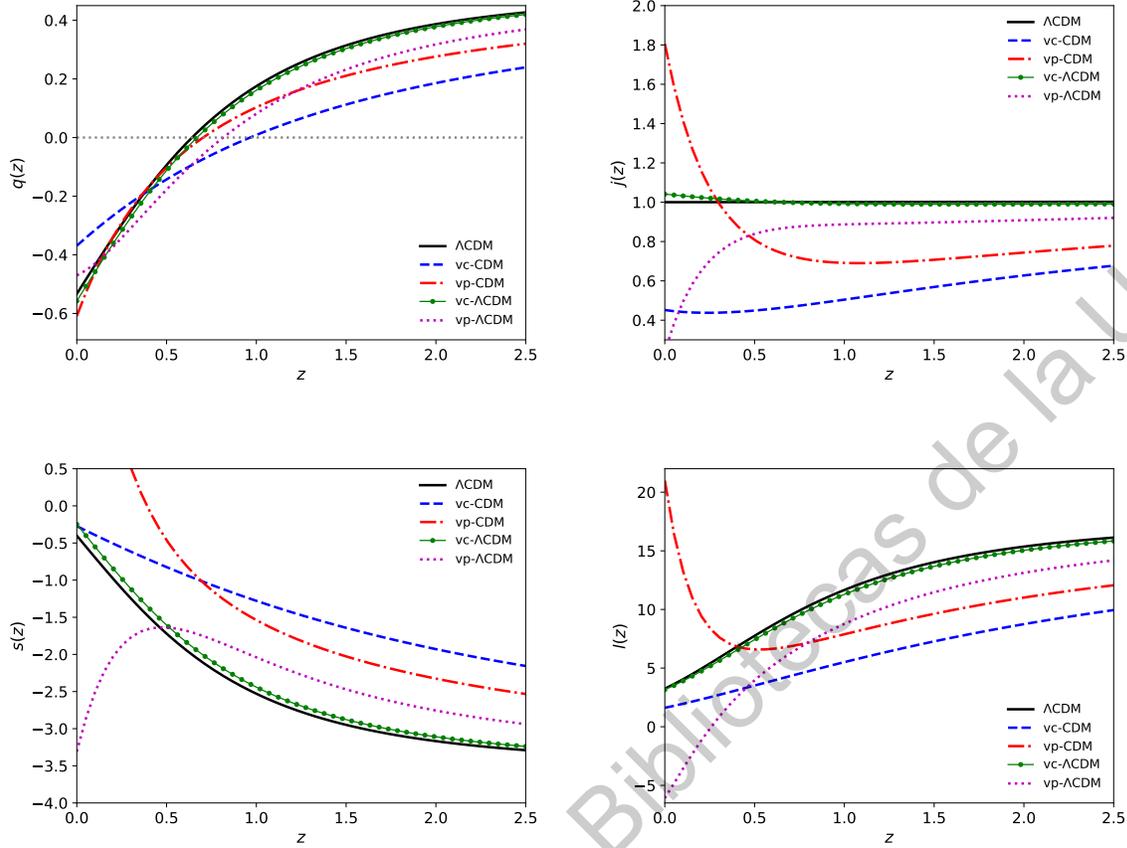


Figura 6.4: Reconstrucción de los parámetros cosmográficos para Λ CDM y los modelos disipativos. En los paneles superiores izquierdo y derecho se muestran los parámetros de desaceleración y jerk, mientras que en los paneles inferiores izquierdo y derecho, los parámetros snap y lent, respectivamente.

Modelos	q_0	j_0	s_0	l_0	z_t
Λ CDM	$-0.533^{+0.008}_{-0.008}$	$1.000^{+0.000}_{-0.000}$	$-0.401^{+0.025}_{-0.024}$	$3.244^{+0.064}_{-0.062}$	$0.642^{+0.014}_{-0.014}$
vc-CDM	$-0.369^{+0.018}_{-0.019}$	$0.452^{+0.005}_{-0.004}$	$-0.272^{+0.040}_{-0.040}$	$1.613^{+0.111}_{-0.107}$	$0.964^{+0.068}_{-0.064}$
vp-CDM	$-0.609^{+0.079}_{-0.097}$	$1.806^{+0.958}_{-0.600}$	$4.417^{+6.673}_{-3.002}$	$20.996^{+46.233}_{-14.108}$	$0.686^{+0.089}_{-0.078}$
vc- Λ CDM	$-0.558^{+0.015}_{-0.019}$	$1.041^{+0.034}_{-0.027}$	$-0.249^{+0.124}_{-0.094}$	$3.163^{+0.061}_{-0.055}$	$0.672^{+0.023}_{-0.020}$
vp- Λ CDM	$-0.470^{+0.066}_{-0.054}$	$0.252^{+0.442}_{-0.512}$	$-3.308^{+1.723}_{-2.657}$	$-6.724^{+5.017}_{-10.079}$	$0.833^{+0.238}_{-0.106}$

Tabla 6.3: Valores de los parámetros cosmográficos en $z = 0$ y corrimiento al rojo de transición para Λ CDM y modelos disipativos con 1σ .

El parámetro de jerk es reconstruido en el panel superior derecho de la figura 6.4 brindando información sobre la dinámica de la ecuación de estado de la energía oscura. Para Λ CDM $j(z) = 1$, debido a que la ecuación de estado para la energía oscura de este modelo es una constante ($\omega = -1$). En los modelos v-CDM, la viscosidad toma el papel de la energía oscura con lo cual se obtiene que la ecuación de estado es dinámica, tanto para una viscosidad constante, como para el término polinomial. Por otro lado, en los modelos v- Λ CDM, el componente de energía oscura tienen la ecuación de estado de la constante cosmológica pero sin actuar como tal, debido que al introducir los términos disipativos en el modelo se modifica la ecuación de estado constante a una

dinámica. Si bien, para los parámetros de desaceleración y jerk se tiene una interpretación física, esto no ocurre para los parámetros snap y lent. Sin embargo, sirven como un método de comparación de modelos. Los parámetros snap y lent son reconstruidos en la figura 6.4 panel inferior izquierdo y derecho respectivamente. En la tabla 6.3 se reportan los valores de los parámetros cosmológicos en la época actual para Λ CDM y los modelos disipativos. Se encontró una desviación en los parámetros q_0, j_0, s_0 y l_0 de $8.6\sigma(1.0\sigma)$, $109.6\sigma(1.3\sigma)$, $3.2\sigma(0.6\sigma)$ y $14.7\sigma(1.3\sigma)$ para los modelos vc-CDM(vp-CDM) respecto a Λ CDM, mientras que para los modelos vc- Λ CDM(vp- Λ CDM) de $1.6\sigma(1.2\sigma)$, $1.5\sigma(1.7\sigma)$, $1.6\sigma(1.7\sigma)$ y $1.3\sigma(2.0\sigma)$.

6.3. Diagnósticos de estado

Usando la ecuación (2.65) se estimó la edad del Universo para Λ CDM y los modelos disipativos. Primeramente, para el modelo Λ CDM se obtuvo $t_A = 13.859^{+0.125}_{-0.123}$ Gyrs, mientras que para vc-CDM(vp-CDM) $t_A = 14.628^{+0.169}_{-0.161}(14.476^{+0.174}_{-0.168})$ Gyrs y para vc- Λ CDM(vp- Λ CDM) $t_A = 13.921^{+0.128}_{-0.120}(14.333^{+0.875}_{-0.348})$ Gyrs. Al comparar los modelos disipativos con el modelo de concordancia se obtiene una desviación de $4.8\sigma(3.7\sigma)$ Gyrs y $0.5\sigma(1.4\sigma)$ Gyrs para los modelos v-CDM y v- Λ CDM respectivamente. Aunado a esto, los autores en [47] reportan una edad del Universo de $t_A = 13.108^{+0.270}_{-0.260}$ Gyrs para un modelo fenomenológico alternativo de gas de Chaplygin con curvatura plana, del cual se obtuvo una desviación de $9.4\sigma(8.1\sigma)$ Gyrs y $6.8\sigma(3.5\sigma)$ Gyrs con los modelos v-CDM y v- Λ CDM respectivamente. Es interesante recalcar que al considerar fluidos imperfectos en la evolución del Universo la edad del mismo aumenta en comparación con los modelos que consideran fluidos perfectos tales como Λ CDM y el modelo alternativo de gas Chaplygin.

La figura 6.5 muestra el comportamiento del parámetro de Hubble adimensional respecto a $(1+z)^3$ en un rango de corrimiento al rojo de $-1.0 < z < 0.9$. Esta figura permite analizar los modelos tanto a bajos, como a altos corrimientos al rojo. Usando a Λ CDM de referencia (línea negra sólida), para $z > 0$, los modelos cuya evolución se encuentra en la zona por arriba de Λ CDM presentan un comportamiento de quintaesencia, mientras que los modelos en donde sus trayectorias se encuentran por debajo de Λ CDM su ecuación de estado presenta un comportamiento fantasma. Es interesante observar como todos los modelos disipativos que se estudian en este trabajo se comportan como modelos fantasmas para aproximadamente $z > 1.1$. Los modelos vc-CDM y vp- Λ CDM presentan un transición de la zona fantasma a la de quintaesencia, como se puede apreciar en el panel interno de la figura 6.5, en la región $0.8 < z < 1$. Por otro lado, vp-CDM y vc- Λ CDM presentan un comportamiento de modelo fantasma para todos los rangos de corrimiento al rojo mostrados. Para $z < 0$, los modelos disipativos divergen cuando $z \rightarrow -1$, terminado su evolución como modelos fantasmas.

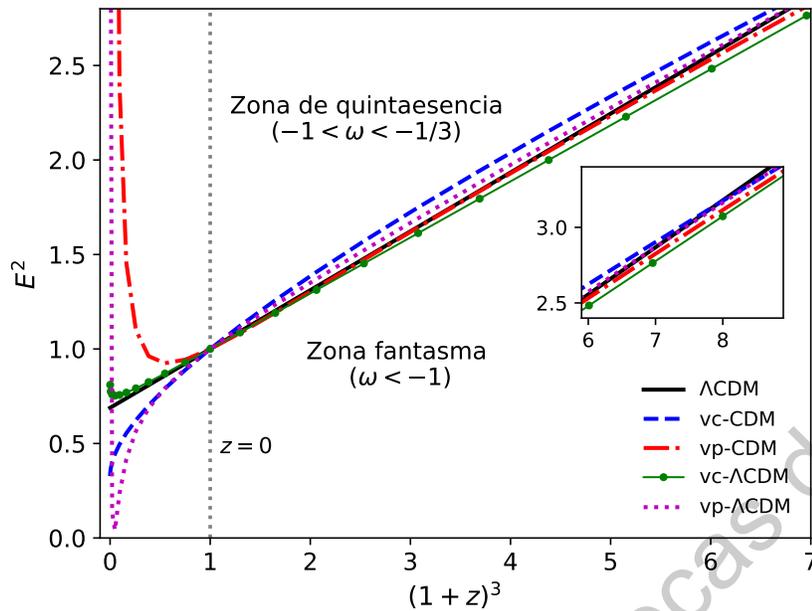


Figura 6.5: Comportamiento del parámetro de Hubble adimensional E^2 respecto a $(1+z)^3$. La línea negra sólida representa Λ CDM. Para $z < 0$, la zona por encima de Λ CDM corresponde a los modelos que prestan un comportamiento de quintaesencia, mientras que las trayectorias por debajo de Λ CDM presentan el comportamiento de modelos fantasmas.

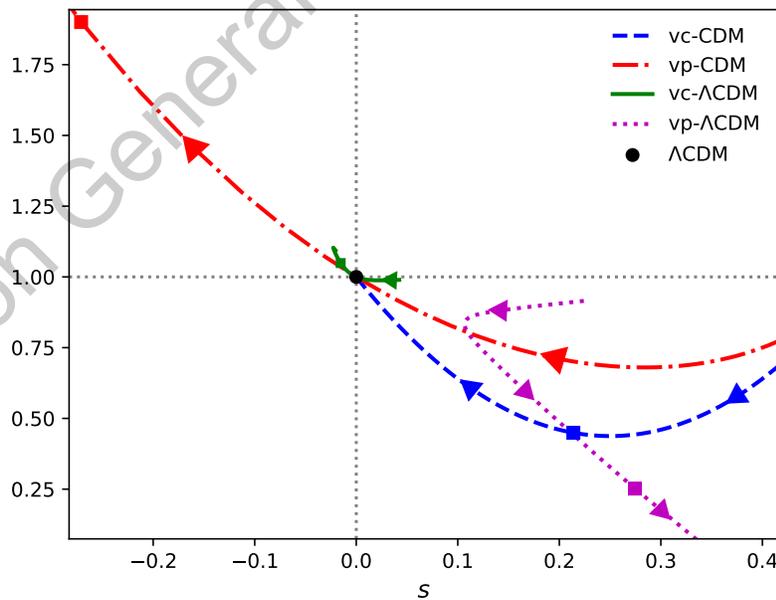


Figura 6.6: Evolución de los modelos disipativos en el espacio fase statefinder. El modelo Λ CDM representa un punto en las coordenadas $\{s, r\} = (0, 1)$, mientras que los modelos disipativos presentan diversas trayectorias. Las flechas indican las direcciones de las trayectorias y los cuadrados representan la etapa actual en la que se encuentran los modelos.

Por último, en la figura 6.6 se muestra la evolución de los modelos disipativos en el diagnóstico statefinder en un rango de corrimiento al rojo $-1.0 < z < 2.5$. En el espacio fase $s - r$, el modelo de concordancia Λ CDM representa un punto en la coordenadas $\{s, r\} = (0, 1)$, debido a la naturaleza de su ecuación de estado constante para la energía oscura. Para los modelos con ecuaciones de estado dinámicas se generan trayectorias como las que se muestran en la figura 6.6. Las flechas indican la dirección de las trayectorias para cada modelo, mientras que los cuadrados indican el estado actual del modelo ($z = 0$) en este espacio fase. El modelo vc -CDM presenta una trayectoria la cual converge en Λ CDM en $z = -1$, mientras que los modelo vp -CDM y vc - Λ CDM presentan trayectorias que en el pasado se fueron acercando a Λ CDM hasta alcanzarlo y posteriormente superarlo para actualmente encontrarse por encima del modelo de concordancia. El comportamiento del modelo vp - Λ CDM difiere de los modelos anteriores, ya que sus trayectorias en ningún momento se acercan a Λ CDM, además, en el futuro se aleja de la coordenada que representa al modelo de concordancia y de los otros modelos disipativos.

Dirección General de Bibliotecas de P. U. Q.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se estudió la dinámica del Universo considerando efectos disipativos los cuales son modelados como funciones constantes y polinomiales de la forma $\sim a^{-n}$, donde a es el corrimiento al rojo. Como primera aproximación, se estudió un modelo cosmológico el cual consiste en un fluido no perfecto tipo polvo para probar que éste genera una expansión acelerada a través de los términos disipativos. Aunque nuestros resultados fueron consistentes con lo esperado según Λ CDM, este modelo presenta problemas porque se encuentra fuera del equilibrio termodinámico y por ello, se requiere de un componente extra para solventarlos.

La primera parte del trabajo consistió en el acotamiento de los parámetros libres de los modelos cosmológicos mediante el método Markov Monte Carlo usando las observaciones provenientes de las mediciones directas del parámetro de Hubble y de Supernovas del tipo Ia. Al comparar los modelos disipativos con el modelo Λ CDM, usando el criterio AIC, se obtiene que las observaciones respaldan tanto a los modelos disipativos como a Λ CDM. Sin embargo, el criterio BIC, indica que existe cierta cantidad de evidencia en contra de los fluidos viscosos.

Una vez acotados los parámetros libres de los modelos, se reconstruyeron los parámetros cosmográficos. A partir del parámetro de desaceleración, se observó que las viscosidades cumplen el papel de la energía oscura en los modelos compuestos por un fluido imperfecto de materia polvo, produciendo una aceleración. En general, los efectos disipativos producen una transición desaceleración-aceleración más temprana en comparación con Λ CDM. Por otro lado, en el parámetro jerk se observa que la viscosidad en los modelos Λ CDM disipativos produce una modificación en la ecuación de estado de la energía oscura, pasando de ser constante a variar conforme al tiempo. Con lo que respecta a las épocas actuales, se estimaron desviaciones a Λ CDM menores de 3σ en la mayoría de los parámetros cosmográficos de los modelos disipativos, además, se obtuvo que al considerar efectos disipativos en la evolución del Universo genera un aumento en la edad de Universo en comparación con modelos que consideran fluidos perfectos.

En la parte final del trabajo, se analizó el comportamiento del parámetro del Hubble adimensional respecto a $(1+z)^3$ y el diagnóstico statefinder. A partir del diagnóstico E^2 se obtiene que aproximadamente para $z > 1.1$ los modelos disipativos presentan un comportamiento de modelos fantasmas, mientras que en $z \approx 1$ la mitad de los modelos presenta una transición a la zona de quintaesencia. Sin embargo, cuando $z \rightarrow -1$ todos los modelos disipativos divergen. Finalmente, en el diagnóstico statefinder se vuelve a observar la naturaleza dinámica de la ecuación de estado de la energía oscura en los modelos disipativos, los cuales presenta distintas trayectorias en comparación de

Λ CDM, que es un punto fijo en el espacio fase $s - r$.

En conclusión, los modelos cosmológicos que incluyen una viscosidad de bulto son alternativas interesantes y viables para modelar el Universo debido a que reproducen de manera aceptables la observaciones directas del parámetro de Hubble y Supernovas del Tipo Ia. Sin embargo, es necesario un estudio más amplio para esta clase de modelos, considerar muestras de datos como las oscilaciones acústica de bariones o lentes gravitacionales fuertes, e incluso introducir el componente de radiación con la finalidad de estudiar épocas tempranas usando la radiación de fondo de microondas.

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Apéndice A

Publicaciones



L. Herrera-Zamorano, A. Hernández-Almada; Revista NTHE, n. 20, pp 19-24, 2018

Revista NTHE, 20: 19-y, 2018
ISSN: 2007-9079
<http://www.nthe.concyteq.edu.mx/>

Estudios de sesgo estadístico en cosmología

L. Herrera-Zamorano*, A. Hernández-Almada**

Abstract

Based on Lambda-Cold-Dark Matter (Λ CDM) model, and using the Observational Hubble Data (OHD) and Supernovae type Ia (SNIa) sample, we study a possible bias due their limited statistics in the free model parameters. We develop an algorithm with the purpose of having the parameter best fits of the Λ CDM model for several data size by selecting with Monte Carlo Methods subsamples that contains 50%, 75%, and 90% of the OHD and SNIa dataset. We estimate a bias on the model parameters up to 1%, that is negligible with respect to other sources of systematics.

Keywords: *computational physics; statistics; cosmology*

Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
Centro Universitario: Cerro de las Campanas 76010
Querétaro, México
lherrera31@alumnos.uaq.mx
**ahalmada@uaq.mx

Fecha de recepción: 4 de abril de 2018 Fecha de aceptación: 28 de junio de 2018

Resumen

Con base en el modelo cosmológico Λ CDM y utilizando los datos observacionales del parámetro de Hubble (OHD), así como la muestra de Supernova tipo Ia (SNIa), estudiamos un posible sesgo debido a la cantidad de datos estadísticos en los parámetros libres del modelo Ω_{m0}, h . Asimismo, desarrollamos un algoritmo con el propósito de estimar los valores del modelo Λ CDM que mejor se ajuste tomando en cuenta diferentes tamaños de submuestras, con 50, 75 y 90% de los datos de OHD y SNIa. Como resultado principal, se estimó un sesgo inferior a 1% en los parámetros del modelo, lo cual es despreciable si se consideran otras posibles fuentes de incertidumbre sistemática de estos datos.

Palabras clave: *física computacional; estadística; cosmología*

Introducción

La cosmología es la rama de la física que estudia el origen y la evolución del universo. Actualmente, las observaciones provenientes de las Supernovas tipo Ia (SNIa), la radiación de fondo de microondas (CMB), las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y las mediciones directas del parámetro de Hubble (OHD) [1-3] indican que el universo se está expandiendo de manera acelerada y su entendimiento es uno de los grandes retos de la cosmología; además de ello, las mediciones de las velocidades de rotación de las galaxias indican un exceso de materia aún no observado. Dichos fenómenos están catalogados como energía oscura y materia oscura, respectivamente.

Por ejemplo, una prueba de la expansión del universo —es decir, que las galaxias y cúmulos de galaxias a gran escala se están alejando unos de otros— es el corrimiento al rojo de las líneas espectrales del hidrógeno y otros elementos químicos de las estrellas, como se ejemplifica en la figura 1, donde las longitudes de ondas de la radiación se vuelven más largas por dicha expansión.



Constraints and cosmography of Λ CDM in presence of viscosity

L. Herrera-Zamorano^{1,a}, A. Hernández-Almada^{1,b}, Miguel A. García-Aspeitia^{2,3,c}

¹ Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro Universitario Cerro de las Campanas, 76010 Santiago de Querétaro, Mexico

² Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad esquina con Paseo a la Bufa S/N, 98060 Zacatecas, Mexico

³ Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Av. Insurgentes Sur 1582. Colonia Crédito Constructor, Del. Benito Juárez, 03940 Mexico City, Mexico

Received: 22 May 2020 / Accepted: 8 July 2020
© The Author(s) 2020

Abstract In this work, we study two scenarios of the Universe filled by a perfect fluid following the traditional dark energy and a viscous fluid as dark matter. In this sense, we explore the most simple case for the viscosity in the Eckart formalism, a constant, and then, a polynomial function of the redshift. We constrain the phase-space of the model parameters by performing a Bayesian analysis based on Markov Chain Monte Carlo method and using the latest data of the Hubble parameter (OHD), Type Ia Supernovae (SNIa) and Strong Lensing Systems. The first two samples cover the region $0.01 < z < 2.36$. Based on AIC, we find equally support of these viscous models over Lambda-Cold Dark Matter (LCDM) taking into account OHD or SNIa. On the other hand, we reconstruct the cosmographic parameters (q, j, s, l) and find good agreement to LCDM within up to 3σ CL. Additionally, we find that the cosmographic parameters and the acceleration-deceleration transition are sensible to the parameters related to the viscosity coefficient, making of the viscosity an interesting physical mechanism to modified them.

1 Introduction

Nowadays, one of the challenges in cosmology is the understanding and description of the accelerated expansion phase of the Universe. Several cosmological observations give support to this phenomena; firstly it was confirmed by Supernovae of the Type Ia (SNIa) [1] then, by the acoustic peaks of cosmic microwave background radiation (CMB) [2] and supported by direct measurements of the Hubble parameters (OHD) [3], Baryon acoustic oscillations (BAO) [4], and

strong lensing systems (SLS) [5]. The simplest model, called Λ -Cold Dark Matter (LCDM), describes very well such cosmological observations and proposes a cosmological constant (Λ or CC) characterized by an equation of state (EoS) $w = -1$ to model the accelerated expansion of the Universe and dust matter ($w = 0$) to simulate the dark matter evolution at the background level. These two extra components correspond about $\sim 95\%$ of the total [2], being the rest of components associated with baryons and relativistic species like photons and neutrinos. Also, in the literature these first two ingredients are known as dark energy (DE) and dark matter (DM).

Besides its successful at large scale, LCDM presents several problems at local scales, for instance, the well known *missing satellite problem* that refers to the discrepancy of about 10 times more dwarf galaxies obtained by the numerical simulations based on LCDM model and the observed ones in cluster of galaxies [6, 7]. Also, the well-known *core-cusp problem* [8]. Furthermore, there are open questions concerning to the origin of the cosmological constant. In this vein, it is the *concordance problem* that consists in a disagreement of about 120 orders of magnitude in the CC value measured from the Quantum Field Theory point of view and the one obtained from cosmological measurements [9–11]. Additionally, the *degeneracy problem* which afflicts also the LCDM model, refers to the inability of measuring the energy-momentum of each component, instead the total one. In other words, this implies the inability to know if the dark sector is composed by one or several components¹.

Several models have emerged in order to propose alternatives to the LCDM paradigm, for instance, brane-world [13], Chaplygin gases [14], Unimodular gravity [15, 16], among others [17], have entered into the scene as a greater contenders, resolving conundrums that the LCDM cannot, more-

^a e-mail: lherrera31@alumnos.uaq.mx

^b e-mail: ahalmada@uaq.mx (corresponding author)

^c e-mail: aspeitia@fisica.uaz.edu.mx

¹ For a review of the LCDM problems, see for instance [12].

En este apéndice se muestran los artículos publicados durante las estancias de investigación dirigidas por el Dr. Alberto Hernández Almada. En el primer artículo, titulado “Estudios de sesgo estadísticos en cosmología”, se estudian los posibles sesgos que pueden presentar los parámetros libres del modelo Λ CDM debido al número de datos con los que cuentan las observaciones directas del parámetro de Hubble y las Supernovas del Tipo Ia [48]. Finalmente, en el artículo “Constraints and cosmography of Λ CDM in presence of viscosity ” se reportan los resultados para los modelos Λ CDM disipativos que se presentan en este trabajo considerando la muestra de datos de lentes gravitacionales fuertes [49].

Dirección General de Bibliotecas de la UAQ

Bibliografía

- [1] S. Saha, *Elements of Cosmological Thermodynamics*. Springer International Publishing, 2018.
- [2] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [3] P. Jain, *An introduction to astronomy and astrophysics*. CRC Press, 2016.
- [4] F. F. e. a. ESA/Hubble NASA, “Hubble snaps a crowded cluster.” [urlhttps://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2019/hubble-snaps-a-crowded-cluster](https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2019/hubble-snaps-a-crowded-cluster), 2019. Accedido 22-07-2020.
- [5] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [6] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, *et al.*, “Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, p. 565, 1999.
- [7] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, *et al.*, “Planck2015 results,” *Astronomy Astrophysics*, vol. 594, p. A13, Sep 2016.
- [8] S. Alam, M. Ata, S. Bailey, F. Beutler, D. Bizyaev, *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 470, pp. 2617–2652, 03 2017.
- [9] V. C. Rubin and W. K. Ford Jr, “Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions,” *The Astrophysical Journal*, vol. 159, p. 379, 1970.
- [10] M. Persic, P. Salucci, and F. Stel, “The universal rotation curve of spiral galaxies—i. the dark matter connection,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 281, no. 1, pp. 27–47, 1996.
- [11] C. S. Frenk, A. E. Evrard, S. D. White, and F. Summers, “Galaxy dynamics in clusters,” *The Astrophysical Journal*, vol. 472, no. 2, p. 460, 1996.
- [12] P. Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, *et al.*, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters,” 2018.
- [13] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess, “Tensions between the early and late universe,” *Nature Astronomy*, vol. 3, p. 891–895, Sep 2019.
- [14] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989.
- [15] J. Martin, “Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask),” *Comptes Rendus Physique*, vol. 13, no. 6-7, pp. 566–665, 2012.
- [16] A. Del Popolo and M. Le Delliou, “Small scale problems of the cdm model: A short review,” *Galaxies*, vol. 5, p. 17, Feb 2017.

- [17] M. Chevallier and D. Polarski, “Accelerating universes with scaling dark matter,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 10, no. 02, pp. 213–223, 2001.
- [18] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [19] A. De Angelis and M. Pimenta, *Introduction to Particle and Astroparticle Physics*. Springer International Publishing, 2018.
- [20] L. A. Ureña-López and T. Matos, “New cosmological tracker solution for quintessence,” *Physical Review D*, vol. 62, Sep 2000.
- [21] S. Anand, P. Chaubal, A. Mazumdar, and S. Mohanty, “Cosmic viscosity as a remedy for tension between PLANCK and LSS data,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2017, pp. 005–005, nov 2017.
- [22] C. Eckart, “The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid,” *Physical review*, vol. 58, no. 10, p. 919, 1940.
- [23] W. Israel and J. Stewart, “Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory,” *Annals of Physics*, vol. 118, no. 2, pp. 341–372, 1979.
- [24] M. M. Disconzi, T. W. Kephart, and R. J. Scherrer, “New approach to cosmological bulk viscosity,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 043532, Feb 2015.
- [25] I. Brevik, Ø. Grøn, J. de Haro, S. D. Odintsov, and E. N. Saridakis, “Viscous cosmology for early- and late-time universe,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 26, no. 14, p. 1730024, 2017.
- [26] M. Xin-He and D. Xu, “Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 52, no. 2, p. 377, 2009.
- [27] A. Hernández-Almada, “Cosmological test on viscous bulk models using hubble parameter measurements and type ia supernovae data,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, Sep 2019.
- [28] A. Hernández-Almada, M. A. García-Aspeitia, J. Magaña, and V. Motta, “Stability analysis and constraints on interacting viscous cosmology,” *Physical Review D*, vol. 101, Mar 2020.
- [29] B. Normann and I. Brevik, “General bulk-viscous solutions and estimates of bulk viscosity in the cosmic fluid,” *Entropy*, vol. 18, no. 6, p. 215, 2016.
- [30] J. Magaña, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta, “The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 476, no. 1, pp. 1036–1049, 2018.
- [31] D. M. Scolnic *et al.*, “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed Type Ia Supernovae from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from The Combined Pantheon Sample,” 2017.
- [32] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky, and U. Alam, “Statefinder—a new geometrical diagnostic of dark energy,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, vol. 77, p. 201–206, Mar 2003.
- [33] V. Sahni, A. Shafieloo, and A. A. Starobinsky, “Two new diagnostics of dark energy,” *Physical Review D*, vol. 78, no. 10, p. 103502, 2008.
- [34] Y. Choquet-Bruhat, *Introduction to general relativity, black holes, and cosmology*. OUP Oxford, 2014.
- [35] Y. L. Bolotin, V. Cherkaskiy, O. Y. Ivashtenko, M. Konchatnyi, and L. Zazunov, “Applied cosmography: A pedagogical review,” *arXiv preprint arXiv:1812.02394*, 2018.
- [36] L. Wasserman, *All of Statistics*. Springer New York, 2004.
- [37] J. Wakefield, *Bayesian and Frequentist Regression Methods*. Springer New York, 2013.

- [38] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 21, p. 1087–1092, Jun 1953.
- [39] W. K. Hastings, "Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications," *Biometrika*, vol. 57, p. 97–109, Apr 1970.
- [40] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, 1974.
- [41] N. Sugiura, "Further analysts of the data by akaike' s information criterion and the finite corrections," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 7, no. 1, pp. 13–26, 1978.
- [42] Z. Davari, M. Malekjani, and M. Artymowski, "New parametrization for unified dark matter and dark energy," *Physical Review D*, vol. 97, Jun 2018.
- [43] G. Schwarz, "Estimating the dimension of a model," *The Annals of Statistics*, vol. 6, p. 461–464, Mar 1978.
- [44] A. Meurer, C. P. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, A. Kumar, S. Ivanov, J. K. Moore, S. Singh, T. Rathnayake, S. Vig, B. E. Granger, R. P. Muller, F. Bonazzi, H. Gupta, S. Vats, F. Johansson, F. Pedregosa, M. J. Curry, A. R. Terrel, v. Roučka, A. Saboo, I. Fernando, S. Kulal, R. Cimrman, and A. Scopatz, "Sympy: symbolic computing in python," *PeerJ Computer Science*, vol. 3, p. e103, Jan. 2017.
- [45] T.-J. Zhang, C. Ma, and T. Lan, "Constraints on the dark side of the universe and observational hubble parameter data," *Advances in Astronomy*, vol. 2010, 2010.
- [46] E. Gaztañaga, A. Cabré, and L. Hui, "Clustering of luminous red galaxies - iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $h(z)$," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 399, p. 1663–1680, Nov 2009.
- [47] A. Hernández-Almada, J. Magaña, M. A. García-Aspeitia, and V. Motta, "Cosmological constraints on alternative model to chaplygin fluid revisited," *The European Physical Journal C*, vol. 79, Jan 2019.
- [48] L. Herrera-Zamorano and A. Hernández-Almada, "Estudios de sesgo estadístico en cosmología," *Revista NTHE*, no. 20, 2018.
- [49] L. Herrera-Zamorano, A. Hernández-Almada, and M. A. García-Aspeitia, "Constraints and cosmography of λ cdm in presence of viscosity," *The European Physical Journal C*, vol. 80, Jul 2020.