Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Mecanismos: un recurso para la enseñanza de Geometría euclidiana a nivel bachillerato y profesional

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:

Mariana Mejía Llamas

Dirigido por:

Dr. Jesús Jerónimo Castro

Dr. Jesús Jerónimo Castro
Presidente

Dr. Víctor Larios Osorio
Secretario

M. C. Emilio Angulo Perkins
Vocal

Dra. Angélica Rosario Jiménez Sánchez
Suplente

Dr. Francisco Gerardo Jiménez López
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Septiembre de 2020
México

Índice.

Agradecimientos.

A mi mamá, por su cariño, su apoyo absoluto y su infinita paciencia.

A cada uno de mis sinodales, por sus valiosos comentarios y observaciones que enriquecieron este trabajo.

A CONACYT, por la beca recibida durante la maestría.

Resumen.

Este trabajo presenta una forma de incorporar aplicaciones genuinas de conceptos geométricos en la enseñanza de Geometría Euclidiana a nivel bachillerato (o profesional), con el propósito de interesar al estudiante por el estudio de esta rama de las matemáticas y para desarrollar sus habilidades de demostración y argumentación. La propuesta se basa en el proceso de modelación matemática y toma como referencia las ideas de la **perspectiva educativa** (o integradora) que aparece en el campo de investigación de *aplicaciones y modelación* en la educación matemática. Las dos aplicaciones (mecanismos) que dirigen la propuesta son el pantógrafo y la broca de Watts, y son acompañadas de una serie de ejercicios que permiten consolidar la comprensión de los conceptos geométricos que cada uno abarcó.

Palabras clave: Aplicaciones y modelación matemática, Geometría Euclidiana, enseñanza.

Abstract.

This work presents a way of incorporating genuine applications of geometric concepts in the teaching of Euclidean Geometry in high school (or university), with the purpose of engaging the student in the study of this branch of mathematics and to develop their skills of demonstration and argumentation. The proposal is based on the mathematical modeling process and takes as reference the ideas of the **educational perspective** (or integrative perspective) that appears in the international discussion on applications and modeling in mathematics education. The two applications (mechanisms) that guide the proposal are the pantograph and the Watts drill, and they are accompanied by a series of exercises that allow consolidating the understanding of the geometric concepts that each one covered.

Keywords: Applications and mathematical modelling, Euclidean Geometry, teaching.

1. Introducción.

Varias investigaciones realizadas dentro del área de Educación Matemática han mostrado que diversos beneficios pueden obtenerse de incluir aplicaciones y modelación en la enseñanza de las matemáticas, cualquiera que sea el nivel escolar (véanse, por ejemplo, los trabajos de Dorier (2006), Biembengut y Hein (2004; 2007), Trigueros (2009) y Possani, Trigueros, Preciado y Lozano (2010)). Entre esos beneficios está elevar el grado de motivación en los alumnos por el estudio de esta ciencia. El propósito de este trabajo fue elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría Euclidiana a nivel bachillerato (y con posibles usos a nivel profesional) que incorporara aplicaciones de conceptos geométricos. El poco interés que muestran los estudiantes por aprender matemáticas en general, la escasez de aplicaciones genuinas en los libros de texto y la falta de 'guías' para incluir en clase aplicaciones que sí pudieran considerarse genuinas, fueron algunos de los motivos para realizar esta propuesta.

Las aplicaciones seleccionadas para la propuesta fueron dos mecanismos (dispositivos o artefactos) que antaño fueron diseñados, utilizando conceptos elementales de geometría, para resolver cierta necesidad real: el pantógrafo y la broca de Watts. A grandes rasgos la propuesta consiste en plantear algunas cuestiones que requieran para su resolución estudiar (matemáticamente) estos mecanismos, lo que permite abordar contendido programático de la asignatura que corresponde a Geometría Euclidiana en los programas de bachillerato. Los mecanismos son acompañados de una serie de actividades y problemas que buscan: (1) reafirmar los conceptos geométricos que cada uno involucra y (2) apoyar el desarrollo de habilidades de razonamiento, justificación y demostración de los estudiantes, lo que ha sido planteado por distintos programas del nivel medio superior como uno de los propósitos del curso.

2. Antecedentes.

Entre los trabajos que se han realizado con respecto a la enseñanza de las matemáticas a través de las aplicaciones y la modelación encontramos el desarrollado por un grupo de investigadores del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). Su estrategia de enseñanza está dirigida a un nivel universitario y toma como base dos teorías de la educación matemática: la perspectiva Modelos y Modelación (o perspectiva contextual[1]) y la teoría de aprendizaje APOE.

A grandes rasgos, y por lo que se explica en sus reportes (ver Trigueros, 2009; Possani et al., 2010; Trigueros, Possani, Lozano y Sandoval, 2009), su estrategia consiste en presentar a los alumnos situaciones o problemas realistas (cuya solución requiere la construcción de un modelo matemático) que les permitan desarrollar ideas matemáticas conforme intentan resolverlos. Estas ideas son tomadas como base para apoyar la introducción de los conceptos matemáticos relacionados con la situación que se modela y para lograr un aprendizaje significativo de los mismos se diseñan actividades (más controladas) a la luz de la teoría APOE. Cabe mencionar que los problemas propuestos deben satisfacer los criterios planteados por la perspectiva Modelos y Modelación que verifican si un problema tiene el potencial de contribuir al aprendizaje de los alumnos.

En los siguientes tres párrafos se describe brevemente una de sus experiencias realizada con estudiantes universitarios en un curso de Álgebra Lineal, así como los resultados que obtuvieron (ver Possani et al., 2010; Trigueros et al., 2009). A los estudiantes se les planteó un problema lo suficientemente abierto que les exigía realizar trabajo de modelación. El contexto del problema fue el control del tráfico en una ciudad. Los alumnos debían identificar las variables y las condiciones del problema para así plantear un sistema de ecuaciones lineales que les permitiera modelarlo. Con esto se pretendía que los alumnos profundizaran sus conocimientos acerca de los sistemas de ecuaciones lineales, pues ellos ya sabían resolver sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Sin embargo, el sistema que modelaba el problema era más complejo y largo que aquellos que los alumnos estaban acostumbrados a resolver. La dificultad en la manipulación del sistema para resolverlo con los métodos que conocían, y así dar respuesta a las preguntas específicas del problema, les hizo ver la necesidad de un algoritmo sistemático para resolver sistemas grandes de ecuaciones (el método de Gauss) y de la representación matricial. En este momento, un conjunto de actividades basadas en la teoría APOE se usaron para ir preparando la introducción del concepto de matriz aumentada y la justificación de los pasos que deben seguirse en la eliminación gaussiana, que eran conceptos nuevos para los estudiantes. Una vez aprendidos estos conceptos, los alumnos podían regresar al modelo original y resolverlo.

Los resultados de esta investigación revelaron que el uso de la modelación en clase ayudaba a motivar a los estudiantes, pues estos mostraron mucho interés durante todo el proceso y trabajaron intensamente en las actividades propuestas. Pero también se observó que los

[1] Ver el apartado 5.1, página 11.

alumnos tuvieron varias dificultades a lo largo del proceso de modelación, como en la identificación de las variables y en encontrar un modelo adecuado que representara la situación problema. Las dificultades fueron más evidentes cuando ellos no pudieron reconocer una condición adicional necesaria para lograr escribir las ecuaciones y que tenía que deducirse de un análisis de la situación problema.

Otras de sus investigaciones mencionan resultados parecidos, en las que los alumnos no son capaces o tienen dificultades en plantear el modelo matemático, sobre todo en lo que respecta a la selección de las variables y en establecer relaciones entre ellas (ver Trigueros, 2006 y 2008). Debido a que lo anterior se traduce en tiempo considerable de clase, la estrategia de enseñanza que se propone en el presente trabajo opta por dar a conocer a los alumnos modelos ya hechos de situaciones problema (bajo la forma de mecanismos), en lugar de esperar que ellos realicen el trabajo de modelación.

Algunos de los defensores de la enseñanza de las matemáticas a través de las aplicaciones y la modelación señalan que para casi cualquier tema del currículo de matemáticas existe una gran variedad de ejemplos de aplicaciones y modelos adecuados para la enseñanza (Blum, 1991). Entre los trabajos que se han encargado de recolectar dichos ejemplos, encontramos para el área de Geometría Euclidiana el libro de Brian Bolt, *Mathematics meets Technology*, donde el autor presenta una amplia colección de mecanismos articulados elementales como el "triángulo de base variable" o el "enlace de 4 barras"; explica de forma breve, utilizando argumentos matemáticos, cómo son sus movimientos; y expone varios objetos cotidianos que utilizan dichos mecanismos para su funcionamiento, como el gato hidráulico o los limpiaparabrisas de un autobús. Así mismo propone una serie de actividades y problemas (con sus soluciones) relacionados con cada uno de los mecanismos mostrados. Cabe señalar que la explicación del funcionamiento de los mecanismos es accesible para alumnos de bachillerato.

Al comienzo de su libro, Bolt señala que los mecanismos articulados son una verdadera fuente de ideas geométricas que permiten abordar la enseñanza de la Geometría Euclidiana de una manera más dinámica (y no estática como tradicionalmente se ha hecho), haciendo posible acceder a otros conceptos que los expuestos por Euclides. Plantea así que el estudio de estos mecanismos podría dar una mejor comprensión de las relaciones espaciales permitiéndole al alumno desarrollar su conciencia espacial.

Menciona también que una de las maneras en que puede ser usado su libro por los maestros de matemáticas consiste en: seleccionar un aspecto de alguno de los mecanismos presentados en el libro para hacer énfasis en algún concepto de Geometría Euclidiana. Por ejemplo, el estudio del "enlace de 4 barras" puede ilustrar conceptos como: cuadrilátero, paralelogramo, trapecio, ángulo, longitud, gráfica, lugar geométrico, entre otros.

Este libro se considera una fuente de ejemplos de aplicaciones de conceptos geométricos, y está pensado para que los profesores de matemáticas puedan usar de manera ocasional alguno de esos ejemplos en sus cursos. Sin embargo, aunque la labor de mostrar buenos ejemplos de aplicaciones es absolutamente esencial y loable, preguntas importantes como: ¿cómo presentar el mecanismo a los alumnos?, ¿qué conocimientos matemáticos deben tener antes de que les sea presentado?, ¿en qué momento se introducen los conceptos geométricos que deben aprender?, son preguntas que quedan al aire, o mejor dicho, a consideración del profesor. Tanta libertad puede resultar abrumadora para un maestro con poca experiencia incorporando aplicaciones en sus cursos de matemáticas. El presente trabajo va entonces encaminado a contestar esas preguntas y brindar una guía al profesor sobre cómo incluir esas aplicaciones (mecanismos) en su clase de geometría.

Existen también recursos multimedia de libre acceso que recolectan aplicaciones de matemáticas. Uno de ellos es el creado por la *Associazione Macchine Matematiche*[2]. En su sitio Web[3], en el apartado "Macchine e Simulazioni", se presenta una gran colección de máquinas matemáticas[4] cuyo funcionamiento involucra conceptos de Geometría Euclidiana y/o Geometría Analítica. Para cada aparato se muestra la imagen de su reproducción, la explicación de su funcionamiento y (en algunos) la justificación matemática del mismo, así como una simulación digital manipulable del aparato realizada con *GeoGebra*.

En el apartado "Visite in Laboratorio" se encuentran hojas de trabajo (nivel básico y avanzado) para diferentes máquinas, las cuales han sido divididas en cuatro grupos: (1) cónicas y conicógrafos, (2) transformaciones geométricas, (3) perspectiva y (4) trisección. En ambos niveles, estas hojas de trabajo presentan varias preguntas generales sobre la estructura de la máquina y su funcionamiento, con el objetivo de estimular el proceso de formulación de conjeturas y de demostración. Las hojas de nivel avanzado también contienen preguntas de Geometría Analítica que conducen a la ecuación de la curva dibujada por la máquina. Es de señalar que todo este material se encuentra escrito en italiano.

A pesar de lo útil que pudieran ser las hojas de trabajo diseñadas por la *Associazione*, este material no es una propuesta didáctica para abordar la asignatura de Geometría Euclidiana o Geometría Analítica haciendo uso de las máquinas matemáticas, sino que más bien se presenta como un recurso que puede ser usado por el maestro para complementar su clase de geometría.

[2] Desde 1982 fueron diseñadas y construidas por maestros del Liceo Tassoni cerca de 200 "máquinas matemáticas", utilizadas por ellos en su actividad docente. A partir de esto y con la idea de crear un proyecto innovador para la enseñanza de la Geometría surge, en colaboración con algunos profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Módena, Italia, la *Associazione Macchine Matematiche*. Aparte de la construcción física de modelos prácticos para enseñar Geometría, la *Associazione* también ha producido material audiovisual sobre dichos modelos y ha dado varias exhibiciones de sus máquinas al público. A este respecto, en el apartado "Cataloghi Mostre" aparece el material digital preparado para la exposición "Theatrum Machinarum", elaborado con el fin de dar al visitante un catálogo dinámico de los objetos en exhibición. En este material, cada modelo es introducido con una foto, una animación, una descripción y la prueba de sus propiedades. Este texto está solamente en italiano. En esa misma liga se encuentra también el material digital y el catálogo completo de las "máquinas matemáticas" que se encuentran en el *Laboratorio de Matemáticas* del Museo Universitario de Ciencias Naturales e Instrumentos Científicos de la Universidad de Módena.

[3] http://www.macchinematematiche.org/

[4] Las "máquinas matemáticas" son herramientas o mecanismos que se utilizan para trazar curvas (como las cónicas), producir transformaciones geométricas, resolver problemas dentro de la matemática (por ejemplo, el de la trisección de un ángulo) o para ilustrar algún teorema.

3. Justificación.

Para Polya[5] uno de los requisitos que deben cumplirse para que el aprendizaje del alumno sea efectivo es que éste tenga interés en el material que está estudiando. Si el alumno no considera que aquello que se le está tratando de enseñar es relevante y significativo, difícilmente hará un esfuerzo por aprenderlo (Polya, 1962). Creemos necesario suscitar esta motivación ya que la experiencia propia y la de muchos otros profesores de matemáticas evidencia cierta apatía por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de esta ciencia, en particular por el de la Geometría Euclidiana.

La manera tradicional en la que se aborda esta rama de las matemáticas (presentando definiciones y demostraciones de teoremas y proposiciones) puede hacer pensar a los alumnos que los conceptos y resultados geométricos que se estudian son relevantes únicamente dentro del dominio de la propia geometría, es decir, que sirven solamente para deducir más conceptos y resultados geométricos, haciéndolos creer que al final del curso su única ganancia será una lista de objetos geométricos y sus propiedades. No es de extrañar entonces que a media clase se escuche la pregunta irreverente "¿y eso para qué sirve?", que pudiéramos traducir en "¿por qué es importante aprender tal o cual propiedad geométrica?". El profesor de geometría puede responder que lo verdaderamente importante no es la propiedad en sí, sino el proceso de deducirla, pues al hacer eso ellos están argumentando, expresando sus razonamientos, formulando conjeturas y observando la estructura axiomática de las matemáticas, que son habilidades que todos los seres humanos deben desarrollar para poder desenvolverse en la sociedad. Sin embargo, en ocasiones este argumento no es suficiente para motivarlos.

Es indudable que presentar aplicaciones 'reales' de conceptos matemáticos es un recurso muy socorrido por los profesores de matemáticas para convencer a sus alumnos de que es necesario y útil aprender dichos conceptos. Y diversos autores sostienen que efectivamente, las aplicaciones logran motivar a los estudiantes para que se involucren en el estudio de las matemáticas (Blum y Niss, 1991; Blum, 1991). Pero la mayor parte de las aplicaciones que aparecen en los libros de texto y a las que recurren los profesores son poco genuinas y artificiales. Son en realidad problemas que usan vocabulario de la vida diaria o de otras disciplinas y que pretenden por ello ser aplicaciones. Su solución requiere sólo transcribir el enunciado en términos matemáticos y usar una técnica o procedimiento matemático, cuya ejercitación es posiblemente el objetivo del problema. Su conexión con el mundo real es cuestionable (Pollak, 1969). Este tipo de 'aplicaciones' difícilmente podrá motivar a los estudiantes, pues su carácter artificial los hará juzgarlas como una treta del profesor para justificar la teoría recién enseñada.

Aunque existen aplicaciones genuinas de las matemáticas, se tiene cierto recelo a incluirlas en el salón de clases. A pesar de que muchas de ellas son fáciles de comprender, algo que no

---

[5] G. Polya (1887-1985) es considerado por muchos como el padre de las estrategias para la solución de problemas. Sus trabajos se enfocaron en intentar caracterizar los métodos generales que usa la gente para resolver problemas y en describir cómo se debería enseñar y aprender la manera de resolver problemas. Su obra más famosa es *How to solve it*, la cual ha sido traducida a más de 15 idiomas.

se puede negar es que, por definición, éstas exigen al alumno y al maestro tener cierto conocimiento del campo de aplicación. Esto requiere que el maestro que enseña matemáticas entienda cosas que normalmente no tiene por qué entender (Pollak, 1968). Se vuelven entonces necesarios trabajos que muestren aplicaciones genuinas y que se encuentren en un área donde los objetos, fenómenos, características o hechos que involucren puedan ser asequibles para el maestro y el alumno.

Por otro lado, la reconocida organización de profesores de matemáticas de Estados Unidos, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), indica en sus "Principios y Estándares para la Matemática Escolar"[6] que la Geometría es el lugar natural para el desarrollo de las habilidades de razonamiento y justificación de los estudiantes. Menciona que, durante su estudio, los alumnos deben tener la oportunidad de hacer y explorar conjeturas, así como probarlas o refutarlas usando definiciones y hechos establecidos. En particular, a nivel de bachillerato, los estudiantes deben ver el poder de la demostración deductiva para establecer la validez de resultados generales a partir de condiciones dadas. La atención debe estar en que produzcan argumentos lógicos y los presenten con explicaciones cuidadosas de su razonamiento. También se espera que los estudiantes presenten pruebas formales y, debido a que algunas situaciones no son propicias a formas directas de verificación, que desarrollen cierta experiencia con demostraciones indirectas. Además, deben aprender que ciertos tipos de resultados se demuestran usando inducción matemática.

Aunado a lo anterior, Polya considera que el aprendizaje debe ser activo para lograr que sea efectivo. A este respecto dice:

> "Ha sido dicho por muchas personas y en diferentes maneras que el aprendizaje debe ser activo, no solamente pasivo o receptivo. Únicamente leyendo libros o escuchando lecturas o viendo películas, sin agregar alguna acción de tu propia mente, difícilmente se podrá aprender algo" (Polya, 1962, p. 102).

Lo anterior exige formas en las que las recomendaciones del NCTM puedan incorporarse a las clases de Geometría Euclidiana y que, a su vez, fomenten el aprendizaje activo de los estudiantes.

4. Objetivo.

Elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría Euclidiana a nivel bachillerato (y con posible uso a nivel profesional) que incorpore aplicaciones genuinas y asequibles de conceptos geométricos y que tome en cuenta las recomendaciones del NCTM sobre los procesos que los estudiantes deben ser capaces de realizar durante el estudio de la Geometría.

[6] NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Este documento describe qué conocimientos y habilidades matemáticas deben adquirir los estudiantes desde el kínder hasta el bachillerato. Su intención es orientar los currículos escolares, la evaluación y la enseñanza de las matemáticas para lograr una mejora en la educación matemática.

5. Fundamentación teórica.

5.1 Aplicaciones y Modelación en Educación Matemática.

A*plicaciones y modelación* es un reconocido campo de investigación en educación matemática. Esto lo muestra la amplia literatura que desde hace ya más de 30 años se ha generado en el área, conformada principalmente por artículos, libros de texto, así como por los documentos que resultan de un gran número de conferencias internacionales[7]. Entre estas últimas podemos mencionar los ICMEs (Congresos Internacionales sobre Educación Matemática) en donde diferentes aspectos de este tema de investigación han figurado en sus agendas desde el ICME-3, llevado a cabo en 1976; y la serie de ICTMAs (Conferencias Internacionales sobre la Enseñanza de Modelación Matemática y Aplicaciones), que se han realizado cada dos años desde 1983. Mención especial merece el libro producido por el Estudio ICMI-14 sobre *Aplicaciones y modelación en la educación matemática* (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) que, junto con las publicaciones generadas por las actividades del ICMI (Comisión internacional de Instrucción Matemática) e ICTMA, reflejan el estado del arte en el tema.[8]

De manera muy general, esta área de investigación aboga por la inclusión de aplicaciones y de la modelación en la instrucción matemática de todos los niveles educativos. Las preguntas ¿por qué?, ¿con qué propósito?, ¿cómo?, son preguntas que no tienen una respuesta única, ya que existen diferentes perspectivas de investigación dentro del campo de las aplicaciones y la modelación matemática. Kaiser y Sriraman (2006) distinguieron cinco de estas perspectivas de acuerdo a los objetivos principales que persiguen y las fundamentaciones teóricas en las que se basan. Tenemos entonces: (1) la perspectiva realista, (2) la contextual, (3) la educativa, (4) la socio-crítica, y (5) la epistemológica. Los argumentos que se dan a favor de la incorporación de aplicaciones y modelos en la enseñanza de las matemáticas, así como las definiciones de conceptos básicos tales como ‘aplicación’, ‘modelo’, ‘modelación’,

---

[7] Para mayores referencias consúltese la bibliografía del Documento de Discusión del Estudio ICMI 14 sobre aplicaciones y modelación en la educación matemática (Blum, 2002).

[8] El ICMI es una organización internacional que se centra en la educación matemática en todos los niveles escolares. Es una comisión de la Unión Matemática Internacional (IMU) que, entre otras actividades, otorga la distinción más alta en el campo de las matemáticas: la Medalla Fields.

Cada cierto tiempo, el ICMI dirige estudios (Estudios ICMI) para investigar, en detalle y profundidad, algún tema de interés actual en educación matemática. Estos *Estudios* comienzan con la selección de un tema, luego se elabora un *Documento de Discusión* en el cual se plantean cuestiones importantes relacionadas al tema del Estudio y se distribuye internacionalmente para solicitar artículos sobre el campo. A partir de las contribuciones, un número limitado de participantes (alrededor de 75) es invitado a una conferencia (Conferencia del Estudio ICMI). Finalmente, utilizando las aportaciones hechas en dicha conferencia, se produce un *libro* cuyo contenido muestra “la situación actual” del tema escogido.

El ICME, celebrado cada cuatro años, es planificado y auspiciado por el ICMI. Fue realizado por primera vez en 1969 por iniciativa del entonces presidente del ICMI, Hans Freudenthal.

Cabe mencionar que la comunidad de académicos e investigadores que apoyaban las ICTMAs se estableció como una organización en sí misma, la Comunidad Internacional de Profesores de Modelación Matemática y Aplicaciones (también adoptando ICTMA como su acrónimo), y desde el 2003 ha estado afiliada al ICMI como un Grupo de Estudio.

etc., varían de una perspectiva a otra. Sin embargo, las perspectivas no son totalmente ajenas entre sí, tienen superposiciones; por ejemplo, algunas comparten ciertos objetivos o definen de la misma forma 'modelo' o 'aplicación'. Cabe mencionar que estas perspectivas no necesariamente cubren toda el área de investigación, pero son las más desarrolladas o las que han producido más publicaciones.

Por otro lado, Galbraith (2012) menciona que en esencia sólo hay dos enfoques con respecto a la modelación matemática dentro del escenario educativo: la "modelación como vehículo" y la "modelación como contenido". En el primer enfoque, los modelos, las aplicaciones y la modelación matemática son usados como un vehículo para introducir material curricular (conceptos matemáticos, procedimientos, etc.). Aquí las actividades de modelación matemática (actividades que involucren la construcción de modelos matemáticos) se incorporan en el aula sólo para proporcionar un escenario alternativo y atrayente en el que los estudiantes puedan aprenden matemáticas sin el objetivo principal de que se vuelvan modeladores expertos y se consideran necesarias en la instrucción matemática sólo si brindan a los estudiantes oportunidades significativas de desarrollar una comprensión más profunda de las matemáticas curriculares.

El segundo enfoque busca que los estudiantes adquieran habilidades para modelar y las utilicen para resolver problemas del mundo real. A diferencia del enfoque "modelación como vehículo" en el que la modelación está al servicio de otras necesidades curriculares o propósitos educativos, el enfoque "modelación como contenido" da prioridad a la actividad de modelación, la cual cumple un doble propósito: (a) dar a los estudiantes la experiencia de resolver problemas reales, es decir, que experimenten todas las complejidades involucradas en la construcción de un modelo matemático y (b) volverlos usuarios de su conocimiento matemático, en el sentido de que sean capaces de hacer frente a los problemas que aparezcan ya sea en su vida diaria o en su campo laboral.

Galbraith (2012) considera que las cinco perspectivas antes mencionadas siguen de manera implícita una de estas dos orientaciones ("modelación como vehículo" o "modelación como contenido") o ambas, y el énfasis que hacen de ciertos propósitos de una u otra orientación (o los que agregan) es lo que realmente las diferencia.

5.1.1 Perspectiva educativa.

La perspectiva que atañe a este trabajo es la perspectiva educativa, cuyas referencias clásicas las encontramos en Blum y Niss (1991) y Blum (1991, 1993).

La idea principal de la perspectiva educativa es integrar la modelación y las aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas como medios para aprender matemáticas y porque la modelación es considerada por sí misma una competencia importante que los alumnos deben desarrollar (Blomhoj, 2009). Es decir, que en esta perspectiva aparecen ambas orientaciones, la "modelación como vehículo" y la "modelación como contenido". La perspectiva educativa es una perspectiva integradora, ya que persigue distintos propósitos: pragmáticos, culturales y formativos.

Antes de mencionar los argumentos que esta perspectiva da a favor de las aplicaciones y la modelación en la instrucción matemática, se aclararán algunos términos y nociones básicas como 'problema real', 'modelo', 'modelación' y 'aplicación', que algunas veces son usados con un sentido diferente en otras perspectivas de investigación.

5.1.2. Conceptos básicos.

Según Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007) por *problema real* se entiende una situación abierta que pertenece al mundo real y que lleva consigo preguntas para las cuales no se tienen métodos, procedimientos o algoritmos directos para darles respuesta. Por *mundo real* se entiende el resto del mundo afuera de las matemáticas, esto es, todo lo que tenga que ver con la naturaleza, sociedad o cultura, incluyendo la vida diaria, las asignaturas escolares o universitarias y las disciplinas científicas distintas de las matemáticas. La *modelación* o *modelación matemática* es un proceso que comienza con un problema real. En un primer paso, esta situación tiene que simplificarse, estructurarse y hacerse más precisa, de acuerdo a las intenciones e intereses del 'modelador', especialmente formulando suposiciones y condiciones apropiadas. Esto lleva a un *modelo real* de la situación original. En un segundo paso, el modelo real tiene que *matematizarse* (si es posible, si hay algunas matemáticas en él), es decir que sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones tienen que traducirse al campo de las matemáticas. Resultando así un *modelo matemático* de la situación original. Este proceso continúa con un tercer paso en el cual se seleccionan métodos matemáticos adecuados y se trabaja dentro de las matemáticas hasta que se obtienen ciertos resultados matemáticos. Dichos métodos incluyen deducciones lógicas de suposiciones matemáticas, utilizar resultados teóricos de alguna rama de las matemáticas, resolver ecuaciones, realizar manipulaciones algebraicas, estimar parámetros, etc. En un cuarto paso, estos resultados tienen que volverse a trasladar al mundo real, esto es, tienen que *interpretarse* en relación con el problema original o el modelo real. El 'modelador' entonces *valida* y *evalúa* el modelo matemático revisando si los resultados obtenidos son razonables y compatibles con la información dada por el problema original y si estos son útiles a sus propósitos. Si ocurren discrepancias de algún tipo, entonces todo el proceso necesita ser repetido usando el modelo modificado o uno totalmente diferente. Así, es posible que el proceso de modelación necesite repetirse varias veces antes de poder alcanzar un modelo que resulte satisfactorio, cuyos resultados den solución al problema real original. Sin embargo, hay ocasiones en que, a pesar de muchos intentos, no se llegan a resultados razonables o útiles debido a que el problema real simplemente no es accesible a un tratamiento matemático.

Es importante que se entienda la diferencia entre *modelo* y *modelación*, por ello conviene insistir en que modelación se refiere a todo el proceso de estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación y validación/evaluación, durante el cual uno o más modelos matemáticos pueden surgir. Por lo tanto, un modelo es una parte del proceso de modelación. Dicho proceso es frecuentemente representado como un ciclo (véase la Fig. 1).

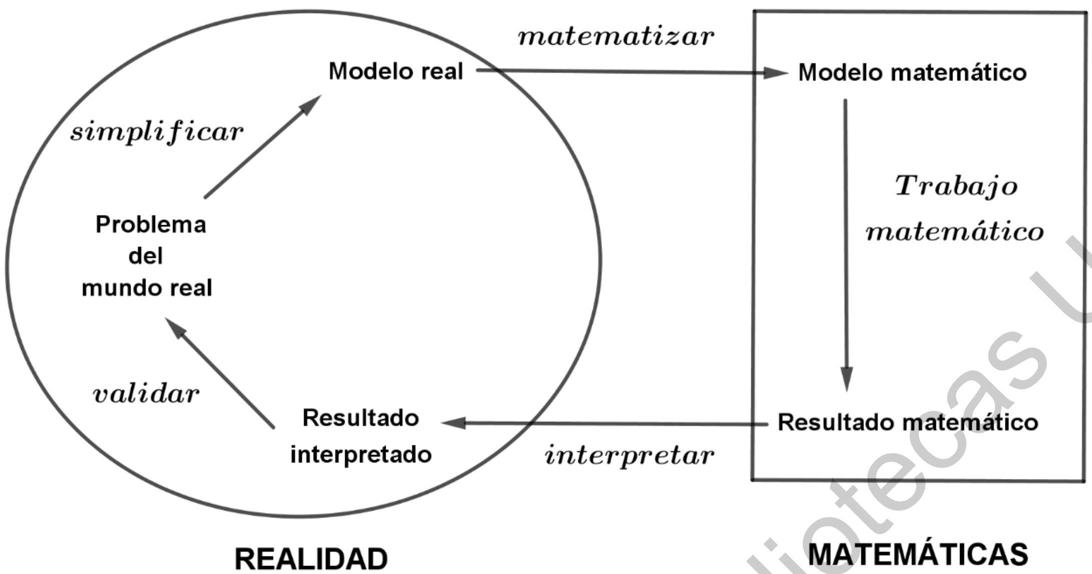


Figura 1. Ciclo de modelación.

Usar matemáticas para resolver un problema del mundo real se considera como *aplicar* matemáticas, y un problema del mundo real que ha sido abordado por medio de las matemáticas es llamado una *aplicación* de las matemáticas. Así, en cualquier aplicación de las matemáticas está involucrado, de manera explícita o implícita, un modelo matemático.

La distinción entre *aplicación* y *modelación* puede resultar un tanto complicada ya que ambos términos expresan algún tipo de relación entre el mundo real y las matemáticas. Sin embargo, el término *modelación* tiende a enfocarse en la dirección "realidad ⟶ matemáticas"; dicho de manera sencilla, con la modelación uno está parado afuera de las matemáticas preguntándose "¿dónde podría encontrar algunas matemáticas que me ayuden con este problema?". En cambio, el término *aplicación* tiende a enfocarse en la dirección contraria "matemáticas ⟶ realidad"; en palabras simples, con las aplicaciones uno está parado dentro de las matemáticas preguntándose "¿dónde podría utilizar este trozo particular de conocimiento matemático?".

5.1.3. Argumentos para la inclusión de aplicaciones y modelación en el currículo.

En Blum y Niss (1991) y Blum (1991) se menciona que, a lo largo de la historia de la educación matemática, los argumentos que han sido señalados una y otra vez para incluir aplicaciones y modelación en el currículo son básicamente cuatro y parten de lo que Blum (1991) considera algunos de los objetivos generales de la educación matemática. Esos objetivos son los siguientes:

1. *Objetivos pragmáticos*: La enseñanza de las matemáticas debe ayudar a los estudiantes a describir aspectos relevantes de áreas y situaciones extra-matemáticas, para entenderlas

mejor y hacer frente a ellas. Estas situaciones pueden aparecer en su vida diaria, en otras asignaturas de su educación básica, en estudios posteriores o en su campo laboral.

2. *Objetivos formativos*: El estudio de las matemáticas debe contribuir a que los estudiantes adquieran habilidades importantes, por ejemplo, argumentar, plantear y resolver problemas o trasladar situaciones del campo matemático al mundo real y viceversa. Así como favorecer el desarrollo de actitudes como la perseverancia, satisfacción por los esfuerzos intelectuales y el gusto por realizar actividades de índole matemática.

3. *Objetivos culturales*: A los estudiantes se les debe enseñar matemáticas para generar en ellos una imagen completa de las matemáticas, como ciencia y como parte de la historia y cultura del hombre, incluyendo una apreciación crítica de los usos actuales de las matemáticas en la sociedad.

El NCTM (2000) indica que la necesidad de entender y ser capaces de usar matemáticas en la vida diaria y en el lugar de trabajo jamás había sido tan grande como ahora, y menciona tres ejemplos en donde aparece esta necesidad de las matemáticas. Estos ejemplos podemos asociarlos con los objetivos anteriores:

Objetivos pragmáticos

Ejemplo 1. Matemáticas para la vida: Conocer matemáticas puede ser satisfactorio y brindar confianza en uno mismo. Los cimientos de la vida cotidiana cada vez son más matemáticos y tecnológicos. Por ejemplo, tomar decisiones de compra, escoger un seguro para un auto o pedir un préstamo hipotecario requiere una sofisticación cuantitativa.

Ejemplo 2. Matemáticas para el lugar de trabajo: Así como ha aumentado dramáticamente el nivel de matemáticas necesarias para una ciudadanía inteligente, también lo ha hecho el nivel de pensamiento matemático y resolución de problemas que se requiere en el lugar de trabajo de distintas áreas profesionales.

Objetivos culturales

Ejemplo 3. Matemáticas como parte del patrimonio cultural: Las matemáticas son uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad, y los ciudadanos deben desarrollar una apreciación y comprensión de ese logro, incluyendo sus aspectos estéticos e incluso recreativos.

En los currículos actuales también encontramos referencias a esos propósitos generales de la enseña de las matemáticas. Según el Acuerdo Secretarial 444, el modelo educativo establecido en la Educación Media Superior de México se basa en el desarrollo de un conjunto de competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. Entre estas competencias se encuentran las *competencias genéricas* que son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; las que les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean, así como participar eficazmente en los ámbitos social, profesional y político. Dada su importancia, constituyen el perfil del egresado de la Educación Media Superior. Las competencias genéricas son complementadas por las *competencias disciplinares básicas* que expresan los conocimientos, habilidades y actitudes mínimas necesarias de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida. Las competencias disciplinares básicas que corresponden al campo disciplinar de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares básicas de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases. A continuación se describen las competencias disciplinares básicas de matemáticas y se agrupan de acuerdo a los objetivos generales a los que creemos hacen referencia:

Objetivos pragmáticos

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Objetivos formativos

- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Blum (1991) estima que las aplicaciones y la modelación pueden utilizarse para promover el logro de los objetivos pragmáticos, formativos y culturales descritos al inicio de esta sección, resultando así varios argumentos a favor de incorporar aplicaciones y modelación en la instrucción matemática:

1. *Argumentos pragmáticos*: La instrucción matemática debe preparar a los estudiantes para que utilicen matemáticas en distintas situaciones (de la vida diaria, de otras materias de la escuela o de su profesión). Como este 'uso' de las matemáticas se produce a través de las aplicaciones, los modelos y la modelación, entonces estos requieren ser tratados en el salón de clases.

   Podría pensarse que lo anterior no es necesario puesto que, si el estudiante ha aprendido matemáticas teóricas de manera satisfactoria, entonces será capaz de usar matemáticas para entender y manejar situaciones de otras áreas y contextos, sin precisar de una enseñanza adicional, es decir, sin haber estudiado ejemplos de aplicaciones y modelos y sin haber realizado actividades de modelación. Sin embargo, existe amplia evidencia de que eso no sucede así. Bassanezi y Biembengut (1997) señalan que no siempre el hecho de tener un buen bagaje matemático se traduce en que el 'modelador' logre tener éxito en su labor de modelación, ya que la formalización de un problema en términos matemáticos es casi siempre el estadio más difícil del proceso de la modelación matemática y debe ser aprendido con la propia experiencia. Plantean así que una condición necesaria para el aprendizaje de la modelación es estudiar los modelos clásicos y las ideas esenciales que están envueltas en ellos.

2. *Argumentos formativos*: Las aplicaciones y la modelación matemática ayudan a desarrollar competencias y actitudes generales de los estudiantes, como argumentar, plantear y resolver problemas, tener una mente abierta para tratar una situación que se presente, tener confianza en sus propias capacidades y sentir satisfacción por sus esfuerzos intelectuales. Esto se debe a que dichas habilidades son necesarias para expresar un problema de la 'realidad' en términos matemáticos.

3. *Argumentos culturales*: Una tarea importante de la educación matemática es dar a los estudiantes una imagen rica y completa de las matemáticas como ciencia y como una actividad importante en la sociedad y en la cultura. Debido a que la modelación y las aplicaciones constituyen una parte esencial de dicha imagen, éstas deberían tener una posición apropiada en los currículos de matemáticas. Además, varias decisiones que afectan a la sociedad se toman en base a modelos matemáticos, por tanto, los estudiantes deben ser capaces de reconocer, entender, analizar y evaluar situaciones y ejemplos reales en donde las matemáticas están siendo utilizadas.
4. *Argumentos psicológicos*: Las aplicaciones y la modelación ayudan a brindar significado e interpretación a entidades y actividades matemáticas (conceptos, procedimientos, nociones, etc.), haciendo que los estudiantes adquieran un entendimiento más profundo y una mayor retención de ellos. Lo anterior también provee motivación a los estudiantes para que se involucren en el estudio de las matemáticas, mejorando sus actitudes hacia ellas.

Desde la visión de la perspectiva educativa, cada perspectiva de investigación (la realista, la contextual, etc.) da prioridad a diferentes objetivos generales de la instrucción matemática y, en consecuencia, los argumentos que dan a favor de la inclusión de aplicaciones y modelos en la enseñanza de las matemáticas son mayoritariamente de un tipo. Sin embargo, la perspectiva educativa considera que todos los objetivos generales son de gran importancia, por lo que todos los argumentos a favor de dicha inclusión (pragmáticos, formativos, culturales y psicológicos) deben ser tomados en cuenta. Este carácter integral es la razón por la que el presente trabajo toma de referencia la perspectiva educativa.

5.2 Modelación matemática como método de enseñanza.

Convencidos de que las aplicaciones y la modelación deben ser incorporadas en la instrucción matemática de todos los niveles educativos, surgen ahora las siguientes preguntas: ¿cómo debe hacerse esta inclusión de manera que todos los argumentos (pragmáticos, formativos, etc.) sean tomados en consideración?, ¿qué tipos de ejemplos deben escogerse y cómo deben enseñarse?

Biembengut y Hein (1999 y 2004) dan respuesta a las preguntas anteriores desarrollando un método de enseñanza basado en el proceso de modelación matemática. Este método puede utilizarse en cualquier nivel de escolaridad, desde el ciclo primario hasta la licenciatura, y permite exponer el contenido programático a partir de modelos aplicados a diversas áreas del conocimiento. Para su implementación el profesor elige un tema[9] que pueda interesar a los alumnos y elabora un modelo matemático, adaptándolo a la enseñanza. O bien, elige un modelo matemático ya existente (en Física, Química, Biología, Música, Economía, etc.) y lo

[9] Por tema se entiende algún asunto de un área del conocimiento. Algunos ejemplos de temas son: “plantación de papas”, “cría de pollos”, “construcción de una casa” y “abejas”. Varias cuestiones o problemas pueden plantearse sobre el tema elegido. Por ejemplo, para el tema “abejas” es posible formular los siguientes problemas: ¿cómo se forma una colmena? o ¿cuál es la geometría de las celdillas del panal?

adapta al desarrollo del contenido programático. Ese modelo servirá de guía. Esto involucra al profesor en la siguiente serie de etapas:

1) **Exposición del tema**: Comienza la clase haciendo una breve explicación sobre el asunto a los alumnos, instigándolos para que formulen preguntas sobre el tema abordado.

2) **Delimitación del problema:** Selecciona una o más preguntas que le permitan desarrollar el contenido programático. De ser posible y/o conveniente, se puede proponer a los alumnos que hagan una investigación sobre el asunto por medio de bibliografía o una entrevista a algún especialista en el asunto.

3) **Formulación del problema:** Plantea el problema, construyendo hipótesis, planteando ecuaciones u organizando los datos de la manera en que el contenido matemático lo requiera para la solución.

4) **Desarrollo del contenido programático:** En este momento, presenta el contenido programático (concepto, definición, propiedad, etc.) y establece una conexión con la pregunta que generó el proceso.

5) **Presentación de ejemplos análogos:** A continuación presenta ejemplos análogos, ampliando el abanico de aplicaciones y evitando así que el contenido se restrinja al tema o problema presentado.

6) **Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo:** Propone a los alumnos que regresen al problema que generó el proceso y lo resuelvan. La resolución va a depender del conocimiento matemático del alumno en ese momento.

7) **Interpretación de la solución y validación del modelo:** Al finalizar esta etapa, es importante que el alumno evalué el resultado (validación). Esto permite al alumno una mejor comprensión o discernimiento de los resultados obtenidos.

Estas siete etapas no tienen que ser implementadas en una sola clase, sino que deben irse desarrollando a lo largo de varias clases durante el periodo escolar. Cabe señalar que las dos últimas etapas deben tratarse en el momento en el que el profesor juzgue que los alumnos ya alcanzaron el objetivo o aprendieron el contenido propuesto.

El modelo matemático director puede ser único para todo un periodo escolar o para cada tópico matemático del programa. Si se opta por lo primero, es importante que el modelo sea lo suficientemente complejo para poder desarrollar los contenidos programáticos.

Con este método de enseñanza los autores esperan propiciar para el alumno:

- integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
- interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad;
- mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos;
- capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema;

- estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas.

Biembengut y Hein (2004) dirigieron una investigación en 2001 y 2002 que tenía como fin encontrar las principales dificultades y ventajas de los profesores y los alumnos con este método de enseñanza. En ella colaboraron 30 profesores que lo pusieron en práctica con sus alumnos de bachillerato y licenciatura. Los resultados mostraron que este método favorece que el estudiante tenga una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora su grado de interés por las matemáticas, debido a la aproximación con el área afín y la aplicación. Varias experiencias realizadas por Bassanezi y Biembengut (1997) en cursos regulares (cursos con programas preestablecidos) indicaron que este método puede ser más eficiente que el método tradicional "teoría-aplicación", donde los problemas propuestos por el profesor son casi siempre artificiales y sólo buscan justificar la teoría recién enseñada.

6. Metodología / Estructura de la propuesta.

La propuesta didáctica elaborada en el presente trabajo se basa en las investigaciones de Blum y Niss (1991) y Biembengut y Hein (2004) (secciones 5.1.1 y 5.2, respectivamente). Adecua el método de enseñanza creado por estos últimos autores para poder abordar el contenido de la asignatura de Geometría Euclidiana a nivel bachillerato (o profesional), de manera que los cuatro argumentos a favor de las aplicaciones y la modelación en la instrucción matemática, expuestos por los primeros autores, son tomados en cuenta.

La propuesta tiene a manera de modelos directores: el pantógrafo y la broca de Watts. Estos mecanismos son aplicaciones de conceptos geométricos, pues surgieron como solución de un problema del mundo real que se abordó por medio de la geometría. El pantógrafo apareció como respuesta al problema de ampliar o reducir dibujos, para lo cual se utilizó el concepto de homotecia. En el caso de la broca de Watts, se buscaba una manera de perforar agujeros cuadrados, y para conseguirlo se hizo uso del concepto de figura de ancho constante. Para el pantógrafo, la propuesta se divide en cinco etapas, que corresponden a las etapas 1, 2, 3, 4 y 6, respectivamente, planteadas por Biembengut y Hein (2004) y que fueron descritas en la sección 5.2. En cambio, la propuesta que toma de modelo director a la broca de Watts se divide en seis etapas, que corresponden a las primeras seis descritas en la sección 5.2. Ambas propuestas guían al docente para que logre desarrollarlas durante el curso.

El primer mecanismo, el pantógrafo, permite desarrollar los conceptos geométricos que se muestra en la tabla 1, mientras que la broca de Watts los que aparecen en la tabla 2. En la mayoría de los programas de bachillerato dichos conceptos forman parte de la asignatura correspondiente a Geometría Euclidiana[10].

[10] Véase por ejemplo el programa de Matemáticas III, del plan de estudios PRE09, de la Escuela de Bachilleres "Salvador Allende", U.A.Q, y el programa de Matemáticas II del bachillerato general, SEP.

El pantógrafo.
- Construcciones con regla y compás (trasladar un segmento dado sobre una recta dada, trazar un ángulo igual a un ángulo dado, construir el punto medio de un segmento, construir una paralela a una recta dada, construir una perpendicular a una recta dada y dividir un segmento en n partes iguales). - Razones y proporciones. - Semejanza de polígonos (en particular, semejanza de triángulos). - Criterios de semejanza de triángulos. - Teorema de Tales. - Homotecia.

Tabla 1. Contenido programático que permite desarrollar el pantógrafo.

La broca de Watts.
- Elementos importantes de la circunferencia (radio, diámetro, cuerda, etc. En particular, recta tangente y arco). - Ángulos en la circunferencia (inscrito, central, semi-inscrito). - Resultados que involucran a la circunferencia (el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente, un triángulo inscrito en una circunferencia será rectángulo si uno de sus lados coincide con un diámetro, etc.). - Perímetro y área de una circunferencia (en particular, longitud de un arco de circunferencia y área de un sector circular).

Tabla 2. Contenido programático que permite desarrollar la broca de Watts.

Cada mecanismo está acompañado de una serie de problemas o actividades que permitirán que el estudiante termine de comprender los conceptos geométricos que abarcó cada mecanismo y que se involucre en los procesos de argumentar, justificar y demostrar sus razonamientos, procesos que se consideran fundamentales en los programas de matemáticas a nivel bachillerato.

7. Propuesta didáctica.

7.1. El pantógrafo.

1) Exposición del tema.

Se comienza la clase haciendo una breve exposición sobre qué es el dibujo técnico y cómo es utilizado en la industria, la arquitectura, la topografía, etc., para la elaboración de planos que representen piezas de máquinas, edificios, las características de un terreno, etc. En la charla deben incluirse los siguientes puntos:

- Los planos solían realizarse en papel utilizando reglas de varios tipos, compases, lápices, entre otros instrumentos, pero actualmente se utilizan programas de cómputo.
- En ocasiones se necesita reproducir con precisión dichos planos a una escala determinada, esto es, reducirlos o ampliarlos.
- Hoy en día hay impresoras que realizan este trabajo con excelente calidad, sin embargo, antes de su aparición éste debía hacerse manualmente.
- La necesidad de reducir o ampliar un dibujo también aparece en el arte.

2) Delimitación del problema.

Una de las cuestiones que puede plantearse sobre el tema es: ¿cómo copiar, reducir o ampliar de forma manual una imagen?

3) Formulación del problema.

La cuestión puede dividirse en dos casos:

a) La imagen es una figura poligonal.
b) La imagen no es una figura poligonal (tiene partes curvas).

4) Desarrollo del contenido programático.

En el caso (a), en el que la imagen es como alguna de las que aparecen en la Fig. 1, el problema de escalarla a cualquier tamaño deseado se reduce a copiar ángulos y trazar segmentos proporcionales a los ya dados, lo que puede hacerse con regla y compás.

Cuando se habla de ampliar o reducir una figura, matemáticamente se está hablando de construir una figura *semejante* a otra. Las figuras semejantes tienen la misma forma, aunque sus tamaños y orientaciones pueden ser diferentes. En el caso de los polígonos, dos polígonos son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes iguales. Ambas cosas, construir segmentos proporcionales a segmentos ya dados y trasladar ángulos dados, pueden hacerse usando regla y compás.

Con base en lo anterior, se pueden introducir en la clase los siguientes conceptos geométricos:

- Construcciones con regla y compás (trasladar un segmento dado sobre una recta dada, trazar un ángulo igual a un ángulo dado, construir el punto medio de un segmento, construir una paralela a una recta dada, construir una perpendicular a una recta dada y dividir un segmento en n partes iguales).
- Razones y proporciones.
- Semejanza de polígonos (en particular, semejanza de triángulos).

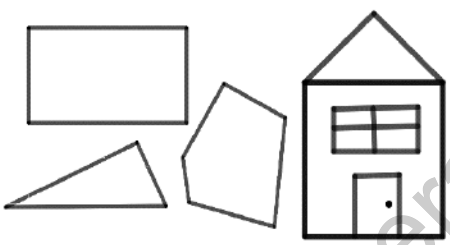


Figura 1. Algunos polígonos.

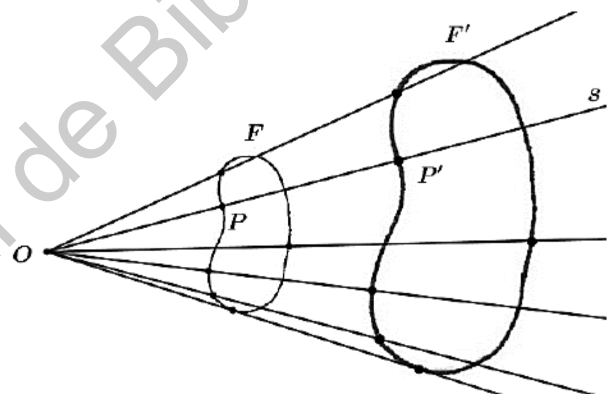


Figura 2. Ampliación de una figura curva F al doble de su tamaño.

En el caso (b), donde la imagen se ve como F (Fig. 2), la cual no tiene segmentos de recta ni ángulos, es claro que no puede usarse la técnica vista en el caso (a). Es aquí donde se hace necesario el concepto de homotecia. Antes de abordar de manera formal el estudio de este concepto, se sugiere que el profesor comience presentándolo como una "técnica" para ampliar o reducir figuras curvas. A continuación se da una idea de cómo podría hacerse esto.

"Técnica" para ampliar o reducir figuras curvas.

Supongamos que queremos ampliar a F (Fig. 2) al doble de su tamaño.

Escogemos un punto arbitrario O del plano (puede estar incluso dentro de F)

y desde él trazamos rayos hacia F como se muestra en la Fig. 2, cada rayo contiene al menos un punto del contorno de F. Sea P un punto del contorno de F que está sobre el rayo s. Trazamos el punto P' correspondiente a P, que se encuentra sobre s y que cumple que $OP' = 2 \cdot OP$. Si hacemos lo anterior para cada rayo que trazamos y para cada punto P del contorno de F, se formará una figura F' con los puntos P' y dicha figura será la ampliación buscada.

Si ahora trazamos los puntos P' de tal manera que se satisfaga $OP' = k \cdot OP$, entonces la figura F' tendrá la misma forma que F pero k veces su tamaño (por ejemplo, si escogemos $k = \frac{1}{6}$, la figura será reducida a $\frac{1}{6}$ de su tamaño original).

Cabe mencionar que la selección del punto O no influye en el tamaño de la ampliación o reducción de la figura, lo único que modifica es su posición (Fig. 3).

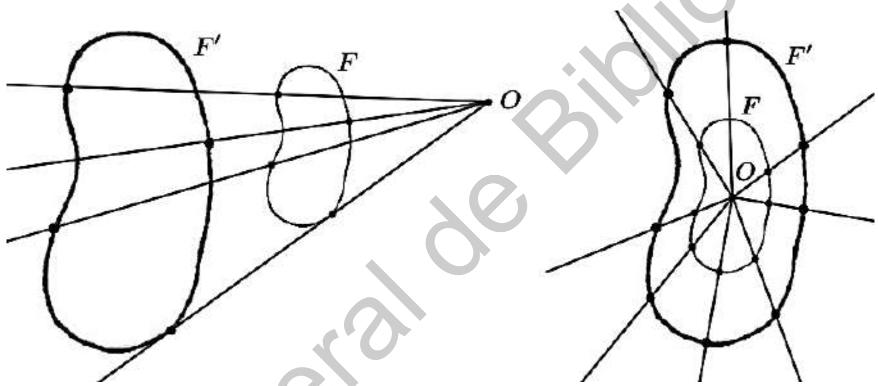


Figura 3. En ambos casos la figura F está ampliada al doble de su tamaño.

El profesor debe indicar que este "método" funciona para cualquier tipo de figura plana (sea poligonal o curva). Con el fin de convencerlos de que el "método" amplía o reduce figuras a voluntad, el profesor puede proponer a sus alumnos que amplíen (reduzcan) algunos polígonos y que comparen las figuras resultantes con las figuras que se obtienen por medio de los procedimientos vistos en el caso (a). Ambas figuras deberán ser iguales.

Cuando esté seguro de que sus alumnos consideran que la "técnica" es efectiva, el profesor indicará que este "procedimiento" para ampliar o reducir figuras es en realidad una transformación geométrica conocida como *homotecia*.

En este momento se puede comenzar el estudio formal del concepto de homotecia. Se sugiere que, en algún instante del desarrollo de la teoría, se mencionen los siguientes puntos:

Homotecia

- La homotecia transforma una figura en otra figura de igual forma, pero de menor o mayor tamaño.
- La homotecia es una *transformación de semejanza* (*similarity transformation* en inglés). Las transformaciones de semejanza llevan una figura a otra que le es semejante. La rotación, traslación y reflexión son casos especiales de este tipo de transformación.
- En las figuras 2 y 3, F' es homotética a F con centro de homotecia O y coeficiente de homotecia 2.

Una vez que los alumnos estén familiarizados con este concepto geométrico, el profesor propondrá que regresen a la cuestión que lo originó y que intenten ampliar (reducir) algunas figuras no poligonales. Con esta actividad se busca hacer énfasis en que trazar una figura F' homotética a otra figura F usando regla y compás es posible, pero no muy práctico (independientemente de cuál sea el centro O y el coeficiente k de homotecia), pues para tener un "dibujo" preciso de F' es necesario trazar muchos puntos P' (entre más puntos P' se tracen, más preciso será el bosquejo que se haga de F', ver Fig. 2 y 3). Construir estos puntos, como se dijo, no es complicado, la dificultad está cuando tienen que construirse 20, 50 o 100 de ellos, ¿quién tiene tiempo para eso? Aparece entonces la necesidad de encontrar otras formas de escalar imágenes que entren en la categoría de "manuales".

Para ir abriendo camino hacia la presentación del pantógrafo, el profesor puede mencionar que los arquitectos y diseñadores escalaban sus planos, dibujos o mapas haciendo uso de una herramienta llamada pantógrafo. Y que a pesar de que este instrumento cada vez es menos utilizado en el ámbito laboral, todavía hay algunas disciplinas de dibujo y arte que lo usan. Debe señalar también que el pantógrafo *construye figuras homotéticas a otras*, es decir que traza por nosotros esos puntos P' y lo hace de una forma tan prodigiosamente rápida que basta un movimiento de la mano para poder ampliar o reducir cualquier imagen deseada.

5) Presentación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo.

En este punto, el maestro explicará cómo se utiliza el pantógrafo. Para ello puede guiarse de la explicación que a continuación se presenta. Además, pedirá al alumno que consiga un pantógrafo y trace a diferentes escalas una o varias figuras (tratando de probar todas las escalas que vengan en su instrumento).

Cómo se utiliza el pantógrafo.

El pantógrafo es un mecanismo que se utiliza en dibujo para trazar figuras a diferentes escalas, es decir, permite crear una copia ampliada o reducida de una figura o imagen deseada. Consiste de cuatro barras que se encuentran unidas mediante pivotes formando un paralelogramo (Fig. 4). Los pivotes C y Y siempre se mantienen en su lugar, pero los pivotes A y B se pueden mover para escoger la ampliación (o reducción) buscada. Esta escala la marcan las perforaciones que tienen las barras. El pantógrafo de la Fig. 4 permite ampliar una figura dos, tres, cuatro o cinco veces su tamaño (o bien, reducirla a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{5}$ de su tamaño).

Para ampliar una figura, el extremo del brazo CA, punto X, se asegura a la mesa (o al lugar sobre el que se esté trabajando) por medio de una pinza u otro objeto de tal forma que se encuentre siempre fijo. Se coloca un lápiz en el extremo del brazo CB, punto Z, y con la punta guía que está en el pivote Y se comienza a "sobre-dibujar" la figura que se desea ampliar (habiendo previamente seleccionado la escala).

Para reducir una imagen la punta guía se coloca en la posición del lápiz, y el lápiz en la posición de la punta guía, y con ésta nuevamente se sobre-dibuja la imagen que se quiere reducir. Observe que entre más se acerca el pivote A al punto fijo X, más grande es la ampliación (o más pequeña la reducción).

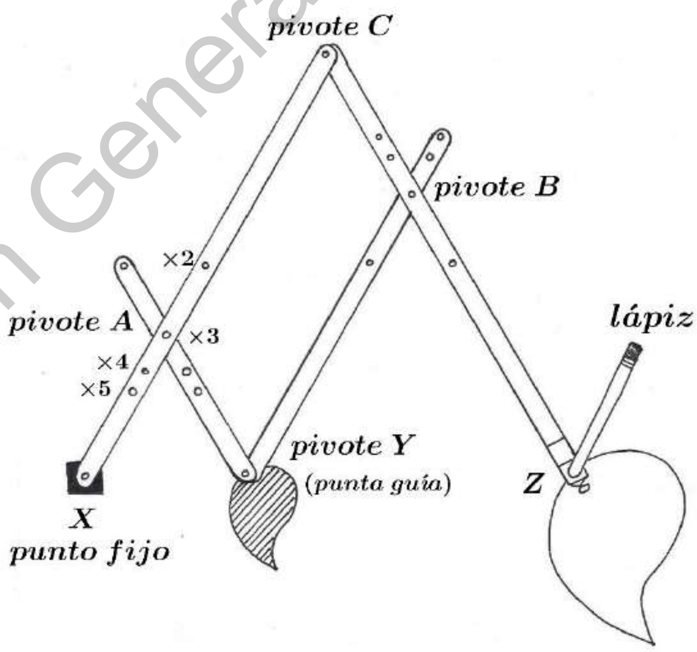


Figura 4. Pantógrafo montado para ampliar una figura al triple de su tamaño. Si se intercambian de posición el lápiz y la punta guía, el pantógrafo reducirá una figura a un tercio de su tamaño.

Para complementar la explicación, también puede presentarse un video donde se muestre cómo se utiliza este instrumento. Sugerimos que se utilice el que aparece en el siguiente enlace:

- **Video**

  Pantógrafo funcionando: https://www.youtube.com/watch?v=iFoqyVg_88s

Cuando los alumnos hayan conseguido cierta práctica en el manejo de este instrumento, el maestro puede invitarlos a regresar al problema original para que verifiquen si éste ya ha sido resuelto satisfactoriamente. Se espera que los alumnos planteen las siguientes cuestiones que aún quedan por resolver:

1. ¿Es posible ampliar o reducir una imagen a una escala que no aparezca marcada en el pantógrafo?
2. ¿Existen otros tipos de pantógrafos?
3. ¿Es posible realizar una copia de una imagen utilizando el pantógrafo?

El maestro deberá entonces mencionar que para poder contestar esas preguntas se debe hacer un estudio más formal y detallado del pantógrafo, es decir, primero se debe contestar la siguiente pregunta: ¿cómo logra ampliar (reducir) una imagen el pantógrafo?, en otras palabras, ¿qué principios matemáticos hacen que sea capaz de trazar una figura homotética a otra?

En lo siguiente el profesor dará la justificación matemática del mecanismo, la cual aparece a continuación junto con los resultados matemáticos que involucra (en la mayoría de los programas de bachillerato estos resultados ya fueron vistos por los alumnos cuando se comienza el estudio de semejanza de triángulos).

Justificación matemática del funcionamiento del pantógrafo.

Cuando el pantógrafo **amplía** una figura k veces su tamaño, $k > 1$, lo que en realidad hace es trazar una figura homotética[11] a la primera con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $k = \frac{XC}{XA}$ (Fig. 4). Las diferentes escalas marcadas en los brazos del pantógrafo (en forma de perforaciones) indican los diferentes valores posibles para el coeficiente k. En la mayoría de los pantógrafos estos valores son números racionales como 2, 5, 7, 10, $2\frac{1}{2}$ o $3\frac{1}{2}$ (siempre mayores que uno). Se había hecho la observación de que conforme el pivote A se acercaba a X, la ampliación de la figura era cada vez mayor (hasta $\times$ 5 en el pantógrafo de la Fig. 4). Esto se vuelve claro al notar que $k = \frac{XC}{XA}$, pues si $A \to X$ entonces $k \to \infty$. Y por la misma razón, mientras más se acerque el

[11] Se siguió la definición dada por I. M. Yaglom (1968, p. 9).

pivote A a C, la figura se ampliará cada vez menos, es decir, el tamaño de la figura homotética será cada vez más cercano al tamaño de la figura original, pues si $A \to C$ entonces $k \to 1$.

Una vez escogida la escala a la cual queríamos ampliar cierta figura (esto es, una vez escogido el valor del coeficiente de homotecia k, con $k > 1$) los tornillos del pantógrafo se ajustaban de una forma que al principio nos podría parecer aleatoria, pero de hecho se colocan de manera que $AX = AY = CB$ y $CA = BY = BZ$ (sea cual sea la escala elegida). Debido a la estructura del pantógrafo las igualdades anteriores se satisfarán en todo momento sin importar la posición del mismo, siempre y cuando X se mantenga fijo.

Dijimos entonces que *cuando el pantógrafo amplía una figura k veces,* $k > 1$*, traza una figura homotética a la primera con centro de homotecia* X *y coeficiente de homotecia* $k = \frac{XC}{XA}$. Esto es posible ya que sea cual sea la orientación del pantógrafo, el punto Z será siempre homotético a Y (con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $k = \frac{XC}{XA}$). Para demostrar lo anterior debemos probar que dada una posición arbitraria del pantógrafo se cumple que:

a) Los puntos X, Y y Z son colineales.

b) $XZ = k \cdot XY$.

Para la demostración haremos uso de los conceptos y resultados que se muestran en la tabla 1.

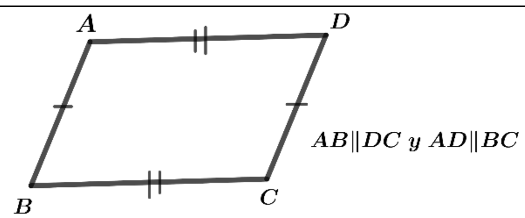
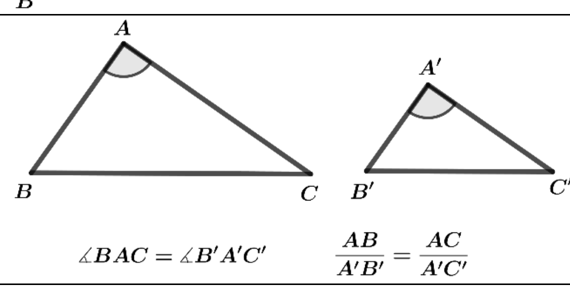
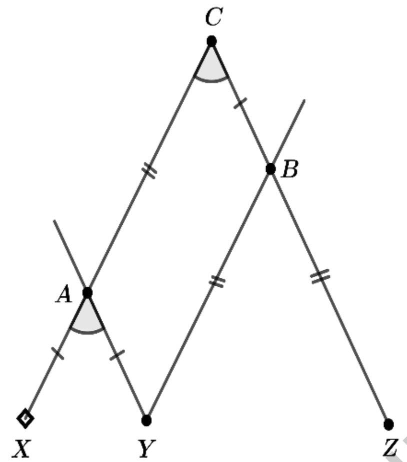
Resultados matemáticos	
1. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes (iguales), entonces es un paralelogramo.	
2. Criterio de semejanza *LAL*. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual	
Conceptos: Paralelogramo, ángulos entre paralelas, triángulos semejantes.	

Tabla 1. Resultados y conceptos utilizados en la demostración de la proposición 1.

Proposición 1: En un pantógrafo que realiza una ampliación k, $k > 1$, se cumple en todo momento que Z es homotético a Y con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $k = \frac{XC}{XA}$.



Demostración:

Como $AY = CB$ y $CA = BY$, el cuadrilátero $CAYB$ es un paralelogramo **(1)** y $AY \parallel CB$. Ya que $\measuredangle XAY = \measuredangle XCZ$ (al ser ángulos correspondientes) y $\frac{CX}{AX} = \frac{CZ}{AY}$ (al ser $AX = AY$ y $CX = CZ$), entonces se tiene que los triángulos ΔXAY y ΔXCZ son semejantes **(2)**. En adelante utilizaremos el símbolo $\sim$ para denotar que dos triángulos son semejantes.

Como $\Delta XAY \sim \Delta XCZ$, entonces $\measuredangle AXY = \measuredangle CXZ$ y por lo tanto X, Y y Z son colineales. Y nuevamente, como $\Delta XAY \sim \Delta XCZ$, entonces $\frac{XC}{XA} = \frac{XZ}{XY}$. Pero $\frac{XC}{XA} = k$, luego $\frac{XZ}{XY} = k$ y por lo tanto $XZ = k \cdot XY$. ■

Resumiendo, si F es una figura cualquiera y F' es la figura F ampliada k veces por medio de un pantógrafo, entonces F' es homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $k = XC/XA$. Si F' es homotética a F, entonces F es homotética a F' con respecto al mismo centro de homotecia pero con coeficiente $1/k$. Así, cuando intercambiamos de posición el lápiz y la punta guía (que están en los puntos Y y Z, respectivamente) lo que obtenemos es una reducción de la figura, es decir, la imagen que sobre-trazamos con la punta guía posicionada ahora en Z se reduce k veces. En la tabla 2 se recapitulan estas y otras observaciones relativas al pantógrafo para que el lector pueda acceder a ellas de manera rápida cuando lo necesite.

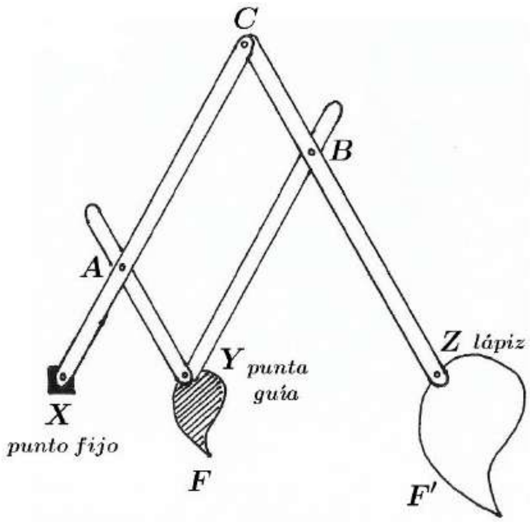
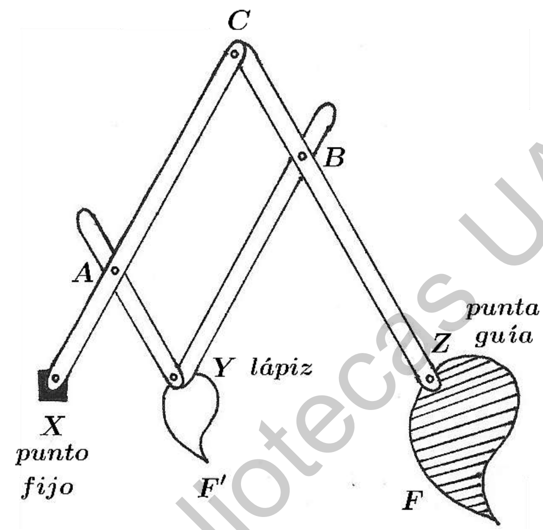
Pantógrafo que amplía k veces una figura F.	**Pantógrafo que reduce k veces una figura F.**
Posición: 	Posición: 
Coeficiente de homotecia (factor de escala): $k = XC/XA$	Coeficiente de homotecia (factor de escala): $k^* = 1/k = XA/XC$
$k > 1$ Teóricamente A se puede desplazar a lo largo de XC, por tanto si $A \to X$, entonces $k \to \infty$. Mientras que si $A \to C$, entonces $k \to 1$.	$0 < k^* < 1$ Teóricamente A se puede desplazar a lo largo de XC, por tanto si $A \to X$, entonces $k^* \to 0$. Mientras que si $A \to C$, entonces $k^* \to 1$.
Si F' es la figura F ampliada k veces, entonces F' es homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia k.	Si F' es la figura F reducida k veces, entonces F' es homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $k^* = 1/k$.

Tabla 2. Algunas observaciones relativas al pantógrafo.

Una vez explicado matemáticamente el funcionamiento del mecanismo, el profesor comenzará a dar respuesta a las cuestiones antes planteadas. Con lo que podrá introducir más contenido programático o reforzar algunos conceptos ya vistos. La manera en que pueden abordarse estas cuestiones aparece en los recuadros.

1. ¿Es posible ampliar o reducir una imagen a una escala que no aparezca marcada en el pantógrafo?

Esta cuestión permite introducir las siguientes construcciones geométricas:

- Construir un segmento de longitud $\sqrt{n} \cdot l$, donde $n \in \mathbb{N}$ y l es la longitud de un segmento dado.
- Construir un segmento de longitud a/b, donde a y b son las respectivas longitudes de dos segmentos dados.

También permite que los alumnos refuercen los siguientes conceptos geométricos:

- Construcciones con regla y compás (trasladar un segmento dado sobre una recta dada, trazar un ángulo igual a un ángulo dado, construir el punto medio de un segmento, construir una paralela a una recta dada, construir una perpendicular a una recta dada y dividir un segmento en n partes iguales).
- Teorema de Tales.

Aunque el teorema de Tales no sea usado directamente en la elaboración de un pantógrafo (como sucede con las construcciones geométricas), este concepto puede ser reforzado en los alumnos pidiéndoles que justifiquen las siguientes construcciones: dividir un segmento en n partes iguales y construir un segmento de longitud a/b, donde a y b son las respectivas longitudes de dos segmentos dados (ver el **material complementario**, página 58).

Los pantógrafos vienen con un número determinado de escalas (el pantógrafo de la Fig. 4 viene con cuatro: $\times 2$, $\times 3$, $\times 4$ y $\times 5$). ¿Pero qué sucede si necesito ampliar una figura 8 o 10 veces su tamaño? ¿Y si quiero ampliarla $1\frac{1}{2}$? Es posible construir (o adaptar) un pantógrafo para que a esas, y a la escala que se nos ocurra, podamos ampliar (o reducir) cualquier figura.

Para construir un pantógrafo necesitamos cuatro barras de madera o cartoncillo de la misma longitud (en la mayoría de los pantógrafos ésta es de 30 a 40 cm). En sus extremos hacemos las perforaciones donde irán el lápiz, la punta guía, el pivote C y la base que nos ayudará a mantener el extremo X fijo (Fig. 5, izquierda). Es importante cuidar que las perforaciones C_1, C_2, X y Z cumplan que $XC_1 = ZC_2$.

Supongamos que queremos ampliar cierta figura k veces, donde k es un número racional positivo ($k \in \mathbb{Q}^+$) y $k > 1$. ¿A qué altura deben hacerse las perforaciones A_1, A_2, B_1 y B_2 para colocar los pivotes A y B y poder obtener la ampliación buscada? Habíamos visto que en un pantógrafo se cumplía que

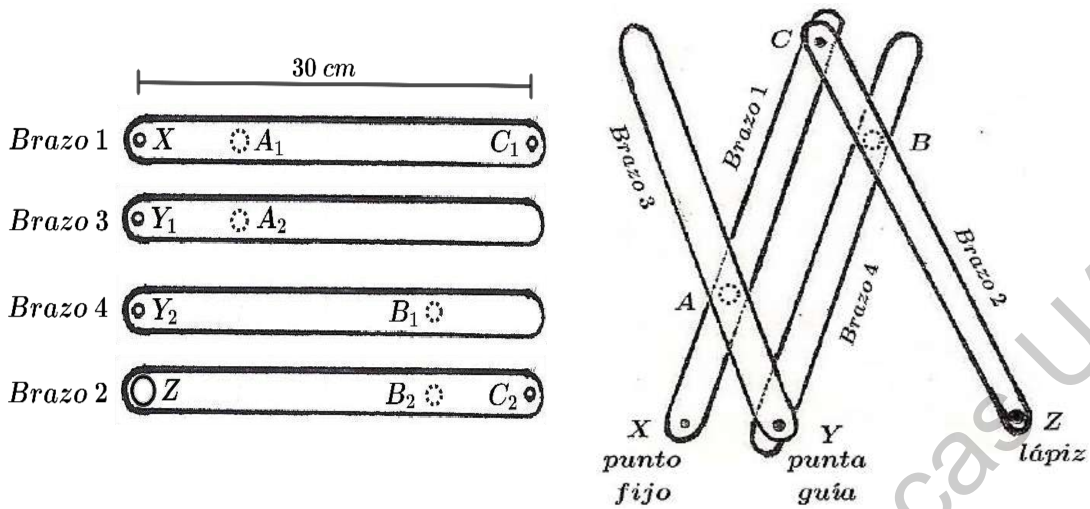


Figura 5. (Izquierda) En las cuatro barras se realizan las perforaciones X, Z, C_1, C_2, Y_1 y Y_2. (Derecha) Pantógrafo montado para ampliar una figura una vez hechas las perforaciones A_1, A_2, B_1 y B_2.

$k = \frac{XC}{XA}$, entonces $XA = \frac{1}{k} \cdot XC$. Así, en el **brazo 1** debemos hacer la perforación A_1 de de manera que $XA_1 = \frac{1}{k} \cdot XC_1$.

Para ello sólo necesitamos dividir el segmento XC_1 en n partes iguales si $k = \frac{n}{m}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, lo cual puede hacerse sin dificultades usando regla y compás, o bien podemos calcular la posición de A_1 con una regla graduada y calculadora, ver Fig. 6. (En el material complementario se recuerda cómo se divide un segmento en n partes iguales usando regla y compás, uno de los problemas típicos de Geometría Euclidiana).

Ya que en este instrumento también se debe de cumplir que $AX = AY = CB$ y $CA = BY = BZ$, entonces en el **brazo 3** la perforación A_2 debe hacerse de modo que $XA_1 = Y_1A_2$. De la misma forma, las perforaciones B_1 y B_2 de los **brazos 4** y **2**, respectivamente, deben hacerse de forma que $B_2C_2 = XA_1$ y $Y_2B_1 = A_1C_1$. Nuevamente, las posiciones de las perforaciones A_2, B_1 y B_2 pueden encontrarse con ayuda de un compás o con una regla graduada. Una vez hecho lo anterior, nos basta con poner los pivotes (tachuelas o tornillos) en las perforaciones correspondientes para tener así un pantógrafo que amplía (o reduce si cambiamos de posición el lápiz y la punta guía) una figura k veces, $k \in \mathbb{Q}^+$ y $k > 1$ (Fig. 5, derecha).

Conviene señalar que la exactitud con la que un pantógrafo amplíe (o reduzca) una figura k veces su tamaño depende fundamentalmente de la precisión con que se construya la proporción $XA_1 = \frac{1}{k} \cdot XC_1$ en el **brazo 1**. Recordemos que

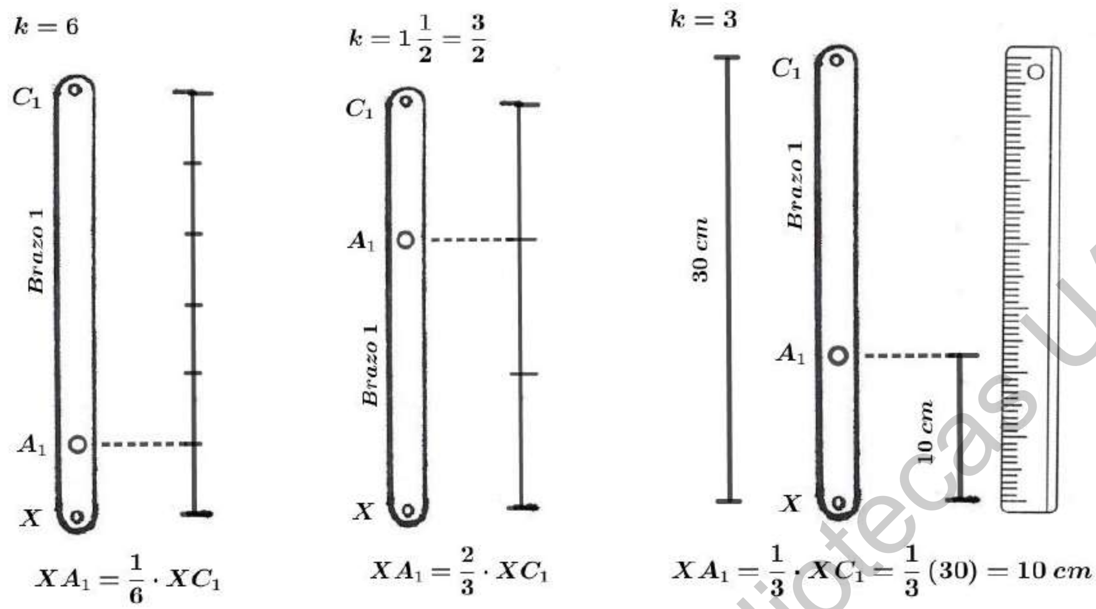


Figura 6. División del segmento XC_1 en diferentes partes iguales para obtener una ampliación k.

construir una proporción $b = r \cdot a$, donde $r \in \mathbb{Q}^+$ y a es la longitud de un segmento dado, significa encontrar un segmento de longitud b tal que $b = r \cdot a$. En nuestro caso, si a es la longitud del segmento XC_1, construir la proporción $XA_1 = \frac{1}{k} \cdot XC_1$ significa encontrar un segmento de longitud $(1/k) \cdot a$, con $k \in \mathbb{Q}^+$ y $k > 1$. Es claro que si construimos la proporción anterior usando regla y compás tendremos una precisión mayor del segmento XA_1 que usando una regla graduada.

El valor de k ($k > 1$) no se restringe únicamente a los números racionales, k también puede tomar valores como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$, por ejemplo (recuerde que $k =$"Cuántas veces amplía (reduce) el tamaño de una figura el pantógrafo"). Es posible construir con regla y compás la proporción $XA = \frac{1}{k} \cdot XC$, con $k \in \{\sqrt{a} : a \in \mathbb{N}\}$ (ver apéndice), pero quizá resulte más simple sólo trazarla de manera aproximada con ayuda de una regla graduada y calculadora. Por ejemplo, si $XC = 30\ cm$ y $k = \sqrt{3}$, entonces $XA = \frac{1}{k} \cdot XC = \frac{1}{\sqrt{3}}(30)\ cm \approx 17.32\ cm$. Un pantógrafo en cuyo **brazo 1** se construyera esta proporción ampliaría (o reduciría) una figura $\sqrt{3}$ veces su tamaño original.

De manera más general, le podemos asignar a k casi cualquier número real positivo (mayor que uno) que deseemos. Decimos "casi" porque para muchos de estos valores la proporción $XA = \frac{1}{k} \cdot XC$, $k \in \mathbb{R}^+$ y $k > 1$, tendrá que ser calculada de manera aproximada ya que no todos los números reales son construibles[12], ejemplo de esto es el número π.

Dejando de lado el tema de cómo diseñar un pantógrafo, es importante decir que las dimensiones de la figura que deseamos ampliar o reducir dependen de las dimensiones del pantógrafo y viceversa. Por ejemplo, un pantógrafo con brazos de 30 cm de largo es capaz de ampliar al doble una figura de 40×40 cm, pero no una de 2×65 cm. De igual forma, podrá triplicar el tamaño de una figura de 18×30 cm pero no una de 3×42 cm.

En general, un pantógrafo podrá ampliar una figura k veces su tamaño, $k = XC/XA$, siempre y cuando la figura esté contenida dentro de la circunferencia con centro en X y radio $2XA$ (Fig. 7, a). Es claro que lo anterior se cumple en un plano idealizado, pues el ancho de las barras del mecanismo restringe un poco más las dimensiones permisibles de la figura que se desea ampliar.

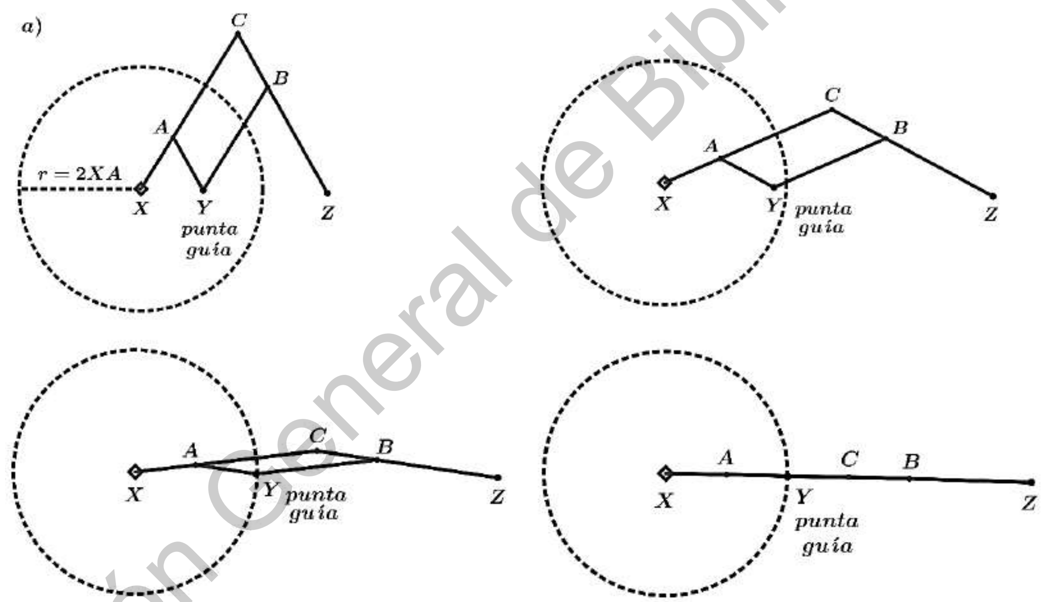


Figura 7. La imagen muestra un pantógrafo que amplía una figura k veces, con $k = XC/XA$. Observamos que la punta guía en Y sólo puede desplazarse dentro de la circunferencia con centro en X y radio $2XA$.

[12] Un número real (positivo) k se dice *construible* si y sólo si, dado un segmento de longitud unitaria, se puede trazar (en un número finito de pasos) un segmento de longitud k usando solamente regla y compás. Algebraicamente, un número positivo es construible si y sólo si puede obtenerse mediante un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de la raíz cuadrada de números racionales. Por ejemplo, $5 + \sqrt{\frac{2}{3} - \sqrt[4]{7}}$ es un número construible, pero $\sqrt[3]{2}$ no lo es. Si un número positivo k no es construible, es claro que tampoco lo será el número $k \cdot m$, $m \in \mathbb{R}^+$, aunque m sea construible. Por tanto no es posible trazar la

Así, teóricamente, un pantógrafo con brazos de 30 cm de largo puede ampliar al doble de su tamaño cualquier figura que esté dentro de la circunferencia con centro en X (el punto fijo del pantógrafo) y radio 30 cm. Y podrá triplicar el tamaño de una que se encuentre dentro de la circunferencia con centro en X y radio 20 cm.

2. ¿Existen otras clases de pantógrafos?

Esta cuestión permite que los alumnos refuercen el concepto de homotecia, así como los criterios de semejanza de triángulos.

Los pantógrafos no siempre tienen que verse como el de la Fig. 4, es posible construir pantógrafos de otras formas las cuales pueden atender a los materiales de los que dispongamos (algunos pantógrafos necesitan más brazos o pivotes que otros; o también los brazos de algunos son más largos que los de otros). La Fig. 8 muestra un pantógrafo que realiza un alargamiento con un factor de escala igual a 3, o bien, igual a $\frac{1}{3}$; es decir que amplía una figura al triple de su tamaño (si Y y Z están en la posición que ilustra la Fig. 8) o la reduce a un tercio de su tamaño original (si Y y Z se intercambian de posición).

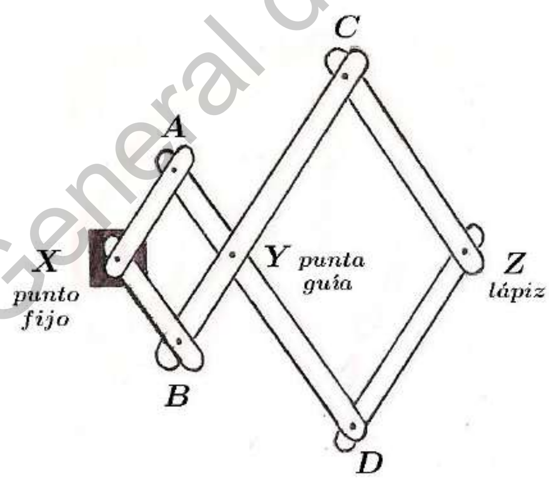


Figura 8. Pantógrafo que amplía (o reduce, si se intercambian de posición el lápiz y la punta guía) una figura 3 veces su tamaño.

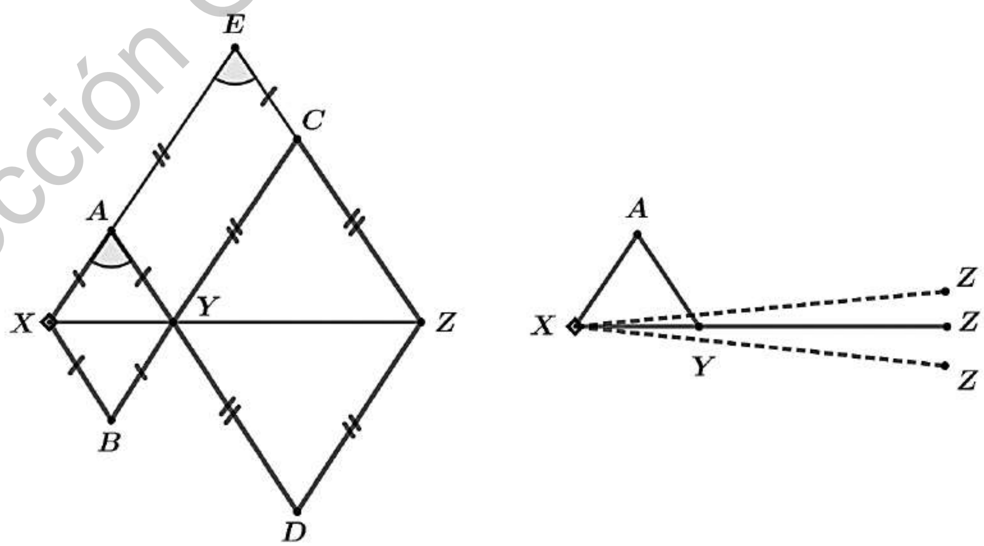
proporción $XA = \frac{1}{k} \cdot XC$ (siendo k no construible), pues para ello resulta necesario obtener un segmento con longitud igual a un múltiplo de k.

Este tipo de pantógrafo, que llamaremos en adelante *pantógrafo-rombo*, consiste de 6 brazos y 7 pivotes, a diferencia del pantógrafo “tradicional” (Fig. 4) que consta de 4 brazos y sólo 4 pivotes. Observe que en el pantógrafo tradicional X y Z no son pivotes (como en el caso del pantógrafo-rombo) sino que únicamente son perforaciones.

Para ampliar (o reducir) una figura 3 veces su tamaño, los brazos del pantógrafo de la Fig. 8 cumplen que: $BC = AD$, $AX = XB$ y $CZ = ZD$. Además, el pivote Y está colocado de forma que $BC = 3 \cdot BY$ y $AD = 3 \cdot AY$ (por lo que $BY = AY$ y $CY = YD$). Debido a la estructura del mecanismo, las igualdades anteriores siempre se satisfarán sin importar su orientación (con la única condición de que X permanezca fijo). Conviene señalar que esto sucede con cualquier clase de pantógrafo; es decir, mientras se cumplan las “condiciones” fijadas por el mecanismo, *las distancias entre los pivotes de cualquier pantógrafo siempre se mantienen constantes (no cambian), a pesar de que el mecanismo modifique su orientación.* Lo anterior se debe a la naturaleza misma del mecanismo, a la forma en que son diseñados.

Igual como sucede con el pantógrafo tradicional, detrás del funcionamiento del pantógrafo-rombo (y en general de cualquier clase de pantógrafo) está el principio de homotecia. A continuación vamos mostrar que *si Y y Z están en la posición que se muestra en la* Fig. 8*, la figura dibujada por Z es homotética a la figura sobre-trazada por Y, con centro de homotecia X y coeficiente 3*. Los conceptos y resultados matemáticos que se usarán para esta demostración son los mismos que se señalaron en la tabla 1.

Proposición 2. Cuando el pantógrafo de la Fig. 8 amplía una figura F al triple de su tamaño, está trazando una figura homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia 3.



Demostración:

Dada una posición arbitraria del pantógrafo, debemos demostrar que Z es homotético a Y con centro de homotecia X y coeficiente 3. Para ello, debemos mostrar dos cosas: a) X, Y y Z son colineales y b) $XZ = 3 \cdot XY$.

Sea E el punto donde se intersectan las prolongaciones de los segmentos XA y ZC. Como $AX = AY = XB = YB$ y $CY = CZ = YD = ZD$ (por la estructura del mecanismo), entonces $XAYB$ y $YCZD$ son paralelogramos **(1, tabla 1)**.

Luego, $YD \parallel CZ \Rightarrow AD \parallel EZ$, al ser las prolongaciones de los segmentos anteriores. De la misma forma, $AX \parallel YB \Rightarrow EX \parallel CB$. Como $AD \parallel EZ$ y $EX \parallel CB$, entonces $AECY$ es paralelogramo, por lo que $CY = EA$ y $AY = EC$. Ya que $\frac{EX}{AX} = \frac{EZ}{AY} = \frac{BC}{BY} = 3$ y $\measuredangle XAY = \measuredangle XEZ$ (por ser ángulos correspondientes), se tiene que $\Delta AXY \sim \Delta EXZ$ por el criterio de semejanza LAL **(2, tabla 1)**.

Como ΔAXY y ΔEXZ son triángulos semejantes, entonces $\frac{XZ}{XY} = \frac{EX}{AX} = 3$, por lo que $XZ = 3 \cdot XY$. Y nuevamente, como $\Delta AXY \sim \Delta EXZ$, entonces $\measuredangle AXY = \measuredangle AXZ$. Si Z no fuera colineal con X y Y, entonces Z estaría en el semiplano superior o en el semiplano inferior que determina la recta XY, teniéndose en cualquier caso que $\measuredangle AXZ < \measuredangle AXY$ o $\measuredangle AXZ > \measuredangle AXY$. Por lo tanto X, Y y Z son colineales. ■

Es fácil mostrar que si Y y Z se intercambian de lugar (Fig. 8), entonces la figura trazada por Z será homotética a Y con centro de homotecia X y coeficiente 1/3.

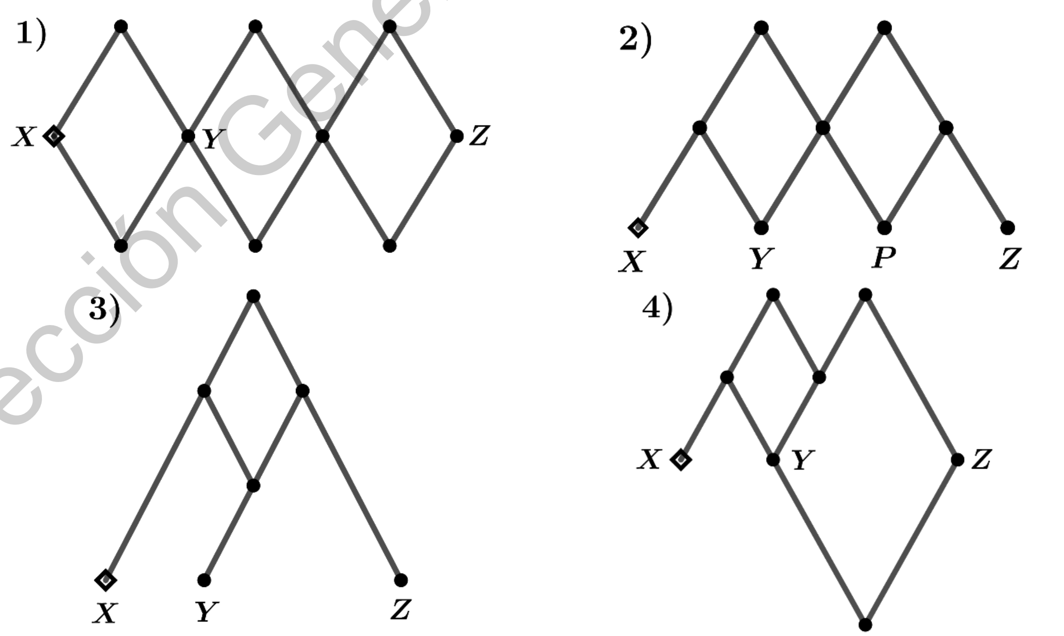


Figura 9. Diferentes pantógrafos que amplían (o reducen, si se intercambian de posición Y y Z) una figura 3 veces su tamaño.

En la Fig. 9 se muestra el esquema de otros tipos de pantógrafos que realizan un alargamiento con factor de escala igual a 3 (o igual a $\frac{1}{3}$ si Y y Z son intercambiados de posición). La estructura de estos mecanismos asegura que Z siempre sea homotético a Y con centro de homotecia X y coeficiente 3 (ó $\frac{1}{3}$ si Y y Z se intercambian de lugar), es decir, que sin importar la orientación de éstos lo anterior se cumplirá siempre y cuando X se mantenga fijo.

3. ¿Es posible realizar una copia de una imagen utilizando el pantógrafo?

Esta cuestión permite al profesor profundizar más sobre el concepto de homotecia, y seguir repasando los criterios de semejanza de triángulos.

Regresando al pantógrafo tradicional (Fig. 4), vimos que si una figura F era ampliada k veces ($k > 1$) por uno de estos pantógrafos, entonces la figura obtenida F' resultaba ser homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia k. Y si la figura F era reducida k veces, entonces la figura resultante F' era homotética a F con el mismo centro de homotecia X, pero con coeficiente $\frac{1}{k}$. En ambos casos teníamos que el coeficiente de homotecia era siempre positivo. Sin embargo, cuando se estudió el concepto de homotecia, el lector recordará que el coeficiente de homotecia de dos figuras homotéticas podía ser también negativo. ¿Cómo se interpretaba un coeficiente de homotecia negativo?

Habíamos visto que para ampliar o reducir k veces ($k > 0$) una figura F usando regla y compás, debíamos trazar para cada punto P del contorno de F su correspondiente punto P', el cual se encontraba en la línea OP, en el mismo lado del punto O que P y cumplía que $OP' = k \cdot OP$, donde O era un punto arbitrario (pero fijo) del plano (Fig. 10). El conjunto de puntos P' formaba una figura F' la cual era la ampliación (o reducción) buscada. Formalmente decíamos que F' era homotética a F con centro de homotecia O y coeficiente de homotecia k. ¿Pero qué sucedería si los puntos P' se trazaran sobre su correspondiente línea OP, cumpliendo la condición $OP' = k \cdot OP$, pero de modo que P y P' estuvieran en lados opuestos de O? Pues obtendríamos una figura F'' que también correspondería a la ampliación (o reducción) deseada, sólo que aparecería de forma "invertida" (Fig. 10). Observamos que F'' es idéntica a la ampliación (reducción) F', pero girada 180° alrededor del punto O.

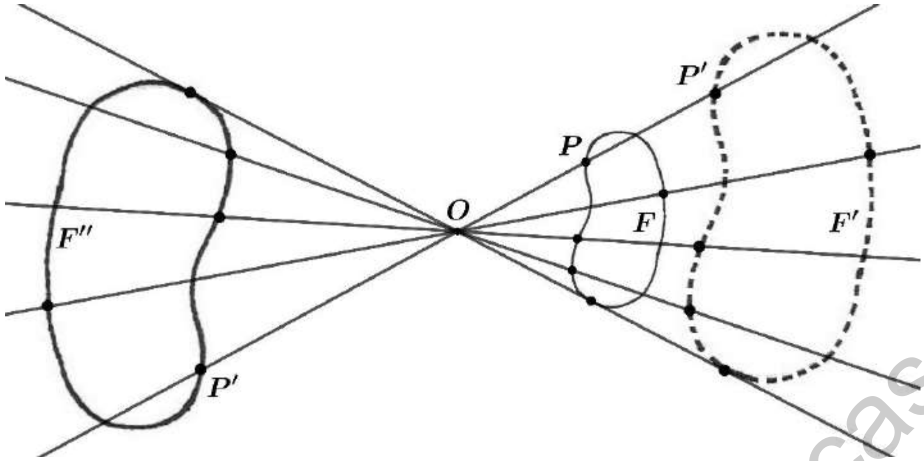


Figura 10. Ambas figuras, F' y F'', corresponden a la ampliación de la figura F al doble de su tamaño. F'' es idéntica a F', pero girada 180° alrededor de O.

Esta "variación" en la forma de ampliar (reducir) una figura la señalamos con un coeficiente de homotecia negativo. Así en la Fig. 10, F'' es homotética a F con centro de homotecia O y coeficiente de homotecia -2. Como dijimos líneas arriba, F'' es idéntica a la figura F' homotética a F con centro de homotecia O y coeficiente 2, sólo que girada 180° alrededor del punto O.

Como acabamos de ver, una homotecia con un coeficiente negativo no es más que la ampliación (o reducción) "invertida" de una figura. ¿Cree el lector que sea posible adaptar el pantógrafo tradicional para que realice una ampliación (reducción) con un coeficiente de escala negativo? ¿Qué deberían cumplir los elementos X, Y y Z?

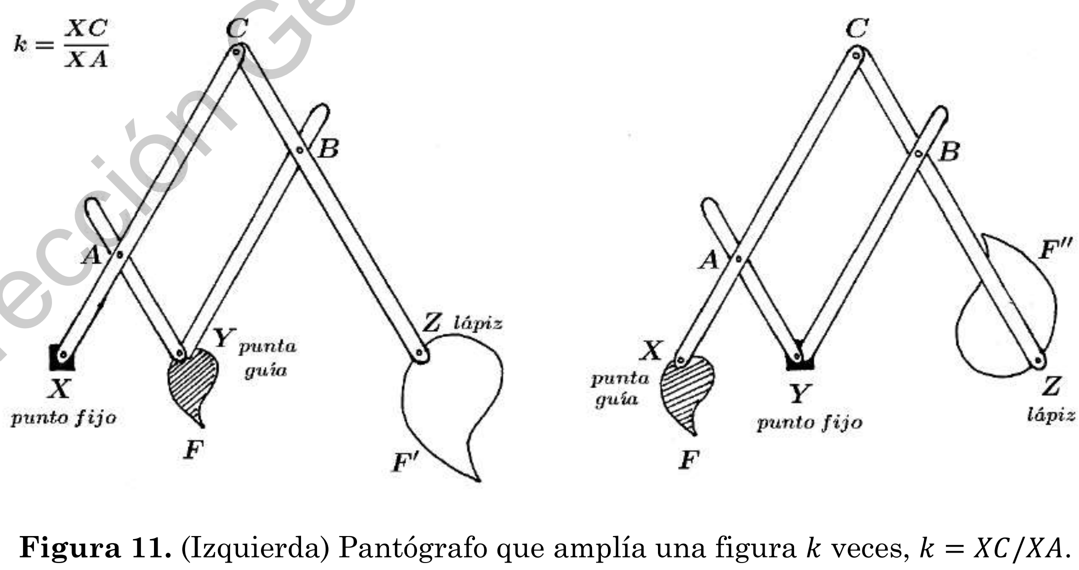
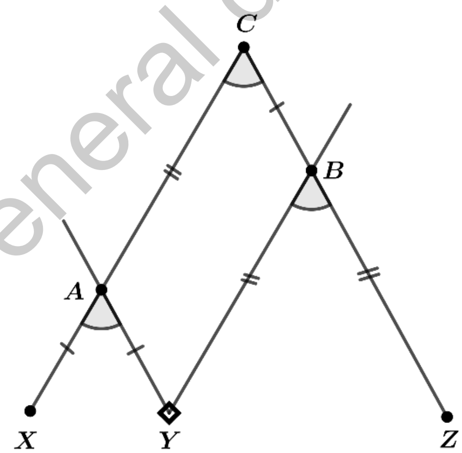


Figura 11. (Izquierda) Pantógrafo que amplía una figura k veces, $k = XC/XA$. (Derecha) Pantógrafo que amplía una figura $-(k-1)$ veces.

Para fijar ideas, consideremos un pantógrafo tradicional que amplía k veces una figura F (Fig. 11, izquierda), es decir, que traza una figura F' homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente $k = \frac{XC}{XA}$ (si Y y Z están en la posición que señala la Fig. 11)[13]. ¿Cómo podríamos modificarlo para que ahora dibuje una figura F'' homotética a F con centro de homotecia X pero con coeficiente de homotecia igual a $-k$, esto es, para que ahora amplíe k veces la figura F y que dicha ampliación aparezca "invertida"? Ya que los puntos P y P' están en lados opuestos del punto fijo O (Fig. 10), lo primero que podríamos intentar es tomar a Y como el punto fijo y a X como la punta guía, pues de esta forma X (que ahora "señala" los puntos P del contorno de la figura F) y Z (que traza sus correspondientes puntos P') estarían en lados opuestos del punto fijo Y (Fig. 11, derecha). Podríamos conjeturar ingenuamente que de esta manera la figura F'' dibujada por Z será homotética a F con centro de homotecia Y y coeficiente $-k$. Sin embargo, esto no es así, sino que la figura F'' es homotética a F con centro de homotecia Y y coeficiente de homotecia $-(k-1)$, es decir, que el pantógrafo modificado traza una figura F'' que tiene $k-1$ veces el tamaño de F y que aparece "invertida".

Proposición 3: El pantógrafo de la Fig. 11 (derecha) traza una figura F'' homotética a una figura dada F con centro de homotecia Y y coeficiente de homotecia $-(k-1)$, $k = \frac{XC}{XA}$.



Demostración:

Dada una posición arbitraria del pantógrafo, tendríamos que mostrar que Z siempre es homotético a X con centro de homotecia Y y coeficiente $-(k-1)$.

[13] Recuerde que si Y y Z (la punta guía y el lápiz) son intercambiados de lugar, entonces el pantógrafo reduce k veces la figura F sobre-trazada por Y, es decir, dibuja una figura F' homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia $1/k$.

Como en todo momento X y Z permanecen en lados opuestos de Y, sólo debemos mostrar que: a) X, Y y Z son colineales y b) $YZ = (k-1) \cdot YX$.

Es claro que X, Y y Z son colineales, un argumento análogo al que se usó en la demostración de la **proposición 1** nos convencerá de ello. Por otra parte, como $AX = AY = CB$ y $CA = BY = BZ$ (por la construcción del mecanismo), entonces $ACBY$ es paralelogramo **(1, tabla 1)**. Luego $AY \parallel CZ$ y $CX \parallel BY \Longrightarrow \measuredangle XAY = \measuredangle XCZ = \measuredangle YBZ$, por ser ángulos correspondientes de rectas paralelas. Y como se cumple que $\frac{BY}{AX} = \frac{BZ}{AY} = \frac{CA}{AX}$, entonces los triángulos ΔAXY y ΔBYZ son semejantes **(2, tabla 1)**. Así, se obtiene que $\frac{YZ}{YX} = \frac{AC}{XA}$. Pero $k = \frac{XC}{XA} = \frac{XA+AC}{XA} = 1 + \frac{AC}{XA}$, luego $k - 1 = \frac{AC}{XA}$. Como $\frac{YZ}{YX} = \frac{AC}{XA}$, entonces $\frac{YZ}{YX} = k - 1$, y por lo tanto

$$YZ = (k-1) \cdot YX. \blacksquare$$

Si se intercambian de lugar la punta guía y el lápiz (que se encuentran en los puntos X y Z, respectivamente) del pantógrafo de la Fig. 11 (derecha), es claro que éste reduciría una figura $-(k-1)$ veces su tamaño, es decir, dibujaría una figura F'' homotética a una figura dada F con centro de homotecia Y y coeficiente de homotecia $-1/(k-1)$.

Un pantógrafo tradicional (y en general cualquier pantógrafo) que tenga a X como punto fijo, sólo puede realizar ampliaciones o reducciones. Esto se debe a que el mecanismo traza una figura F' homotética a una figura dada F, con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia k, con $0 < k < 1$ (lo que se traduce en una reducción de F) o bien, con $k > 1$ (lo que corresponde a una ampliación de F). Eso significa que no puede alargar una figura con un factor de escala igual a 1 ó 0, es decir que dada una figura F, no puede trazar otra figura F' homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia 1 ó 0. En otras palabras, dicho mecanismo no puede dibujar una copia exacta de una figura dada y tampoco le es posible que el lápiz dibuje un único punto mientras la punta guía recorre dicha figura, ¿por qué sucede eso? (ver el ejercicio 14).

Una de las ventajas que obtenemos al adaptar el pantógrafo tradicional para que trace figuras homotéticas a otras con coeficientes de homotecia negativos, es que ya podemos realizar copias exactas de alguna figura. En la Fig. 12 se muestra un pantógrafo tradicional que amplía al doble una figura dada F, es decir, traza una figura F' homotética a F con centro de homotecia X y coeficiente 2. Si hacemos que ahora Y sea el punto fijo y X la punta guía, entonces la figura F'' dibujada por Z será homotética a F con centro de homotecia Y y coeficiente -1. Es decir, logramos obtener una copia de F, con el único detalle de que ésta aparece de manera "invertida".

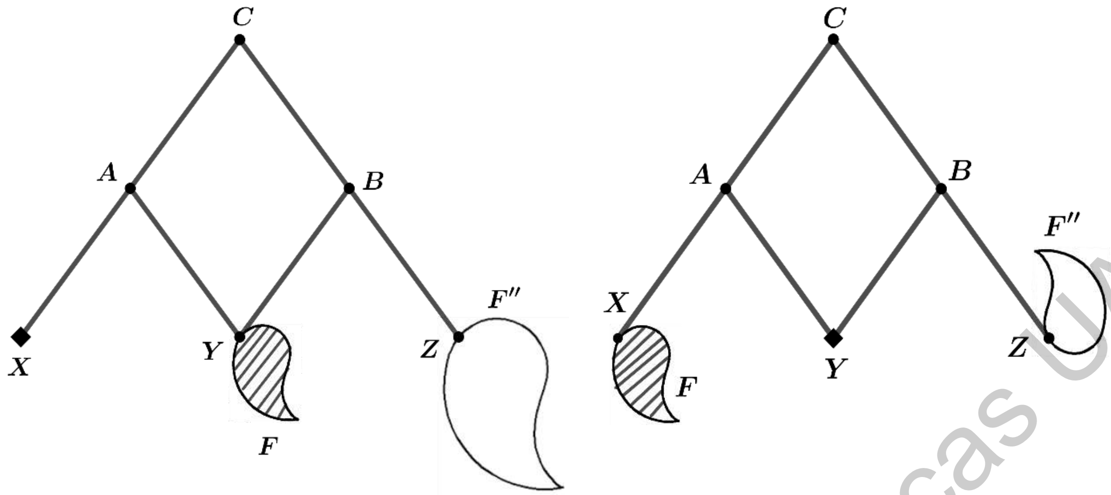


Figura 12. (Izquierda) Pantógrafo que amplía una figura F al doble de su tamaño. (Derecha) Pantógrafo modificado para dibujar una copia de una figura F.

Esta propuesta finaliza con algunos problemas que invitan a explorar más el pantógrafo y que permiten desarrollar habilidades de demostración y argumentación, tan buscadas en los programas de matemáticas, tanto a nivel bachillerato como profesional. Al final de esta parte aparecen las soluciones de los problemas propuestos y el material complementario.

Ejercicios.

1. Diseñar un pantógrafo que reduzca una figura a un quinto de su tamaño original. En otras palabras, diseñar un pantógrafo que realice un alargamiento con un factor de escala igual a $\frac{1}{5}$. Modifique su diseño para que ahora sea capaz de hacer un alargamiento con un factor de escala igual a k, con $k = \frac{4}{5}, \frac{5}{4}$.

2. Se desea ampliar un dibujo que está enmarcado justamente por un rectángulo de $14 \times 22\, cm$, de manera que ahora quede enmarcado (lo más justamente posible) por uno de $25 \times 30\, cm$. ¿A qué escala se debe hacer la ampliación del dibujo?

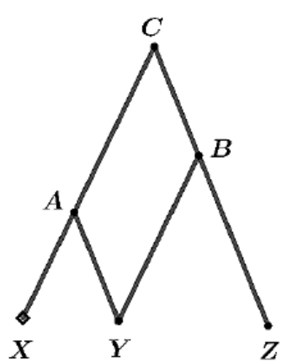
3. Considere un pantógrafo que amplía una figura k veces su tamaño ($k > 1$). Observe que conforme la punta guía Y se acerca al punto fijo X, los trazos correspondientes a la ampliación comienzan a "encimarse" con los de la figura original. ¿En qué zona del círculo con centro en X y radio $2XA$ debe estar una figura para que pueda asegurarse que dicha figura y su ampliación no se encimarán? En Internet hay una gran variedad de simuladores de pantógrafos con los que puede interactuar y darse cuenta de la observación hecha. Se sugiere utilizar el que aparece en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/nqutj8u7

4. Se desea ampliar un dibujo 5 veces su tamaño, el dibujo original mide $30 \times 50\, cm$. Se busca que la ampliación y el dibujo no se sobrepongan. ¿Qué medidas debe tener un pantógrafo que logre realizar dicha ampliación?

5. Un pantógrafo realiza un alargamiento con factor de escala igual a k. ¿En qué parte del brazo principal del pantógrafo (segmento XC) se ubica el pivote A, si a) $0 < k \leq \frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2} < k < 1$, c) $1 < k \leq 2$ y d) $k > 2$?

6. Considere el pantógrafo que se muestra en la imagen. ¿Qué ocurre con los puntos Y y Z conforme el pivote A se va acercando a C? ¿Y cuando A se aproxima cada vez más a X?



7. Realice el esquema de un pantógrafo-rombo que amplíe (reduzca) una figura k veces, $k > 1$. ¿Qué relaciones deben de cumplir sus brazos y pivotes? Demuestre que la figura trazada por el lápiz es homotética a la sobre trazada por la punta guía con el punto fijo como centro de homotecia y coeficiente de homotecia k.

8. Diseña un pantógrafo-rombo que permita ampliar (reducir) una figura k veces su tamaño, con $k = 4, 2$ y $1\frac{1}{3}$. ¿A qué altura deben de estar las perforaciones en los brazos del pantógrafo para que realice las diferentes escalas? ¿Hay pivotes que puedan mantenerse fijos, como los pivotes Y y C del pantógrafo tradicional (Fig. 4)? Haga el esquema del pantógrafo montado para realizar cada una de las 6 escalas diferentes.

9. Observe la Fig. 9 y conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede si la punta guía Y del **pantógrafo 2** se coloca ahora en el pivote P?

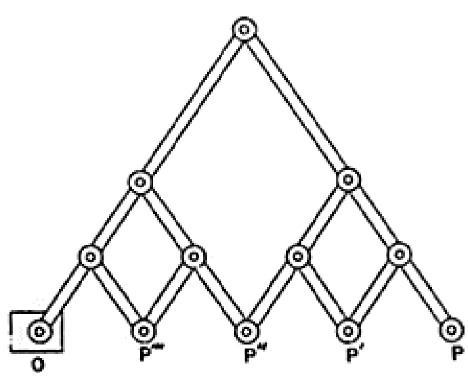
b) ¿En qué pivote tendría que poner la punta guía del **pantógrafo 1** si quisiera una ampliación de $\frac{3}{2}$?

c) ¿Cómo podría modificar el **pantógrafo 3** para obtener una reducción con un factor de escala igual a $\frac{3}{2}$?

10. Para cada uno de los pantógrafos de la Fig. 9, demuestre que éste traza una figura F' homotética a una figura F dada, con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia 3. En otras palabras, demuestre que éste amplía una figura 3 veces su tamaño.

11. Realice el ejercicio 7 pero ahora con cada uno de los pantógrafos de la Fig. 9.

12. En la imagen se muestra otra clase de pantógrafo, donde O es el punto fijo, P el lugar donde se coloca el lápiz y P', P'' y P''' las diferentes posiciones donde puede colocarse la punta guía. ¿Cuáles son las diferentes escalas a las que puede ampliar (reducir) este pantógrafo? (Ejercicio tomado del libro *Tools: A Mathematical Sketch and Model Book* de Robert C. Yates).

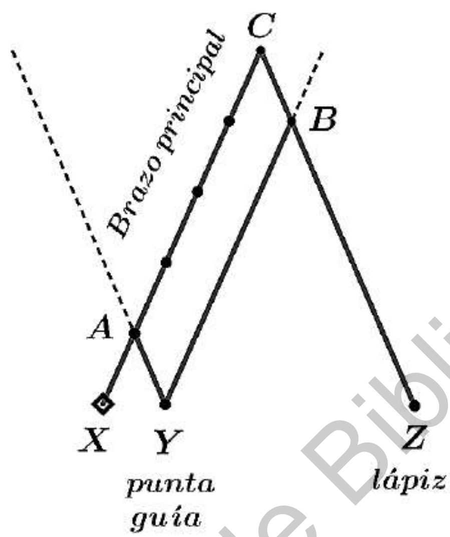


13. ¿Cómo interpretamos un coeficiente de homotecia igual a 0 ó 1? En otras palabras, si F es una figura homotética a F' con centro de homotecia O y coeficiente de homotecia 0, ¿cómo luce F'? ¿Y si el coeficiente de homotecia es igual a 1?

14. ¿Es posible adaptar un pantógrafo tradicional para que alargue una figura con un factor de escala igual a 0 o 1? ¿Por qué?

Soluciones.

1. Se desea bosquejar un pantógrafo que reduzca una figura 5 veces su tamaño. Para ello nos basta con diseñar uno que sea capaz de ampliar 5 veces el tamaño de una figura y después sólo cambiar de posición el lápiz y la punta guía. Esto lo podemos hacer simplemente dividiendo el brazo principal del pantógrafo XC en 5 partes iguales y colocando los pivotes como se muestra en la imagen.



Un pantógrafo que realice un alargamiento con factor de escala igual $\frac{5}{4}$ traza una figura homotética a una figura dada con centro de homotecia el punto fijo X y coeficiente de homotecia $\frac{5}{4}$. Como $\frac{5}{4} = 1.25 > 1$, entonces el pantógrafo hace una ampliación de la figura dada. En la **tabla 2** aparece la relación del coeficiente de homotecia con los elementos del brazo principal del pantógrafo, en este caso se tiene que

$$\frac{5}{4} = \frac{XC}{XA} \Rightarrow XA = \frac{4}{5}XC.$$

Construyendo entonces esta proporción en el brazo principal y colocando los pivotes, la punta guía y el lápiz de manera adecuada, obtenemos el pantógrafo buscado (Fig. A).

Para diseñar un pantógrafo que alargue una figura con un factor de escala igual a $\frac{4}{5}$ nos basta con observar que $0 < \frac{4}{5} = 0.8 < 1$, es decir que el pantógrafo realiza una reducción de la figura o imagen dada. Como $\frac{4}{5} = \frac{XA}{XC} \Rightarrow XA = \frac{4}{5}XC$ (**tabla 2**), entonces el pantógrafo que buscamos es el que aparece en la Fig. A pero con el lápiz y la punta guía cambiados de posición (Fig. B).

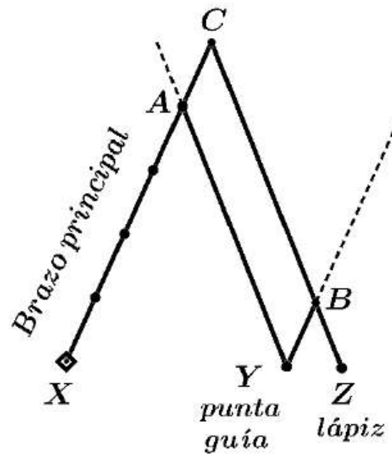


Figura A.

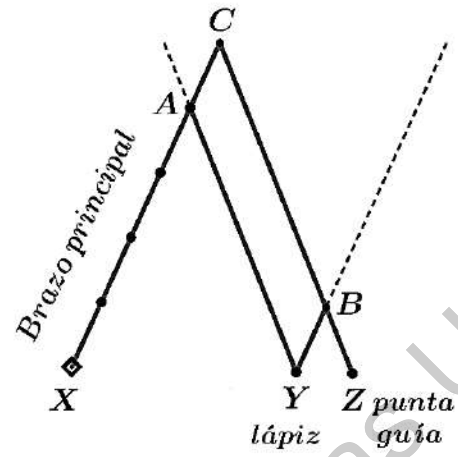
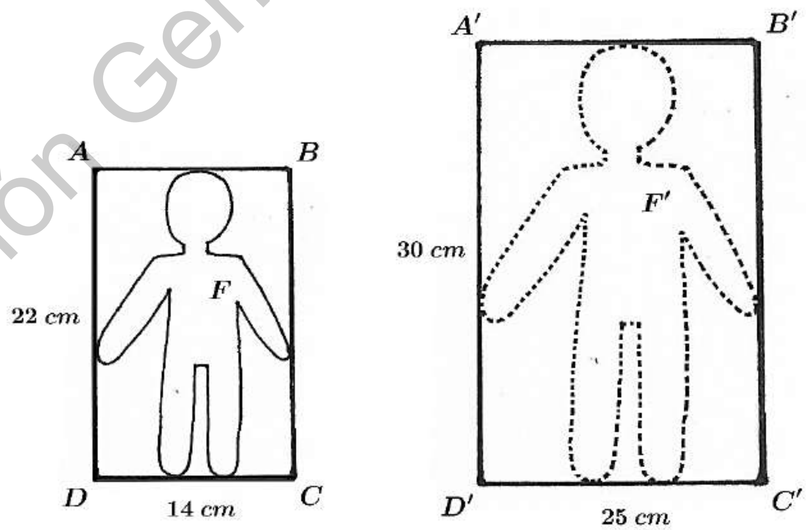


Figura B.

Es importante señalar que si se busca construir un pantógrafo que reduzca una figura k veces su tamaño, se debe construir uno que amplíe una figura k veces su tamaño y luego intercambiar de lugar el lápiz y la punta guía.

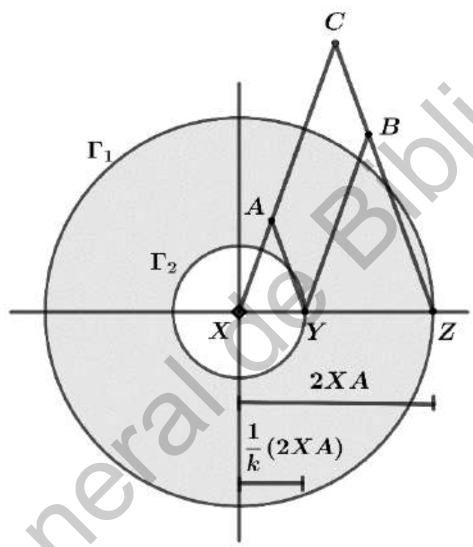
2. Si F' fuera una ampliación a cualquier escala de F, entonces el rectángulo que enmarca justamente a F' sería semejante al que enmarca a F, y los lados correspondientes de dichos rectángulos serían proporcionales. Observamos que los rectángulos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ no son semejantes ya que sus lados no son proporcionales, pues

$$\frac{A'D'}{AD} = \frac{30\ cm}{22\ cm} \approx 1.36 \qquad \frac{D'C'}{DC} = \frac{25\ cm}{14\ cm} \approx 1.78$$



Lo anterior se traduce a que no es posible ampliar a F de manera que quede enmarcada justamente por el rectángulo $A'B'C'D'$. Sin embargo, si ampliamos la figura con un factor de escala igual a 1.36, la figura quedará enmarcada por el rectángulo lo más ajustadamente posible (con respecto a la altura). Cabe señalar que el coeficiente de escala no puede ser 1.78 ya que la figura no quedaría totalmente contenida en el rectángulo, pues tendría una altura mayor a la de éste.

3. La figura debe encontrarse dentro de la circunferencia Γ_1 con centro en X y radio $2XA$ y fuera de la circunferencia Γ_2 con centro en X y radio $\frac{1}{k}(2XA)$. Es claro que Z debe mantenerse fuera de Γ_1 para asegurar que la ampliación y la figura original no se sobrepongan. Como $XZ = k \cdot XY$, si Z se coloca sobre Γ_1 se tiene que $2XA = k \cdot XY \;\Rightarrow\; XY = \frac{1}{k}(2XA)$. Por lo tanto, para que Z se mantenga fuera de Γ_1, Y debe permanecer fuera de Γ_2.



4. El brazo principal del pantógrafo buscado, el que tiene los pivotes A y C y el punto fijo X, cumple que $XC = 5XA$. Una figura de dimensiones $a \times l$ podrá ser ampliada por el pantógrafo (sin que la ampliación y la figura original se sobrepongan) si se coloca dentro del círculo con centro en X y radio $r = 2XA$ como se muestra en la imagen.

Observamos que $r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}r + a\right)^2$. Simplificando términos obtenemos la ecuación de segundo grado $24r^2 - 10ar - 25\left(\frac{1}{4}l^2 + a^2\right) = 0$, cuyas raíces son

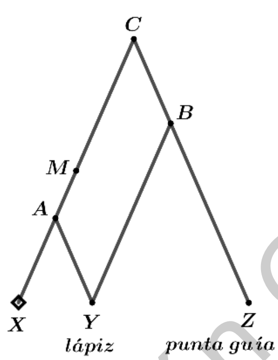
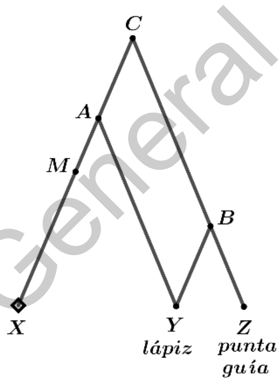
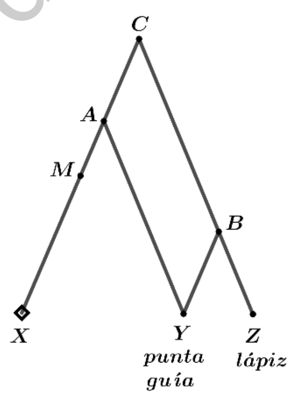
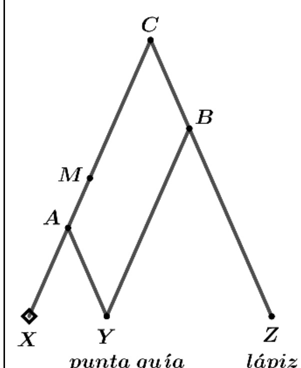
$$r_1 = \frac{5\left(a + \sqrt{25a^2 + 6l^2}\right)}{24}, \qquad r_2 = \frac{5\left(a - \sqrt{25a^2 + 6l^2}\right)}{24}.$$

Como ambas raíces representan la longitud de un segmento, ambos valores deben ser positivos. Si r_2 fuera positivo, entonces $a - \sqrt{25a^2 + 6l^2} > 0$, que implica que $24a^2 + 6l^2 < 0$, lo cual no es posible. Por tanto

$$r = \frac{5\left(a + \sqrt{25a^2 + 6l^2}\right)}{24}.$$

Sustituyendo los valores de $a = 30\,cm$ y de $l = 50\,cm$ en la ecuación anterior, tenemos que $r = 2XA \approx 46.6\,cm$. Luego $XA \approx 23.3\,cm$ y $XC = 116.48\,cm$. Podemos concluir que el brazo principal XC del pantógrafo buscado debe tener *al menos* $116.48\,cm$ de longitud para poder ampliar la figura deseada con un factor de escala igual a 5 y sin sobreponer los trazos de la ampliación con los del dibujo original.

5. Sea M el punto medio del segmento XC.

a) Si $0 < k < \frac{1}{2}$, A está entre los puntos X y M. La posición de la punta guía y del lápiz está invertida. Si $k = 1/2$, A coincide con el punto M.	**b)** Si $\frac{1}{2} < k < 1$, A está entre los puntos M y C. La posición de la punta guía y del lápiz está invertida.	**c)** Si $1 < k < 2$, A está entre los puntos M y C. Si $k = 2$, entonces A coincide con el punto M.	**d)** Si $k > 2$, A se encuentra entre los puntos X y M.
			

6. Si $A \to C$, entonces Y y Z tienden a ser el mismo punto (Fig. C). Observe que si $A \to C$, entonces el factor de escala $k \to 1$, es decir, el pantógrafo tiende a hacer una copia de la figura dada, lo cual coincide con el hecho de que el lápiz y la punta guía tiendan a estar en la misma posición.

Si $A \to X$, entonces Y y X tienden a ser el mismo punto (Fig. D). Observe que si la punta guía se encuentra en Y, entonces $k \to \infty$, pero si el lápiz se encuentra en Y, entonces $k \to 0$. Con estas observaciones, ¿puede decir por qué no es posible alargar una figura con un factor de escala igual a 0, 1 o ∞? Ver el ejercicio 14.

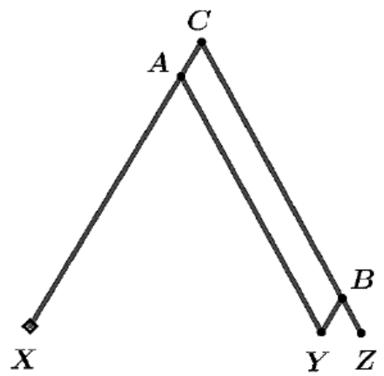


Figura C.

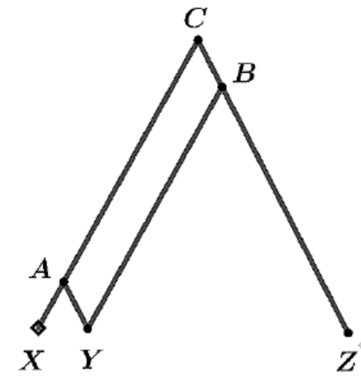
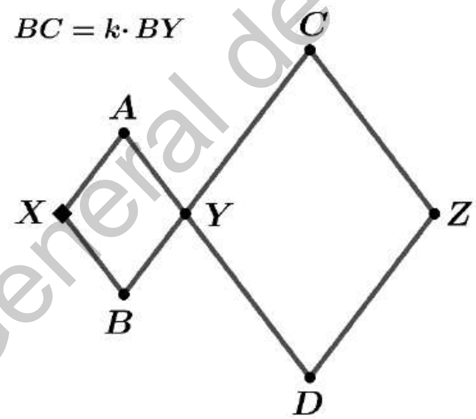


Figura D.

7. Para ampliar una figura k veces su tamaño, los brazos de un pantógrafo-rombo cumplen que: $BC = AD$, $AX = XB$ y $CZ = ZD$. Además, el pivote Y está colocado de forma que $BC = k \cdot BY$ y $AD = k \cdot AY$. Si se desea ampliar una figura k veces, la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Y y Z, respectivamente. Si se desea reducir una figura k veces, entonces la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Z y Y, respectivamente.

La demostración pedida es análoga a la demostración de la **proposición 2**.



8. En la Fig. E se muestran tres pantógrafos-rombos que amplían (reducen) una figura k veces su tamaño. La longitud del brazo BC es la misma en los tres mecanismos. Se desea diseñar un pantógrafo que pueda modificarse para que realice las tres ampliaciones (reducciones) dadas.

Observando las tres estructuras que debe poder formar el pantógrafo pedido y recordando los pasos que se siguen en la construcción de un pantógrafo tradicional, podemos pensar en formar nuestro pantógrafo con 6 barras de la misma longitud, cada barra con 5 perforaciones separadas la misma distancia (Fig. F, izquierda), y con 7 pivotes. En la Fig. F (derecha) se muestra cómo montar el pantógrafo para que amplíe (reduzca) una figura 4 veces su tamaño.

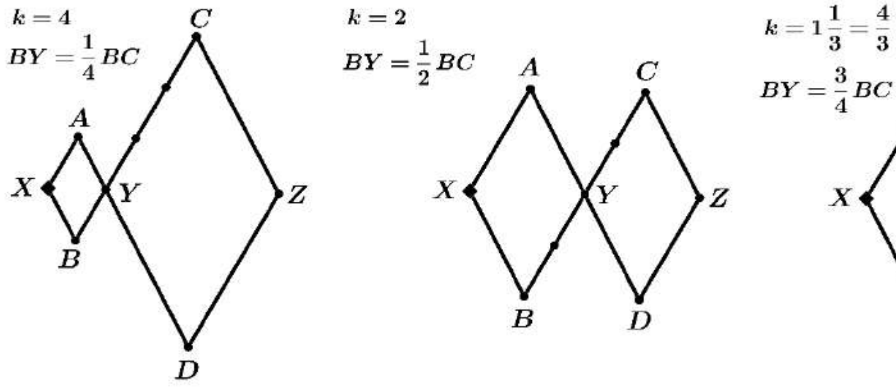


Figura E.

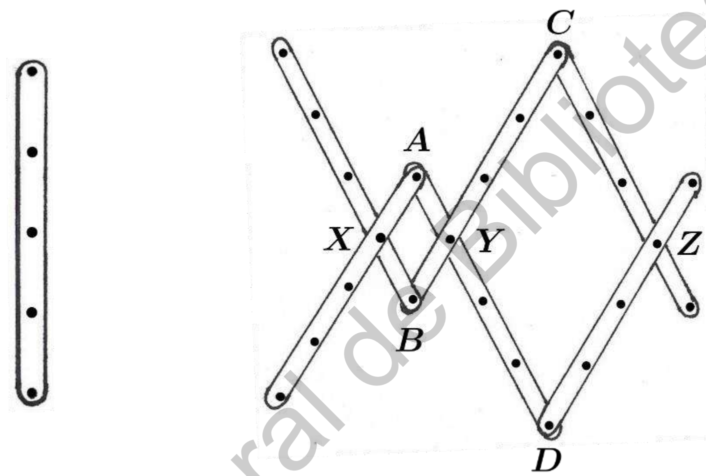


Figura F.

Es posible agregar otras escalas al pantógrafo, por ejemplo, si quisiéramos que amplíe (reduzca) una figura k_1 veces su tamaño, sólo tendríamos que hacer una perforación Y_1 en el brazo BC de manera que $BC = k_1 \cdot BY_1$ y llevar las distancias correspondientes al resto de los brazos para marcar las perforaciones restantes (Fig. G).

Cabe señalar que un pantógrafo-rombo tiene la misma *estructura* cuando realiza un alargamiento con factor de escala k que cuando realiza uno con factor de escala $k/(k-1)$, con la sola diferencia de que una de ellas aparece girada 180° (ver Fig. E, la estructura del pantógrafo cuando amplía (reduce) una figura $1\frac{1}{3} = 4/3$ veces es la misma que cuando amplía (reduce) una 4 veces, pero rotada media vuelta). Así, si un pantógrafo realiza un alargamiento con factor de escala k, sólo necesitamos girarlo media vuelta, intercambiar los pivotes X y Z y el pantógrafo ahora realizará un alargamiento con factor de escala $k/(k-1)$.

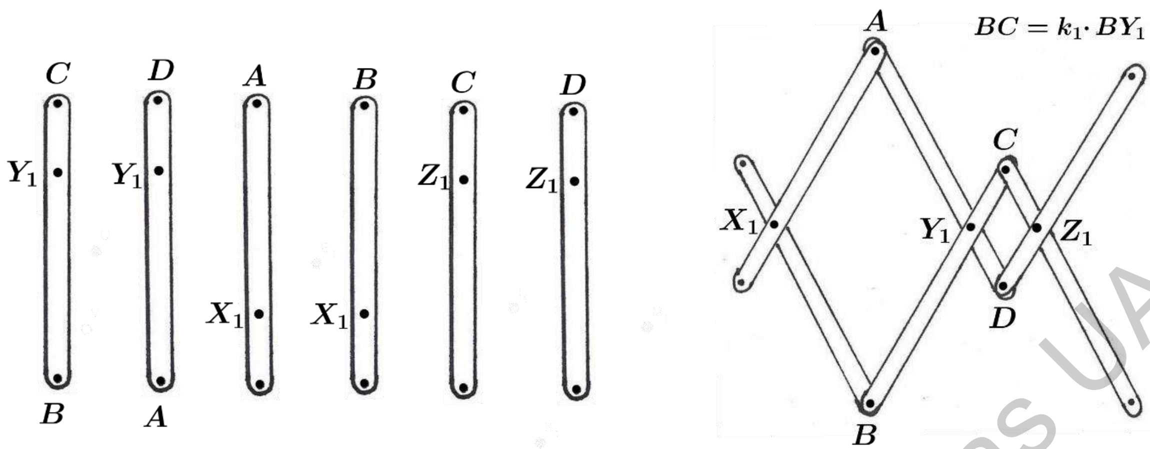
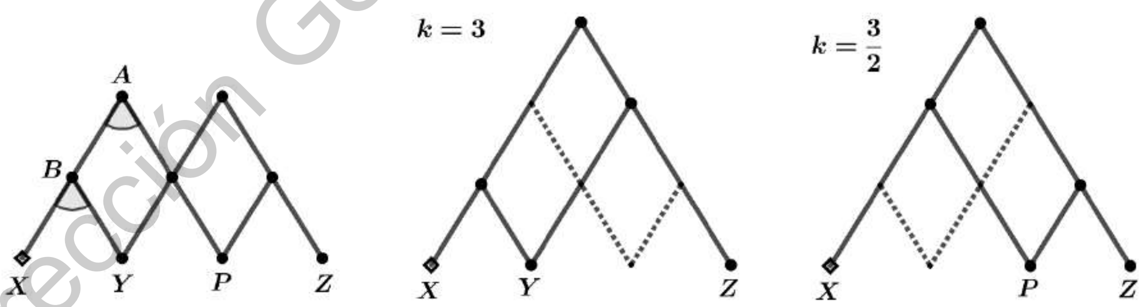


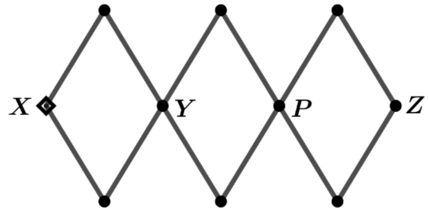
Figura G.

9. a) El pantógrafo realizaría ahora un alargamiento con factor de escala igual a $\frac{3}{2}$. Esto se debe a que en todo momento Z es homotético a P con centro de homotecia X y coeficiente de homotecia 3/2. Lo anterior quedaría demostrado si probamos que los puntos X, P y Z son colineales y que $XZ = \frac{3}{2}XP$. Tenemos que los triángulos ΔAXP y ΔBXY son semejantes, luego $\measuredangle AXP = \measuredangle BXY$ y por tanto X, Y y P son colineales (¿por qué?). Ya que el pantógrafo realiza un alargamiento con factor de escala igual a 3, se tiene que X, Y y Z son colineales y que $XZ = 3XY$. Así, los puntos X, P y Z con colineales. Y como se cumple que $XZ = 3XY$ y $XP = 2XY$, entonces $XZ = \frac{3}{2}XP$.

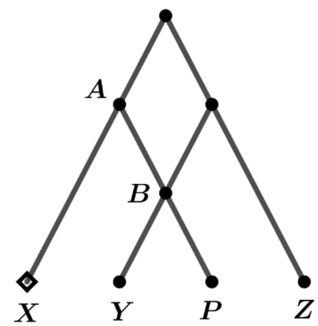
Obsérvese que la estructura de este pantógrafo es en esencia la misma que la de un pantógrafo tradicional adaptado para realizar dos escalas al mismo tiempo si se desea.



b) La punta guía deberá colocarse en el pivote P. ¿Por qué?

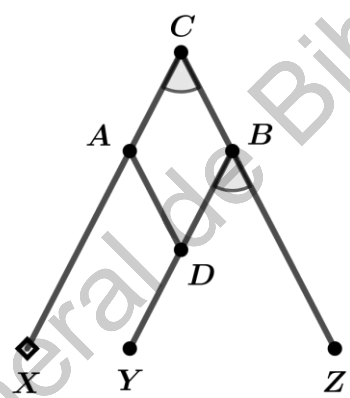


c) Bastaría con alargar el brazo AB de manera que $AP = 2AB$ y colocar la punta guía en el pivote Z y el lápiz en el pivote P. ¿Por qué?



10. Para cada uno de los pantógrafos debe probarse que: a) X, Y y Z son colineales y b) $XZ = 3XY$.

Pantógrafo 3:



Demostraremos primero que los triángulos ΔCXZ y ΔBYZ son semejantes. Como $CA = CB = AD = BD$ por construcción, entonces $CADB$ es un paralelogramo. Luego $CX \parallel BY$ y $\measuredangle XCZ = \measuredangle YBZ$ por ser ángulos correspondientes. Por otro lado, tenemos por construcción que $CX = CZ = 3AC$ y $BY = BZ = 2AC$, así

$$\frac{CX}{BY} = \frac{CZ}{BZ} = \frac{3}{2}$$

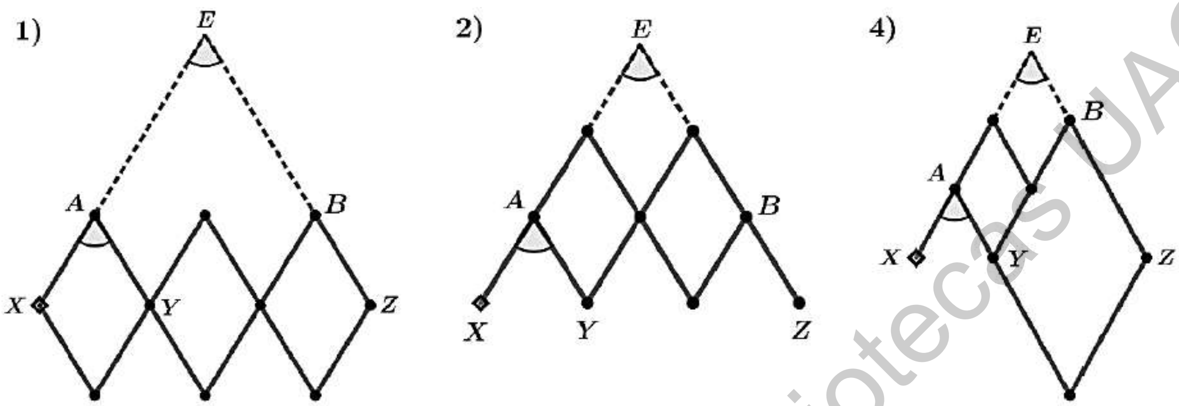
Por lo tanto, $\Delta CXZ \sim \Delta BYZ$ (criterio LAL).

Como $\Delta CXZ \sim \Delta BYZ$, se tiene que $\measuredangle CZX = \measuredangle BZY$. Si X no fuera colineal con Y y Z, entonces X estaría en el semiplano superior o en el plano inferior que determina la recta YZ, teniéndose en cualquier caso que $\measuredangle CZX < \measuredangle BZY$ o $\measuredangle CZX > \measuredangle BZY$. Entonces X, Y y Z son colineales.

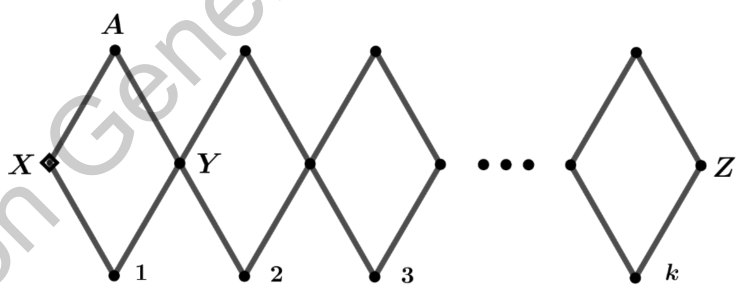
Por último, tenemos que $\frac{XY}{XZ} = \frac{XZ - YZ}{XZ} = 1 - \frac{YZ}{XZ}$. Pero $\Delta CXZ \sim \Delta BYZ$, entonces se cumple que $\frac{XZ}{YZ} = \frac{3}{2}$. Reacomodando la expresión anterior, tenemos que $\frac{YZ}{XZ} = \frac{2}{3}$.

Así, $\frac{XY}{XZ} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, y por lo tanto, $XZ = 3XY$. ■

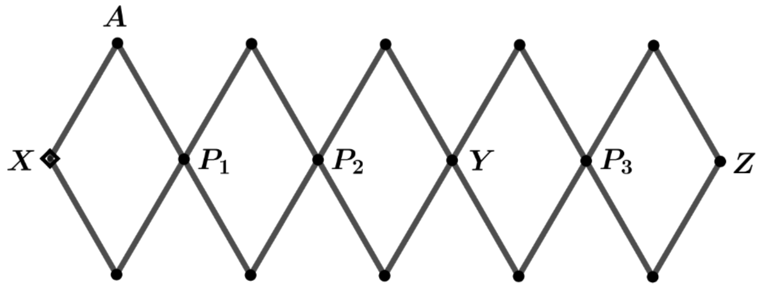
Sugerencia para los **pantógrafos 1**, **2** y **4**: Demuestre que los triángulos ΔXAY y ΔXEZ son semejantes, donde E es el punto donde se intersectan las prolongaciones de los segmentos XA y ZB.



11. Pantógrafo 1: Para ampliar (reducir) una figura k veces, $k \in \mathbb{Z}$ y $k > 1$, el mecanismo deberá componerse de k rombos formados por $2(k-1)$ barras de longitud $2XA$ y 4 barras de longitud XA (si XC es el brazo principal de un pantógrafo tradicional, que aproximadamente mide 30 cm, entonces XA cumpliría que $XC = k \cdot XA$). Si se desea realizar una ampliación, la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Y y Z, respectivamente. Si lo que se busca es una reducción, entonces la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Z y Y, respectivamente.



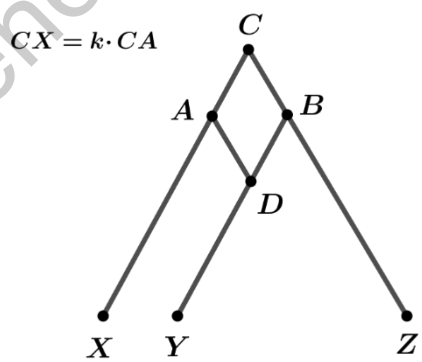
Este mecanismo también permite ampliar (reducir) una figura k veces, $k > 1$, si k es racional. Si $k = n/m$, con $n, m \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces el pantógrafo deberá componerse de n rombos y la punta guía deberá colocarse en el pivote "derecho" del m-ésimo rombo. Por ejemplo, si se desea ampliar una figura $5/3$ veces, el pantógrafo estará formado de 5 rombos y la punta guía estará colocada en el pivote "derecho" del tercer rombo, Y, como se muestra en la imagen. Si se desea reducir la figura $5/3$ veces (es decir, si se desea alargar la figura con un factor de escala igual $3/5$) entonces la punta guía y el lápiz, colocados en los pivotes Y y Z, respectivamente, se intercambian de lugar.



Cabe señalar que este mecanismo permite realizar distintas ampliaciones (o reducciones) de una figura dada. Por ejemplo, si se coloca la punta guía en los pivotes P_1, P_2 y P_3 del pantógrafo anterior, éste ampliará una figura 5, $5/2$ y $5/4$ veces su tamaño, respectivamente. ¿Cómo podría usar este mecanismo para conseguir un alargamiento con un factor de escala igual a $1/5$, $2/5$ y $4/5$?

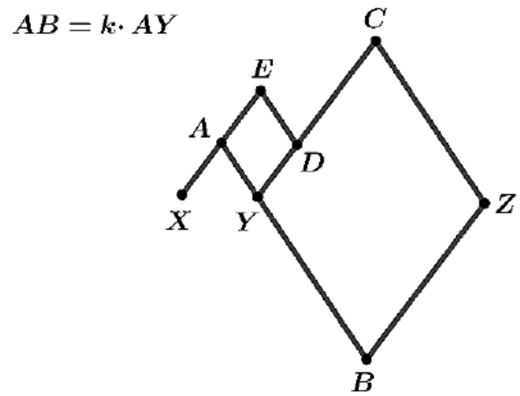
Con este tipo de pantógrafo, ¿es posible ampliar (reducir) una figura k veces, con k irracional? De ser así, ¿qué relaciones tendrían que cumplir sus brazos y pivotes?

Pantógrafo 3: Este mecanismo se compone de 4 barras; a saber, CX, CZ, BY y DA. Para ampliar (reducir) una figura k veces su tamaño, el pivote A se coloca de manera que $CX = k \cdot CA$ y sus brazos deben cumplir que: $CX = CZ$, $BY = AX$ y $DA = DB = CB = CA$. Si se desea ampliar la figura k veces, la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Y y Z, respectivamente. Si se desea reducir la figura k veces, entonces la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Z y Y, respectivamente.



Pantógrafo 4: Este pantógrafo se compone de 6 barras; a saber, AB, CY, CZ, BZ, XE y ED. Para ampliar (reducir) una figura k veces su tamaño, el pivote Y está colocado de forma que $AB = k \cdot AY$ y los brazos de este mecanismo cumplen que: $CY = CZ = BZ = BY$, $ED = DY = EA = AY$ y $EX = 2AY$ (el brazo AB tiene la misma función que el brazo principal del pantógrafo tradicional). Si se desea ampliar la figura k veces, la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Y y Z,

respectivamente. Si se desea reducir la figura k veces, entonces la punta guía y el lápiz se colocan en los pivotes Z y Y, respectivamente.



Las demostraciones pedidas son análogas a las dadas en el ejercicio 10.

12. El pantógrafo amplía (reduce) una figura 4, 2 y $\frac{4}{3}$ veces si la punta guía está en P''', P'' y P', respectivamente.

13. Sea P un punto del contorno de F. Entonces el punto P' homotético a P con centro de homotecia O y coeficiente 0 pertenece a F' y cumple que $\frac{OP'}{OP} = 0$. Para que la igualdad anterior se satisfaga, necesariamente $OP' = 0$, es decir que la longitud del segmento OP' es 0, lo cual sólo es posible si $O = P'$. Así, la "figura" F' está conformada únicamente por el punto O.

Ahora, si P' es homotético a P con centro de homotecia O y coeficiente 1, P' pertenece a F' y cumple que $\frac{OP'}{OP} = 1$, entonces $OP' = OP$, por lo que $P = P'$, es decir, que los puntos P y P' deben ser iguales. Por tanto la figura F' es igual a la figura F.

14. No es posible. Según el ejercicio 13, para que el factor de escala k fuera igual a 1, los pivotes A y C tendrían que estar en la misma posición, lo mismo que Y y Z. En la práctica dicho pantógrafo no haría una copia de una figurada dada, pues al estar el lápiz y la punta guía en el mismo lugar, el pantógrafo sólo "remarcaría" la figura dada (ver la tabla A).

Para que k fuera igual a 0, se necesitarían que A, Y (lápiz) y X estuvieran en la misma posición. Dicho pantógrafo "dibujaría" un solo punto al sobre trazarse la figura dada, este punto sería X (ver la tabla A).

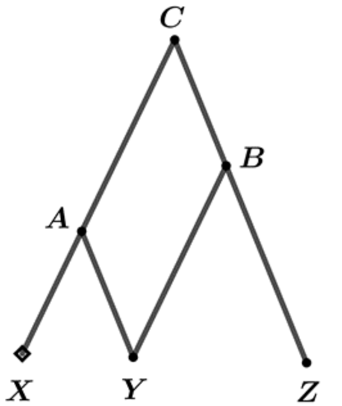
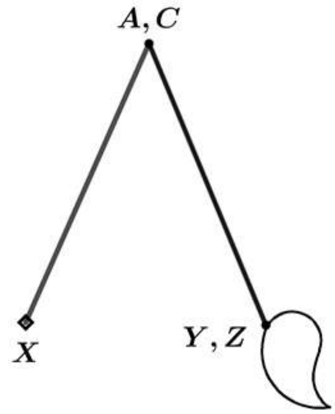
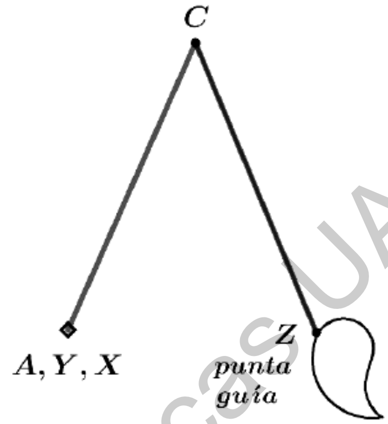
Pantógrafo original	$k = 1$	$k = 0$
		

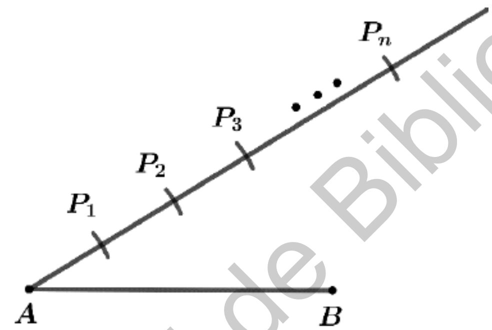
Tabla A.

Material complementario.

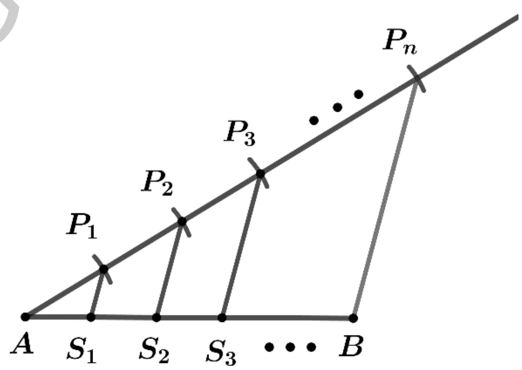
I. Dividir un segmento en *n* partes iguales.

1. Se desea dividir el segmento AB en n partes iguales.

2. Para ello, desde el punto A se traza una semirrecta cualquiera. Se elige una abertura cualquiera del compás y se lleva esta medida n veces sobre la semirrecta, determinándose así los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$.



3. El último punto que se obtiene, es decir P_n, se une con el punto B (el otro extremo del segmento AB). Por cada uno de los puntos obtenidos se trazan rectas paralelas al segmento BP_n. Las intersecciones $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ de las rectas anteriores con el segmento AB serán las divisiones del segmento buscadas.



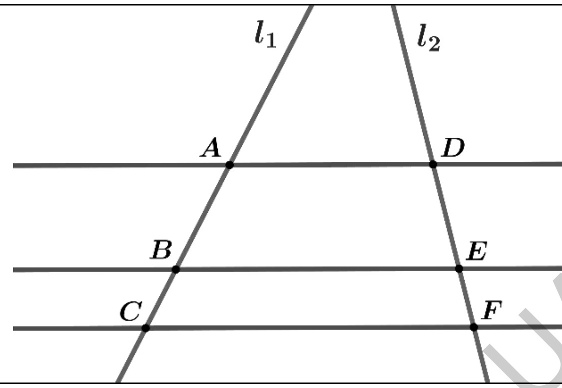
■

La justificación de esta construcción es muy sencilla y se basa en el teorema de Tales. A continuación recordamos al lector lo que dice este teorema.

Teorema de Tales.

Sean l_1 y l_2 dos líneas que cortan a tres rectas paralelas. Entonces los segmentos que quedan entre éstas cumplen que

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$



Justificación:

Se desea probar que $AS_1 = S_1S_2 = S_2S_3 = \cdots = S_{n-1}B$. Como $S_1P_1 \parallel S_2P_2$, entonces por el teorema de Tales se tiene que

$$\frac{AS_1}{S_1S_2}=\frac{AP_1}{P_1P_2}.$$

Pero $AP_1 = P_1P_2$, entonces $\frac{AS_1}{S_1S_2} = 1$, y por tanto $AS_1 = S_1S_2$ (1).

De la misma forma se tiene que $S_1P_1 \parallel S_2P_2 \parallel S_3P_3$, luego por el teorema de Tales se cumple que $\frac{S_1S_2}{S_2S_3}=\frac{P_1P_2}{P_2P_3}$. Pero $P_1P_2 = P_2P_3$, entonces $\frac{S_1S_2}{S_2S_3} = 1$, y por tanto $S_1S_2 = S_2S_3$ (2).

De las igualdades (1) y (2) tenemos que $AS_1 = S_1S_2 = S_2S_3$.

Continuando de esta manera llegamos a que $AS_1 = S_1S_2 = S_2S_3 = \cdots = S_{n-1}B$.

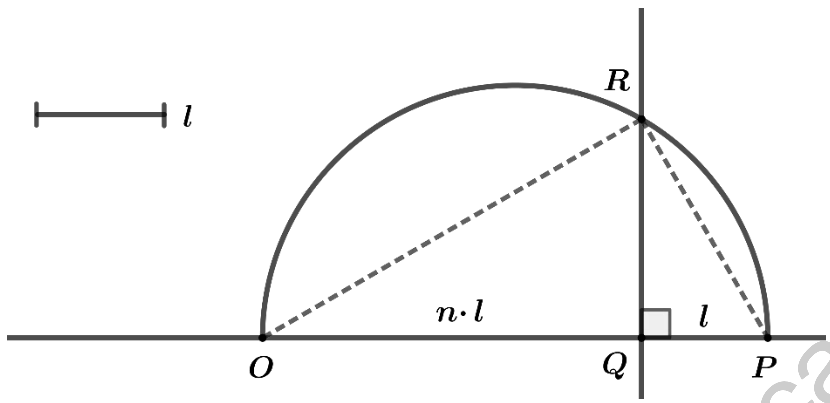
■

II. Construir con regla y compas un segmento x que tenga longitud $\frac{d}{\sqrt{n}}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y d es la longitud de un segmento dado.

Sea $n \in \mathbb{N}$, d la longitud de un segmento dado y l la longitud de un segmento cualquiera. Para construir el segmento x es necesario obtener primero un segmento cuya longitud sea un múltiplo de $\sqrt{n}$. A continuación se muestra cómo obtenerlo.

Construcción 1: Construir un segmento de longitud $\sqrt{n} \cdot l$, donde $n \in \mathbb{N}$ y l es la longitud de un segmento cualquiera.

Sobre una recta cualquiera llevamos $n+1$ veces la longitud l. Sean O y P los extremos del segmento de longitud $(n+1) \cdot l$. Trazamos una semicircunferencia con OP como diámetro. Por Q trazamos una perpendicular a OP. Sea R la intersección de esta perpendicular con la semicircunferencia. Entonces el segmento RQ tiene longitud $\sqrt{n} \cdot l$.



La justificación de la construcción anterior hace uso de los resultados y conceptos que aparecen en la tabla A.

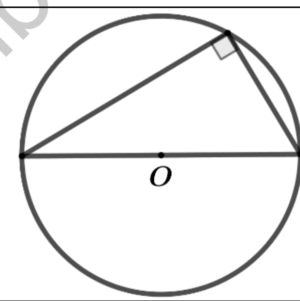
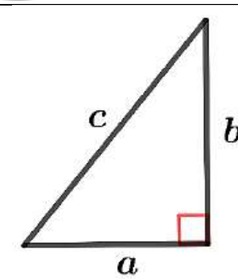
Resultados matemáticos.	
1. Si uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia coincide con un diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.	
2. Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	$c^2 = a^2 + b^2$ 
Conceptos: Ángulos en circunferencias.	

Tabla A. Resultados y conceptos utilizados en la justificación de la construcción 1.

Justificación:

Observamos que los triángulos $\triangle OQR$ y $\triangle PQR$ son rectángulos puesto que $OP \perp RQ$. También el triángulo $\triangle ORP$ es rectángulo, esto por el **resultado 1**. Por el **teorema de Pitágoras**, de los tres triángulos anteriores se obtienen las siguientes igualdades:

$$(n\cdot l)^2 + (RQ)^2 = (RO)^2 \qquad (1)$$

$$l^2 + (RQ)^2 = (RP)^2 \qquad (2)$$

$$(RO)^2 + (RP)^2 = (n\cdot l + l)^2 \qquad (3)$$

De la ecuación (3) tenemos que

$$(RO)^2 + (RP)^2 = (n\cdot l)^2 + 2(n\cdot l^2) + l^2$$

Entonces

$$(n\cdot l)^2 = (RO)^2 + (RP)^2 - 2(n\cdot l^2) - l^2 \qquad (4)$$

De la ecuación (1) tenemos que

$$(RQ)^2 = (RO)^2 - (n\cdot l)^2 \qquad (5)$$

Sustituyendo $(n\cdot l)^2$ de (4) en (5) se obtiene que

$$(RQ)^2 = (RO)^2 - [(RO)^2 + (RP)^2 - 2(n\cdot l^2) - l^2]$$

Luego, $(RQ)^2 = 2(n\cdot l^2) - (RP)^2 + l^2$.

Pero de la ecuación (2) se tiene que $-(RQ)^2 = l^2 - (RP)^2$, entonces

$$(RQ)^2 = 2(n\cdot l^2) - (RQ)^2\,.$$

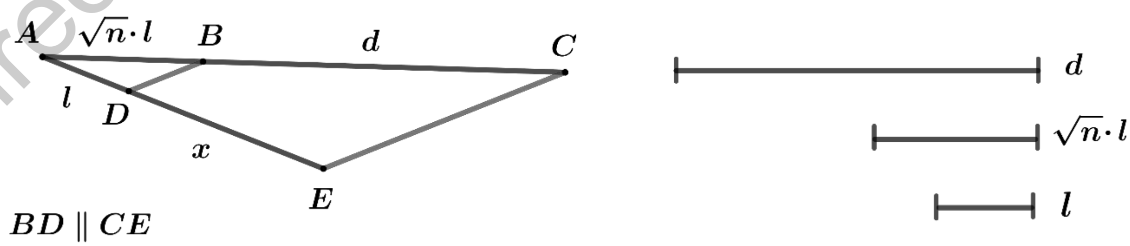
Despejando RQ de la ecuación anterior se tiene que $2(RQ)^2 = 2(n\cdot l^2)$, luego $(RQ)^2 = n\cdot l^2$, y por tanto, $RQ = \sqrt{n\cdot l^2}$.

Simplificando obtenemos que

$$RQ = \sqrt{n}\cdot l$$

■

La siguiente imagen muestra cómo obtener un segmento x con longitud $\frac{d}{\sqrt{n}}$, una vez teniendo un segmento con longitud $\sqrt{n}\cdot l$.



Probar que $x = \frac{d}{\sqrt{n}}$ es muy simple, nos basta con recordar el teorema de Tales.

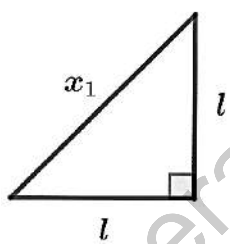
Como $BD \parallel CE$, entonces

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \text{ , por lo que } \frac{l}{x} = \frac{\sqrt{n} \cdot l}{d}.$$

Y despejando x de la igualdad anterior tenemos que

$$x = \frac{d}{\sqrt{n}}.$$

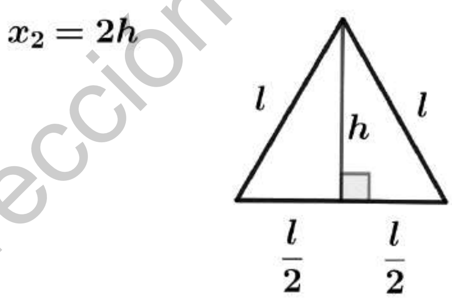
Conviene señalar que para ciertos valores de n es posible obtener el segmento $\sqrt{n} \cdot l$ prescindiendo de la **construcción 1** y construyendo en su lugar determinadas figuras geométricas, por ejemplo triángulos. Gracias a las propiedades de estas figuras es que podemos obtener el segmento deseado. Vamos a ilustrar lo anterior con dos ejemplos. Supongamos que deseamos construir los segmentos $x_1 = \sqrt{2} \cdot l$ y $x_2 = \sqrt{3} \cdot l$. Para el primero tracemos un triángulo rectángulo con catetos de longitud l. Por el teorema de Pitágoras tenemos que



$$l^2 + l^2 = {x_1}^2$$

$$2l^2 = {x_1}^2 \implies x_1 = \sqrt{2} \cdot l.$$

Para construir el segmento $x_2 = \sqrt{3} \cdot l$ tracemos un triángulo equilátero de lado l. Como *la altura h de un triángulo equilátero biseca la base del triángulo*, entonces se tiene que



$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4} l^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l \implies x_2 = 2h = \sqrt{3} l.$$

Libro sugerido:

- Bold, Benjamin. Famous problems of geometry and how to solve them. New York: Dover publications, 1982.

En este libro el lector puede encontrar cómo construir con regla y compás segmentos de longitud ab, a^2, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[4]{a}$ o $\sqrt[8]{a}$, por ejemplo, donde a y b son segmentos dados.

En el libro también se muestra cómo construir segmentos con longitud $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{17}$ a partir de triángulos rectángulos.

7.2. La broca de Watts.

1) Exposición del tema.

Se inicia la clase explicando que en varios trabajos de carpintería es necesario realizar agujeros cuadrados o rectangulares en la madera, por ejemplo, cuando se quiere unir dos piezas de madera entre sí de tal forma que queden en escuadra (ver Fig. 1). Existen brocas que pueden perforar agujeros cuadrados[14]. Una de ellas se compone de una parte fija y una móvil. La parte móvil es la que perfora un agujero cilíndrico (como lo hace cualquier broca convencional). Mientras que la parte fija, de forma cuadrada y esquinas afiladas, se encarga de darle forma cuadrada al agujero, cortando el material excedente al ejercer un poco de presión (ver Fig. 2). Este tipo de brocas suelen utilizarse con un taladro de banco.

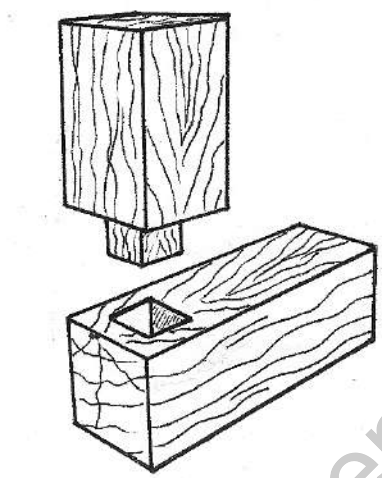


Figura 1. Ensamble de “caja y espiga”.

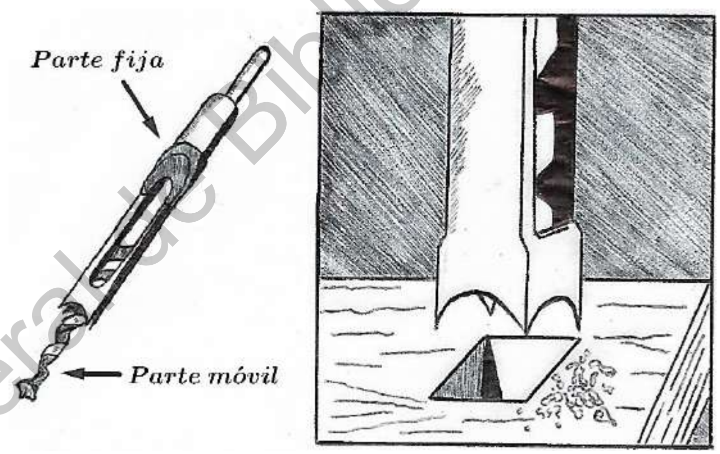


Figura 2. Broca que perfora agujeros cuadrados.

Otra de estas brocas, más ingeniosa que la anterior, es la que diseñó el ingeniero inglés Harry James Watts en 1914. Esta broca gira dentro de una placa guía de metal que tiene un orifico cuadrado y que es colocada previamente sobre el material que se desea perforar. Conforme la broca gira, sus esquinas cortan el cuadrado a través del material. Debido a que el centro de la broca no se mantiene fijo mientas ésta se mueve, es necesario que el taladro tenga un aditamento especial que sostenga la broca y que permita esta acción. El dispositivo completo y la sección transversal de la broca se muestra en la figura 3.

---

[14] Recordemos que una broca es una pieza metálica que al colocarse en un taladro realiza perforaciones en diversos materiales como madera, concreto, etc.

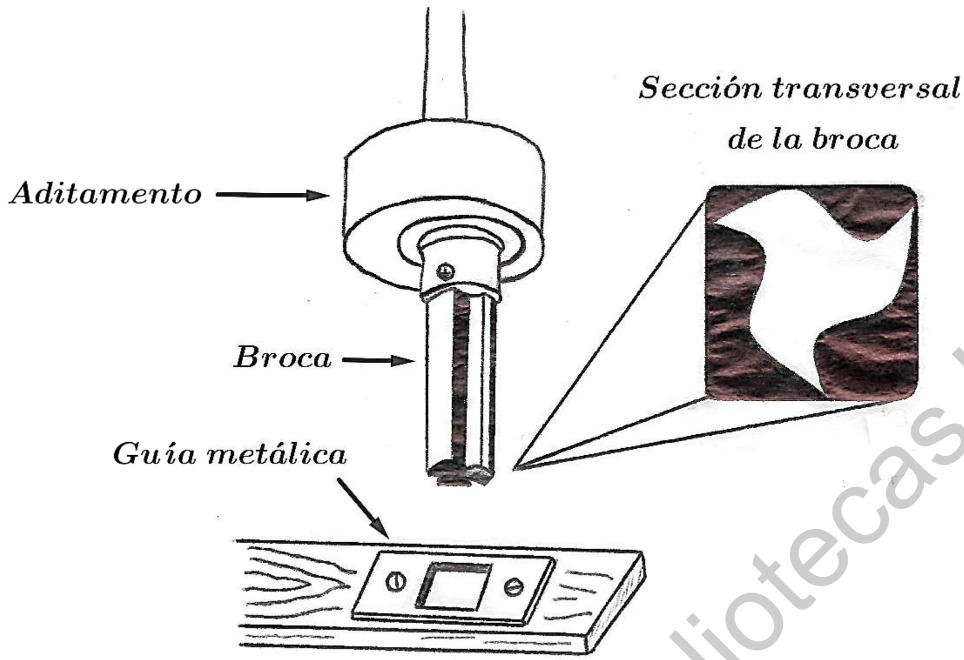


Figura 3. Broca de Watts con aditamento y sección transversal de la broca en el agujero que perfora.

Para que el alumno se forme una mejor idea del funcionamiento de ambas brocas, sugerimos que el profesor muestre a sus estudiantes los videos que aparecen en los siguientes enlaces:

- **Videos**

  1. Broca que perfora agujeros cuadrados:

  https://www.youtube.com/watch?v=U6Sf1g2iPtE&feature=emb_title

  2. Broca de Watts:

  https://www.youtube.com/watch?v=rjckF0-VeGI

Se espera que observar la broca de Watts en acción suscite varias dudas entre los alumnos acerca de su funcionamiento.

2) Delimitación del problema.

Una de las cuestiones que puede plantearse sobre la manera en que funciona la broca de Watts, es: **¿por qué la broca "rebota" dentro del cuadrado guía?**

La conclusión de que la broca "rebota" (o, mejor dicho, rota) dentro de la guía se hace evidente cuando nos preguntamos por qué la broca, al girar, no daña la guía metálica.

Otras preguntas interesantes que pudieran plantearse son: ¿es posible realizar el agujero cuadrado sin utilizar el cuadrado guía? ¿Qué tan cuadrado es el agujero perforado (pues se observa que éste tiene sus esquinas redondeadas)? En otras palabras, ¿cuál es su área?, ¿qué curva describen sus "esquinas"? Para responder estas cuestiones es necesario tener noción de conceptos como: lugar geométrico, ecuación ordinaria de la elipse, ecuación general de las cónicas, traslación y rotación de los ejes coordenados, ecuación paramétrica, etc., conceptos que pertenecen al campo de la Geometría Analítica.

3) Formulación del problema.

Para plantear el problema matemáticamente, el profesor primero debe explicar qué forma tiene la broca. A continuación se propone una manera de hacerlo.

La broca de Watts es muy diferente a las brocas convencionales cuya forma es cilíndrica. La sección transversal de la broca es un *triángulo de Reuleaux* al que se le han quitado tres regiones para darle filo a sus bordes y para permitir que las virutas del material que se está perforando logren escapar (ver Fig. 4, izquierda). ¿Pero qué es un triángulo de Reuleaux? Consideremos un triángulo equilátero ΔABC y con centro en el vértice A tracemos un arco de circunferencia que conecte los vértices B y C. Realicemos el mismo proceso para trazar los dos arcos restantes. La figura que se obtiene es un triángulo de Reuleaux (ver Fig. 4, derecha).

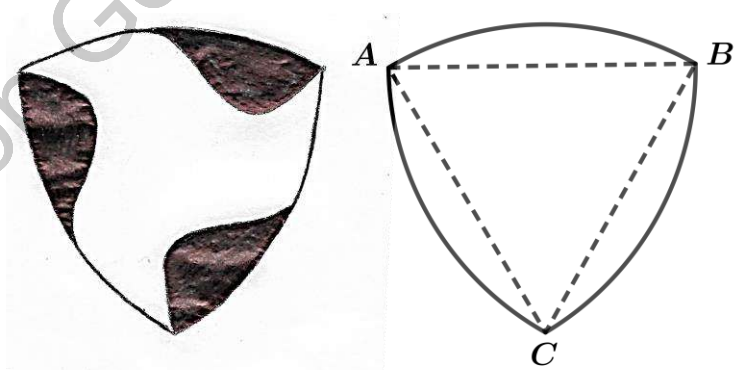


Figura 4. Triángulo de Reuleaux.

Diremos que un triángulo de Reuleaux tiene lado h, si se construye a partir de un triángulo equilátero de lado h.

Considere un triángulo de Reuleaux de lado *h*. Una propiedad de esta figura es que *puede rotar ajustadamente dentro de un cuadrado de lado h, manteniendo en todo momento contacto con sus cuatro lados*. Para comprobarlo, el profesor puede pedir a sus alumnos que recorten un triángulo de Reuleaux de cartón y que lo hagan girar dentro de un agujero cuadrado (de las medidas apropiadas) cortado de otra pieza de cartón y cuyo grosor sea, de preferencia, mayor que el anterior (ver Fig. 5). El giro lo pueden producir con sus manos o de la siguiente manera: primero se localiza el centro[15] del triángulo de Reuleaux y se perfora con una tachuela, luego se introduce un alfiler o la puntilla de un portaminas en la perforación y se hacen movimientos circulares, de manera que la figura rote dentro del cuadrado.

El profesor debe hacer notar que mientras el triángulo de Reuleaux rota en el cuadrado, sus tres esquinas trazan una curva que es casi un cuadrado (no lo es totalmente porque éste tiene sus esquinas ligeramente redondeadas). Este hecho es lo que motivó a utilizar el triángulo de Reuleaux como broca para perforar agujeros cuadrados.

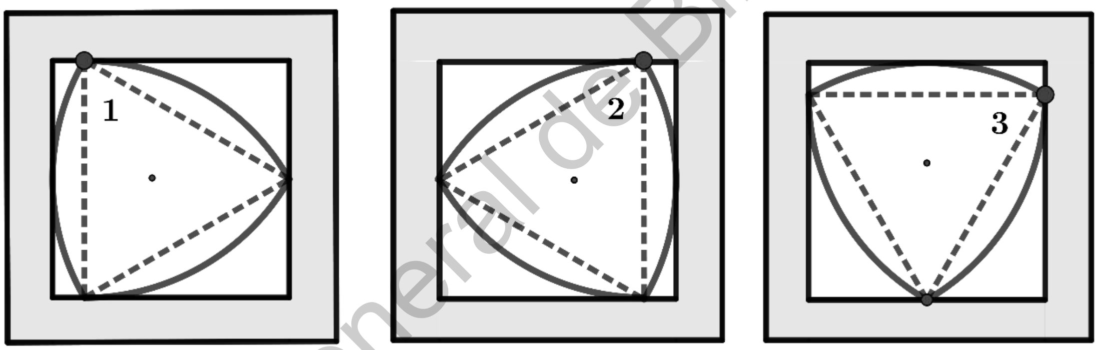


Figura 5. Triángulo de Reuleaux rotando dentro de un cuadro.

Con lo dicho hasta ahora, la pregunta planeada en el inciso **(2)** se ha respondido a medias, pues falta demostrar, matemáticamente, la propiedad expuesta líneas arriba. Esto puede hacerse probando la siguiente proposición:

Proposición 1: Dada una dirección, un cuadrado de lado *h* puede circunscribirse[16] a un triángulo de Reuleaux de lado *h*, de tal forma que un lado del cuadrado circunscrito sea paralelo a dicha dirección.

---

[15] El centro de un triángulo de Reuleaux es el punto donde se intersecan las medianas del triángulo equilátero base (centroide o baricentro).

[16] Un polígono está circunscrito a una figura si todos los lados del polígono hacen contacto con el contorno de la figura y la figura queda dentro del polígono.

4) Desarrollo del contenido programático.

Con objeto de probar la proposición 1, el profesor puede iniciar el estudio de la circunferencia, introduciendo en la clase los siguientes conceptos geométricos:

- Elementos importantes de la circunferencia (radio, diámetro, cuerda, etc. En particular, recta tangente y arco).
- Ángulos en la circunferencia (inscrito, central, semi-inscrito).
- Resultados que involucran a la circunferencia (el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente, un triángulo inscrito en una circunferencia será rectángulo si uno de sus lados coincide con un diámetro, etc.).
- Perímetro y área de una circunferencia (en particular, longitud de un arco de circunferencia y área de un sector circular).

Algunos otros conceptos geométricos que aparecen, ya sea en la demostración de la proposición 1 o en los ejercicios propuestos, se mencionan a continuación. En varios programas de bachillerato, estos conceptos preceden al estudio de la circunferencia, por lo que el desarrollo de este tema también puede servir para reforzarlos.

- Rectas paralelas y perpendiculares (ángulos entre paralelas).
- Distancia entre dos rectas.
- Congruencia de triángulos.
- Propiedades de cuadriláteros.
- Teorema de Pitágoras.

5) Presentación de ejemplos análogos.

Con objeto de mostrar otras aplicaciones de los conceptos geométricos antes mencionados, el profesor también puede plantear a sus alumnos el siguiente problema:

> Las máquinas expendedoras que funcionan con monedas identifican la denominación de éstas midiendo su tamaño. Cuando una moneda se introduce a la máquina, ésta rueda sobre una rampa (debido a la acción de la gravedad) hasta llegar al punto donde es medida y, posteriormente, clasificada. Actualmente este tipo de máquinas utilizan sensores para

medir el tamaño (o ancho) de las monedas, pero para fijar ideas supongamos que lo hacen mediante una especie de vernier (Fig. 6). Es claro que sea cual sea la posición en la que llegue la moneda, su ancho siempre medirá lo mismo. ¿Es posible que este tipo de máquinas funcione con monedas que no sean circulares?

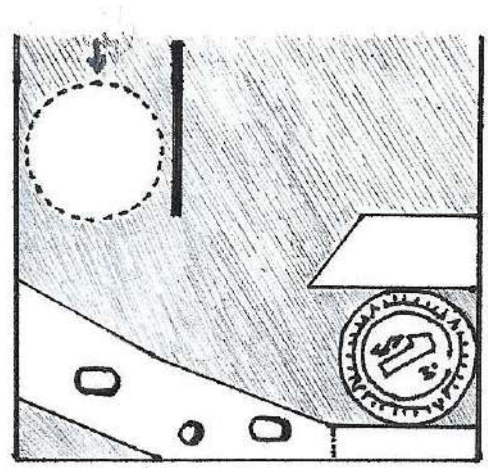


Figura 6. Moneda en máquina expendedora.

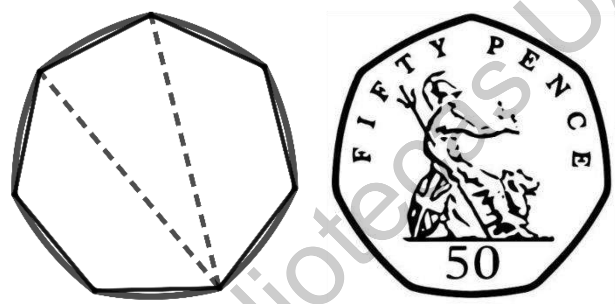


Figura 7. (Izquierda) Heptágono de Reuleaux. (Derecha) Moneda de 50 peniques.

Una moneda que pueda utilizarse en una máquina así descrita, debe cumplir dos requisitos esenciales:

1. Rodar con suavidad.
2. Tener el mismo ancho en cualquier orientación.

¿Existe alguna figura, a parte de la circunferencia, que cumpla estos requisitos? Pensemos, por ejemplo, en una moneda cuadrada. Podemos medir su ancho con un vernier o colocándola entre dos reglas paralelas de forma en que ambas reglas toquen el contorno de la moneda, la distancia entre las dos reglas será el ancho de la moneda. No es difícil ver que el ancho de esta moneda variará entre 1 y $\sqrt{2}$ veces la longitud del lado del cuadrado. Por lo tanto, la moneda que necesitamos no puede ser cuadrada.

A pesar de lo que la intuición nos pudiera decir, sí hay figuras que cumplen los requisitos anteriores, son las llamadas *figuras de ancho constante*[17]. El triángulo de Reuleaux es sólo un ejemplo de esta clase de figuras.

[17] Para un estudio detallado del tema, véase (Yaglom y Boltyanskii, 1961), (Montejano, 1998) y (Rademacher y Toeplitz, 1957).

El profesor no debe sentir recelo de abordar este tema en clase, pues aunque determinar de manera formal el *ancho de una figura en una dirección dada* implique hablar de conceptos como convexidad o líneas soporte (que no forman parte de los programas de Geometría a nivel bachillerato), éstos pueden explicarse, de manera sencilla, utilizando conceptos básicos de Geometría. Es más, el concepto de línea soporte puede ayudar en el entendimiento de recta tangente, ya que suele pensarse (erróneamente) que ambos conceptos son lo mismo.

Con motivo de construir algunas figuras de ancho constante, aparte de introducir los conceptos mencionados en el inciso **(4)**, el profesor también puede iniciar el estudio de los polígonos regulares. Siguiendo la misma idea de la construcción del triángulo de Reuleaux, es posible construir figuras de ancho constante sobre polígonos regulares con un número impar de lados (Fig. 7, izquierda). A este respecto, algunos problemas interesantes que podrían proponerse a los estudiantes, son:

- Construir una figura de ancho constante a partir de un cuadrado.
- Construir una figura de ancho constante que esté compuesta de cuatro arcos de circunferencia.
- Construir un heptágono de Reuleaux de ancho h.
- Construir, con regla y compás, un pentágono de Reuleaux de ancho h.

Por último, nos gustaría señalar que la necesidad de diseñar una moneda no circular y que pudiera utilizarse en máquinas expendedoras y en parquímetros, fue una necesidad real. En 1966 el Reino Unido cambió su antiguo sistema de acuñación al decimal. Para ello, el billete de diez chelines fue desmonetizado y remplazado con una nueva moneda: la de 50 peniques. Esto se hizo para ahorrar costos de producción, pues la vida útil de un billete era de aproximadamente cinco meses, mientras que la moneda podía durar 50 años o más. Esta nueva moneda sería la de mayor denominación en circulación. Por tanto, se requería que tuviera un diseño que permitiera a las personas distinguirla fácilmente de otras monedas. Hacerla de un tamaño más grande que el resto no era nada práctico, pues pesaría mucho en los bolsillos y carteras. Fue así que se tuvo la idea de realizar una moneda que tuviera varios lados. Dicha moneda tenía que cumplir los requisitos (1) y (2) antes mencionados.

La moneda británica de 50p, que hoy en día sigue en uso, tiene la forma de un "heptágono de Reuleaux" (Fig. 7, derecha).

6) Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo.

En este punto, el profesor expondrá la demostración de la proposición 1. Para ello puede seguir la que se presenta a continuación. En la tabla 1 se muestran los conceptos y resultados matemáticos que se utilizan en la demostración.

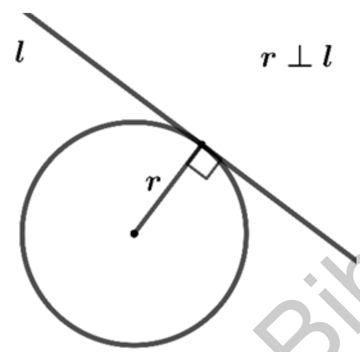
Resultados matemáticos
1. En cualquier circunferencia, el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente. 
Conceptos: Rectas paralelas (ángulos entre paralelas), rectas perpendiculares, distancia entre paralelas (distancia de un punto a una recta), circunferencia, arco, recta tangente.

Tabla 1. Resultados y conceptos utilizados en la demostración de la proposición 1.

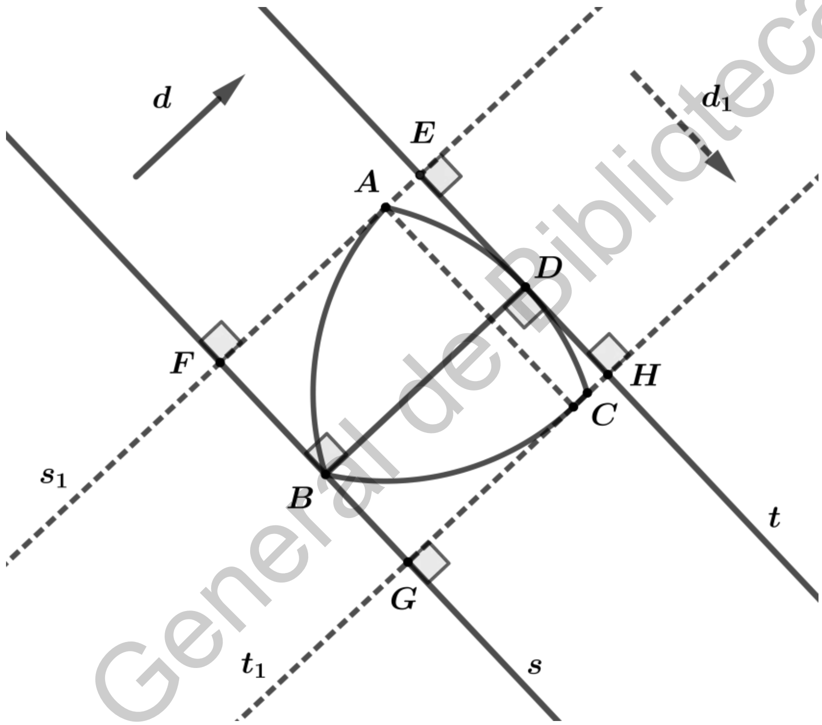
Proposición 1: Dada una dirección, un cuadrado de lado h puede circunscribirse a un triángulo de Reuleaux de lado h, de tal forma que un lado del cuadrado circunscrito sea paralelo a dicha dirección.

Demostración:

Sea d una dirección dada. Es claro que un radio de los tres arcos de circunferencia que conforman el triángulo de Reuleaux será paralelo a la dirección d. Supongamos que BD es este radio. Sea t la recta que pasa por D y que es perpendicular a BD. Tenemos que t es tangente al arco $\widehat{AC}$ en D. Sea s la recta perpendicular BD y que pasa por el vértice B. Las rectas t y s contienen completamente al triángulo de Reuleaux y lo intersecan sólo en puntos de su contorno (en D y B). Además, la distancia entre ambas rectas es $BD = h$ y ambas son perpendiculares a la dirección d.

Así, dada cualquier dirección, existen dos rectas paralelas que contienen al triángulo de Reuleaux y cuya distancia es h. Sea d_1 una dirección perpendicular a d, y sean t_1 y s_1 las rectas paralelas correspondientes a dicha dirección.

Como t_1 y s_1 son perpendiculares a la dirección d_1, entonces t_1 y s_1 son paralelas a la dirección d, y por tanto t y s son perpendiculares a t_1 y s_1. Tenemos que la el triángulo de Reuleaux se encontrará contenido dentro del rectángulo formado por la intersección de las rectas t, s, t_1 y s_1. Sea $EFGH$ dicho rectángulo. Como $h = EF = FG = GH = HE$, entonces $EFGH$ es un cuadrado de lado h, donde $HE = FG$ es el lado paralelo a la dirección d. ■



Durante la demostración y con objeto de ayudar a comprender el concepto de recta tangente a una circunferencia, el profesor puede plantear la siguiente pregunta a sus estudiantes:

- ¿La recta s es tangente a alguno de los arcos $\widehat{AB}$ o $\widehat{BC}$?

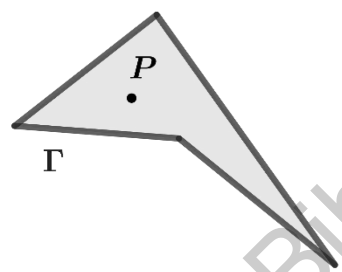
Ejercicios.

1. Calcular el perímetro de un triángulo de Reuleaux de lado h.

2. Calcular el área de un triángulo de Reuleaux de lado h.

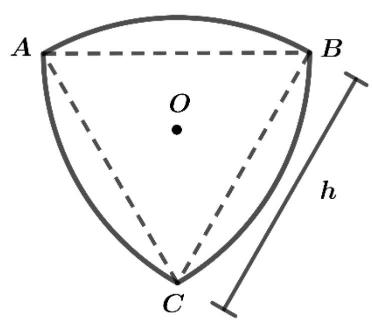
3. Sean A, B, C y D, los vértices de un paralelogramo. Si la distancia entre los segmentos AB y DC es igual a la distancia entre los segmentos AD y BC, entonces el paralelogramo es un rombo.

4. Supongamos que una figura Γ de bordes afilados rota alrededor de un punto arbitrario P, $P \in \Gamma$. ¿Cómo es el agujero que perfora? ¿Qué forma tiene?, ¿cuál es su área?



5. Sea AB una cuerda de un círculo Γ de centro O y sea OC el radio perpendicular a AB que corta a AB. Si D es un punto en el interior del segmento OC, entonces el círculo con centro en D y radio DB contiene al arco $\widehat{AB}$ de Γ (esto es, la longitud del segmento DB es mayor que la longitud del segmento DE, para todo punto E que se encuentre en el interior del arco $\widehat{AB}$).

6. Encuentre el área del agujero que perfora un triángulo de Reuleaux de bordes afilados y lado h al rotar alrededor del centro O del triángulo equilátero ΔABC. Indicación: ¿Qué punto (o puntos) del contorno del triángulo de Reuleaux está más alejado de O? Considere únicamente los puntos del arco $\widehat{AB}$.



Soluciones.

1. Para calcular el perímetro del triángulo de Reuleaux basta con sumar las longitudes de los tres arcos que lo conforman (Figura 4, izquierda), es decir

$$\textbf{Perímetro} = \text{Longitud de } \widehat{AB} + \text{Longitud de } \widehat{BC} + \text{Longitud de } \widehat{CA}.$$

Como ΔABC es un triángulo equilátero, entonces

$$\textbf{Perímetro} = 3\left(\text{Longitud de } \widehat{AB}\right),$$

puesto que a cuerdas iguales corresponden arcos iguales.

Por otro lado, si $\alpha = \sphericalangle ACB$ se tiene que

$$\text{Longitud de } \widehat{AB} = \frac{\alpha}{180°}(\pi \cdot AB) = \frac{60°}{180°}(\pi \cdot h) = \frac{1}{3}(\pi \cdot h).$$

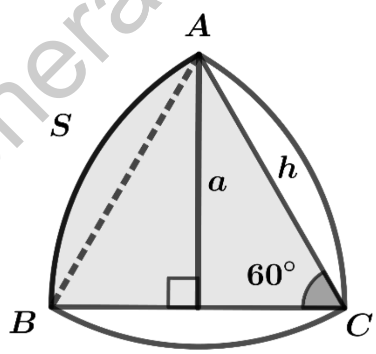
Por lo tanto,

$$\textbf{Perímetro} = 3\left(\text{Longitud de } \widehat{AB}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\pi h\right) = \pi h.$$

2. El área del triángulo de Reuleaux está dada por

$$\textbf{Área} = 3\left(\text{Área de } S\right) - 2\left(\text{Área de } \Delta ABC\right),$$

donde S es uno de los tres sectores circulares de radio h y ángulo central de 60°.



Tenemos que

$$\text{Área de } S = \frac{60°}{360°}\pi h^2 = \frac{1}{6}\pi h^2.$$

Sea a la altura del triángulo ΔABC. Por el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$a^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = h^2.$$

Despejando a, obtenemos que

$$a = \sqrt{h^2 - (h/2)^2} = \sqrt{(3/4) \cdot h^2} = \left(\sqrt{3}/2\right)h.$$

Luego,

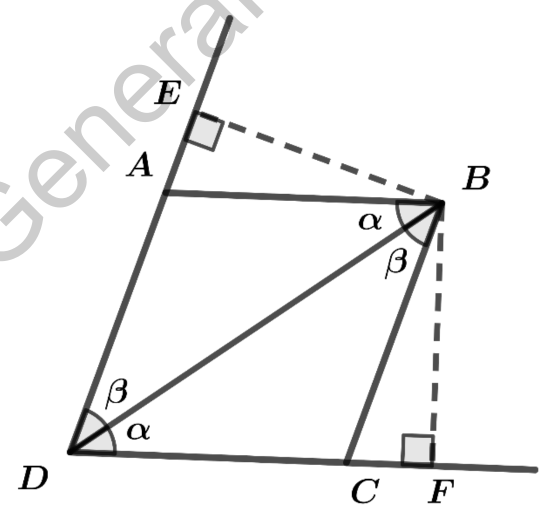
$$\text{Área de } \Delta ABC = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} h^2.$$

Por lo tanto,

$$\textbf{Área} = 3\left(\frac{1}{6}\pi h^2\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} h^2\right) = \frac{1}{2}\pi h^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} h^2 = \frac{1}{2} h^2\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

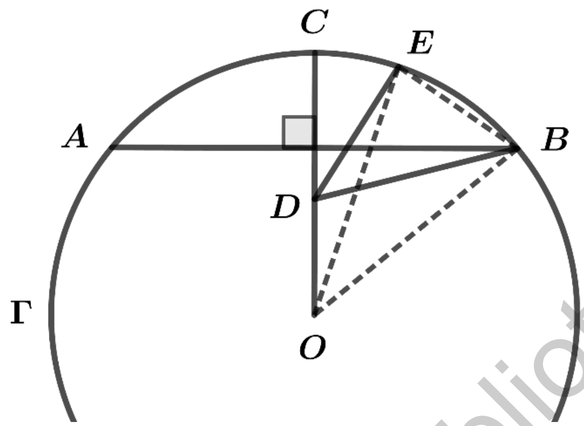
3. Sea h la distancia entre los segmentos AB y DC (igual a la distancia entre los segmentos AD y BC). Como $ABCD$ es paralelogramo, entonces $\alpha = \measuredangle ABD = \measuredangle BDC$, al ser ángulos alternos internos. De la misma forma se tiene que $\beta = \measuredangle ADB = \measuredangle DBC$. Si E es el pie de la perpendicular de B sobre la prolongación del segmento AD y F es el pie de la perpendicular de B sobre la prolongación del segmento DC, entonces $h = EB = BF$.

De los triángulos rectángulos $\triangle DBE$ y $\triangle DBF$ se tiene que $\measuredangle EBA = \measuredangle FBC$. Luego, por el criterio de congruencia ALA, se tiene que los triángulos $\triangle EBA$ y $\triangle FBC$ son congruentes. Por lo tanto, $AB = BC$. Y como los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, entonces se concluye que el paralelogramo $ABCD$ es un rombo.



4. El agujeró que perforará será un círculo cuyo radio será PQ, donde $Q \in \Gamma$ y Q es el punto más alejado de P.

5. Debido a la simetría de la figura, basta considerar a $E \in \widehat{CB}$. Tenemos que $\measuredangle DEB > \measuredangle OEB$ y $\measuredangle OBE > \measuredangle DBE$. Pero el triángulo ΔOEB es isósceles, pues OE y OB son radios de la circunferencia Γ, luego $\measuredangle OEB = \measuredangle OBE$. Entonces de las desigualdades anteriores obtenemos que $\measuredangle DEB > \measuredangle DBE$, y ya que en un triángulo, al ángulo mayor de cualesquiera dos ángulos se opone el lado mayor, se tiene entonces que la longitud del segmento DB es mayor que la longitud del segmento DE y, por lo tanto, el círculo con centro en D y radio DB contiene al arco $\widehat{AB}$ de Γ.



6. Según el ejercicio 4, la figura perfora un círculo. Para encontrar su radio hay que encontrar el punto (o puntos) del contorno del triángulo de Reuleaux que se encuentre más alejado de O. Debido a la simetría de la figura basta considerar los puntos que se encuentren en el arco $\widehat{AB}$. Por el ejercicio 5, tenemos que los vértices A, B y C son los puntos más alejados del centro O. Así, el área que perfora la figura es $\pi(AO)^2$.

8. Conclusiones.

El presente trabajo buscó presentar algunas aplicaciones genuinas y asequibles de conceptos geométricos, y mostrar una forma de incorporarlas a la enseñanza de Geometría Euclidiana a nivel bachillerato (y profesional).

Para este propósito, algunos mecanismos (como el pantógrafo y la broca de Watts) resultaron ser unas aplicaciones adecuadas, ya que involucraban varios conceptos básicos de geometría y muy pocos de otras disciplinas (lo que las volvía asequibles), sin que por ello dejaran de ser lo suficientemente complejos como para atraer la atención de los estudiantes. Encontrar mecanismos de este tipo no fue una tarea sencilla, pues incluso en el caso de la broca de Watts, varias cuestiones interesantes que pudieran haberse planteado en torno a su funcionamiento exigían tener conocimientos otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, Geometría Analítica, lo que hizo que no pudieran incluirse en la propuesta. A pesar de ello, consideramos que los mecanismos (sobre todo los articulados) son un buen lugar en el que se pueden hallar aplicaciones genuinas y asequibles de conceptos geométricos.

Varias investigaciones referentes a la enseñanza de las matemáticas mediante las aplicaciones y la modelación que exigían trabajo de modelación por parte de los estudiantes, mostraron que ello consumía mucho tiempo de clase. Para la gran mayoría de los profesores que deben seguir cierto programa, disponer de ese tiempo resulta complicado. Por esta razón, en el método de enseñanza por el que se optó (que está basado en el proceso de modelación matemática), el profesor es quien realiza la matematización del problema real. Podría pensarse que de esta manera a los alumnos se les quita la oportunidad de hacer y explorar conjeturas, de formular problemas, de justificar sus aseveraciones y de expresar en términos matemáticos sus razonamientos. Sin embargo, estas habilidades (tan solicitadas por los estándares del NCTM, como por los programas actuales de matemáticas a nivel medio superior, en especial en la asignatura de Geometría) se procuran desarrollar mediante los ejercicios que acompañan a cada modelo (mecanismo) presentado.

9. Bibliografía.

- Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 32, 13–25.
- Biembengut, M. y Hein, N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación matemática*, 11(1), 119–134.
- Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105–125.
- Biembengut, M. y Hein, N. (2007). Modelling in Engineering: Advantages and Difficulties. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.). *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 415-423). Chichester: Horwood Publishing.
- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research – Categorising the TSG21 papers. En *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education*, pp. 1-17.
- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – A review of arguments and instructional aspects. En M. Niss, W. Blum y I. D. Huntley (eds.). *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig e I. Huntley (eds.). *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester: Ellis Horwood.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1/2), 149–171.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H.-W. y Niss, M. (eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer-Verlag.
- Bolt, B. (1991). *Mathematics meets Technology*. Cambridge University Press.
- Dorier, J - L. (2006). An introduction to mathematical modelling: an experiment with students in economics. En Marianna Bosch et al. (eds.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1634-1644. (CERME Proceedings; 4).
- Galbraith, P. (2012). Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3−16.
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310.

- Montejano, L. (1998). *Cuerpos de ancho constante*. Primera edición. México: Fondo de Cultura Económica.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32.). New York: Springer-Verlag.
- Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), Proceedings of the Colloquium "How to Teach Mathematics so as to Be Useful", 24–30.
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2/3), Addresses of the First International Congress on Mathematical Education, 393–404.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. Combined edition. John Wiley & Sons, Inc.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.-G. y Lozano, M.-D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125–2140.
- Rademacher, H. y Toeplitz, O. (1957). *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton University Press, pp. 163−177.
- Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207–1240.
- Trigueros, M. (2008). Modeling in a dynamical systems course. *Proceedings of the 10th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75–87.
- Trigueros, M., Possani, E., Lozano, M.-D. y Sandoval, I. (2009). Learning systems of linear equations through modelling. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 225–232.
- Yaglom, I. M. (1968). *Geometric transformations II*. Random House, Inc.
- Yaglom, I. M. y Boltyanskii, V. G. (1961). *Convex Figures*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.