Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto abstracto de espacio vectorial

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de

Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta

Ana Victoria Vázquez Lozada

Dirigida por:

M. C. Luisa Ramírez Granados

M. C. Luisa Ramírez Granados
Presidente

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Secretaria

M.D.M. Cecilia Hernández Garciadiego
Vocal

M.D.M. Carmen Sosa Garza
Suplente

M.D.M. Ramón Torres-Alonso
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Octubre 2020
México

A Leonel.

Agradecimientos

Agradezco a la Maestra Luisa Ramírez Granados, mi directora de tesis, por inspirar este trabajo de investigación y por siempre estar dispuesta a asesorarme, apoyarme y orientarme pacientemente en el camino vivido durante este proyecto y maestría.

A la Doctora Lilia Patricia Aké Tec, por aceptar ser mi co-directora, compartiendo su conocimiento y experiencia conmigo y mi investigación, porque con su ayuda, el trabajo realizado fue un continuo aprendizaje de la Didáctica de las Matemáticas.

A la Maestra Carmen Sosa Garza por permitirme desarrollar la propuesta de actividades en una de sus asignaturas de Álgebra Lineal, y por siempre mostrarse entusiasta por mis objetivos profesionales.

A mis profesores, en especial a la Maestra Cecilia Hernández Garciadiego y al Maestro Ramón Torres-Alonso, que compartiendo su conocimiento, han enriquecido mi formación.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) del Gobierno de México y a la Universidad Autónoma de Querétaro por el apoyo brindado que me permitió completar este posgrado y cumplir así otra meta en mi carrera profesional.

A mi familia, Hugo, Graciela, Oscar y Leonel que contribuyeron a poder realizar este trabajo, impulsándome con su amor y apoyo, siendo siempre mi fuente de inspiración y motivación.

A mis compañeras, Sugey y Monsterrat, que me acompañaron durante todo este camino, llenando los días académicos con risas, apoyo y amistad.

A Dios, por ser mi eterno consuelo.

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

RESUMEN

Existen diversas investigaciones que estudian el álgebra lineal en la disciplina de la Didáctica de las Matemáticas, debido a la dificultad conceptual entre los estudiantes. Sin embargo, los trabajos desde la perspectiva de la enseñanza que se enfocan en el tema específico del concepto de espacio vectorial son muy pocos. A partir de la identificación de errores y dificultades de este tema entre los estudiantes, y considerando la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en esta tesis se presenta una propuesta de actividades que busca analizar las praxeologías de los axiomas de los espacios vectoriales, así como categorizar las respuestas de los estudiantes en los tipos de Abstracción Reflexiva. Para alcanzar dichos objetivos, en esta investigación de tipo cualitativo y descriptivo, se aplicó la propuesta a un grupo de álgebra lineal de primer semestre de licenciatura, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro. Este estudio, revela que los estudiantes no logran abstraer el concepto de un espacio vectorial como el conjunto de todos los axiomas que lo definen, mostrando así la débil presencia de los conocimientos previos en cuanto a las propiedades de las operaciones de suma y la multiplicación por un escalar. Por lo que se evidencia la importancia de generar escenarios para la comprensión de las propiedades así como la necesidad de beneficiar que emerjan las validaciones de los procedimientos, para romper con la mecanización y así favorecer la abstracción de los axiomas de un espacio vectorial.

Palabras clave: espacio vectorial, Teoría Antropológica de lo Didáctico, Abstracción Reflexiva, álgebra lineal, propiedades.

ABSTRACT

There are several studies in the academic literature within the mathematics education discipline investigating how linear algebra is conceptually difficult for students. However, from the teaching perspective, not many studies have focused on the specific vector space concept. A didactic activity proposal is presented in this thesis based on the identification of common errors and conceptual complexities with this subject while considering the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). This proposal allows the analysis of praxeologies of vector spaces axioms, and the possibility of categorizing students' responses in Reflective Abstraction. To achieve these objectives in this qualitative and descriptive investigation, the proposed didactic activities were implemented to a group of students in their first semester of university at the engineering department within the Autonomous University of Queretaro. The investigation found that students were not capable of the abstraction of the vector space concept as the set of all the axioms that define it. This demonstrates that students were deficient in prerequisite knowledge concerning the properties of addition and multiplication by a scalar. Therefore, the importance of creating scenarios for the deeper comprehension of this mathematical properties, as well as the practice of promoting the conditions that validate mathematical procedures observed would avoid superficial or robotic learning and would favor the abstraction of the space vector axioms.

Keywords: vector space, Anthropological Theory of the Didactic, Reflective Abstraction, Linear Algebra, properties.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza tradicional del Álgebra Lineal, para el concepto de espacios vectoriales, la metodología se basa en la mecanización y la memorización de los axiomas que definen este concepto. Es muy importante mencionar que esta estructura algebraica es de naturaleza abstracta, y es presentada a los estudiantes, de manera súbita en su primer curso de Álgebra Lineal, lo cual provoca que sea difícil para la mayoría de los estudiantes.

Existen diversas investigaciones que se han enfocado en los conceptos del Álgebra Lineal y pocas en el concepto específico de espacio vectorial, con el aporte de estos trabajos, se hace la identificación y el análisis de los principales errores y las dificultades que presentan los estudiantes al momento de estudiar los espacios vectoriales, lo cual, ha servido como base para el diseño, la aplicación y la búsqueda de propuestas didácticas que promuevan un aprendizaje significativo.

En este trabajo de investigación cualitativa se busca abordar dicha problemática, y proponer un recurso didáctico que permita estudiar cómo los estudiantes de licenciatura, de un grupo de Álgebra Lineal, abstraen el concepto de espacio vectorial a través de su definición, y que a su vez, este recurso les permita explorar sus propiedades de tal manera que la introducción a los conceptos abstractos del Álgebra Lineal no sea tan repentina como en la enseñanza tradicional. De esta manera, se propone una estrategia que con base en la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard y la definición de Abstracción Reflexiva de Dubinsky, refuerce la enseñanza de los espacios vectoriales.

El contenido de esta tesis queda organizado en los siguientes capítulos:

Capitulo I. Antecedentes. En este apartado se presenta la revisión de trabajos que han sido realizados sobre el concepto de espacio vectorial.

Capítulo II. Planteamiento del problema. Derivado de los antecedentes presentados, surge el problema de investigación para este trabajo, que se enfoca en el concepto de espacio vectorial y los axiomas que lo definen. Se plantean la hipótesis y los objetivos a cubrir, así como la importancia y la justificación de esta investigación que se desarrolla alrededor de la enseñanza y del aprendizaje del concepto abstracto de espacios vectoriales.

Capítulo III. Marco Teórico. El presente trabajo se realiza bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard, la cual dirige el análisis *a priori* y el diseño de las actividades con la guía de los elementos teóricos. De igual manera, esta teoría, junto con la Abstracción Reflexiva definida por Dubinsky en 1991, permiten el análisis de los resultados presentados por los estudiantes.

Capítulo IV. Metodología. Se presenta el tipo de investigación realizada y la muestra seleccionada con la que se hace el análisis para conseguir los objetivos del trabajo. Se desarrolla el diseño de las actividades fundamentadas por el análisis *a priori* y se define el método a utilizar en la aplicación del instrumento diseñado incluyendo la guía para el análisis de los resultados presentados por los estudiantes.

Capitulo V. Resultados sobre el proceso de abstracción en estudiantes universitarios. Este apartado de la tesis presenta los resultados obtenidos, a partir de la aplicación de las actividades a los estudiantes, categorizados conforme a los elementos teóricos que rigen esta investigación sobre la abstracción del concepto de espacio vectorial.

Capítulo VI. Conclusiones. Para finalizar, se presentan las reflexiones y los argumentos que ayudan a responder la pregunta de investigación, así como atender los objetivos planteados. De igual manera, se despliegan las acciones a tomar en cuanto a la abstracción del concepto espacio vectorial, uno de los conceptos esenciales del Álgebra Lineal. Por otro lado, se hacen sugerencias y se plantean preguntas que surgen de esta investigación, para plantear los caminos que quedan abiertos a que puedan ser estudiados por futuros trabajos de investigación.

Se espera, que la puesta en práctica de las actividades propuestas, desde la perspectiva de la TAD, permita que profesores e investigadores, detecten cómo se enfrentan los estudiantes a las propiedades que definen un espacio vectorial y como las abstraen, de manera que les permita implementar nuevas estrategias para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Álgebra Lineal relacionados con espacios vectoriales.

CAPÍTULO I. Antecedentes

Existen diversas investigaciones que han estudiado la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal, pero solo unas cuantas se han centrado en el concepto de espacio vectorial como parte esencial de dicha asignatura. En esta sección se presentarán, en orden cronológico, las investigaciones más relevantes que abordan el concepto de los espacios vectoriales y que sirvieron como base para la elaboración del presente trabajo.

Dorier (1994), analiza los resultados de pruebas sobre nociones básicas de lógica y álgebra, proporcionados por estudiantes de ciencias durante su primer año de universidad en Francia. Sugiere enseñar por periodos más largos las nociones básicas del Álgebra Lineal en diferentes estructuras de espacios vectoriales, para reducir las dificultades de lo abstracto, utilizando las herramientas de la lógica matemática.

Los orígenes del Álgebra Lineal se pueden encontrar en diferentes contextos, según Dorier (1995), la contribución de la geometría y de la teoría de los determinantes ayudó a formar la teoría de los espacios vectoriales. La primera definición axiomática de espacios vectoriales la dio Giuseppe Peano en 1888, en el contexto de la geometría, pero ésta aún era prematura y no fue completamente aceptada por los matemáticos de esa época (Peano citado en Dorier, 1995, y Moore, 1995). Es evidente la relación entre la teoría de los espacios vectoriales y la geometría debido al uso de representación geométrica para ilustrar los vectores. La teoría de la definición axiomática de los espacios vectoriales fue desarrollada hasta a partir de 1920. Esta teoría se utilizó como base para nuevos descubrimientos y para renovar métodos que incluso ya habían sido probados (Dorier, 1995). Para 1941, las investigaciones algebraicas y analíticas se centraron en los espacios vectoriales (Moore, 1995).

Otra de las aportaciones de Dorier para esta investigación fue su trabajo sobre el rol del formalismo de la teoría de los espacios vectoriales en su enseñanza (Dorier, 1998). El presentar este concepto en un entorno abstracto y formal es una de las razones que causa dificultades en muchos estudiantes. Para lograr que la enseñanza de los espacios vectoriales deje de ser inefectiva, Dorier sugiere construir secuencias para aplicarlas a los estudiantes y que logren hacer una reflexión personal sobre la comprensión de la unificación y generalización de la teoría de los espacios vectoriales. Sin olvidar que el formalismo es parte de la naturaleza del concepto, los estudiantes podrían aceptarlo y usarlo de forma correcta, ya que los problemas que deben resolver con esta teoría pueden ser resueltos con herramientas menos sofisticadas y que ya deben conocer.

El trabajo de Dubinsky (1997) en el que propone poner en práctica estrategias pedagógicas que inicien con el análisis de las construcciones mentales que pueden ser usadas para la comprensión de cierto concepto, considera un enfoque alternativo que ayude a los estudiantes a aprender Álgebra Lineal. La propuesta no es remplazar los enfoques actuales, sino acompañarlos. Involucra programar en un lenguaje matemático y hacer uso del aprendizaje cooperativo. Su estrategia busca abordar las causas de las dificultades de los estudiantes que para él se basan en que no comprenden los conceptos porque no se les da la oportunidad de construir sus propias ideas sobre ellos, la falta de conocimiento de conceptos que sirven de antecedente al Álgebra Lineal, lo que provoca que comprendan superficialmente algunas nociones.

De acuerdo con Dorier y Sierpinska (2001), el Álgebra Lineal es cognitiva y conceptualmente difícil para la mayoría de los estudiantes, pero a su vez, es de gran importancia para distintas áreas de las Matemáticas, de las Ciencias y de las Ingenierías. Esta asignatura está presente en al menos un curso para cualquier licenciatura de las escuelas de Ingeniería. Estos autores refieren las dificultades de los estudiantes a dos razones: la naturaleza misma del Álgebra Lineal y el tipo de pensamiento que se requiere para entender esta asignatura.

Por otro lado, Moreno (2001), realiza una analogía para ayudar a los estudiantes a comprender y memorizar los conceptos relacionados con los espacios vectoriales. Propone usar los colores primarios y la mezcla de éstos para presentar las combinaciones lineales, un sistema generador, una base y la dimensión de un espacio vectorial.

Tomando otra estrategia didáctica, en la investigación de Ortega (2002), se realizó la incorporación del uso de un programa de cálculo simbólico (DERIVE) en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal. Este programa se utilizó sin restricción para resolver actividades en cuestiones teóricas y cálculos sencillos. Se encontró que el uso de software puede incidir en la motivación y participación de los estudiantes, así como fomentar el aprendizaje por descubrimiento con el apoyo de conocimientos previos. A su vez, deja la sugerencia de realizar estudios restringiendo el uso de programas computacionales para observar la diferencia de resultados.

Sierpinska *et al.* (2002) propusieron un modelo de pensamiento teórico, que luego debía ponerse en práctica en términos de comportamientos matemáticos concretos. Definieron medidas para catalogar la disposición de los alumnos al pensamiento teórico para luego compararlo con sus calificaciones en el curso. Descubrieron que los estudiantes abordan el Álgebra Lineal con un pensamiento práctico más que teórico. Lo cual es preocupante, ya que el Álgebra Lineal, con su definición axiomática del espacio vectorial, no se puede comprender por completo sin un pensamiento teórico, y se pudo observar que el pensamiento teórico no fue necesario para tener calificaciones aprobatorias en un curso de Álgebra Lineal, lo que lleva a la conclusión de que los alumnos no están comprendiendo del todo los conceptos.

Maracci (2005) reportó en su investigación las dificultades y los errores de algunos estudiantes en Italia, al resolver problemas de Álgebra Lineal. Se enfocó en las nociones básicas de la teoría de los espacios vectoriales. Maracci concluyó que una noción matemática debe ser concebida tanto operacional como estructuralmente para que se pueda considerar como completamente desarrollada. Por lo que se hace mención de que una de las dificultades en la resolución de los problemas de Álgebra Lineal puede ser consecuencia de la percepción inadecuada de las nociones básicas simultáneamente como objetos y como procesos.

Por otro lado, Kú *et al.* (2008), presentan una descomposición genética (elemento de la teoría APOE) de la base de un espacio vectorial y una entrevista a los estudiantes del estudio, cuyas preguntas estaban enfocadas a indagar las posibles construcciones mentales realizadas por los estudiantes. Descubrieron que el rendimiento académico tiende a verse impactado dependiendo de si logran interiorizar los conceptos relacionados con espacios vectoriales. Concluyeron que conseguir que los estudiantes trabajen con espacios vectoriales de distintas estructuras puede ayudar a desarrollar su razonamiento abstracto.

Maracci (2008), observó que los estudiantes, generalmente suelen orientarse hacia los procesos, dando menor importancia a las estructuras de los espacios vectoriales. Esto representa una de las razones por las que son necesarias las estrategias y el diseño de actividades que apoyen para reducir las dificultades que tienen los estudiantes que están cursando esta asignatura.

En la investigación de Parraguez (2009), se menciona que “el concepto de espacio vectorial que es una abstracción de un dominio de objetos abstractos: vectores geométricos, n-uplas, polinomios, series o funciones”, y se estudia la evolución cognitiva del concepto de espacio vectorial y el papel que juegan otras nociones del Álgebra Lineal para la comprensión de este concepto.

Parraguez y Oktaç (2010) en Chile, entrevistaron a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y se enfocaron en la importancia de la coordinación que deben hacer entre los dos procesos que están definidos por las dos operaciones binarias que forman parte de la estructura del espacio vectorial. Su trabajo también profundizó en las nociones del Álgebra Lineal relacionadas con el concepto espacio vectorial, como son la independencia lineal y las operaciones binarias. Sugirieron que debe haber actividades que deje a los estudiantes experimentar estos dos procesos mencionados con diferentes conjuntos para desarrollar flexibilidad al trabajar con distintas estructuras.

Oktaç y Trigueros (2010), presentan un análisis teórico de las construcciones que desarrollan los estudiantes universitarios al aprender los conceptos del Álgebra Lineal, en particular los espacios vectoriales, transformaciones lineales, base y sistemas de ecuaciones lineales; así como la relación entre ellos. Se menciona la necesidad de ir más allá de la identificación de las dificultadas de los estudiantes y enfocarse en el diseño de actividades didácticas que permitan la construcción y correlación de los conceptos del Álgebra Lineal.

Con base en un cuestionario aplicado a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en Chile, Maturana y Parraguez (2011) analizan los distintos modos de pensamiento de los que hacen uso al responder las preguntas. Evidenciaron que solo se hace uso de un modo de pensamiento, el analítico-aritmético, así como la escasa relación con las estructuras matemáticas y el modo geométrico de los vectores que sustentan a los conceptos relacionados con los espacios vectoriales.

Rosso y Barros (2013) presentaron las dificultades y los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes al estudiar los espacios vectoriales, tomando en cuenta las diferentes representaciones semióticas, la interpretación de los resultados con expresiones formales y el desarrollo cognitivo necesario. Lo anterior, con la intención de proporcionar herramientas que apoyen en la elaboración de propuestas didácticas que influyan de manera positiva en el aprendizaje del concepto.

Bohórquez y Yepes (2014) presentan una estrategia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau para la enseñanza del concepto de espacio vectorial. Contaron con dos grupos de estudiantes en una universidad de Colombia, un grupo control con enseñanza tradicional y otro grupo experimental en el que aplicaron talleres diseñados para utilizar *software* especializado como Winplot y wx-Máxima. Concluyeron que al comparar ambos grupos, sí existe una relación cuando se aplica una estrategia didáctica (utilizando herramientas computacionales) con el aprendizaje del concepto de espacio vectorial.

Con el diseño e implementación de una unidad didáctica validada por Ramírez (2014) y otros profesores para ser aplicada a estudiantes de ingeniería en la Universidad de Costa Rica, se encontró que el utilizar actividades contextualizadas a las ingenierías, en las que los estudiantes puedan visualizar las aplicaciones de los conceptos relacionados con espacios vectoriales, favorece la motivación y el interés del proceso de la enseñanza y el aprendizaje, apoyado con el uso de *software* educativo que ejercita el conocimiento previo del estudiante.

Para estudiar el enfoque con que se enseñan los conceptos relativos al Álgebra Lineal, Costa y Rossignoli (2017) realizaron un cuestionario para estudiantes de una facultad de Ingeniería en la República Argentina. Aplicaron dicho cuestionario en dos ocasiones para observar cambios en las respuestas de los estudiantes. Las respuestas ayudaron a identificar las causas de los posibles obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de esta asignatura. Se evidenció que la mayor dificultad se presentó en los temas más abstractos, como es el de espacio vectorial, que necesitarían mayor tiempo para su estudio por contener muchos conceptos nuevos. Los estudiantes también demostraron dificultades en relacionar los conceptos con sus disciplinas tanto de la Ingeniería como de la Física. Los autores buscan que su investigación sirva de base para implementar estrategias didácticas o cambios metodológicos que reviertan estas dificultades.

Con el diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto espacio vectorial, Martín *et al.* (2017) buscaron conseguir en el razonamiento del estudiante la relación entre los registros de representación semiótica (analítico, geométrico y estructural) del concepto. Se implementó la propuesta en un grupo experimental y se comparó con un grupo control. En el primero se observaron mejores resultados en la preparación de los estudiantes, para caracterizar el concepto de espacio vectorial y la coherencia al argumentar las relaciones existentes entre los distintos registros de representación, lo cual evidencia la importancia de los axiomas relacionados con la estructura algebraica del objeto de estudio.

Mutambara y Bansilal (2019) presentan una investigación exploratoria sobre el entendimiento de los conceptos de los espacios vectoriales, realizada a diez estudiantes de Matemáticas en una universidad de Zimbabue. Identificaron las dificultades asociadas con el desarrollo de las construcciones mentales del concepto de subespacio vectorial, así como con el relacionar el mundo simbólico y el formal del pensamiento en el Álgebra Lineal. Las autoras recomiendan que los estudiantes deben trabajar con diferentes estructuras algebraicas y diferentes operaciones binarias antes de abordar casos más abstractos.

Gracias al aporte de estas investigaciones, se han identificado y analizado los principales errores y las dificultades de los estudiantes al momento de estudiar los espacios vectoriales, así como diversas sugerencias didácticas, las cuales, han favorecido el diseño de actividades que buscan evitar dichos errores y dificultades, mejorando el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de espacio vectorial.

CAPÍTULO II. Planteamiento del problema

A los estudiantes que están cursando la asignatura de Álgebra Lineal, generalmente se les complica el entendimiento de los conceptos abstractos y/o no les encuentran una aplicación inmediata, como es el caso de los espacios vectoriales. Esto causa que el proceso de enseñanza-aprendizaje se torne lento y confuso. Los estudiantes tienden a impactar su rendimiento académico, dependiendo de si logran o no interiorizar los conceptos relacionados con espacios vectoriales (Kú *et al.*, 2008).

Es importante dominar las definiciones, las propiedades y los teoremas de los espacios vectoriales (Parraguez, 2009) para que pueda llevarse a cabo la abstracción del concepto. En cambio, en la enseñanza tradicional, suele presentarse la estructura algebraica del espacio vectorial de manera mecanizada y descontextualizada.

Como se mencionó previamente en los antecedentes, se tomaron como apoyo otras investigaciones para partir de los errores y dificultades ya identificadas. Los estudiantes están muy acostumbrados a trabajar con conceptos que pueden imaginar o representar de alguna forma gráfica, por lo tanto es importante destacar que se les dificulta trabajar con espacios vectoriales cuyas estructuras algebraicas no les permitan concretar sus elementos, es por esta razón que se presenta la propuesta de diseñar actividades didácticas que permitan a los estudiantes trabajar con espacios vectoriales de distintas estructuras para desarrollar su razonamiento abstracto (Kú *et al.*, 2008) y así buscar la abstracción del sentido de este concepto.

II.1 Pregunta de investigación

La pregunta de investigación que rige este trabajo es: ¿Qué tipo de abstracción evidencian los estudiantes sobre el concepto de espacio vectorial a partir de actividades particulares?

II.2 Hipótesis

La hipótesis en una investigación de tipo cualitativa, difiere de la hipótesis en una investigación de tipo cuantitativa, por un lado, no se prueba estadísticamente y por otro, son supuestos que se pueden ir ajustando en razón a las circunstancias durante el proceso de investigación (Hernández, 2006).

Hipótesis: Los estudiantes son capaces de utilizar los axiomas que definen a los espacios vectoriales, cuando desarrollan las actividades planteadas con estructuras algebraicas sencillas.

II.3 Objetivos

La investigación en didáctica de las matemáticas, por su propia naturaleza, tiene como objetivo último contribuir a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

II.3.1 Objetivo General

Analizar los tipos de abstracción de los estudiantes sobre la definición del concepto espacio vectorial, mediante actividades particulares diseñadas para este fin.

II.3.2 Objetivos Particulares

1. Diseñar actividades que lleven al análisis de los axiomas que conforman la definición de un espacio vectorial.
2. Analizar y categorizar los resultados que presentan los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas.
3. Determinar las praxeologías y tipos de abstracción de los estudiantes a partir de sus resultados.

II.4 Justificación

El Álgebra Lineal es una asignatura común para las licenciaturas pertenecientes a las facultades de ingeniería, por lo que las investigaciones en este ámbito tienen un campo muy amplio y relevante en la Didáctica de la Matemática. Los estudios relacionados con el concepto de espacios vectoriales son caminos que aún se muestran insuficientes en el foco de las investigaciones (Parraguez, 2009). Se trata, sin duda, de un campo de investigación en el que existen debilidades y áreas por cubrir.

Es necesario darle la importancia necesaria al tipo de actividades que se utilizan para estudiar el concepto de espacio vectorial, principalmente porque es a partir de éstas, que los estudiantes exploran y construyen dicha noción. Y con base en los antecedentes (Maracci, 2008), se identifican ciertas dificultades que se les presentan a los estudiantes con respecto a los espacios vectoriales, por mencionar uno, la introducción repentina de los conceptos abstractos del Álgebra Lineal.

La importancia de concebir los procesos cognitivos del estudiante es conocer sus concepciones, sus dificultades en el aprendizaje y los errores que cometen al tratar de aprender, esto constituye un punto de apoyo esencial para la construcción de propuestas de enseñanza productoras de aprendizajes significativos. Estas razones nos llevan al propósito de este trabajo, conocer cómo los estudiantes de licenciatura abstraen el concepto inicial de espacio vectorial a través de su definición y propiedades, mediante la utilización de un recurso didáctico. Particularmente se pretende hacer uso de una serie de tareas diseñadas con la intención de propiciar la abstracción progresiva de la noción de los espacios vectoriales.

Para la aplicación de la propuesta de enseñanza que se desarrolla en este trabajo, es necesario considerar que se deben cubrir ciertas condiciones, como una cuidadosa planeación didáctica, el diseño y prueba de las tareas de instrucción. De esta manera puede ser utilizada como un instrumento para el análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje relacionado con la noción de espacios vectoriales.

CAPÍTULO III. Marco Teórico

III.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

Esta investigación, se realiza con elementos fundamentales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) de Yves Chevallard, tomándolos como herramientas para el análisis de los resultados de las actividades diseñadas para la abstracción del concepto de espacios vectoriales.

Desde la perspectiva de la TAD, se toma el objeto de estudio junto con el proceso completo de la enseñanza y el aprendizaje, en este caso, del saber matemático, esta teoría postula que toda actividad humana puede explicarse con praxeologías (Chevallard, 1999), es decir, saber-hacer (*praxis*) y el saber (*logos*). Se utiliza esta noción como herramienta para la organización de la enseñanza y el aprendizaje de la actividad matemática, en la cual es posible distinguir dos niveles (Bosch *et al.*, 2006):

- El "saber hacer" o nivel de la *praxis*, que incluye un tipo de problemas o tareas y las técnicas (procedimientos) para resolverlos.
- El "saber" o nivel del *logos*, que incluye la tecnología, es decir el discurso que describe y justifica las técnicas. Este nivel también incluye a la teoría, que se denomina como la tecnología de la tecnología, es decir, la teoría justifica la tecnología. En este trabajo, cada que se hace mención de "tecnologías", se hace referencia a las justificaciones de los estudiantes.

Por lo tanto este modelo praxeológico de Chevallard se representa de la siguiente manera:

$Praxeología = [T, \tau, \theta, \Theta]$		
Praxis - Saber hacer	T	Tipos de tareas
	τ	Técnica
Logos - Saber	θ	Tecnología
	Θ	Teoría

Tabla 1: Modelo Praxeológico.

La praxeología matemática es el resultado del proceso de construcción matemática. A este proceso de construcción matemática se le conoce como proceso de estudio (Bosch *et al.*, 2006), el cual está estructurado por seis momentos didácticos, los cuales no son lineales, incluso pueden repetirse o aparecer de manera simultánea:

1. Momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas.
2. Momento de la exploración del tipo de tareas y de la elaboración de una técnica relativa.
3. Momento de la constitución de un entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica y que permita la construcción de nuevas técnicas
4. Momento del trabajo de la técnica, que busca mejorar las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas.
5. Momento de la institucionalización, cuando se precisa la organización matemática construida con los elementos que la delimitan.
6. Momento de la evaluación junto con el momento de institucionalización reflexiona la praxeología construida.

Para la propuesta realizada, se abordan los tres primeros momentos, estos y su relación entre ellos, son importantes para realizar adecuadamente el proceso de estudio. De esta manera el modelo praxeológico nos ayuda a organizar el trabajo que se realiza en esta investigación.

III.2 Abstracción Reflexiva

Para este trabajo se realiza un análisis de cómo abstraen los estudiantes el concepto de espacios vectoriales, definiendo como abstracción, el proceso por el cual se construye el conocimiento matemático, por lo que se parte de la noción de abstracción que fue introducida por primera vez por Piaget. Para describir la estructura de las construcciones lógico-matemáticas en niños, determinó tres tipos de abstracción: empírica, pseudoempírica y reflexiva; donde la abstracción reflexiva se forma de la empírica y la pseudoempirica. Más adelante Dubinsky utilizó esta misma noción de abstracción reflexiva para explicar cualquier concepto junto con su construcción mental en matemáticas avanzadas (Dubinsky, 1991).

Dubinsky propuso cinco tipos de abstracción reflexiva:

- Interiorización: cuando se logra traducir una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas.
- Coordinación: cuando con dos o más procesos se puede construir uno nuevo.
- Encapsulación: refiere a la conversión de un proceso dinámico a un objeto estático.
- Generalización: cuando un sujeto aprende a aplicar un proceso existente a una colección más amplia de opciones.
- Reversión: cuando el sujeto analiza a la inversa un proceso que ya interiorizó, como un medio para construir un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original.

Utilizando estos tipos de abstracción reflexiva, se realiza el análisis de las respuestas presentadas por los estudiantes ante las actividades aplicadas sobre el concepto de espacios vectoriales.

CAPÍTULO IV. Metodología

En esta investigación, se hizo un estudio con referente empírico de tipo cualitativo y descriptivo, utilizando el estudio de casos como modelo de investigación pertinente para el análisis a profundidad de las particularidades del fenómeno de estudio (León y Montero, 2003). Se trabajó con una muestra seleccionada intencionalmente e integrada por estudiantes que cursan la asignatura de Álgebra Lineal. Se aplicó un instrumento de recolección de datos, articulado a través de hojas de trabajo, y que ha sido diseñado bajo la perspectiva de la TAD. El contexto en el que se desarrolló este trabajo es en el marco de la facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.

Para esta investigación se siguieron las siguientes acciones:

1. Diseño y selección de actividades didácticas.
2. Aplicación de las actividades.
3. Diseño de guía para el análisis de los resultados utilizando la TAD y la abstracción reflexiva.
4. Análisis de los resultados.
5. Presentación de las conclusiones.

IV.1 Tipo de investigación

En esta tesis, para responder a nuestra pregunta de investigación, se hizo un diseño del instrumento, una recogida de datos y un análisis con referente empírico de tipo cualitativo y descriptivo. Se inició con un análisis de la enseñanza tradicional, considerando los ejercicios y actividades propuestas por algunos libros de texto de Álgebra Lineal. Posteriormente, se realizó el análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de las técnicas y tecnologías que se utilizan para resolver las actividades tradicionales. Finalmente, se realizó el diseño y adecuación de las actividades, que desde la perspectiva de la TAD, permiten estudiar el desarrollo de los estudiantes acerca de las propiedades de los espacios vectoriales.

IV.2 Muestra y Contexto

Este trabajo se desarrolló con una muestra “por conveniencia” que consistió en un grupo de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, nivel en el que los estudiantes tienen el primer acercamiento al tema de espacios vectoriales.

El grupo estaba integrado por treinta estudiantes que cursaban la asignatura de Álgebra Lineal, que es parte del plan de estudios del tronco común de las carreras de Ingeniería. En este grupo los estudiantes que participaron en la investigación eran pertenecientes a las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería en Automatización e Ingeniería Industrial y de Manufactura; sin que esto significara una diferencia en el desempeño de las actividades propuestas.

El instrumento de recogida de datos fue aplicado en el aula y en el horario habitual de clases, una vez que se les había presentado la definición de espacios vectoriales.

IV.3 Diseño de actividades

Al ser esta investigación de tipo descriptivo, son de suma importancia los razonamientos y las interpretaciones de los estudiantes, por lo que se decidió por utilizar hojas de trabajo en las que se propuso una serie de actividades (ver anexo 1) acompañadas de preguntas de reflexión para obtener datos que pudieran ser analizados para el fin de este trabajo.

Para el diseño de las actividades, se inició con un análisis de la enseñanza tradicional, considerando las definiciones, los ejercicios y actividades propuestas por los libros de texto de Álgebra Lineal. Posteriormente, se realizó el análisis desde la TAD de las técnicas y tecnologías que se utilizan para resolver las actividades tradicionales. Los ejercicios y actividades identificadas en los libros de texto se vincularon con los errores y dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para dar paso al diseño de la propuesta didáctica, objeto de este estudio. Finalmente, se realizó el diseño y adecuación de las actividades, que desde la perspectiva de la TAD, permiten estudiar cómo abstraen los estudiantes las propiedades de los espacios vectoriales.

IV.3.1 Definición de Espacios Vectoriales en libros de texto

Con fines de referencia para esta investigación y para el diseño de las actividades propuestas, no se profundizó en el estudio de libros de texto, sino que se hizo un análisis sencillo de los libros más utilizados como apoyo en la asignatura de Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro. Se tomaron como referencia las definiciones, ejercicios y actividades relacionadas con el tema de espacios vectoriales en los siguientes libros de Álgebra Lineal:

- Anton, H. (2012), Introducción al álgebra lineal (3ª edición). Editorial: Limusa.
- Grossman, S. & Flores, J. (2012), Álgebra lineal (7a edición). Editorial: Mc Graw-Hill.
- Larson, R. & Edwards B. (2004), Introducción al Álgebra Lineal. Editorial: Limusa.
- Lay, D. (2007), Álgebra lineal y sus aplicaciones (3ª edición). Editorial: Pearson Educación.

La definición de espacio vectorial que aparece en dichos libros es la siguiente:

Definición

Un espacio vectorial V es un conjunto no vacío de objetos, denominados vectores, sobre el que están definidas dos operaciones binarias llamadas suma y multiplicación por un escalar y que satisfacen los diez axiomas enumerados en el siguiente recuadro. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores u, v y w en V y todos los escalares c y d

Suma:

1. $u + v$ está en V. Cerradura bajo la suma
2. $u + v = v + u$ Propiedad conmutativa de la suma de vectores
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ Propiedad asociativa de la suma de vectores
4. V contiene un vector 0 tal que para todo u en V, $u + 0 = u$. Neutro aditivo
5. Para todo u en V, hay un vector en V denotado por $-u$ tal que $u + (-u) = 0$. Inverso aditivo

Multiplicación Escalar:

6. cu está en V. Cerradura bajo la multiplicación por un escalar
7. $c(u + v) = cu + cv$. Primera ley distributiva (respecto de los vectores)
8. $(c + d)u = cu + du$. Segunda ley distributiva (respecto de los escalares)
9. $c(du) = (cd)u$. Propiedad asociativa de la multiplicación por escalares
10. $1(u) = u$. Identidad escalar

La definición aquí presentada es una abstracción de una recopilación de propiedades de un espacio n-dimensional, $\mathbb{R}^n$ específico para formar los axiomas necesarios de un espacio vectorial más general. El concepto de espacio vectorial se considera un elemento básico para la construcción de otros conceptos del Álgebra Lineal (Oktaç y Trigueros, 2010).

Los espacios vectoriales siempre deben ser expresados como un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y las dos operaciones necesarias. Cuando no se detallan estos cuatro elementos, se conjetura que el conjunto de escalares es el conjunto de los números reales y las operaciones serán las normales.

Los ejercicios que presentan estos libros de textos promueven la mecanización, ya que son de naturaleza rutinaria, la cual ayuda para la memorización de los conceptos y de los axiomas, más no logra el cometido de que los estudiantes abstraigan el contenido matemático estudiado.

La enseñanza tradicional no fomenta el desarrollo de estrategias del pensamiento formal, lo que ha sido motivo de fracaso al no lograr que los estudiantes comprendan las matemáticas por la concepción estática del conocimiento presentado en los libros de texto (Ortega, 2002).

Los ejercicios y actividades identificadas en los libros de texto se vincularon con los errores y dificultades que presentan los estudiantes, por lo que el análisis realizado permite buscar un método alternativo que dé paso al diseño de la propuesta didáctica, objeto de este estudio.

IV.3.2 Análisis previo desde la TAD

Las praxeologías de los espacios vectoriales que permiten el desarrollo de la propuesta didáctica sugerida son las mostradas en la tabla 2.

En los tipos de tareas podemos encontrar:
T_1: Realizar y comprobar, solicita al estudiante llevar a cabo alguna operación indicada y comprobar su resultado a través de una pregunta guiada.
T_2: Comprobar que se cumpla, en este tipo de tarea se solicita al estudiante realizar las igualdades indicadas y verificarlas.
T_3: Construir vector y analizarlo, se solicita al estudiante construir un vector que cumpla cierta propiedad o propiedades y analizarlo con una pregunta guiada.

Tipo de tarea	Técnica	Tecnología (propiedades)
T_1: Realizar y comprobar	τ_1: Sumar dos vectores y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	θ_1: Cerradura bajo la suma: Si $u \in V$ y $v \in V$, entonces $u + v \in V$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_2: Sumar los vectores de ambos lados de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	θ_2: Ley asociativa de la suma de vectores: Para todo u, v, w en V, $(u + v) + w = u + (v + w)$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_3: Sumar dos vectores y verificar que no importa el orden de suma, el resultado será el mismo	θ_3: Ley conmutativa de la suma de vectores: Si u y v están en V, entonces $u + v = v + u$
T_3: Construir vector y analizarlo	τ_4: Sumar un vector dado u con un vector desconocido e igualarlo al vector u, igualar y despejar los elementos correspondientes para obtener los elementos del vector desconocido	θ_4: Vector cero o neutro aditivo: Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $u \in V, u + 0 = 0 + u = u$
T_3: Construir vector y analizarlo	τ_5: Sumar un vector dado u con un vector desconocido e igualarlo al vector resultante del ejercicio anterior, igualar y despejar los elementos correspondientes, comparar el vector dado con el vector resultante	θ_5: Inverso aditivo: Si $u \in V$, existe un vector $-u$ en V tal que $u + (-u) = 0$
T_1: Realizar y comprobar	τ_6: Multiplicar un escalar por un vector y comprobar que el resultado pertenezca al conjunto indicado	θ_6: Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Si $u \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha u \in V$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_7: Realizar las multiplicaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que el resultado sea el mismo	θ_7: Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Si $u \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_8: Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	θ_8: Primera ley distributiva (respecto de los vectores): Si u y v están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
T_2: Comprobar que se cumpla	τ_9: Realizar las operaciones indicadas de cada lado de la igualdad y verificar que se cumpla la igualdad	θ_9: Segunda ley distributiva (respecto de los escalares): Si $u \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
T_1: Realizar y comprobar	τ_{10}: Responder si es o no un espacio vectorial y justificarlo con los axiomas comprobados en los incisos anteriores	θ_{10}: Cumplir con todas las propiedades de un espacio vectorial

Tabla 2: Praxeologías de los espacios vectoriales.

En cuanto a las tecnologías, de acuerdo con la actividad propuesta, se irán presentando o construyendo sobre las tareas. A pesar de que algunos de los axiomas son intuitivos, otros pueden generar conflictos en las estructuras algebraicas más complejas, es por esto que la propuesta es reforzar las propiedades de un espacio vectorial, poniéndolas en práctica con las estructuras más familiares para los estudiantes e incluso en las que se puede ver una representación gráfica. De tal manera que con la práctica se pueda extender este conocimiento a cualquier estructura abstracta más compleja de espacio vectorial.

En cada actividad hay un apartado que corresponde a cada una de las tecnologías mencionadas, es decir a cada una de las propiedades que definen a un espacio vectorial. Además de que las actividades se resuelven bajo ciertas técnicas, también se solicita dar una justificación sobre la lógica bajo la que se determinó la solución dada. Del mismo modo, se hace uso de la repetición para diferentes estructuras algebraicas, lo que pretende conseguir la construcción y comprensión de las propiedades de forma general utilizando ciertos casos particulares. Otro aspecto importante que no podemos olvidar son los errores esperados de acuerdo con los identificados por otras investigaciones.

En el diseño de esta propuesta también se busca motivar a los estudiantes a quienes se les está presentando por primera vez la definición de espacios vectoriales. Debido a esto, la importancia de la selección de las estructuras algebraicas, en las que según un análisis a priori, se demuestre que para su realización, se requiere el uso de estrategias conocidas por los estudiantes de licenciatura que están en un curso de Álgebra Lineal.

En el análisis *a priori*, se pudo observar lo siguiente para cada una de las cuatro actividades:

Inciso	Acción esperada del estudiante	Acción deseada del estudiante
a	Identificar cuando un vector pertenece a un conjunto y por qué	Ser capaz de identificar la cerradura bajo la suma.
b	Llegar a la igualdad	Ser capaz de identificar la propiedad asociativa de la suma del conjunto indicado.
c	Llegar a la igualdad	Ser capaz de identificar la propiedad conmutativa de la suma del conjunto indicado.
d	Hacer operaciones para encontrar el vector solicitado	Ser capaz de identificar el vector nulo del conjunto indicado y generalizarlo.
e	Hacer operaciones para encontrar el vector solicitado	Ser capaz de identificar el inverso aditivo del conjunto indicado.
f	Identificar cuando un vector pertenece a un conjunto y por qué	Ser capaz de identificar la cerradura bajo la multiplicación por un escalar.
g	Llegar a la igualdad	Ser capaz de identificar la propiedad asociativa de la multiplicación por escalar del conjunto indicado.
h	Llegar a la igualdad	Ser capaz de identificar la propiedad distributiva respecto a los vectores de la multiplicación por escalar del conjunto indicado.
i	Llegar a la igualdad	Ser capaz de identificar la propiedad distributiva respecto a los escalares de la multiplicación por escalar del conjunto indicado.
j	Responder si es o no un espacio vectorial	Justificar su respuesta con los axiomas recién comprobados

Tabla 3: Análisis de las actividades.

IV.4 Procedimiento

Como se mencionó anteriormente, se hizo uso de la TAD para el diseño de las actividades, realizando un análisis *a priori* en el que se evidenciaron las estrategias que se necesitan para resolver el instrumento, así como las respuestas esperadas de los estudiantes.

La propuesta didáctica, como se señaló anteriormente, se aplicó a un grupo que cursaba la asignatura de Álgebra Lineal en primer semestre de nivel licenciatura. Participaron treinta estudiantes de forma voluntaria. El docente y la investigadora tuvieron el papel de observadores, sin intervención en la sesión.

Para la aplicación de las actividades, se requirió esperar que en el grupo muestra, se presentara la definición de espacios vectoriales de acuerdo con los libros de texto, siguiendo el curso normal del programa escolar y en otra sesión ordinaria se hizo la aplicación del instrumento.

Antes de la aplicación de la propuesta, se comunicó a los estudiantes y profesores participantes sobre la investigación, se les entregó una carta de consentimiento informado y otra de confidencialidad sobre el buen uso de la información (ver anexos 2 y 3 respectivamente). Se procedió a entregar de manera individual, las hojas de trabajo con las indicaciones de lo que se debía realizar y las preguntas de reflexión que se debían contestar. La aplicación se realizó en una sesión de una hora y media en el aula y en el horario habitual de clases.

Se presentaron cuatro ejercicios con diez incisos cada uno, de tal manera que cada ejercicio utiliza una estructura algebraica distinta, y a la vez los incisos corresponden a los axiomas de la definición de los espacios vectoriales.

Una vez recopiladas las producciones de los estudiantes, se realizó una primera organización de las hojas de trabajo según las respuestas correctas de las actividades. Posteriormente se hizo un análisis utilizando las técnicas y tecnologías según la TAD y fue complementado con otro análisis de los datos obtenidos en el que se utilizaron los tipos de abstracción reflexiva de Dubinsky (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión). Lo que llevó a categorizar las construcciones mentales de los estudiantes en las diferentes posibilidades del cómo han abstraído la definición de espacio vectorial.

CAPÍTULO V. Resultados sobre el proceso de abstracción en estudiantes universitarios

El proceso para organizar los resultados se enfocó en categorizar las técnicas (τ), las tecnologías (θ) y los tipos de abstracción, para posteriormente relacionar estos tres elementos entre sí y de acuerdo al tipo de tarea (T).

Para el caso de las técnicas, tal y como en el análisis a priori, se identifican diez técnicas, una por cada propiedad incluida en las actividades. Las respuestas de los estudiantes se categorizaron de la siguiente manera: (a) la primera es que el estudiante haya realizado la técnica esperada de manera correcta, (b) la segunda es que el estudiante realizara alguna otra técnica incorrecta o que no respondiera la pregunta y, (c) la tercera que es que el estudiante identificara directamente la propiedad a la que alude la sección de la actividad, sin realizar ninguna técnica.

Para el caso de las tecnologías, tenemos la descripción de las propiedades de los espacios vectoriales, con lo que tenemos diez tecnologías. Observando las respuestas de los estudiantes, se clasificaron en cuatro categorías: (a) que se respondiera superficialmente sin explicar, (b) que el estudiante respondiera identificando la propiedad a la que se hace referencia, (c) que justificara la propiedad identificada y, (d) que no respondiera nada o respondiera de forma errónea.

Por otro lado, para el caso de los tipos de abstracción, se relacionaron éstos con las categorías de las tecnologías. Es decir, existe una correspondencia entre la forma en el que es estudiante justifica la técnica (esto es externar la tecnología) y los tipos de abstracción. Por lo que según las respuestas de los estudiantes se ubicarían en los siguientes tipos de abstracción: interiorización, encapsulación, generalización o ningún tipo de abstracción.

En la tabla 4 se puede observar cómo se vinculan los elementos teóricos según las respuestas de los estudiantes a cada actividad. Lo previo ha permitido el análisis de los resultados obtenidos de los estudiantes, desde cada elemento teórico. Se analizaron las producciones de treinta estudiantes, para cuatro actividades que contaron con diez incisos cada una, dando un total de 1200 respuestas analizadas.

Elemento teórico	**Categorías**				
t: Técnica	Realiza la técnica esperada correctamente			No realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad	Realiza otra técnica incorrecta o no responde
θ: Tecnología	Responde sin justificar	Identifica la propiedad	Justifica la propiedad	Identifica y/o justifica la propiedad	Responde incorrectamente o no responde
Tipo de Abstracción	Interiorización	Encapsulación	Generalización	Encapsulación o Generalización	Ningún tipo de abstracción

Tabla 4: Relación de los elementos teóricos.

V.1 Resultados globales

Del total de respuestas analizadas en cuanto a la realización de las técnicas se puede apreciar en la figura 1 que de manera general, la mayoría de las respuestas de los estudiantes las realizaron correctamente con la técnica esperada.

En cuanto a las tecnologías, se identificaron distintos comportamientos de las respuestas dependiendo la propiedad a la que referían. Para la mayoría de las tecnologías, los estudiantes respondieron correctamente sin justificar, pero según se distingue en la figura 2, en un par de tecnologías en particular, se observó que en una gran cantidad de respuestas, los estudiantes lograron identificar la propiedad a la que se hacía referencia, aunque no lograron expresar una justificación.

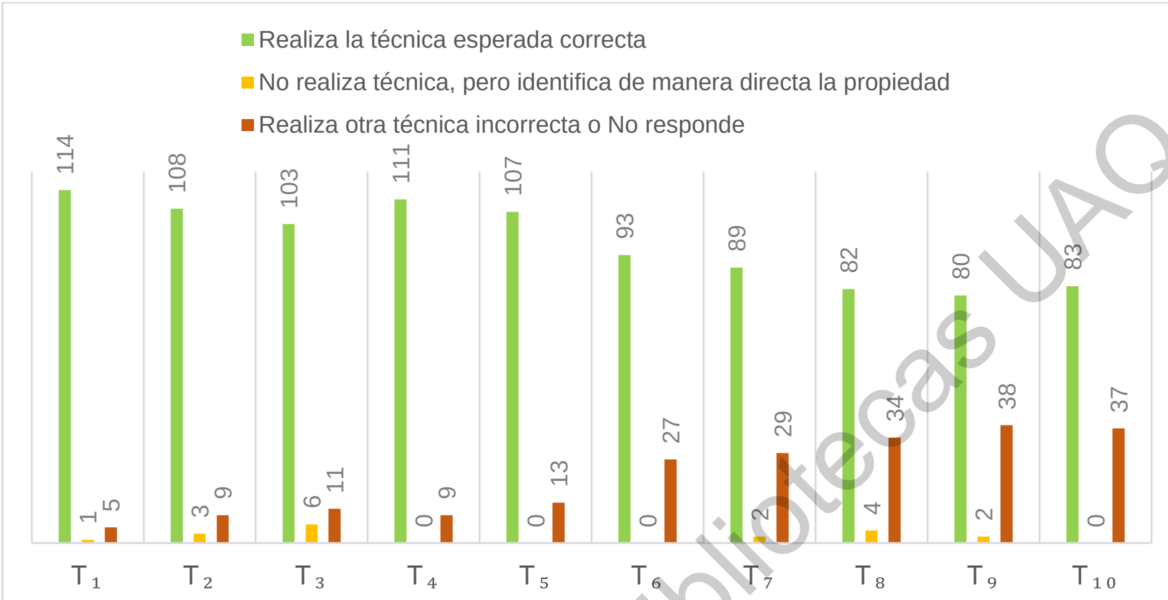


Figura 1: Gráfica de frecuencias para las categorías de las técnicas.

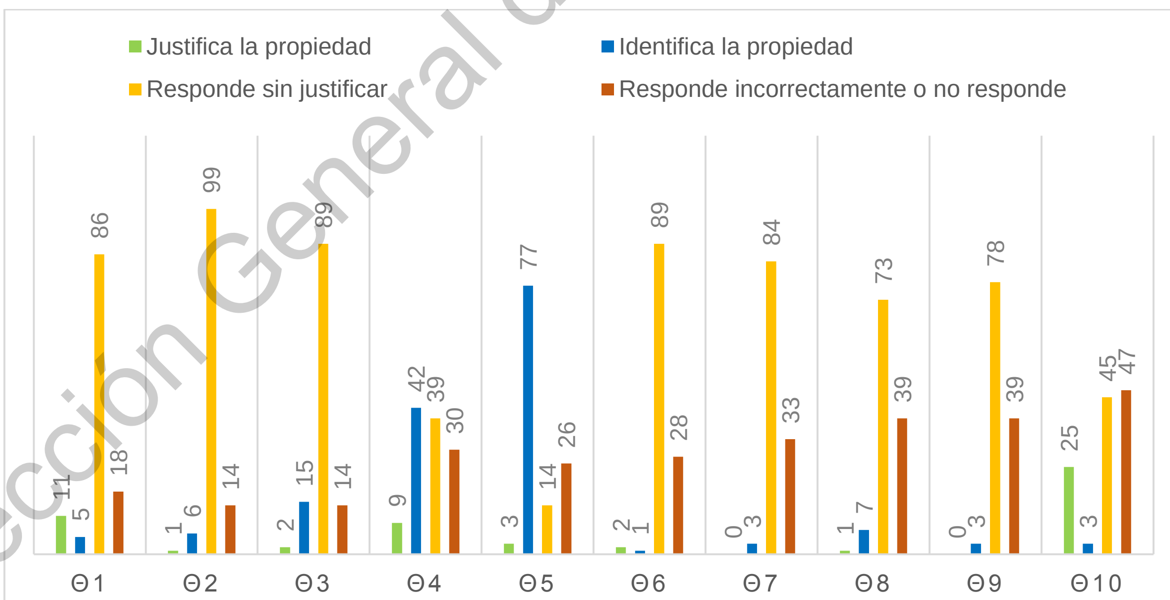


Figura 2: Gráfica de frecuencias para las categorías de las tecnologías.

En el caso de los tipos de abstracción, los resultados van ligados al análisis de las respuestas por tecnología (justificación de la técnica), por lo que se puede observar en la tabla 5, que la mayoría de los estudiantes se encuentran en la categoría de interiorización, ya que hay una mayor cantidad de estudiantes que responden sin justificar. De igual manera se aprecia que muy pocos lograron la encapsulación y la generalización, según se observa en los estudiantes que lograron identificar y justificar la propiedad a la que se hacía alusión.

	Tipo de abstracción			
	Interiorización	Encapsulación	Generalización	Ningún tipo
Número de estudiantes	21	3	3	3

Tabla 5: Tipo de abstracción por estudiante.

Por otro lado, las técnicas y las tecnologías se encontraban asociadas al tipo de tarea: realizar, comprobar y construir (tabla 6). De esta manera, dependiendo de cómo el estudiante explique su procedimiento en cada tipo de tarea implica un tipo de abstracción diferente.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Técnica	τ_1	τ_6	τ_{10}	τ_2	τ_3	τ_7	τ_8	τ_9	τ_4	τ_5
Tecnología	θ_1	θ_6	θ_{10}	θ_2	θ_3	θ_7	θ_8	θ_9	θ_4	θ_5

Tabla 6: Respuestas por actividad para Técnicas y Tecnologías.

Del total de respuestas analizadas, las técnicas y las tecnologías se encuentran distribuidas como se puede observar en la tabla 7.

	Categoría	Tipo de Tarea T_1: Realizar y comprobar	 T_2: Comprobar que se cumpla	 T_3: Construir vector y analizarlo
Técnicas	Realiza la técnica esperada correcta	290	462	218
	Realiza otra técnica incorrecta o No responde	69	121	22
	No realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad	1	17	0
Tecnologías	Responde sin justificar	220	423	53
	Identifica la propiedad	9	34	119
	Justifica la propiedad	38	4	12
	Responde incorrectamente o no responde	93	139	56

Tabla 7: Respuestas por tipo de tarea para Técnicas y Tecnologías.

La tabla previa indica que, en relación al tipo de tarea T_1, los estudiantes realizaron la indicación y comprobaron correctamente lo solicitado, lo que resultó en que lograron justificar la propiedad en cuestión.

Para el tipo de tarea T_2, que es comprobar que se cumpla una situación, se observó que no en todos los casos fue necesario que se realizara la técnica para poder responder lo solicitado, aun así se mostró que a los estudiantes se les complicó justificar la propiedad identificada.

Construir un tipo de vector fue el tipo de tarea T_3, que resultó complicada para los estudiantes y que, aunque lograron identificar la propiedad, también les resultó difícil de justificar.

A continuación, se detalla las técnicas y tecnologías por cada tipo de tarea presente en cada una de las cuatro actividades propuestas a los estudiantes. El enlace técnica-tecnología conllevó a caracterizar los tipo de abstracción manifestada en las respuestas de los estudiantes.

V.2 Resultados por actividad

Para reportar los resultados de los estudiantes, se puede observar en la tabla 8 cómo se organizaron por actividad, recordando que se aplicaron cuatro actividades que se diferenciaban por la estructura algebraica utilizada para identificar un espacio vectorial; además cada actividad contaba con diez incisos. En cada actividad se presenta un ejemplo de cada elemento teórico, representando las diferentes categorías de análisis para poder observarlas todas distribuidas entre las cuatro actividades.

	Categoría	**Actividad**			
		1	**2**	**3**	**4**
Técnicas	Realiza la técnica esperada correcta	243	228	225	198
	Realiza otra técnica incorrecta o No responde	57	70	65	96
	No realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad	0	2	10	6
	Total de respuestas	**300**	**300**	**300**	**300**
Tecnologías	Responde sin justificar	195	197	146	158
	Identifica la propiedad	35	24	76	27
	Justifica la propiedad	13	9	13	19
	Responde incorrectamente o no responde	57	70	65	96
	Total de respuestas	**300**	**300**	**300**	**300**

Tabla 8: Respuestas por actividad para Técnicas y Tecnologías.

V.2.1 Actividad 1: Espacio en $\mathbb{R}^2$

Para esta estructura algebraica se pudo observar que 243 (81 %) de las respuestas de los estudiantes fueron realizadas con las técnicas esperadas correctamente y 57

(19 %) cometieron algún error o no contestaron, del mismo modo, para esta actividad no se presentaron respuestas en las que el estudiante identificara de manera directa la propiedad sin realizar técnica (Tabla 8).

En cuanto a las tecnologías y a la abstracción, hubo 195 (65 %) respuestas correctas pero sin justificar, que corresponden a la interiorización; así como 35 (12 %) respuestas en las que lograron identificar las propiedades, representando a la encapsulación; 13 (4 %) respuestas en las que se identificó la propiedad y se justificó con la tecnología, siendo las que alcanzaron la generalización; y dejando 57 (19 %) respuestas en las que se cometieron errores o no se respondió, por lo que no se presentó ningún tipo de abstracción (Tabla 8).

De estos datos se infiere que, aunque los estudiantes realizan los procedimientos (técnicas) de modo adecuado, presentan dificultades para respaldarlos (tecnología) por lo que apenas alcanzan el proceso de interiorización.

V.2.1.1 Técnica

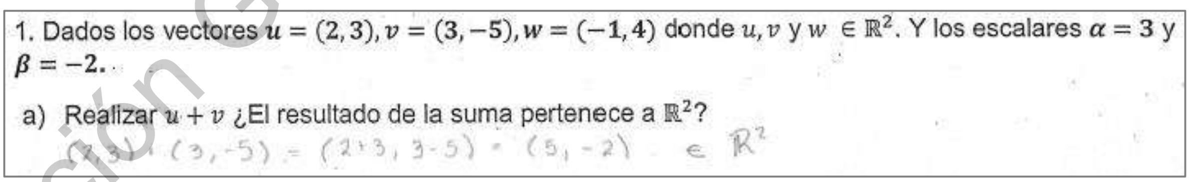
En la tabla 9 se analiza el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las técnicas por inciso para esta primera actividad. Se cuenta con las técnicas esperadas que se definieron en el capítulo IV, en la tabla 2: Praxeologías de los Espacios Vectoriales, así como una nueva técnica que se obtuvo a partir de las respuestas de los estudiantes, que para esta actividad fue (τ_a) error de procedimiento.

De la tabla 9 se desprende que esta actividad resultó sencilla de abordar para la mayoría de los estudiantes en todos sus incisos. Para la categoría *realiza la técnica esperada correcta*, se consideró cuando el estudiante respondiera de acuerdo con lo esperado según la tabla 2: Praxeologías de los Espacios Vectoriales, sin cometer errores de procedimiento. En la figura 3 se puede observar la respuesta de un

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Técnicas asociadas	τ_1 τ_a	τ_6 τ_a	τ_{10} τ_a	τ_2 τ_a	τ_3 τ_a	τ_7 τ_a	τ_8 τ_a	τ_9 τ_a	τ_4	τ_5 τ_a
Técnica correcta	29	23	23	29	28	23	23	23	30	28
Técnica incorrecta	1	7	7	1	2	7	7	7	0	2
Identifica la propiedad sin realizar técnica	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 9: Técnicas manifestadas por estudiante en la actividad 1.

estudiante que realiza la técnica esperada τ_1 correctamente al sumar dos vectores y comprobar que el resultado pertenece al conjunto indicado. De esta manera identifica la cerradura de la suma en la actividad sobre el espacio en $\mathbb{R}^2$, un total de veintinueve estudiantes realizaron el inciso a) de manera correcta.


1. Dados los vectores $u = (2,3), v = (3,-5), w = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

a) Realizar $u + v$ ¿El resultado de la suma pertenece a $\mathbb{R}^2$?

$(2,3) + (3,-5) = (2+3, 3-5) = (5,-2) \in \mathbb{R}^2$

Figura 3: E01 realiza la técnica esperada.

Por otro lado, en la categoría de *realiza técnica incorrecta o no responde* se observa como ejemplo la respuesta del estudiante E30, en la figura 4, en la que se puede apreciar que el estudiante no realizó ninguna técnica, ni identificó la propiedad buscada. Para esta condición, un total de siete estudiantes realizaron el mismo desempeño en el inciso i).

1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$? Sí

Figura 4: E30 no realiza la técnica esperada.

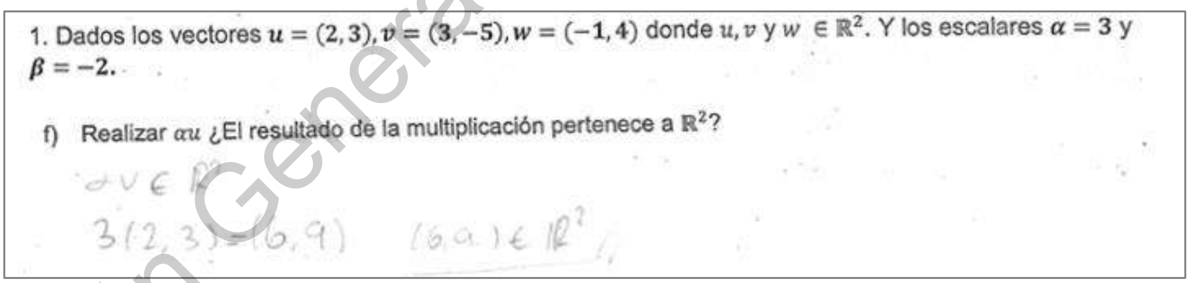
V.2.1.2 Tecnología

Con la tabla 10 podemos observar el desempeño de los estudiantes respecto a las tecnologías por inciso para esta actividad. Se asociaron también las tecnologías esperadas que fueron presentadas en la tabla 2: Praxeologías de los Espacios Vectoriales, y las tecnologías erróneas manifestadas en las respuestas, para esta actividad fueron: (θ_a) cuando el estudiante confunde la propiedad solicitada con otra, (θ_b) la justificación de espacio vectorial utilizando la definición de conjunto generador y, (θ_c) el caso en el que el estudiante justifica el espacio vectorial con la definición de subespacio vectorial.

En la tabla se aprecia que uno de los incisos que presentó mayor dificultad fue el inciso j) sobre identificación del espacio vectorial y en el que se presentaron tecnologías erróneas. Para la categoría *responde sin justificar*, se consideró cuando en la respuesta del estudiante, la técnica coincidiera con la esperada, pero la respuesta a la pregunta quedara de manera superficial con un “sí” o “no” o respuestas similares. Se observó que veintiún estudiantes reconocieron la pertenencia al conjunto indicado, pero no alcanzaron a identificar la cerradura de la multiplicación por un escalar en el espacio $\mathbb{R}^2$, como podemos observar en el ejemplo mostrado en la figura 5.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Tecnologías asociadas	θ_1	θ_6	θ_{10} θ_b θ_c	θ_2 θ_a	θ_3	θ_7 θ_a	θ_8	θ_9	θ_4	θ_5 θ_a
Responde sin justificar	23	21	13	28	24	23	23	23	12	5
Identifica la propiedad	1	1	2	0	2	0	1	0	10	18
Justifica la propiedad	0	0	7	0	0	0	0	0	4	2
Responde incorrectamente	6	8	8	2	4	7	6	7	4	5
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 10: Tecnologías manifestadas por estudiante en la actividad 1.


1. Dados los vectores $u = (2,3), v = (3,-5), w = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

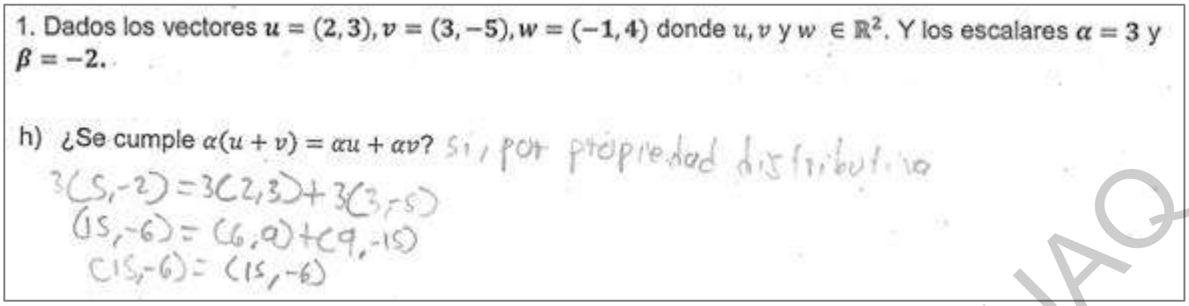
f) Realizar αu ¿El resultado de la multiplicación pertenece a $\mathbb{R}^2$?

$\alpha v \in \mathbb{R}^2$

$3(2,3) = (6,9) \quad (6,9) \in \mathbb{R}^2$

Figura 5: E07 responde sin justificar.

La categoría *identifica la propiedad* entre las tecnologías, fue considerada cuando la respuesta del estudiante era correcta y hacía mención de la propiedad que se buscaba representar, sin llegar a profundizar en justificaciones. En la figura 6 se puede apreciar al único estudiante que realiza la técnica correcta y responde identificando la propiedad distributiva de la multiplicación siendo la tecnología θ_8.


1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

h) ¿Se cumple $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$? si, por propiedad distributiva

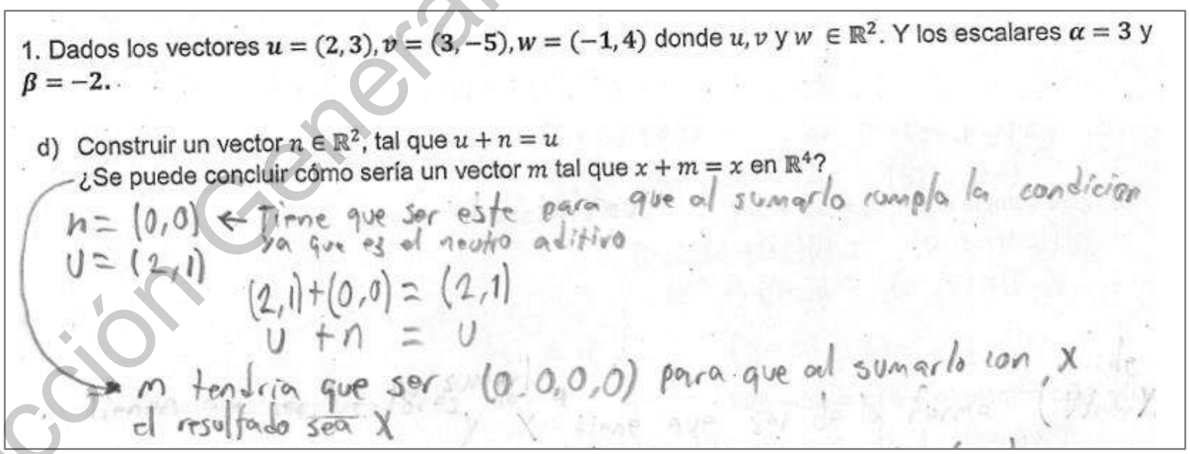
3(5,-2) = 3(2,3)+3(3,-5)

(15,-6) = (6,9)+(9,-15)

(15,-6) = (15,-6)

Figura 6: E02 identifica la propiedad.

Se consideró que una respuesta pertenecía a la categoría *justifica la propiedad*, cuando el estudiante realizaba la técnica correcta, respondía la pregunta solicitada con el nombre de la propiedad que se buscaba identificar y la acompañaba con una explicación que sustentara su respuesta. Se puede analizar en la figura 7, cómo el estudiante realiza las operaciones necesarias para responder lo solicitado, justificando la propiedad al externar la tecnología θ_4. Así se encontraron cuatro estudiantes que al construir un vector y analizarlo, se desempeñaron de manera similar para la propiedad del neutro aditivo.


1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

d) Construir un vector $n \in \mathbb{R}^2$, tal que $u + n = u$

¿Se puede concluir cómo sería un vector m tal que $x + m = x$ en $\mathbb{R}^4$?

n = (0,0) ← Tiene que ser este para que al sumarlo cumpla la condición ya que es el neutro aditivo

U = (2,1)

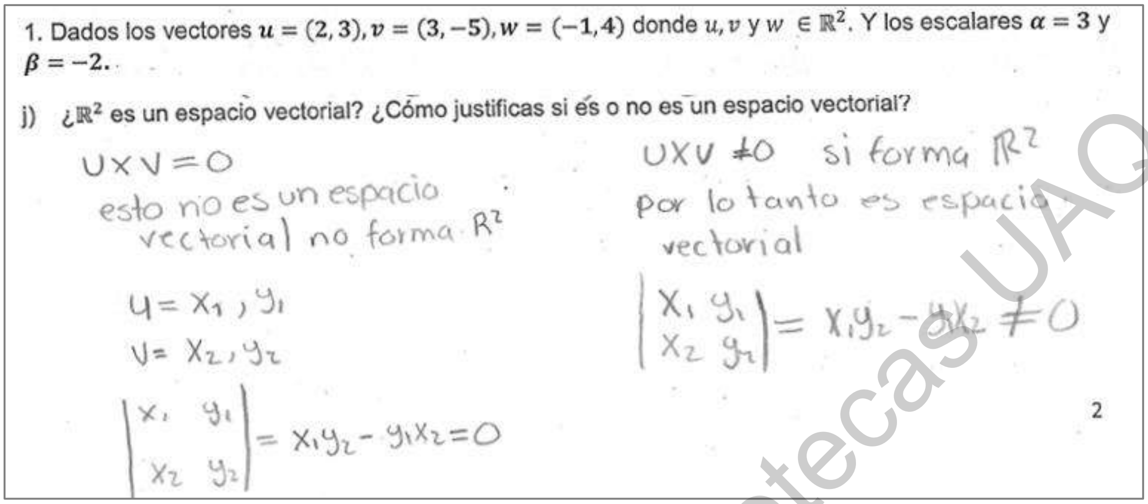
(2,1)+(0,0) = (2,1)

U + n = U

m tendría que ser (0,0,0,0) para que al sumarlo con X el resultado sea X

Figura 7: E06 justifica la propiedad.

Para la categoría *responde incorrectamente o no responde* tenemos el ejemplo del estudiante presentado en la figura 8 en el que se manifiesta la tecnología θ_b, tal y como este caso se presentaron otros siete estudiantes que no lograron comprobar correctamente el espacio vectorial para esta primera actividad.


1. Dados los vectores $u = (2,3), v = (3,-5), w = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

j) ¿$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

$U \times V = 0$
esto no es un espacio vectorial no forma R^2

$u = x_1, y_1$
$v = x_2, y_2$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 = 0$

$U \times V \neq 0$ si forma R^2
por lo tanto es espacio vectorial

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$

2

Figura 8: E09 responde incorrectamente.

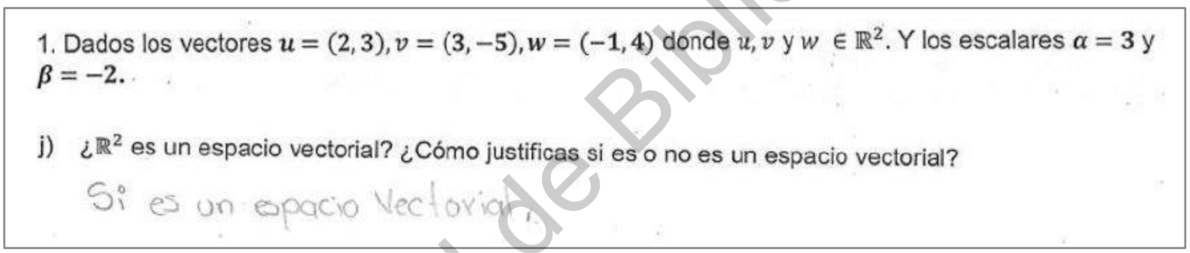
V.2.1.3 Tipo de Abstracción

En la tabla 11 se presentan los tipos de abstracción que los estudiantes mostraron para esta primera actividad relacionada con la estructura algebraica del espacio $\mathbb{R}^2$.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Interiorización	23	21	13	28	24	23	23	23	12	5
Encapsulación	1	1	2	0	2	0	1	0	10	18
Generalización	0	0	7	0	0	0	0	0	4	2
Ningún tipo de abstracción	6	8	8	2	4	7	6	7	4	5
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 11: Abstracción manifestada por estudiante en la actividad 1.

De la tabla se desprende que para la mayoría de los alumnos el proceso de encapsulación resultó accesible, a excepción de cuando el tipo de tarea implicaba construir un vector (T_3). La categoría de *interiorización* en los tipos de abstracción se consideró cuando el estudiante logra concientizar el procedimiento que realiza, reflexionar sobre él y hacerlo propio, por lo que responde conscientemente la pregunta solicitada, pero no alcanza a dar una justificación relevante a su razonamiento. En el ejemplo de la figura 9, se encuentra uno de los trece casos de estudiantes que identificaron que el espacio $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, pero no explicaron la razón de su respuesta.

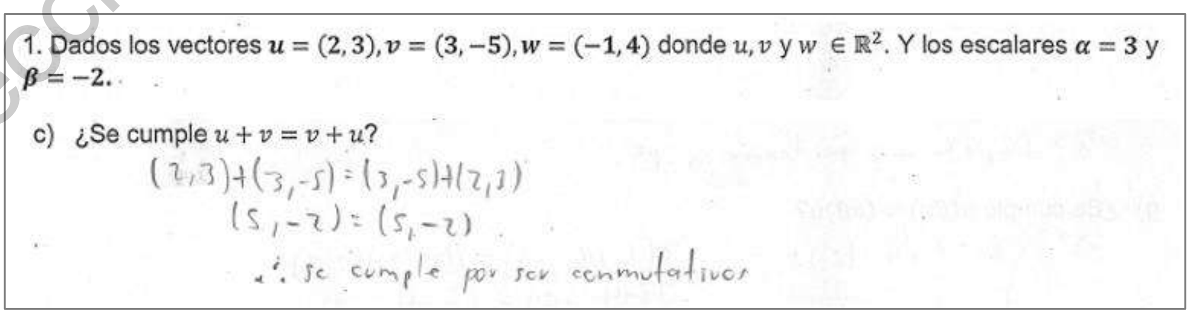

1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

j) ¿$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Si es un espacio Vectorial.

Figura 9: E22 interioriza.

Para la *encapsulación* se considera cuando el estudiante responde reflexionando sobre la técnica realizada de manera particular para comprenderlo como un todo e identifica la propiedad adecuada. Tenemos, en la figura 10, un ejemplo de este tipo de abstracción. Para esta propiedad solo dos estudiantes alcanzaron la encapsulación.


1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

c) ¿Se cumple $u + v = v + u$?

$(2,3)+(3,-5) = (3,-5)+(2,3)$

$(5,-2) = (5,-2)$

$\therefore$ se cumple por ser conmutativos

Figura 10: E25 encapsula.

El tipo de abstracción *generalización* es cuando el estudiante no solo identifica la propiedad, sino que la explica de manera que podría aplicarla a cualquier otra estructura algebraica, como el caso ejemplificado en la figura 11, el estudiante realiza el ejercicio con la técnica correcta, lo justifica con la tecnología adecuada y generaliza el conocimiento a cualquier otro caso. Solo dos estudiantes lograron la generalización para la propiedad del inverso aditivo en esta actividad.

1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior
Construir un vector p, tal que $u + p = n$ $p = (-2,-3)$ $(2,3)+(-2,-3) = (0,0) = n$
Construir un vector q, tal que $v + q = n$ $q = (-3,5)$ $(3,-5)+(-3,5) = (0,0) = n$
Construir un vector r, tal que $w + r = n$ $r = (1,-4)$ $(-1,4)+(1,-4) = (0,0) = n$
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores u, v, w contra los p, q, r respectivamente? Podemos observar que son el inverso aditivo, al sumar un vector con su inverso aditivo obtenemos el neutro aditivo, o el vector $\bar{0}$.

Figura 11: E03 generaliza.

Por otro lado, en la figura 12 se puede observar uno de los seis estudiantes que no mostró *ningún tipo de abstracción* en el inciso a). En este ejemplo se puede apreciar que el estudiante realizó la técnica adecuada, pero no respondió identificando la propiedad, ni justificó su procedimiento.

1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (2,3), \boldsymbol{v} = (3,-5), \boldsymbol{w} = (-1,4)$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = 3$ y $\boldsymbol{\beta} = -2$.

a) Realizar $u + v$ ¿El resultado de la suma pertenece a $\mathbb{R}^2$?
$(2,3)+(3,-5) = (2+3, 3-5) = (5,-2)$

Figura 12: E18 ningún tipo de abstracción.

V.2.2 Actividad 2: Funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo [0,1]

Para esta actividad, a modo global, se hizo evidente que 228 (76 %) respuestas de los estudiantes realizaron las técnicas esperadas correctamente, 70 (23 %) realizaron las técnicas de forma incorrecta o no respondieron, y 2 (1 %) respuestas en las que el estudiante identificó de manera directa la propiedad sin realizar técnica (tabla 8).

En las tecnologías y tipos de abstracción, se presentaron 197 (66 %) respuestas correctas en las que no hubo justificación, siendo del tipo interiorización; 24 (8 %) respuestas identificaron la propiedad, correspondiendo a la encapsulación; sin embargo, con solo 9 (3 %) respuestas en las que se justificó la propiedad, fue la estructura algebraica en la que se presentaron menor cantidad de abstracción del tipo generalización; y con 70 (23 %) casos en los que no hubo respuesta o se cometieron errores, siendo los escenarios en los que no se presentó ningún tipo de abstracción (tabla 8).

Con esta información se aprecia que, para esta actividad, los estudiantes realizan las técnicas adecuadas, pero tienen mayor dificultad al momento de justificar la propiedad identificada con la tecnología, por lo que esta estructura algebraica es la que menos cantidad de respuestas alcanzaron la generalización.

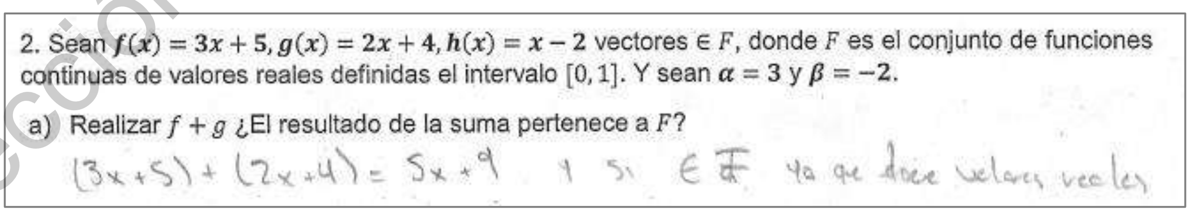
V.2.2.1 Técnica

En cuanto a la estructura algebraica de las funciones continuas en el intervalo [0,1], tenemos en la tabla 12 cuantos estudiantes realizaron correctamente las técnicas esperadas y cuantos no. De igual manera, se observan las técnicas que emergieron de esta actividad, que fueron: (τ_a) errores en el procedimiento y (τ_b) la identificación directa de la propiedad referida sin realizar ninguna técnica.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Técnicas asociadas	τ_1 τ_a	τ_6 τ_a	τ_{10} τ_a	τ_2	τ_3 τ_b	τ_7 τ_a	τ_8 τ_a τ_b	τ_9 τ_a	τ_4	τ_5
Técnica correcta	29	22	20	29	27	22	20	21	27	26
Técnica incorrecta	1	8	10	1	2	8	9	9	3	4
Identifica la propiedad sin realizar técnica	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 12: Técnicas manifestadas por estudiante en la actividad 2.

Con la información de la tabla podemos observar que el inciso b) fue uno de los que presentó un solo estudiante con error en la técnica. En la categoría *realiza la técnica esperada correctamente* se aprecia en la tabla 12 que para la propiedad de la cerradura bajo la suma, hubo veintinueve estudiantes que realizaron las operaciones necesarias y comprobaron que el resultado pertenece al conjunto indicado. Como ejemplo, el estudiante E04, en la figura 13 realiza la técnica τ_1.


2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

a) Realizar $f + g$ ¿El resultado de la suma pertenece a F?

$(3x+5)+(2x+4) = 5x+9$ y si $\in F$ ya que dice valores reales

Figura 13: E04 realiza la técnica esperada correctamente.

En la categoría de las *técnicas incorrectas* se consideraron los casos en los que el estudiante realizó la técnica de forma errónea o no realizó ninguna técnica para identificar la propiedad. En la figura 14 se advierte uno de los nueve estudiantes que cayeron en esta clasificación. En el ejemplo, el estudiante no realizó ninguna técnica.

2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$? Sí

Figura 14: E30 no realizó técnica.

Para la categoría *identifica la propiedad sin realizar técnica*, se consideraron los casos en los que el estudiante respondiera inmediatamente, haciendo referencia a la propiedad en cuestión, sin tener que realizar ningún procedimiento para tal fin. Esta fue la técnica τ_b, que se presentó diferente a la esperada. En la figura 15, se puede observar el único caso para la propiedad distributiva respecto de los vectores en la estructura de las funciones continuas en un intervalo definido.

2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

h) ¿Se cumple $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$?

Sí, se cuenta con la propiedad distributiva

Figura 15: E07 identifica la propiedad sin realizar técnica.

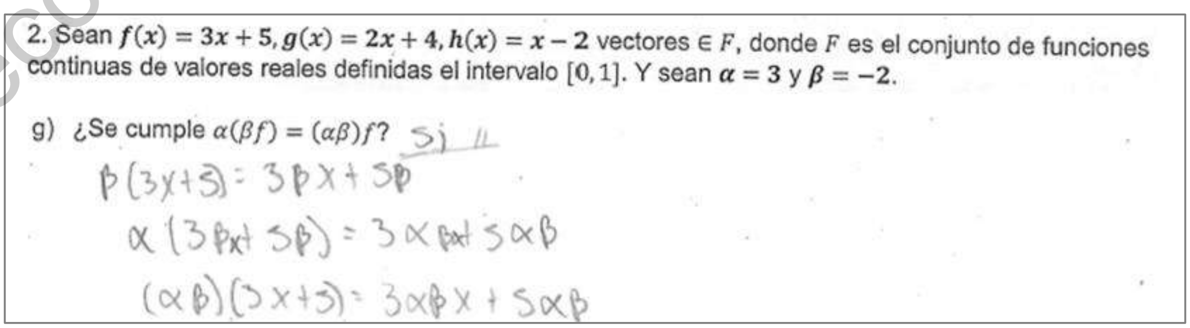
V.2.2.2 Tecnología

Se resume en la tabla 13, la clasificación de estudiantes de acuerdo a las tecnologías mostradas para esta segunda actividad. Así como se manifestaron las tecnologías esperadas, también se presentaron las siguientes: (θ_b) la justificación de espacio vectorial utilizando la definición de conjunto generador y, (θ_c) la justificación del espacio vectorial con la definición de subespacio vectorial.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Tecnologías asociadas	θ_1	θ_6	θ_{10} θ_b θ_c	θ_2	θ_3	θ_7	θ_8	θ_9	θ_4	θ_5
Responde sin justificar	26	20	12	28	26	21	21	20	18	5
Identifica la propiedad	1	0	0	0	1	0	1	0	3	18
Justifica la propiedad	0	0	6	0	0	0	0	0	3	0
Responde incorrectamente	3	10	12	2	3	9	8	10	6	7
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 13: Tecnologías manifestadas por estudiante en la actividad 2.

Según la información en la tabla, el inciso e) que es sobre realizar las operaciones indicadas, fue en el que mejor se identificó la propiedad a la que se hacía referencia (inverso aditivo). En la categoría *responde sin justificar*, tenemos el ejemplo en la figura 16, en la que el estudiante contesta que se cumple la igualdad, pero no respalda esta respuesta con la propiedad distributiva para las funciones definidas. Para este inciso, un total de veintiún estudiantes respondieron de forma similar.


2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$? Sí //

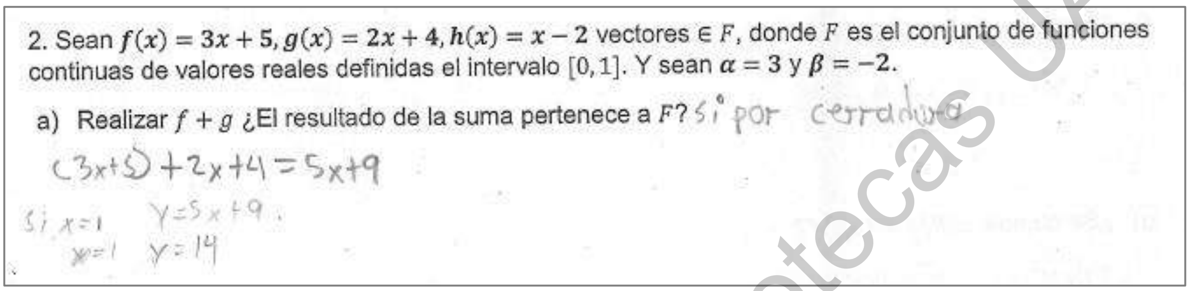
$\beta(3x+5) = 3\beta x + 5\beta$

$\alpha(3\beta x + 5\beta) = 3\alpha\beta x + 5\alpha\beta$

$(\alpha\beta)(3x+5) = 3\alpha\beta x + 5\alpha\beta$

Figura 16: E08 responde sin justificar.

En la categoría *identifica la propiedad*, se observa en la figura 17 el ejemplo del único estudiante que reconoció la propiedad de la cerradura de la suma para las funciones continuas en un intervalo definido, manifestando así la tecnología θ_1.


2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

a) Realizar $f + g$ ¿El resultado de la suma pertenece a F? si por cerradura

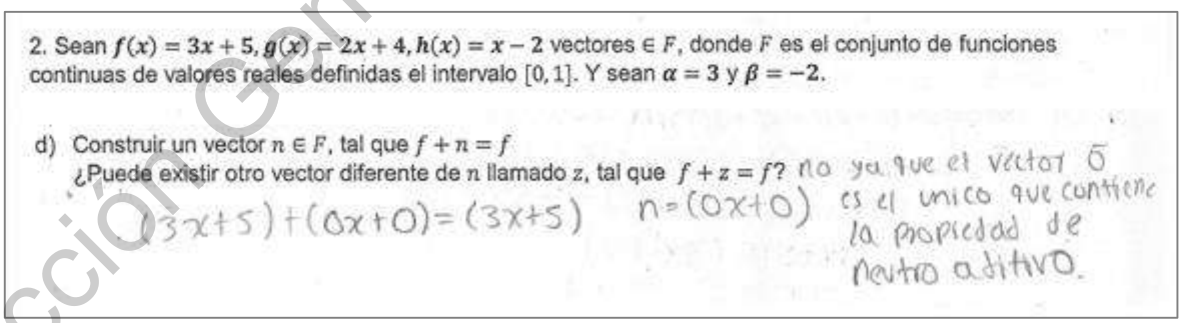
$(3x+5)+2x+4=5x+9$

si $x=1$ $y=5x+9$

$x=1$ $y=14$

Figura 17: E02 identifica la propiedad.

Para la categoría *justifica la propiedad*, se puede analizar que en el ejemplo mostrado en la figura 18, se realiza la técnica correcta, responde la cuestión solicitada identificando y justifica la propiedad buscada al hacer evidente que el neutro aditivo es único. En esta categoría, un total de tres estudiantes manifestaron la tecnología θ_4 con un desempeño similar.


2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

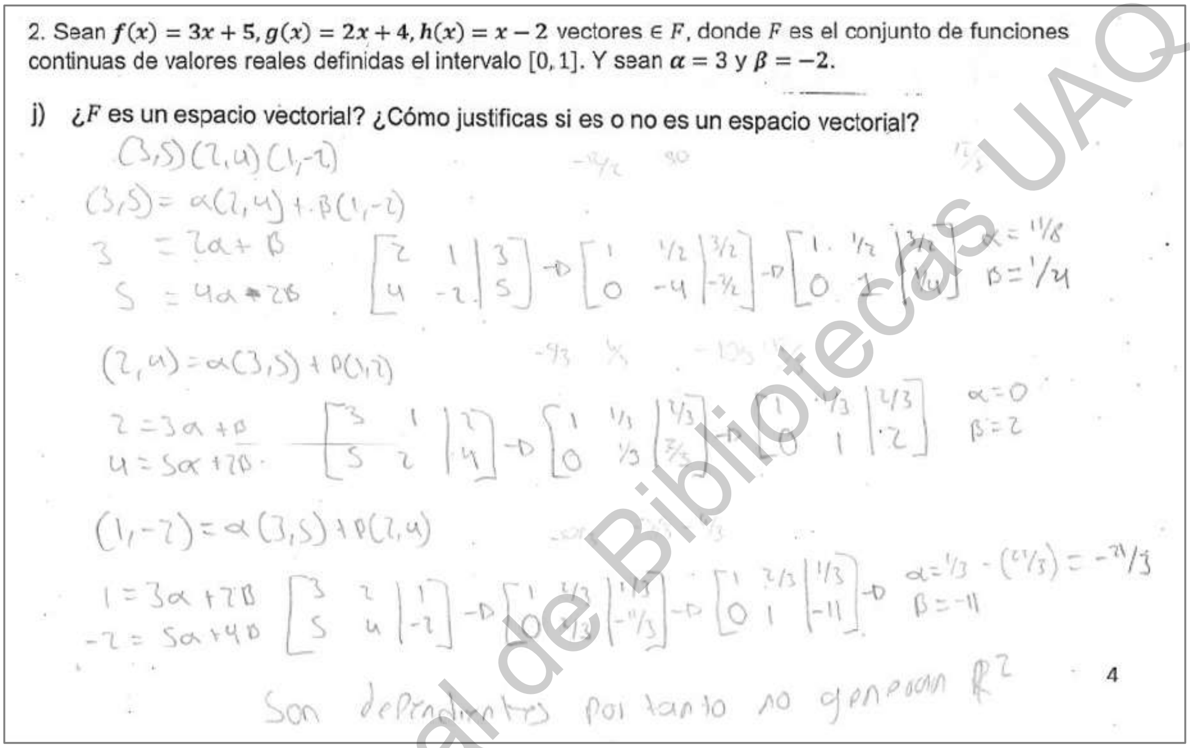
d) Construir un vector $n \in F$, tal que $f + n = f$

¿Puede existir otro vector diferente de n llamado z, tal que $f + z = f$? no ya que el vector $\bar{0}$ es el unico que contiene la propiedad de neutro aditivo.

$(3x+5)+(0x+0)=(3x+5)$ $n=(0x+0)$

Figura 18: E18 justifica la propiedad.

Para la categoría *responde incorrectamente*, se encontró que doce estudiantes dejaron sin responder o justificaron de forma incorrecta el espacio vectorial. Por ejemplo, en la figura 19 tenemos a un estudiante que contestó demostrando que los vectores eran linealmente dependientes, por lo que utilizó la definición de un conjunto generador en lugar de la del espacio vectorial, manifestando así la tecnología θ_b.


2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

j) ¿F es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

(3,5)(2,4)(1,-2)

(3,5) = α(2,4) + β(1,-2)

3 = 2α + β

5 = 4α + 2β

(2,4) = α(3,5) + β(1,2)

2 = 3α + β

4 = 5α + 2β

(1,-2) = α(3,5) + β(2,4)

1 = 3α + 2β

-2 = 5α + 4β

4

Son dependientes por tanto no generan R^2

Figura 19: E16 responde incorrectamente.

V.2.2.3 Tipo de Abstracción

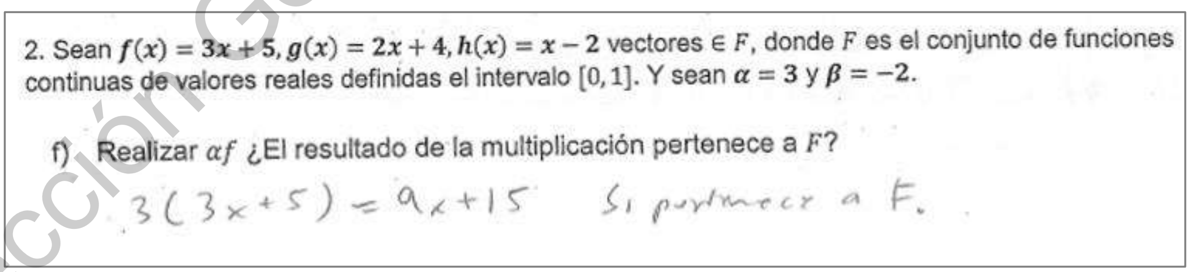
En la tabla 14 se encuentra el resumen de la cantidad de estudiantes que se encuentran en cada tipo de abstracción para esta segunda actividad sobre las funciones continuas en un intervalo definido.

De la tabla se puede inferir que para la mayoría de los estudiantes el tipo de abstracción presentado fue la interiorización. Para este tipo de abstracción, en esta actividad, tenemos el ejemplo mostrado en la figura 20, donde el estudiante realiza

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Interiorización	26	20	12	28	26	21	21	20	18	5
Encapsulación	1	0	0	0	1	0	1	0	3	18
Generalización	0	0	6	0	0	0	0	0	3	0
Ningún tipo de abstracción	3	10	12	2	3	9	8	10	6	7
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 14: Abstracción manifestada por estudiante en la actividad 2.

el ejercicio con la técnica correcta, y responde haciendo conciencia de la pertenencia al conjunto indicado, más no alcanza a identificar la propiedad de la cerradura bajo la multiplicación. Para esta propiedad, un total de veinte estudiantes tuvieron el mismo tipo de abstracción para esta estructura algebraica.

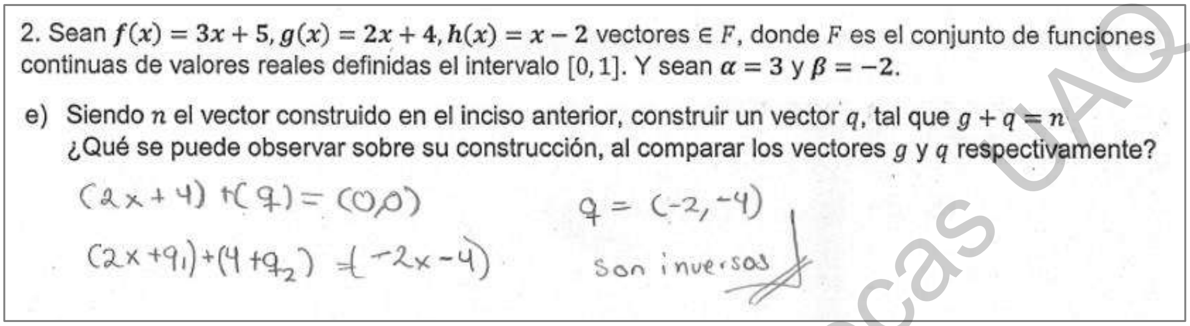

2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

f) Realizar αf ¿El resultado de la multiplicación pertenece a F?

$3(3x+5) = 9x+15$ Si pertenece a F.

Figura 20: E05 interioriza.

En el caso de la *encapsulación*, se presenta el ejemplo del estudiante E12, en la figura 21, en este ejemplo se puede observar cómo reflexiona sobre el proceso realizado logrando identificar que se trata de los inversos de las funciones trabajadas. Dieciocho estudiantes presentaron este tipo de abstracción para la propiedad del inverso aditivo de las funciones continuas en un intervalo definido.



2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

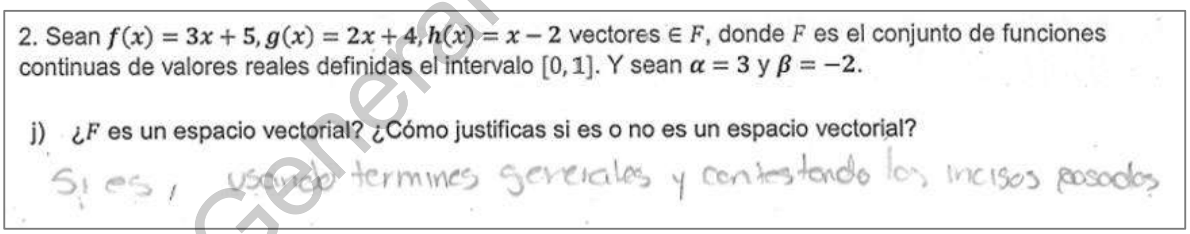
e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector q, tal que $g + q = n$ ¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores g y q respectivamente?

$(2x+4) + (q) = (0,0)$ $\quad$ $q = (-2, -4)$

$(2x + q_1) + (4 + q_2) = (-2x - 4)$ $\quad$ son inversas

Figura 21: E12 encapsula.

En la figura 22 se muestra uno de los seis estudiantes que presentaron el tipo de abstracción *generalización* al comprobar el espacio vectorial para esta actividad. Se puede observar que el estudiante identificó que los incisos que formaron a la actividad, son las propiedades que definen a un espacio vectorial.



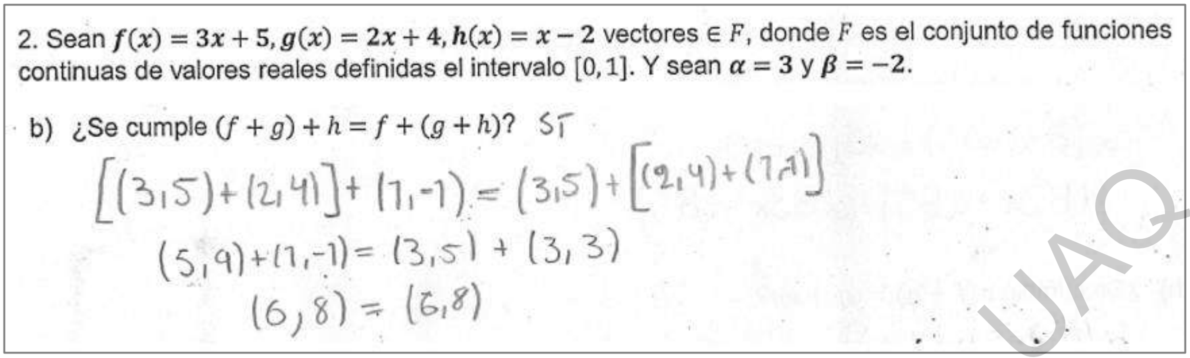
2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

j) ¿F es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Si es, usando terminos generales y contestando los incisos pasados

Figura 22: E20 generaliza.

Finalmente, para el conjunto de funciones continuas en un intervalo definido, se encontraron dos estudiantes que no presentaron *ningún tipo de abstracción* en el inciso b), que indica la propiedad asociativa, ya que al realizar las operaciones para establecer la igualdad, se presentó error aritmético, como se aprecia en la figura 23.



2. Sean $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x + 4, h(x) = x - 2$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0,1]$. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

b) ¿Se cumple $(f + g) + h = f + (g + h)$? SI

$$[(3,5)+(2,4)]+(1,-1) = (3,5)+[(2,4)+(1,-1)]$$
$$(5,9)+(1,-1) = (3,5)+(3,3)$$
$$(6,8) = (6,8)$$

Figura 23: E09 ningún tipo de abstracción.

V.2.3 Actividad 3: Polinomios con coeficientes reales con grado menor o igual a 3

Para el caso de la estructura algebraica de los polinomios, de forma general, se contabilizaron 225 (75 %) respuestas en las que los estudiantes realizaron las técnicas esperadas de forma correcta, 65 (22 %) respuestas fueron realizadas con una técnica errónea o no respondieron, y se presentó la situación de 10 (3 %) respuestas en las que para la identificación de algunas propiedades, no se necesitó la realización de ninguna técnica (tabla 8).

En cuanto a las tecnologías y a la abstracción, en esta actividad hubo 146 (49 %) respuestas correctas de estudiantes que no justificaron, quedándose en la interiorización; sin embargo fue la actividad en la que 76 (25 %) respuestas identificaron la propiedad, resultando en que esta estructura algebraica es en la que se dio una mayor abstracción de tipo encapsulación; por otro lado, 13 (4 %) respuestas justificaron la propiedad, lo que representó la generalización; y 65 (22 %) tuvieron una respuesta incorrecta o nula, por lo que no presentaron ningún tipo de abstracción (tabla 8).

De esta manera se reconoce que, aunque los estudiantes no realizaron los pasos esperados (técnicas), lograron identificar las propiedades que se buscaban (tecnologías), alcanzando así el tipo de abstracción encapsulación.

V.2.3.1 Técnica

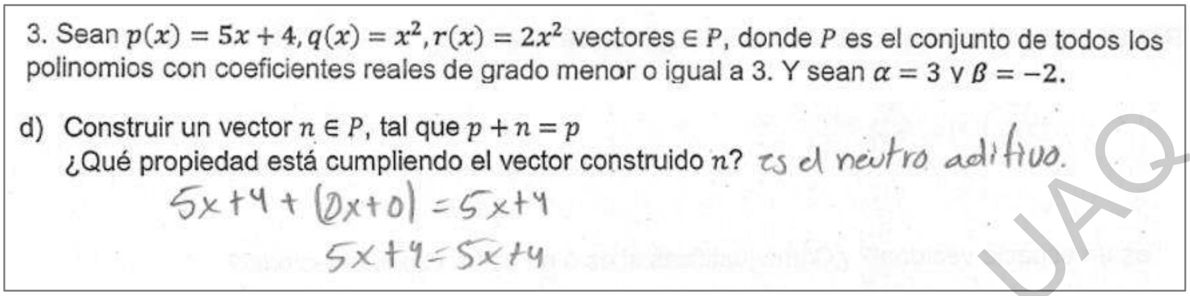
En la actividad tres, se trabajó con la estructura algebraica de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a tres. En la tabla 15 se encuentran las técnicas manifestadas por estudiante, tanto las esperadas como las que emergieron en esta actividad: (τ_a) errores en el procedimiento y (τ_b) la identificación directa de la propiedad referida sin realizar ninguna técnica.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Técnicas asociadas	τ_1 τ_b	τ_6 τ_a	τ_{10} τ_a	τ_2 τ_b	τ_3 τ_a τ_b	τ_7 τ_a τ_b	τ_8 τ_a τ_b	τ_9 τ_a τ_b	τ_4	τ_5 τ_a
Técnica correcta	29	25	21	27	25	23	19	19	28	27
Técnica incorrecta	0	5	9	1	2	6	9	10	2	3
Identifica la propiedad sin realizar técnica	1	0	0	2	3	1	2	1	0	0
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 15: Técnicas manifestadas por estudiante en la actividad 3.

Se puede apreciar en la tabla previa que para esta actividad, el inciso i), resultó complicado para varios estudiantes.

Para la categoría *realiza la técnica esperada correctamente* se puede observar que veintiocho estudiantes realizaron la técnica τ_4 al construir un vector y analizarlo para la propiedad del neutro aditivo. En la figura 24 tenemos el ejemplo del estudiante E26 que cumple esta situación.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

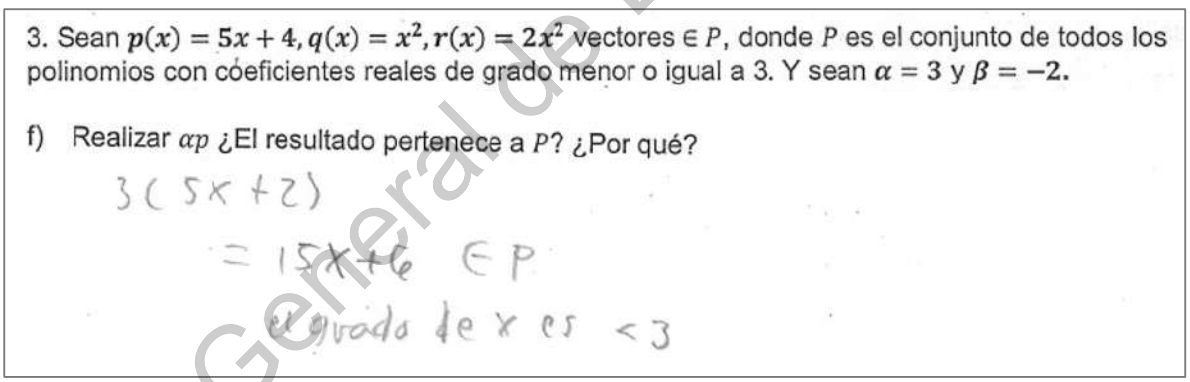
d) Construir un vector $n \in P$, tal que $p + n = p$
¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido n? es el neutro aditivo.

$5x+4+(0x+0) = 5x+4$

$5x+4 = 5x+4$

Figura 24: E26 realiza la técnica esperada correctamente.

En cuanto a las respuestas en las que se realizó alguna *técnica incorrecta*, se puede apreciar en la figura 25 a un estudiante que cometió errores en el procedimiento (τ_a) para la propiedad de cerradura bajo la multiplicación. Del mismo modo se presentaron otros cuatro estudiantes con un procedimiento similar.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a P? ¿Por qué?

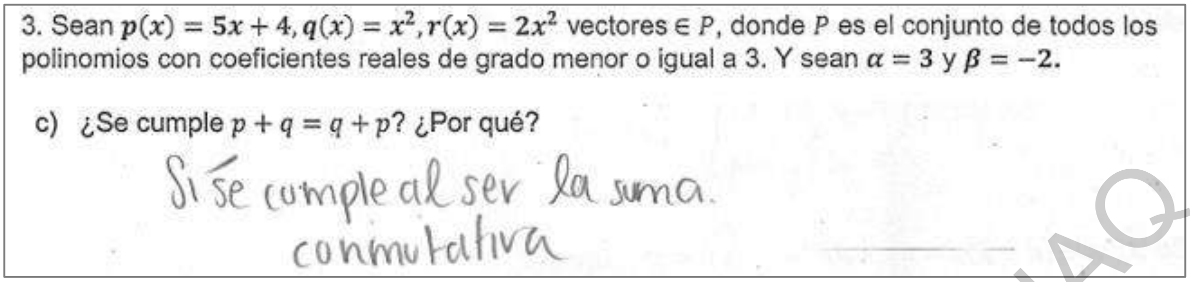
$3(5x+2)$

$= 15x+6 \in P$

el grado de x es < 3

Figura 25: E23 realiza técnica incorrecta.

Por otro lado, en la figura 26, se puede observar cómo el estudiante E17 *no realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad* conmutativa. Así, hubo un total de tres estudiantes que reconocieron la propiedad conmutativa, manifestando la técnica τ_b.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

c) ¿Se cumple $p + q = q + p$? ¿Por qué?

Si se cumple al ser la suma conmutativa

Figura 26: E17 identifica sin realizar la técnica.

V.2.3.2 Tecnología

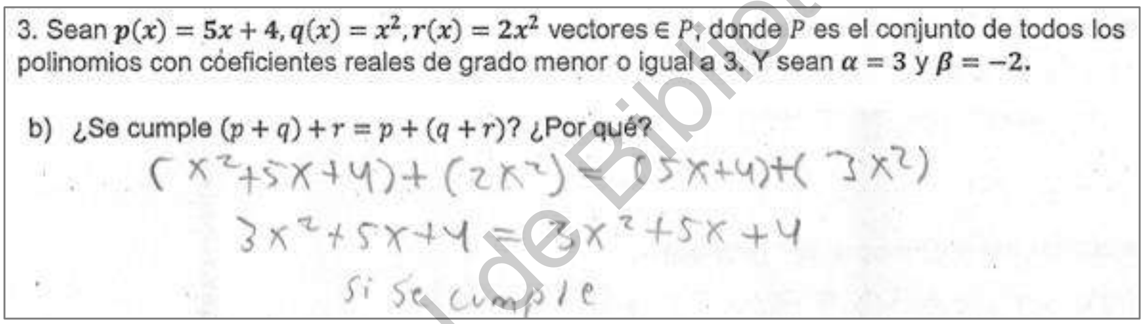
En la tabla 16 se sintetiza el trabajo que realizaron los estudiantes sobre las tecnologías en la estructura de los polinomios. Aparte de las tecnologías esperadas, se manifestaron las siguientes: (θ_a) la confusión del estudiante de la propiedad solicitada con otra, (θ_b) la justificación de espacio vectorial utilizando la definición de conjunto generador y, (θ_c) la justificación del espacio vectorial con la definición de subespacio vectorial.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Tecnologías asociadas	θ_1	θ_6	θ_{10} θ_b θ_c	θ_2 θ_a	θ_3 θ_a	θ_7	θ_8 θ_a	θ_9	θ_4	θ_5
Responde sin justificar	23	24	14	18	15	20	13	18	1	0
Identifica la propiedad	3	0	0	5	10	1	3	1	27	26
Justifica la propiedad	3	1	6	1	2	0	0	0	0	0
Responde incorrectamente	1	5	10	6	3	9	14	11	2	4
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 16: Tecnologías manifestadas por estudiante en la actividad 3.

De la tabla se obtiene que el inciso d), fue en el que los estudiantes identificaron mejor la propiedad referente.

La producción de un estudiante que se clasifica como *responde sin justificar* se puede observar en la figura 27, en la que el estudiante E23 realiza la técnica esperada, pero la respuesta a la pregunta queda de manera superficial. Para el inciso b), hubo un total de 18 estudiantes que contestaron que se cumple la igualdad, pero no respaldan esta respuesta con la propiedad asociativa de la suma para los polinomios.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con cóeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

b) ¿Se cumple $(p + q) + r = p + (q + r)$? ¿Por qué?

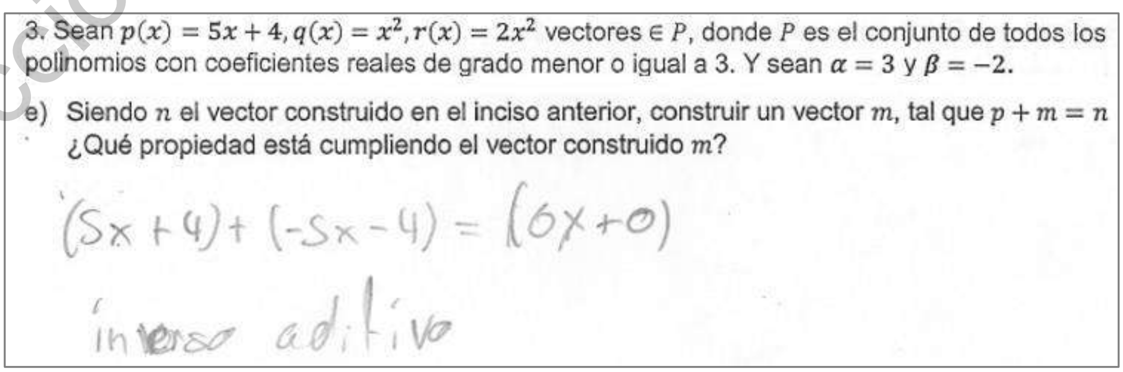
$(x^2+5x+4)+(2x^2) = (5x+4)+(3x^2)$

$3x^2+5x+4 = 3x^2+5x+4$

si se cumple

Figura 27: E23 responde sin justificar.

En el caso de *identificar la propiedad*, tenemos en la figura 28, el ejemplo del estudiante E15 que al construir un vector y analizarlo, expresa la tecnología θ_5 para el inciso e). Así, otros veinticinco estudiantes también lograron identificar la propiedad del inverso aditivo.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p + m = n$ ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido m?

$(5x+4)+(-5x-4) = (0x+0)$

inverso aditivo

Figura 28: E15 identifica la propiedad.

Ahora se presenta uno de los seis casos, en los que los estudiantes *justificaron la propiedad* identificada. En la figura 29, el estudiante E02 respondió el inciso j) identificando el espacio vectorial y lo justificó exteriorizando la tecnología θ_{10}.

3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

j) ¿P es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

si, porque cumple con las propiedades de cerradura, neutro aditivo, inverso aditivo, asociatividad, propiedad distributiva, escalar por un vector, lo cual lo constituye como un espacio vectorial

Figura 29: E02 justifica la propiedad.

En cuanto a la categoría *responde incorrectamente* se encontraron catorce estudiantes que no presentaron ninguna tecnología al no responder o como el ejemplo mostrado en la figura 30, en la que el estudiante manifestó la tecnología θ_a al confundir la propiedad distributiva con la asociativa.

3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

h) ¿Se cumple $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$? ¿Por qué?

$\alpha(p+q) = 3(x^2+5x+4) = 3x^2+15x+12$

R= Si cumple $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$

R= Porque la multiplicación es asociativa

$\alpha p + \alpha q = 15x+12 + 3x^2 = 3x^2+15x+12$

Figura 30: E19 confunde la propiedad.

V.2.3.3 Tipo de Abstracción

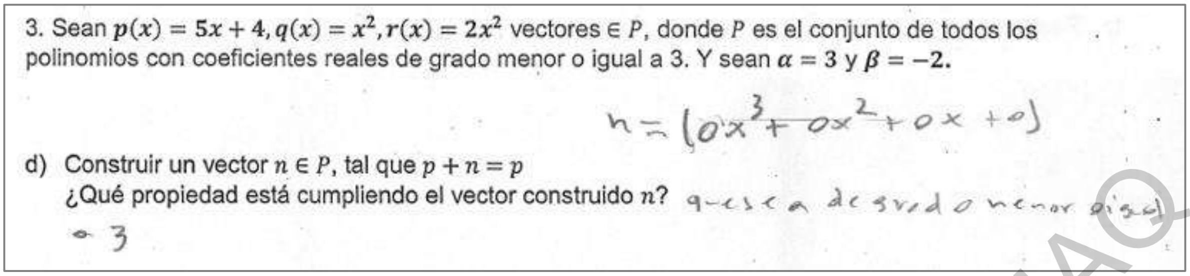
Para esta actividad que trabaja con la estructura algebraica de los polinomios con grado menor o igual a 3, en la tabla 17 se presenta el resumen del tipo de abstracción de los estudiantes, para las distintas propiedades del espacio vectorial.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Interiorización	23	24	14	18	15	20	13	18	1	0
Encapsulación	3	0	0	5	10	1	3	1	27	26
Generalización	3	1	6	1	2	0	0	0	0	0
Ningún tipo de abstracción	1	5	10	6	3	9	14	11	2	4
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 17: Abstracción manifestada por estudiante en la actividad 3.

Con la tabla previa se aprecia que para la mayoría de los estudiantes, les fue posible alcanzar la encapsulación para el tipo de tarea que implica construir un vector y analizarlo (T_3).

En el ejemplo presentado en la figura 31, se presenta al estudiante E30 que se catalogó en *interiorización*, ya que no alcanzó a identificar la propiedad a pesar de haber realizado la técnica correctamente. Este fue el único caso que se quedó en esta categoría para la propiedad del neutro aditivo.

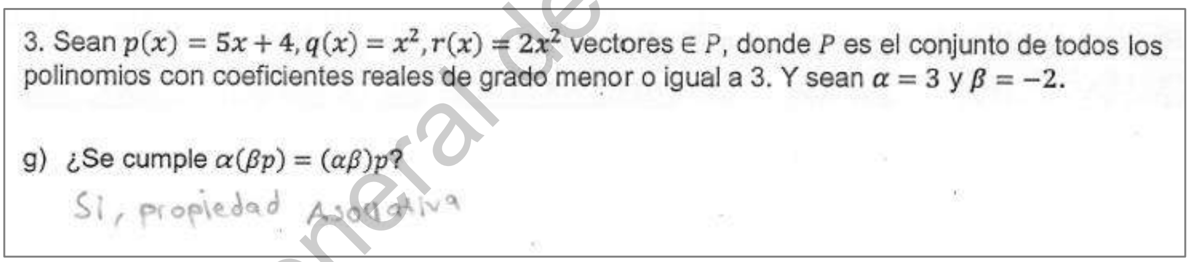

3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

$n = (0x^3 + 0x^2 + 0x + 0)$

d) Construir un vector $n \in P$, tal que $p + n = p$
¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido n? q-es-a de grado menor o igual a 3

Figura 31: E30 interioriza.

La *encapsulación* es el tipo de abstracción que refiere al momento en el que el estudiante reflexiona sobre el proceso realizado de manera particular para comprenderlo como un todo. Este se puede observar en la figura 32, en la que el estudiante respondió reconociendo la propiedad para el tipo de estructura algebraica presentada. Para la propiedad asociativa de la multiplicación por un escalar, el estudiante E11 fue el único que alcanzó la encapsulación.

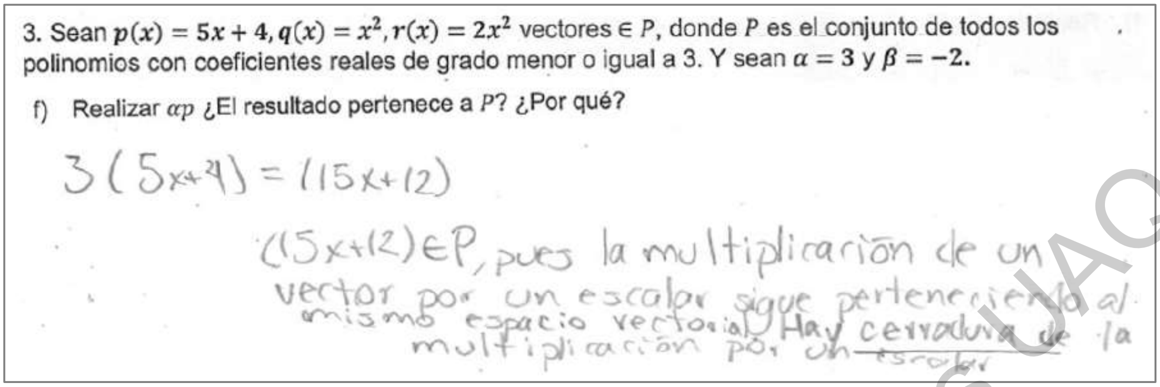

3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$?
SI, propiedad Asociativa

Figura 32: E11 encapsula.

Para la *generalización*, se muestra en la figura 33, al único estudiante que alcanzó este tipo de abstracción en el inciso f), al identificar y comprobar la cerradura de la multiplicación.

Para la estructura algebraica de los polinomios con grado menor o igual a 3, se identificó que once estudiantes no mostraron ningún tipo de abstracción. Como ejemplo podemos observar en la figura 34, al estudiante E01 que a pesar de realizar el procedimiento necesario, no hubo respuesta que permitiera definir algún tipo de abstracción.

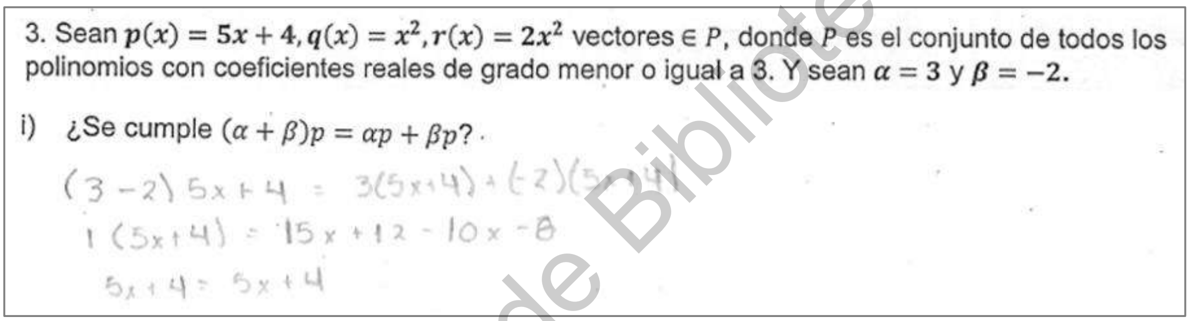

3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a P? ¿Por qué?

$3(5x+4) = (15x+12)$

$(15x+12) \in P$, pues la multiplicación de un vector por un escalar sigue perteneciendo al mismo espacio vectorial. Hay cerradura de la multiplicación por un escalar

Figura 33: E03 generaliza.


3. Sean $p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$?

$(3-2)\,5x+4 = 3(5x+4)+(-2)(5x+4)$

$1(5x+4) = 15x+12-10x-8$

$5x+4 = 5x+4$

Figura 34: E01 ningún tipo de abstracción.

V.2.4 Actividad 4: Polinomios con coeficientes reales con grado igual a 3

En esta actividad, a diferencia de las demás, la estructura algebraica presentada no es un espacio vectorial, esto con la intención de analizar la comprensión de los estudiantes hacia las propiedades de un espacio vectorial. De manera global, 198 (66 %) de las respuestas de los estudiantes realizaron la técnica esperada de manera correcta, esta estructura algebraica fue en la que mayor cantidad de técnicas incorrectas se presentaron con 96 (32 %) respuestas en esta categoría, y por ultimo 6 (2 %) respuestas en las que no se realizó ninguna técnica, pero se identificó de manera directa la propiedad (tabla 8).

En referencia a las tecnologías y a los tipos de abstracción, se observaron 158 (53 %) respuestas en las que los estudiantes resolvieron sin justificar, quedándose en la interiorización; 27 (9 %) que identificaron la propiedad, siendo del tipo de abstracción encapsulación; hubo 19 (6 %) respuestas en las que se justificó la propiedad con la tecnología, logrando así la generalización; sin embargo, fue la estructura algebraica que presento 96 (32 %) respuestas con errores o sin contestar, por lo que se catalogó como la actividad en la que menos hubo algún tipo de abstracción (tabla 8).

Con esta información podemos determinar que los estudiantes tuvieron dificultad para realizar las técnicas correctamente, por lo que no manifestaron la tecnología esperada, mostrando así que no hubo ningún tipo de abstracción.

V.2.4.1 Técnica

Para esta estructura algebraica, se presenta en la tabla 18 el desempeño de los estudiantes en cuanto a los procedimientos que realizaron por inciso. Aunado a las técnicas esperadas, para esta actividad también se manifestaron las nuevas técnicas: (τ_a) errores en el procedimiento y (τ_b) la identificación directa de la propiedad referida sin realizar ninguna técnica.

Con base en la tabla 18, se expone que los estudiantes presentaron conflictos al realizar las técnicas para esta actividad.

En la figura 35, se observa el ejemplo de un estudiante que realizó la *técnica esperada correctamente*. Para esta tarea se encontraron veintiséis estudiantes que construyeron el vector del inverso aditivo con la técnica τ_5.

Para la categoría *realizar técnica incorrecta*, entre los casos en los que el estudiante tuvo algún error en el procedimiento (τ_a), se tiene el ejemplo en la figura 36, en la

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Técnicas asociadas	τ_1	τ_6 τ_a	τ_{10} τ_a	τ_2 τ_a τ_b	τ_3 τ_a τ_b	τ_7 τ_a τ_b	τ_8 τ_a τ_b	τ_9 τ_a τ_b	τ_4	τ_5
Técnica correcta	27	23	19	23	23	21	20	17	26	26
Técnica incorrecta	3	7	11	6	5	8	9	12	4	4
Identifica la propiedad sin realizar técnica	0	0	0	1	2	1	1	1	0	0
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 18: Técnicas manifestadas por estudiante en la actividad 4.

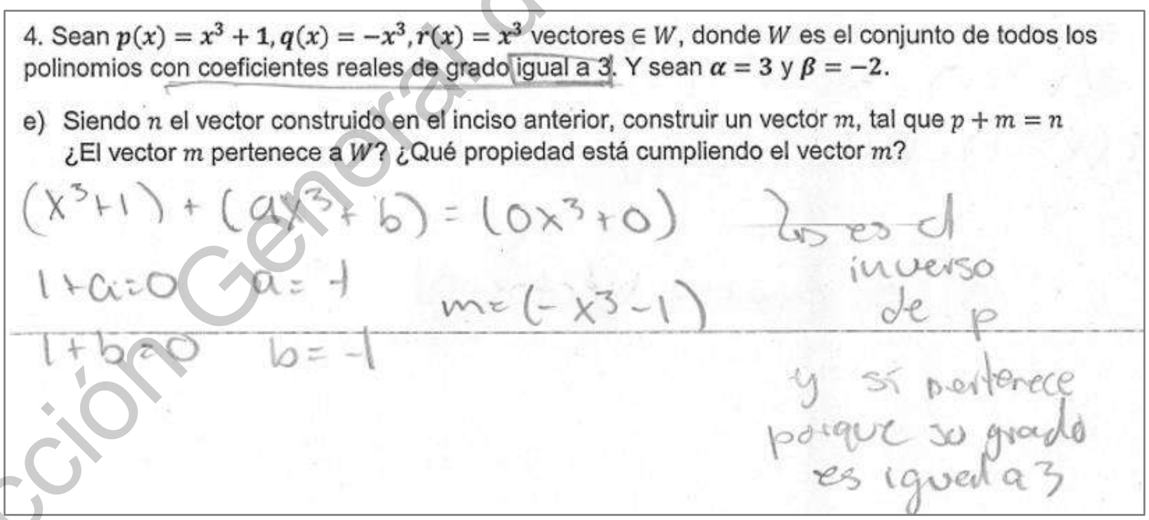
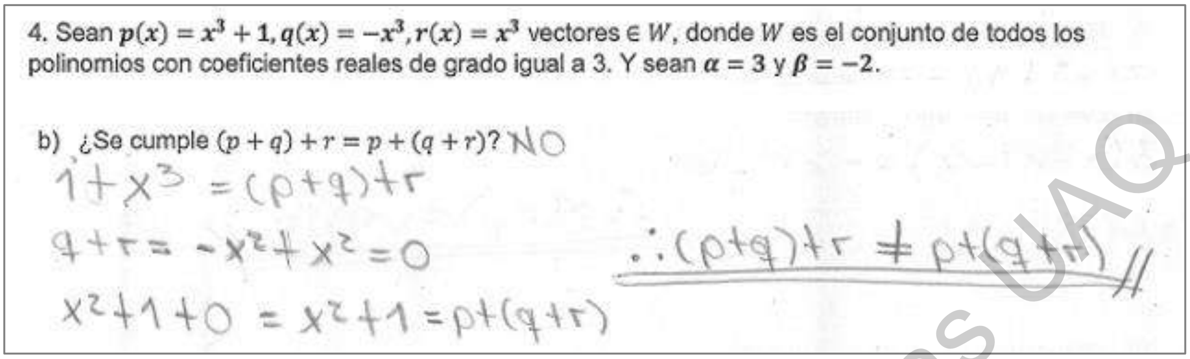


Figura 35: E21 realiza la técnica correcta.

que el que el estudiante transcribió mal los polinomios, por lo que no tuvo el resultado adecuado. Así, se presentaron seis casos que no lograron establecer la igualdad para comprobar la propiedad.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

b) ¿Se cumple $(p+q)+r = p+(q+r)$? NO

$1 + x^3 = (p+q)+r$

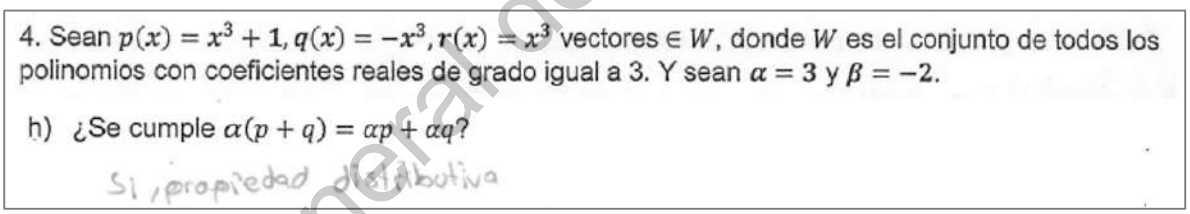
$q + r = -x^2 + x^2 = 0$

$x^2 + 1 + 0 = x^2 + 1 = p + (q+r)$

$\therefore (p+q)+r \neq p+(q+r)$ //

Figura 36: E14 presenta error en técnica.

Para esta actividad se exteriorizó la técnica τ_b, que es cuando el estudiante *identifica la propiedad sin realizar técnica*, en la figura 37 se observa al único estudiante que presentó esta técnica para el inciso h), al reconocer la propiedad distributiva sin haber realizado la técnica esperada τ_8.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

h) ¿Se cumple $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$?

Si, propiedad distributiva

Figura 37: E11 identifica sin realizar la técnica.

V.2.4.2 Tecnología

Para el desarrollo de las respuestas, tenemos en la tabla 19 la clasificación de los estudiantes de acuerdo a las tecnologías esperadas y a las nuevas manifestadas que para esta actividad fueron: (θ_a) confundir la propiedad solicitada con otra, (θ_b) justificar el espacio vectorial utilizando la definición de conjunto generador, (θ_d) indicar que se cumple la propiedad en casos en los que no cumple, (θ_e) identificar que no cumple alguna propiedad y decir que si es espacio vectorial.

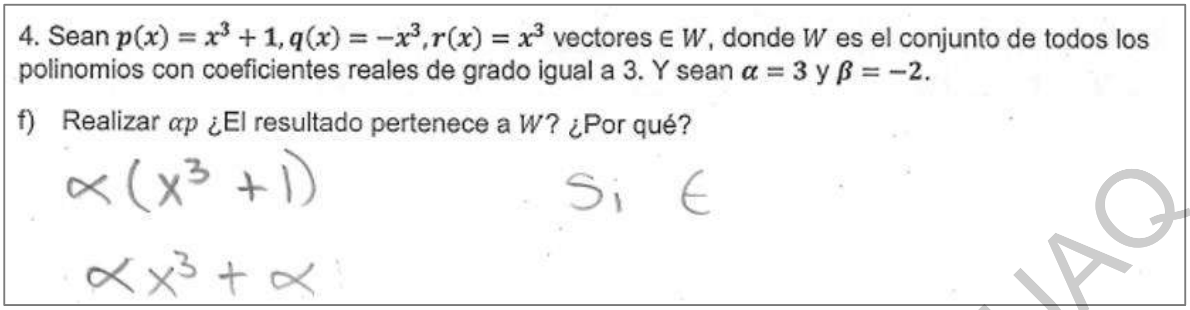
	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Tecnologías asociadas	θ_1 θ_d	θ_6	θ_{10} θ_b θ_e	θ_2	θ_3	θ_7	θ_8	θ_9	θ_4 θ_d	θ_5 θ_a
Responde sin justificar	14	24	6	24	23	20	16	17	8	4
Identifica la propiedad	0	0	1	2	3	2	2	2	2	15
Justifica la propiedad	8	1	6	0	0	0	1	0	2	1
Responde incorrectamente	8	5	17	4	4	8	11	11	18	10
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 19: Tecnologías manifestadas por estudiante en la actividad 4.

De la tabla previa se puede apreciar que la propiedad que más estudiantes justificaron fue el inciso a) sobre la cerradura de la suma.

Referente a la categoría *responde sin justificar*, tenemos el ejemplo del estudiante presentado en la figura 38, donde se puede observar que para la tarea relacionada con la propiedad de la cerradura de la suma, su respuesta es somera ya que no da fundamentos de su razonamiento. Se presentaron otros veintitrés estudiantes con el mismo tipo de respuesta para el inciso f).

El inverso aditivo fue la *propiedad identificada* por quince estudiantes con la tecnología θ_5. En la figura 39 se observa al estudiante E24, el cual construyó el vector solicitado y al analizarlo logró identificar la propiedad.



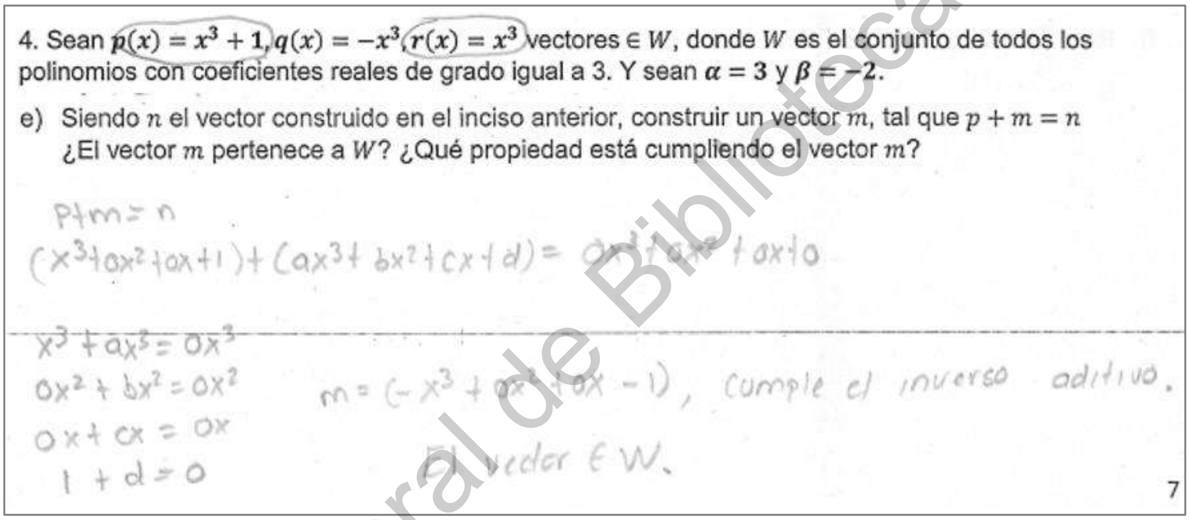
4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a W? ¿Por qué?

$\alpha(x^3+1)$ Si $\in$

$\alpha x^3 + \alpha$

Figura 38: E28 responde sin justificar.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p + m = n$ ¿El vector m pertenece a W? ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector m?

$p+m=n$

$(x^3+0x^2+0x+1)+(ax^3+bx^2+cx+d)= 0x^3+0x^2+0x+0$

$x^3+ax^3=0x^3$

$0x^2+bx^2=0x^2$

$0x+cx=0x$

$1+d=0$

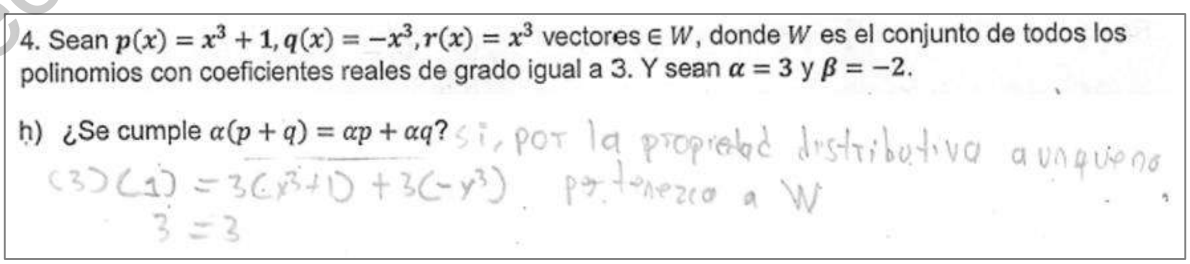
$m=(-x^3+0x^2+0x-1)$, cumple el inverso aditivo.

El vector $\in W$.

7

Figura 39: E24 identifica la propiedad.

En cuanto a la categoría *justifica la propiedad*, se encontró a un solo estudiante que presentó la tecnología θ_8, al establecer la igualdad, identificar la propiedad distributiva y justificar la no pertenencia al conjunto, según se puede ver en la figura 40.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

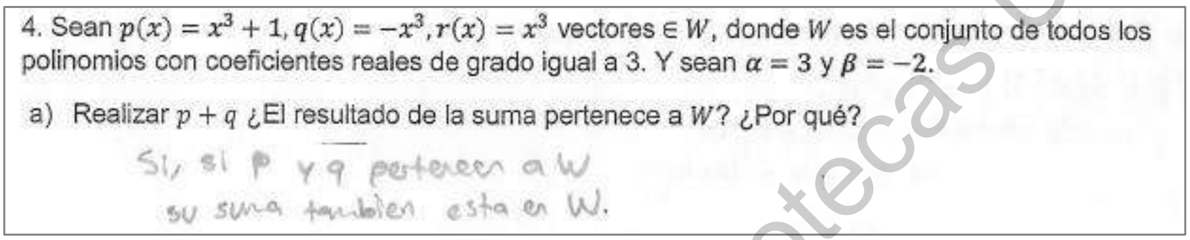
h) ¿Se cumple $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$? si, por la propiedad distributiva aunque no pertenezca a W

$(3)(1) = 3(x^3+1)+3(-x^3)$

$3 = 3$

Figura 40: E02 justifica la propiedad.

En la categoría *responde incorrectamente*, hubo ocho estudiantes que se consideraron en situaciones en las que no realizaron la técnica correcta o la respuesta no fue la adecuada. En la figura 41 se puede observar que el estudiante no realiza técnica alguna, por lo que al querer comprobar la propiedad, no identifica que no se cumple la propiedad de la cerradura de la suma.


4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

a) Realizar $p + q$ ¿El resultado de la suma pertenece a W? ¿Por qué?

Si, si p y q pertenecen a W su suma tambien esta en W.

Figura 41: E11 responde incorrectamente.

V.2.4.3 Tipo de Abstracción

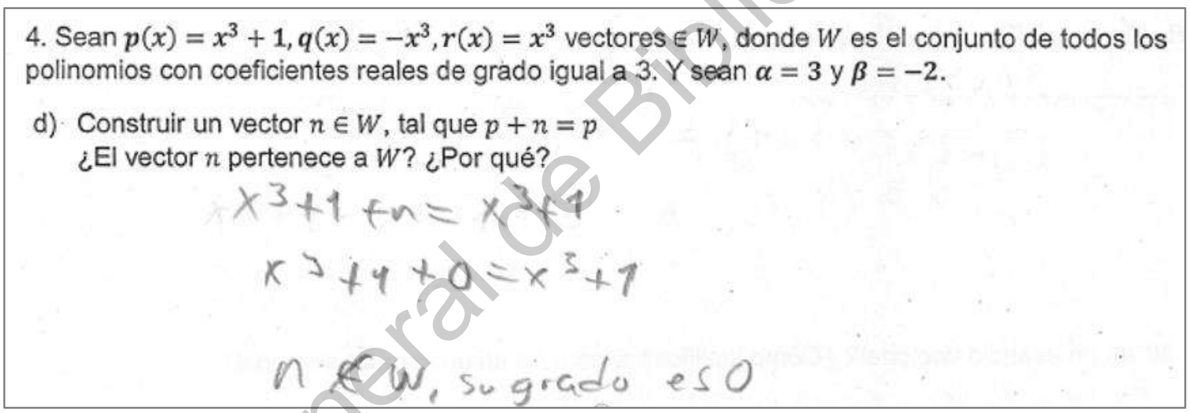
En la tabla 20 se resumen los tipos de abstracción exteriorizados por los estudiantes con respecto a la estructura algebraica de los polinomios con grado igual a 3.

	Tipo de Tarea									
	T_1: Realizar y comprobar			T_2: Comprobar que se cumpla					T_3: Construir vector y analizarlo	
	Identificar la cerradura		Identificar el EV	Establecer la igualdad e identificar propiedades					Realizar las operaciones	
Inciso	a	f	j	b	c	g	h	i	d	e
Interiorización	14	24	6	24	23	20	16	17	8	4
Encapsulación	0	0	1	2	3	2	2	2	2	15
Generalización	8	1	6	0	0	0	1	0	2	1
Ningún tipo de abstracción	8	5	17	4	4	8	11	11	18	10
Total de estudiantes	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabla 20: Abstracción manifestada por estudiante en la actividad 4.

A partir de la tabla anterior, se deriva que una gran cantidad de estudiantes no presentó ningún tipo de abstracción cuando se debía identificar si el conjunto presentado en la actividad es o no un espacio vectorial.

En esta actividad, para la interiorización, se observó que ocho estudiantes en el inciso d), realizaron las operaciones para construir el vector solicitado, y al analizarlo reconocieron que no pertenecía al conjunto definido. Se puede advertir en la figura 42, una respuesta de este tipo de abstracción, en la que el estudiante respondió que el vector creado no pertenece al conjunto, pero no indicó la propiedad que se buscaba representar.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

d) Construir un vector $n \in W$, tal que $p + n = p$
¿El vector n pertenece a W? ¿Por qué?

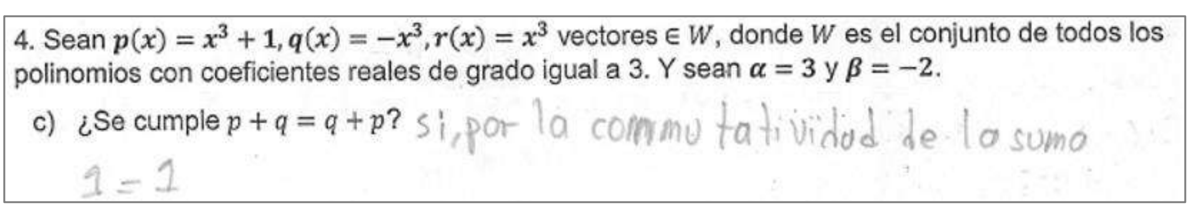
$x^3+1+n = x^3+1$

$x^3+1+0 = x^3+1$

$n \notin W$, su grado es 0

Figura 42: E23 interioriza.

En cuanto a la *encapsulación* tenemos en la figura 43, el ejemplo de un estudiante que comprobó que se cumplía la igualdad y logró identificar la propiedad de la conmutatividad de la suma. Para esta tarea, hubo tres estudiantes que alcanzaron la encapsulación.



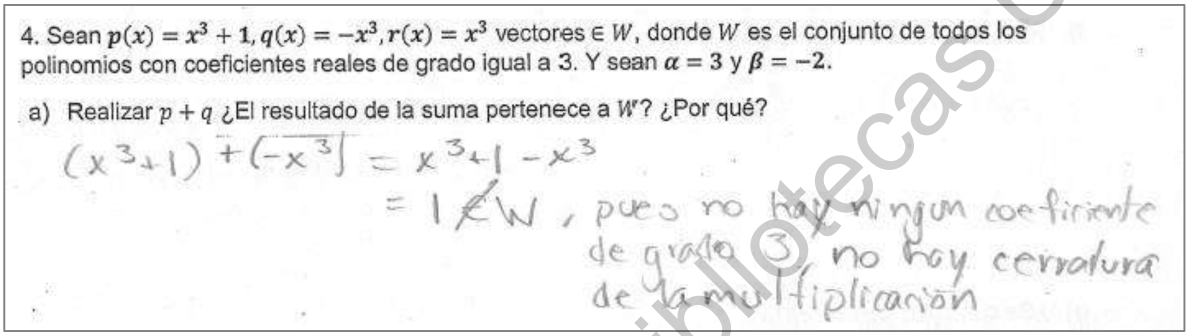
4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

c) ¿Se cumple $p + q = q + p$? si, por la commutatividad de la sumo

$1 = 1$

Figura 43: E02 encapsula.

Para la *generalización* se presenta en la figura 44, a un estudiante que responde la tarea de forma correcta, comprobando que el vector no pertenece al conjunto indicado y por lo tanto logra identificar que no se cumple la propiedad de la cerradura. Para este inciso, ocho estudiantes alcanzaron a generalizar de manera similar.



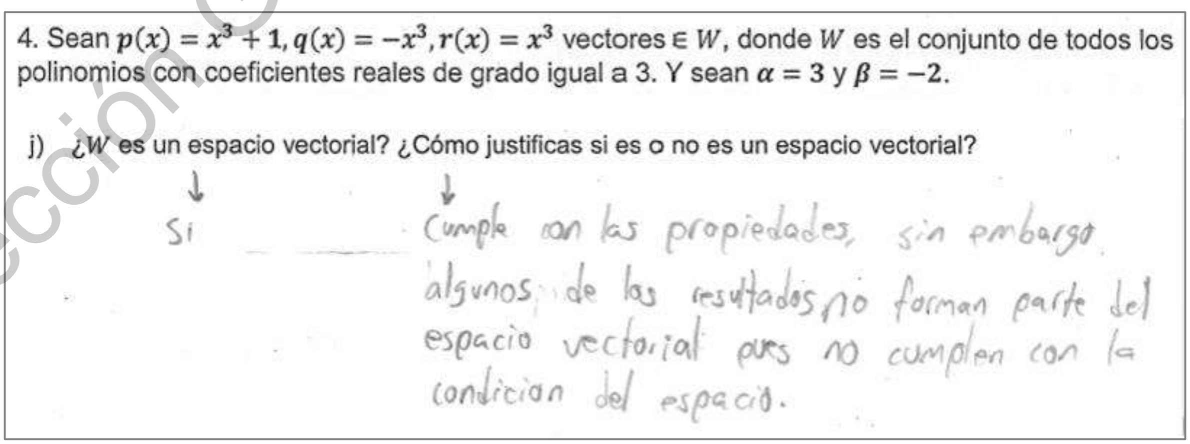
4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

a) Realizar $p + q$ ¿El resultado de la suma pertenece a W? ¿Por qué?

$(x^3+1) + (-x^3) = x^3+1 - x^3$
$= 1 \notin W$, pues no hay ningún coeficiente de grado 3, no hay cerradura de la multiplicación

Figura 44: E03 generaliza.

En esta actividad, para la tarea de identificar si era o no un espacio vectorial, diecisiete estudiantes se agruparon en la categoría de *ningún tipo de abstracción*. En la figura 45 se advierte el caso de uno de ellos, que responde que el conjunto es un espacio vectorial, a pesar de explicar que no todas las propiedades se cumplieron.



4. Sean $p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\alpha = 3$ y $\beta = -2$.

j) ¿W es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Si

Cumple con las propiedades, sin embargo algunos de los resultados no forman parte del espacio vectorial pues no cumplen con la condición del espacio.

Figura 45: E06 ningún tipo de abstracción.

V.3 Resultados comparativos entre actividades y elementos teóricos

Dados los resultados obtenidos en las cuatro actividades se puede establecer que una gran cantidad de estudiantes presentaron las técnicas esperadas, según se puede observar en la figura 46. Los incisos en los que más estudiantes manifestaron las técnicas esperadas fueron el a) y el d), que corresponden a las propiedades de la cerradura de la suma y el neutro aditivo, respectivamente.

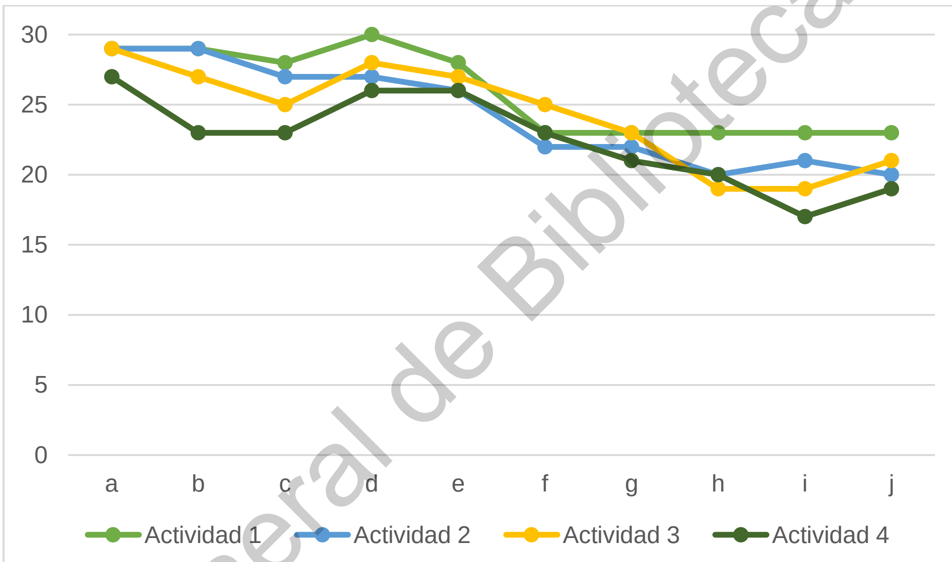


Figura 46: Estudiantes que realizaron la técnica esperada.

En cuanto a las tecnologías, se observa en la figura 47, que para las propiedades que mayormente se exteriorizaron fueron para el neutro aditivo, inciso d), y el inverso aditivo, inciso e). Por otro lado, en las que menos se presentaron las tecnologías correspondientes fueron en los incisos f), g), i), que son la propiedad de la cerradura de la multiplicación, la propiedad asociativa de la multiplicación por escalar y la propiedad distributiva respecto de los escalares, respectivamente.

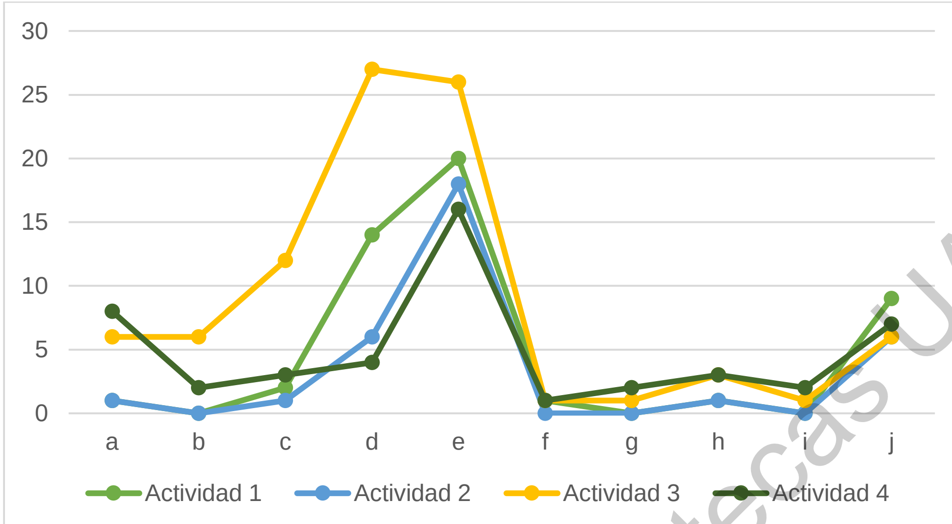


Figura 47: Estudiantes que manifestaron las tecnologías esperadas.

En cuanto a la abstracción, se necesitó de un entretejido de las técnicas y tecnologías que permitió definir a los estudiantes en los diferentes tipos de abstracción. Por ejemplo, se puede apreciar en la figura 48 que el inciso b), correspondiente a la propiedad asociativa de la suma, es donde los estudiantes más interiorizaron para la mayoría de las actividades.

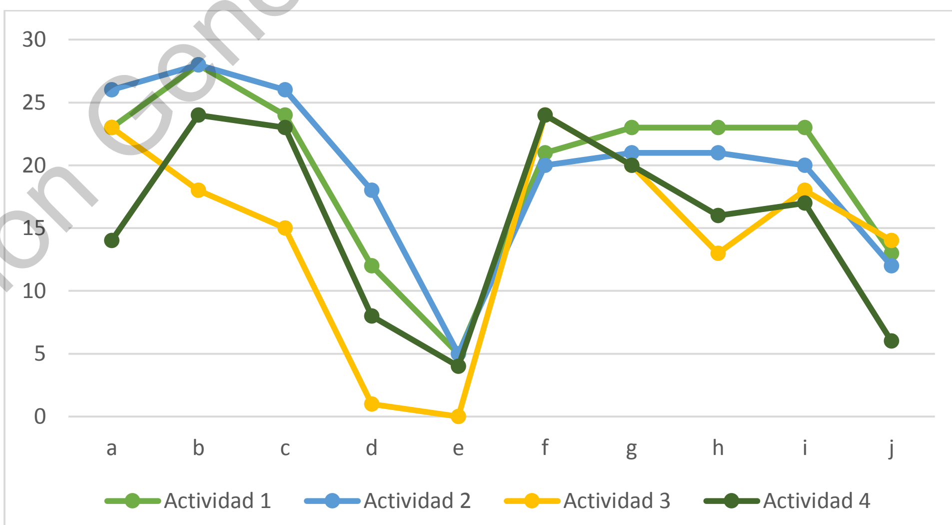


Figura 48: Estudiantes que interiorizaron.

De igual manera, se muestra en la figura 49, que la propiedad del inverso aditivo, identificado en el inciso e), fue en la que más se encapsuló el concepto para las cuatro actividades, lo que quiere decir que los estudiantes mostraron la técnica esperada y exhibieron la tecnología que se buscaba representar.

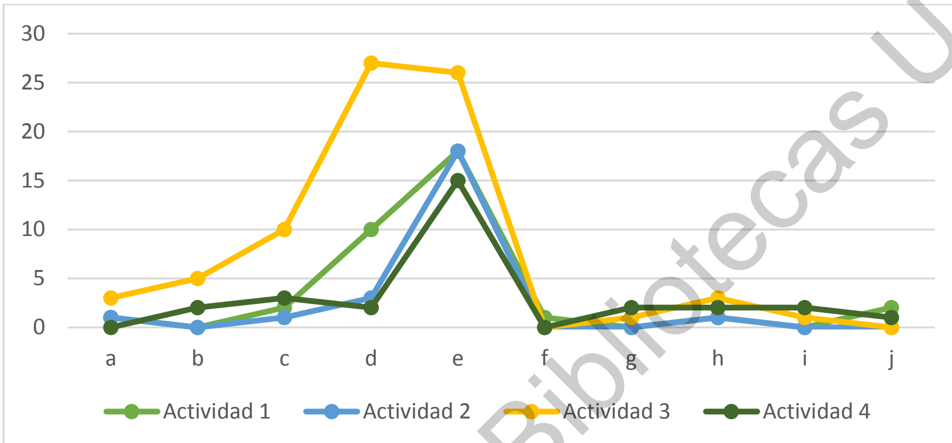


Figura 49: Estudiantes que encapsularon.

Por otra parte, se halló que muy pocos estudiantes alcanzaron la generalización en las actividades. Por ejemplo, de los estudiantes que realizaron las técnicas esperadas y justificaron haciendo uso de las tecnologías deseadas, hubo una pequeña porción de estudiantes que exhibieron este nivel de comprensión para la mayoría de los incisos, lo cual se puede observar en la figura 50.

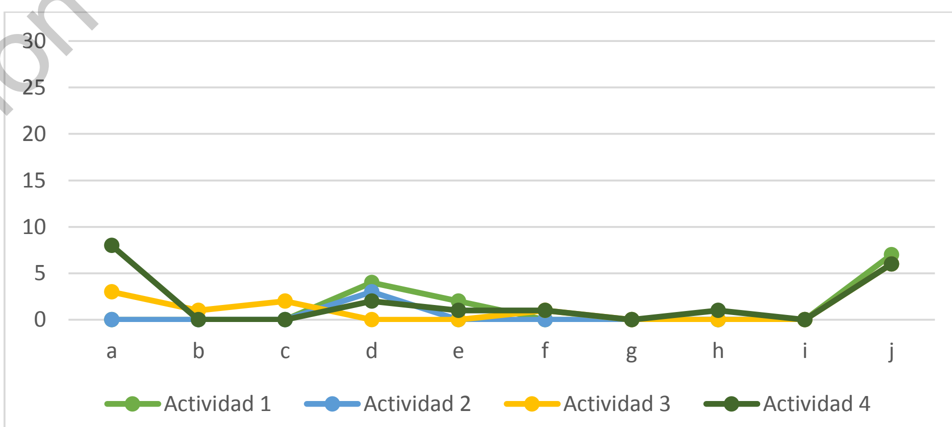


Figura 50: Estudiantes que generalizaron.

CAPÍTULO VI. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos de este trabajo de investigación se advierte que los estudiantes no logran abstraer el concepto de un espacio vectorial como el conjunto de todos los axiomas que lo definen. Así como también fue evidente la débil presencia de los conocimientos previos en cuanto a las propiedades de las operaciones de suma y la multiplicación por un escalar. Lo que confirma los resultados reportados en la investigación de Parraguez, que identificó la falta de entendimiento de los estudiantes, con respecto al rol que juegan las operaciones mencionadas, en la definición de un espacio vectorial (Parraguez, 2009).

Se descubrió, gracias a la propuesta, que casi la mitad de los estudiantes (once de treinta) que participaron en esta investigación llegaron a confundir al menos una propiedad. En particular, al momento de justificar su respuesta (manifestación de la tecnología), equivocaron principalmente las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Por el contrario, en algunos incisos, se encontró que cuatro estudiantes lograron identificar una o más propiedades sin necesidad de realizar ninguna operación (realización de alguna técnica) para comprobarlo. Los cuatro estudiantes (E07, E11, E17 y E18) presentaron esta situación en común, al menos, para la ley conmutativa de la suma de vectores. Esto indica que estos estudiantes alcanzaron la encapsulación en cuanto a la abstracción de la propiedad identificada, es decir, refieren a la conversión de un proceso dinámico a un objeto estático, en este estudio es cuando el estudiante responde reflexionando sobre sus procedimientos (técnicas) realizados de manera particular para comprenderlo como un todo identificando la propiedad adecuada.

De igual manera, los resultados de la actividad propuesta revelaron que las tecnologías mejor registradas por los estudiantes se presentaron en las propiedades del neutro aditivo y el inverso aditivo. Estos, fueron los incisos que más se catalogaron en el tipo de abstracción encapsulación.

Por otro lado, a través de la propuesta, se manifestó en la actividad cuatro, que once de los treinta estudiantes, lograron comprobar que al menos una de las propiedades trabajadas, no se cumplía, pero a pesar de esto, identificaron al conjunto de la actividad como un espacio vectorial, lo que mostró la ausencia de abstracción de la definición del concepto. Lo anterior expresa que la identificación de propiedades que cumplen los espacios vectoriales ha sido mecanizada.

Esta investigación contribuyó a identificar las debilidades en el aprendizaje del concepto de espacio vectorial en relación con las propiedades que la definen. La aplicación de la propuesta en un aula de Álgebra Lineal proporcionaría información sobre el estatus del conocimiento del alumnado en relación con la comprensión de la noción de espacio vectorial. Lo previo podría ser utilizado por el docente para generar líneas de acción que atiendan los errores y dificultades de los estudiantes y permita superarlos.

Se esperaba que, al lograr comprender las propiedades en las estructuras sencillas, los estudiantes podrían pasar el conocimiento generalizado a las estructuras complejas. Por lo que los resultados develaron que se necesita desarrollar este tipo de actividades en el aula, ya que la propuesta aplicada incorporó actividades sencillas con la intención de indagar como abstraían las propiedades en conjuntos no complejos. Sin embargo, los resultados señalan que incluso en estas estructuras los estudiantes presentan dificultades para poder desarrollar estas actividades. Por lo tanto, se sugiere plantearse nuevas metodologías de enseñanza que conduzcan a generar reflexión y comprensión en el estudiante sobre su propia actividad matemática.

Por otro lado, los resultados también sugieren que es necesaria otra investigación que implemente una secuencia didáctica que lleve a los estudiantes a comprender los axiomas de un espacio vectorial, enfocándose en construir las propiedades y que permita encontrarles sentido a través de los conjuntos que ya conoce. Se podría iniciar con los números naturales, los enteros, y los racionales, de tal manera que logren justificar por qué los axiomas se cumplen en algunos conjuntos y en otros no. Posteriormente, se propone realizar otros estudios en el mismo sentido que en este trabajo, pero con otras estructuras algebraicas, como podrían ser matrices, otro tipo de funciones o conjuntos con operaciones diferentes a las usuales.

El diseño de la actividad implementada tiene como objetivo romper la cotidianeidad de las tareas operativas que se acostumbran en los libros de texto, promoviendo así la implementación de una tarea que tiene la intención de llevar a los estudiantes a reflexionar sus procedimientos y sus justificaciones (técnicas y tecnologías). A través de la propuesta fue evidente la poca familiarización de los estudiantes para justificar (tecnologías) sus propios procedimientos (técnicas), por lo que generar escenarios en los que se promuevan validaciones, se hace necesario en las aulas para romper con la mecanización que se genera en muchas actividades algebraicas. Particularmente la expresión de validaciones sobre la actividad algebraica no sólo resulta difícil para los alumnos sino también implica un reto para los profesores de matemáticas dado que este tipo de elementos didácticos no son considerados durante su formación (Aké y Larios, 2020).

En la aplicación de la actividad propuesta se detalló que una limitante fue el tiempo en el aula que se dedica a la presentación del concepto de espacio vectorial, por lo que el tiempo apropiado para disponer y presentar las tareas de la investigación debía adecuarse al programa y horario de la asignatura.

Actualmente, el currículo escolar esta mayormente focalizado en cumplir tiempos, que en cumplir metas de aprendizaje. Estas tareas involucran procesos de reflexión, las cuales no tienen cabida en el programa de la asignatura, no porque no se quieran implementar, sino porque requieren tiempo, que en muchas ocasiones los docentes optan por utilizar en otros contenidos.

Otro factor a tomar en cuenta como una limitación, fue el compromiso de los estudiantes, por lo que se decidió hacer dos recolecciones de datos en dos grupos distintos. El grupo con el que se realizaron los análisis de los resultados para esta investigación se mostró comprometido con la aplicación, al entender que el desarrollo de las actividades les beneficiaría en su comprensión del concepto. Mientras que el otro grupo, no demostró interés en general, dejando gran cantidad de las actividades en blanco, al saber que las actividades no serían tomadas para calificación de su asignatura. Esta situación demuestra la importancia de cómo se introducen y se presentan las tareas en el aula.

Finalmente, considerando lo previo y con respecto a la pregunta que se planteó sobre ¿qué tipo de abstracción evidencian los estudiantes sobre el concepto de espacio vectorial a partir de actividades particulares? los resultados señalaron que el tipo de abstracción de los estudiantes se queda en la interiorización porque, aunque realizaron las técnicas correctas, tuvieron conflicto al momento de utilizar las tecnologías. Esto indica que la hipótesis fue rechazada, ya que los estudiantes presentaron dificultades al utilizar los axiomas como la definición de un espacio vectorial cuando desarrollaron las actividades planteadas con estructuras algebraicas sencillas.

Con base en la revisión de la literatura y los elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se logró el objetivo de diseñar una propuesta de actividades que permitió el estudio de los axiomas que conforman un espacio vectorial. A partir del desarrollo de las actividades propuestas, se logró el análisis y la categorización de los resultados presentados por los estudiantes, determinando así, sus praxeologías y tipos de abstracción. Lo que conllevó al alcance del objetivo general planteado, que fue analizar los tipos de abstracción de los estudiantes sobre la definición del concepto espacio vectorial, mediante actividades particulares diseñadas para este fin.

PUBLICACIÓN DERIVADA DEL ESTUDIO

Vázquez, A. (Aceptado). Una propuesta para la enseñanza del concepto abstracto de espacios vectoriales. *Pädi Revista de proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*.

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H. (2012). *Introducción al álgebra lineal* (3ª edición). México: Limusa.

Aké, L. P. & Larios Osorio (2020). Competencia algebraica de profesores de matemáticas. *Educação matemática pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática,* 22(1), 512-531.

Bohórquez, L. M., & Yepes, C. L. (2014). *Una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de espacio vectorial con ayuda del WINPLOT y WX-MÁXIMA*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Sergio Arboleda. Recuperado de http://hdl.handle.net/11232/863

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática,* 18(2), 37-74.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-266.

Costa, V.A. & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del algebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12(23), 49-55.

Dorier, J. L. (1994). Continuous analysis of one year of science students' work in linear algebra, in first year of French University. In: G: Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (Ed.), *Proceedings of the XIVth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 35-42). México: CINESTAV.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear algebra and its applications*, 275-276, 141-160.

Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (Eds), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI study* (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In Carlson D., Johnson C., Lay D., Porter A. D., Watkins A., & Watkins W. (Eds.), *Resources for teaching linear algebra, MAA NOTES,* vol. 42 (pp. 85–106). Washington: The Mathematical Association of America.

Grossman, S. & Flores, J. (2012). *Álgebra lineal* (7a edición). México: McGraw-Hill.

Hernández Sampieri, R. (2006). *Metodología de la Investigación* (6ª Ed.). México: Mc. Graw-Hill.

Kú, K., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática,* 20(2), 65-89.

Larson, R. & Edwards B. (2004). *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Limusa.

Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3ª edición). México: Pearson Educación.

León, O. & Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en psicología y educación*. España: McGraw-Hill.

Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory. In European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 1778–1787. Sant Feliu de Guixols, Spain.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector space theory. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40(2), 265-276.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2011). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22(3), 262-303.

Moreno, M. (2001). Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul. *SUMA,* 37, 75-82.

Mutambara, L., & Bansilal, S. (2019). An Exploratory Study on the Understanding of the Vector Subspace Concept. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 23(1), 14-26.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(4), 373-385.

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de https://eprints.ucm.es/4525/

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. Tesis doctoral no publicada. Recuperado de https://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11419/1/parraguez_2009.pdf

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112-2124.

Ramírez, B. A. (2014). Una propuesta didáctica para el estudio del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal. *XIV XIII CIAEM-IACME*, Chiapas, México.

Rosso, A., & Barros, J. (2013). Una taxonomía de errores en el aprendizaje de espacios vectoriales. *Revista Iberoamericana de Educación*, *63*(2), 1-9.

Martín, Á. M., Pérez, O. L., & Martínez-López, Y. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto espacio vectorial. *REFCalE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa. 5*(2), 195-209.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra*. Concordia University: Montreal. Unpublished Manuscript.

ANEXOS

Anexo 1. Propuesta didáctica

Nombre: ____ Fecha: __________________

Instrucciones: Resuelve y responde todas las preguntas lo más explícito posible.

1. Dados los vectores $\boldsymbol{u} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}), \boldsymbol{v} = (\mathbf{3}, -\mathbf{5}), \boldsymbol{w} = (-\mathbf{1}, \mathbf{4})$ donde u, v y $w \in \mathbb{R}^2$. Y los escalares $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{3}$ y $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{2}$.

a) Realizar $u + v$ ¿El resultado de la suma pertenece a $\mathbb{R}^2$?

b) ¿Se cumple $(u + v) + w = u + (v + w)$?

c) ¿Se cumple $u + v = v + u$?

d) Construir un vector $n \in \mathbb{R}^2$, tal que $u + n = u$
¿Se puede concluir cómo sería un vector m tal que $x + m = x$ en $\mathbb{R}^4$?

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior
Construir un vector p, tal que $u + p = n$
Construir un vector q, tal que $v + q = n$
Construir un vector r, tal que $w + r = n$
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores u, v, w contra los p, q, r respectivamente?

f) Realizar αu ¿El resultado de la multiplicación pertenece a $\mathbb{R}^2$?

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$?

h) ¿Se cumple $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$?

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$?

j) ¿$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

2. Sean $\boldsymbol{f(x) = 3x + 5}, \boldsymbol{g(x) = 2x + 4}, \boldsymbol{h(x) = x - 2}$ vectores $\in F$, donde F es el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas el intervalo $[0, 1]$. Y sean $\boldsymbol{\alpha = 3}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$.

a) Realizar $f + g$ ¿El resultado de la suma pertenece a F?

b) ¿Se cumple $(f + g) + h = f + (g + h)$?

c) ¿Se cumple $f + g = g + f$?

d) Construir un vector $n \in F$, tal que $f + n = f$
¿Puede existir otro vector diferente de n llamado z, tal que $f + z = f$?

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector q, tal que $g + q = n$
¿Qué se puede observar sobre su construcción, al comparar los vectores g y q respectivamente?

f) Realizar αf ¿El resultado de la multiplicación pertenece a F?

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$?

h) ¿Se cumple $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$?

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$?

j) ¿F es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

3. Sean $\boldsymbol{p(x) = 5x + 4, q(x) = x^2, r(x) = 2x^2}$ vectores $\in P$, donde P es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3. Y sean $\boldsymbol{\alpha = 3}$ y $\boldsymbol{\beta = -2.}$

a) Realizar $p + q$ ¿El resultado de la suma pertenece a P? ¿Por qué?

b) ¿Se cumple $(p + q) + r = p + (q + r)$? ¿Por qué?

c) ¿Se cumple $p + q = q + p$? ¿Por qué?

d) Construir un vector $n \in P$, tal que $p + n = p$
¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido n?

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p + m = n$
¿Qué propiedad está cumpliendo el vector construido m?

f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a P? ¿Por qué?

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$?

h) ¿Se cumple $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$? ¿Por qué?

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$?

j) ¿P es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

4. Sean $\boldsymbol{p(x) = x^3 + 1, q(x) = -x^3, r(x) = x^3}$ vectores $\in W$, donde W es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado igual a 3. Y sean $\boldsymbol{\alpha = 3}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$.

a) Realizar $p + q$ ¿El resultado de la suma pertenece a W? ¿Por qué?

b) ¿Se cumple $(p + q) + r = p + (q + r)$?

c) ¿Se cumple $p + q = q + p$?

d) Construir un vector $n \in W$, tal que $p + n = p$
¿El vector n pertenece a W? ¿Por qué?

e) Siendo n el vector construido en el inciso anterior, construir un vector m, tal que $p + m = n$
¿El vector m pertenece a W? ¿Qué propiedad está cumpliendo el vector m?

f) Realizar αp ¿El resultado pertenece a W? ¿Por qué?

g) ¿Se cumple $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$?

h) ¿Se cumple $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$?

i) ¿Se cumple $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$?

j) ¿W es un espacio vectorial? ¿Cómo justificas si es o no es un espacio vectorial?

Anexo 2. Carta de Consentimiento Informado

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

A quien corresponda:

Por medio de la presente, se informa que como proyecto de tesis de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, se está llevando a cabo una investigación con el propósito de estudiar y analizar la enseñanza del concepto de espacio vectorial, en el proyecto titulado: “Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto abstracto de espacio vectorial”. Parte importante de la investigación es la recolección de datos para la cual se precisa la participación de estudiantes.

La participación requerida por parte de los estudiantes consiste en:

- Responder las hojas de trabajo que se proporcionen, conformadas por actividades relacionadas con el concepto de espacio vectorial.
- De ser necesario, responder una breve entrevista sobre las respuestas a la actividad proporcionada.

Importante para estudiantes y docente:

- Estas actividades serán realizadas en el salón y horario habitual de la asignatura Álgebra Lineal, bajo el consentimiento del docente a cargo de la materia.
- La participación es voluntaria, pudiendo retirarse libremente en cualquier momento de la actividad sin riesgo a represalias.
- El aceptar o no la participación como alumno no repercutirá en las actividades ni evaluaciones programadas del curso de Álgebra Lineal.
- El participante es libre de solicitar y recibir información sobre la investigación en cualquier momento del estudio.
- No se hará ningún gasto, ni se recibirá remuneración alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos obtenidos producto de la participación, con un código clave que ocultará la identidad de los participantes.

Participante
Nombre y firma de conformidad

Responsable de la actividad:
Ana Victoria Vázquez Lozada
Estudiante de MDM
Contacto: anavictoria.vazloz@gmail.com

Anexo 3. Carta de Confidencialidad

CARTA DE CONFIDENCIALIDAD

A quien corresponda:

Por medio de la presente, yo Ana Victoria Vázquez Lozada, estudiante de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, que como consecuencia del proyecto de tesis titulado "Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto abstracto de espacio vectorial" y teniendo acceso a la información obtenida de esté

Me comprometo indefinidamente a:

1. Mantener la reserva y estricta confidencialidad de datos obtenidos, referenciándolos con un código clave que ocultará la identidad de los participantes.
2. No divulgar a terceras personas físicas o morales el contenido de la información.
3. No usar la información directa o indirectamente en beneficio propio o de terceros, excepto para cumplir a cabalidad el análisis relacionado al proyecto mencionado.
4. No revelar ni compartir total ni parcialmente a ningún tercero la información obtenida como consecuencia directa o indirecta de la aplicación de las actividades.
5. En general, guardar reserva y confidencialidad de los asuntos que lleguen a mi conocimiento con motivo del proyecto aplicado y en específico a la información precisada.

En caso de incumplimiento de lo estipulado en el presente documento, me haré acreedor a la sanción que la Universidad Autónoma de Querétaro considere conveniente.

Deslindo a la Universidad Autónoma de Querétaro de cualquier responsabilidad a consecuencia de la falta de cumplimiento de la presente carta.

Atentamente

Ana Victoria Vázquez Lozada
Estudiante de MDM

Anexo 4. Clasificación de respuestas por actividad

Técnicas

	Realiza la técnica esperada correcta	No realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad	Realiza otra técnica incorrecta o No responde
Actividad 1	243	0	57
Actividad 2	228	2	70
Actividad 3	225	10	65
Actividad 4	198	6	96

Tabla 21: Respuestas clasificadas según la técnica.

Tecnologías

	Responde incorrectamente o no responde	Responde sin justificar	Identifica la propiedad	Justifica la propiedad
Actividad 1	57	195	35	13
Actividad 2	70	197	24	9
Actividad 3	65	146	76	13
Actividad 4	96	158	27	19

Tabla 22: Respuestas clasificadas según la tecnología.

Anexo 5. Resultados por actividad de acuerdo a las técnicas

id	Descripción
s	Realiza la técnica esperada correcta
i	No realiza técnica, pero identifica de manera directa la propiedad
n	Realiza otra técnica incorrecta o no responde

Tabla 23: Categorías para las técnicas.

Actividad 1

	Estudiantes																																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**s**	**n**	**i**
a	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	**29**	**1**	**0**
b	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	**29**	**1**	**0**
c	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	**28**	**2**	**0**
d	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	**30**	**0**	**0**
e	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	**28**	**2**	**0**
f	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**
g	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**
h	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**
i	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**
j	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	n	s	n	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**

Tabla 24: Resultados de la técnica para la actividad 1.

Actividad 2

	Estudiantes																																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**s**	**n**	**i**
a	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	**29**	**1**	**0**
b	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	**29**	**1**	**0**
c	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	i	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	**27**	**2**	**1**
d	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	**27**	**3**	**0**
e	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	n	n	n	s	**26**	**4**	**0**
f	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	n	n	s	s	n	s	n	**22**	**8**	**0**
g	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	s	n	s	s	s	n	s	n	**22**	**8**	**0**
h	s	s	s	s	s	s	i	n	n	n	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	n	s	s	s	n	n	n	**20**	**9**	**1**
i	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	n	s	s	s	n	n	n	**21**	**9**	**0**
j	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	n	s	n	n	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	s	n	s	n	**20**	**10**	**0**

Tabla 25: Resultados de la técnica para la actividad 2.

Actividad 3

	Estudiantes																																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**s**	**n**	**i**
a	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	i	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	**29**	**0**	**1**
b	s	s	s	s	s	s	i	s	s	s	i	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	**27**	**1**	**2**
c	s	s	s	s	s	s	i	s	s	s	i	s	s	s	s	s	i	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	**25**	**2**	**3**
d	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	s	**28**	**2**	**0**
e	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	n	s	s	**27**	**3**	**0**
f	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	**25**	**5**	**0**
g	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	i	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	**23**	**6**	**1**
h	s	s	s	s	s	s	i	n	n	n	i	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	n	n	**19**	**9**	**2**
i	s	s	s	s	n	s	s	n	n	n	i	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	s	n	s	s	s	n	s	n	**19**	**10**	**1**
j	s	s	s	s	s	s	n	s	n	s	s	n	s	n	n	n	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	n	n	s	**21**	**9**	**0**

Tabla 26: Resultados de la técnica para la actividad 3.

Actividad 4

	Estudiantes																																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**s**	**n**	**i**
a	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	**27**	**3**	**0**
b	s	s	s	s	s	s	n	n	s	s	i	s	s	n	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	n	**23**	**6**	**1**
c	s	s	s	s	s	s	n	s	s	n	i	s	s	s	s	s	s	i	s	n	s	s	s	s	n	s	s	s	s	n	**23**	**5**	**2**
d	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	n	n	s	**26**	**4**	**0**
e	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	n	n	s	**26**	**4**	**0**
f	s	s	s	s	s	s	s	n	s	n	s	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	n	**23**	**7**	**0**
g	s	s	s	s	s	s	n	n	s	n	i	n	s	s	s	s	s	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	n	**21**	**8**	**1**
h	s	s	s	s	s	s	n	n	s	n	i	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	n	**20**	**9**	**1**
i	s	s	s	n	n	s	n	n	s	n	i	n	s	s	s	s	n	s	s	n	s	n	s	s	n	s	s	n	s	n	**17**	**12**	**1**
j	s	s	s	s	n	n	s	s	n	n	s	n	s	n	n	s	s	s	s	s	s	n	s	s	n	n	s	n	s	s	**19**	**11**	**0**

Tabla 27: Resultados de la técnica para la actividad 4.

Anexo 6. Resultados por actividad de acuerdo a las tecnologías

Id	Descripción
0	Responde incorrectamente o no responde
1	Responde sin justificar
2	Identifica la propiedad
3	Justifica la propiedad
4	Confunde axiomas

Tabla 28: Categorías para las tecnologías.

Actividad 1

	Estudiantes																																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
a	1	2	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**23**	**1**	**0**	**0**	6
b	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**28**	**0**	**0**	**1**	1
c	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	**24**	**2**	**0**	**0**	4
d	3	3	3	1	0	3	1	1	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1	0	0	2	1	0	2	**12**	**10**	**4**	**0**	4
e	2	3	3	2	2	2	2	2	4	0	1	2	2	0	2	1	2	2	1	2	2	2	2	1	0	1	0	2	2	2	**5**	**18**	**2**	**1**	4
f	1	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	**21**	**1**	**0**	**0**	8
g	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	0	1	0	**23**	**0**	**0**	**1**	6
h	1	2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	**23**	**1**	**0**	**0**	6
i	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	**23**	**0**	**0**	**0**	7
j	1	3	3	3	1	1	3	1	0	0	2	1	1	0	0	0	1	3	3	3	1	1	1	2	1	1	1	0	0	0	**13**	**2**	**7**	**0**	8

Tabla 29: Resultados de las tecnologías para la actividad 1.

Actividad 2

	Estudiantes																																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
a	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	**26**	**1**	**0**	**0**	3
b	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**28**	**0**	**0**	**0**	2
c	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**26**	**1**	**0**	**0**	3
d	1	3	2	1	1	3	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	0	0	0	2	0	0	0	1	**18**	**3**	**3**	**0**	6
e	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	1	2	0	2	2	1	2	2	2	0	0	1	2	0	0	0	1	**5**	**18**	**0**	**0**	7
f	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	**20**	**0**	**0**	**0**	10
g	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	**21**	**0**	**0**	**0**	9
h	1	1	1	1	1	0	2	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	**21**	**1**	**0**	**0**	8
i	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	**20**	**0**	**0**	**0**	10
j	1	3	3	3	1	1	3	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	3	3	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	**12**	**0**	**6**	**0**	12

Tabla 30: Resultados de las tecnologías para la actividad 2.

Actividad 3

	Estudiantes																																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
a	1	2	2	1	1	3	1	2	3	1	3	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**23**	**3**	**3**	**0**	1
b	2	2	2	4	4	0	3	1	1	1	2	1	1	1	4	2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	4	**18**	**5**	**1**	**4**	2
c	2	2	4	2	2	0	3	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	3	**15**	**10**	**2**	**1**	2
d	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	2	1	**1**	**27**	**0**	**0**	2
e	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	2	2	**0**	**26**	**0**	**0**	4
f	1	1	3	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	**24**	**0**	**1**	**0**	5
g	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	2	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	**20**	**1**	**0**	**0**	9
h	0	0	4	4	1	0	2	0	0	0	2	0	1	1	4	1	1	2	4	1	1	1	1	1	1	1	1	0	4	4	**13**	**3**	**0**	**6**	8
i	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	2	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	**18**	**1**	**0**	**0**	11
j	1	3	3	3	3	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	3	1	3	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	**14**	**0**	**6**	**0**	10

Tabla 31: Resultados de las tecnologías para la actividad 3.

Actividad 4

	Estudiantes																																		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**
a	1	1	3	3	1	3	3	1	3	0	0	3	0	1	1	0	0	1	1	0	3	3	1	1	0	1	1	0	1	1	**14**	**0**	**8**	**0**	8
b	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	**24**	**2**	**0**	**0**	4
c	1	2	1	1	1	0	1	1	1	0	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	**23**	**3**	**0**	**0**	4
d	0	0	0	0	1	3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	**8**	**2**	**2**	**0**	18
e	2	2	2	2	4	3	2	2	1	1	2	2	4	1	4	0	2	2	2	1	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	**4**	**15**	**1**	**3**	7
f	1	1	3	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	**24**	**0**	**1**	**0**	5
g	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	2	0	1	1	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	**20**	**2**	**0**	**0**	8
h	1	3	1	1	1	0	1	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	**16**	**2**	**1**	**0**	11
i	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	1	1	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	**17**	**2**	**0**	**0**	11
j	2	3	3	3	0	0	3	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	3	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	**6**	**1**	**6**	**0**	17

Tabla 32: Resultados de las tecnologías para la actividad 4.

Anexo 7. Tipo de abstracción por tecnología

id	Descripción
I	Interiorización
E	Encapsulación
G	Generalización
0	Ningún tipo de abstracción

Tabla 33: Categorías de los tipos de abstracción.

	Estudiantes																													
Tecnologías	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
θ1	I	E	G	G	I	G	G	E	G	I	G	G	I	I	I	I	I	I	I	I	G	G	I	I	I	I	I	I	I	I
θ2	E	E	E	I	I	I	G	I	I	I	E	I	I	I	I	E	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
θ3	E	E	I	E	E	I	G	I	I	I	E	I	E	I	E	E	E	E	E	I	I	I	I	I	E	I	I	I	I	G
θ4	G	G	G	E	E	G	G	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	G	E	E	E	E	E	E	E	E	E	I	E	E
θ5	E	G	G	E	E	G	E	E	E	E	E	E	E	I	E	I	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0	E	E	E
θ6	I	E	G	I	I	I	I	0	I	I	I	0	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	0	I	I
θ7	I	I	I	I	I	I	I	0	I	I	E	0	I	I	I	I	I	E	I	I	I	I	I	I	I	I	I	0	I	I
θ8	I	G	I	I	I	I	E	0	I	0	E	0	I	I	I	I	I	E	I	I	I	I	I	I	I	I	I	0	I	I
θ9	0	I	I	I	I	I	I	0	I	0	E	0	I	I	I	I	I	E	I	I	I	I	I	I	I	I	I	0	I	I
θ10	E	G	G	G	I	I	G	I	0	I	E	I	I	0	0	0	I	G	G	G	I	I	I	E	I	I	I	0	0	I

Tabla 34: Resultados de los tipos de abstracción por tecnología.

Anexo 8. Comparación entre actividades

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Actividad 1	29	29	28	30	28	23	23	23	23	23
Actividad 2	29	29	27	27	26	22	22	20	21	20
Actividad 3	29	27	25	28	27	25	23	19	19	21
Actividad 4	27	23	23	26	26	23	21	20	17	19

Tabla 35: Estudiantes que realizaron la técnica esperada.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Actividad 1	1	0	2	14	20	1	0	1	0	9
Actividad 2	1	0	1	6	18	0	0	1	0	6
Actividad 3	6	6	12	27	26	1	1	3	1	6
Actividad 4	8	2	3	4	16	1	2	3	2	7

Tabla 36: Estudiantes que manifestaron las tecnologías esperadas.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Actividad 1	23	28	24	12	5	21	23	23	23	13
Actividad 2	26	28	26	18	5	20	21	21	20	12
Actividad 3	23	18	15	1	0	24	20	13	18	14
Actividad 4	14	24	23	8	4	24	20	16	17	6

Tabla 37: Estudiantes que interiorizaron.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Actividad 1	1	0	2	10	18	1	0	1	0	2
Actividad 2	1	0	1	3	18	0	0	1	0	0
Actividad 3	3	5	10	27	26	0	1	3	1	0
Actividad 4	0	2	3	2	15	0	2	2	2	1

Tabla 38: Estudiantes que encapsularon.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Actividad 1	0	0	0	4	2	0	0	0	0	7
Actividad 2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	6
Actividad 3	3	1	2	0	0	1	0	0	0	6
Actividad 4	8	0	0	2	1	1	0	1	0	6

Tabla 39: Estudiantes que generalizaron.