UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas

LA REINTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestra en Didáctica de las Matemáticas

Presenta

Sugey Tatiana Sotomayor Cano

Dirigido por:
Dra. Lilia Patricia Aké Tec

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Presidente

Dr. Víctor Larios Osorio
Secretario

M.C Luisa Ramírez Granados
Vocal

M.D.M. Cecilia Hernández Garciadiego
Suplente

M.D.M. Ramón Torres Alonso
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Octubre 2020
México

DEDICATORIA

A mi familia por su amor incondicional

A mi esposo, por creer siempre en mí.

A mi hermano Jhon por ser un guerrero de Dios.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, le doy gracias a Dios por haberme permitido cumplir este anhelo.

Agradezco a la Dra. Lilia Aké Téc, mi directora de tesis, por su tiempo brindado, su paciencia, por sus enseñanzas y por su compromiso y dedicación constante en la realización y culminación de este trabajo.

Agradezco a mis profesores de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas por compartirme su experiencia y conocimientos y por aportarme a mi formación como profesional.

Agradezco a la Maestra Cecilia Hernández Garciadiego por su disponibilidad, por sus enseñanzas y compartir conmigo sus conocimientos acerca del programa Descartes. Sus contribuciones hicieron parte del Diseño y elaboración de un Vídeo tutorial, el cual es un trabajo derivado de esta tesis de maestría.

Agradezco a mi familia por su amor, su apoyo y motivación intacta, por estar siempre a mi lado y creer en mí. A Deimer Gómez Mejía, por darme fuerzas en los momentos más difíciles, por compartir mis sueños y hacerme feliz.

Agradezco a mis amigos y compañeros de Colombia, que a pesar de la distancia me han brindado su apoyo y cariño.

Agradezco a mis amigas, Ana y Montserrat por su apoyo incondicional y por darme motivación en los momentos difíciles.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) del gobierno de México por la beca otorgada para poder realizar mis estudios de maestría.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

Diversas investigaciones han reportado que gran cantidad de estudiantes obtienen derivadas, aplicando fórmulas sin comprender el algoritmo que aplican; lo que trae como consecuencia que la mayoría de ellos no logren una conceptualización formal de este objeto matemático y, por ende, presenten dificultad al resolver problemas de optimización, los cuales son tratados como aplicaciones de la derivada. En esta tesis de maestría se aborda esta problemática usando la Teoría Antropológica de la Didáctica y La Teoría de los Registros de Representación Semiótica.

La propuesta consistió en el diseño de una secuencia didáctica guiada, presentada en hojas de trabajo, cuya finalidad es que el alumno realice una reinterpretación del concepto de la derivada a través de la resolución de un problema de optimización sencillo. Es relevante mencionar, que la secuencia didáctica propuesta no pretendía poner a prueba los conocimientos de los alumnos acerca de este concepto matemático. Por el contrario, tiene la intención que éstos establezcan conexiones entre los distintos registros de representación, validen sus procedimientos con el empleo de tecnologías (praxeologías matemáticas) y de esta forma, favorecer una comprensión más amplia de la derivada.

Al concluir el estudio se evidenció que los estudiantes realizaron una reinterpretación parcial del concepto de la derivada, debido a que presentaron dificultades en establecer conexiones entre los diferentes registros de representación y la no justificación de los procedimientos empleados (técnicas utilizadas). Lo previamente expuesto implica incorporar cambios en las actividades y tareas que se les proponen a los estudiantes para promover una comprensión mediante los distintos registros de representación y uso de técnicas (procedimientos). También evidencia la necesidad de proponer tareas y actividades que demanden validaciones y explicaciones (tecnologías) a través de los cuales los estudiantes proporcionen sentido a su propia actividad matemática. Asimismo, el profesor debe modificar su papel en el aula, dejando atrás su carácter como trasmisor del aprendizaje y actuando como gestor del conocimiento.

Palabras claves: Problemas de optimización, registros de representación semiótica, praxeologías matemáticas, derivada, secuencia didáctica.

A NEW UNDERSTANDING OF THE DERIVATIVE CONCEPT IN SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS

ABSTRACT

Some research has reported that great deal of students solve derivatives without fully understanding the algorithm that they apply; as a result, most of them don't achieve a formal conceptualization of this mathematical tool and they show some difficulty solving the problems regarding optimization which have been treated as applications from the derivatives. In this master's degree thesis will cover this problem using the Theory of Registers of Semiotic Representation and the Anthropological Theory of the Didactic.

The proposal consisted in the planning of a guided didactic sequence presented in a syllabus in which the purpose is that the student performs an interpretation of the concept of derivatives through the resolution of an easy optimization problem. It's relevant to mention that sequence didactic proposal doesn't pretend to test the students their knowledge regarding this mathematical concept.

On the contrary, it has the intention that students must stablish connections among the different representations registers, so they can verify the steps in the application of technologies (mathematical praxeology) and ensure a broader understanding of the derivatives. At the end of the project, it revealed that the students were able to perform a partial reinterpretation of the concept of derivative due to the difficulties in stablishing connections among the different accountable representations and not the justification of procedure employed (applied techniques). What has been previously exposed, implied changes in the activities and homework assignments to the students, so this will promote an understanding through the different representation registers and the applied techniques. Also, it shows the necessity to propose homework and activities that demand validation and explanations (technologies) in which students shall propose a common sense of their applied mathematics. Likewise, the professor must modify his or her role in the classroom leaving behind its character as a learning transmitter educator and acting

as a project manager of knowledge.

Key Words: Optimization problems, semiotic representation registers, mathematical praxeology, derivative, didactic sequence.

INTRODUCCIÓN GENERAL

La presente investigación se centra en la reinterpretación del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas de optimización, a través de los diferentes registros de representación y con la identificación de praxeologías matemáticas. En este aspecto, la propuesta surge por el interés de proponer alternativas que permitan a los alumnos darle sentido a la noción de la derivada, ya que, en algunas ocasiones, como se ha evidenciado en las investigaciones de referencia, la adquisición de este concepto matemático está basado en la mecanización y en la algoritmia.

Dicha situación se presenta debido a que los estudiantes aprenden los procesos algorítmicos de la derivada, es decir, son capaces de resolver ejercicios en los cuales deben calcular la derivada de una función real usando las reglas usuales de la derivación, pero se les hace difícil resolver problemas de aplicación. Por lo tanto, para la comprensión del concepto de derivada, es deseable que se presenten problemas en escenarios contextualizados, en donde apliquen los métodos relacionados con la derivada para la resolución de dichos problemas.

En este orden de ideas, los problemas de optimización son considerados una de las aplicaciones más importantes en el cálculo diferencial, a través de éstos, el estudiante podrá encontrar el sentido a la noción de la derivada. De esta manera, en esta propuesta se le presenta a los alumnos un problema de optimización sencillo con el cual se encuentre familiarizado (problema relacionado con el concepto de área). Dicho problema, el alumno lo resolverá utilizando los registros en lengua natural, figural, numérico, algebraico y gráfico. También evidenciará el uso de las técnicas y tecnologías. Es así, como de esta forma, se pretende que el estudiante logre una comprensión más amplia del concepto de la derivada.

Esta tesis de maestría se ha organizado en 6 capítulos, cuyo contenido se describen brevemente a continuación:

En el primer capítulo se presenta la revisión exhaustiva de las investigaciones previas que sirven de antecedentes para este estudio. Se muestran estudios direccionados en tres ejes:

a) estudios de la derivada a través de la resolución de los problemas de optimización con el apoyo de la tecnología, b) investigaciones centradas en el análisis del concepto de optimización que aparece en algunos libros de textos del nivel bachillerato y c) investigaciones orientadas hacia el estudio de las dificultades que presentan algunos estudiantes de ingeniería al momento resolver un problema de optimización.

En el segundo capítulo se presenta una explicación detallada de la problemática, seguida de la pregunta de investigación que rige este estudio. También se establecen los objetivos y la hipótesis y luego la justificación en la que se fundamenta este trabajo.

En el tercer capítulo, se hace una descripción amplia del marco teórico que sustenta este estudio, el cual está conformado por la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) y la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD). En este sentido, el estudiante resuelve los problemas de optimización a través de los diferentes registros (natural, figural, numérico, gráfico y algebraico) y las praxeologías matemáticas (tarea, técnica, tecnología y teoría).

En el cuarto capítulo se presenta la metodología de la investigación. Este comprende la descripción de los sujetos participantes y el contexto, así como también el diseño, implementación y descripción de la propuesta. Dicha propuesta, consistió en la elaboración de una secuencia didáctica conformada que incluye 8 secciones, cuya resolución pone en juego el uso de los diferentes registros de representación y las praxeologías matemáticas. La secuencia fue aplicada a una muestra de 21 alumnos de sexto semestre de preparatoria de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.

En el quinto capítulo se describen los resultados de esta propuesta centrada en la reinterpretación del concepto de la derivada de los alumnos cuando resuelven el problema de optimización propuesto. El análisis de la secuencia didáctica se realizó de acuerdo con las diferentes técnicas y registros de representación empleados por los estudiantes cuando realizan cada una de las secciones que conforman la secuencia; así como las praxeologías matemáticas que surgen cuando los estudiantes justifican sus procedimientos (tecnologías de las técnicas).

En el sexto capítulo, inicialmente se presentan las conclusiones generales derivadas de la aplicación de la propuesta. Posteriormente, se resaltan las aportaciones o contribuciones de la propuesta a la docencia y a la enseñanza de la derivada, sin obviar las limitaciones y aspectos de mejora de ésta. Luego, se precisa sintetizar las conclusiones obtenidas relacionadas con el cumplimiento de los objetivos planteados, así como de la hipótesis. Se concluye el capítulo, describiendo algunas líneas abiertas sobre las cuales se puede continuar con el trabajo iniciado.

Se espera que este trabajo contribuya significativamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de las actividades planteadas en esta propuesta y de esta manera, los alumnos puedan adquirir y utilizar el concepto de derivada desde un diferente tipo de registro y además, constituya una herramienta didáctica relevante para los docentes al momento de enseñar la noción de derivada.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

En este apartado se presenta una perspectiva general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática referentes a la problemática en la que se centra este estudio; el aprendizaje del concepto de derivada en los estudiantes a través de la algoritmia y la mecanización.

Las investigaciones de referencia que se presentan están organizadas según su enfoque en tres grupos:

- Investigaciones sobre problemas de optimización con el uso de la tecnología.
- Investigaciones sobre problemas de optimización en los libros de textos.
- Investigaciones sobre problemas de optimización sin el uso de la tecnología.

1.1. INVESTIGACIONES SOBRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

En estas investigaciones se destaca el estudio de Camacho y González (1998) en donde se presenta una clasificación de los tipos de problemas de optimización que aparecen en los libros de textos y se desarrollan algunas sugerencias didácticas para su resolución utilizando como recurso la calculadora gráfica TI- 92. Los autores plantean que el uso de este recurso tecnológico permite a los alumnos trabajar con distintos tipos de representación (numérico, gráfico y algebraico) lo que conlleva a enriquecer el planteamiento y el razonamiento en la resolución de los problemas. Mencionan que, debido al gran aporte de las calculadoras gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas de este tipo, se hace necesario analizar el currículo de Secundaria y Bachillerato desde otra perspectiva, dado que los aspectos exclusivamente instrumentales propios de las matemáticas, con una de estas calculadoras no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Además, se aportan resultados de diversas investigaciones que concluyen que los alumnos con los que se realiza un trabajo experimental con calculadoras gráficas obtienen una mayor comprensión conceptual que aquellos con los que se desarrolla un trabajo tradicional.

En Dávila (2010) se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada, dirigida a estudiantes del curso "Calculo Diferencial e Integral I" del área de Ingeniería de la Universidad de Sonora. La propuesta tuvo como finalidad promover la construcción de significado de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, a través de la resolución de problemas de optimización de contexto extramátematico, con el apoyo de ambientes dinámicos creados con el software de geometría dinámica Geogebra. El estudio se fundamentó en el Enfoque Ontosemiótico, el cual facilitó el diseño de las actividades didácticas y valoración de las mismas.

Durante la puesta en escena de las actividades, el autor constata que el objetivo de la propuesta se alcanzó, debido a que se observó que realmente los estudiantes modelaron el fenómeno implicado, en diferentes formas de lenguaje; propusieron calcular más valores de la variable independiente para encontrar el valor extremo y con ayuda de la hoja de cálculo se aproximó la solución numérica al problema; se analizó el comportamiento de las magnitudes involucradas utilizando la recta tangente y su pendiente; y se caracterizaron, con estas últimas, los valores extremos y la monotonía de la función involucrada.

Por su parte, Otero (2012) presenta una propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software Geogebra. Para el desarrollo de este trabajo, el autor plantea tres actividades que el estudiante debe desarrollar con el fin de que logre identificar los pasos para resolver problemas de optimización, de tal forma que este proceso no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso. Las dos primeras actividades se realizaron en el salón de clases y la tercera en la sala de sistemas con la ayuda de Geogebra, donde se presenta un problema de minimización de costos y los estudiantes responden unas preguntas por medio de la observación y la manipulación del *applet*. El autor concluye que el desarrollo y planeación de las actividades permitió al alumno realizar el tránsito del registro en lengua natural al algebraico y, además resalta que durante la implementación de la actividad, utilizando la herramienta tecnológica los estudiantes reflejan una mayor receptividad a la hora de resolver los problemas de optimización propuestos.

Por otro lado, Sepúlveda (2013) presenta dos problemas de optimización que involucran la noción de variación, analizados desde la perspectiva de la resolución de problemas y la incorporación del *software* DERIVE como un medio que potencia el aprendizaje de los estudiantes. Los problemas son abordados desde diferentes perspectivas, numérica, algebraica y geométrica. Los objetivos al presentar un análisis desde diferentes procedimientos de solución a estos problemas son: exhibir a los estudiantes distintos acercamientos a situaciones, proporcionar al profesor elementos que le permitan proponer trayectorias hipotéticas de aprendizaje vinculadas con los conceptos que se requieren para abordar el problema y comprenderlo, así como proveer de elementos al docente para identificar los momentos en los cuales puede intervenir en el proceso de resolución para encauzar o enfatizar conceptos o habilidades matemáticas. Se concluye que el análisis de cada tarea o problema desde diferentes heurísticas, integrado con los objetivos de aprendizaje y con el proceso hipotético de aprendizaje, proporciona al profesor información relevante para establecer las directrices que debe dar a los estudiantes para resolverlo y desarrollar el conocimiento matemático deseado.

En este contexto, se menciona la investigación de Carajulca (2013) aplicada a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad Privada del Norte de Lima. Carajulca propone el tratamiento de los problemas de optimización mediante el uso del *software Cabrí-Géomètre II y Cabrí 3D*, para articular los tipos de representaciones semióticas que presentan los estudiantes, al resolver problemas de optimización enunciados en el lenguaje verbal y cuyos modelos matemáticos resultan ser funciones cuadráticas o cúbicas. En la parte experimental se evidenció, que la dificultad que presentan los alumnos consiste en pasar del registro verbal al algebraico, motivo por el cual el autor considera de gran utilidad el uso de estos *software*, ya que a través de éstos se pueden hacer construcciones y representaciones de tipo verbal, algebraico y gráfico.

Navarro (2014) da a conocer una secuencia didáctica apoyada en la tecnología para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización. Se plantea una actividad a alumnos de Educación Superior con hoja de trabajo, manipulable físico y archivo de Geogebra para resolver un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana, basándose en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico para el análisis didáctico de la actividad. Se establece que el *software* facilita la visualización de la gráfica de la función que describe la situación problema y la representación de la figura geométrica que interviene. Se determina que la actividad contribuye a que los estudiantes identifiquen las variables involucradas y la pendiente de la recta tangente igual a cero en un punto crítico. Este tipo de actividad permite establecer las bases para la construcción del concepto de derivada por medio de la pendiente de la recta tangente con el apoyo de la tecnología.

Por otra parte, Díaz (2014) propone una simulación y modelación de problemas de optimización del Cálculo Diferencial con la hoja de cálculo de Excel. El autor considera que este tipo de herramienta tecnológica facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, debido a que posee tres registros de representación (algebraico, gráfico y tabular). Menciona que el propósito, para mejorar la enseñanza de los problemas de optimización consiste en que los alumnos sean capaces de desarrollar la habilidad de elegir la representación más adecuada, pasar de una a otra y que reconozcan la importancia o valor de ver un cierto problema desde diferentes puntos de vista. De esta manera, establece que el uso adecuado de actividades de simulación y modelación diseñadas en la hoja de cálculo permite generar destreza en el planteamiento de los problemas, lograr que los alumnos se familiaricen con los procesos abstractos y desarrollen la habilidad de cambiar entre los distintos sistemas de representación. Finalmente, sugiere utilizar estas representaciones junto con una estrategia didáctica de enseñanza para facilitar un procesamiento más profundo del tema. Estrategias que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones, construir y descubrir el conocimiento por sí mismos.

En este mismo contexto, se sitúa la investigación de Rojas, Báez y Corona (2017) quienes muestran una propuesta didáctica a través de la cual presentan algunas actividades para resolver problemas de optimización en Cálculo Diferencial, con el apoyo de software como Excel y Geogebra. Luego de implementarse esta propuesta, se comprobó que el uso de representaciones en la computadora para conocer el comportamiento de una función y resolver diversos problemas de optimización, cobra importancia debido a que en el aula se tienen estudiantes con diferentes formas de aprendizajes. Asimismo, que la inclusión de las TICS a los procesos de enseñanza ayuda a que el aprendizaje sea más divertido y constructivo, ya que los estudiantes al momento de interactuar con algún *software*, intercambian ideas, comentarios con sus compañeros de clases, y entre ellos se explican y corrigen, y solo en caso de duda, consultan al profesor.

En el mismo marco de investigaciones, Deudor (2017) presenta un trabajo cuantitativo y de tipo experimental, centrado en el estudio del uso del ***software*** DERIVE y su influencia en el aprendizaje de las aplicaciones de la derivada de una función en la asignatura de matemática II en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Ricardo Palma de Lima. La parte experimental consistió en la elección de dos grupos conformados por 20 estudiantes cada uno, uno de éstos se definió como grupo control mientras el otro como el experimental, a ambos se le enseñaron los contenidos de la Derivada desde su definición hasta su aplicación práctica. Dichos temas se enseñaron al grupo experimental a través del *software* DERIVE, en concordancia con la respectiva programación curricular, al grupo control se le enseñaron dichos temas sin el mencionado *software*, según el método tradicional, con plumón y pizarra. Los resultados de la investigación demostraron que el uso del programa DERIVE mejora significativamente el aprendizaje conceptual, actitudinal y procedimental de la derivada de una función, en los estudiantes integrantes de la muestra.

Por otro lado, se resalta la investigación realizada por Cruzado (2018), quien presenta una investigación que tiene como finalidad analizar de qué manera, estudiantes de diferentes carreras de ingeniería coordinan registros de representación semiótica al resolver problemas de optimización, utilizando el concepto de derivada de funciones reales de variable real. Este estudio toma como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Para la parte experimental de la investigación se elaboraron dos problemas de optimización utilizando Geogebra, los cuales fueron aplicados a estudiantes de Ingeniería Mecánica de una universidad nacional peruana. El análisis de los resultados logrados por los estudiantes evidenció que hay dificultades al momento de coordinar el registro figural, algebraico, gráfico y en lengua natural. Se concluyó que los problemas de optimización propuestos favorecen dicha coordinación.

Portillo, Ávila, Cruz y López (2019) presentan una propuesta para la enseñanza del Cálculo Diferencial con el uso del *software* Geogebra como herramienta didáctica en el aprendizaje de la derivada con problemas de optimización. La propuesta consiste en el diseño de dos actividades en las cuales se explotan las cualidades gráficas, numéricas y algebraicas del software para analizar la variación y el concepto de derivada. Se concluye que el uso adecuado de las distintas representaciones semióticas de un concepto matemático ayuda a una mejor comprensión del mismo.

1.2. INVESTIGACIONES SOBRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LOS LIBROS DE TEXTOS

Dentro de esta categoría se sitúa el estudio de González y Sierra (2004) quienes consideran las investigaciones sobre libros de texto como un método eficiente para el estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje. De esta forma, los autores muestran la evolución del trato de los puntos críticos en los libros españoles de la enseñanza secundaria a lo largo del siglo XX según las formas de expresión matemática que en ellos se incluyen y presentan una metodología para el análisis de los libros, la cual consiste en clasificarlos en las categorías: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y sociocultural y en las dimensiones: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. Concluyen que el tipo de orientación de los libros no depende de los planes de estudio en los que se encuadre, por el contrario, son los propios libros de texto los que establecen el tipo de actividad que debe ejercer el alumno y la forma en que se estructuran los conceptos matemáticos.

Malaspina (2008) centra su atención en la manera cómo están tratados los problemas de optimización en los libros de texto de matemáticas de secundaria en el Perú. El autor menciona que de la cantidad de problemas que se presentan en los libros, son muy pocos los de optimización y con respecto a la resolución de éstos, lo que predomina es brindar al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, de modo que estimulen su intuición y creatividad. En particular, cuando se usan las palabras "mínimo" y "máximo" no se hace tomar conciencia del significado de estos conceptos en el contexto que se está usando, ni hay énfasis en la verificación de que lo obtenido es realmente óptimo.

Luego, es importante proponer problemas de optimización en la educación básica del Perú, de manera que se estimule una intuición optimizadora que permita desarrollar las funciones de conjeturar, anticipar y concluir y que simultáneamente preste atención a educar en la formalización y el rigor, como una actitud científica que complementa la intuición.

Por otro lado, González (2011) realiza una revisión de los conceptos de máximo y mínimo tal como aparecen en el libro de L'Hôpital. La necesidad del estudio se justifica por la pérdida del origen y sentido de los conceptos de Análisis Matemático que, tal como se tratan en la enseñanza actual se han algebraizado perdiendo el carácter geométrico-dinámico de sus orígenes. Para el análisis de estos conceptos se consideran los siguientes puntos de interés para caracterizar el texto analizado: contextualización de la obra e intencionalidad del autor, estructura del material, organización de los conceptos e interpretación heurística, dentro de la cual se contemplan aspectos epistemológicos, socioculturales y didácticos que permiten caracterizar la forma en la que se presentan los conceptos en el libro analizado. La revisión realizada del texto ofrece una visión del Análisis Matemático muy distinta de la que se presenta en la educación actual y se plantea que el carácter geométrico-dinámico que dio origen a esta rama de las matemáticas podría recuperarse utilizando, en la enseñanza, *software* de geometría dinámica que, además, permitiría el estudio de funciones y curvas complejas relacionadas con las aplicaciones que dan sentido a estos conceptos.

Balcaza (2018) realiza un estudio centrado en los problemas de tipo didáctico que surgen en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas asociadas con la optimización que se resuelven con las herramientas del Cálculo Diferencial (problemas de máximos y mínimos), utilizando instrumentos teóricos que facilitan el Enfoque Ontosemiótico y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Posteriormente, el autor realiza un breve estudio histórico-epistemológico de la optimización, buscando las configuraciones epistémicas acerca de la misma, con el fin de llegar a un significado global de la optimización. En segundo lugar, determina el significado pretendido que emana de los libros de texto, realizando así, un análisis epistémico de la unidad didáctica referida a este contenido y un análisis Ontosemiótico de los problemas resueltos, identificando los conflictos semióticos potenciales. En tercer lugar, realiza una adaptación del significado de optimización mediante el análisis de los apuntes de clase y su correspondencia con el deducido del análisis de los manuales. Por último, caracteriza el significado personal analizando la resolución que presentan los estudiantes de la Universidad de Jaén (España) sobre varios problemas de optimización, mediante los registros de representación semiótica y la configuración Ontosemiótica. Los resultados evidenciaron los vacíos de significado y los conflictos semióticos que presentan los estudiantes de este nivel educativo.

1.3. INVESTIGACIONES SOBRE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN SIN EL USO DE LA TECNOLOGÍA

De las investigaciones revisadas referidas a los problemas de optimización de funciones reales y en las que no se usa tecnología, se presenta la de Malaspina (2008) quien realiza un estudio con el fin de analizar cuál es el papel de la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización en alumnos de la carrera de economía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La parte experimental de este trabajo permitió evidenciar la existencia de una intuición optimizadora, puesto que se percibieron en los estudiantes deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización propuestos; y una deficiencia específica en la argumentación, es la poca presencia de justificación de que el resultado que obtienen es óptimo; y es más notoria al resolver problemas de variaciones discretas.

Por otro lado, Álvarez (2012) realiza un estudio centrado en la estrategia de aprendizaje llamada “actividades reveladoras del pensamiento” (MEA, Model-Eliciting Activities, por sus siglas en inglés) y su influencia que lleva al correcto razonamiento del alumno respecto a la materia de Cálculo Diferencial. En este sentido, se propone la aplicación de una actividad reveladora de pensamiento a alumnos de la carrera de Ingeniería de Sistemas del Instituto Tecnológico Superior de Rio verde, San Luis Potosí (México) cuya finalidad consistía en examinar si las respuestas de los estudiantes a las actividades reveladoras de pensamiento sobre la aplicación de la derivada mediante máximos y mínimos ayudan al desarrollo del pensamiento matemático. Se concluye que Tanto la teoría como los resultados obtenidos indican que sí es posible con la actividad reveladora del pensamiento incentivar el aprendizaje de los alumnos para que ellos puedan observar una de las aplicaciones de las Matemáticas a situaciones de la vida real; y que al comparar con situaciones similares a otros problemas puedan posteriormente plantear y resolver problemas que se les puedan presentar en el futuro ya sea laboral o en la misma escuela en semestres más avanzados de su carrera.

Malaspina (2012), destaca la importancia de desarrollar, desde los primeros grados de educación, el pensamiento optimizador de los futuros ciudadanos; máxime considerando que tendrán que desenvolverse en entornos sociales competitivos. Para esto, propone secuencias didácticas con problemas de optimización que requieren pocos conocimientos matemáticos para resolverlos, en contextos lúdicos y con muchas potencialidades didácticas y matemáticas, aplicables en clases de educación básica y en cursos de formación de profesores. Las secuencias de actividades se desarrollaron con estudiantes de primero y segundo grado de secundaria de un colegio parroquial de un distrito de clase media en Lima (Perú) y se evidenció que la mayoría de los alumnos tienen una percepción positiva de las actividades, hacen una representación figural del problema y realizan algunos cálculos. También se reflejó que alrededor del 50% de los estudiantes no dio una explicación del porqué su resultado es óptimo a pesar de que en las actividades se les pide claramente esta explicación, lo cual se debe a no tener experiencias con el concepto máximo y por otra parte un contrato didáctico en el aula que no enfatiza la justificación de los resultados. Los autores consideran que las experiencias didácticas llevadas a cabo muestran que los problemas de optimización adecuadamente presentados ofrecen valiosas oportunidades para desarrollar el pensamiento optimizador en los alumnos y que tienen muchas potencialidades didácticas.

Por otra parte, Scott (2012) realizó un estudio con cinco estudiantes que cursaban la asignatura de Cálculo AP pertenecientes a escuelas secundarias (East High School Y West High School) localizadas en el condado de Georgia. Se realizaron entrevistas a los estudiantes a través de las cuales se le cuestionó que pensaban acerca del curso de Cálculo y si los conceptos enseñados en este curso les serian útil en sus planes futuros con respecto a la universidad. Luego de conocer la disposición de cada estudiante frente al curso de Cálculo, se les pidió que resolvieran tres problemas de optimización, proceso en el que se evidencio que los estudiantes no utilizaron el concepto de derivada para hallar los valores óptimos, también presentaron dificultad en identificar las variables involucradas en dichos problemas, situación que les dificulto hallar la función objetivo y además algunos trataron de resolver el problema utilizando estimaciones, obteniendo de esta forma resultados equívocos. Frente a esta problemática, se hacen necesarias futuras investigaciones que ayuden a los estudiantes superar este tipo de dificultades mientras resuelven problemas de optimización.

En este mismo contexto, Aldana y Gallego (2013) realizan un estudio diagnóstico denominado “Análisis de la concepción de la actividad de optimizar desde una ingeniería didáctica”. Este estudio se apoya en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, ya que la intención fue indagar acerca de los conocimientos que tienen los estudiantes sobre el concepto de optimización, así como la forma como aplican esta noción en la solución de problemas. El estudio se realizó con diez estudiantes de Ingeniería, quienes ya habían recibido explicaciones sobre el concepto de optimización en un curso de Cálculo diferencial. El instrumento empleado en este estudio fue un guion de entrevista, el cual sirvió para conocer lo que los estudiantes habían entendido sobre la noción de optimización. En la entrevista se evidenció que la mayoría de los estudiantes tienen una imagen mental del concepto desde un punto de vista intuitivo y gráfico, ya que, al definir el concepto, utilizaron un lenguaje cotidiano, en vez de un lenguaje formal.

Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2014) presentan un análisis de los obstáculos en la construcción de significados que dificultan la resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Este análisis permitió evidenciar que la mayoría de las dificultades que presentan los alumnos se deben al empleo inapropiado de los procedimientos asociados a dichos problemas, además, se observaron falencias en los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar o validar estos procedimientos y, por último, se identificaron conflictos semióticos subyacentes que resultaron elementos fundamentales para el diseño de una experiencia didáctica que tuvo como propósito producir una mejora en los aprendizajes relacionados con la resolución de dichos problemas.

Dentro del marco de estudios similares, Martínez (2014) propone el diseño de una secuencia basada en optimización para la enseñanza del Cálculo Diferencial en formación de ingenieros industriales del Instituto tecnológico de colima (México). Para esto, realizó un análisis del plan de estudios de la carrera y entrevistas a profesores responsables de la enseñanza del Cálculo Diferencial para dar cuenta de cómo se enseña la optimización, identificar los libros de Cálculo considerados como apoyo y el tipo de problemas propuestos para su aplicación.

El resultado de dicho análisis evidenció que los problemas de optimización que resuelven los estudiantes son los de los libros de textos por ejemplo maximizar/minimizar perímetros, áreas, volúmenes, algunas demostraciones matemáticas y muy pocos manejan aplicaciones a la economía, lo cual facilita la presentación del tema de optimización a los alumnos pues la mayoría conocen dichos conceptos, pero al mismo tiempo esta situación representa una limitante porque el contexto de los problemas no es ingenieril y en realidad no aporta mucho a la formación de un futuro ingeniero. En este sentido, la secuencia didáctica es propuesta en un contexto que simula el de una empresa ingenieril y más en particular una reunión de tres ingenieros que deben determinar el mínimo costo para un inventario. Se concluye que las actividades permitieron movilizar la técnica de optimización en un contexto de la formación de especialidad de los ingenieros industriales.

Las investigaciones, antes mencionadas, proporcionan excelentes aportes a nuestra investigación, pues muestran las principales dificultades que tienen los estudiantes para resolver problemas de optimización. Las pesquisas también evidencian las dificultades en la comprensión de la derivada de funciones reales de variable real. Por lo tanto, es importante que los estudiantes comprendan este concepto matemático de derivada para dar sentido no solo al cálculo de la derivada en situaciones descontextualizadas sino también en problemas de optimización.

CAPÍTULO 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los métodos tradicionales de la enseñanza del cálculo diferencial tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, que termina siendo monótona; así, Dolores (2007, citado en Rojas et al, 2017) reporta que una gran cantidad de estudiantes obtienen derivadas, aplicando fórmulas sin comprender el algoritmo que aplica; lo que trae como consecuencia que la mayoría de ellos no logren una conceptualización formal de este objeto matemático y, por ende, presenten dificultad al resolver problemas de optimización, los cuales son tratados como aplicaciones de la derivada.

Con respecto a los problemas de optimización, los estudiantes se les dificulta traducirlos del lenguaje cotidiano al algebraico, lo cual les impide realizar una formulación adecuada de un modelo matemático, que les permita encontrar una solución óptima al problema. Cabe mencionar, que la mayoría de los docentes enseñan este contenido matemático haciendo uso solo de procesos algorítmicos y algebraicos, y no utilizan otro tipo de representaciones. Por tal motivo, los alumnos resuelven los problemas de optimización utilizando los criterios de máximos y mínimos de una función (representación algebraica), sin analizar, ni justificar sus procedimientos.

Adentrándonos en la problemática, podemos generalizar que una de las razones principales, por la cual a los estudiantes se les dificulta resolver problemas de optimización es debido a que no son conscientes del concepto formal de derivada de funciones reales de variable real, y de las implicaciones de esta noción para la resolución de este tipo de problemas.

Con base en esto, surge la presente investigación con la finalidad de que los estudiantes puedan reinterpretar la noción de derivada desde diferentes registros de representación, mediante la resolución de los problemas de optimización, los cuales se constituyen en escenarios fundamentales para que el alumno logre un significado global de la derivada, y no sea vista solamente desde un tratamiento algebraico como sucede en la mayoría de los casos.

2.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Luego de haber presentado las investigaciones de referencia y la descripción de la problemática. Se presenta la siguiente pregunta que guía esta investigación:

¿Cómo reinterpretan los estudiantes el concepto de derivada a través de las representaciones y praxeologías matemáticas en problemas de optimización?

2.3. HIPÓTESIS

En atención a la pregunta de investigación: ¿cómo reinterpretan los estudiantes el concepto de derivada a través de las representaciones y praxeologías matemáticas en problemas de optimización?, la hipótesis plantea lo siguiente:

Hipótesis: Mediante el uso de los diferentes registros de representación los estudiantes son capaces de reinterpretar un significado de la derivada manifestado a través de sus praxeologías.

2.4. OBJETIVO GENERAL

Analizar la reinterpretación que los estudiantes realizan sobre el concepto de derivada a través del uso de diferentes representaciones y el análisis de praxeologías matemáticas en el contexto de los problemas de optimización.

Con la finalidad de alcanzar el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos

2.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

OE1. Diseñar actividades que les permita a los estudiantes reinterpretar el concepto de derivada a través del uso de diferentes registros de representación semiótica con problemas de optimización y el estudio de las praxeologías matemáticas.

OE2. Identificar las reinterpretaciones que tienen los estudiantes sobre la derivada al momento de resolver problemas de optimización.

OE3. Caracterizar las reinterpretaciones de los estudiantes en términos de praxeologías matemáticas (técnica, teoría y tecnología) según los registros de representación.

2.6. JUSTIFICACIÓN

La mayoría de los estudiantes resuelven ejercicios donde se les pide calcular la derivada de una determinada función real, con frecuencia, de forma automática, aplicando las reglas usuales de derivación sin realmente concientizarse de las implicaciones de este concepto matemático. Por tanto, se puede decir que una de las razones por las cuales ocurre esta sistematización continua, es debido a que prevalece la visión sistemática algebraica de la derivada, tanto en el cálculo de funciones en escenarios descontextualizados, como en escenarios de problemas de optimización.

En torno a los problemas de optimización, las dificultades presentadas por los estudiantes están asociadas al planteo, análisis y resolución de éstos (Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto, 2014). Lo previo provoca que el conocimiento alcanzado por los estudiantes sobre el concepto de optimización es de tipo intuitivo, ya que está asociado a la gráfica de la función, es decir que entienden la optimización como el punto más bajo o alto de la gráfica, para lo cual aplican el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos o mínimos (Gallego y Bermúdez, 2014).

Por otra parte, Rojas, Báez y Corona (2017) señalan que los estudiantes presentan dificultad en entender y resolver problemas sobre la derivada si no están en un escenario de contextualización. Por lo que estos autores consideran que si desde el inicio del curso de cálculo diferencial, se planteará un problema contextualizado sobre optimización, el avance cotidiano de conocimientos capacitaría al estudiante para entenderlo y resolverlo.

Siguiendo con la idea, el hecho de que los estudiantes no tengan una noción más amplia de la derivada se debe a que en la mayoría de los casos la enseñanza del Cálculo está basada en el dominio de la algoritmia, lo que genera que éste carezca de sentido para los alumnos y que tengan conceptos pobres de los objetos matemáticos, Navarro (2014).

Las investigaciones previas pretenden poner de manifiesto las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de optimización, pero sobre todo la persistencia de éstas debido a la implicación del concepto de derivada. De esta manera, con el fin de saber cómo reinterpretan los alumnos el concepto de derivada en la resolución de problemas de optimización, surge la presente investigación, la idea es que los estudiantes puedan establecer una conexión entre los diferentes registros de representación, y de esta forma alcancen un aprendizaje con sentido del tratamiento algebraico de la derivada.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

La presente Investigación se fundamenta en dos marcos teóricos: la Teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) y la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD).

3.1. TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Según (Duval, 2017) el aprendizaje de las matemáticas comprende actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos; la esencia del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas necesiten de la utilización de distintos registros de representación y de expresión: variedad de sistemas de escritura para los números, escritura algebraica, figuras geométricas, representaciones en perspectivas, gráficos cartesianos símbolos, etc.

Asimismo, el autor afirma que la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos hace imposible acceder a estos de manera directa (sensorial o instrumentalmente); no tienen una posibilidad ostensiva y la única manera de acceder a ellos es mediante sus representaciones, realizadas en sistemas semióticos determinados, las cuales pueden ser manipuladas y transformadas. No obstante, advierte Duval, que para que exista una comprensión en matemáticas, es esencial no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones, debido a que un objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes.

De acuerdo con lo anterior (Duval, 2017), señala que las representaciones semióticas son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a otras personas. Refiriéndose al aprendizaje de las matemáticas establece que las representaciones semióticas son producciones que hace un sujeto a partir de representaciones mentales para representar un objeto matemático mediante signos que tienen su propia significación y funcionamiento dentro de un sistema de representación. Cabe mencionar que la utilización de representaciones semióticas no solo es necesaria para fines de comunicación, también es fundamental para la actividad matemática misma y parece serle intrínseca.

Por otra parte, (Duval, 2017) identifica una actividad ligada a producción de representaciones y otra ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados. Llama semiosis al primer tipo de actividad y noesis al segundo tipo de actividad. Además, postula que la actividad de producción de representaciones es la que permite la comprensión, es decir, la semiosis es la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis. En este sentido, el autor afirma: "No *hay noesis sin semiosis"* (Duval, 2017, p.46).

Para que un sistema semiótico sea un sistema de representación, según Duval (2017), debe permitir la realización de las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

Formación: Esta actividad consiste en la identificación de una representación en un registro dado, lo cual implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar.

Tratamiento: Esta actividad alude a la transformación de una representación en el mismo registro, en este sentido, se conserva todo el contenido de la representación inicial.

Conversión: Esta actividad consiste en la transformación de la representación de un objeto de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. En otras palabras, la conversión es una transformación externa respecto al registro de la representación inicial.

Con respecto a estas tres actividades cognitivas, el autor menciona algunas ventajas de trabajar con representaciones semióticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos:

- Un aprendizaje basado en el cambio y en la coordinación de los distintos registros de representaciones genera efectos magníficos sobre las macro-tareas de producción y comprensión como la lectura, escritura y resolución de problemas, pues los resultados de dichas tareas son observables y fácilmente interpretables en un registro dado.

- Una comprensión integradora, es decir una comprensión centrada en la coordinación de los registros de representación permite la transferencia de los conocimientos adquiridos por los estudiantes, generando así el dominio de nuevos conceptos.
- Las actividades de tratamiento y conversión son relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, debido a que permiten obtener nueva información, propiedades y extraer nuevo conocimiento de los objetos, ideas y conceptos representados.
- Cada registro de representación resalta unas características y propiedades determinadas del objeto matemático, obteniendo como resultado una configuración del concepto en toda su extensión y profundidad.
- El hecho de presentar los objetos matemáticos a través de sus múltiples representaciones permite atender a las singularidades de aprendizaje de cada alumno, optando por unas u otras, y coordinándolas en función de sus estilos cognitivos.

Con respecto a las limitaciones que presentan los estudiantes en el uso y comprensión de las representaciones semióticas se pueden enunciar las siguientes:

- La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más complicada de adquirir para la gran mayoría de los alumnos, debido a que a éstos se les dificulta realizar una integración y conexiones entre las representaciones, convirtiéndose esta situación en un obstáculo para el aprendizaje de nuevos conceptos.
- La comprensión mono- registro, es decir aquella en la que la que la adquisición de conocimientos está ligada a la formación y al manejo de representaciones efectuadas en un solo registro, genera un obstáculo en la mayoría de los estudiantes, debido a que los hace incapaces de movilizar los conocimientos adquiridos y, por tanto, aquellos que ellos saben.

Además, según (Duval, 2017) en la actividad matemática se encuentran presentes diferentes registros de representación semiótica, así tenemos el registro de lengua natural, el registro tabular, el registro algebraico, el registro figural y el registro gráfico, que se sintetizan a continuación:

- Registro en lengua natural: Este registro se manifiesta de manera oral o escrita, es decir si se quiere modelar matemáticamente un fenómeno o situación se debe partir de una descripción de este ya sea de manera oral o escrita.
- Registro figural: Este registro involucra esquemas, bosquejos, líneas y figuras geométricas.
- Registro tabular o numérico: pone de manifiesto los aspectos numéricos.
- Registro algebraico: En este registro un objeto matemático se puede representar por medio de expresiones algebraicas.
- Registro gráfico: Este registro se usa para representar un objeto matemático usando un sistema de coordenadas cartesianas.

En este sentido, en el presente estudio se plantea un problema de optimización con la finalidad que el estudiante lo resuelva utilizando diferentes registros de representación y así pueda lograr una reinterpretación de la noción de la derivada, que en la mayoría de las ocasiones es percibida por el estudiante desde un solo registro de representación.

3.2. LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA

La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard (1999) concibe el saber matemático como el resultado de un proceso de estudio de la actividad matemática, dicho proceso conduce a la construcción o reconstrucción del conocimiento matemático.

Por otro lado, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) mencionan que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos propios del proceso de estudio de las matemáticas, concibiendo la palabra "estudio" en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también "estudia" problemas de matemáticas.

Lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el estudio y con la ayuda al estudio de las matemáticas, identificándose entonces *los fenómenos didácticos* con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. (Chevallard, Bosch y Gascón ,1997, p.47).

Dentro del punto de vista general del conocimiento matemático, se propone la noción de **organización praxeológica matemática** o praxeología matemática (o simplemente organización matemática) como modelo único para describir el conocimiento matemático. La noción de praxeología matemática concierne a la concepción del **trabajo matemático** como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas. Pero éste no es el único aspecto del trabajo matemático. En efecto, el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en "tipos de problemas", entender, describir y caracterizar las técnicas que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso, se propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas funcionan o dejas de ser aplicables y, en última instancia aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder.

Los modelos de praxeologías están integrados por cuatro elementos distintivos que estructuran el saber matemático en dos bloques, uno práctico – técnico y otro tecnológico – teórico:

- El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la praxis o saber-hacer, es decir a los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen y utilizan para abordarlos.
- El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos logos o simplemente saber. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso tecnológico (la razón, logos, de la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la teoría que da sentido a los problemas planteados permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones u demostraciones tecnológicas

De ahí proviene la noción de praxeología, que resulta de la unión de los dos términos praxis y logos. Tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría son pues las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología matemática. Para fines de esta investigación, las tareas estarán organizadas con base en una praxeología matemática, la cual les permitirá a los estudiantes justificar sus procedimientos al resolver los problemas de optimización.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

4.1. ENFOQUE METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

Este estudio tiene un enfoque primordialmente cualitativo; es decir, comprende los significados e interpreta prácticas en ambientes naturales desde el punto de vista de quienes la experimentan (Hernández, Baptista y Fernández, 2010). El carácter de la investigación es de tipo descriptivo (Creswell, 2013).

Esta investigación pretende identificar y describir cómo los estudiantes a través de una secuencia didáctica diseñada realizan una reinterpretación del concepto de la derivada en la resolución de problemas de optimización. De esta forma, el análisis de las soluciones generadas por los estudiantes obedece a las descripciones de los procesos empleados por éstos al momento de resolver dichos problemas.

4.2. MUESTRA Y CONTEXTO

Los participantes de esta investigación son estudiantes de sexto semestre de preparatoria de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro, dichos estudiantes llevaron los cursos de Calculo Diferencial e Integral en el semestre académico anterior al que cursan actualmente.

En la investigación participaron 21 estudiantes, 10 mujeres y 11 hombres, cuyas edades están ubicadas en un rango de 17 a 18 años. La muestra para este estudio se eligió en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue por conveniencia, por lo tanto, no aleatoria, debido a que los estudiantes participaron en tanto habían tomado un curso de Cálculo Diferencial, tema fundamental para el desarrollo de esta investigación.

4.3. DISEÑO DE LA ACTIVIDAD

La actividad elaborada para este estudio consiste en la presentación de un problema de optimización que el estudiante debe resolver a través de una serie de indicaciones en las que se le pide que realice representaciones figúrales, determine expresiones algebraicas, grafique, complete tablas numéricas y, además justifique cada uno de estos procedimientos. De esta forma, el diseño de esta actividad estuvo sustentado en los diferentes registros de representación semiótica y también por las praxeologías matemáticas.

Los registros de representación se manifiestan al momento que el estudiante resuelve lo que indica cada instrucción y, asimismo, las praxeologías matemáticas (tecnologías) cuando el estudiante da una explicación de lo que hizo en cada indicación dada. Las teorías dentro de una praxeología matemática constituyen un nivel superior de justificación-explicación-producción y no siempre están presente en una actividad (Reyes, 2015), razón por la cual en el presente estudio solo se evaluarán el tipo de tarea, las técnicas y las tecnologías.

Es importante mencionar que el uso de los diferentes registros de representación para dar solución al problema de optimización, propuesto en esta actividad, coincide con el empleo de diferentes técnicas, debido a que éstas son definidas dentro de una praxeología matemática como las distintas formas de realizar una tarea, que en el caso de esta investigación es la resolución de dicho problema. En este sentido, si un estudiante realiza una representación figural del problema planteado, entonces estaría usando una técnica figural y lo mismo aplicaría para el resto de los registros que utilice para la resolución del problema. Por otra parte, es relevante señalar que las tecnologías irán surgiendo cuando el estudiante justifique la técnica o el registro que utilizó para resolver la actividad. A continuación, se presenta una tabla que muestra cómo los registros de representación y las praxeologías matemáticas orientaron el diseño de esta actividad.

		Praxeologías	
Registros	**Tipo de tarea**	**Técnica**	**Tecnología**
Lenguaje natural	T_1: Interpretar	t_1: Leer el problema propuesto e interpretarlo	
Figural	T_2: Representar	t_2: Dibujar un rectángulo y señalar sus lados t_3: Dibujar un cuadrado e indicar la medida de sus lados	
Algebraico	T_1: Interpretar T_3: Determinar	t_4: Reconocer cómo se calcula el perímetro y el área de un rectángulo. t_5: Establecer la relación de la cantidad de malla necesaria, que es el perímetro del rectángulo. Es decir, 2 bases y 2 alturas $Perímetro = 2b + 2h.$ t_6: Expresar una relación matemática con la información del problema, que represente el perímetro del jardín, $240 = 2b + 2h$. t_7: Despejar cualquiera de las dos variables de la ecuación anterior y sustituir dicha variable en la ecuación del área del jardín. t_8: Determinar el valor máximo, derivando la función del área e igualando a cero t_9: Sustituir este valor en una de las variables que se despejó, ya sea base o altura. t_{10}: Encontrar la otra medida. t_{11}: Determinar las dimensiones del terreno.	θ_1: $perímetro = 2(a + b)$ siendo a y b, los dos lados diferentes del rectángulo θ_2 : $Área\ del\ rectángulo = bh$ θ_3 : Si n es un entero positivo y $f(x) = nx$ Entonces, $f'(x) = n$ θ_4 : Si n es un entero positivo y $g(x) = x^n$ Entonces, $g'(x) = nx^{n-1}$ θ_5 : Si $F(x) = f(x) - g(x)$ entonces$F'(x) = f'(x) - g'(x)$ θ_6 : sean $f(a)$ y $f'(a)$ derivables en a. Entonces a es máximo relativo de f si: $f(a) = 0$ y $f''(a) < 0$
Gráfico	T_2: Representar T_1: Interpretar T_3: Determinar T_4: Trazar	t_{12}: Construir una tabla de valores de *x* y *y*. t_{13}: Representar gráficamente los valores de la tabla en un plano cartesiano. t_{14}: Interpretar la gráfica. t_{15}: Determinar cuál es el intervalo en el que x puede tomar valores para que el área alcance el valor más alto. t_{16}: ubicar el punto máximo en la gráfica. t_{17}: Trazar rectas tangentes a la gráfica de la función, dos rectas tangentes antes del valor máximo encontrado y dos después del mismo. t_{18}: Trazar una recta tangente en el valor máximo hallado.	θ_7: Una recta *L* que pase por *P (a, f(a))*, se denomina recta tangente a la gráfica de *f* en *P*, si L es la mejor aproximación lineal de f cerca de P. θ_8 : La derivada en un punto x=c es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, f (c)). θ_9: Sea *f: X → Y, con X, Y ⊂* R. El conjunto *G(f)= (x, y): x ∈ X, y = f (x)⊂ R × R = R2* se llama gráfica de la función.
Numérico	T_5: Completar T_1: Interpretar T_3: Determinar	t_{19}: Completar la tabla propuesta. t_{20}: Interpretar la tabla, una vez que haya sido completada. t_{21}: Determinar los valores de las dimensiones, para los cuales el área es máxima.	

Tabla 4.1. Relación de los Registros y las Praxeologías en la actividad. Fuente: Elaboración propia.

4.4. EL PROCEDIMIENTO

La aplicación se llevó a cabo de forma individual, se indicó a los participantes que se les serían proporcionadas hojas de trabajo con la actividad a realizar, la cual estaba estructurada en ocho secciones y que se disponía de dos horas para su resolución, las cuales serían distribuidas en dos días, es decir contaban con una hora por día. En el primer día tenían que resolver las primeras cuatro secciones y en el segundo día los cuatro restantes. Además, antes de iniciar la aplicación se les entregaron a los estudiantes cartas de consentimiento informado y cartas de confidencialidad (Ver anexo 1), con la finalidad de informarles cuestiones relacionadas con el manejo de sus datos y las ventajas de este estudio con relación a los procesos de enseñanza –aprendizaje de las matemáticas.

Es relevante señalar que la actividad fue guiada por parte del investigador responsable, el cual fue encargado de dar indicaciones pertinentes durante la aplicación para facilitar la resolución de cada sección y optimizar el tiempo con el que se contaba para que el estudiante desarrollara la actividad planteada. Las indicaciones dadas estaban relacionadas con conceptos involucrados en cada sección, como propiedades de los cuadriláteros, secuencia de patrones numéricos, determinación de expresiones algebraicas, función real en términos de una variable, tangente trazada a una curva de una función, análisis de la gráfica de una función y derivada de una función.

Por otro lado, se contó con la presencia del docente titular del grupo, el cual se encargó de supervisar la asistencia de cada uno de los participantes a cada una de las secciones.

4.5. DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

La propuesta didáctica está integrada por una actividad que se desarrolló con hojas de trabajo, (Ver anexo 2) en las cuales se encuentran el enunciado de un problema de optimización, así como instrucciones para el estudiante, preguntas abiertas, tablas y gráficas.

Es importante mencionar que el problema de optimización está propuesto en un contexto familiar para el estudiante para facilitar la resolución del mismo, además las indicaciones que se dan para su resolución permiten que el estudiante transite en los diferentes registros de representación semiótica y logre la conversión de un registro a otro. Así mismo, la emanación de las praxeologías matemáticas depende de los argumentos que utiliza el estudiante para justificar cada uno de sus procedimientos.

A continuación, se presenta el problema de optimización con sus respectivas secciones y se presentan los resultados esperados de los alumnos.

Actividad: Maximizar el jardín de Juanito

SITUACIÓN 1. Juanito quiere utilizar 240 metros de malla metálica para cercar un jardín rectangular. Con la información previa, conteste ¿cuáles son los valores de cada lado del jardín para que el área cercada sea máxima?

Para dar respuesta al interrogante se solicita al estudiante que desarrolle cada una de las siguientes secciones:

Sección 1: Representación figural del problema. Realice una representación geométrica del problema de acuerdo con las condiciones dadas.

El enunciado del problema es presentado en lenguaje natural, en esta sección se pretende que el estudiante pase del registro en lenguaje natural al registro figural, para esto se espera que el estudiante haga una adecuada interpretación geométrica del problema y realice una representación figural, como la figura 1, en la cual el $lado1$ corresponde al lado mayor y el $lado2$ corresponde al lado menor. De la misma forma y desde el marco de la Teoría Antropológica de la Didáctica, se espera que el estudiante haga uso de una técnica figural.

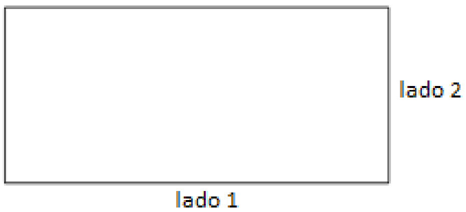


Figura 4.1. Representación figural del problema planteado. Fuente: Elaboración propia.

Sección 2*: *Perímetro y área del jardín. Escriba las expresiones matemáticas que representen el perímetro y el área del jardín de Juanito. Explique.

La finalidad de esta sección es que el estudiante pase del registro figural al algebraico, para esto el estudiante debe saber cómo determinar el perímetro y el área de un rectángulo, se espera que lo haga utilizando expresiones algebraicas y de esta manera estaría utilizando una técnica algebraica, por otro lado, la tecnología que justificaría dicha técnica sería la definición de perímetro y el área de una superficie.

Sección 3: Representación numérica del problema. De acuerdo con la información anterior. Complete los valores de la tabla y responda:

$lado1$ $(metros)$	$lado2$ $(metros)$	**Perímetro**	**Área** (m^2)
	120		
12	108		
24	96		
48	72		
72			
96	24		
	0		

Una vez que el estudiante haya encontrado las expresiones algebraicas que representan el área y el perímetro del jardín rectangular, el estudiante debe completar la tabla mostrada anteriormente y responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto puede valer $el\ lado$ 1 en el menor de los casos y en el mayor de los casos?

b) ¿Cómo son los valores de la columna del perímetro? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

c) ¿Cómo es la tendencia de los valores de la columna del área? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

d) ¿Qué valores del $lado$ 1 y del $lado$ 2 generan el área más grande?, ¿cuál es el área más grande?

e) De acuerdo con los valores de los lados, $lado 1$ y $lado$ 2, ¿ Cuál sería la forma del jardín de Juanito? Realice una representación geométrica.

f) ¿Considera que existen otros valores del $lado 1$ y del $lado$ 2 que generen un área más grande? ¿entre qué valores de la tabla estaría?

La finalidad de esta sección en una primera instancia es que el estudiante pase del registro algebraico al registro numérico, pues si es capaz de hallar las expresiones algebraicas que representen el área y el perímetro del jardín, podrá completar los valores de la tabla, hacer una interpretación de dichos valores y de esta forma se dará una coordinación entre ambos registros, así se corrobora que el estudiante utiliza una técnica numérica.

Por otra parte, cuando el estudiante es capaz de identificar en la tabla numérica cuáles son los valores de los lados del jardín que generan el área máxima y realiza una representación geométrica con base en la medida de esos dos lados, se puede decir que pasó del registro numérico al figural y de la misma manera empleo una técnica figural, la cual es justificada por la tecnología asociada a las propiedades de los cuadriláteros.

Sección 4: La función área. Complete la tabla y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el resultado de la diferencia del primer valor del $lado$ 2, es decir, 120 con cado uno del resto de valores del mismo lado? ¿Qué relación tiene esta diferencia con los valores del $lado$ 1?

b) Con base en la relación encontrada previamente, si al $lado$ 2 le llamamos "x", ¿Cómo expresarías el $lado$ 1 en términos de "x"? Valide su respuesta.

c) ¿Cómo se expresaría el área del jardín con "x" como $lado$ 2 y el $lado$ 1 en términos de "x" que acabas de encontrar?

d) Diga si la expresión anterior se puede considerar una función. Si es así, indique cual sería la variable dependiente y cual la variable independiente. Explique

e) Escriba la expresión anterior como una función en caso de que se pueda representar como tal. Justifique su respuesta

$\boldsymbol{lado1 (metros)}$	$\boldsymbol{lado\ 2\ (metros)}$
0	120
12	108
24	96
48	72
72	
96	24
	0

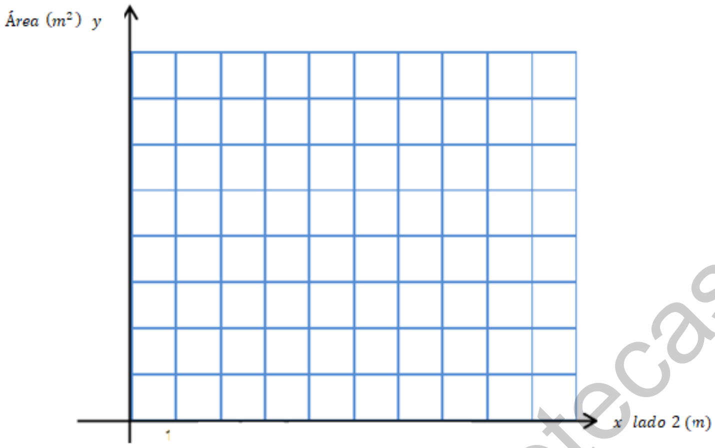
El propósito de esta sección es que el estudiante una vez que haya realizado una interpretación de los valores de la tabla mostrada en la sección 3, sea capaz de encontrar una expresión algebraica que represente el área del jardín en términos de uno de los lados y luego pueda establecer si la expresión algebraica que encontró se puede considerar una función o no, si el estudiante logra esto, habrá pasado de un registro numérico al algebraico y habrá utilizado una técnica algebraica, la cual estaría sustentada en el concepto de una función de variable real.

Sección 5: Representación gráfica del problema. Grafique la función encontrada en la sección anterior y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor máximo de la función? Explique

b) Si colocamos una recta tangente en el valor máximo de la función ¿Qué características tiene?, ¿Cuál es la inclinación de la recta tangente? Explique

c) Si colocamos rectas tangentes antes y después del valor máximo de la función ¿Qué características tienen? ¿Cuál es la inclinación de las rectas tangentes trazadas? Explique



Esta sección tiene como finalidad que el estudiante pasé del registro algebraico al gráfico. Se espera que sea capaz de representar gráficamente la expresión algebraica que representa la función que encontró en la sección anterior, además que haga tratamientos dentro del mismo registro gráfico, es decir, una vez haya dibujado la gráfica de la función, trace las rectas tangentes que se le indican y pueda describirlas. Luego de que realice lo que señala la instrucción, se evidencia que el estudiante coordinó ambos registros y de la misma manera utilizó una técnica gráfica, la cual estaría justificada por la definición de la recta tangente trazada a una curva y la definición de máximos y mínimos de una función.

Sección 6: El valor de la pendiente de la recta tangente. Con base en las respuestas en la ***sección 5*** y teniendo en cuenta que la pendiente se define como la inclinación de la recta con respecto al eje de las *X*. Complete la siguiente tabla, marcando con una x, el valor que usted considere que le corresponde a la pendiente en los diferentes puntos.

Pendiente	valor			
	Elección del punto	**Negativo (-)**	**Cero (0)**	**Positivo (+)**
Antes del valor máximo	(,)			
En el valor máximo	(,)			
Después del valor máximo	(,)			

Esta sección tiene como finalidad, que el estudiante pase de un registro gráfico a un registro numérico, una vez que el estudiante haya trazado rectas tangentes a la función en el valor máximo, antes y después del mismo, debería ser capaz de representar tal acción en una tabla numérica. Cuando el estudiante logra esto, se puede decir que coordinó ambos registros y que utilizó una técnica numérica y las tecnologías que justifican dicha técnica serian, el concepto de recta tangente a una función y la definición de valores máximos y mínimos de una función.

Sección 7. La derivada de la función área. Responda los siguientes interrogantes, considerando la función del área, en términos del $\boldsymbol{lado\ 2}$, definida en la **sección 4.**

a) Derive la función área y evalúela en el valor máximo encontrado en la **sección 5.** ¿Cuál es su resultado? Explique

b) Derive la función área y evalúela en los puntos elegidos, antes y después del valor máximo. ¿Cuáles son los resultados? Explique

El propósito de esta sección es que el estudiante, luego de establecer un valor para la pendiente (nulo, positivo o negativo) según el punto elegido, sea capaz de constatar lo que estableció a través de otro tipo de representación. De esta forma, el estudiante al derivar la función que representa el área del jardín y evaluarla en los puntos mencionados anteriormente, se dará cuenta que existe una relación entre lo que realizó utilizando un registro tabular y lo que hizo empleando un registro algebraico, en pocas palabras podrá notar que los resultados de las derivadas coinciden con los que estableció para cada uno de los puntos, en la tabla mostrada en la sección 6, entonces, el estudiante estaría transitando de un registro tabular a un registro algebraico, estaría utilizando una técnica algebraica y las tecnologías que estarían justificado dicha técnica serian; la derivada de una función exponencial, restas y sumas de derivada y la definición de valor máximo y mínimo de una función.

Sección 8. La pendiente y la derivada. Teniendo en cuenta lo realizado en las ***secciones 6 y 7*** responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en el valor máximo es igual a cero?

b) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor antes del máximo es positivo?

c) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor después del máximo es negativo?

d) De acuerdo con las respuestas previas, diga si existe una relación entre la pendiente y la derivada de la función en el punto máximo. Explique

La finalidad de esta sección es que una vez que el estudiante haya transitado por los diferentes registros de representación (lenguaje natural, figural, tabular, gráfico y algebraico) y además haya realizado conversiones y tratamientos dentro de éstos mismos, sea capaz de expresar en lenguaje natural que la derivada de una función representa la pendiente de las rectas tangentes trazadas a la gráfica de esa función y de esta forma estaría realizando una reinterpretación del concepto derivada.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS DE LA REINTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO.

En este apartado se presenta el análisis de la secuencia didáctica de acuerdo con las diferentes técnicas y registros de representación empleados por los estudiantes cuando realizan cada una de las secciones que conforman la secuencia; así como las praxeologías matemáticas que surgen cuando los estudiantes justifican sus procedimientos (ver tabla 4.1). Es importante mencionar que dentro del análisis no emergieron técnicas de distinta naturaleza, es decir, los alumnos emplearon los registros ya establecidos. En cuanto a las tecnologías, surgieron otras, distintas a las ya señaladas y para distinguirlas se le asignaron notaciones diferentes, éstas son: $\theta_{A,}\ \theta_B\ y\ \theta_C$:

- θ_A: Dadas dos variables X e Y , Y es inversamente proporcional a X, si hay una constante distinta de cero, tal que: $y = \frac{k}{x}$.
- θ_B: Un número a es múltiplo de otro número b, si b está contenido un número exacto de veces dentro de a. Esto es, $a = b.c$.
- θ_C: Un cuadrado es también un rectángulo porque tiene dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.

5.1. CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LAS SECCIONES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Dada la forma en la que se diseñó la secuencia didáctica se consideraron tres aspectos en la descripción de la resolución del problema de optimización realizado por los estudiantes, los cuales son: a) si el procedimiento realizado por los estudiantes para dar solución al problema es correcto o no, b) el registro o técnica de resolución, y c) si la técnica empleada por el estudiante es sustentada por alguna tecnología. Se han definido así las variables, nivel de corrección, técnica de resolución y la tecnología de la técnica de resolución; además, también se analiza si los estudiantes son capaces de coordinar los registros de representación involucrados en la resolución de las tareas indicadas en cada sección y el tipo de errores evidenciados que comenten los estudiantes en la resolución de las tareas.

Para realizar el análisis de la información obtenida a través de la secuencia didáctica, se tuvieron en cuenta las frecuencias por cada sección:

1. **Nivel de corrección:** Frecuencias (F) de respuestas correctas, incorrectas, parcialmente correctas y respuestas en blanco en la resolución del problema. Con respecto a las respuestas erradas, se resaltan los tipos de errores cometidos por los estudiantes; los errores pueden estar relacionados con la conversión y tratamiento de registros o pueden ser de tipo conceptual.
2. **Técnica de resolución:** Frecuencia (F) de empleo de las distintas técnicas de resolución definidas de acuerdo con los diferentes registros de representación semiótica. En este caso, se identifica si el estudiante realizó una conversión de un registro a otro o si hizo tratamientos dentro un mismo registro de representación.
3. **Tecnología de la técnica:** Frecuencia (F) de las diferentes Tecnologías identificadas. También se tienen en cuenta tecnologías que puedan emerger; es decir, aquellas que son distintas a las establecidas inicialmente.

5.2. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 1: REPRESENTACIÓN FIGURAL DEL PROBLEMA

La sección 1 (figura 5.1) pretende poner en evidencia la forma en como el estudiante aborda los conocimientos básicos de geometría al momento de realizar una representación figural del problema planteado, el cual tiene como enunciado: “Juanito quiere utilizar 240 metros de malla metálica para cercar un jardín rectangular. Con la información previa, conteste ¿cuáles son los valores de los lados del jardín para que el área cercada sea máxima? Para dar respuesta a esta interrogante desarrolle cada una de las secciones siguientes:”.

La tabla 5.1 muestra el nivel de corrección, la técnica de solución; así como la coordinación de registros realizada por los estudiantes y el tipo de error. En esta sección no se analiza la tecnología, pues en algunas ocasiones sucede que la tecnología θ se integra a la técnica t ; es decir la justificación es parte de la técnica t para resolver una tarea T (Morales, 2013).

> ***Sección 1: Representación figural del problema.*** Realice una representación geométrica del problema de acuerdo con las condiciones dadas.

Figura 5.1. Sección 1 (Representación figural del problema).

En la tabla 5.1, se señala que 16 de los 21 estudiantes resolvieron correctamente lo indicado en la sección 1; 2 de las respuestas fueron parcialmente correctas al no realizar una representación figural completa del problema; finalmente, 3 de los alumnos erraron al nombrar los lados del rectángulo con una misma letra. Las respuestas evidenciaron que los estudiantes parecen tener claro la representación de un rectángulo.

Técnica/ registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Figural	17	Correcta	16	Conversión	16		
T. Algebraica y T. figural	4	Parcialmente correcta	2	Conversión	2		
		Incorrecta	3	No conversión	3	Error de conversión	3

Tabla 5.1. Criterios de análisis de la sección 1.

El análisis de esta sección también permitió identificar la técnica de resolución que indica el conjunto de conocimientos básicos que los estudiantes ponen en práctica en el desarrollo de la sección. En este sentido, 17 alumnos utilizaron la técnica figural, algunos realizaron una representación del rectángulo, asignándole variables diferentes a sus lados adyacentes (figura 5.2); otros en cambio realizaron la representación de dicha figura geométrica sin nombrar sus lados y otros nombraron los lados del rectángulo con la misma variable, cometiendo así un error en la conversión de registros.

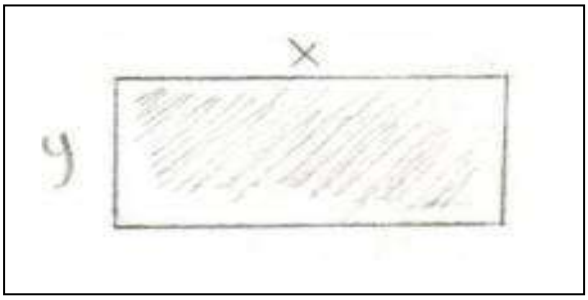


Figura 5.2. Resolución del estudiante E09 usando una técnica figural.

Por otro lado, 4 de los estudiantes utilizaron dos técnicas de resolución, emplearon la técnica figural y la técnica algebraica al mismo tiempo (figura 5.3), debido a que dibujaron un rectángulo, nombrando con variables diferentes sus lados e indicaron que el valor del perímetro era igual a la letra P, esto es $P = 240m$.

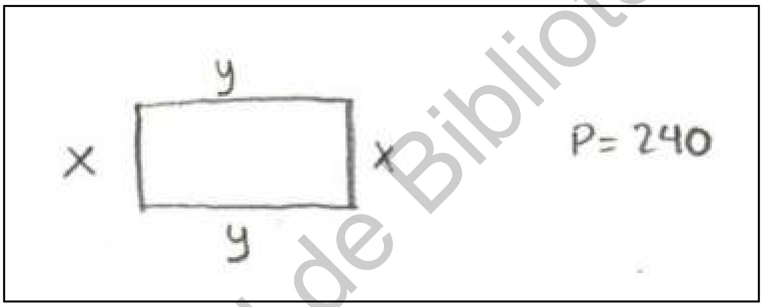


Figura 5.3. Resolución del estudiante E03 usando las técnicas figural y algebraica correctamente.

Con base en la coordinación de registros, las respuestas evidenciaron que la mayoría de los estudiantes no presentaron dificultad al realizar la conversión del registro en lengua natural al registro figural, debido a que gran número de éstos realizaron una representación figural correcta del problema e incluso emplearon dos registros de representación a la vez para dar respuesta a lo indicado en esta sección.

5.3. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 2: PERÍMETRO Y ÁREA DEL JARDÍN

La finalidad de esta sección (figura 5.4) es evidenciar la manera como los estudiantes ponen en juego sus conocimientos básicos de geometría al determinar expresiones algebraicas que representen el perímetro y el área de una superficie rectangular.

Sección 2: Perímetro y área del jardín. Escribe las expresiones matemáticas que representen el perímetro y el área del jardín de Juanito. Explique

Figura 5.4. Sección 2 (Perímetro y área del jardín).

El nivel de corrección de la sección 2, junto con la técnica de resolución, la tecnología de la técnica, la coordinación de registros y el tipo de error se recogen en la tabla 5.2. La tabla indica que ninguno de los alumnos desarrolló la sección de forma satisfactoria; 13 estudiantes no concluyeron la sección, debido a que no justificaron su procedimiento y además no escribieron las expresiones algebraicas del área y del perímetro en forma de igualdad y 8 soluciones dadas proporcionan expresiones incorrectas.

Registro/Técnica de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Algebraica	21	Correcta	0				
		Parcialmente correcta	13	Tratamiento y Conversión	3		
				Conversión	10		
		Incorrecta	8	No conversión	8	Error de conversión	8

Tabla 5.2. Criterios de análisis de la sección 2.

La tabla también muestra que los 21 estudiantes utilizaron la técnica algebraica para dar solución a la sección 2. Los alumnos al emplear esta técnica no solo manifestaron la conversión de registros; también realizaron tratamientos dentro del mismo registro. Se destaca que de los 13 estudiantes que respondieron de forma parcial, 10 realizaron la conversión y los 3 restantes hicieron tratamiento y conversión de registro a la vez.

En la figura 5.5 se muestra la resolución del estudiante E14, en la cual se identifica el tratamiento que éste hizo dentro del mismo registro; dicho tratamiento se pone de manifiesto al despejar de la expresión algebraica del perímetro, los valores de los lados del rectángulo, los cuales nombra con las letras $A\ y\ B$; además el estudiante establece que la suma de los lados $A\ y\ B$ del rectángulo es igual a 120.

$$P = 2A + 2B = 240\,m$$

$$A = B \cdot A$$

$$A + B = 120$$

$$B = \frac{240 - 2A}{2}$$

$$A = \frac{240 - 2B}{2}$$

Figura 5.5. Resolución del estudiante E14 realizando tratamiento en una técnica algebraica.

En esta sección se evidenció que las 8 soluciones incorrectas señaladas en la tabla 5.2 obedecieron a un error en la conversión de registros; dicho error consistió en el uso de variables diferentes para representar el perímetro y el área del jardín, ya que el perímetro lo expresaron como el resultado de la suma de cuatros lados iguales (figura 5.6).

$$a = b \cdot h \qquad p = l + l + l + l$$

Figura 5.6. Resolución del estudiante E02 con un error de conversión.

Con respecto a la tecnología de la técnica empleada por los estudiantes, no estuvo presente ya que, los alumnos solo se centraron en determinar las expresiones algebraicas que representaran el área y el perímetro del jardín y no justificaron sus procedimientos.

Finalmente, a pesar de que algunos estudiantes hayan realizado tratamientos dentro del mismo registro o técnica empleada, se evidencia la dificultad de éstos de transitar del registro figural al registro algebraico utilizando letras.

5.4. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 3: REPRESENTACIÓN NÚMERICA DEL PROBLEMA

Sección 3: Representación numérica del problema. De acuerdo con la información anterior. Complete los valores de la tabla y responda:

$\boldsymbol{lado\ 1(metros)}$	$\boldsymbol{lado\ 2(metros)}$	$\boldsymbol{Perímetro}$	$\boldsymbol{Área\ (m^2)}$
	120		
12	108		
24	96		
48	72		
72			
96	24		
	0		

a) Cuánto puede valer el $lado\ 2$ en el menor de los casos y en el mayor de los casos?

b) ¿Cómo son los valores de la columna del perímetro? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

c) ¿Cómo es la tendencia de los valores de la columna del área? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

d) ¿Qué valor del $lado1$ y del $lado\ 2$ generan el área más grande? ¿cuál es el área más grande?

e) De acuerdo con los valores del $lado1$ y $lado\ 2$, ¿ Cuál sería la forma del jardín de Juanito? Realice una representación geométrica.

f) ¿Considera que existen otros valores del $lado1$ y del $lado\ 2$ que generen un área más grande? ¿Entre qué valores de la tabla estaría él área más grande? Explique

Figura 5.7. Sección 3 (representación numérica del problema).

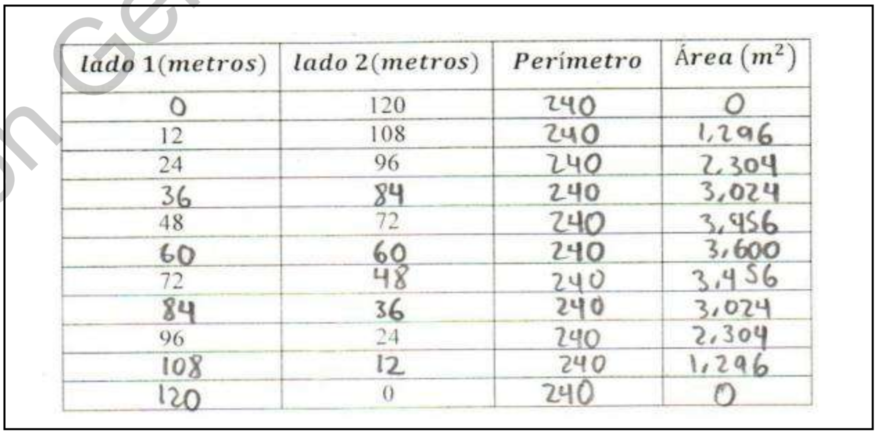
El propósito de esta sección (figura 5.7) consiste en que el estudiante, luego de determinar las expresiones algebraicas que representan el perímetro y el área del jardín; utilice el registro o técnica numérica para dar solución al problema.

En la tabla 5.3 se muestra el nivel de corrección de la sección 3, junto con el registro o técnica de solución, la tecnología de la técnica, la coordinación de registros y el tipo de error.

Registro/Técnica de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Numérica	21	Correcta	19	Conversión	19		
		Parcialmente correcta	0				
		Incorrecta	2	No conversión	2	Error de conversión	2

Tabla 5.3. Criterios de análisis de la sección 3.

Se reconoce que la tarea de la sección 3, no representó complejidad para los alumnos, debido a que gran número de los estudiantes respondió de forma satisfactoria, además no se reportaron respuestas parcialmente correctas y solo 2 alumnos erraron en el procedimiento. De la tabla también se desprende que 21 estudiantes aplicaron la técnica numérica. En el procedimiento realizado por el alumno E03 (figura 5.8), se puede apreciar como el estudiante empleó de forma adecuada la técnica numérica, utilizando las expresiones algebraicas del perímetro y del área para completar los valores de la tabla señalada al inicio de esta sección (figura 5.7).



$lado\ 1(metros)$	$lado\ 2(metros)$	$Perímetro$	$Área\ (m^2)$
0	120	240	0
12	108	240	1,296
24	96	240	2,304
36	84	240	3,024
48	72	240	3,456
60	60	240	3,600
72	48	240	3,456
84	36	240	3,024
96	24	240	2,304
108	12	240	1,296
120	0	240	0

Figura 5.8. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica numérica correctamente.

Es importante señalar que solo 19 de los 21 estudiantes utilizaron la técnica de forma adecuada y, por lo tanto, hicieron una conversión de registros, ya que pudieron coordinar el registro algebraico con el registro numérico. Por otro lado, los dos alumnos mencionados al inicio, que proporcionaron respuestas incorrectas; cometieron un error de conversión al indicar que el valor del perímetro es nulo cuando uno de los lados del rectángulo mide cero.

La tecnología de la técnica no estuvo presente en esta sección debido a que no se le solicitó al estudiante que argumentara sus respuestas. La sección no implicó dificultad para los estudiantes ya que 19 de los 21 alumnos respondieron satisfactoriamente.

5.4.1. Análisis del ítem a) de la sección 3

En este ítem se precisa que los alumnos establezcan el valor de la medida de uno de los lados del rectángulo, en este caso el $lado$ 2; en el menor y mayor de los casos. Esto se hace, con la finalidad de que el estudiante pueda percatarse más adelante del dominio de la función área.

Respecto a lo que se le solicita al alumno en este ítem, en la tabla 5.4 se muestra que para el nivel de corrección 11 estudiantes proporcionaron respuestas correctas, es decir, establecieron de forma adecuada las medidas mayor y menor del lado 2. Por otro lado, 8 respuestas son parcialmente correctas, debido a que los alumnos mencionaron valores aproximados a los que se les solicitaron; 2 de las respuestas resultaron incorrectas puesto que los estudiantes no señalaron los valores adecuados.

Registro/Técnica de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Lengua natural	21	Correcta	11	Conversión	11		
		Parcialmente correcta	8	Conversión	8		
		Incorrecta	2	No conversión	2	Error de conversión	2

Tabla 5.4. Criterios de análisis ítem a) de la sección 3.

En la tabla también se recoge el registro o técnica de solución empleada por los alumnos para dar sus respuestas. La tabla refleja que los 21 estudiantes se centraron en una técnica de lengua natural al escribir los valores del lado 2 que ellos consideraban menor y mayor. Por otra parte, la tabla también indica que las respuestas incorrectas dadas por los alumnos corresponden a un error de conversión; en este caso el estudiante menciona que el valor mayor del lado 2 es igual a 60 y el valor menor es 0 (Estudiante E20). Se puede inferir que el alumno elige estos números porque con los otros valores se repiten los resultados del área.

En la figura 5.9 se muestra la solución del estudiante E05. En dicha solución el alumno indica que el valor mayor del lado 2 es igual a 108 y el menor es 12; el estudiante elige los valores que están antes y después de los valores indicados, los cuales son :120 (valor mayor) y 0 (valor menor). La frecuencia con la que la mayoría de los alumnos indican que el valor mayor es igual a 108 y el valor menor igual a 12, parece evidenciar que el estudiante considera que, si uno de los lados del rectángulo es igual a cero, entonces no puede dibujarse dicha figura geométrica; en este sentido el alumno hace una interpretación figural y no numérica.

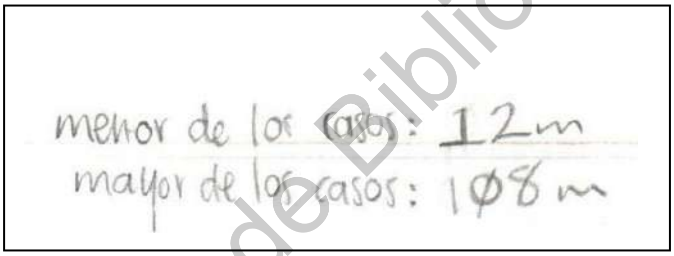


Figura 5.9. Resolución del estudiante E05, utilizando una técnica de lengua natural parcialmente correcta.

La tecnología de la técnica empleada por los alumnos para dar solución a este ítem no se contempló debido a que no se le pidió al estudiante que justificara su respuesta. Asimismo, la coordinación de registros representó un grado de complejidad para los alumnos, ya que solo 11 de los 21 estudiantes respondieron de forma adecuada y el número de errores cometidos por éstos no fue mínimo. En forma general, solo una parte de los alumnos pasó del registro numérico al registro en lengua natural.

5.4.2. Análisis del ítem b) de la sección 3

En este ítem se pretende que los estudiantes proporcionen una justificación acerca del porqué los valores de la columna del perímetro son iguales (Figura 5.8). La finalidad de esta tarea es que los alumnos adviertan que el valor del perímetro permanece constante, aun cuando los valores de los lados del rectángulo son distintos en cada caso; además que noten que dicho valor no puede cambiar, porque solo se cuentan con 240 m para cercar el jardín.

Técnica/ registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F	Tecnología de la técnica	F
T. lengua natural	19	Correcta	10	Tratamiento y Conversión	1			θ_1	10
		Parcialmente correcta	9	Conversión	18				
T. lengua natural y algebraica	2							θ_A	1
		Incorrecta	2	No conversión	2	Error de conversión	2		

Tabla 5.5. Criterios de análisis ítem b) de la sección 3.

En la tabla 5.5 se aprecia que 10 estudiantes respondieron de forma satisfactoria; 9 alumnos proporcionaron respuestas parcialmente correctas al no justificar su procedimiento, 2 estudiantes resolvieron la tarea de forma incorrecta dado que indicaron que el perímetro es nulo para algunos casos.

De la tabla también se desprende que 19 alumnos manifestaron una técnica en lengua natural, algunos expresaron que los valores de la columna del perímetro son iguales, porque solo se cuentan con 240 metros de malla metálica para cercar el jardín (figura 5.10), otros en cambio, mencionaron que los valores del perímetro son iguales sin justificar su procedimiento, proporcionando de esta forma una respuesta parcial y dos estudiantes expresaron que el perímetro es nulo cuando uno de los lados del rectángulo es igual a cero; cometiendo así , un error en la conversión de registro.

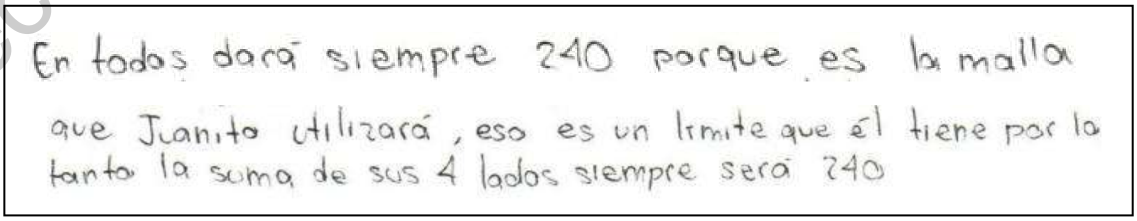
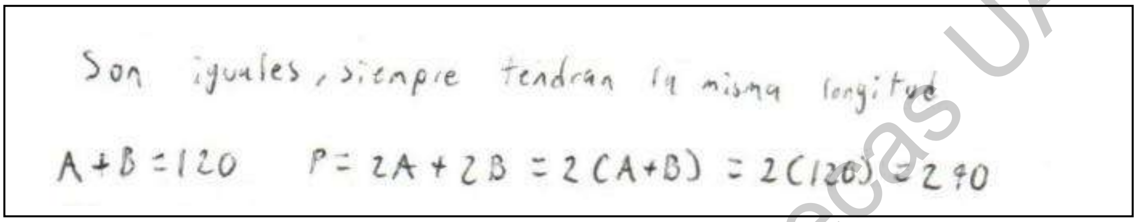


Figura 5.10. Resolución del estudiante E06 utilizando una técnica de lengua natural correctamente.

Por otro lado, 2 alumnos emplearon la técnica en lengua natural y la técnica algebraica al mismo tiempo. El estudiante E14 mencionó que los valores de la columna del perímetro son iguales y además utilizó una técnica algebraica para señalar que la suma de los dos lados del rectángulo siempre es igual a 120 y que el valor del perímetro es igual al duplo de este valor; realizando de esta forma, tratamiento dentro de esta técnica o registro de representación (figura 5.11).


Son iguales, siempre tendran la misma longitud

$A+B=120 \quad P=2A+2B=2(A+B)=2(120)=240$

Figura 5.11. Resolución del estudiante E14, utilizando las técnicas de lengua natural y algebraica correctamente.

El análisis también permitió identificar las tecnologías de las técnicas que utilizaron los estudiantes. En la tabla 5.5 se puede observar que 10 alumnos argumentaron su respuesta centrándose en la definición del perímetro de un rectángulo (tecnología θ_1) y 1 estudiante indicó que los valores de la columna del perímetro son inversamente proporcionales; errando así en su justificación y utilizando de manera incorrecta la definición de magnitudes inversamente proporcionales (tecnología θ_A).

De manera general, se informa que el inciso b) de la sección 3 no representó dificultad para la mayoría de los estudiantes, ya que algunos realizaron tratamientos dentro de las técnicas empleadas y llevaron a cabo la conversión de registros, es decir transitaron del registro numérico al registro de lengua natural e incluso al registro algebraico. Se destaca que un número mayor de alumnos emplearon tecnologías para argumentar su técnica de solución.

5.4.3. Análisis del ítem c) de la sección 3

La finalidad de este ítem es que los estudiantes puedan describir la tendencia de los valores de la columna del área y más adelante puedan asociar el comportamiento de dichos valores en la representación gráfica de la función área.

En la tabla 5.6 se aprecia que 4 estudiantes respondieron de manera satisfactoria, 8 de las soluciones fueron parcialmente correctas, dado que los alumnos mencionaron que los valores del área aumentaban antes del valor máximo del área, obviando describir el comportamiento de dichos valores después del valor máximo y viceversa. Se destaca que 7 estudiantes proporcionaron respuestas incorrectas al fijarse en otras características de los valores y no en la tendencia de subir y luego bajar.

Técnica/ registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. lengua natural	20	Correcta	4	Conversión	4			θ_2	0
		Parcialmente correcta	8	conversión	8				
T. Gráfica	1	Incorrecta	7	No conversión	7	Error de conversión	7	θ_B	1

Tabla 5.6. Criterios de análisis ítem c) de la sección 3.

La tabla también indica que 20 de los estudiantes ponen de manifiesto el uso de la técnica de lengua natural; algunos expresan que la tendencia de los valores es subir y luego bajar, otros incluyen en su respuesta el valor máximo del área que es igual a 3600 y a partir de él, describen la tendencia de los valores del área, antes y después del mismo y en cambio otros, se centran en que lo valores del área se repiten , errando de esta manera en la conversión de registros, al no centrar su atención en la tendencia de dichos valores (Figura 5.12).

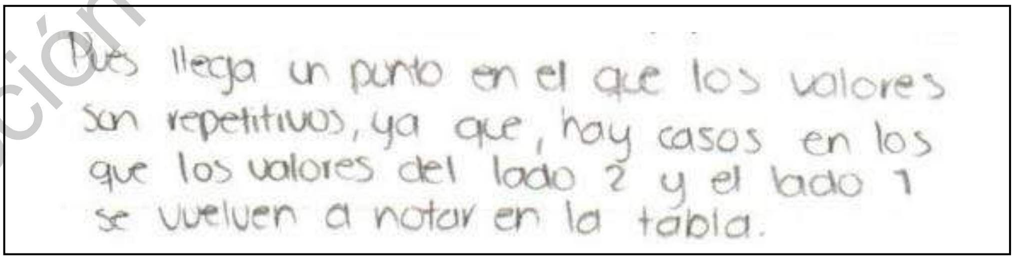


Figura 5.12. Resolución del estudiante E09, con un error de conversión.

Se resalta que solo un estudiante empleó la técnica gráfica al representar el comportamiento de los valores del área en un plano cartesiano, sin asignar valores a los ejes. (Figura 5.13).

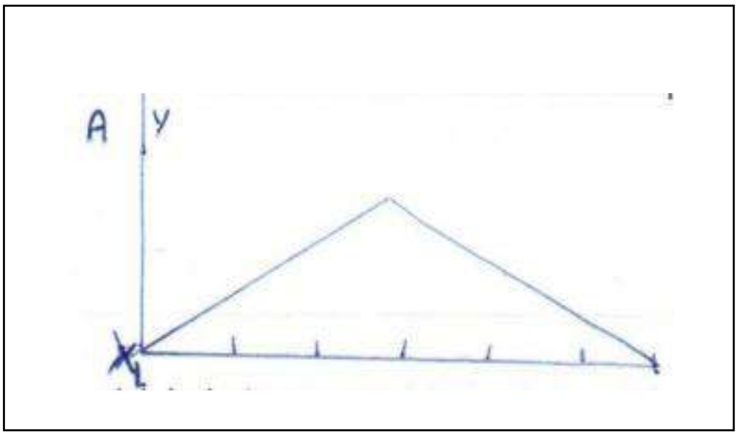


Figura 5.13. Resolución del estudiante E08, utilizando una técnica gráfica.

Con respecto, a las tecnologías de las técnicas, la mayoría de los estudiantes no justificaron sus repuestas; solo un alumno empleó mal la noción de factor de un número, al señalar que los valores del área cambiaban por que los lados del rectángulo, los cuales nombró como A y B, guardaban una relación factor (tecnología θ_B) lo cual no es cierto, debido a que el valor de un lado del rectángulo no se puede expresar como factor del otro en este caso.

El número reducido de estudiantes que respondieron de manera adecuada a la pregunta planteada en este ítem evidenció la dificultad que presentaron los alumnos al pasar del registro numérico al registro en lengua natural; así como también la ausencia de las tecnologías en las producciones de los estudiantes reflejó que éstos no suelen justificar sus procedimientos.

5.4.4. Análisis del ítem d) de la sección 3

Este ítem tiene como propósito que los estudiantes, luego de haber completado la tabla propuesta al inicio de esta sección (Figura 5.7) noten los valores de las dimensiones que generan un área máxima del jardín.

La tabla 5.7, muestra el nivel de corrección, la técnica empleada por los alumnos, la tecnología de la técnica; así como también la coordinación de registros y el tipo de error cometido por los estudiantes. La tabla indica que 6 alumnos resolvieron el ítem de forma satisfactoria; 13 estudiantes no concluyeron sus respuestas, al no indicar las magnitudes de m y m^2 para el caso de los lados del rectángulo y su área respectivamente; 3

soluciones dadas reflejan valores incorrectos de los lados del rectángulo o bien no llegan a una conclusión.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Lengua natural	6	Correcta	5	Conversión	5		
T. Lengua natural y	3						
T. Algebraica		Parcialmente correcta	13	Conversión	13		
T. Numérica	5						
T. Algebraica	6	Incorrecta	3	No conversión	3	Error de conversión	3
T. Numérica y	1						
T. Algebraica							

Tabla 5.7. Criterios de análisis ítem d) de la sección 3.

La tabla también señala que 6 de los estudiantes manifiestan el uso de una técnica en lengua natural; algunos mencionaron los valores de los lados del rectángulo y el del área máxima sin incluir sus respectivas magnitudes de medida, $m\ y\ m^2$ respectivamente; otros en cambio, indicaron dos valores distintos para el área máxima del rectángulo, señalando de esta forma, dos pares diferentes de valores de lados del rectángulo. Esta última respuesta evidencia la dificultad que presentan los estudiantes al no reconocer que el cuadrado es también un rectángulo porque tiene dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos. El alumno, aunque conozca la definición de paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos), puede ser difícil para él ver entre diversas formas la misma categoría de figuras. Desde el punto de vista figural, el estudiante percibe al rectángulo y al cuadrado como figuras diferentes, que el efecto unificador del concepto de ser paralelogramos desaparece (Moriena y Scaglia, 2003).

En la figura 5.14 se muestra la solución del estudiante E11. En dicha solución, éste indica que existen dos pares diferentes de lados del rectángulo que generan dos valores de área máxima para el rectángulo, reflejando de esta forma, un error en la conversión de registros.

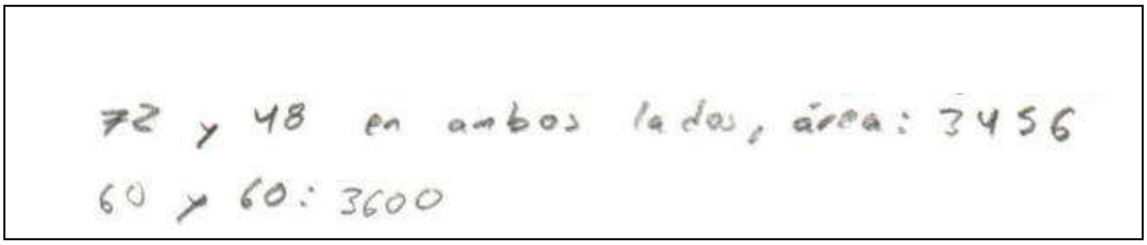


Figura 5.14. Resolución del estudiante 11, utilizando una técnica en lengua natural incorrectamente.

Por otro lado, 3 alumnos emplearon la técnica de lengua natural y la técnica algebraica a la vez; en este caso, escribieron los valores de los lados del rectángulo, así como el área máxima que generan dichos valores, pero obviaron indicar sus magnitudes pertinentes y también escribieron los valores de los lados y el área máxima empleando expresiones algebraicas. Por ejemplo, el estudiante E10 hace el siguiente planteamiento: "el valor $lado\ 1 = 60m,\ lado\ 2 = 60m$ y el área resultante es $3600m^2$".

Con respecto, al uso de la técnica numérica, los 5 estudiantes que empelaron este método de solución utilizaron la notación $A = b \times h$. El alumno E04 escribió su respuesta de la siguiente manera: $48 \times 72 = 3476$. En tal caso, el estudiante se equivoca al elegir los valores de los lados del rectángulo, al igual que en el resultado de la multiplicación de dichos valores, obteniendo de esta forma un valor incorrecto del área máxima. El procedimiento realizado por este alumno refleja un error en la conversión de registros.

Por otra parte, 6 estudiantes evidenciaron el uso de una técnica algebraica, representando dichos valores con expresiones algebraicas (Figura 5.15). En tabla también se refleja que 1 alumno utilizo la técnica numérica y la algebraica; en tal caso el estudiante escribe los valores de los lados de la siguiente manera: 60×60; también señala que el valor del área es igual a 3600, para esto, utiliza esta representación algebraica $A = 3600m^2$.

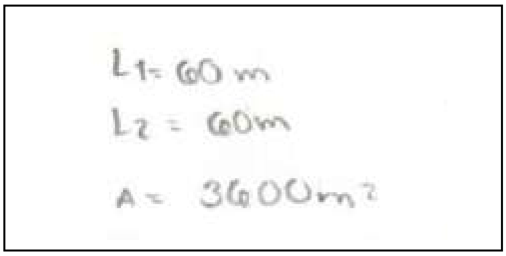


Figura 5.15. Resolución del estudiante E01 utilizando una técnica algebraica correcta.

En el desarrollo de este ítem, los estudiantes no manifestaron la tecnología de la técnica, ya que no se les solicita que justifiquen sus respuestas. En forma general, este apartado de la sección no representó mayor dificultad para los alumnos, debido a que el número de estudiantes que erraron en sus respuestas es reducido; además la mayoría de los alumnos consiguieron realizar la conversión del registro numérico al registro en lengua natural e incluso se puede notar que la transición se hizo a otro tipo de registros distintos al de lengua natural; situación que se refleja en el uso de diferentes técnicas o registros para dar solución a la pregunta planteada en este apartado.

5.4.5. Análisis del ítem e) de la sección 3

Este ítem pretende evidenciar los conocimientos básicos de geometría que tienen los estudiantes al representar geométricamente una figura, luego de saber las medidas de las dimensiones de dicha figura.

En la tabla 5.8 se aprecia que 6 estudiantes resolvieron la tarea de manera satisfactoria; 3 de las soluciones fueron parcialmente correctas, puesto que los alumnos mencionaron la forma del jardín mas no la dibujaron. Por otro lado, 12 estudiantes se equivocaron al representar la figura no indicada y también erraron al señalar que el jardín tenía dos formas distintas.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Lengua natural	1	Correcta	6	Conversión	6		
T. Figural y T. Algebraica	1	Parcialmente correcta	3	Conversión	3		
T. Figural	15						
T. Algebraica	1						
T. figural y T. Lengua natural	3	Incorrecta	12	No conversión	12	Error de conversión	12

Tabla 5.8. Criterios de análisis de ítem e) de la sección 3.

La tabla también muestra que 15 estudiantes utilizaron la técnica figural; algunos dibujaron un cuadrado y señalaron que los lados median $60m$ (Figura 5.16); otros por el contrario solo realizaron el dibujo de una forma cuadrada y no indicaron las medidas de los lados de dicha forma.

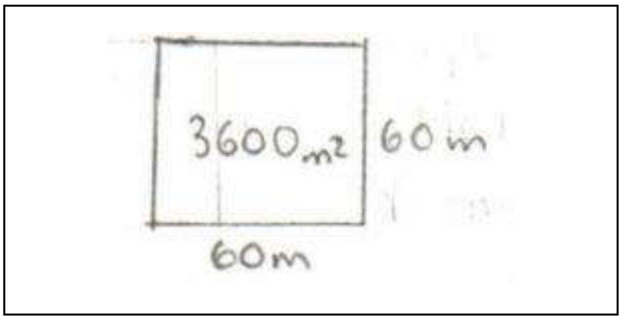


Figura 5.16. Resolución del estudiante E10 utilizando una técnica figural correcta.

En este grupo de alumnos, también se encuentran aquellos que dibujaron un cuadrado y un rectángulo indicando que el jardín tenía dos formas distintas (Figura 5.17), asimismo, los estudiantes que representaron geométricamente un rectángulo, señalando medidas distintas para los lados del jardín. Las producciones previas de estos alumnos evidenciaron un error en la conversión de registros.

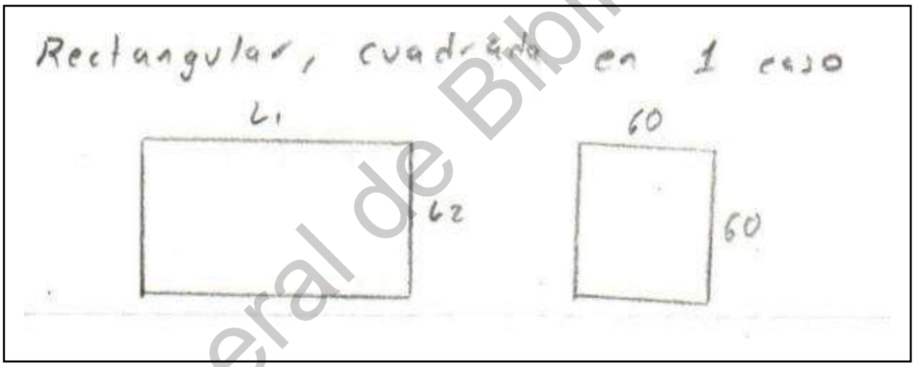


Figura 5.17. Resolución del estudiante E11 utilizando una técnica figural incorrectamente.

Por otra parte, 1 estudiante utilizó la técnica de lengua natural al mencionar que la forma de jardín es cuadrada; 1 estudiante empleó la técnica algebraica y figural al mismo tiempo al dibujar un cuadrado con lados de medidas de $60m$ y señalar que el valor del área es igual a $3600m^2$, esto es, $A = 3600m^2$; 1 estudiante aplicó la técnica algebraica al expresar que el lado del cuadrado es igual a 60, para esto escribió: $L = 60m.$ Por último, 2 alumnos emplearon la técnica figural y lengua natural a la vez, al dibujar un cuadrado, señalar sus medidas y expresar que dicha representación correspondía al área más grande del jardín y también al dibujar un cuadrado y un rectángulo y argumentar que el jardín poseía estas formas para determinados casos, cometiendo de esta manera un error en la conversión de registros (Figura 5.18).

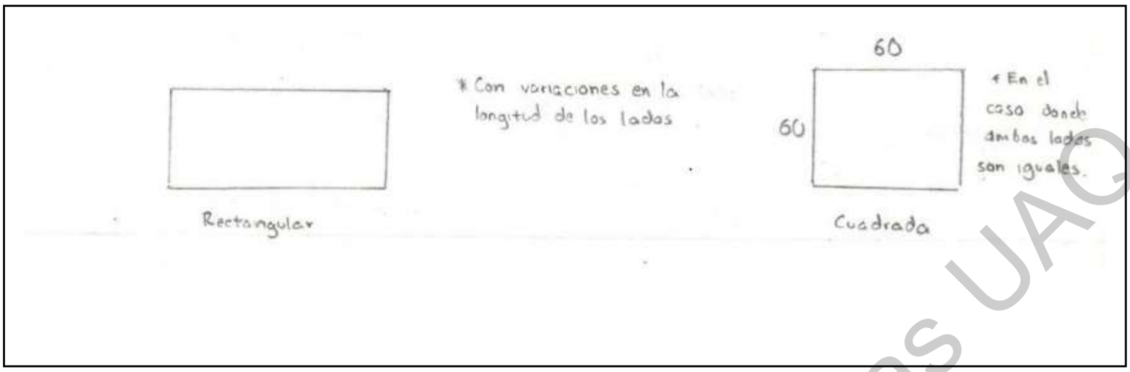


Figura 5.18. Resolución del estudiante E02 utilizando una técnica figural y en lengua natural incorrectamente.

Con respecto, a la tecnología de la técnica, en este apartado de la sección 3 no se encuentra presente, debido a que no se le pide al estudiante que justifique su respuesta. Por otro lado, la tabla 5.8 muestra que la mayoría de los alumnos presentaron un error en la conversión de registros; el cual se reflejó en la dificultad de los estudiantes de pasar del registro numérico al registro figural, falencia que está sustentada en la percepción visual de los alumnos de concebir el cuadrado y el rectángulo como dos figuras distintas; obviando la parte conceptual, que indica que un cuadrado también es un rectángulo porque posee dos pares de lados paralelos entre sí y cuatro ángulos rectos. En este sentido, Moriena y Scaglia (2003) señalan que las dificultades de los alumnos podrían explicarse por el predomino de la componente figural sobre la conceptual. Este predominio estaría justificado por la influencia de la percepción visual en la formación de los conceptos.

5.4.6. Análisis del ítem f) de la sección 3

La finalidad de la tarea propuesta en este inciso es que el estudiante advierta que el jardín tiene un área máxima únicamente cuando sus dimensiones son de igual medida, es decir cuando su forma es cuadrada. También se pretende, que el alumno identifique entre que valores del área se encuentra el área mayor.

La tabla 5.9 señala los criterios de análisis evidenciados en este inciso. Se reconoce que el desarrollo de este ítem implicó una actividad de mayor complejidad para los estudiantes. Se obtuvieron 8 respuestas parcialmente correctas debido a que los alumnos no justificaron sus procedimientos o bien no llegaron a una conclusión; 12 respuestas proporcionaron valores incorrectos de los lados; así como distintos valores para el área máxima del jardín y 1 solo estudiante no responde a la tarea planteada.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	14	Correcta	0	No conversión	0				
T. Lengua natural Y T. algebraica	2	Parcialmente correcta	8	Conversión	8				
T. Numérica	1	Incorrecta	12	No conversión	12			θ_1	4
T. Algebraica	1								
T. Numérica y T. Lengua natural	1	No responde	1	No conversión	1	Error de conversión	12		
T. Lengua natural y T. figural	1								
Ninguna	1								

Tabla 5.9. Criterios de análisis del ítem f) de la sección.

En la tabla se observa que 14 estudiantes emplearon la técnica de lengua natural; 2 alumnos manifestaron las técnicas de lengua natural y algebraica a la vez, al escribir las medidas de los lados del rectángulo y asignarles letras a dichas medidas. Asimismo, 1 estudiante utilizo la técnica numérica al indicar el valor de las medidas de los lados; 1 alumno hizo uso de la técnica algebraica al nombrar los valores de los lados del rectángulo con letras. Por ultimo, 1 estudiante empleó las técnicas, figural y lengua natural conjuntamente al expresar los valores máximos que pueden tomar los lados del rectángulo y representar geométricamente dicha figura.

En la figura 5.19 se muestra la resolución del estudiante E05, en la cual se identifica que el alumno menciona que no existen otros valores para los lados del rectángulo que generen un área mayor; pero no justifica su procedimiento, además se puede notar que el alumno señala los valores de los lados del rectángulo que proporcionan el área mayor y no menciona el intervalo de valores en donde se sitúa el valor máximo del área.

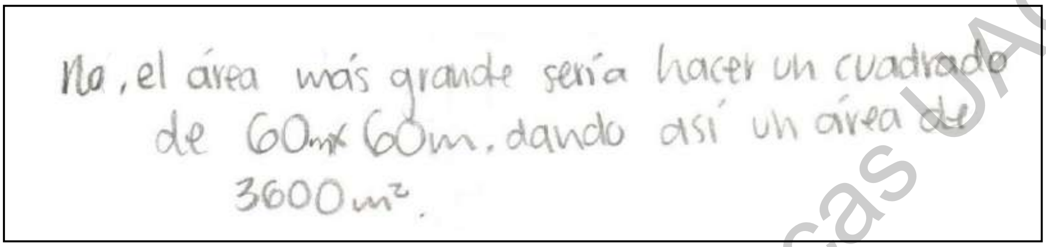

No, el área más grande sería hacer un cuadrado de 60m x 60m. dando así un área de 3600m².

Figura 5.19. Resolución del estudiante E05 utilizando una técnica en lengua natural parcialmente correcta.

En las respuestas dadas por los alumnos también se evidenciaron errores en la conversión de registros al expresar que no podían existir otras medidas para los lados del rectángulo que den un área mayor, debido a que el perímetro del jardín cambiaría, lo cual no es cierto ya que existen otros valores de los lados del rectángulo que generan el mismo perímetro de $240m$. También se observa que el estudiante asocia los valores entre los que se sitúa el área máxima como aquellos que generan dicha área; en vez de señalar el intervalo de valores en donde se ubica esta área mayor (figura 5.20).

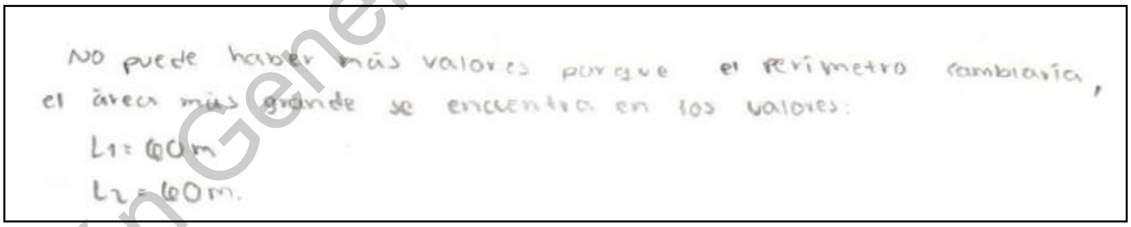

No puede haber más valores porque el perimetro cambiaría, el área más grande se encuentra en los valores:
$L_1 = 60m$
$L_2 = 60m$.

Figura 5.20. Resolución del estudiante E01 utilizando una técnica en lengua natural y algebraica incorrectamente.

De acuerdo con las tecnologías de la técnica, 4 estudiantes como se señala en la tabla 5.9 justifican sus respuestas centrándose en la tecnología θ_1, la cual hace referencia a la definición del perímetro; estos alumnos mencionan que no pueden existir otras dimensiones del rectángulo distintas a $60m$ ya que el valor del perímetro de $240m$ cambiaría; los estudiantes se equivocan al hacer esta afirmación ya que hay otras medidas de los lados del rectángulo que proporcionan el mismo valor del perímetro. En este sentido, los alumnos hacen un mal uso de esta tecnología (figura 5.20).

En forma general, la tarea planteada en este inciso de la sección 3, representó un grado de dificultad para los estudiantes, ya que no existieron respuestas correctas y 12 de 21 alumnos cometieron errores en la conversión de registros. Además, se refleja que el número de estudiantes que argumentaron sus respuestas es reducido.

5.5. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 4: LA FUNCIÓN ÁREA

Sección 4: La función área. Complete la tabla y responda las siguientes preguntas:

$\boldsymbol{lado 1 (metros)}$	$\boldsymbol{lado\ 2\ (metros)}$
0	120
12	108
24	96
48	72
72	
96	24
	0

a) ¿Cuál es el resultado de la diferencia del primer valor del $lado\ 2$, es decir, 120 con cado uno del resto de valores del mismo lado? ¿Qué relación tiene esta diferencia con los valores del $lado\ 1$?
b) Con base en la relación encontrada previamente, si al $lado\ 2$ le llamamos "x", ¿Cómo expresarías el $lado\ 1$ en términos de "x"? valide su respuesta.
c) ¿Cómo se expresaría el área del jardín con "x" como $lado\ 2$ y el $lado\ 1$ en términos de "x" que acabas de encontrar?
d) Diga si la expresión anterior se puede considerar una función. Si es así indique cual sería la variable dependiente y cual la variable independiente. Explique
e) Escriba la expresión anterior como una función en caso de que se pueda representar como tal. Justifique su respuesta

Figura 5.21. Sección 4 (La función área).

En esta sección se pretende que el estudiante luego de haber completado la tabla de valores presentada en la sección previa fije su atención en las dos primeras columnas de esta tabla y a través de una serie de preguntas que se le plantean relacionadas con la información que contienen dichas columnas, sea capaz de determinar una expresión matemática que modele el área del jardín (figura 5.21). En esta cuarta parte de la secuencia didáctica también se pondrá a prueba los conocimientos de los alumnos acerca del concepto de función real.

La tarea propuesta en esta sección como se muestra en la figura 5.21 inicia solicitándole al estudiante que complete una tabla de valores, cabe mencionar que dicha tabla el alumno la completó en la sección 3; motivo por el cual esta actividad no representó dificultad para la totalidad de los estudiantes. La técnica de solución utilizada por los estudiantes es la numérica, ya que la actividad consistió en anotar en la tabla los valores numéricos faltantes. La tecnología de la técnica no estuvo presente debido a que no se le solicitó al alumno justificar su procedimiento y con respecto a la coordinación de registro, todos los estudiantes realizaron la conversión del registro en lengua natural al registro numérico (figura 5.22).

*lado*1 (*metros*)	*lado* 2 (*metros*)
0	120
12	108
24	96
36	84
48	72
60	60
72	48
84	36
96	24
108	12
120	0

Figura 5.22. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica numérica correctamente.

5.5.1. Análisis del ítem a) de la sección 4

La tarea propuesta en este ítem tiene como finalidad que los estudiantes logren establecer una relación entre el primer valor de la columna del lado 2 con cada uno de los valores de la columna del lado 1. En tal caso, se le pide al alumno que al valor 120 le reste uno por uno los valores del mismo lado y observe que resultado obtiene. Después que el estudiante advierta del resultado de la diferencia mencionada, se espera que el alumno pueda notar que, al realizar dicha resta de valores, obtiene los valores del lado 1.

Inicialmente se le plantea lo previo al estudiante, para que más adelante éstos puedan expresar uno de los lados del rectángulo en términos del otro.

La tabla 5.10 recoge los valores de nivel de corrección, técnica de solución, tecnología de la técnica; así como la coordinación de registros y los tipos de errores cometidos por los estudiantes. En la tabla se observa que 8 estudiantes resolvieron la tarea de forma satisfactoria; se obtuvieron 5 respuestas parcialmente correctas, a causa de que las expresiones algebraicas que representaban un lado del rectángulo en términos del otro carecían de información. Por ultimo, 8 alumnos proporcionaron respuestas incorrectas al fijarse en otro tipo de relación entre los valores de los lados del rectángulo y no en la que se indicaba en la tarea.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Lengua natural y T. Numérica	2	Correcta	8	Conversión	8		
T. Lengua natural y T. Algebraica	2	Parcialmente correcta	5	Conversión	5		
T. Algebraica	6						
T. Lengua natural	11	Incorrecta	8	No conversión	8	Error de conversión	8

Tabla 5.10. Criterios de análisis del ítem a) de la sección 4.

En la tabla también se muestra que 11 estudiantes utilizaron la técnica de lengua natural al describir la diferencia mencionada en la instrucción de la actividad y señalar el patrón numérico presente en cada una de las columnas de los lados del rectángulo; 6 alumnos manifestaron el carácter algebraico de la tarea al nombrar cada una de las diferencias referidas anteriormente con variables distintas; 2 estudiantes utilizaron la técnicas de lengua natural y numérica a la vez, al escribir el resultado de la diferencia mencionada y representarla con números. Por otro lado, 2 estudiantes aplicaron las técnicas de lengua natural y algebraica al referir el resultado de la resta solicitada en el enunciado de este ítem y al determinar expresiones algebraicas que representen la medida de uno de los lados del rectángulo.

En la figura 5.23 se observa la respuesta del estudiante E05; en la cual se puede notar que el alumno escribe cada uno de los resultados de las diferencias realizadas entre el primer valor de la columna del lado 2 y cada uno del resto de valores de la misma columna; el estudiante también describe que significan los resultados de cada una de las restas realizadas.

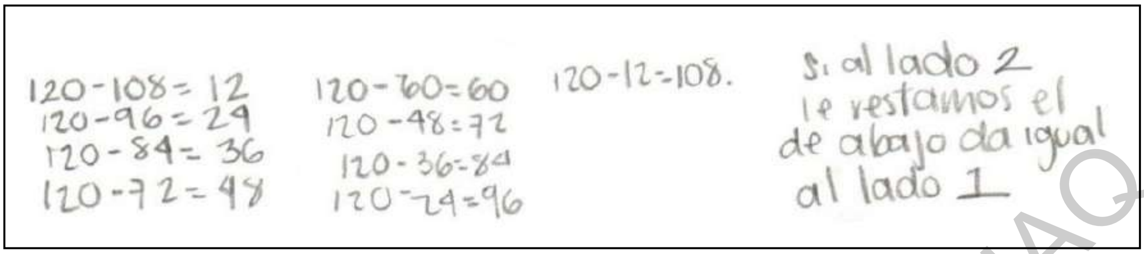


Figura 5.23. Resolución del estudiante E05 utilizando las técnicas numéricas y lengua natural correctamente.

De acuerdo con la coordinación de los registros, el análisis de esta tarea permitió reflejar que los 8 alumnos que proporcionaron respuestas incorrectas no realizaron una conversión de registros al manifestar que los valores del lado 1 aumentaban 12 unidades; mientras que los del lado 2 disminuían en la misma cantidad. Cabe mencionar que tal afirmación no estaba errada, pero no correspondía con lo que se solicitaba en la pregunta de este inciso (Figura 5.24).

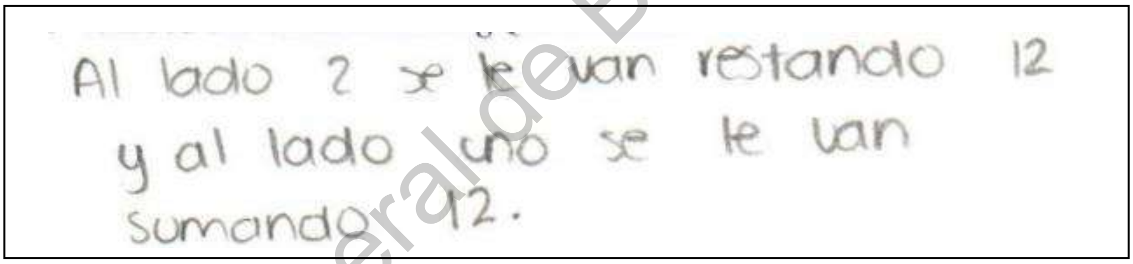


Figura 5.24. Resolución del estudiante E09 utilizando la técnica en lengua natural incorrectamente.

La tecnología de la técnica no estuvo presente en las respuestas de los estudiantes debido a que no se les pidió que argumentaran sus procedimientos. En forma general, las resoluciones de los estudiantes evidenciaron las falencias que tienen éstos al momento de seguir orientaciones que lo conlleven a identificar patrones en un conjunto de números. De esta manera, se afirma en este caso, que el tránsito del registro numérico a un registro en lengua natural no se llevó a cabo en todos los alumnos.

5.5.2. Análisis del ítem b) de la sección 4

La finalidad de esta tarea consiste en que le estudiante exprese el lado 1 del rectángulo en función del lado 2 del mismo y viceversa. La tabla 5.11, muestra el nivel de corrección, la técnica de solución, la coordinación de registros y los errores cometidos por los alumnos.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Algebraica y T. Numérica	3	Correcta	3	Conversión	3		
T. Lengua natural y T. Algebraica	4	Parcialmente correcta	14	Conversión	14		
T. Algebraica	13						
T. Lengua natural	1	Incorrecta	4	No conversión	4	Error de conversión	4

Tabla 5.11. Criterios de análisis del ítem b) de la sección 4.

En la tabla 5.11 se señala que 3 estudiantes resolvieron correctamente el ítem b) de la sección 4; 14 alumnos proporcionaron respuestas parcialmente correctas al expresar el lado 1 del rectángulo en términos del lado 2 y no validar su respuesta; finalmente 3 estudiantes erraron al expresar un lado del rectángulo en función del otro.

La tabla también refleja que 13 alumnos utilizaron la técnica algebraica al expresar el lado 1 del rectángulo en función de la variable x, la cual representa el lado 2 (Figura 5.25).

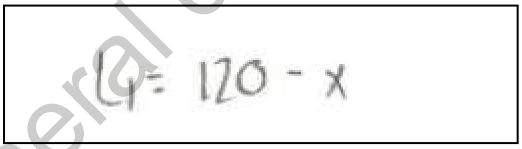


Figura 5.25. Resolución del estudiante E04 utilizando una técnica algebraica parcialmente correcta.

Por otra parte, 4 estudiantes hicieron uso de las técnicas en lengua natural y algebraica a la vez, al escribir una expresión algebraica que representará un lado del rectángulo en función del otro y describir tal procedimiento; 3 alumnos emplearon las técnicas algebraica y numérica al expresar el lado 1 en términos del lado 2 y validar dicha expresión, asignándole valores numéricos a x (Figura 5.26).

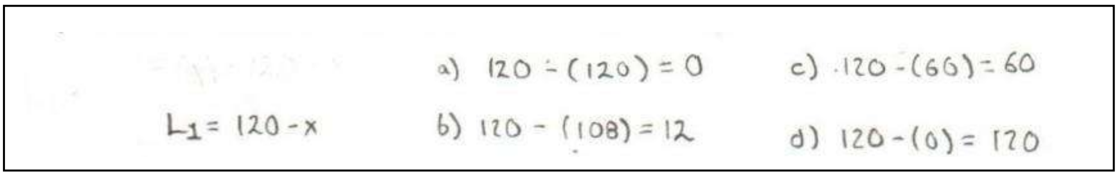


Figura 5.26. Resolución del estudiante E02 utilizando las técnicas algebraica y numérica correctamente.

Finalmente, solo 1 estudiante utilizó la técnica en lengua natural al describir la expresión del lado 1 en función del lado 2 de manera incorrecta o bien no llegar a una conclusión; cometiendo de esta manera un error en la conversión de registro (Figura 5.27).

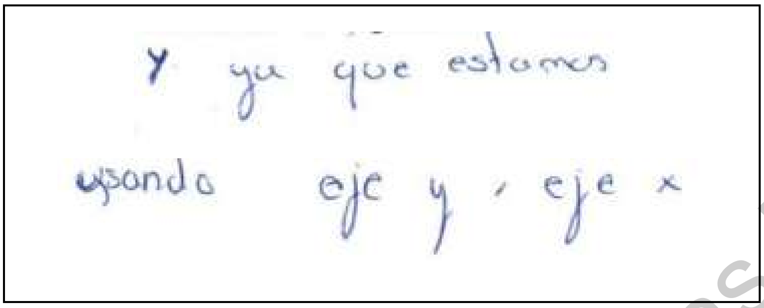


Figura 5.27. Resolución del estudiante E08 utilizando una técnica en lengua natural incorrectamente.

La tecnología de la técnica no estuvo presente en esta tarea, a pesar de que al estudiante se le haya solicitado validar su respuesta. Con relación a esto, en muchas ocasiones la justificación es parte de la técnica t para resolver una tarea T (Morales, 2013). En este caso, el alumno justifica su procedimiento al sustituir los valores de x en la expresión algebraica que representa el lado 1 del rectángulo; pues en esta ocasión la tecnología se integra a la técnica.

En forma general, el desarrollo del ítem b) de la sección 4, no representó dificultad para la mayoría de los estudiantes, debido a que el número de estudiantes que se equivocó en sus respuestas fue mínimo; la conversión del registro en lengua natural al algebraico se llevó a cabo en 17 de 21 estudiantes; reflejando así un buen desempeño de los alumnos en esta tarea.

5.5.3. Análisis del ítem c) de la sección 4

Luego de que el estudiante haya expresado un lado del rectángulo en función del otro lado, como se señala en el previo inciso; la tarea de este ítem consiste en que el alumno determiné una expresión matemática que modele el área del jardín en términos de una sola variable. El desarrollo de la pregunta propuesta en este apartado de la sección 4, es relevante para que el estudiante pueda realizar la sección siguiente, ya que si el alumno en este ítem no establece la expresión del área que se le solicita; el estudiante no podrá responder a las preguntas de la sección 5.

El nivel de corrección, la técnica de solución, la coordinación de registros y los errores cometidos por los estudiantes; se recogen en la tabla 5.12. La tabla indica que 12 alumnos resolvieron la tarea de manera satisfactoria; 5 de las respuestas fueron parcialmente correctas al escribir de forma incompleta la expresión matemática que modela el área del jardín; finalmente, 4 de los estudiantes erraron al determinar dicha expresión matemática.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Algebraica	19	Correcta	12	Conversión	7		
T. Figural y T. Algebraica	1	Parcialmente correcta	5	Tratamiento y Conversión	11		
T. Figural	1	Incorrecta	4	No conversión	4	Error de conversión	4

Tabla 5.12. Criterios de análisis del ítem c) de la sección 4.

La tabla 5.12 también señala que 19 estudiantes emplearon la técnica algebraica; algunos expresaron el área en términos de la variable x; otros escribieron tal expresión de forma incompleta; mientras que algunos, determinaron el área como el resultado de multiplicar el lado 1 del rectángulo $(120 - x)$ con el lado 2 (x) del mismo; realizando de esta manera, tratamiento dentro del mismo registro y conversión de un registro a otro a la vez (Figura 5.28).

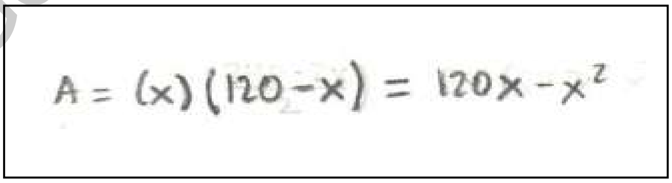


Figura 5.28. Resolución del estudiante E03 realizando tratamiento dentro de una técnica algebraica correctamente.

En la figura 5.29, se muestra la resolución del estudiante E10, en la cual se puede observar que el alumno escribe de forma incompleta la expresión matemática que modela el área del jardín.

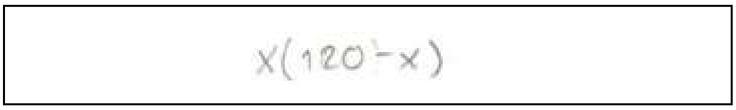


Figura 5.29. Resolución del estudiante E10 utilizando una técnica algebraica parcialmente correcta.

Por otro lado, 1 estudiante utilizó las técnicas figural y algebraica a la vez, al dibujar un cuadrado, señalar que sus lados miden x e indicar que el área de dicho cuadrado es igual a x^2; finalmente, 1 alumno empleó la técnica figural al representar la forma del jardín con un rectángulo con lados de medidas, x y $2x$ respectivamente. Con relación a los procedimientos realizados por estos dos estudiantes con distintas técnicas de solución, es importante señalar que ambos alumnos cometieron un error en la conversión de registros, pues no determinaron una expresión para el área del jardín acorde con el contexto del problema. Por ejemplo, el primer alumno escribió la formula general del área de un cuadrado, la cual no incluye información del problema y el segundo estudiante señala que la superficie del jardín es de forma rectangular cuyas dimensiones son totalmente distintas a las establecidas en el ítem b) de esta sección.

Con respecto a la tecnología de la técnica, esta no estuvo presente, ya que al estudiante no se le pidió justificar su respuesta. El número de alumnos que proporcionaron respuestas correctas no fue reducido, pues 17 de 21 estudiantes lograron determinar una expresión matemática que modelara el área del jardín; situación que refleja que la tarea propuesta en este apartado de la sección no resultó complicada para la mayoría de los alumnos. En términos generales, gran número de los alumnos transitaron del registro en lengua natural al registro algebraico.

5.5.4. Análisis del ítem d) de la sección 4

La tarea propuesta en este ítem pretende poner en evidencia los conocimientos que tienen los estudiantes acerca del concepto de función real. En este aspecto, el alumno después de haber determinado una expresión matemática que modelara el área del jardín, debe ser capaz de argumentar si tal expresión es una función y además debe señalar en el caso de que lo sea, las variables dependiente e independiente.

La tabla 5.13 señala que ningún estudiante resolvió la tarea de forma correcta; 5 de las soluciones fueron parcialmente correctas dado que los alumnos mencionan cuales son las variables dependiente e independiente en la función, pero no justifican la razón por la cual la expresión matemática que modela el área del jardín se puede considerar una función real. Por otra parte, 16 estudiantes erraron al no tener claro los conceptos de variables dependiente e independiente de una función y al establecer razones que no correspondían con la definición de una función real.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Algebraica	2	Correcta	0	No conversión	0		
T. Algebraica y T. Lengua natural	2	Parcialmente correcta	5	Conversión	5		
T. Lengua natural	17	Incorrecta	16	No conversión	16	Error de conversión	16

Tabla 5.13. Criterios de análisis del ítem d) de la sección 4.

En tabla también se puede observar que 17 estudiantes emplearon la técnica de lengua natural al describir las variables que ellos consideraban dependiente e independiente de la función; 2 alumnos utilizaron la técnica algebraica al incluir en su respuesta la función del área en términos de x y señalar en dicha función que la x es la variable independiente y que el área, la cual denotaron con la letra A es la variable dependiente; por último, 2 estudiantes usaron las técnicas algebraica y lengua natural al afirmar que la expresión matemática que modela el área del jardín es una función y al nombrar la letra x como la variable independiente y la letra A como la variable dependiente.

La información de la tabla evidencia que la mayoría de los estudiantes cometieron errores en la conversión de registros; tales desaciertos están relacionados con las siguientes situaciones: a) los alumnos confunden los conceptos de variable dependiente y variable independiente; b) los estudiantes manifiestan que una expresión matemática es una función si contiene una variable con exponente mayor que 1; c) los alumnos mencionan que si una función es de la forma $Cx - x^2$, siendo C una constante, entonces la C es la variable independiente porque no cambia, mientras que la x es la variable dependiente porque depende del valor que se le asigne y d) los estudiantes afirman que si la función está compuesta por el producto de dos factores, uno de los factores es la variable dependiente y el otro es la independiente o viceversa.

En la figura 5.30 se muestra la solución del estudiante E01. En dicha solución, el alumno plantea que la variable independiente es el lado 2 del rectángulo, el cual denota con la letra x y que la variable dependiente sería el lado 1 del rectángulo, pues menciona que como el lado 1 es igual a $120 - x$, entonces depende de la variable x para poder obtener su valor. Es importante mencionar que, en el inciso anterior, el estudiante E01 señaló que el área del jardín está representada por la expresión $A = x(120 - x)$; es así como de esta forma, los errores cometidos por el alumno corresponden con las situaciones a) y d) referidas anteriormente.

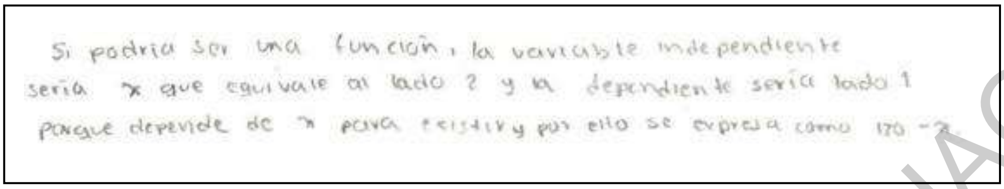

Si podria ser una función, la variable independiente
sería x que equivale al lado 2 y la dependiente sería lado 1
porque depende de x para existir y por ello se expresa como 120 − x

Figura 5. 30. Resolución del E01 con un error en la conversión de registros.

En la resolución del estudiante E14, se aprecia que el alumno señala que el numeró 120 es la variable independiente porque es un valor que permanece constante y que la variable dependiente es la x porque ésta depende de los valores que se le den (Figura 5.31). Este tipo de error corresponde con las situaciones a) y b) mencionadas anteriormente.

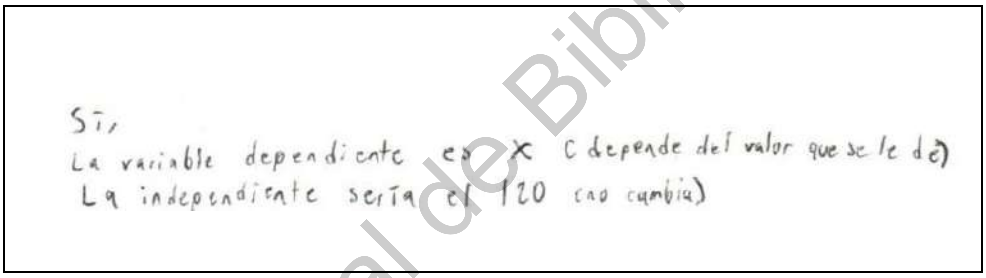

Sí,
La variable dependiente es x (depende del valor que se le dé)
La independiente sería el 120 (no cambia)

Figura 5.31. Resolución del estudiante E14 con un error en la conversión de registros.

En la figura 5.32 se muestra la resolución del estudiante E10, en la cual el alumno menciona que la expresión matemática que modela el área del jardín es una función debido a que el exponente de la variable x es mayor y además señala que la variable independiente es el lado 1 del rectángulo, el cual denota con la letra y. En este sentido, el error cometido por el estudiante se corresponde con la situación b) descrita anteriormente.

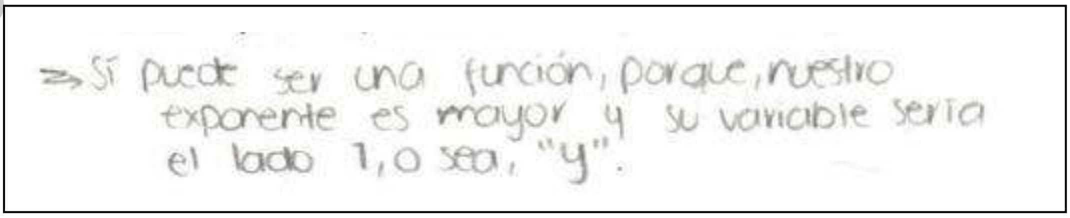

=> Sí puede ser una función, porque, nuestro
exponente es mayor y su variable sería
el lado 1, o sea, "y".

Figura 5.32. Resolución del estudiante E10 con un error en la conversión de registros.

Por otra parte, la figura 5.33 refleja el procedimiento realizado por el estudiante E03, en el cual se puede observar que el alumno indica la función que modela el área del jardín y menciona cuales son las variables dependiente e independiente de tal función; el estudiante justifica la razón del por qué la expresión que representa el área es una función.

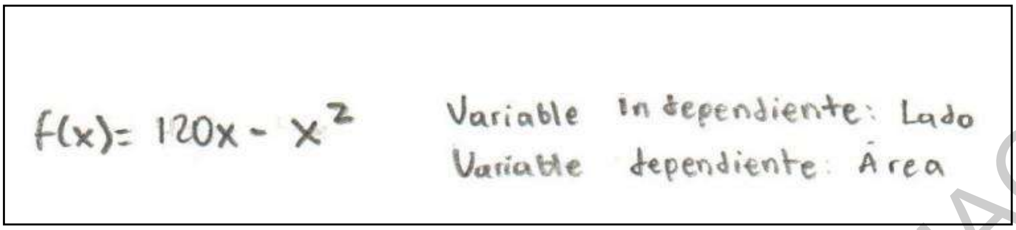


Figura 5.33. Resolución del estudiante E03 utilizando las técnicas, algebraica y lengua natural parcialmente correcta.

De acuerdo con la tecnología de la técnica, esta no estuvo presente en el desarrollo de este ítem ya que los alumnos no argumentaron sus procedimientos. En resumen, la tarea propuesta en este apartado de la sección implicó una actividad de mayor complejidad para los estudiantes debido a que no se obtuvieron respuestas satisfactorias y el número de respuestas incorrectas es mayor como se señala en la tabla 5.13, razón por la cual la conversión del registro algebraico al de lengua natural no se llevó a cabo en la totalidad de los alumnos, pues solo 5 estudiantes cumplieron con tal objetivo.

5.5.5. Análisis del ítem e) de la sección 4

La finalidad de la tarea planteada en este ítem , consiste en que el alumno después de haber establecido que la expresión matemática que modela el área del jardín es una función, sea capaz de escribir tal expresión como una función; el alumno debe escribir la expresión $A = 120x - x^2$ como $f(x) = 120x - x^2$ o puede utilizar otra letra para denotar la función, en este caso se nombra la función del área con la letra f porque es la mas utilizada por la mayoría de los estudiantes.

Respecto a esta tarea, en la tabla 5.14 se muestran el numeró de alumnos que proporcionaron respuestas parcialmente correctas, incorrectas y en blanco. De acuerdo con esto, 15 respuestas fueron parcialmente correctas y no satisfactorias, debido a que los estudiantes escribieron la función que modela el área del jardín, pero no argumentaron sus procedimientos; 3 alumnos se equivocaron al definir la función área y finalmente 3 estudiantes no respondieron a la pregunta planteada en este inciso.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Algebraica	15	Correcta	0				
T. Algebraica y T. Lengua natural	2	Parcialmente correcta	15	Conversión	15		
T. Lengua natural	1	Incorrecta	3	No conversión	3	Error de conversión	3
		No responde	3	No conversión	3		
Ninguna	3						

Tabla 5.14. Criterios de análisis del ítem e) de la sección 4.

La tabla también indica que 15 estudiantes utilizaron la técnica algebraica al escribir la función que modela el área del jardín en términos de la variable x (Figura 5.34).

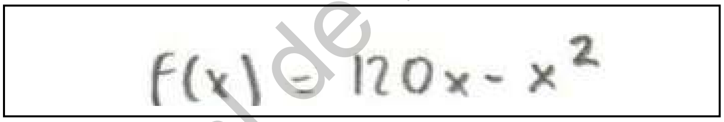


Figura 5.34. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica algebraica parcialmente correcta.

Por otra parte, 2 alumnos emplearon las técnicas algebraicas y lengua natural al escribir la función área en términos de x y definir que representa dicha variable dentro del contexto del problema; 1 estudiante utiliza la técnica en lengua natural al describir que la expresión matemática que modela el área del jardín es una función porque se puede escribir en términos de las variables $x e\, y$, cometiendo de esta forma, un error en la conversión de registros ya que la función es expresada en términos de una sola variable que en este caso es x, la cual representa la longitud de uno de los lados del rectángulo (Figura 5.35). Finalmente, 3 alumnos no hacen uso de ninguna técnica al proporcionar respuestas en blanco.

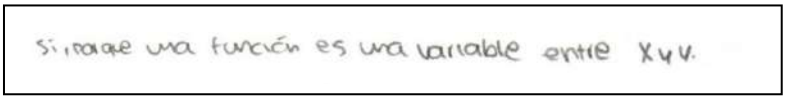
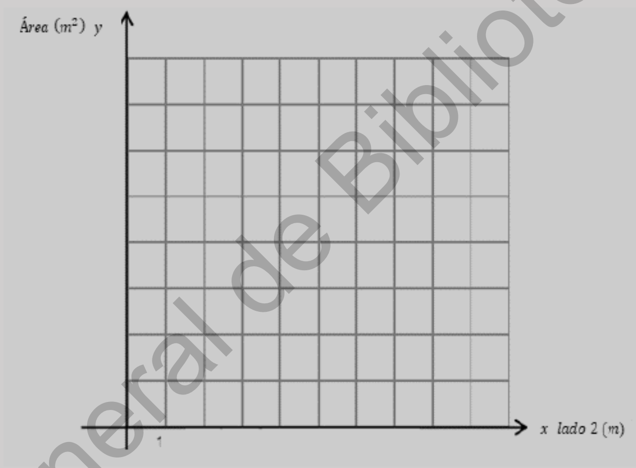


Figura 5. 35. Resolución del estudiante E11 con un error en la conversión de registros.

En la tabla 5.14 se puede notar que el criterio de análisis relacionado con la tecnología de la técnica no es incluido debido a que los alumnos no justificaron sus procedimientos. En forma general, 15 de 21 estudiantes lograron realizar la conversión del registro en lengua natural al registro algebraico al escribir la función área en términos de la variable x, pero no transitaron del registro algebraico al de lengua natural al no argumentar su respuesta.

5.6. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 5: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA.

Sección 5: Representación gráfica del problema. Grafique la función encontrada en la sección anterior y responda las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es el valor máximo de la función? Explique
b) Si colocamos una recta tangente en el valor máximo de la función ¿Qué características tiene? ¿Cuál es la inclinación de la recta tangente? Explique.
c) Si colocamos rectas tangentes antes y después del valor máximo de la función ¿Qué características tienen? ¿Cuál es la inclinación de las rectas tangentes trazadas? Explique

Figura 5. 36. Sección 5 (Representación gráfica del problema).

La intención de esta sección (Figura 5.36). radica en que el alumno después de haber definido la función que modela el área del jardín, grafique e interprete dicha función y luego conteste preguntas relacionadas con la gráfica de la función.

La tabla 5.15 recoge la información de esta primera parte de la sección 5, relacionada con el nivel de corrección, la técnica de solución, la tecnología de la técnica; así como la coordinación de registros y el tipo de errores cometidos por los estudiantes. En la tabla se indica que 13 alumnos resolvieron la tarea de manera correcta; 5 estudiantes respondieron de forma parcial al ubicar en los ejes coordenados, los valores de los lados del rectángulo tal y como se presentan en la tabla propuesta en la sección 4 (Figura 5.21), y además les asignaron a los ejes escalas de valores no proporcionales; finalmente, 3 alumnos proporcionaron respuestas incorrectas al no graficar bien la función área.

Técnica/ registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Gráfica	19	Correcta	13	Conversión	13		
		Parcialmente correcta	5	conversión	5		
T. Gráfica y T. Algebraica	2						
		Incorrecta	3	No conversión	3	Error de conversión	3

Tabla 5.15. Criterios de análisis de la sección 5.

La tabla también muestra que 19 alumnos emplearon la técnica gráfica al dibujar la función área y 2 estudiantes utilizaron las técnicas gráfica y algebraica al señalar en la gráfica de la función área, su notación correspondiente.

En la figura 5.37 se muestra la resolución del estudiante E03, en la cual se puede observar que el alumno grafica de manera adecuada la función área, utilizando escalas proporcionales en los ejes.

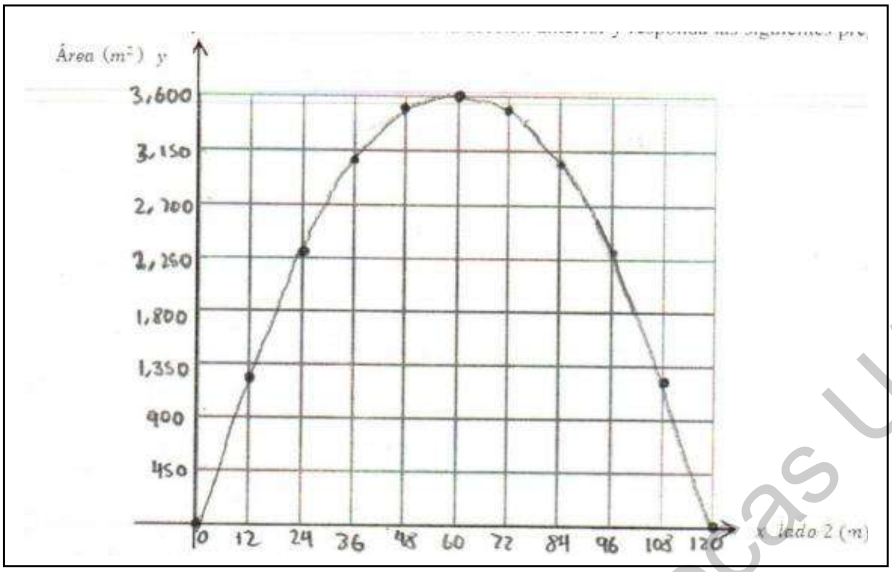


Figura 5. 37. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica grafica correctamente.

Por otra parte, la figura 5.38 muestra la solución del alumno E08, en donde se identifica que el estudiante realizó una gráfica incorrecta de la función área; en su procedimiento se puede observar que las escalas de valores de los ejes coordenados las estableció tal y como se presentan en la tabla señalada en la sección previa; cometiendo de esta manera un error en la conversión de registros, ya que la gráfica que realiza no corresponde con la de la función área.

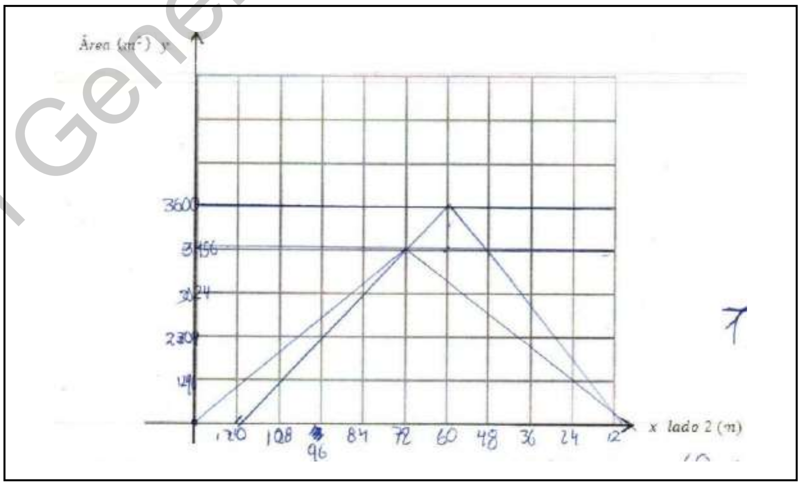


Figura 5. 38. Resolución del estudiante E08 con un error en la conversión de registros.

La tecnología de la técnica no estuvo presente en las producciones de los alumnos, pues en algunas ocasiones no existe la necesidad de pedirle al estudiante que argumente sus procedimientos, debido a que hay situaciones en las que suele suceder, como en este caso, que la tecnología θ se integra a la técnica t ; es decir la justificación es parte de la técnica t para resolver una tarea T (Morales, 2013).

De forma general, la tarea propuesta en esta primera parte de la sección 5, no implicó una actividad de mayor complejidad para los estudiantes, debido que 18 de 21 alumnos realizaron la conversión del registro algebraico al gráfico.

5.6.1. Análisis del ítem a) de la sección 5

En este apartado de la sección 5 se pretende que el alumno luego de realizar la gráfica de la función área, identifique cual es el valor máximo de dicha función. En este caso, el alumno debe notar que el área mayor es igual a $3600m^2$ y además, advertir que dicho valor es el mismo que halló en la tabla propuesta en la sección 2.

En la tabla 5.16, se aprecia que 5 alumnos resolvieron la tarea de forma satisfactoria; 13 estudiantes respondieron de forma parcial debido a que señalaron correctamente cual es el valor máximo de la función, pero sus razones no correspondían con el significado de dicho valor en una función real; Por último, 6 alumnos erraron al indicar que el valor máximo representa el punto más alto de la gráfica de la función.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F	Tecnología de la técnica	F
T. Lengua natural	14	Correcta	5	Conversión	6			θ_2	1
T. Numérica	3	Parcialmente correcta	13	Conversión	12			θ_6	6
T. Algebraica y T. Lengua natural	2	Incorrecta	3	No conversión	3	Error de conversión	3	θ_C	1
T. Lengua natural y T. Numérica	2								

Tabla 5.16. Criterios de análisis del inciso a) de la sección 5.

Es importante resaltar que entre las formas que los alumnos llevaron a cabo la solución de la tarea propuesta en este inciso de la sección, 14 procedimientos se caracterizaron por usar la técnica de lengua natural al señalar el valor máximo de la función y argumentar sus respuestas (Figura 5.39).

Figura 5. 39. Resolución del estudiante E04 utilizando una técnica de lengua natural correctamente.

Por otra parte, 3 estudiantes aplicaron la técnica numérica al escribir la cifra que representa el valor máximo de la función y al señalar en algunas ocasiones que dicho valor es un punto conformado por coordenadas numéricas. Con respecto, a esto último el alumno comete un error en la conversión de registros, debido a que el valor máximo de una función no puede ser definido como un punto (Figura 5.40).

Figura 5.40. Resolución del estudiante E03 con un error en la conversión de registros.

En este mismo orden de ideas, 2 alumnos emplearon las técnicas algebraicas y lengua natural conjuntamente, al expresar que el valor máximo de la función es el valor mayor en el eje $\boldsymbol{y}$ e incluir en su respuesta la notación $f(x) = 3600$; finalmente 2 estudiantes aplicaron las técnicas numéricas y lengua natural a la vez, al mencionar que 3600 es el valor máximo de la función y señalar que el punto con coordenadas $(60{,}3600)$ representa el área máxima de la función y por lo tanto, el valor máximo de dicha función.

En la tabla también se muestran las tecnologías manifestadas por los estudiantes en la justificación de sus procedimientos; 1 alumno empleó la tecnología θ_2 al argumentar que el valor máximo de la función es igual a 3600 porque resulta de multiplicar 60×60; apoyándose de esta forma, en la definición del área de un cuadrado; 1 alumno utilizó la tecnología θ_C al manifestar que el valor máximo de la función representa el área de un cuadrado e indicar que un cuadrado es un tipo de rectángulo; Por ultimo, 1 estudiante evidenció el uso de la tecnología θ_6 al expresar que la función tiene una valor máximo cuando $x = 60$, es decir cuando los lados del rectángulo tienen la misma medida (Figura 5.41).

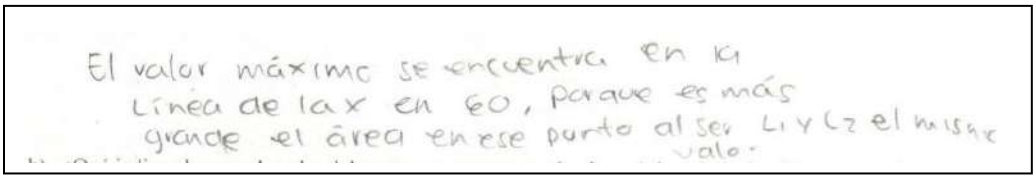


Figura 5.41. Resolución del estudiante E12 utilizando la tecnología θ_6.

En resumen, la tarea planteada en este primer apartado de la sección 5, no implicó una actividad de dificultad para los alumnos, ya que la cantidad de estudiantes que no logró realizar la conversión del registro grafico al de lengua natural fue mínima; el número de respuestas correctas señaladas en la tabla 5.16 evidencia un buen desempeño de los alumnos en la resolución de este ítem.

5.6.2. Análisis del ítem b) de la sección 5

La finalidad de este inciso es que el alumno, después de haber establecido el valor máximo de la función; trace una recta tangente en el punto $(60{,}3600)$, el cual indica que cuando $x = 60$, la función alcanza su valor máximo que es igual a 3600 y luego, describa como es la inclinación de la recta tangente trazada en dicho punto.

La tabla 5.17 recoge los datos relacionados con el nivel de corrección, la técnica de solución, la tecnología de la técnica; al igual que la coordinación de registros y los errores cometidos por los estudiantes. La tabla señala que 7 alumnos acertaron en sus respuestas; 10 estudiantes proporcionaron respuestas parcialmente correctas al referirse solo al valor de la inclinación de la recta tangente trazada en el punto indicado y no describir sus características; 4 soluciones son erróneas al indicar un valor incorrecto de la inclinación de la recta tangente trazada y atribuirle una característica inadecuada a dicha recta.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	18	Correcta	7	Conversión	7				
T. Lengua natural y T. Gráfica	2	Parcialmente correcta	10	Conversión	10			θ_7	7
T. Algebraica y T. Lengua natural	1	Incorrecta	4	No conversión	4	Error de conversión	4		

Tabla 5.17. Criterios de análisis del ítem b) de la sección 5.

En la tabla 5.17 se aprecian las técnicas de solución de los estudiantes para el ítem b) de esta sección. Se advierte que 18 alumnos utilizaron la técnica en lengua natural, es decir, describieron como es la recta tangente trazada en el punto máximo absoluto de la función y algunos casos, mencionaron el valor de su inclinación (Figura 5.42).

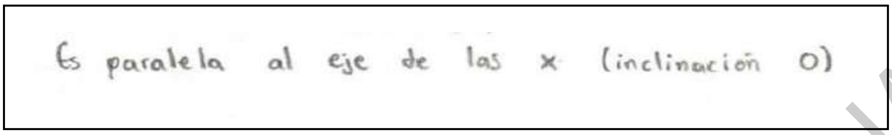


Figura 5.42. Resolución del estudiante E03 utilizando la técnica de lengua natural correctamente.

Por otra parte, 1 estudiante empleó las técnicas, algebraica y lengua natural al referirse al valor de inclinación de la recta tangente trazada en el punto máximo de la función e incluir en su procedimiento la expresión matemática del área en términos de la variable x; así como la derivada de la función área evaluada en $x = 60$. Por último, 2 alumnos utilizaron las técnicas, gráfica y lengua natural simultáneamente, ya que no solo mencionaron como es la recta tangente trazada en el punto máximo, sino que incluyeron en sus respuestas el dibujo de la gráfica de la función área con vértice en el origen y con una recta tangente trazada en dicho punto.

La figura 5.43, muestra la resolución del estudiante E02, en la cual se puede identificar que el alumno comete un error en la conversión de registros, al dibujar la gráfica de la función área con vértice en el origen, simular al eje de las x como la recta tangente trazada en el punto (0,0); así como manifestar que la inclinación de la recta mencionada, tiene un valor negativo con una dirección hacia a los cuadrantes III y IV del plano cartesiano.

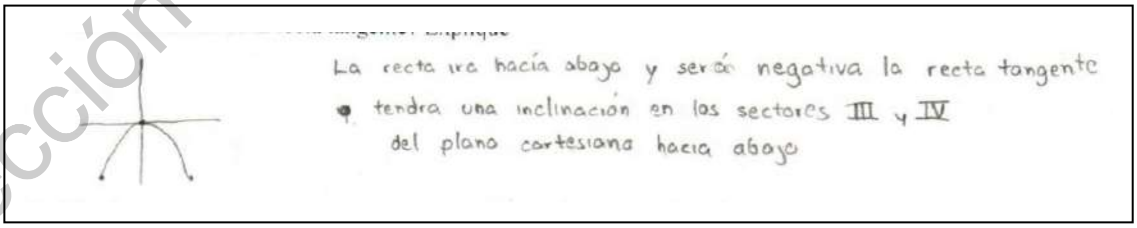


Figura 5. 43. Resolución del estudiante E02 con un error en la conversión de registros.

En este mismo contexto, se resaltan las producciones de los estudiantes que solo indican el valor de la inclinación de la recta tangente trazada en el punto máximo de la función; pero no describe como es dicha recta o viceversa (Figura 5.44).

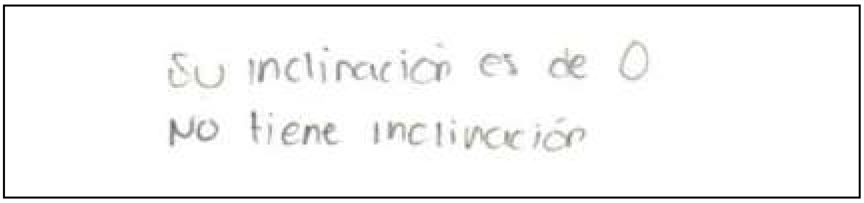

Su inclinación es de 0
No tiene inclinación

Figura 5.44. Resolución del estudiante E13 utilizando una técnica de lengua natural parcialmente correcta.

Conforme con el uso de las tecnologías, en la tabla 5.17 se refleja que 7 de 21 alumnos emplearon la tecnología θ_7 , la cual se refiere a la definición de la recta tangente trazada en el punto máximo absoluto de la función (Figura 5.45).

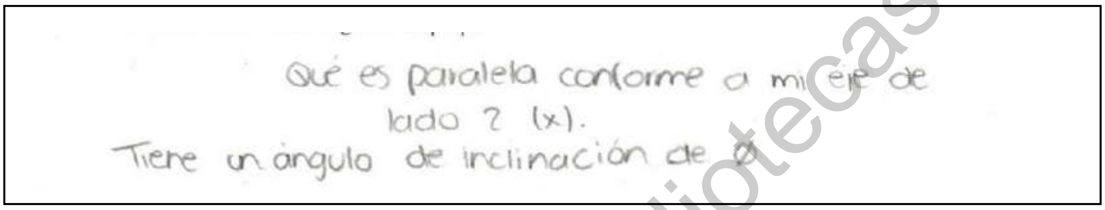

Qué es paralela conforme a mi eje de
lado ? (x).
Tiene un angulo de inclinación de 0

Figura 5.45. Resolución del estudiante E09 utilizando la tecnología θ_7.

De forma general, la mayoría de los estudiantes como se señala en la tabla 5.17 realizaron la conversión del registro grafico al registro en lengua natural, lo cual evidenció que esta tarea no implicó un grado mayor de dificultad para los alumnos.

5.6.3. Análisis del ítem c) de la sección 5

La tarea indicada en este ítem tiene la intención de que el alumno al igual que en el inciso b) de esta sección, traces rectas tangentes antes y después, del punto máximo absoluto de la función; mencione sus características y diga el valor de sus inclinaciones.

En la tabla 5.18 se aprecia que 1 alumno resolvió la tarea de manera satisfactoria; 11 de las soluciones fueron parcialmente correctas, dado que los estudiantes no describieron las rectas tangentes trazadas en los puntos antes y después del punto máximo absoluto de la función, solo indicaron el valor de las inclinaciones de dichas rectas. Por otro lado, 9 alumnos respondieron incorrectamente, al atribuirle características inadecuadas a las rectas tangentes trazadas en los determinados puntos mencionados previamente y al nombrar valores erróneos para las inclinaciones de las rectas tangentes referidas anteriormente.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	19	Correcta	1	Conversión	1				
T. Lengua natural y T. Gráfica	2	Parcialmente correcta	11	Conversión	11			θ_7	1
		Incorrecta	9	No conversión	9	Error de conversión	9		

Tabla 5.18. Criterios de análisis del ítem c) de la sección 5.

En relación con las técnicas de solución, 19 procedimientos se caracterizaron por usar la técnica de lengua natural al describir en algunas ocasiones como son las rectas tangentes trazadas en los puntos antes y después del punto máximo absoluto de la función y en otras referirse solamente al valor de sus respectivas inclinaciones; y 2 alumnos utilizaron las técnicas, gráfica y lengua natural al sumarle a la descripción de las rectas tangentes trazadas en los puntos referidos con anterioridad, una gráfica de la función área.

En la figura 5.46 se puede observar la resolución del alumno E03, en la cual se identifica que éste solo hace referencia a las inclinaciones de las rectas tangentes trazadas en los puntos antes y después del punto máximo absoluto de la función; mas no describe como son tales rectas.

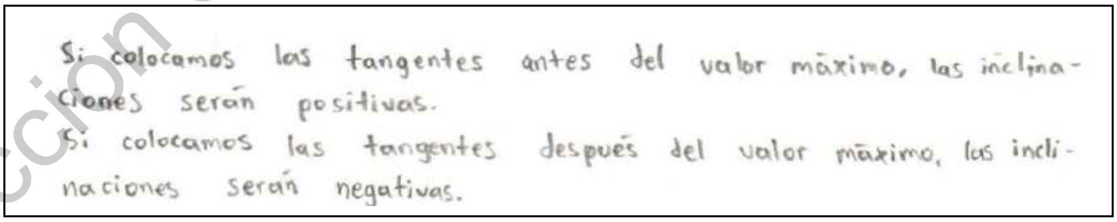

Si colocamos las tangentes antes del valor máximo, las inclina-
ciones serán positivas.
Si colocamos las tangentes después del valor máximo, las incli-
naciones serán negativas.

Figura 5.46. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica de lengua natural parcialmente correcta.

Con base en la coordinación de registros, en la tabla 5.18 se puede notar que 9 de 21 alumnos no llevaron a cabo la coordinación de registros al cometer errores en la conversión; tal es el caso de la solución del estudiante E12, la cual se muestra en la figura 5.47 y en la que se identifica que el alumno menciona que las rectas tangentes trazadas antes y después del punto máximo de la función tienen inclinaciones hacia arriba y ambas son paralelas; respecto a esto, se infiere que el alumno concibe a estas rectas desde una perspectiva diferente a la del comportamiento de la gráfica de la función.

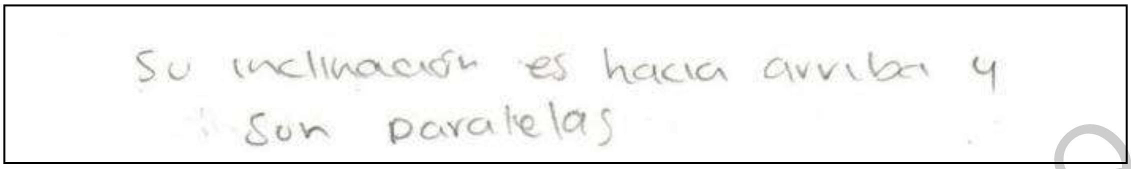

Su inclinación es hacia arriba y
son paralelas

Figura 5.47. Resolución del estudiante E12 con un error en la conversión de registros.

Respecto al uso de las tecnologías, un solo estudiante utilizó la tecnología θ_7 al argumentar su procedimiento centrándose en la definición de la recta tangente trazada en un punto de la función; en esta ocasión el alumno manifiesta que las inclinaciones de las rectas tangentes trazadas antes y después del punto máximo absoluto de la función área son positivas y negativas respectivamente; debido a que la función antes de su valor máximo crece y después de éste decrece (Figura 5.48).

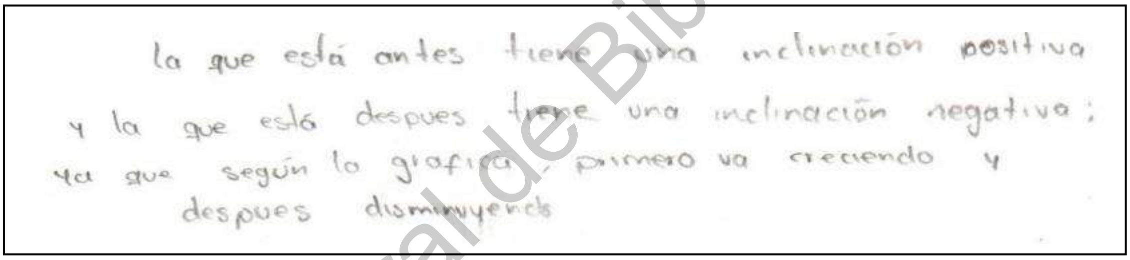

la que está antes tiene una inclinación positiva
y la que está despues tiene una inclinación negativa;
ya que según la grafica, primero va creciendo y
despues disminuyendo

Figura 5.48. Resolución del estudiante E21 utilizando la tecnología θ_7 .

En definitiva, la tarea presentada en este inciso implicó una actividad de mayor complejidad para los alumnos, dado que un solo estudiante proporcionó una respuesta correcta argumentando su procedimiento; y, además, 9 de 21 alumnos no realizaron la conversión del registro gráfico al de lengua natural.

5.7. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 6: EL VALOR DE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE.

La finalidad de esta sección consiste en que el estudiante advierta que la inclinación de una recta tangente trazada en un determinado punto de una función con respecto al eje de las x se define como la pendiente de dicha recta y de esta forma, le asigne un valor a la pendiente de la recta tangente trazada en un punto de la función área (Figura 5.49).

Sección 6: El valor de la pendiente de la recta tangente. Con base en las respuestas previas en la ***sección 5*** y teniendo en cuenta que la pendiente se define como la inclinación de la recta con respecto al eje de las *x*, complete la siguiente tabla, marcando con una X, el valor que usted considere que le corresponde a la pendiente en los diferentes puntos.

Pendiente	**valor**			
	Elección del punto	**Negativo (-)**	**Cero (0)**	**Positivo (+)**
Antes del valor máximo	(,)			
En el valor máximo	(,)			
Después del valor máximo	(,)			

Figura 5.49. Sección 6 (El valor de la pendiente de la recta tangente).

La tabla 5.19 registra los resultados del nivel de corrección, la técnica de solución, la coordinación de registros y lo errores cometidos por los estudiantes. Se aprecia que 12 soluciones proporcionaron respuestas correctas; 5 alumnos resolvieron la tarea de forma parcialmente correcta al indicar adecuadamente los valores de las pendientes de las rectas tangentes y no elegir los puntos; Por ultimo, 4 respuestas resultaron incorrectas debido a que los estudiantes hicieron una mala elección de los puntos y se equivocaron al asignar los valores de las pendientes de las rectas tangentes.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**
T. Numérica	21	Correcta	12	Conversión	12		
		Parcialmente correcta	5	Conversión	5		
		Incorrecta	4	No conversión	4	Error de conversión	4

Tabla 5.19. Criterios de análisis de la sección 6.

El análisis de la tarea planteada en este ítem también permitió identificar las técnicas de solución. La tabla 5.19 muestra que la totalidad de los alumnos utilizaron una técnica numérica al completar la tabla presentada (Figura 5.50).

Pendiente	valor			
	Elección del punto	Negativo (-)	Cero (0)	Positivo (+)
Antes del valor máximo	(,) (98, 3956)			X
En el valor máximo	(,) (60, 3600)		X	
Después del valor máximo	(,) (72, 3956)	X		

Figura 5.50. Resolución del estudiante E05 utilizando una técnica numérica correctamente.

En la figura 5.51 se muestra la resolución del estudiante E02, en la cual se puede notar que el alumno hace una mala elección de los puntos y por consiguiente, asigna valores incorrectos a las pendientes de la rectas tangentes trazadas; cometiendo de esta forma un error en la conversión de registros.

Pendiente	valor			
	Elección del punto	Negativo (-)	Cero (0)	Positivo (+)
Antes del valor máximo	(-2,-3)	X		
En el valor máximo	(0, 0)		X	
Después del valor máximo	(2,-3)			X

Figura 5.51. Resolución del estudiante E03 con error en la conversión de registros.

De acuerdo con la tecnología de la técnica, ésta no estuvo presente el desarrollo de este ítem ya que no se les pide a los alumnos que justifiquen sus procedimientos. Finalmente, la tarea no representó un grado de dificultad para los estudiantes debido a que 17 de 21 alumnos realizaron la conversión del registro en lengua natural al numérico.

5.8. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 7: LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN ÁREA

El propósito de esta sección radica en que el alumno advierta de los resultados de la derivada de la función área evaluada en los puntos localizados en: a) en el valor máximo, b) antes de valor máximo y c) después del valor máximo (Figura 5.52).

> ***Sección 7 La derivada de la función área.*** Responda los siguientes interrogantes, considerando la función del área en términos del del $\boldsymbol{lado}$ **2** definida en la ***sección 4.***
>
> a) Derive la función área y evalúela en el valor máximo encontrado en la ***sección 5.*** ¿Cuál es su resultado? Explique
>
> b) Derive la función área y evalúela en los puntos elegidos, antes y después del valor máximo. ¿Cuáles son los resultados? Explique

Figura 5.52. Sección 7 (La derivada de la función área).

5.8.1. Análisis del ítem a) de la sección 7

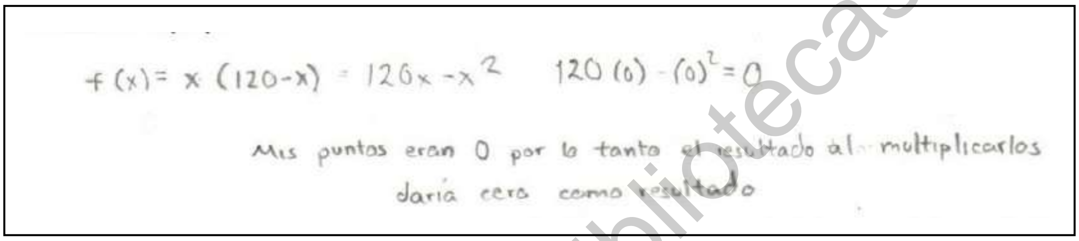
La tarea indicada en este ítem de la sección tiene como finalidad que el estudiante evalué la derivada de la función área en el punto máximo absoluto y expliqué acerca del resultado.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F
T. Algebraica	20	Correcta	0	Conversión	12		
T. Lengua natural y T. Algebraica	1	Parcialmente correcta	16	Conversión y Tratamiento	6	Error de tratamiento	4
		Incorrecta	5	No conversión	3	Error de conversión	4

Tabla 5.20. Criterios de análisis del ítem a) de la sección.

El nivel de corrección, la técnica de solución, la tecnología de la técnica; al igual que la coordinación de registros y los errores cometidos por los alumnos se recogen en la tabla 5.20. La tabla indica que no existieron respuestas correctas; 16 estudiantes resolvieron la tarea de manera parcial al no justificar sus procedimientos; mientras 5 alumnos erraron en sus respuestas, dado que algunos derivaron la función área, pero no la evaluaron en el punto máximo como se les había señalado y en cambió otros, sustituyeron el valor de $x = 60$ en la función área y no en su derivada.

Cabe resaltar que dentro de las distintas maneras que los estudiantes llevaron a cabo la solución de esta tarea; 20 soluciones se caracterizaron por usar una técnica algebraica, puesto que los alumnos manifestaron procesos algebraicos en el cálculo de la derivada de la función área y 1 estudiante empleó las técnicas, algebraica y lengua natural conjuntamente (Figura 5.53).

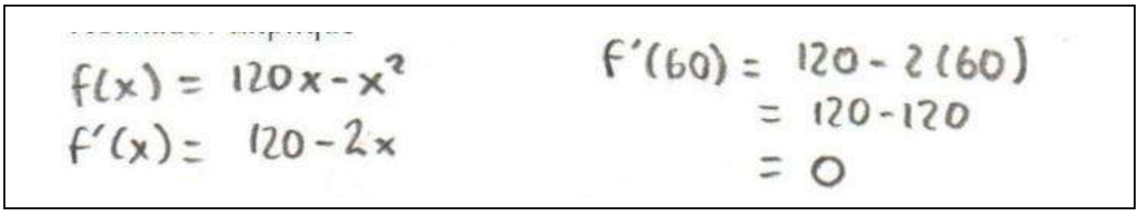

$f(x) = x(120-x) = 120x - x^2 \qquad 120(0) - (0)^2 = 0$

Mis puntos eran 0 por lo tanto el resultado al multiplicarlos daría cero como resultado

Figura 5.53. Resolución del estudiante E02 con un error en la conversión de registros.

En la resolución se puede notar que el estudiante comete un error en la conversión de registros, al sustituir el valor de $x = 0$ en la función área y justificar que el resultado es igual a cero ya que el punto máximo absoluto corresponde con el punto de origen del plano cartesiano. Es importante mencionar que la equivocación de este alumno está relacionada con la respuesta que proporcionó en la sección previa, en la cual indicó que el punto máximo de la función era igual al punto (0,0) y además no derivó la función área como se le solicitaba en el enunciado de este ítem.

La figura 5.54 muestra la solución del estudiante E03, en la cual se puede identificar que el alumno deriva la función área, la evalúa en $x = 60$ y obtiene el resultado igual a 0; pero el alumno no justifica su procedimiento; proporcionando de esta manera, una respuesta parcialmente correcta.


$f(x) = 120x - x^2$

$f'(x) = 120 - 2x$

$f'(60) = 120 - 2(60) = 120 - 120 = 0$

Figura 5.54. Resolución del estudiante E03, utilizando una técnica algebraica parcialmente correcta.

Es importante destacar que el análisis de la tarea sugerida en este inciso permitió evidenciar que 6 de 21 alumnos como se señala en la tabla 5.2, aparte de realizar la conversión de registros también hicieron tratamientos dentro del mismo registro. Por ejemplo, la figura 5.53 muestra la resolución del estudiante E12, en la cual se identifica que el alumno realiza tratamiento dentro del mismo registro algebraico, al aplicar la regla básica de derivada de una resta y además, se nota que para representar la derivada de la función área utilizó el símbolo d/dx , en lugar de la notación $f'(x)$, la cual es más usual en los estudiantes (Figura 5.55).

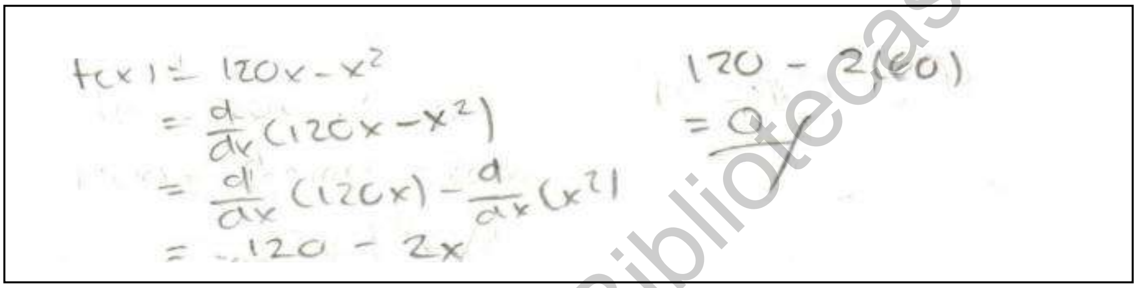


Figura 5.55. Resolución del estudiante E12, realizando tratamiento dentro de una técnica algebraica.

Por el contrario, la figura 5.56 ilustra el procedimiento del estudiante E05, en el cual se puede observar un error de tratamiento, relacionado con el mal uso de la notación $f'(x)$, ya que el alumno, primeramente, nombra la función área con la simbología de la derivada y segundo no señala que la derivada es evaluada en $x = 60$, esto es, $f'(60)$.

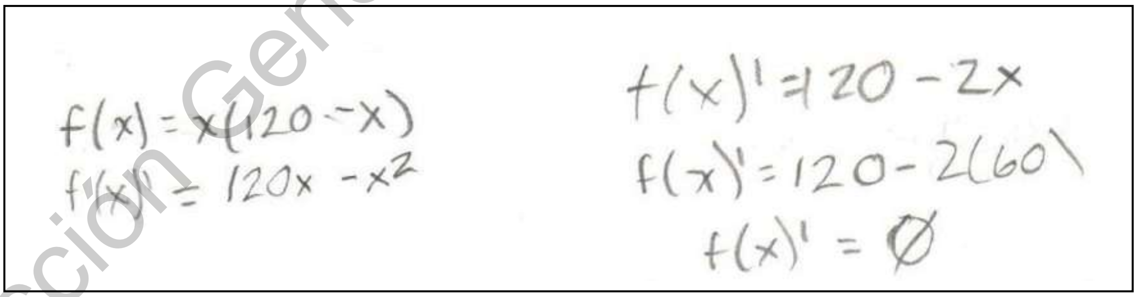


Figura 5.56. Resolución del estudiante E05 con error de tratamiento.

Conforme a la tecnología de la técnica, ésta no estuvo presente en el desarrollo de este inciso, a causa de que los alumnos no justificaron sus procedimientos. En síntesis, la tarea planteada en esta primera parte de la sección 7, significó un grado de dificultad para la mayoría de los estudiantes, puesto que, no existieron respuestas correctas; por el contrario, gran número de soluciones fueron parcialmente correctas, dado que 16 de los 21 alumnos se centraron en derivar y evaluar la función área en el valor indicado, pero no comentaron acerca del resultado obtenido. Además, el número de errores señalados en la tabla 5.20, no fue reducido.

5.8.2. Análisis del ítem b) de la sección 7

La tarea señalada en este apartado de la sección 7, tiene como propósito que el estudiante evalué la derivada de la función área en un punto antes y después del punto máximo absoluto y luego, expliqué acerca de los resultados obtenidos.

En la tabla 5.21 se aprecia que 2 alumnos resolvieron la tarea de manera satisfactoria; 14 soluciones fueron parcialmente correctas, a causa de que los estudiantes evaluaron la derivada de la función área en puntos situados antes y después del punto máximo absoluto y no comentaron acerca de los resultados obtenidos. Por su parte, 4 estudiantes proporcionaron respuestas incorrectas, dado que en lugar de evaluar la derivada de la función área en los puntos sugeridos en el enunciado de esta tarea, evaluaron dicha función en su punto máximo absoluto, es decir, hicieron lo señalado en el inciso previo de esta sección.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Algebraica	18	Correcta	2	Conversión	14				
T. Lengua natural y T. Algebraica	3	Parcialmente correcta	15	Conversión y Tratamiento	3			θ_8	2
		Incorrecta	4	No conversión	4	Error de conversión	4		

Tabla 5.21. Criterios de análisis del ítem b) de la sección 7.

Conforme a las diferentes técnicas empleadas por los estudiantes para resolver la tarea planteada en este apartado de la sección; en la tabla se puede apreciar que 18 respuestas se caracterizaron por el uso de la técnica algebraica; mientras que 3 alumnos emplearon las técnicas, algebraica y lengua natural al mismo tiempo. Con respecto a esto, los estudiantes que optaron por utilizar la técnica algebraica se enfocaron solo en derivar la función área y evaluarla en los puntos antes y después del punto máximo absoluto; reflejando de esta manera un procedimiento totalmente algebraico; entre tanto, los que emplearon las técnicas, algebraica y lengua natural a la vez, lo que hicieron fue argumentar acerca del proceso algebraico mencionado previamente.

La figura 5.57 ilustra la solución del estudiante E03, en la cual se puede notar que el alumno evalúa la derivada de la función área en puntos antes y después del punto máximo absoluto; pero no justifica su respuesta.

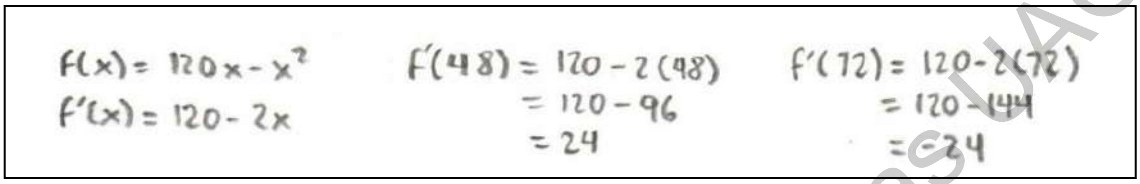


Figura 5.57. Resolución del estudiante E03 utilizando una técnica algebraica parcialmente correcta.

La tabla 5.21 también señala que 3 de 21 alumnos realizaron la conversión de registros; así como tratamiento dentro del mismo registro algebraico; tal es el caso del estudiante E12 que aplica la regla básica de derivación de la derivada de una resta y utiliza la notación d/dx para representar la derivada de la función área (Figura 5.58)

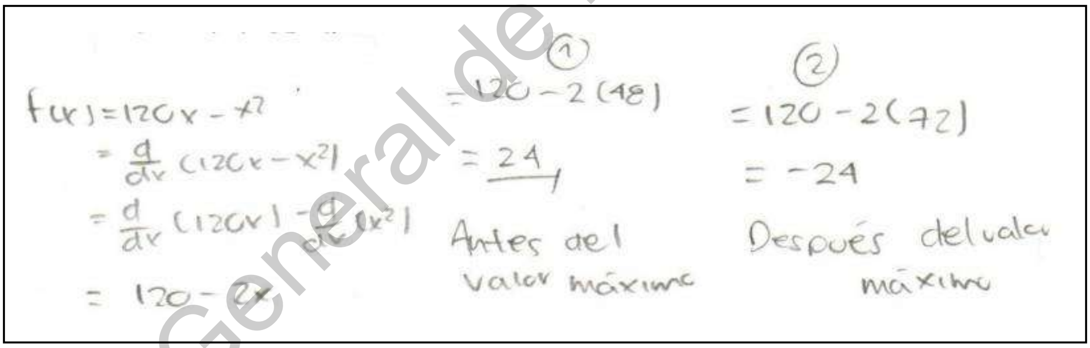


Figura 5.58. Resolución del estudiante E12 realizando tratamiento dentro de una técnica algebraica.

Con relación a la tecnología de la técnica, 2 de 21 alumnos utilizaron la tecnología θ_8 , al manifestar que el resultado de evaluar la derivada de la función área en los puntos antes y después de punto máximo absoluto estaba relacionado con el valor de las pendientes de las rectas tangentes trazadas en dichos puntos, al igual que con el comportamiento de la función área antes y después de su valor máximo (Figura 5.59).

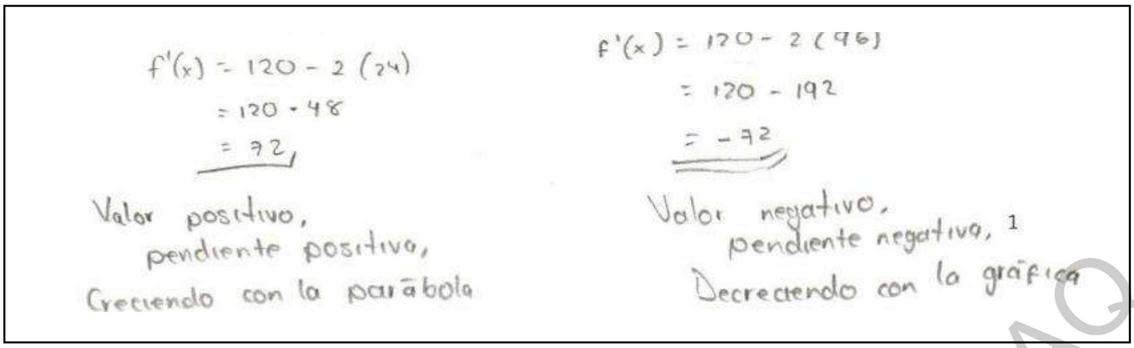


Figura 5.59. Resolución del estudiante E21, utilizando la tecnología θ_8.

De forma general, el desempeño de los estudiantes en la tarea señalada en este inciso implicó un grado de dificultad, ya que 2 de 21 alumnos argumentaron sus respuestas; situación que es común en la mayoría de los estudiantes, pues en la mayoría de las ocasiones, se centran solo en realizar procesos algorítmicos y cuando se les solicita que justifiquen sus procedimientos, no lo hacen. Por otro lado, se puede afirmar que a pesar de que gran número de alumnos no explicaron el porqué de los resultados de sus respuestas, 17 de 21 estudiantes realizaron la conversión del registro en lengua natural al registro algebraico.

5.9. ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 8: LA PENDIENTE Y LA DERIVADA

El objetivo de esta sección consiste en que el alumno advierta de la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente trazada en el punto máximo de la función área y el valor de la derivada evaluada en el mismo punto; de esta forma, el estudiante podrá realizar una reinterpretación del concepto de la derivada, que en la mayoría de las ocasiones es presentado a los alumnos en el registro algebraico, razón por la cual a los estudiantes se les dificulta aplicar este concepto en la resolución de problemas de optimización.

La figura 5.60 muestra la forma en como está estructurada esta sección; inicialmente se les pregunta a los estudiantes acerca de la razón del porqué el resultado de la derivada evaluada en el punto máximo de la función área es nulo; seguidamente se les pide que argumenten sobre el motivo por el cual los resultados de la derivada de la función área evaluada en los puntos antes y después del punto máximo son positivos y negativos respectivamente; finalmente se les solicita que comenten sobre la relación que hay entre la pendiente de la recta tangente trazada en el punto máximo de la función área y el resultado de la derivada evaluada en dicho punto. De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se espera que los alumnos de forma general perciban que la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a la curva en un determinado punto y en un sentido más específico noten que el valor de la derivada evaluada en el punto máximo de una función siempre será nulo, puesto que la pendiente de recta tangente trazada en ese punto es igual a cero.

Sección 8: La pendiente y la derivada. Teniendo en cuenta lo realizado en las ***secciones 6 y 7*** responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en el valor máximo es igual a cero?

b) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor antes del máximo es positivo?

c) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor después del máximo es negativo?

d) De acuerdo con las respuestas previas, diga si existe una relación entre la pendiente y la derivada de la función en el punto máximo. Explique

Figura 5.60. Sección 8 (La pendiente y el área).

5.9.1. Análisis del ítem a) de la sección 8

La tabla 5.22 indica los datos relacionados con el nivel de corrección, la técnica de la solución, la tecnología de la técnica; así como, la coordinación de registros y los errores cometidos por los estudiantes. En este sentido, en la tabla se puede apreciar que ningún alumno resolvió de forma adecuada la tarea; 15 estudiantes respondieron de forma parcial, dado que les faltó claridad al argumentar sus procedimientos; y 6 alumnos erraron al no percatarse de la relación existente entre la pendiente y la derivada.

En la tabla se puede notar que la totalidad de los estudiantes utilizaron la técnica en lengua natural al describir la relación existente entre la derivada de la función área evaluada en su punto máximo y la pendiente de la recta tangente trazada en ese mismo punto.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	21	Correcta	0	No conversión	0			θ_8	15
		Parcialmente correcta	15	Conversión	15				
		Incorrecta	6	No conversión	6	Error de conversión	6		

Tabla 5.22. Criterios de análisis del ítem a) de la sección 8.

La figura 5.61 muestra la resolución del estudiante E12, en la cual se puede observar que el alumno no describe con claridad la razón por la cual el resultado de la derivada de la función área evaluada en el punto máximo es igual a cero.

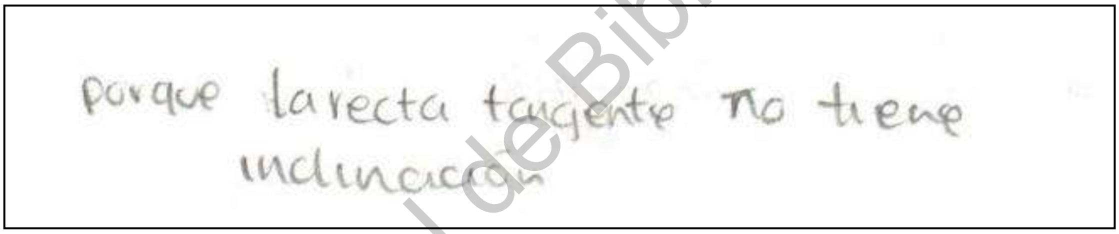


Figura 5.61. Resolución del estudiante E12 utilizando una técnica de lengua natural parcialmente correcta.

Con base en la coordinación de registros, en la tabla 5.22 se puede apreciar que 6 de 21 alumnos no llevaron a cabo la coordinación de registros al cometer errores de conversión. Por ejemplo, el estudiante E21 manifiesta que el resultado de evaluar la derivada en el punto máximo es igual cero porque este punto es el límite de la función. Dicha afirmación no es cierta, ya que la verdadera razón por la cual el resultado es nulo consiste en que la recta tangente en el punto máximo no tiene inclinación (Figura 5.62).

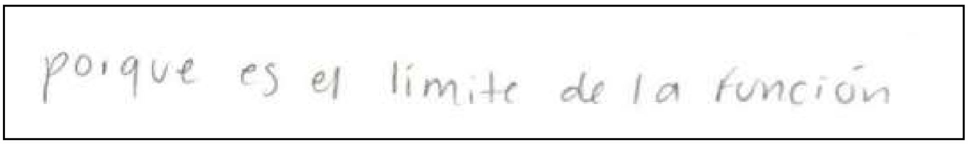


Figura 5.62. Resolución del estudiante E12 con un error en la conversión de registros.

Por otro lado, la tabla también muestra que 15 de 21 alumnos emplearon la tecnología θ_8 al advertir sobre la relación que existe entre la derivada de la función evaluada en el punto máximo y la recta tangente trazada en ese punto (Figura 5.63).

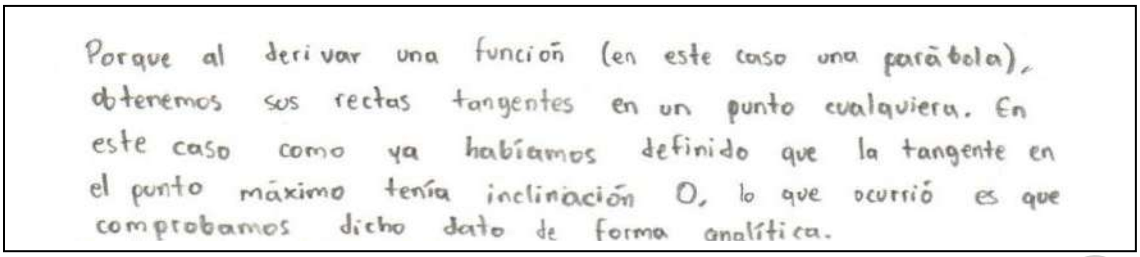

Porque al derivar una función (en este caso una parábola), obtenemos sus rectas tangentes en un punto cualquiera. En este caso como ya habíamos definido que la tangente en el punto máximo tenía inclinación 0, lo que ocurrió es que comprobamos dicho dato de forma analítica.

Figura 5.63. Resolución del estudiante E03 utilizando la tecnología θ_8 parcialmente correcta.

En síntesis, la tarea propuesta en este apartado de la sección 8 no representó un grado de dificultad para los alumnos, debido a que la mayoría de éstos realizaron la conversión del registro algebraico al de lengua natural y además justificaron sus procedimientos.

5.9.2. Análisis del ítem b) de la sección 8

En la tabla 5.23 se puede apreciar que no existieron soluciones correctas; 13 alumnos proporcionaron respuestas parcialmente correctas al no explicar con claridad la relación existente entre la derivada de la función área evaluada en un punto antes del punto máximo y la pendiente de la recta tangente trazada en dicho punto. Finalmente, 8 estudiantes resolvieron la tarea de forma incorrecta al no darse cuenta de la relación entre la derivada y la pendiente, señalada previamente.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	21	Correcta	0	No conversión	0				
		Parcialmente correcta	13	Conversión	13			θ_8	13
		Incorrecta	8	No conversión	8	Error de conversión	8		

Tabla 5.23. Criterios de análisis del ítem b) de la sección 8.

Por otra parte, la tabla también indica que los estudiantes utilizaron la técnica de lengua natural para realizar la tarea; dado que describieron la relación existente entre la derivada evaluada en un punto antes del punto máximo y la pendiente de la recta tangente trazada en ese mismo punto.

La figura 5.64 muestra la resolución del estudiante E21, en la cual se puede percibir que al alumno le falta ser más conciso en su respuesta, ya que al momento de referirse a la pendiente; debe ser más claro y especificar que el resultado de la derivada evaluada en un punto antes del máximo es positiva debido a que la pendiente de la recta tangente trazada en dicho punto es positiva.

Porque su pendiente es positiva, va en dirección
de crecimiento de la gráfica

Figura 5.64. Resolución del estudiante E21 utilizando una técnica en lengua natural parcialmente correcta.

En la tabla también se puede apreciar que 8 de 21 alumnos cometieron errores en la conversión de registros; estas equivocaciones estuvieron sujetas a los argumentos ilógicos que proporcionaron los estudiantes al describir la relación que hay entre la derivada de la función evaluada en un punto antes del máximo y la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto. Por ejemplo, el estudiante E08 menciona que al evaluar la derivada de la función en un punto antes del punto máximo el resultado es positivo, a causa de que todos los valores que toma la función antes de su valor máximo son positivos; afirmación que no es cierta, pues la función área alcanza valores positivos antes y después del punto máximo, cuando x toma valores entre 0 y 30, según el contexto del problema de optimización presentado (Figura 5.65).

Por que
el valor antes de la función es positiva

Figura 5.65. Resolución del estudiante E08 con un error en la conversión de registros.

Según el uso de las tecnologías por parte de los alumnos; en la tabla 5.23 se puede observar que 13 de 21 estudiantes se centraron en la tecnología θ_8 al argumentar sobre el resultado de la derivada de la función área evaluada en un punto antes del punto máximo (Figura 5.66).

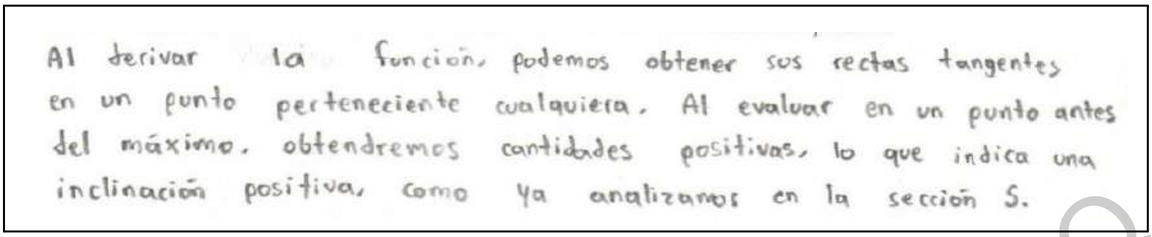

Al derivar la función, podemos obtener sus rectas tangentes en un punto perteneciente cualquiera. Al evaluar en un punto antes del máximo, obtendremos cantidades positivas, lo que indica una inclinación positiva, como ya analizamos en la sección 5.

Figura 5.66. Resolución del estudiante E03 utilizando la tecnología θ_8 parcialmente correcta.

En resumen, la tarea planteada en este inciso de la sección 8 implicó un grado dificultad para los alumnos, ya que un poco más de la mitad de los estudiantes erró en sus procedimientos; solo 13 de 21 estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al registro en lengua natural.

5.9.3. Análisis del ítem c) de la sección 8

La tabla 5.24 señala que no hubo ningún estudiante que realizara la tarea de manera satisfactoria; 13 soluciones son parcialmente correcta, debido a que los alumnos no fueron tan precisos en el momento de referirse a la relación dada entre la derivada de la función área evaluada en un punto después del punto máximo y la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto. Por último, 8 estudiantes proporcionaron respuestas incorrectas al no describir de forma adecuada la relación entra la derivada y la pendiente, señalada anteriormente.

Técnica/ Registro de solución	**F**	**Nivel de corrección**	**F**	**Coordinación de registros**	**F**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**
T. Lengua natural	21	Correcta	0	No conversión	0				
		Parcialmente correcta	13	Conversión	13			θ_8	13
		Incorrecta	8	No conversión	8	Error de conversión	8		

Tabla 5.24. Criterios de análisis del ítem c) de la sección 8.

Cabe destacar que los 21 alumnos emplearon la técnica en lengua natural al escribir la razón del porque el resultado de la derivada de la función área evaluada en un punto después del máximo es negativo.

En la figura 5.67 se ilustra la resolución del estudiante E09, en la cual se identifica que el alumno se refiere a la pendiente en términos generales y no precisa que el resultado de la derivada de la función área evaluada en un punto después del máximo es negativo debido a que la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto es negativa.

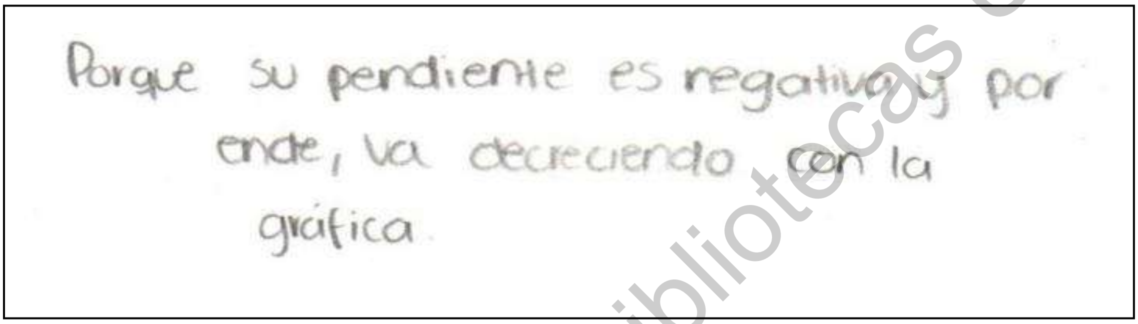

Porque su pendiente es negativa y por ende, va decreciendo con la gráfica.

Figura 5.67. Resolución del estudiante E09 utilizando una técnica en lengua natural parcialmente correcta.

De acuerdo con la coordinación de registros, 8 de 21 alumnos cometieron error en la conversión de registros al mencionar razones ilógicas que no explicaban el motivo del porque el resultado de la derivada de la función área evaluada en un punto después del máximo es negativo. En este contexto, se señala la solución del estudiante E08, quien manifiesta que el resultado de la derivada es negativo, puesto que la función área después de su valor máximo toma valores negativos; lo cual no es cierto, ya que dicha función solo toma valores positivos según lo planteado en el problema de optimización (Figura 5.68).

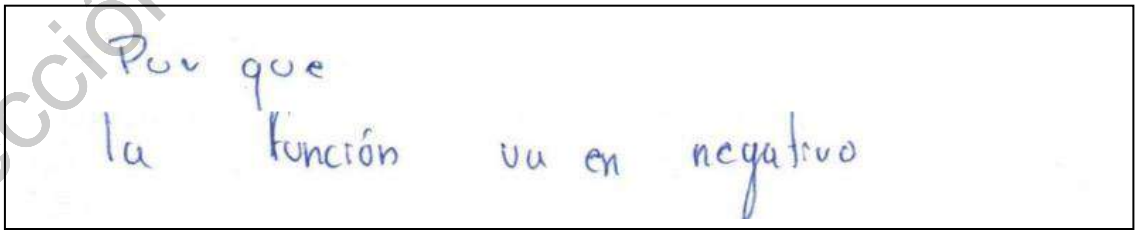

Por que la función va en negativo

Figura 5.68. Resolución del estudiante E08 con un error en la conversión de registros.

El análisis de esta tarea también permitió evidenciar que 13 de 21 alumnos utilizaron la tecnología θ_8 , al argumentar que el resultado de la derivada de la función área evaluada en un punto después del punto es máximo es negativo porque la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto es negativa (Figura 5.69)

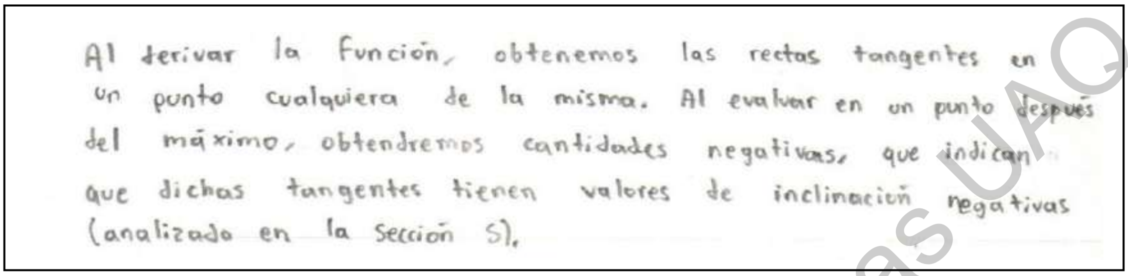

Al derivar la función, obtenemos las rectas tangentes en un punto cualquiera de la misma. Al evaluar en un punto después del máximo, obtendremos cantidades negativas, que indican que dichas tangentes tienen valores de inclinación negativas (analizado en la sección 5).

Figura 5.69. Resolución del estudiante E03 utilizando la tecnología θ_8 parcialmente correcta.

De forma general, la tarea planteada en este ítem comprendió un grado de dificultad para los alumnos, ya que solo 13 de 21 estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al registro en lengua natural.

5.9.4. Análisis del ítem d) de la sección 8

La finalidad de este inciso como se señaló al inicio de esta sección consiste en que el alumno luego de responder las preguntas planteadas en los ítems previos a éste; se dé cuenta que la derivada de una función f evaluada en un punto a de la función representa la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto a. En este sentido, el estudiante realizará una reinterpretación del concepto de la derivada, al vincular la perspectiva visual, numérica y algebraica hilada con el lenguaje natural o escrito (Duval, 2017).

La tabla 5.25 muestra que ningún estudiante resolvió la tarea de manera correcta; 15 alumnos respondieron de forma parcial al no ser tan precisos al momento de describir la relación que hay entre la pendiente y la derivada. Por último, 6 soluciones son incorrectas, dado que algunos estudiantes solo mencionaron que, si existía tal relación, pero no justificaron sus respuestas y en otros en cambio describieron de forma inadecuada la relación entre la pendiente y la derivada.

Técnica/ Registro de solución	F	Nivel de corrección	F	Coordinación de registros	F	Tipo de error	F	Tecnología de la técnica	F
		Correcta	0	No conversión	0				
T. Lengua natural	21	Parcialmente correcta	15	Conversión	15			θ_8	15
		Incorrecta	6	No conversión	6	Error de conversión	6		

Tabla 5.25. Criterios de análisis del ítem d) de la sección 8.

En la tabla también se puede observar que los 21 estudiantes emplearon la técnica de lengua natural al describir la relación que existe entre la derivada de la función área evaluada en un determinado punto y la pendiente de la recta tangente trazada en ese mismo punto.

La figura 5.70 muestra la solución del estudiante E05, en la cual se puede identificar que el alumno le falta ser más específico en sus respuestas; por ejemplo, en lugar de expresar: "si la pendiente es cero la derivada será cero" debería en cambio señalar: "si la pendiente de la recta tangente trazada en el punto máximo es igual a cero, entonces la derivada evaluada en ese punto es nula".

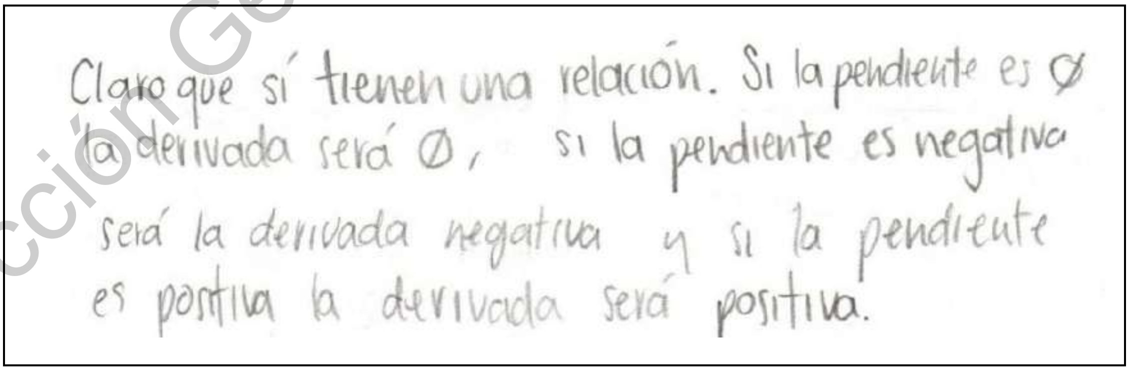

Claro que sí tienen una relación. Si la pendiente es Ø la derivada será Ø, si la pendiente es negativa será la derivada negativa y si la pendiente es positiva la derivada será positiva.

Figura 5.70. Resolución del estudiante E05 utilizando una técnica en lengua natural parcialmente correcta.

Respecto a la coordinación de registros, en la tabla se puede observar que 7 de 21 estudiantes no realizaron la conversión de registros, algunos no describieron de forma acertada la relación que existe entra la derivada de la función área evaluada en un determinado punto y la pendiente de la recta tangente trazada en ese punto y otros en cambio, afirmaron que, si había una relación, pero no justificaron su respuesta (Figura 5.71).

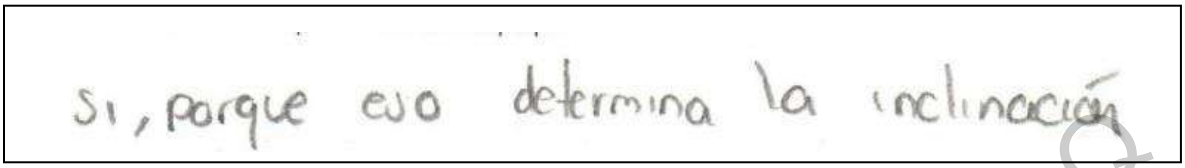

Si, porque eso determina la inclinación

Figura 5.71. Resolución del estudiante E15 con un error en la conversión de registros.

La tecnología de la técnica estuvo presente en el desarrollo de esta tarea; en la tabla 5.25 se puede notar que 15 de 21 alumnos usaron la tecnología θ_8 al expresar que la derivada de la función área evaluada en un determinado punto de la función representa la pendiente de la recta tangente trazada en dicho punto (Figura 5.72).

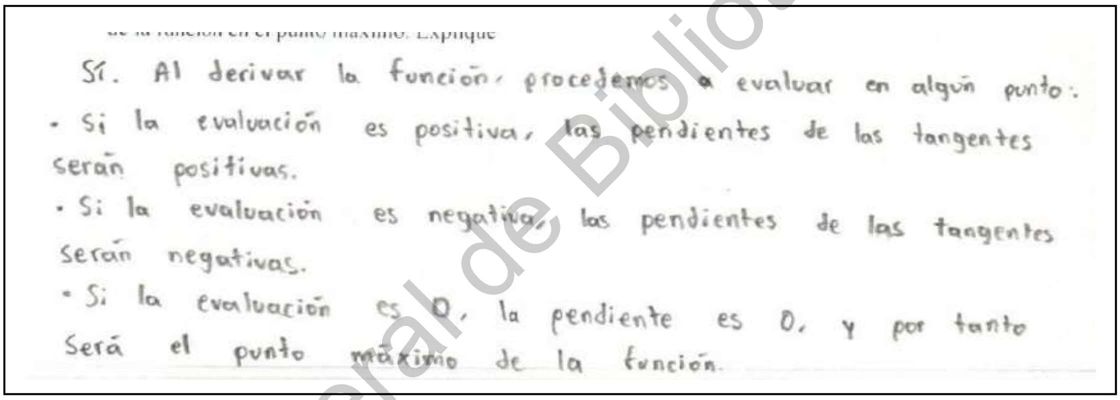

Sí. Al derivar la función, procedemos a evaluar en algún punto:
- Si la evaluación es positiva, las pendientes de las tangentes serán positivas.
- Si la evaluación es negativa, las pendientes de las tangentes serán negativas.
- Si la evaluación es 0, la pendiente es 0, y por tanto será el punto máximo de la función.

Figura 5.72. Resolución del estudiante E03 utilizando la tecnología θ_8.

En resumen, la tarea propuesta en este apartado de la sección 8, representó un poco de dificultad para los alumnos, puesto que 7 de 21 estudiantes no realizaron la conversión del registro algebraico al registro en lengua natural, es decir, no se percataron de la relación que existe entre la derivada de una función evaluada en un punto y la pendiente de la recta trazada en ese punto; no logrando de esta forma, una reinterpretación del concepto de la derivada.

5.10. ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA SECUENCIA DIDÁCTICA

A partir del análisis detallado de cada una de las secciones que conforman la secuencia didáctica, se logró evidenciar los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes y además establecer en que sección estuvieron concentradas este tipo de equivocaciones.

Cabe mencionar que estos errores están definidos de acuerdo con los criterios de análisis expuestos al inicio de este capítulo (Técnica o registro de solución, coordinación de registros y la tecnología de la técnica). La tabla 5.26 muestra un resumen de lo que se ha expuesto previamente.

Sección	**Ítem**	**Conversión de registros**	**Tipo de error**	**F**	**Tecnología de la técnica**	**F**	**Tecnologías emergentes**	**F**
2		Figural-Algebraico	Error de conversión	8	NP	0		
3	c	Numérico-L. natural	Error de conversión	7	NP	0	θ_B	1
	e	Numérico-Figural	Error de conversión	12	NP	0		
4	f	Numérico-L. natural	Error de conversión	12	θ_1	4		
	a	Numérico-L. natural	Error de conversión	8	NP	0		
	d	Numérico-L. natural	Error de conversión	16	NP	0		
5	c	Gráfico- L. natural	Error de conversión	7	θ_8	7		
8	a	Algebraico-L. natural	Error de conversión	6	θ_8	15		
	b	Algebraico-L. natural	Error de conversión	8	θ_8	13		
	c	Algebraico-L. natural	Error de conversión	8	θ_8	13		
	d	Algebraico-L. natural	Error de conversión	6	θ_8	15		
		TOTAL		**98**		**67**		**1**

Tabla 5.26. Errores más frecuentes de los estudiantes en la secuencia didáctica según los criterios de análisis.

La tabla 5.26 indica las secciones en las que los estudiantes presentaron más errores. Inicialmente se puede notar que los alumnos en la sección 2 tuvieron inconveniente al transitar del registro figural al algebraico. En este sentido, el estudiante luego de realizar una representación geométrica del jardín, se le dificultó determinar expresiones matemáticas que representaran el perímetro y el área de dicho jardín. Una de las equivocaciones más frecuentes como se ha mencionado en el apartado que corresponde al análisis de esta sección, está relacionada con el hecho que los estudiantes expresan tanto el perímetro y el área del jardín en función de distintas variables. En este sentido, los estudiantes no tienen claro que para formular la función a optimizar es necesario definir las condiciones en términos de una variable.

Por otro lado, el análisis de la sección 3 permitió evidenciar errores de los estudiantes en los ítems c, e y f. Con relación al inciso c), alumno se le dificultó pasar del registro numérico al registro de lengua natural, pues, no describió de forma adecuada la tendencia de los valores del área del Jardín. Asimismo, los estudiantes erraron al resolver el inciso e), debido a que no eligieron correctamente los valores de las dimensiones que generaran el área máxima del jardín y por ende no realizaron una representación geométrica apropiada del jardín, dificultándose de esta manera el tránsito del registro numérico al registro en lengua natural. Por último, en lo que respecta al ítem f), los alumnos se les hizo difícil coordinar el registro numérico y el registro de lengua natural, al no argumentar que no pueden existir otros valores para las dimensiones del jardín que den un área más grande. Además, el estudiante no señala los valores entre los cuales se encuentra el área máxima.

Otra de las secciones en las que se evidenció gran cantidad de errores de los estudiantes, es la sección 4. En cuanto al desarrollo del apartado a) de esta sección, los alumnos presentaron dificultad al encontrar una relación entre el primer valor de la columna del lado 2 del rectángulo con cada uno de los valores de la columna del lado 1 del mismo. En este aspecto, el alumno debía notar que los valores lado 2 del rectángulo resultaban de restar 120 con cada uno de los valores del lado 1 del rectángulo. También los estudiantes mostraron dificultad en el inciso d) al no saber argumentar por qué la expresión matemática que modela el área del jardín es una función y al no identificar cuáles son las variable independiente y dependiente de dicha función. Las equivocaciones cometidas por los estudiantes en estos dos apartados de esta sección muestran la dificultad que éstos presentaron al realizar la conversión del registro numérico al de lengua natural.

Asimismo, a los alumnos se les dificultó resolver el inciso c) de la sección 5, ya que no describieron de forma adecuada la inclinación de las rectas tangentes trazadas antes y después del punto máximo de la función área. Finalmente, en el análisis de la sección 8 se evidenciaron un gran numeró de errores de los estudiantes, al no explicar de forma correcta la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente trazada en un punto determinado de la función área y la derivada de esta función evaluada en ese mismo punto. Las respuestas incorrectas proporcionadas por los alumnos en esta sección mostraron las falencias de éstos, al transitar del registro algebraico al de lengua natural.

Según las tecnologías de la técnica, se puede notar que no están presentes en algunos incisos de las secciones destacadas en la tabla 5.26. En este aspecto, las secciones 3,4,5 y 8 fueron las que reflejaron presencia de las tecnologías. Por ejemplo, en el ítem f) de la sección 3, los estudiantes emplearon la tecnología θ_1 al manifestar que no podían existir otros valores para las dimensiones del jardín que generaran un área máxima debido a que el perímetro variaría, afirmación que no es válida, pues según el contexto del problema de optimización planteado, el perímetro del jardín es constante. De igual manera, los estudiantes utilizaron la tecnología θ_8 al resolver cada uno de los ítems de la sección 8, los alumnos manifestaron de forma parcial que la pendiente de la recta tangente trazada en un determinado punto de la función área está relacionada con la derivada de dicha función en ese mismo punto. También los estudiantes usaron la tecnología θ_7 al describir las características de las rectas tangentes trazadas antes y después del punto máximo de la función área. Por último, en la tabla 5.26, se puede notar que un solo estudiante empleó la tecnología θ_B al mencionar que los valores del lado 1 del rectángulo son directamente proporcionales con los valores del lado 2 del rectángulo, lo cual no es acertado pues ambos valores no guardan relación de proporcionalidad.

En forma general, los errores cometidos por los estudiantes en las secciones expuestas con anterioridad impidieron que los alumnos realizaran una reinterpretación completa del concepto de la derivada en la resolución del problema de optimización propuesto. Expresado en otras palabras, la dificultad que presentaron los alumnos en transitar en los diferentes registros de representación causó que la reinterpretación de este concepto matemático se hiciera de forma parcial.

Lo previamente expuesto implica incorporar cambios en las actividades y tareas que se les proponen a los estudiantes para promover una comprensión mediante los distintos registros de representación y uso de técnicas (procedimientos). También evidencia la necesidad de proponer tareas y actividades que demanden validaciones y explicaciones (tecnologías) a través de los cuales los estudiantes proporcionen sentido a su propia actividad matemática. Asimismo, el profesor debe modificar su papel en el aula, dejando atrás su carácter como trasmisor del aprendizaje y actuando como gestor del conocimiento. Para ello debe dejar su interpretación de la enseñanza de las matemáticas como un arte y dejar de considerar que el aprendizaje depende solo del grado en que el profesor dominase dicho arte (conocimiento). Pero, sobre todo, el profesor debe despojarse de la idea de que el conocimiento depende de la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista, es decir, el propio profesor (Brousseau, 2000).

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un estudio de la reinterpretación del concepto de la derivada en la resolución de los problemas de optimización en estudiantes de Bachillerato. En este apartado, inicialmente se presentan las conclusiones generales derivadas de la aplicación de la propuesta. Posteriormente, se resaltan las aportaciones o contribuciones de la propuesta a la docencia y a la enseñanza de la derivada, sin obviar las limitaciones y aspectos de mejora de ésta. Luego, se precisa sintetizar las conclusiones obtenidas relacionadas con el cumplimiento de los objetivos planteados, así como de la hipótesis. Finalmente, se concluye el capítulo, describiendo algunas líneas abiertas sobre las cuales se puede continuar con el trabajo iniciado.

6.1. CONCLUSIONES SOBRE LOS RESULTADOS GENERALES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Después de realizar la parte experimental de este estudio y el análisis detallado de cada una de las secciones de la secuencia didáctica, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

Los estudiantes no presentaron dificultad al realizar una representación figural del problema de optimización planteado. En este sentido, evidenciaron su capacidad de llevar a cabo la conversión del registro en lengua natural al registro figural.

En contraste a lo mencionado previamente, el análisis de la sección 3 evidenció el inconveniente de los alumnos en transitar del registro numérico al registro figural. La dificultad consistió en la percepción visual de los estudiantes de concebir el cuadrado y el rectángulo como dos figuras distintas; obviando la parte conceptual y definición formal, que indica que un cuadrado también es un rectángulo porque posee dos pares de lados paralelos entre sí y cuatro ángulos rectos. En este sentido, Moriena y Scaglia (2003) señalan que las dificultades de los alumnos podrían explicarse por el predomino de la componente figural sobre la conceptual sobre todo en los libros de texto. Este predominio estaría justificado por la influencia de la percepción visual en la formación de los conceptos.

Por otro lado, los resultados de la sección 2 reflejaron la falencia que tuvieron los alumnos en coordinar los registros figural y algebraico, ya que después de realizar una representación geométrica del problema, se les hizo complicado determinar expresiones matemáticas que representaran el área y el perímetro del jardín. En efecto, los alumnos no tienen claro que para formular la función a optimizar es necesario definir las condiciones en términos de una variable. De esta manera, se necesita fortalecer los significados asociados al trabajo interpretativo de formular funciones a partir de una misma variable.

El análisis de esta parte experimental también permitió identificar que a los estudiantes les resulta complicado argumentar sobre patrones numéricos hallados a partir de una secuencia de números. Lo previo manifiesta que los alumnos han tenido limitado trabajo en actividades que les permita llevar a cabo generalizaciones a partir de casos particulares. En cambio, cuando, los elementos de la secuencia se denotan con una variable, les resulta más fácil establecer una fórmula general para la serie de valores que les fueron presentados. De acuerdo con esto, en algunas ocasiones, el proceso de generalización en una situación finaliza cuando los estudiantes registran lo que han observado en la misma; pocas veces se realiza un proceso de reflexión con aquello que los alumnos "ven, dicen y registran" (Ochoa, 2006). Asimismo, cuando se les solicita validar (expresar la tecnología) la expresión general encontrada, no lo hacen. El proceso de validar o justificar la propia actividad matemática, resulta ajeno en los alumnos por lo que se sugiere que hacen falta escenarios en el aula que les permita desarrollar esta competencia de validación. Se concluye que en esta ocasión los estudiantes no lograron coordinar los registros, numérico y en lengua natural.

Es importante mencionar, que incluir un registro numérico en la sección 4 de la secuencia didáctica facilitó que los alumnos determinaran de manera adecuada la función objetivo que modela al problema de optimización propuesto. Es decir, hallaron la función que representa el área del jardín. De esta forma, la mayoría de los estudiantes realizaron la transición entre el registro numérico y algebraico.

Por otro parte, el estudio de los resultados también reflejó que los alumnos presentan equivocaciones con respecto al concepto de función real y los tipos de variables de dicha función. Esta dificultad se reflejó en el apartado d) de la sección 4, cuando los estudiantes no justifican por qué la expresión matemática que modela el área del jardín es una función y además cuando confunden los significados de variable dependiente e independiente de una función. Esta situación sucede debido a que el concepto de función en algunas instituciones se limita a ser representado a través de una fórmula, una tabla o una gráfica, sin articulación entre los diferentes registros, y por lo tanto no representa aprendizajes significativos para el estudiante (Dorado y Díaz, 2014). Entonces, es así como los alumnos al tener una percepción equivocada del concepto de función no realizaron la conversión del registro algebraico al de la lengua natural.

Los estudiantes realizaron una descripción incorrecta de las pendientes de las rectas tangentes, trazadas en puntos situados antes y después del valor máximo de la función área. Esta dificultad es causada por una inadecuada interpretación de la gráfica de la función. En este aspecto, los alumnos no asociaron el valor de las pendientes con el comportamiento de la función. Se puede decir que para los estudiantes fue difícil llevar a cabo la coordinación de los registros gráfico y lengua natural.

El análisis de esta secuencia didáctica también permitió evidenciar que la mayoría de los alumnos son buenos calculando derivadas y aplicando las reglas de derivación. De esta forma los estudiantes, proporcionaron respuestas correctas al derivar la función área y evaluarla en el valor máximo de dicha función y en puntos localizados antes y después del mismo. En este sentido, los alumnos muestran estar familiarizados con el registro algebraico, al menos de forma mecanizada. Por el contrario, cuando se les solicitó que reflexionaran sobre los resultados de dichas derivadas, no fueron tan precisos, así como con el cálculo de las mismas. Conforme a esto último, los estudiantes realizaron una conversión del registro algebraico al de lengua natural de una forma parcialmente correcta.

De acuerdo con las tecnologías de las técnicas de solución, éstas no fueron constantes en el desarrollo de la secuencia didáctica, debido a que la mayoría de los estudiantes no justificaron sus procedimientos. Esto se debe a que en algunas ocasiones a los alumnos se le presentan tareas en donde se le solicita que hagan uso de su memoria para reproducir hechos, reglas, fórmulas o definiciones, generalmente respondiendo a preguntas cerradas (Chávez y Martínez, 2018).

Finalmente, las dificultades que tuvieron los alumnos en establecer conexiones entre los diferentes registros de representación y la no justificación de los procedimientos empleados (técnicas utilizadas), no permitieron que éstos realizaran una reinterpretación completa del concepto de la derivada. Frente a esto, no bastará con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir el concepto, es decir, el carácter expositivo y transmisivo para ejemplificar los procedimientos de resolución de problemas no permite construir un conocimiento en el estudiante. En este sentido Gascón (1998) alude a que es necesario despojarse de la idea de que el aprendizaje depende solo del grado en que el profesor domina el arte de enseñar y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es más complejo que eso. Uno de los elementos que influye es precisamente crear escenarios que permitan la manipulación de diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, para esto es fundamental que el profesor sea capaz de diseñar las actividades o tareas para tal fin y gestionar su desarrollo en el aula. Por otra parte, no es suficiente con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros, sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto (Camargo,2013). De igual forma, las actividades y tareas también deben demandar validaciones y explicaciones (tecnologías) a través de las cuales los estudiantes proporcionen sentido a su propia actividad matemática. Asimismo, el profesor debe transformar su rol en el aula, dejando a un lado, su carácter como trasmisor del aprendizaje y actuando como gestor del conocimiento.

6.2. APORTACIONES, LIMITACIONES Y ASPECTOS DE MEJORA DE LA APLICACIÓN Y DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Las investigaciones han reportado que los estudiantes son muy buenos calculando derivadas mediante el uso de las reglas de derivación. Con respecto a esto, una de las aportaciones principales de este estudio consiste en presentar a los alumnos la noción de la derivada en un escenario contextualizado (que permitió apreciar las dificultades en la comprensión de dicha noción). Para ello, se diseñó una secuencia didáctica guiada, presentada en hojas de trabajo, cuya finalidad es que el alumno realice una reinterpretación de este concepto matemático a través de la resolución de un problema de optimización sencillo. Es relevante mencionar, que la secuencia didáctica propuesta no pretendía poner a prueba los conocimientos de los alumnos acerca del concepto de la derivada. Por el contrario, tiene la intención que éstos establezcan conexiones entre los distintos registros de representación, validen sus procedimientos con el empleo de tecnologías (praxeologías matemáticas) y de esta forma, favorecer una comprensión más *amplia de la derivada.*

La mayoría de los trabajos referentes a la enseñanza de la derivada a través de la solución de problemas de optimización descritas en el capítulo 1, se centran en el uso de software educativos como Geogebra, Cabrí, Derive, entre otros. Conforme a esto, se elaboró esta secuencia con el propósito de que los docentes puedan aplicarla en cualquier institución sin necesidad de utilizar algún software como los ya mencionados, ya que en algunas escuelas los alumnos no tienen acceso a este tipo de recurso. Asimismo, el hecho de que la secuencia didáctica es guiada les facilita a los estudiantes resolver las actividades propuestas por su propia cuenta, haciendo uso de sus conocimientos previos y con la mínima intervención del docente. Con lo previo se pretendía evitar el carácter expositivo y transmisivo de predominan en las clases de matemáticas.

Por otro lado, se reconoce el carácter limitado del desarrollo de la propuesta, en cuanto al tiempo asignado para llevar a cabo las actividades. En este aspecto, se requería que la secuencia didáctica fuera desarrollada en una sección de clase de dos horas. Pero el docente titular que estaba a cargo del grupo muestra, solo disponía de una hora por cada clase de matemáticas, motivo por el cual la aplicación de la prueba se llevó a cabo en dos días consecutivos, en secciones de clase de 1 hora por día.

Conforme a lo anterior, otra de las limitaciones consistió en la inasistencia de 9 alumnos en el segundo día de la aplicación de la secuencia. Inicialmente se contaban con 30 estudiantes, pero con la ausencia de algunos, solo se tuvieron en cuenta 21 alumnos, los cuales desarrollaron la secuencia didáctica completa. Frente a esto, el docente a cargo expresó que la falta de los estudiantes a la clase de matemáticas se debe a que es impartida muy temprano. Es decir, es la primera hora de clase del día que los alumnos reciben.

Dentro de los aspectos de mejora se contempla el hecho de reducir el número de secciones de la secuencia didáctica, para optimizar el tiempo de aplicación de ésta y así evitar cuestiones como las señaladas anteriormente. Por otra parte, las actividades de la sección

5, pueden ser propuestas a los estudiantes con el uso de software educativos para facilitarles una visualización dinámica del comportamiento de las pendientes de las rectas tangentes trazadas a la función área; aunque este no sea el caso de esta investigación como ya se mencionó; no se obvia que el empleo de un software resulta atractivo para la mayoría de los alumnos. Finalmente, teniendo en cuenta que las actividades propuestas en la secuencia involucran varios conceptos previos por parte de los alumnos, se recomienda propiciar espacios de retroalimentación, discusión y reflexión sobre cada una de las soluciones proporcionada por los estudiantes, ya que por las limitaciones del tiempo no fueron posible.

6.3. CONCLUSIONES SOBRE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta de investigación de este trabajo es la siguiente:

PI: *¿Cómo reinterpretan los estudiantes el concepto de derivada a través de las representaciones y praxeologías matemáticas en problemas de optimización?*

Respecto a este interrogante, se concluye que los estudiantes realizaron una reinterpretación del concepto de la derivada de una forma parcial, debido a que presentaron inconvenientes al realizar la coordinación entre algunos registros de representación semiótica, lo cual se mencionó en el apartado previo. Por otro lado, el análisis de los datos también evidenció que los alumnos no están acostumbrados a justificar sus procedimientos (tecnología de la técnica). Razón por la cual, las tecnologías de las praxeologías matemáticas no fueron constantes en el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta.

6.4. CONCLUSIONES RESPECTO A LA HIPÓTESIS

La hipótesis planteada en este trabajo es presentada como expectativa de lo que se esperaba conseguir del mismo, se corresponde con la pregunta de investigación y se centra en el estudio de los antecedentes descritos en el capítulo 1. A continuación, se confronta esta hipótesis con los resultados obtenidos:

Hipótesis: Mediante el uso de los diferentes registros de representación los estudiantes son capaces de reinterpretar un significado de la derivada manifestado a través de sus praxeologías.

La hipótesis no se confirma, debido a que los alumnos no realizaron una reinterpretación completa del concepto de la derivada, ya que evidenciaron dificultad en la coordinación de los registros de representación y las tecnologías (praxeología matemática) no fueron manifestadas por la mayoría de los estudiantes.

6.5. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

A continuación, se muestra de nuevo el objetivo general, así como los objetivos específicos descritos en el capítulo 2 de este trabajo.

OG: *Analizar la reinterpretación que los estudiantes realizan sobre el concepto de derivada a través del uso de diferentes representaciones y el análisis de praxeologías matemáticas en el contexto de los problemas de optimización.*

Para el logro de este objetivo general se plantearon los siguientes objetivos:

OE1. Diseñar actividades que les permita a los estudiantes reinterpretar el concepto de derivada a través del uso de diferentes registros de representación semiótica con problemas de optimización y el estudio de las praxeologías matemáticas

Para alcanzar este objetivo se diseñó una secuencia didáctica. En la construcción de esta secuencia se contempló una actividad principal, la cual consistió en la presentación de un problema de optimización que el estudiante debía resolver a través de una serie de indicaciones. Estas instrucciones representaban una serie de tareas (actividades) en las que se le solicitaba al alumno, graficar, completar tablas numéricas y, además justificar cada uno de estos procedimientos. De esta forma, el diseño de esta secuencia didáctica estuvo sustentada en los diferentes registros de representación semiótica y también por las praxeologías matemáticas. La aplicación de esta secuencia implicó al siguiente objetivo específico:

OE2. Identificar las reinterpretaciones que tienen los estudiantes sobre la derivada al momento de resolver problemas de optimización.

Para cumplir con este objetivo específico se analizaron las respuestas que dieron los estudiantes a cada una de las tareas involucradas en la secuencia didáctica. Para esto, se realizaron análisis de las frecuencias simples sobre el nivel de corrección de las respuestas proporcionadas por los alumnos, sobre el uso de las distintas técnicas de solución definidas de acuerdo con los diferentes registros de representación semiótica, sobre las tecnologías de las técnicas, sobre la coordinación de registros y los tipos de errores relacionados con el tratamiento y la conversión de registros. El análisis de estos datos conllevó al último objetivo específico:

OE3. Caracterizar las reinterpretaciones de los estudiantes en términos de praxeologías matemáticas (técnica, teoría y tecnología) según los registros de representación.

Para conseguir este objetivo se tuvieron en cuenta los resultados del análisis de la secuencia didáctica. Se concluyó que la mayoría de los estudiantes realizaron reinterpretaciones del concepto de la derivada de una forma parcial, debido a que les resultó complejo transitar entre algunos registros de representación y además, obviaron justificar sus procedimientos.

Conforme a lo mencionado anteriormente, se puede inferir que el objetivo general de este estudio se llevó a cabo en toda su totalidad, debido a que los tres objetivos específicos se cumplieron.

6.6. LINEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

Una vez finalizado este trabajo de tesis se dejan abiertas otras líneas de continuidad respecto a nuestro tema de estudio, ya que se considera que este trabajo se puede complementar y enriquecer con otros trabajos de investigación. De esta forma, se sugieren algunas ideas para futuras investigaciones:

Realizar investigaciones similares a ésta, en donde se aplique la secuencia didáctica, pero en estudiantes que por primera vez están viendo el tema de la derivada. De esta forma, se le brindará al alumno la oportunidad de establecer conexiones entre los diferentes registros de representación y validar sus procedimientos. Situación que le permitirá una mejor comprensión del concepto de la derivada.

Se considera que el modelo de esta secuencia didáctica guiada puede aplicarse con otro tipo de tema matemático en el que el alumno presente dificultad. En este sentido, diseñar actividades que le permitan a los estudiantes concebir la aplicabilidad de un concepto matemático, así como percibirlo desde diferentes registros de representación y además que le propicien espacios de reflexión, mejoran la comprensión de dicho concepto.

Analizar las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato al resolver los problemas de optimización, empleando otros marcos teóricos, ya que pueden proporcionar otras herramientas teóricas que permitan identificar las reinterpretaciones que realizan los estudiantes del concepto de la derivada, mientras resuelven un problema de optimización.

En el caso de esta propuesta se utilizó un problema de optimización que consistía en maximizar el área de una superficie, pero se pueden considerar otros tipos de problemas. Por ejemplo, problemas relacionados con maximizar/minimizar longitudes, áreas (como la situación planteada en este estudio), volúmenes, que impliquen situaciones familiares de contextos escolares, previo al análisis de situaciones reales más complejas. Para la selección o rediseño de los problemas de optimización se consideran expresiones a optimizar de las más sencillas a las más complejas, según la intención didáctica. Por ejemplo, aquellos problemas como: "determinar el punto de una parábola más cercano a un punto de su eje" suelen ser más sencillos que otros que pueden involucrar, por ejemplo, "calcular la resistencia máxima de una viga".

El problema de este estudio, al involucrar funciones sencillas, le permitió al estudiante abordar el concepto de optimización, aprender a plantear la solución en términos de funciones, vistas como modelos matemáticos, para después aplicar el proceso de optimización, es decir encontrar los máximos o mínimos de la función planteada que se requieren para resolver un problema. Asimismo, la ventaja que tiene esta situación planteada es que al ser de un contexto conocido por los alumnos puede facilitar la reinterpretación del concepto de la derivada, si son presentados en una secuencia didáctica similar a la expuesta en este trabajo. En síntesis, se recomienda problemas que les sean familiar a los alumnos, como los mencionados previamente, para que éstos puedan darle significado a la derivada a través de la resolución de dichos problemas.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, cabe señalar que los problemas que se elijan deben facilitar al estudiante la coordinación entre los diferentes registros de representación; así como la manifestación de las praxeologías matemáticas (tecnologías) al justificar cada uno de sus procedimientos (técnicas). De esta forma, el alumno, podrá lograr una comprensión más amplia de la derivada.

Finalmente, en este estudio se propone un video titulado: "**Video tutorial para la comprensión del concepto de la derivada: Un recurso para estudiantes**", cuyo contenido está relacionado con el diseño de una secuencia didáctica guiada similar a la que se presenta en este estudio. Se menciona esto, porque en el video se incluyó un problema de optimización distinto, se le solicita al estudiante minimizar una cantidad en lugar de maximizar. Pero a pesar de que las actividades planteadas en el video no son completamente iguales a las presentadas en esta investigación, el objetivo del video es el mismo que el de este estudio. Es importante mencionar que el video es un recurso para estudiantes, el alumno seguirá pautas para resolver el problema de optimización propuesto. Dichas instrucciones, le facilitaran recordar conceptos previos y de este modo no se contará con la intervención del docente. Por último, se menciona que este video fue aceptado para ser presentado en el sexto congreso internacional de matemática educativa del *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada* (CICATA), el cual se realizará en modalidad virtual del 31 de agosto al 11 de septiembre del presente año.

6.7. PUBLICACIONES DERIVADAS DEL ESTUDIO

Video tutorial:

Sotomayor, S. [Sugey Sotomayor]. (2020, septiembre 15). Video tutorial para la comprensión de la derivada: Un recurso para estudiantes. [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=t5jdaZWwYR8

Sotomayor, S. (aceptado). Una propuesta de actividades para la comprensión de la derivada en los problemas de optimización. *Pädi Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.*

REFERENCIAS

Álvarez, A. (2012). Las actividades reveladoras del pensamiento que activan el pensamiento matemático de los estudiantes dentro del proceso de las aplicaciones de la derivada que utilizan máximos y mínimos. *(Tesis de maestría).* Escuela de graduados en Educación, Rioverde, México

Bacelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S., & Prieto, G. (2014). Problemas de optimización : Un análisis en la construcción de significado. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* Obtenido de www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1119.pd.

Balcaza, T. (2018). Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en bachillerato,desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registro de Representación Semiótica. *(Tesis doctoral).* Universidad de Jaén, Jaén, España.

Brousseau, G. (2000). Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38.

Camacho, M., y González, A. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de pedagogía de la Universidad de Salamanca, 10*(1), 137-152.

Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1841-1849). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Carajulca, E. (2013). Propuesta didáctica para superar las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería al articular las representaciones semióticas en la solución de problemas de optimización. *(Tesis de maestría).* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Chávez, Y., y Martínez, F. (2018). Evaluar para aprender: hacer más compleja la tarea a los alumnos. *Educación Matemática*, 30(3),211-246.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherces en Didáctique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Creswell, J. (2013), Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches (3.ª ed.). California, Sage.

Cruzado, E. (2018). Problemas de optimización mediados por el Geogebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de ingeniería. *(Tesis de maestría).* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Dávila, M. T. (2010). La Derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinamicos creados con Geogebra. *(Tesis de maestría).* Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Deudor, C. (2017). Uso del Software Derive y su influencia en el aprendizaje de las aplicaciones de la Derivada de una Función en la Asignatura de Matemática II en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Ricardo Palma. *(Tesis de maestría).* Universidad Ricardo Palma, Lima, Perú.

Díaz, J. L. (2014). Simulación y modelación de problemas de optimización del cálculo diferencial con la hoja de cálculo. *EPISTEMUS, 16*(8), 48-54.

Dorado, I., y Díaz, J. L. (2014). La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 1151-1159). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (2da ed.). Cali: Programa Editor

Gallego, L.M., y Aldana, E. (2013). Análisis de la concepción de la actividad de optimizar desde una ingeniería didáctica Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/6630/1/Aldana2013Analisis.pdf

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18*(52), 7-33.

González, M. T. (2011). Revistando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, *28*(1), 83-97.

González, T., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos criticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias, 22*(3), 389-408.

Hernández, R., P. Baptista y C. Fernández (2010), Metodología de la investigación, México, D.F., McGraw-Hill

León, O.G., y Montero, I. (2003) *Métodos de investigación en psicología y educación* (3 ed ed.). madrid: Mc Graw Hill.

Malaspina, U. (2008). Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *(Tesis doctoral).* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Malaspina, U. (2012). Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.*, *7*(10), 165-181.

Martínez, E. (2014). Diseño de una secuencia basada en optimización para la enseñanza del Cálculo Diferencial en formación de ingenieros. *(Tesis de maestría).* Centro de investigación en Ciencia aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, México.

Morales, H. (2013). La Teoría Antropológica de la Didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 4518-4525). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Moriena, S., y Scaglia. S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.

Navarro, L. (2014). Secuencia didáctica para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización. *(Tesis de maestría).* Instituto Tecnológico de Sonora, Obregón, México.

Otero, D. C. (2012). Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el sotfware geogebra. *(Tesis de maestría).* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Portillo-Lara, H.J., Ávila-Sandoval, M.S., Cruz-Quiñones, M.Á., y López- Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y problemas de optimización. *Cultura Científica y Tecnológica,* 16(1), 5-11.

Reyes, L.E. (2015). Función exponencial en el aula: praxeologías matemáticas en enseñanza media. *(Tesis de maestría)* Universidad Federal de Juiz de Fora, Brasil.

Roja-Escribano, L., Báez-Rojas, J.J., y Corona-Galindo, M.G. (2017). Propuesta para la enseñanza del tema de optimización,apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 9, 52-63.*

Scott, B. (2012). The impact of student's understading of derivatives on their performance while solving optimiztion problems. *(Tesis Doctoral).* The university of Georgia, Athens, the united states.

Sepúlveda, A. V. (2013). Problemas geométricos y de variación y el uso del software dinámico. *Números, 82*(1), 65-87.

Villa-Ochoa, J.A. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en tono a su validación. *Revista Tecno Lógicas (16),139-151.*

ANEXOS

ANEXO 1. CARTAS DE CONFIDENCIALIDAD Y CONSENTIMIENTO

Querétaro, Qro. _____ de _____________ 2020

CARTA DE CONFIDENCIALIDAD

Conste por el presente documento que Yo: Sugey Tatiana Sotomayor Cano, en mi carácter de: Estudiante de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, es mi obligación respetar la privacidad del participante y mantener la confidencialidad de la información que se derive en consecuencia de la investigación para la elaboración de la tesis: “La reinterpretación de la derivada en problemas de optimización”

Me comprometo indefinidamente a:

1. Mantener la reserva y confidencialidad de dicha información.

2. No divulgar a terceras personas físicas o morales el contenido de la información.

3. No usar la información directa o indirectamente en beneficio propio o de terceros, excepto para cumplir a cabalidad la investigación relacionada al trabajo de tesis.

4. No revelar total ni parcialmente a ningún tercero la información obtenida como consecuencia directa o indirecta de las conversaciones a que haya habido lugar.

5. No enviar a terceros, archivos que contengan la información del participante a través de correo electrónico u otros medios a los que tenga acceso, sin la autorización respectiva.

6. En general, guardar reserva y confidencialidad de los asuntos que lleguen a mi conocimiento con motivo del trabajo de investigación que desempeño y en específico a la información precisada.

En caso de incumplimiento de lo estipulado en el presente documento, me someto a las sanciones estipuladas por la Universidad Autónoma de Querétaro.

____

Nombre y firma

Querétaro, Qro. ____ de________________ 2020

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PADRES

Estimado Sr./Sra.

Su hijo/a ha sido invitado a participar en la investigación titulada **“La reinterpretación del concepto de derivada en problemas de optimización”.** Esta investigación es realizada por la Licenciada Sugey Tatiana Sotomayor Cano, estudiante de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro**.**

El presente estudio tiene fines educativos, busca aportar de manera significativa a los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo diferencial que se llevan a cabo dentro del aula de clase. La participación de su hijo/a es voluntaria, consistirá en la realización de una actividad organizada en secciones, la cual se presentará en hojas de trabajo. Se le pedirá que dé respuesta a cada una de las preguntas incluidas en cada sección, haciendo uso de sus conocimientos previos y la actividad completa tendrá una duración de aproximadamente de 2 horas y se contará con el apoyo y acompañamiento del docente titular de la asignatura de Cálculo.

Si Usted no desea que su que su hijo/a participe no implicará sanción. Además, su hijo/a tiene el derecho a negarse a responder a preguntas concretas, también puede optar por retirarse de este estudio en cualquier momento y la información que se recoja será descartada del estudio y eliminada. La participación de su hijo/a es totalmente confidencial, ni su nombre, ni ningún tipo de información que pueda identificarla aparecerá en los registros del estudio, ya que se utilizarán códigos. El almacenamiento de los códigos estará a cargo del investigador Responsable.

El participar en este estudio no tiene costos para su hijo/a y no recibirá ningún pago por estar en este estudio. Si Ud. desea, se le entregará un informe con los resultados de los obtenidos una vez finalizada la investigación, también se entregará al Director de la escuela. Asimismo, vale aclarar que los resultados del estudio serán utilizados con fines científicos y harán parte de un trabajo de investigación de Maestría como se indicó al inicio, además serán divulgados en revistas científicas.

Una vez finalizada la investigación Usted podrá conocer los resultados/copia electrónica/ un resumen, La información será entregada al docente titular del grupo al cual pertenece su hijo/a y al Director del plantel educativo y quedará bajo el resguardo del investigador responsable. Si tiene dudas o consultas respecto de la participación de su hijo/a en el estudio puede contactar al investigador responsables de este estudio, Licenciada Sugey Tatiana Sotomayor Cano, estudiante de la Maestría en Didáctica de la Matemáticas en la Universidad Autónoma de Querétaro, celular contacto:4424663299, correo electrónico: docentesugeysotomayor@gmail.com.

Sin otro particular, le saluda atentamente:

Sugey Tatiana Sotomayor Cano

Lic. en matemática

AUTORIZACIÓN

Yo la Sra./Sr.____ .

Madre/Padre o Tutor del alumno/a ____.

Autorizo para que participe en la investigación sobre "La reinterpretación del concepto de derivada en problemas de optimización" que se llevará a cabo dentro del horario de clases en el aula.

Firma de autorización

Querétaro, Qro. ____ de________________ de 2020

CARTA DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Estimado docente

La presente es para invitar a su grupo a participar en la investigación titulada **“La reinterpretación del concepto de derivada en problemas de optimización”.** Esta investigación es realizada por la Licenciada Sugey Tatiana Sotomayor Cano, estudiante de la Maestría en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro**.**

El presente estudio tiene fines educativos, busca aportar de manera significativa a los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo diferencial que se llevan a cabo dentro del aula de clase. Su participación es voluntaria, consistirá en la realización de una actividad organizada en secciones, la cual se presentará en hojas de trabajo. Se les pedirá a sus estudiantes que den respuesta a cada una de las preguntas incluidas en cada sección, haciendo uso de sus conocimientos previos y la actividad completa tendrá una duración de aproximadamente de 2 horas, lo cual corresponde al tiempo estimado en el que se desarrolla una clase de Cálculo.

Si usted no desea participar no se aplicará ninguna sanción. Además, su grupo tiene el derecho a negarse a responder a preguntas concretas, también puede optar por retirarse de este estudio en cualquier momento y la información que se recoja será descartada del estudio y eliminada. La participación de sus estudiantes en este estudio es totalmente confidencial, ni sus nombres, ni ningún tipo de información que pueda identificarlos aparecerá en los registros del estudio, ya que se utilizarán códigos. El almacenamiento de los códigos estará a cargo del investigador Responsable.

El participar en este estudio no tiene costos y no recibirá ningún pago por estar en este estudio. Si Ud. desea, se le entregará un informe con los resultados de los obtenidos una vez finalizada la investigación, también se entregará al Director de la escuela. Asimismo, vale aclarar que los resultados del estudio serán utilizados con fines científicos y harán parte de un trabajo de investigación de Maestría como se indicó al inicio, además serán divulgados en revistas científicas.

Una vez finalizada la investigación Usted podrá conocer los resultados/copia electrónica/ un resumen, La información será entregada al docente titular y al Director del plantel educativo y quedará bajo el resguardo del investigador responsable. Si tiene dudas o consultas respecto de la participación de su hijo/a en el estudio puede contactar al investigador responsables de este estudio, Licenciada Sugey Tatiana Sotomayor Cano, estudiante de la Maestría en Didáctica de la Matemáticas en la Universidad Autónoma de Querétaro, celular contacto:4424663299, correo electrónico: docentesugeysotomayor@gmail.com.

Sin otro particular, le saluda atentamente

Sugey Tatiana Sotomayor Cano

Lic. en matemática

AUTORIZACIÓN

Yo ____, docente de la institución:____ acepto de manera voluntaria que mi grupo se incluya como sujeto de estudio en el proyecto de investigación denominado: La reinterpretación del concepto de derivada en problemas de optimización, luego de haber conocido y comprendido en su totalidad la información sobre dicho proyecto, riesgos si los hubiera y beneficios directos e indirectos de su participación en el estudio.

ANEXO 2. SECUENCIA DIDÁCTICA

Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Nombre: ____ Edad: _______

Instrucción: A continuación, se presenta una situación que plantea una interrogante. Para contestar a dicha pregunta se solicita realizar una serie de acciones guiadas las cuales tendrá que realizar dando el mayor detalle posible.

SITUACIÓN 1. Juanito quiere utilizar 240 metros de malla metálica para cercar un jardín rectangular. Con la información previa, conteste ¿cuáles son los valores de los lados del jardín para que el área cercada sea máxima? Para dar respuesta a esta interrogante desarrolle cada una de las secciones siguientes:

Sección 1: Representación figural del problema. Realice una representación geométrica del problema de acuerdo con las condiciones dadas.

Sección 2: Perímetro y área del jardín. Escriba las expresiones matemáticas que representen el perímetro y el área del jardín de Juanito. Explique

Sección 3: Representación numérica del problema. De acuerdo con la información anterior. Complete los valores de la tabla y responda:

$\boldsymbol{lado\ 1}(\boldsymbol{metros})$	$\boldsymbol{lado\ 2}(\boldsymbol{metros})$	$\boldsymbol{Perímetro}$	$\boldsymbol{Área}\ (\boldsymbol{m^2})$
	120		
12	108		
24	96		
48	72		
72			
96	24		
	0		

a) ¿Cuánto puede valer el $lado\ 2$ en el menor de los casos y en el mayor de los casos?

b) ¿Como son los valores de la columna del perímetro? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

c) ¿Cómo es la tendencia de los valores de la columna del área? Explique con base en el enunciado de la situación 1.

d) ¿Qué valor del $lado1$ y del $lado\ 2$ generan el área más grande? ¿cuál es el área más grande?

e) De acuerdo con los valores del $lado1$ y $lado\ 2$, ¿ Cuál sería la forma del jardín de Juanito? Realice una representación geométrica.

f) ¿Considera que existen otros valores del $lado1$ y del $lado\ 2$ que generen un área más grande? ¿Entre qué valores de la tabla estaría él área más grande? Explique

Sección 4: ***La función área***. Complete la tabla y responda las siguientes preguntas:

$\boldsymbol{lado1 (metros)}$	$\boldsymbol{lado\ 2\ (metros)}$
0	120
12	108
24	96
48	72
72	
96	24
	0

a) ¿Cuál es el resultado de la diferencia del primer valor del $lado\ 2$, es decir, 120 con cado uno del resto de valores del mismo lado? ¿Qué relación tiene esta diferencia con los valores del $lado$ 1?

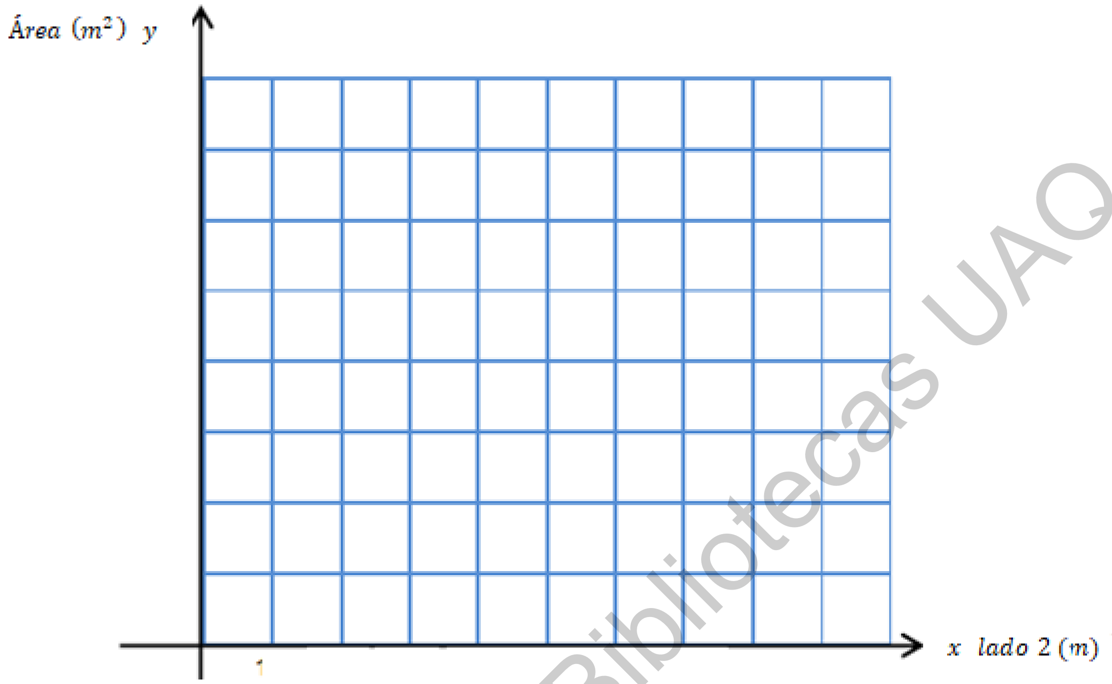
b) Con base en la relación encontrada previamente, si al $lado$ 2 le llamamos "x", ¿Cómo expresarías el $lado$ 1 en términos de "x"? valide su respuesta.

c) ¿Cómo se expresaría el área del jardín con "x" como $lado\ 2$ y el $lado$ 1 en términos de "x" que acabas de encontrar?

d) Diga si la expresión anterior se puede considerar una función. Si es así indique cual sería la variable dependiente y cual la variable independiente. Explique

e) Escriba la expresión anterior como una función en caso de que se pueda representar como tal. Justifique su respuesta

Sección 5: Representación gráfica del problema. Grafique la función encontrada en la sección anterior y responda las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es el valor máximo de la función? Explique

b) Si colocamos una recta tangente en el valor máximo de la función ¿Qué características tiene?, ¿Cuál es la inclinación de la recta tangente? Explique

c) Si colocamos rectas tangentes antes y después del valor máximo de la función ¿Qué características tienen? ¿Cuál es la inclinación de las rectas tangentes trazadas? Explique

Sección 6: El valor de la pendiente de la recta tangente. Con base en las respuestas previas en la ***sección 5*** y teniendo en cuenta que la pendiente se define como la inclinación de la recta con respecto al eje de las *x*. Complete la siguiente tabla, marcando con una X, el valor que usted considere que le corresponde a la pendiente en los diferentes puntos.

Pendiente	**valor**			
	Elección del punto	**Negativo (-)**	**Cero (0)**	**Positivo (+)**
Antes del valor máximo	(,)			
En el valor máximo	(,)			
Después del valor máximo	(,)			

Sección 7: La derivada de la función área. Responda los siguientes interrogantes, considerando la función del área en términos del del ***lado* 2** definida en la ***sección 4***

a) Derive la función área y evalúela en el valor máximo encontrado en la ***sección 5.*** ¿Cuál es su resultado? Explique

b) Derive la función área y evalúela en los puntos elegidos, antes y después del valor máximo. ¿Cuáles son los resultados? Explique

Sección 8**: **La pendiente y la derivada. Teniendo en cuenta lo realizado en las ***secciones 6 y 7*** responda las siguientes interrogantes:

a) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en el valor máximo es igual a cero?

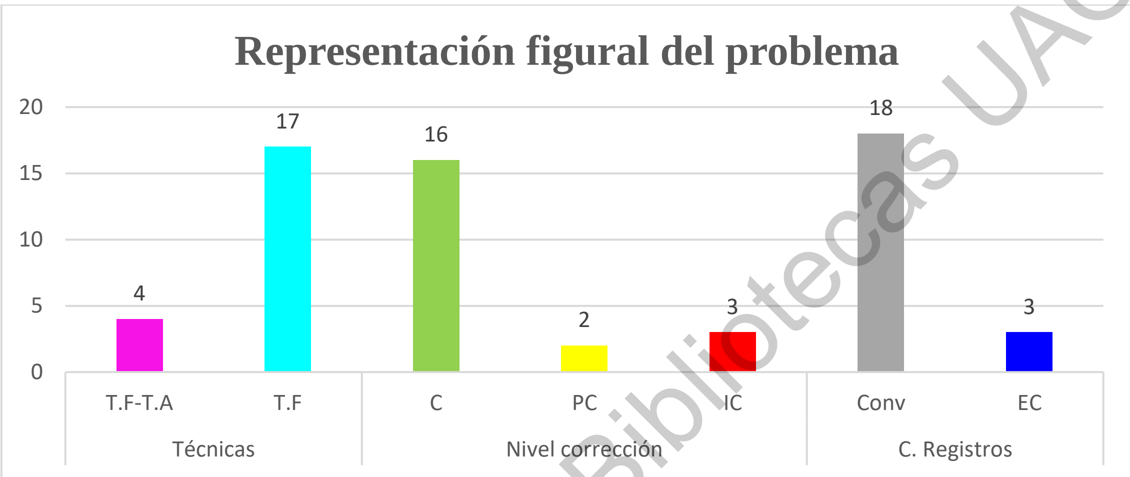
b) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor antes del máximo es positivo?

c) ¿Por qué el resultado de la derivada evaluada en un valor después del máximo es negativo?

d) De acuerdo con las respuestas previas, diga si existe una relación entre la pendiente y la derivada de la función en el punto máximo. Explique

ANEXO 3. GRÁFICAS DE LOS ANÁLISIS DE LAS SECCIONES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

GRÁFICA DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 1



Significado de las etiquetas

T.F-T.A: técnica figural y técnica algebraica
T.F: técnica figural

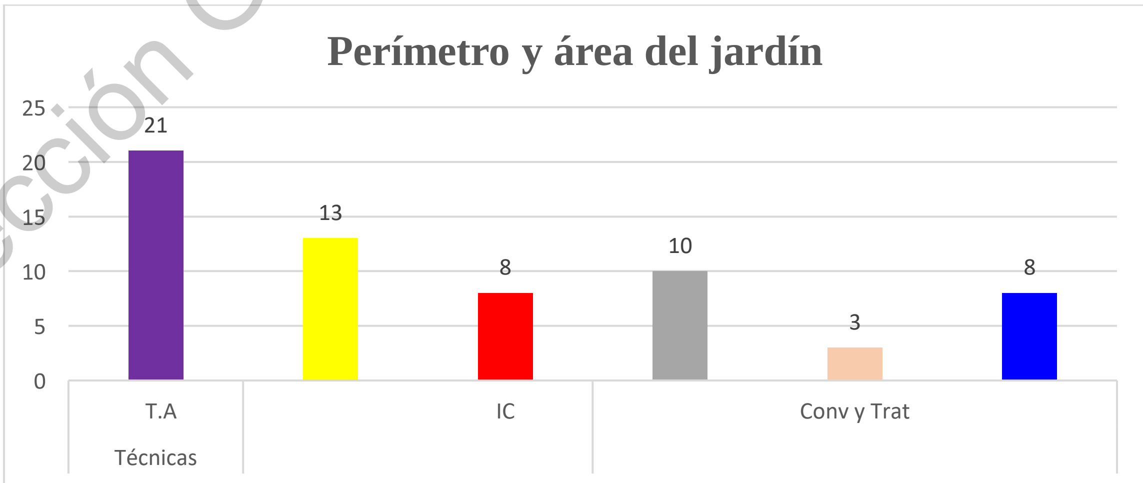
Significado de las etiquetas

C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta

Significado de las etiquetas

Conv: conversión
EC: error de conversión

GRÁFICA DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 2

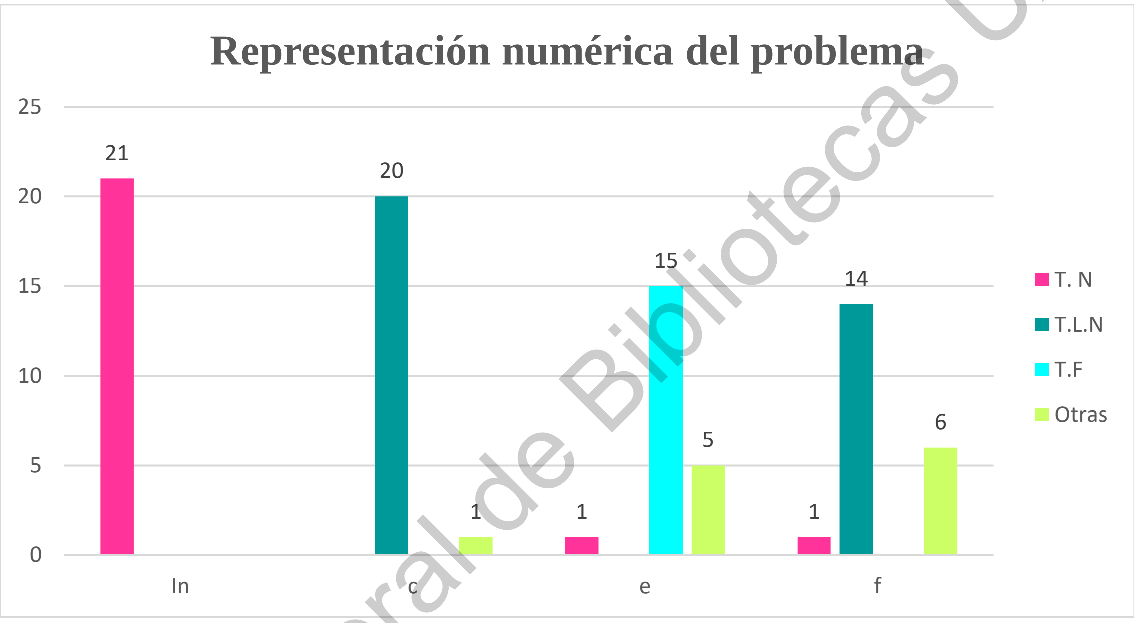


Significado de las etiquetas
T.A: técnica algebraica

Significado de las etiquetas
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta

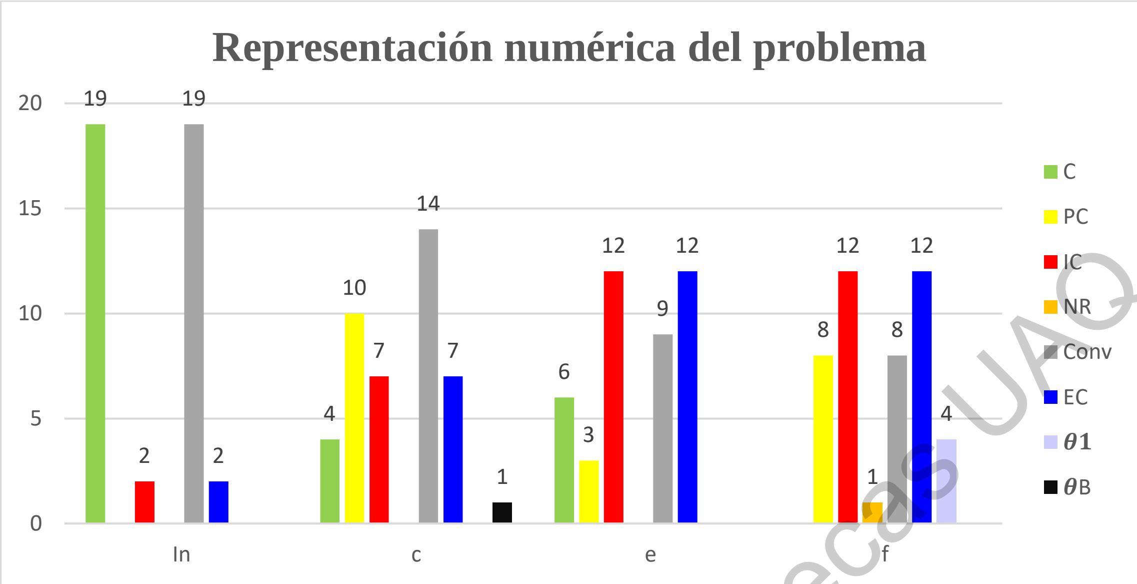
Significado de las etiquetas
Conv y Trat: conversión y tratamiento
Conv: conversión
EC: error de conversión

GRÁFICAS DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 3



Significado de las etiquetas
In: Introducción
c: ítem c
e: ítem e
f: ítem f

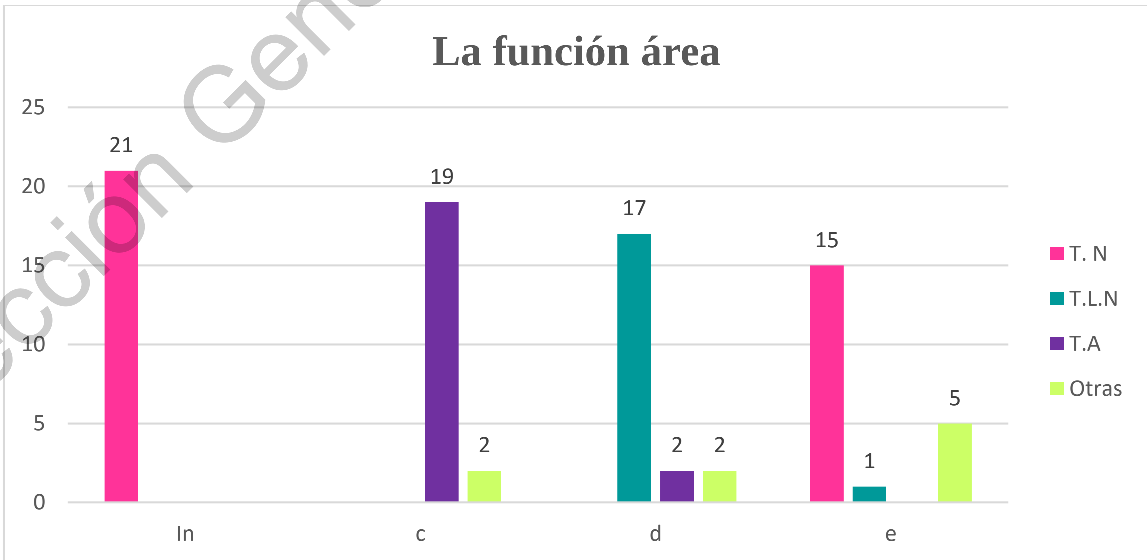
Significado de las etiquetas
T.N: técnica numérica
T.L.N: técnica en lengua natural
T.F: técnica figural
Otras: uso de una técnica o dos técnicas a la vez.



Significado de las etiquetas
In: introducción
c: ítem c
e: ítem e
f: ítem f

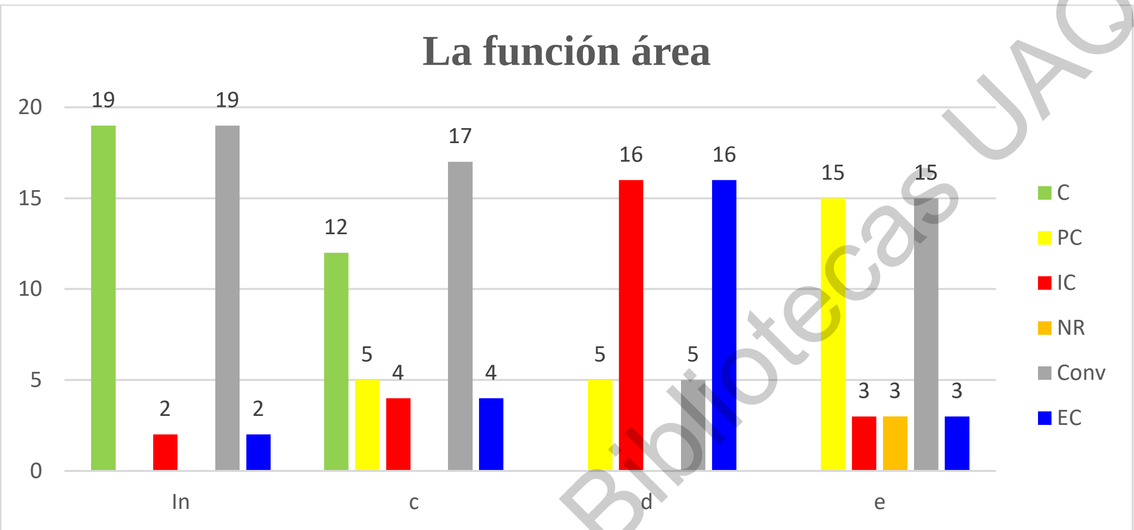
Significado de las etiquetas
C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta
NR: no responde
Conv: conversión
EC: error de conversión
$\boldsymbol{\theta_1}$: tecnología 1
$\boldsymbol{\theta_B}$: tecnología B

GRÁFICAS DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 4



Significado de las etiquetas
In: introducción
c: ítem c
d: ítem d
e: ítem e

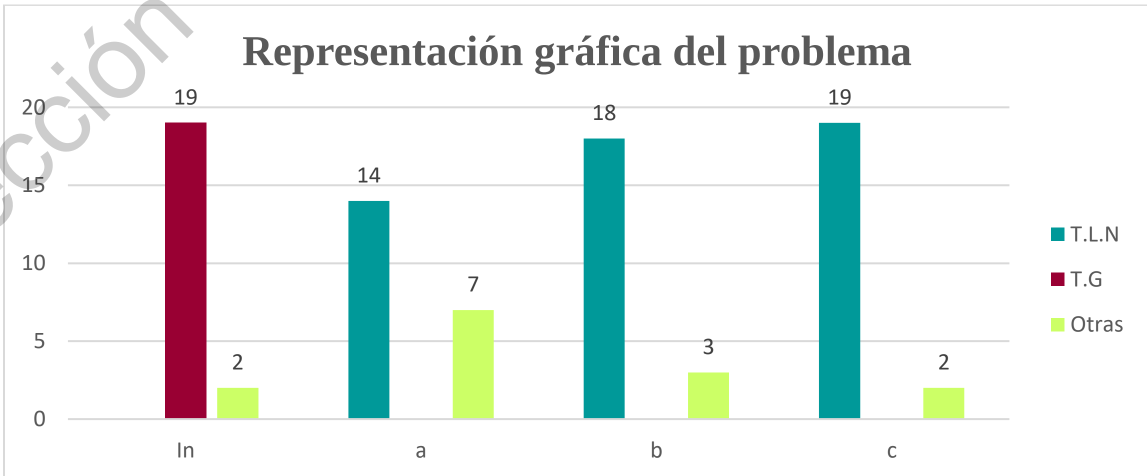
Significado de las etiquetas
T.N: técnica numérica
T.L.N: técnica en lengua natural
T.A: técnica algebraica
Otras: Uso de una técnica o dos técnicas a la vez.



Significado de las etiquetas
In: introducción
c: ítem c
d: ítem d
e: ítem e

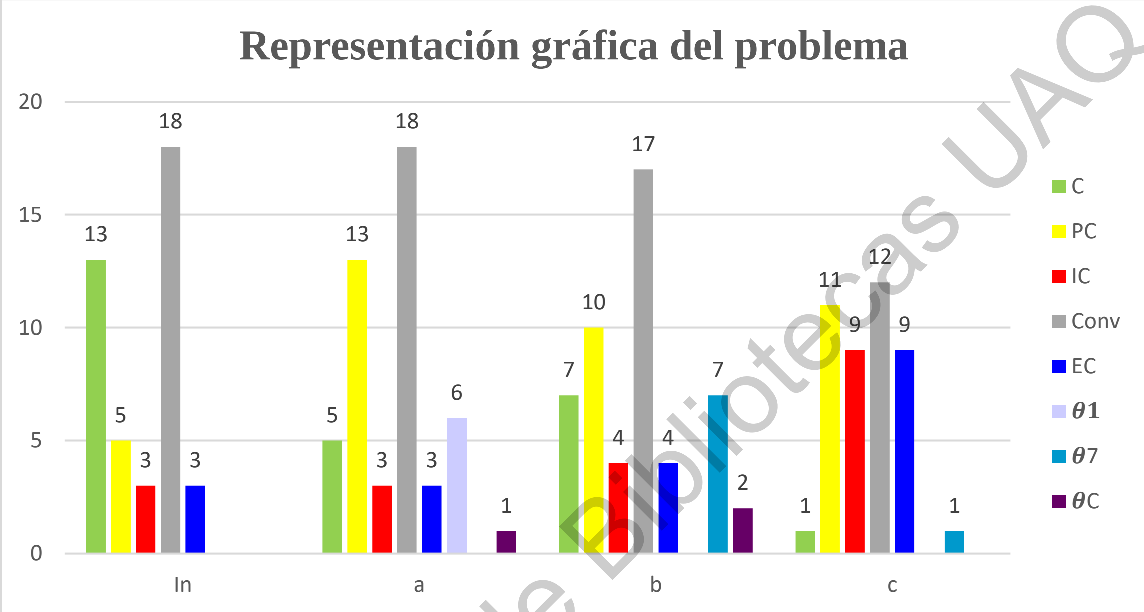
Significado de las etiquetas
C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta
NR: no responde
Conv: conversión
EC: error de conversión

GRÁFICAS DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 5



Significado de las etiquetas
In: Introducción
a: ítem a
b: ítem b
c: ítem c

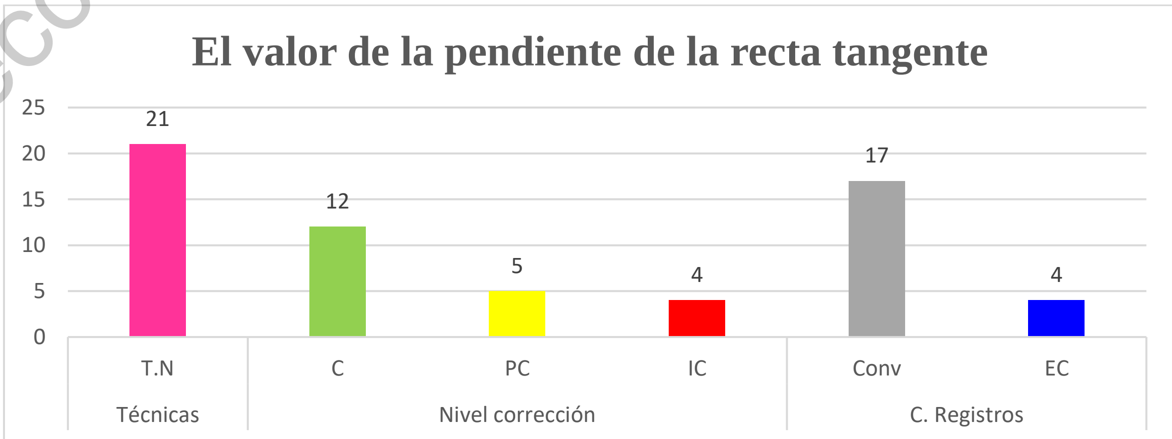
Significado de las etiquetas
T.L.N: técnica en lengua natural
T.G: técnica gráfica
Otras: Uso de una técnica o dos técnicas a la vez.



Significado de las etiquetas
In: introducción
a: ítem a
b: ítem b
c: ítem c

Significado de las etiquetas
C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta
Conv: conversión
EC: error de conversión
$\boldsymbol{\theta_1}$: tecnología 1
$\boldsymbol{\theta_7}$: tecnología 7
$\boldsymbol{\theta_C}$: tecnología C

<u>GRÁFICA DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 6</u>

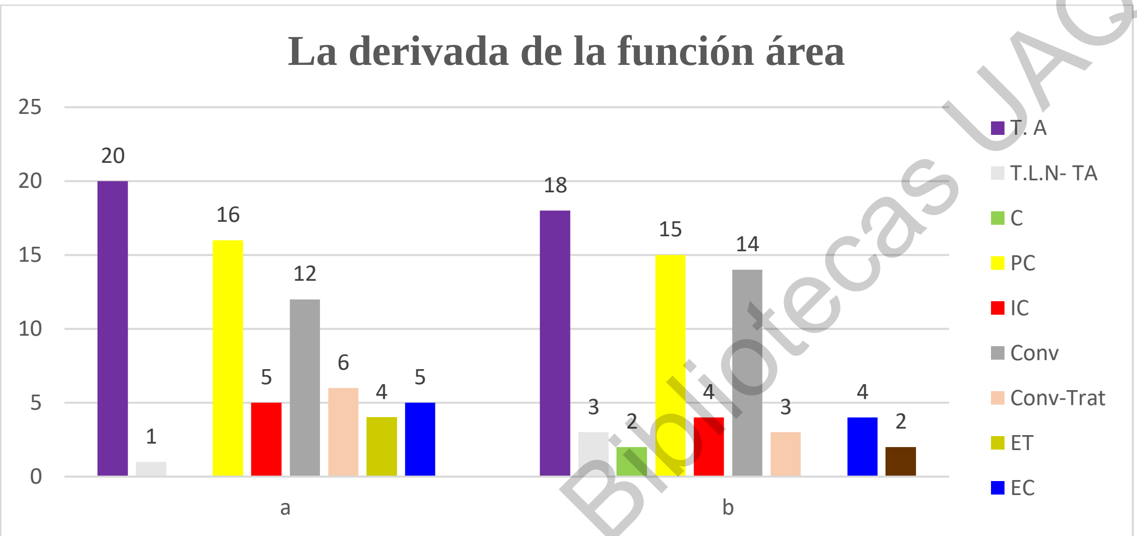


Significado de las etiquetas
T.N: técnica numérica

Significado de las etiquetas
C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta

Significado de las etiquetas
Conv: conversión
EC: error de conversión

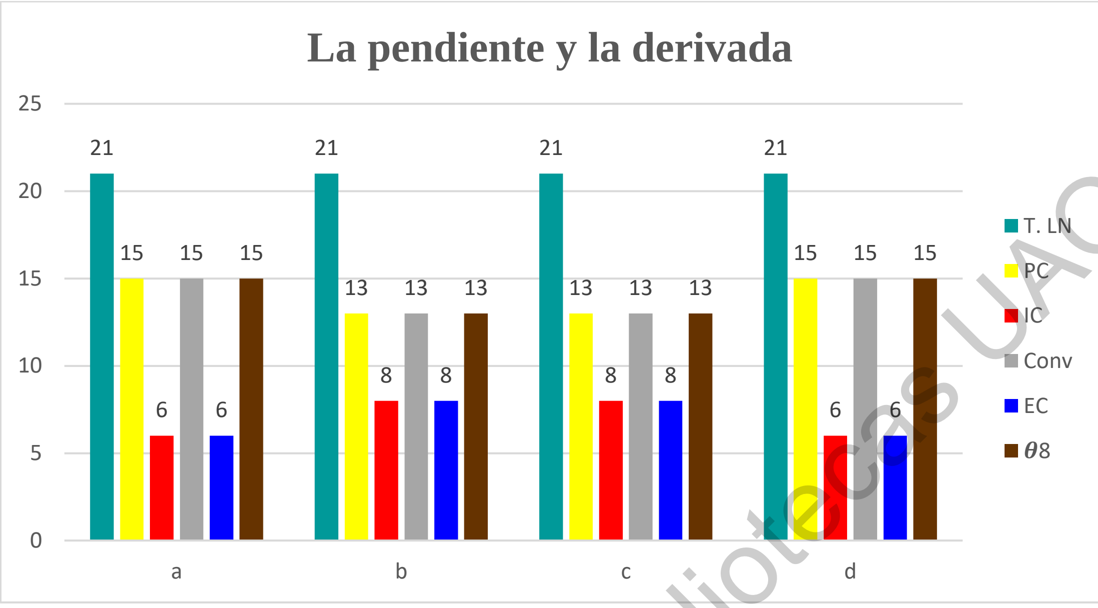
GRÁFICA DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 7



Significado de las etiquetas
In: Introducción
a: ítem a
b: ítem b

Significado de las etiquetas
T.A: técnica algebraica
T.L.N-T.A: técnica en lengua natural y técnica algebraica
C: correcta
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta
Conv: conversión
Conv y Trat: conversión y tratamiento
ET: error de tratamiento
EC: error de conversión

GRÁFICA DE ANÁLISIS DE LA SECCIÓN 8



Significado de las etiquetas
In: Introducción
a: ítem a
b: ítem b
c: ítem c
d: ítem d

Significado de las etiquetas
T.L.N: técnica en lengua natural
PC: parcialmente correcta
IC: incorrecta
Conv: conversión
EC: error de conversión
$\boldsymbol{\theta}_8$: tecnología 8