



Universidad Autónoma de Querétaro

Facultad de Ingeniería

Licenciatura en Ingeniería Física

**RESTRICCIÓN DE PARÁMETROS EN UN MODELO
FRIEDMAN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER DE COSMOLOGÍA VISCOZA CON
HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES DE ALTO RENDIMIENTO**

TESIS

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

Ingeniero Físico

Presenta:

Isaac Guillen Castellanos

Dirigido por:

Dr. Octavio Cornejo Pérez

SINODALES

Dr. Octavio Cornejo Pérez

Presidente

Dr. Alberto Hernández Almada

Secretario

Dr. Aldrin Meliton Cervantes Contreras

Vocal

Dr. Adolfo Huet Soto

Sinodal

Dr. Manuel Toledano Ayala

Director de la Facultad

Octavio Cornejo Pérez

Firma

Firma

Firma

ADOLFO HUET SOTO

Firma

[Firma]
Dra. María Lucero Gómez Herrera
Coordinadora de Ingeniería Física

Campus Aeropuerto
Querétaro, QRO
México.
Enero 2020

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Esta tesis está dedicada a mi madre, quien me enseñó que incluso la tarea más grande se puede lograr si se hace un paso a la vez y siempre me ha dado su apoyo.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Agradecimientos

Este trabajo de tesis realizado en la Universidad Autónoma de Querétaro es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron distintas personas opinando, brindando correcciones y dando apoyo y paciencia. La realización de esta tesis me ha permitido aprovechar la experiencia y competencia de muchas personas a las que me gustaría agradecer en este apartado.

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis, el Doctor Octavio Cornejo Pérez. Le quiero agradecer haberme mostrado su confianza desde el principio, a pesar de mi desconocimiento en el tema, lo cual me dio la seguridad necesaria para emprender la escritura. Gracias por haberme orientado a lo largo del camino, facilitándolo, dedicándome su tiempo y compartiendo su sabiduría.

Al doctor Alberto Hernández Almada, quien me brindó sin dudar su conocimiento en la parte numérica y teórica de los modelos cosmológicos, cuantas veces no subí a su despacho con dudas y él siempre me facilitó las herramientas necesarias para despejarlas.

Al doctor Aldrin Cervantes Contreras, por darme su tiempo, apoyo y opiniones durante la escritura de este trabajo.

Al doctor Adolfo Huet Soto, quien hizo observaciones en la escritura de la tesis y nunca me negó su tiempo.

Al doctor Norman Cruz, quien aportó una de las ideas matemáticas que me permitió una mayor exploración del modelo.

Al proyecto PRODEP, que me otorgó una beca y facilitó equipo de cómputo de alto rendimiento.

A todas las personas que me brindaron su apoyo, académico y emocional.

Mi más sincero agradecimiento

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Resumen

En esta tesis estudiamos la solución exacta de un modelo de cosmología viscosa con métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker para describir la dinámica de la expansión tardía del Universo. A través del método de factorización, encontramos una solución analítica a la ecuación diferencial de Hubble, y restringimos los parámetros libres del modelo utilizando un método de estadística bayesiana que se basa en cadenas de Markov por Monte Carlo y toma como referencia las últimas observaciones del parámetro de Hubble. Fue encontrado un valor para la constante de Hubble $H_0 = 67.51^{+0.41}_{-0.40}$, y un valor para el parámetro de desaceleración medido al día de hoy $q_0 = -0.31^{+0.02}_{-0.02}$. Es mostrado que la solución encontrada conduce a una expansión acelerada del universo y presenta una transición suave de una fase desacelerada a una acelerada. Los valores numéricos obtenidos son consistentes con los reportados por la colaboración de Planck (Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters).

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice general

Agradecimientos

Resumen **I**

1. Introducción **IX**

1.1. Antecedentes IX

1.2. Hipótesis XII

1.3. Objetivos XII

1.3.1. General XII

1.3.2. Específicos XII

2. Marco teórico **XV**

2.1. Conceptos básicos de la cosmología moderna XV

2.1.1. La métrica XV

2.1.2. La ecuación de Friedman XVII

2.1.3. Corrimiento al rojo XVIII

2.2. Formalismo de Israel-Stewart-Hiscock XX

3. Metodología **XXV**

3.1. Un método de factorización para ecuaciones diferenciales no lineales XXV

3.2. Análisis de Bayes para la restricción de parámetros XXVII

3.2.1. Datos cosmológicos observacionales XXVII

3.2.2. Análisis de los datos XXVII

4. Resolución de la ecuación diferencial	XXXI
4.1. Resolución de la ecuación diferencial	XXXI
4.1.1. Parámetro a_1	XXXV
4.1.2. Parámetro $H(\eta)$	XXXV
4.1.3. Tiempo en función de η	XXXVI
4.1.4. Parámetro de desaceleración $q(\eta)$	XXXVII
4.2. Corrimiento al rojo	XXXVIII
4.2.1. Parámetro $H(z)$	XXXIX
4.2.2. Solución particular	XXXIX
4.2.3. Determinación de las constantes C_1 y C_2	XL
5. Restricción de parámetros	XLIII
5.1. Datos observacionales del parámetro de Hubble	XLIII
5.2. Datos observacionales de supernovas tipo Ia	XLIII
6. Resultados y discusión	XLVII
7. Conclusiones	LVII
8. Anexos	LXI
8.1. Código	LXI
8.2. Especificaciones del equipo de cómputo	LXVII

Índice de figuras

4.1. Gráficas sencillas para los parámetros de mayor interés en el modelo	XXXVII
6.1. Los mejores valores de ϵ , ξ_0 , q_0 y H_0 ajustados para la curva $H(z)$	XLVIII
6.2. Intervalos de confianza al 68, 95 y 99.7 % para los parámetros libres del modelo, considerando $\omega = 0$	L
6.3. Intervalos de confianza para la curva $H(z)$ dejando dos parámetros fijos y variando un tercero	LI
6.4. Corrimiento al rojo de transición z_t en función de un parámetro libre y dejando fijos los otros, no se muestra una curva para H_0 , pues z_t es invariante ante este.	LIII
6.5. Curva descrita por $\mu_{th}(z)$ utilizando los valores que fueron obtenidos utilizando la muestra OHD	LIV

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Índice de cuadros

6.1. Distribución anterior o prior de los parámetros a ajustar	XLVIII
6.2. Mejores valores para el ajuste	XLIX
6.3. Intervalos para z_t dejando dos parámetros fijos y variando un tercero	XLIX
6.4. Mejores valores ajustados para algunos parámetros y su error respecto a un valor previamente reportado	LII

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Introducción

1.1. Antecedentes

Al estudio del Universo en conjunto se le llama cosmología física y una de sus ideas más importantes es el principio cosmológico, el cual establece que el Universo observado a escalas muy grandes (dígase cientos de megapársecs) posee dos propiedades muy importantes, homogeneidad e isotropía. La homogeneidad es la declaración de que se ve igual en cada punto, mientras que la isotropía declara que se ve igual en todas las direcciones, una propiedad no necesariamente implica la otra. Es importante recalcar que el principio cosmológico es una propiedad que permite estudiar un Universo global, pues se desmorona cuando se observan e intentan estudiar fenómenos locales, por ejemplo, dentro de una galaxia. Así pues, podría decirse que el principio cosmológico fue el primero de los pilares sobre los que está construida la cosmología, sin embargo no es el único, al menos no desde el siglo XX.

Cuando Einstein publicó su teoría de la relatividad general [1], le dio a la humanidad un marco matemático para poder estudiar los fenómenos gravitatorios a escalas en las que la mecánica de Newton ya no funcionaba, y que posteriormente se convertiría en la teoría marco en los modelos para estudiar el Universo pues la cosmología moderna comienza cuando Einstein [2] aplicó su teoría de la relatividad general al Universo entero, haciendo varias suposiciones (algunas más acertadas que otras), algunas de ellas fueron: que el Universo era homogéneo, isotrópico, y lo más importante, estático. Encontró que si la materia estaba homogéneamente repartida, su Universo colapsaría por acción de la gravedad, por lo que con la constante cosmológica introdujo un efecto del tipo repulsivo para contrarrestar esto. Años más tarde, Friedman [3]

también aplicó las ecuaciones de campo de la relatividad al Universo entero, pero no lo restringió a ser estático, encontrando Universos que se expandían o se contraían, aunque a Einstein no le convencieron los resultados. Mientras tanto, Slipher [4] encontró que las galaxias lejanas presentaban un cierto corrimiento al rojo, que es básicamente el efecto Doppler pero aplicado a las ondas de luz visible, lo cual sugería y podría ser una prueba de que el Universo en efecto se expande como predecían los resultados de Friedman. Suele representarse al corrimiento al rojo como z

$$z = \frac{\lambda_{observada} - \lambda_{emitada}}{\lambda_{emitada}}. \quad (1.1)$$

El sacerdote y astrónomo belga G. Lemaître, sin conocer el trabajo de Friedman, también aplicó la relatividad a gran escala, encontrando los mismos Universos dinámicos, pero él dio un paso más, utilizando las observaciones de Slipher y las mediciones de Hubble [5] de las distancias a estas galaxias lejanas, fue capaz de encontrar una relación entre que tan lejos está una galaxia y que tan rápido se aleja. Debido a que la publicación de Lemaître no fue traducida del francés al inglés sino hasta 1931, Hubble también encontró dicha relación en 1929 [6], hoy se conoce como la ley de Hubble-Lemaître:

$$v = H_0 d,$$

donde la constante de proporcionalidad H_0 es conocido como la constante de Hubble y nos dice la razón de cambio a la que se expande el Universo el día de hoy. El conjunto de Universos en expansión recibe el nombre de Universos con métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Robertson y Walker fueron unos matemáticos americano e inglés respectivamente, que descubrieron propiedades interesantes de estos Universos.

Gracias a las observaciones de supernovas de clase Ia (SNIa) [7, 8] y de la estructura a gran escala (LSS) [9], actualmente sabemos que el Universo se está expandiendo a una velocidad cada vez mayor. Además, las mediciones a escalas galácticas sugieren que existe más materia de la que podemos observar, ambos fenómenos constituyen un sector desconocido, denominados como materia oscura (MO) y energía oscura (EO), además, desde que Misner [10] sugirió que la isotropía a gran escala observada del Universo podría deberse a la acción de la viscosidad de los neutrinos cuando el Universo tenía aproximadamente un segundo de edad, y se han publicado trabajos [11] señalando la importancia del estudio de los procesos físicos que implican

efectos de viscosidad en la evolución del Universo temprano.

En necesidad de explicar la evolución del Universo tomando en cuenta los fenómenos disipativos se han desarrollado teorías como la de fluidos disipativos relativistas creada por Eckart [12], pero esta tiene muchos inconvenientes, además de que es conocida por ser incorrecta en muchos aspectos, principalmente en los que conciernen a la causalidad y la estabilidad. El modelo cosmológico más simple que explica el sector oscuro y es compatible con las observaciones es el llamado Λ -Materia Oscura Fría o Λ CDM por sus siglas en inglés. Este modelo propone una constante cosmológica que describe la expansión acelerada del Universo y el polvo como MO. De cualquier forma, uno de los problemas abiertos en la investigación del sector oscuro es el cómo se dividen la MO y la EO, pues la proporción de cada una ha demostrado ser meramente especulativa ya que la gravedad solo mide el tensor de energía total [13]. Así que a falta de una buena detección (que no sea gravitacional) de la MO, solo las propiedades generales del sector oscuro pueden ser estimadas a partir de los datos observacionales, estos resultados han conducido a la investigación a explorar modelos alternativos que consideren un solo fluido que se comporte como la MO pero que también presente los efectos de una presión negativa efectiva en alguna etapa de la evolución cósmica. Estos son llamados modelos de MO unificada (MMOU), algunos ejemplos son: los fluidos de Chaplygin [14–16], los modelos de fluidos perfectos generalizados [17, 18] y el fluido logotrópico oscuro [19].

La mejor teoría disponible actualmente para analizar procesos disipativos en el Universo es la termodinámica causal completa desarrollada por Israel y Stewart [20], Hiscock y Lindblom [21], Hiscock y Salmonson [22], considera un solo fluido viscoso sometido a una ecuación de estado y propiedades termodinámicas. Tal teoría ha sido ampliamente utilizada para estudiar la evolución del Universo temprano y algunos otros procesos astrofísicos [23, 24]. La gran desventaja que se presenta al estudiar modelos en dicho marco, es la aparición de ecuaciones diferenciales altamente no lineales y muy complicadas de resolver analíticamente por métodos tradicionales.

Es aquí cuando entra el método de factorización, un método bien establecido [25, 26] utilizado para encontrar soluciones analíticas a ecuaciones diferenciales no lineales (EDNL) por medio de procedimientos algebraicos. Se ha aplicado a una variedad de EDNL que surgen en fenómenos no lineales en la física, física-matemática y cosmología [27–30]. Utilizando dicho método se han encontrado soluciones exactas ge-

nerales y particulares para modelos cosmológicos viscosos con métrica FLRW [31] con buenos resultados, encontrando una transición de la etapa con expansión desacelerada a una con aceleración en la expansión del Universo. En [32] fue encontrada una solución analítica a las ecuaciones del marco de Irsael-Stewart-Hiscock, la solución tiene la forma $H \approx (t + \text{constante})^{-1}$, dicha solución también puede ser encontrada a través del método de factorización tal como se demuestra en [33], sin embargo, esta no presenta una transición suave de la fase de expansión desacelerada a una acelerada

1.2. Hipótesis

Es posible encontrar soluciones analíticas exactas a Universos con métrica FLRW, estudiados dentro del formalismo de Israel-Stewart-Hiscock considerando un solo fluido viscoso, que den una buena descripción de la evolución del Universo, presentando un punto de transición entre las fases de expansión desacelerada y acelerada, además de proveer un espacio de parámetros mediante algoritmos de restricción de parámetros usando cómputo de alto rendimiento, y su validación con estudios previamente reportados.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Encontrar una solución exacta a un modelo FLRW de cosmología viscosa por medio del método de factorización de EDNL y, con ayuda de herramientas estadísticas y equipo de cómputo de alto rendimiento, restringir los parámetros libres de dicha solución a unos intervalos de confianza determinados utilizando las últimas mediciones del parámetro de Hubble OHD.

1.3.2. Específicos

- Por medio de un método de factorización de EDNL, encontrar una solución analítica (exacta) para un modelo de cosmología viscosa FLRW.
- Expresar la solución en términos de los parámetros naturales del modelo para su estudio y acotamiento de un espacio de dichos parámetros.
- Utilizar las mediciones del parámetro de Hubble para distintos valores de corrimiento al rojo para por medio de modelos estadísticos bayesianos, como cadenas de Markov por Monte Carlo, restringir

dichos parámetros a intervalos de confianza bien definidos.

- Comparar los valores de los parámetros y la solución en general contra otros modelos de relevancia para darle mayor solidez al modelo de la tesis.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Marco teórico

En este capítulo se presenta el marco teórico sobre el que se trabajó al realizar esta tesis, en la primera sección se definen algunos conceptos básicos de la cosmología moderna heredados de la relatividad general, tales como la métrica, el tensor de energía-momento, las ecuaciones de campo de Einstein, etc. y seguidamente se describe el formalismo de Israel-Stewart-Hiscock, que estudia el Universo desde el punto de vista de los fluidos viscosos, unificando conceptos termodinámicos con las ecuaciones de campo de Einstein.

2.1. Conceptos básicos de la cosmología moderna

2.1.1. La métrica

En el ámbito de la relatividad general, existe una cantidad fundamental llamada la métrica, que describe la geometría del espacio tiempo, dando la distancia entre puntos dentro del mismo. Como un ejemplo, se puede considerar la métrica de una hoja de papel, sobre la cual un punto puede especificarse utilizando dos coordenadas x_1 y x_2 . La distancia entre dos puntos se puede conocer por el teorema de Pitágoras

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2, \quad (2.1)$$

donde Δx_1 y Δx_2 son la separación entre las coordenadas x_1 y x_2 , además es muy importante remarcar que se les llama coordenadas comovedizas o *comoving coordinates*, es decir, que se arrastran junto con la expansión. Ahora se reemplaza la hoja de papel por una hoja de plástico que puede expandirse. Si el sistema

coordenado se expande junto con la hoja (de manera uniforme), se obtiene entonces

$$\Delta s^2 = a^2(t) [\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2], \quad (2.2)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala del Universo.

En el ejemplo sencillo de arriba, Δs solo indica la distancia en el espacio entre los puntos, pero en relatividad general, es de interés la distancia entre dos puntos en un marco de cuatro dimensiones, que es conocido como el espacio-tiempo, y se debe permitir que este pueda curvarse. La separación entre dos puntos en un espacio tiempo de cuatro dimensiones se puede escribir como

$$ds^2 = \sum_{\mu, \sigma} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es conocida como la métrica, μ y ν son los índices que toman valores discretos 0, 1, 2 y 3, x^0 es la coordenada temporal y x^1, x^2 y x^3 son las coordenadas espaciales. La métrica para un espacio tiempo sin curvatura es conocida como la métrica de Minkowski y luce de la siguiente manera

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

En el caso del espacio tiempo de Minkowski se tiene una métrica constante, pero usualmente se tiene dependencia de las coordenadas, de hecho para describir un espacio tiempo curvado es necesaria esa dependencia. Si se toma en cuenta el principio cosmológico, que nos dice que a grandes escalas el Universo es homogéneo e isotrópico, se puede demostrar que la métrica curva más general que presenta una curvatura constante en todos los puntos del espacio es

$$ds_3^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.5)$$

que está escrita en coordenadas esféricas, el término ds_3^2 hace referencia solamente a la parte espacial y k es la curvatura de Gauss, la cual puede ser positiva, igual a cero, o negativa. Si a la métrica anterior descrita se le agrega la particular dependencia de estirarse o encogerse con el tiempo, se puede obtener la métrica de

Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.6)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala del Universo.

2.1.2. La ecuación de Friedman

En el marco de la relatividad general la métrica evoluciona de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, que en forma tensorial se escriben

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\nu, \quad (2.7)$$

en la ecuación (2.7) $T^\mu{}_\nu$ es el tensor de energía momento de cualquier tipo de materia presente, $R^\mu{}_\nu$ y R son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente, que dan la curvatura al espacio-tiempo. En este caso el tensor de energía momento se ha asumido como simétrico, por lo que podría haber hasta 10 ecuaciones de Einstein (el número de componentes de una matriz simétrica de 4×4). Si además existen simetrías adicionales en la métrica, como es el caso, el número de ecuaciones puede reducirse.

Las ecuaciones de Einstein nos dicen como la presencia de materia curva el espacio-tiempo, y como se moverá la materia por dicha curvatura, por lo que es necesario describir la materia tomando en cuenta esa consideración. Los posibles componentes del Universo que se consideran en este modelo son los llamados fluidos perfectos, es decir, que no consideran viscosidad o flujos de temperatura. Los fluidos perfectos tienen un tensor de energía-momento de la forma

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde ρ es la densidad de masa y p es la presión.

Para la métrica de FLRW, hay dos ecuaciones de Einstein de gran importancia, la llamada del tiempo-tiempo y la del espacio-espacio, la derivación de dichas ecuaciones es larga y complicada, pero puede encontrarse

en prácticamente cualquier libro de relatividad general, por ejemplo [34]. La ecuación tiempo-tiempo es

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.9)$$

la cual es llamada ecuación de Friedman, mientras que la ecuación de espacio-espacio es

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (2.10)$$

que recibe el nombre de ecuación de fluido. Las ecuaciones (2.9) y (2.10) son de suma importancia pues describen la expansión métrica del espacio en modelos homogéneos e isótropos del Universo dentro del contexto de la teoría general de la relatividad.

2.1.3. Corrimiento al rojo

Se conoce como corrimiento al rojo o *redshift* al aparente aumento de longitud de onda en la radiación electromagnética que percibe un observador en comparación con la que emite una fuente que se aleja, de la misma forma que cuando una fuente de ondas sonoras se aleja de un observador, este percibe que el sonido es más grave, cuando se trata de una fuente emisora de ondas electromagnéticas visibles, un observador percibe esa luz más roja. El corrimiento al rojo se define como la variable z

$$z = \frac{\lambda_{observada} - \lambda_{emitida}}{\lambda_{emitida}}, \quad (2.11)$$

donde λ es longitud de onda. La variable z está íntimamente relacionado con el factor de escala, o mejor dicho, es una consecuencia de la expansión del Universo, se puede probar mediante la siguiente derivación: El punto clave en la propagación de la luz es que esta obedece que $ds = 0$, es decir que un rayo de luz no recorre distancia en lo absoluto en el espacio-tiempo. A un tiempo determinado, todos los puntos en el espacio son equivalentes, por lo tanto se puede considerar que un rayo viaja de forma radial, de una galaxia A en un punto $r = 0$ hasta otra galaxia B en otro punto $r = r_0$, con $d\theta = d\phi = 0$, recordado la métrica de Robertson-Walker (ec. 2.6) y que la expansión depende completamente del factor de escala $a(t)$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.12)$$

y haciendo $ds = d\theta = d\phi = 0$

$$\frac{a(t)}{c} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.13)$$

Para encontrar el tiempo que le toma al rayo de luz llegar de $r = 0$ a $r = r_0$, se integra de ambos lados de la ecuación

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{a(t)}{c} dt = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.14)$$

donde los subíndices e y r simbolizan emisión y recepción respectivamente. Ahora se considera un rayo emitido un pequeño intervalo de tiempo después, el tiempo de emisión y de recepción serían

$$t_e + dt_e, \quad (2.15)$$

$$t_r + dt_r, \quad (2.16)$$

respectivamente ya que las galaxias mantienen coordenadas, por lo que se obtiene una integral similar

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{a(t)}{c} dt = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.17)$$

Como los lados derechos de las ecuaciones 2.14 y 2.17 son los mismo, se pueden igualar

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_r+dt_r} \frac{a(t)}{c} dt = \int_{t_e}^{t_r} \frac{a(t)}{c} dt. \quad (2.18)$$

Hay que recordar que una integral definida se puede interpretar como área bajo una curva, y para un Universo en expansión la función $c/a(t)$ será decreciente. Se pueden reordenar los límites de la siguiente manera [35].

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{a(t)}{c} dt = \int_{t_r}^{t_r+dt_r} \frac{a(t)}{c} dt, \quad (2.19)$$

lo cual da como resultado

$$\frac{dt_r}{a(t_r)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}. \quad (2.20)$$

Para un Universo en expansión $a(t_r) > a(t_e)$, por lo tanto $dt_r > dt_e$ lo que quiere decir que el intervalo de tiempo entre ambos rayos se incrementa conforme se expande el Universo. Se puede hacer el análisis en el que en lugar de dos rayos separados se tienen dos crestas de una misma onda, y como la longitud de onda es proporcional al intervalo de tiempo entre las crestas, $\lambda \propto dt$

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}, \quad (2.21)$$

si sumamos un 1 de ambos lados de la última ecuación, podemos recuperar la ecuación 2.11

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} + \frac{\lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} + 1, \quad (2.22)$$

$$\frac{\lambda_r + \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} + 1 = z, \quad (2.23)$$

se toma el tiempo de recepción como el tiempo del día de hoy $t_r = t_0$, por lo tanto

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = z + 1. \quad (2.24)$$

Esta última ecuación es de mucha importancia en la cosmología moderna, pues relaciona dos de los parámetros principales, el factor en dos momentos dados y el corrimiento al rojo, de hecho será muy importante en las soluciones presentadas en este trabajo.

2.2. Formalismo de Israel-Stewart-Hiscock

En esta sección se describirá el formalismo de Israel-Stewart-Hiscock para describir las propiedades termodinámicas y la evolución de un Universo lleno únicamente con un único fluido como componente principal, el cual experimenta procesos disipativos durante su evolución cósmica. Asumiremos que este fluido obedece la ecuación de estado barotrópica,

$$p = \omega \rho, \quad (2.25)$$

donde p es presión barotrópica, ρ es la densidad de energía y el parámetro ω puede tomar los siguientes valores para diferentes etapas de la evolución del Universo

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{materia ideal} \\ 1/3 & \text{radiación} \\ -1 & \text{energía del vacío, se utiliza en } \Lambda\text{CDM} \end{cases} \quad (2.26)$$

Para un Universo plano FLRW, la ecuación restrictiva es,

$$3H^2 = \rho. \quad (2.27)$$

En el marco teórico de ISH, la ecuación de transporte está dada por

$$\tau \dot{\Pi} + \left(1 + \frac{1}{2}\tau\Delta\right) \Pi = -3\xi(\rho), \quad (2.28)$$

donde el punto sobre una variable, indica que se le está aplicando el operador de derivada en el tiempo. τ Es el tiempo de relajación, $\xi(\rho)$ es el coeficiente de viscosidad, del cual asumiremos que es dependiente de la densidad de energía, y Δ está definido por

$$\Delta = 3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\xi}}{\xi} - \frac{\dot{T}}{T}, \quad (2.29)$$

donde T es la temperatura barotrópica, y toma la forma

$$T = \beta\rho^{\omega/(\omega+1)}, \quad (2.30)$$

que es la condición de integrabilidad de Gibbs cuando el fluido obedece la ecuaciones de estado (2.25) y β es un parámetro positivo. También como se menciona en [36] las cantidades ξ , ρ , p y τ están relacionadas con la velocidad de las perturbaciones c_b

$$\frac{\xi}{(\rho + p)\tau} = c_b^2, \quad (2.31)$$

y c_b está definida como

$$c_b^2 = \epsilon(1 - \omega), \quad (2.32)$$

usualmente a la velocidad de propagación de las perturbaciones se le asocia o se le llama velocidad del sonido, y debe cumplirse que sea menor o igual a la velocidad de la luz, esto se logra con $0 < \epsilon \leq 1$. También se asume una dependencia de ley de potencia para ξ en términos de la densidad de energía del fluido principal, es decir

$$\xi = \xi_0 \rho^s, \quad (2.33)$$

donde s es un parámetro arbitrario y ξ_0 una constante positiva para satisfacer la segunda ley de la termodinámica [37]. Se ha escogido este tipo de sustitución porque una elección de $s = 1/2$ conduce a la forma más sencilla de la ecuación de Hubble, la cual se estudia posteriormente en el Capítulo 4. Usando la ecuación de estado (2.25) en (2.31), se obtiene una nueva expresión para el tiempo de relajación

$$\tau = \frac{\xi_0}{\epsilon(1 - \omega^2)} \rho^{s-1}, \quad (2.34)$$

y de acuerdo a la ecuación (2.29)

$$\Delta = \frac{3H}{\delta(\omega)} \left(\delta(\omega) - \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (2.35)$$

donde se ha definido el parámetro $\delta(\omega)$ de la siguiente manera

$$\delta(\omega) := \frac{3}{4} \left(\frac{1 + \omega}{1/2 + \omega} \right). \quad (2.36)$$

Por lo tanto, para $0 \leq \omega < 1$, $\delta(\omega) > 0$. Usando las ecuaciones (2.27) y (2.34) es posible escribir

$$\tau H = \frac{3^{s-1} \xi_0}{\epsilon(1 - \omega^2)} H^{2(s-1/2)}, \quad (2.37)$$

la condición necesaria para que el fluido describa el componente disipativo de la materia oscura es

$$\tau H < 1, \quad (2.38)$$

lo cual nos da el límite superior para el parámetro ξ_0 :

$$\xi_0 < \sqrt{3\epsilon}(1 - \omega^2). \quad (2.39)$$

La ecuación diferencial para el parámetro de Hubble puede ser construida a partir de la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + 3H [(1 + \omega)\rho + \Pi] = 0, \quad (2.40)$$

y usando las ecuaciones (2.27) y (2.28), y la relación $\xi(\rho) = \xi_0 \rho^s$ podemos obtener la ecuación diferencial

$$\left[\frac{2}{3(1 - \omega^2)} \left(\frac{3(1 + \omega)\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H^3} \right) \right] H^{2(s-1/2)} + \frac{1}{3^s \xi_0} \left[1 + \frac{3^{s-1} \xi_0 \Delta H^{2(s+1)}}{2(1 - \omega^2)} \right] \left[3(1 + \omega) \frac{2\dot{H}}{H^2} \right] = 0, \quad (2.41)$$

la cual se conoce como ecuación diferencial de Hubble, que describe la dinámica de la expansión del Universo en función de observables y parámetros termodinámicos. Dado que s es un parámetro que se propuso de forma arbitraria, y dada la complejidad matemática y la no linealidad de la ecuación, el caso más estudiado ocurre cuando $s = \frac{1}{2}$, en el cual la ecuación se simplifica bastante y ha demostrado dar buenos resultados [27], [31], [32]. Cuando $s = 1/2$:

$$\ddot{H} + \alpha_1 \frac{\dot{H}^2}{H} + \alpha_2 H \dot{H} + \alpha_3 H^3 = 0, \quad (2.42)$$

donde los parámetros α_i son las siguientes constantes

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2\delta}, \quad (2.43)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} + 3(1 + \omega) - \frac{9}{4\delta}(1 + \omega) + \frac{\sqrt{3}\epsilon(1 - \omega^2)}{\xi_0}, \quad (2.44)$$

$$\alpha_3 = \frac{9}{4}(1 + \omega) + \frac{9}{2}\epsilon(1 - \omega^2) \left[\frac{1 + \omega}{\sqrt{3}\xi_0} - 1 \right], \quad (2.45)$$

En el Capítulo 3 se explica un método para obtener una solución exacta a esta última ecuación, el método de factorización para EDNL, y posteriormente se describirán las técnicas de restricción de parámetros libres en la solución, y en el Capítulo 4 se profundiza en la resolución de la ecuación (2.42) utilizando el método antes mencionado.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Metodología

En este capítulo se describe la metodología que se llevó a cabo para el trabajo de esta tesis. En la primera sección se presenta y describe el método de factorización para EDNL que se utilizó para obtener una solución exacta a la ecuación diferencial de Hubble, y en la segunda sección se describe el análisis bayesiano que se suele utilizar para restringir parámetros en muchos de los diferentes modelos de cosmología viscosa.

3.1. Un método de factorización para ecuaciones diferenciales no lineales

En el marco teórico se ha presentado una derivación dentro del formalismo de Israel-Stewart-Hiscock para la ecuación diferencial para el parámetro de Hubble, se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal, y las derivadas son respecto al tiempo. Resolver este tipo de ecuaciones no es tarea sencilla pues no existe procedimiento general para todos los casos y muchas veces se debe recurrir a métodos numéricos como el de Euler o Runge-Kuta, pero existe un método que ha demostrado funcionar bien con ecuaciones similares, se trata del método de factorización, el cual consiste precisamente en factorizar los operadores de derivadas en la ecuación y por medio de procedimientos algebraicos convenientes encontrar una solución analítica exacta.

Por ejemplo la ecuación que se tiene es del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + g(y) \frac{dy}{dx} + h(y) = 0, \quad (3.1)$$

dicho tipo de ecuación se puede factorizar de la siguiente manera

$$\left[\frac{d}{d\eta} - \phi_1(y) \frac{dy}{d\eta} - \phi_2(y) \right] \left[\frac{d}{d\eta} - \phi_3(y) \right] y = 0. \quad (3.2)$$

Expandiendo la ecuación (3.2), los términos pueden agruparse como sigue

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} - \phi_1 \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(\phi_1 \phi_3 y(\eta) - \phi_2 - \phi_3 - \frac{d\phi_3}{dy} y(\eta) \right) \frac{dy}{d\eta} + \phi_2 \phi_3 y(\eta) = 0, \quad (3.3)$$

entonces, comparando la ecuación (3.2) con la (3.3) se obtienen las siguientes condiciones

$$f(y) = -\phi_1, \quad (3.4a)$$

$$g(y) = \phi_1 \phi_3 y - \phi_2 - \phi_3 - \frac{d\phi_3}{dy} y, \quad (3.4b)$$

$$h(y) = \phi_2 \phi_3 y, \quad (3.4c)$$

esto con el fin de primero resolver uno de los corchetes al asumirlo como una función, de la siguiente manera

$$\left[\frac{d}{d\eta} - \phi_3 \right] y = \Gamma(y). \quad (3.5)$$

Dado que se conocen las $f(y)$, $g(y)$ y $h(y)$, se pueden plantear las funciones ϕ_i , ($i = 1, 2, 3$) y sería posible encontrar una expresión para Γ , y al volver a la ecuación original se habría reducido en orden, es decir, la ecuación (3.2) se convertirá en

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} - \left(\phi_1(y) \frac{dy}{d\eta} - \phi_2(y) \right) \Gamma = 0, \quad (3.6)$$

y la ecuación diferencial resultante puede ser resuelta por otros métodos o si es preciso y posible, puede utilizarse un sistema de álgebra computacional.

3.2. Análisis de Bayes para la restricción de parámetros

Un modelo es una representación matemática que intenta describir a suficiente detalle los procesos físicos de un fenómeno, por ello es importante que el modelo sea consistente con lo que ya se conoce de dicho fenómeno, en el caso de este trabajo, se trata de un modelo cosmológico y uno de los procesos físicos es la expansión del universo.

Una vez construido el modelo dentro del formalismo de Israel-Stewart-Hiscock y resuelto las ecuaciones de evolución con el método de factorización, es de esperar que las soluciones queden en términos de cantidades que no podrán determinarse de primera mano, pero pueden ser medidos a partir de datos observacionales, dichas cantidades son llamadas parámetros cosmológicos.

3.2.1. Datos cosmológicos observacionales

Actualmente existen numerosos conjuntos de datos observacionales en cosmología, y en muchos trabajos se analizan varios de ellos a la vez para determinar los parámetros cosmológicos de algún modelo. Algunas de las características que deben de tener estos conjuntos de datos son:

- Los datos deben ser de alta precisión y consistentes con otros datos del mismo tipo.
- Los datos deben permitir que se obtengan predicciones no ambiguas del modelo bajo estudio.
- Los observables deben tener una dependencia significativa de los parámetros del modelo, de otra forma no se podrán restringir estos.
- Si se utilizan varios conjuntos de datos, deben complementarse.

En el siguiente apartado se describe como se utilizan los datos para validar un modelo.

3.2.2. Análisis de los datos

En la cosmología moderna, al utilizar datos observacionales para encontrar los valores de los parámetros de un modelo, se utiliza una metodología conocida como estadística Bayesiana, cuyo eje principal es el teorema de Bayes. Dicho teorema establece que dados dos eventos posibles A y B se tiene:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}, \quad (3.7)$$

en donde la línea vertical indica la *probabilidad condicional*, que se lee como “la probabilidad de que ocurra B , dado A ...”, en la práctica, A y B pueden ser dos eventos cualesquiera, pero en el contexto que se está manejando, A es el conjunto de datos observacionales, que será renombrado como D y B es el arreglo de parámetros $\theta = a, b, c, \dots$ del modelo que se busca ajustar a los datos D , quedando de la forma:

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta)P(\theta)}{P(D)}, \quad (3.8)$$

el lado izquierdo de 3.8 es lo que se desea conocer, comúnmente llamado la distribución posterior, del otro lado, el término $P(D)$ no depende de los parámetros y en este caso es para normalizar la expresión, $P(\theta)$ es lo que ya se conoce, es el posible rango que podría tomar cada parámetro antes de medir los datos D , se le suele llamar distribución prior o anterior, y finalmente $P(D|\theta)$ es la probabilidad de que los datos supongan valores particulares para los parámetros, se le llama simplemente función de probabilidad, o en inglés *likelihood function*.

Calcular la función de probabilidad para un conjunto de valores en particular requiere calcular la predicción teórica utilizando el modelo, y entonces calcular que tan probable es obtener los valores observados utilizando esos valores particulares de los parámetros, puede ser haciendo una variante de la prueba *chi - cuadrada*, la cual es una prueba estadística mide la discrepancia entre una distribución observada y otra teórica. También se utiliza para probar si existe una dependencia entre dos variables.

El reto de la restricción de parámetros es recorrer todo el espacio de posibles parámetros para obtener la distribución posterior de los mismos, es un reto porque en los modelos se suelen tener muchos parámetros que están siendo variados simultáneamente, y para mapear el espacio de parámetros (de manera no tan burda) se necesitan millones de evaluaciones de la función de probabilidad, resultando enormes cantidades de tiempo de cómputo. Es por esto que se han desarrollado técnicas más eficientes para explorar el espacio de parámetros en un modelo, la más famosa es una aproximación llamada Cadenas de Markov por Monte Carlo (CMMC). Utilizando las CMMC el espacio de parámetros es explorado brincando de manera aleatoria de un conjunto de valores para los parámetros θ_i a otro θ_j , bajo la regla de que el nuevo conjunto de valores θ_j será aceptado o rechazado dependiendo de cómo se compara su función de distribución con la del conjunto anterior, por lo que se podría decir que no es del todo aleatorio, sino pseudoaleatorio.

Ahora bien, es importante recalcar porqué implementar un método de ajuste de parámetros tan rebuscado como lo es CMMC cuando existen otros más sencillos y computacionalmente menos costosos, como una regresión de mínimos cuadrados, ya que en efecto, puede aplicarse una regresión y dará valores para los parámetros junto con una curva ajustada, sin embargo, al hacer eso, se está asumiendo que no existe correlación entre los parámetros, lo cual no es necesariamente cierto, por no decir que casi nunca lo es, mientras que el método de CMMC además de entregar los mejores valores ajustados, también devuelve la distribución que tiene cada parámetro y su correlación con los otros.

La versión más sencilla de CMMC utiliza el algoritmo Metropolis-Hastings, en el cual los conjuntos de valores propuestos siempre son aceptados si la función de probabilidad es mayor comparada a la del conjunto anterior, mientras que si es menor, a veces son aceptados y a veces rechazados. Dado el funcionamiento del algoritmo, los valores son dirigidos a las regiones del espacio de parámetros que tienen mejores funciones de probabilidad, es decir, donde el modelo se ajusta mejor a los datos.

Existen ya herramientas computacionales que implementan algún método CMMC, ya sea utilizando el algoritmo *Metropolis-Hastings* u otro similar, uno de ellos será utilizado para ajustar la solución encontrada en este trabajo.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Resolución de la ecuación diferencial

En este capítulo se centra en la resolución de la ecuación (2.42) utilizando el método descrito en el Capítulo 3, pero también se ahonda en la determinación de varias expresiones algebraicas resultantes de la resolución misma, tales como constantes derivadas de ecuaciones de restricción o constantes de integración.

4.1. Resolución de la ecuación diferencial

Partiendo de la ecuación diferencial de Hubble para el caso cuando el parámetro de viscosidad $s = 1/2$

$$\ddot{H} + \alpha_1 \frac{\dot{H}^2}{H} + \alpha_2 H \dot{H} + \alpha_3 H^3 = 0, \quad (4.1)$$

en donde las constantes α_i son:

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2\delta}, \quad (4.2)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} + 3(1 + \omega) - \frac{9}{4\delta}(1 + \omega) + \frac{\sqrt{3}\epsilon(1 - \omega^2)}{\xi_0}, \quad (4.3)$$

$$\alpha_3 = \frac{9}{4}(1 + \omega) + \frac{9}{2}\epsilon(1 - \omega^2) \left[\frac{1 + \omega}{\sqrt{3}\xi_0} - 1 \right], \quad (4.4)$$

y δ se ha definido como

$$\delta := \frac{3}{4} \left(\frac{1 + \omega}{1/2 + \omega} \right). \quad (4.5)$$

Si bien la ecuación diferencial de Hubble se ha simplificado bastante, sigue siendo altamente no lineal, tanto que no puede ser resuelta por métodos tradicionales, por lo tanto se propone un cambio de variable de la siguiente manera

$$H = H(\eta) = y^n(\eta), \quad (4.6a)$$

$$d\eta = y^n dt \therefore \frac{d\eta}{dt} = y^n, \quad (4.6b)$$

de forma que ahora en lugar de buscar una función $H(t)$, se busca una función $H(\eta)$ y otra $t(\eta)$, ambas dependientes de un parámetro η y aplicando la regla de la cadena las derivadas respecto al tiempo, se convierten en

$$\frac{dH}{dt} = ny^{2n-1} \frac{dy}{d\eta}, \quad (4.7a)$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = n(2n-1)y^{3n-2} \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + ny^{3n-1} \frac{d^2y}{d\eta^2}. \quad (4.7b)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.7) en (4.1), la ecuación diferencial de Hubble se reescribe como

$$ny^{3n-1} \frac{d^2y}{d\eta^2} + (2n^2 - n + \alpha_1 n^2) y^{3n-2} \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \alpha_2 ny^{3n-1} \frac{dy}{d\eta} + \alpha_3 y^{3n} = 0, \quad (4.8)$$

multiplicando toda la ecuación (4.8) por y^{1-3n} y dividiendo sobre n , se obtiene

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{d^2y}{d\eta^2} \right)^2 (2n-1 + \alpha_1 n) + \frac{dy}{d\eta} \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{n} y = 0, \quad (4.9)$$

la cual es una ecuación que se puede resolver utilizando el método de factorización, aunque es importante recalcar que la ecuación diferencial original también puede ser resuelta por el método de factorización, se encuentra un caso particular, ya estudiado en [32] y [33]. La ecuación (4.9) es una ecuación del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + g(y) \frac{dy}{dx} + h(y) = 0, \quad (4.10)$$

dicho tipo de ecuación se puede factorizar de la siguiente manera

$$\left[\frac{d}{d\eta} - \phi_1(y) \frac{dy}{d\eta} - \phi_2(y) \right] \left[\frac{d}{d\eta} - \phi_3(y) \right] y = 0, \quad (4.11)$$

siguiendo la metodología descrita en el Capítulo 3, se expande la ecuación (4.11), los términos pueden agruparse como sigue

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} - \phi_1 \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(\phi_1 \phi_3 y(\eta) - \phi_2 - \phi_3 - \frac{d\phi_3}{dy} y(\eta) \right) \frac{dy}{d\eta} + \phi_2 \phi_3 y(\eta) = 0, \quad (4.12)$$

entonces, comparando la ecuación (4.10) con (4.9) se obtienen las siguientes funciones que acompañan a cada término

$$f(y) = \frac{2n - 1 + \alpha_1 n}{y}, \quad (4.13a)$$

$$g(y) = \alpha_2, \quad (4.13b)$$

$$h(y) = \frac{\alpha_3}{n} y, \quad (4.13c)$$

y comparando las anteriores expresiones con la ecuación (4.12), se obtienen las ecuaciones de restricción

$$f(y) = -\phi_1, \quad (4.14a)$$

$$g(y) = \phi_1 \phi_3 y - \phi_2 - \phi_3 - \frac{d\phi_3}{d\eta} y, \quad (4.14b)$$

$$h(y) = \phi_2 \phi_3 y. \quad (4.14c)$$

Se procede a resolver primero uno de los corchetes, con el fin de realizar una reducción de orden a la ecuación diferencial

$$\left[\frac{d}{d\eta} - \phi_3 \right] y = \Gamma(y). \quad (4.15)$$

Se propone que los parámetros de restricción ϕ_2 y ϕ_3 están relacionados de la siguiente manera

$$\phi_2 = a_1^{-1}, \quad (4.16)$$

$$\phi_3 = a_1 \frac{\alpha_3}{n}, \quad (4.17)$$

donde a_1 es un parámetro propuesto cuya solución se encontrará mas adelante y no debe ser confundido con el parámetro $a(t)$ que es el factor de escala del universo. Entonces sustituyendo (3.2) y (4.16) en (4.11) se procede a resolver

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} + \left(\frac{2n-1 + \alpha_1 n}{y} \frac{dy}{d\eta} - a_1^{-1} \right) \Gamma = 0,$$

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{1}{\Gamma} + \left(\frac{2n-1 + \alpha_1 n}{y} \frac{dy}{d\eta} - a_1^{-1} \right) = 0,$$

$$\frac{d \ln \Gamma}{d\eta} + \frac{d \ln y}{d\eta} - (2n-1 + \alpha_1 n) = a_1^{-1},$$

$$\frac{d \ln(\Gamma y^{2n-1+\alpha_1 n})}{d\eta} = a_1^{-1},$$

$$\ln(\Gamma y^{2n-1+\alpha_1 n}) = a_1^{-1} \eta + C_1,$$

finalmente se obtiene

$$\Gamma = C_1 e^{\eta/a_1} y^{1-2n-\alpha_1 n}, \quad (4.18)$$

recuperando (4.15) se tiene una nueva ecuación diferencial

$$\frac{dy}{d\eta} - \frac{\alpha_3 a_1}{n} y - C_1 e^{\eta/a_1} y^{1-2n-\alpha_1 n} = 0. \quad (4.19)$$

Hasta ahora se ha conseguido, aplicando un cambio de variable, convertir una ecuación de segundo orden, en una de primero, cuya solución general también será solución de (4.1) y es posible obtenerla con software

matemático

$$y(\eta) = \left(C_2 e^{a_1(2+\alpha_1)\alpha_3\eta} - \frac{a_1 C_1 e^{\eta/a_1} n(2+\alpha_1)}{a_1^2(2+\alpha_1)\alpha_3 - 1} \right)^{\frac{1}{2n+\alpha_1}}. \quad (4.20)$$

4.1.1. Parámetro a_1

El parámetro a_1 se encuentra presente en muchas de las ecuaciones que se han derivado, para encontrar una expresión debemos retomar la ecuación (4.13b) y (4.14b)

$$\alpha_2 = \phi_1 \phi_3 y - \phi_2 - \phi_3 - \frac{d\phi_3}{dy} y, \quad (4.21)$$

$$\alpha_2 = \frac{(1-2n-\alpha_1 n)a_1 \alpha_3}{yn} y - \frac{1}{a_1} - \frac{\alpha_3 a_1}{n}, \quad (4.22)$$

ya que ϕ_3 no depende de y , su derivada es 0. Y simplificando se obtiene una ecuación de segundo grado, independiente de n , y que al resolverla, nos dará el valor de a_1

$$\alpha_3(2+\alpha_1)a_1^2 + \alpha_2 a_1 + 1 = 0, \quad (4.23)$$

resolviéndola

$$a_1 = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 8\alpha_3 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2(2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)}. \quad (4.24)$$

Ya se tienen todos los elementos necesarios para proseguir a encontrar una solución específica para el modelo.

4.1.2. Parámetro $H(\eta)$

Dado que n es un parámetro arbitrario que se propuso, por simplicidad se escogerá $n = 1/2$, y como $H = y^{1/2} = \sqrt{y}$

$$H(\eta) = \left(C_2 e^{a_1(2+\alpha_1)\alpha_3\eta} - \frac{a_1 C_1 e^{\eta/a_1} (2+\alpha_1)}{2a_1^2(2+\alpha_1)\alpha_3 - 2} \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}} \quad (4.25)$$

4.1.3. Tiempo en función de η

Ya que se hizo una sustitución de la forma $d\eta = y^n dt$, se ha encontrado una expresión para el parámetro de Hubble de la forma $H(\eta)$, y debido a que parte de esa sustitución fue

$$t = \int_{\eta_0}^{\eta} y^{-n} d\eta = T(\eta) - T(\eta_0), \quad (4.26)$$

también deberá encontrarse una expresión para el tiempo en función de η . Esta integral tiene solución analítica, que se obtuvo por medio de *software* matemático. Entonces se podrá graficar cualquier parámetro dependiente de η de forma paramétrica contra el tiempo. Por conveniencia matemática se va tomar el marco de forma que t_0 (el tiempo al día de hoy) coincida con un $\eta_0 = 0$, para simplificar un sistema de ecuaciones que surgirá más adelante, cuando se intentan determinar las constantes C_1 y C_2 . El valor de la integral, sin evaluar en los límites es

$$f_1(\eta) \frac{{}_2F_1(1, K_1, K_2, f_2(\eta))}{C_1 H(\eta)}, \quad (4.27)$$

donde las constantes K_i ($i = 1, 2$) son

$$K_1 = \frac{a_1^2 \alpha_3 (1 + \alpha_1) - 1}{a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1) - 1}, \quad (4.28)$$

$$K_2 = 1 - \frac{1}{a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1)^2 - \alpha_1 - 2}, \quad (4.29)$$

la función ${}_2F_1$ es la hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \quad (4.30)$$

y donde las funciones f_i ($i = 1, 2$) son

$$f_1(\eta) = -a_1 C_1 (2 + \alpha_1) + 2C_2 e^{(a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1) - 1)\eta/a_1} (a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1) - 1), \quad (4.31)$$

$$f_2(\eta) = \frac{2C_2 e^{(a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1) - 1)\eta/a_1} (a_1^2 \alpha_3 (2 + \alpha_1) - 1)}{a_1 C_1 (2 + \alpha_1)}, \quad (4.32)$$

4.1.4. Parámetro de desaceleración $q(\eta)$

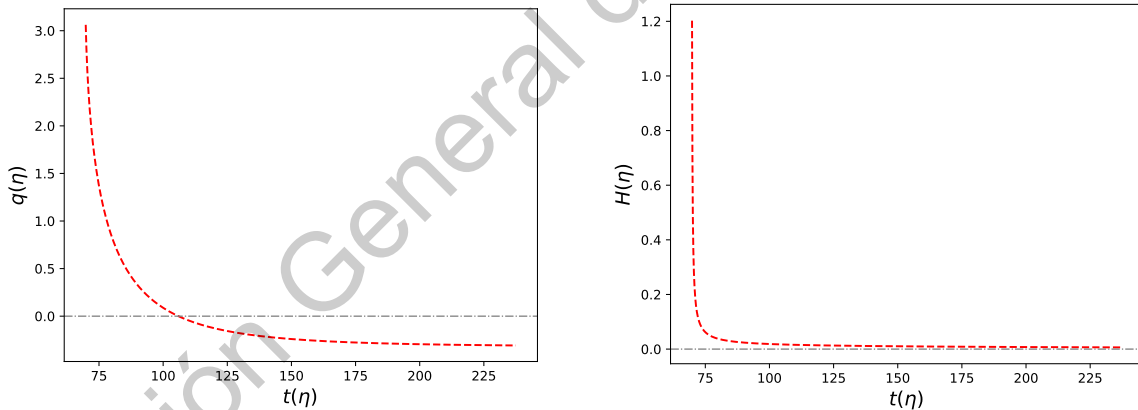
En cosmología, el parámetro de desaceleración q , es una cantidad adimensional que mide la tasa de desaceleración de expansión de universos con métrica FLRW. El parámetro de desaceleración en términos de la derivada temporal de $H(t)$ está dado por [35]

$$q(t) = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1 \quad (4.33)$$

Pero recordando las ecuaciones (4.6) y (4.7), se obtiene

$$q(\eta) = -1 - \frac{1}{2y} \frac{dy}{d\eta} \quad (4.34)$$

Y utilizando los mismos parámetros que para el parámetro $H(\eta)$, las gráficas para H y q se muestran en la Figura 4.1



(a) Gráfica para el parámetro de desaceleración

(b) Gráfica para el parámetro de Hubble

Figura 4.1: Gráficas sencillas para los parámetros de mayor interés en el modelo

A primera vista, lo más destacable es que el parámetro de Hubble se comporta de una manera esperada, mientras que el de desaceleración q presenta una transición, de una evolución desacelerada a una acelerada, lo cual es deseable.

4.2. Corrimiento al rojo

Para poder contrastar las soluciones analíticas con datos observacionales, es necesario expresarlas en función de alguna variable para la cual existan dichos datos, una de las más comunes es el parámetro z , llamado corrimiento al rojo o *redshift*, y puede ser expresado en términos del factor de escala del universo

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_{antes})} = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta)}, \quad (4.35)$$

para llevar todas las ecuaciones obtenidas del dominio de η al de z , se hace uso de la relación [35]

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.36)$$

volviendo a utilizar la regla de la cadena y las ecuaciones (4.6) y (4.7)

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{d \ln a}{dt} \rightarrow H(\eta) = \frac{d \ln a}{d\eta} \frac{d\eta}{dt}, \\ H(\eta) &= y^{1/2}(\eta) = y^{1/2} \frac{d \ln a}{d\eta}, \\ 1 &= \frac{d \ln a}{d\eta}, \end{aligned}$$

se procede a integrar de ambos lados de la ecuación con los límites de integración de η a η_0

$$\int_{\eta}^{\eta_0} d\eta = \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d \ln a}{d\eta} d\eta = \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d \ln a}{d\eta} d\eta,$$

$$\eta_0 - \eta = \ln a(\eta_0) - \ln a(\eta),$$

$$e^{\eta_0 - \eta} = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta)}, \quad (4.37)$$

dado que η_0 es un parámetro arbitrario, puede tomar el valor que uno guste. Por simplicidad matemática se escogió $\eta_0 = 0$, por lo que finalmente se llega a

$$e^{-\eta} = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta)}, \quad (4.38)$$

4.2.1. Parámetro $H(z)$

El último paso para tener ecuaciones en el dominio de z , es comparar la ecuación (4.38) con la (4.35), para encontrar la relación

$$1 + z = e^{-\eta}, \quad (4.39)$$

de no haber escogido $\eta_0 = 0$ al obtener la ecuación (4.38), se habría obtenido una tercera constante de integración $C_3 = e^{\eta_0}$ y la determinación de esta habría sido mucho más complicada. Siendo que el término e^η está presente en varias ecuaciones, se puede dejar H en términos de z

$$H(z) = \left(C_2 \left(\frac{1}{1+z} \right)^{a_1(2+\alpha_1)\alpha_3} - \frac{a_1 C_1 (2+\alpha_1)}{2a_1^2(2+\alpha_1)\alpha_3 - 2} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{1/a_1} \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}}. \quad (4.40)$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden ser determinadas analíticamente por un sistema de ecuaciones que se presenta en la Sección 4.2.3.

4.2.2. Solución particular

Como ya se ha mencionado, de la solución general a la ecuación diferencial de Hubble (4.40), se puede recuperar una solución particular, encontrada en el artículo *Constraining a causal dissipative cosmological model* [33], publicado en octubre de 2019, donde se presenta

$$H(z) = H_0(1+z)^{1/A_\pm}, \quad (4.41)$$

donde $A_\pm = -\frac{1}{a_1\alpha_3}$, y a_1 es (4.24). Para encontrar (4.41) solo se debe tomar (4.40) y hacer $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. La solución particular ya fue ampliamente explorada en el artículo en el que se publicó. Esta solución no presenta una transición suave de la etapa de expansión desacelerada a una acelerada.

4.2.3. Determinación de las constantes C_1 y C_2

Es posible ajustar valores para las constantes de integración, pero al ser una ecuación diferencial de segundo grado, pueden ser determinadas al aplicar dos condiciones iniciales, al aplicarlas se encuentra un sistema de dos ecuaciones no lineales para determinar el valor de estas constantes, dichas condiciones iniciales son los valores de H y \dot{H} al tiempo $t(\eta = 0) = t_0$. Se sabe que $H_0 = 66.88_{-0.92}^{+0.92}$ [38], pero para tener un valor para \dot{H}_0 se debe recuperar la ecuación (4.33) y se despeja

$$\dot{H} = -H^2(1 + q) \rightarrow \left. \frac{1}{2} \frac{dy}{d\eta} \right|_{\eta=0} = -H_0^2(1 + q_0), \quad (4.42)$$

por lo que el sistema de ecuaciones que determinará las constantes de integración es:

$$H(\eta = 0) - H_0 = 0, \quad (4.43)$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{dy}{d\eta} \right|_{\eta=0} + H_0^2(1 + q_0) = 0, \quad (4.44)$$

primero que nada, se debe cumplir que $H(0) = H_0$, entonces de (4.25) se despeja

$$H(0) = H_0 = \left(C_2 - \frac{a_1 C_1 (2 + \alpha_1)}{2a_1^2 (2 + \alpha_1) \alpha_3 - 2} \right)^{\frac{1}{2+\alpha_1}}, \quad (4.45)$$

se puede despejar una constante, será C_2 por facilidad

$$C_2 = H_0^{2+\alpha_1} + \frac{C_1 a_1 (2 + \alpha_1)}{2a_1^2 (2 + \alpha_1) \alpha_3 - 2}, \quad (4.46)$$

después se utiliza la segunda ecuación

$$\left. \frac{1}{2} \frac{dy}{d\eta} \right|_{\eta=0} + H_0^2(1 + q_0) = 0, \quad (4.47)$$

o equivalentemente

$$H_0^2(1 + q_0) + \frac{1}{2} H_0^{-\alpha_1} (C_1 + 2a_1 \alpha_3 H_0^{2+\alpha_1}) = 0, \quad (4.48)$$

y es sencillo despejar C_1

$$C_1 = -2H_0^{2+\alpha_1}(1 + q_0 + a_1\alpha_3), \quad (4.49)$$

recuperando la ecuación para C_2

$$C_2 = -H_0^{2+\alpha_1} \left[\frac{1 + a_1(1 + q_0)(2 + \alpha_1)}{a_1^2\alpha_3(2 + \alpha_1) - 1} \right], \quad (4.50)$$

de forma que la ecuación (4.25) se convierte en

$$H(\eta) = H_0 \left[\frac{a_1 e^{\eta/a_1} (2 + \alpha_1)(1 + q_0 + a_1\alpha_3) - e^{a_1(2+\alpha_1)\alpha_3\eta} (1 + a_1(1 + q_0)(2 + \alpha_1))}{a_1^2\alpha_3(2 + \alpha_1) - 1} \right]^{\frac{1}{2+\alpha_1}}, \quad (4.51)$$

o recuperándola en términos de z

$$H(z) = H_0 \left[\frac{a_1(1 + z)^{-1/a_1} (2 + \alpha_1)(1 + q_0 + a_1\alpha_3) - (1 + z)^{-a_1(2+\alpha_1)\alpha_3} (1 + a_1(1 + q_0)(2 + \alpha_1))}{a_1^2\alpha_3(2 + \alpha_1) - 1} \right]^{\frac{1}{2+\alpha_1}}, \quad (4.52)$$

se consideró estudiar el caso en el que $\omega = 0$, esto significa considerar que el fluido que llena el Universo del modelo solo consta de materia sin presión, por lo que no existen contribuciones de radiación ($\omega = 1/3$) ni de una constante cosmológica ($\omega = -1$). El tomar $\omega = 0$ conduce a $\alpha_1 = -1$ por lo tanto, la ecuación (4.52) se simplifica a

$$H(z) = H_0 \frac{a_1(1 + z)^{-1/a_1} (1 + q_0 + a_1\alpha_3) - (1 + z)^{-a_1\alpha_3} (1 + a_1 + a_1q_0)}{a_1^2\alpha_3 - 1}. \quad (4.53)$$

Aunque se tienen valores estimados para el parámetro $q_0 = -0.18_{-0.12}^{+0.12}$ o $q_0 = -0.38_{-0.12}^{+0.12}$ [39], este quedó como un parámetro libre. En el siguiente capítulo se presentan los datos y las ecuaciones utilizados para encontrar los mejores valores para ϵ , ξ_0 , q_0 y H_0 al utilizar un método de cadenas de Markov por Monte Carlo

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Restricción de parámetros

5.1. Datos observacionales del parámetro de Hubble

La forma más común de observar la tasa de expansión del Universo es a través de las mediciones del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo z . Una vez que la solución de (4.1) está en términos de z se usa una muestra de OHD recolectada por [40] y que consiste en 50 puntos del parámetro de Hubble en el rango del corrimiento al rojo $z \in [0.07, 1.97]$. Los parámetros naturales del modelo serán restringidos al minimizar la función chi-cuadrada:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{50} \left(\frac{H(z_i) - H_{obs}}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.1)$$

donde los $H(z)$ y los $H_{obs} \pm \sigma_i$ son los valores teóricos y observacionales, respectivamente, para un corrimiento al rojo z_i .

5.2. Datos observacionales de supernovas tipo Ia

Se conoce como magnitud bolométrica a la magnitud aparente que tendría una estrella si la emisión de energía pudiera medirse en ausencia de la atmósfera y en todas las longitudes de onda. Se utilizó la base de datos *Pantheon* [41] que contiene los datos de 1048 supernovas del tipo Ia (SNIa), esos datos son la magnitud bolométrica aparente μ en función del corrimiento al rojo z . El valor teórico de μ puede ser

calculado a partir de la ecuación

$$\mu_{th}(z) = M + 5 \log_{10} [(d_L(z)/10)], \quad (5.2)$$

donde M es un parámetro de corrección y $d_L(z)$ es la distancia de luminosidad adimensional, que está dada por

$$d_L(z) = (1+z)c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (5.3)$$

donde c es la velocidad de la luz, y con la ecuación (4.53) se obtiene:

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{(a_1^2 \alpha_3 - 1) dz'}{a_1 H_0 (1 + q_0 + a_1 \alpha_3) (1 + z')^{-1/a_1} - (1 + a_1 + a_1 q_0) (1 + z')^{-a_1 \alpha_3}}, \quad (5.4)$$

la integral (5.3) puede resolverse analíticamente utilizando un cambio de variable del tipo

$$x = z' + 1, \quad (5.5)$$

$$\rightarrow dx = dz', \quad (5.6)$$

de manera que

$$d_L(x) = cx \int \frac{(a_1^2 \alpha_3 - 1) dx'}{a_1 H_0 (1 + q_0 + a_1 \alpha_3) x'^{-1/a_1} - (1 + a_1 + a_1 q_0) x'^{-a_1 \alpha_3}}, \quad (5.7)$$

para resolverla, se toma solamente la integral (sin los límites de evaluación), a la cual llamaremos $S(x)$, se puede encontrar su solución analítica en términos de la función hipergeométrica de Gauss, y es:

$$S(x) = x^{1-1/a_1} (a_1^2 \alpha_3 - 1) \frac{{}_2F_1(1, b, 1 + b, f(x))}{H_0 (1 + a_1) (1 + q_0 + a_1 \alpha_3)}, \quad (5.8)$$

donde

$$b = \frac{1 + a_1}{1 - a_1^2 \alpha_3}, \quad (5.9)$$

$$f(x) = \frac{(1 + a_1 + a_1 q_0) x^{1/a_1 - a_1 \alpha_3}}{a_1 (1 + q_0 + a_1 \alpha_3)}, \quad (5.10)$$

para escribir $d_L(z)$ solo se debe regresar al dominio del corrimiento al rojo z

$$S(z) = (z + 1)^{1-1/a_1} (a_1^2 \alpha_3 - 1) \frac{{}_2F_1 \left(1, \frac{1+a_1}{1-a_1^2 \alpha_3}, 1 + \frac{1+a_1}{1-a_1^2 \alpha_3}, \frac{(1+a_1+a_1 q_0)(z+1)^{1/a_1 - a_1 \alpha_3}}{a_1 (1+q_0+a_1 \alpha_3)} \right)}{H_0 (1 + a_1) (1 + q_0 + a_1 \alpha_3)}, \quad (5.11)$$

por lo tanto, la expresión para calcular de manera teórica la distancia de luminosidad será

$$d_L(z) = c(1 + z) [S(z) - S(0)], \quad (5.12)$$

\Rightarrow

$$d_L(z) = c(1 + z) (a_1^2 \alpha_3 - 1) \frac{[(1 + z)^{1+1/a_1} {}_2F_1(1, b, 1 + b, f(z)) - {}_2F_1(1, b, 1 + b, f(0))]}{H_0 (1 + a_1) (1 + q_0 + a_1 \alpha_3)}. \quad (5.13)$$

La intención no es hacer también un ajuste de los parámetros utilizando los datos de las supernovas (aunque desde luego que podría hacerse), sino tomar los valores que mejor se ajustan a los datos del parámetro de Hubble y comprobar su fiabilidad, además, las expresiones mostradas en esta sección pueden ser de utilidad en trabajos futuros.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Resultados y discusión

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos al restringir los parámetros libres del modelo, más concretamente la ecuación (4.53), utilizando la base de datos de observaciones del parámetro de Hubble en función del corrimiento al rojo z , y aplicando el método de ajuste de cadenas de Markov por Monte Carlo descrita en el capítulo de Metodología.

El capítulo está estructurado como sigue: primero se muestran cuales son los parámetros libres del modelo y cual distribución prior se utilizó en cada uno, después se muestran los mejores valores obtenidos para cada parámetro, así como la curva del parámetro de Hubble descrita por la ecuación (4.53) al graficarse utilizando dichos valores, también se hace un análisis de las distribuciones y correlaciones de estos. Posteriormente se hace una exploración de como varía el corrimiento al rojo de transición en función de los parámetros ajustados y como se comporta la curva de luminosidad de las supernovas tipo Ia al utilizar los mismos, finalmente se realiza una interpretación física de los resultados obtenidos.

De acuerdo con la metodología del ajuste por CMMC, el arreglo de parámetros a ajustar es

$$\theta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \xi_0 \\ q_0 \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

por lo tanto, la ecuación (3.8) se convertirá en

$$P(\epsilon, \xi_0, q_0, H_0 | \text{OHD}) = \sum_{i=1}^{50} \left(\frac{H(z_i, \xi_0, q_0, H_0) - H_{\text{OHD}_i}}{\sigma_i} \right)^2 P(\epsilon, \xi_0, q_0, H_0), \quad (6.2)$$

donde $P(\epsilon, \xi_0, q_0, H_0)$ al lado izquierdo de la ecuación es la distribución anterior de los parámetros, es decir, el rango de valores que podrían tomar, los cuales son mostrados en la Tabla 6.1.

Parámetro	Distribución prior
ϵ	plano en $[0, 1]$
ξ_0	plano en $[0, \sqrt{3}\epsilon]$
q_0	plano en $[-1, 0]$
H_0	plano en $[60, 75]$

Cuadro 6.1: Distribución anterior o prior de los parámetros a ajustar

El programa fue ejecutado en una estación de trabajo con 500 cadenas, y cada cadena dio 20000 pasos, la curva de $H(z)$ y $q(z)$ junto con z_t utilizando los mejores valores obtenidos, se muestran en la Figura 6. En las gráficas que se muestran a partir de aquí se refiere al modelo trabajado en esta tesis como Modelo Cosmológico propuesto (MCVP).

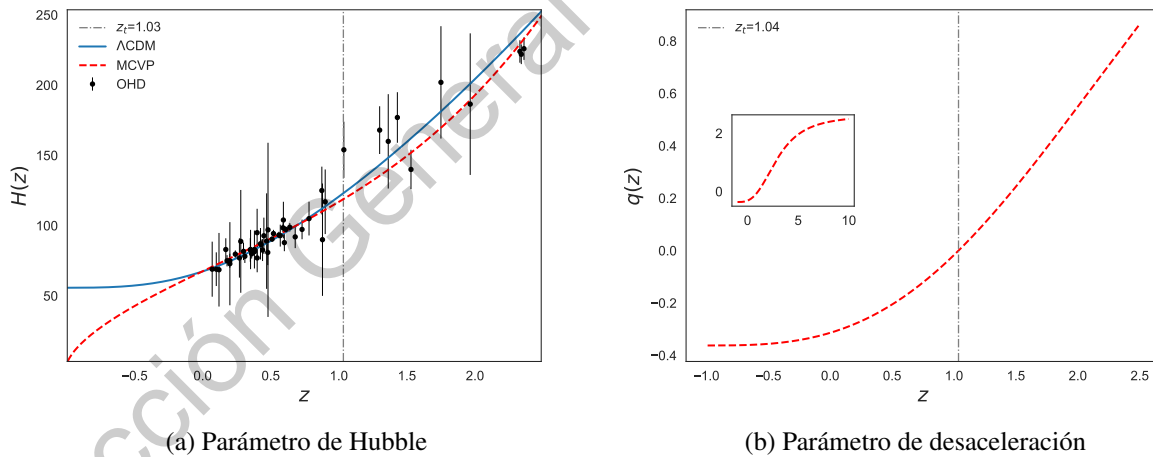


Figura 6.1: Los mejores valores de ϵ , ξ_0 , q_0 y H_0 ajustados para la curva $H(z)$

Parámetro	Mejor valor ajustado
ϵ	$0.40^{+0.06}_{-0.03}$
ξ_0	$0.55^{+0.06}_{-0.08}$
q_0	$-0.31^{+0.02}_{-0.02}$
H_0	$67.51^{+0.41}_{-0.40}$

Cuadro 6.2: Mejores valores para el ajuste

Parámetro	z_t	
	σ_+	σ_-
ϵ	1.548	0.668
ξ_0	0.8	0.753
q_0	1.758	0.738
H_0	1.04	1.04

Cuadro 6.3: Intervalos para z_t dejando dos parámetros fijos y variando un tercero

Los valores mejor ajustados para cada parámetro son los que se muestran en la Tabla 6.2, el valor más grande es el valor medio de la distribución (el percentil 50), mientras que el subíndice y el superíndice son el percentil 16 y 84 respectivamente. El valor obtenido para el parámetro $q_0 = -0.32$ es cercano al reportado en [39], mientras que el valor ajustado para $H_0 = 67.51$ es muy cercano al de $H_0 = 67.66 \pm 0.42$ reportado por la colaboración Planck en [38], teniendo un error de aproximadamente $\approx 0.029\%$, además, el valor de Planck está dentro de un intervalo menor a 1σ del modelo viscoso propuesto. Por otra parte, el valor que se encontró para el corrimiento al rojo de transición fue $z_t = 1.04$, en [42] se reportan ajustes logrados que van de $z = 0.64, 0.75$ y en [43] se encontraron, usando 3 diferentes aproximaciones, los valores de $z_t = 0.6, 0.96$ y 0.98 . La Tabla 6.4 muestra el valor obtenido, contra su reporte y referencia.

Se había hablado en anterioridad sobre el por qué en lugar de hacer un ajuste por regresión de mínimos cuadrados, utilizar un método Monte Carlo, que dicho sea de paso, es mucho más costoso computacionalmente hablando, y había dos razones: la primera es que al utilizar un método tradicional, se estaría asumiendo que no existe correlación entre los parámetros libres, lo cual difícilmente será cierto, la segunda, que no se conocerían las distribuciones para los mejores valores de cada parámetro.

La Figura 6.2 permite ver el espacio de parámetros obtenido del ajuste realizado, en este espacio de parámetros existen cuatro cuadros en la diagonal que muestran la distribución que se obtuvo para cada parámetro y el resto de los cuadros contienen los intervalos de confianza representados en forma de contornos. Cada cuadro tiene 3 contornos, donde cada uno representa un nivel de error, siendo el tono de azul más oscuro 1σ y el más claro 3σ , estos contornos son útiles porque permiten saber cuanto se puede variar el valor de cada parámetro sin salir de su intervalo de confianza ni del de otros parámetros correlacionados.

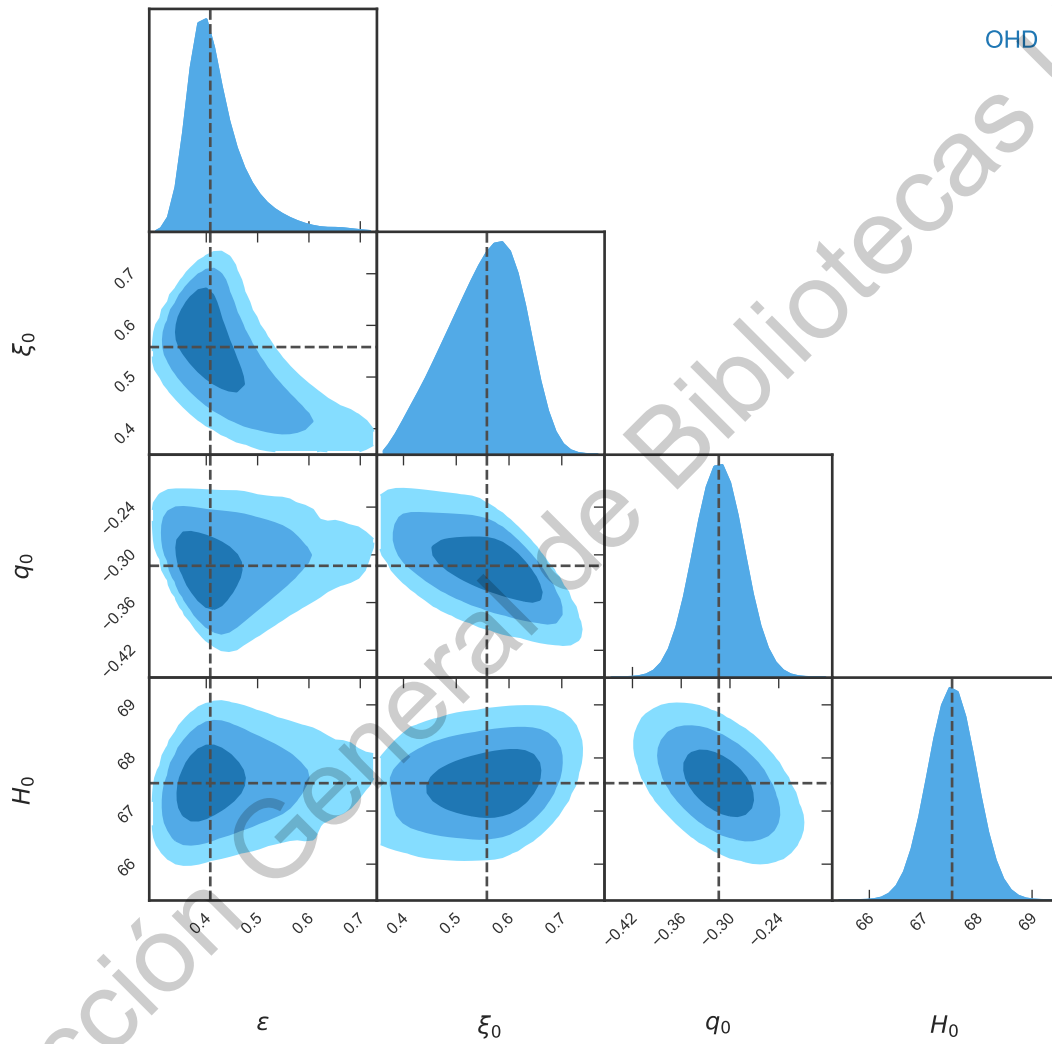


Figura 6.2: Intervalos de confianza al 68, 95 y 99.7% para los parámetros libres del modelo, considerando $\omega = 0$

Lo primero que resalta a la vista, es que en efecto existe una correlación entre los parámetros, en algunos pares, es muy regular, por ejemplo entre $(q_0$ y H_0), $(q_0$ y ξ_0) o en $(H_0$ y ξ_0) se tienen correlaciones muy regulares, y en los pares restantes $[(\xi_0, \epsilon)$, (q_0, ϵ) , $(H_0, \epsilon)]$ tiene una forma un poco irregular, pero ahí está. En cuanto a la distribución de cada parámetro, se tiene que las cuatro son Gaussianas, algunas con un sigma mucho menor, pero eso también tiene que ver con la escala que puede tomar cada parámetro.

Un análisis interesante se puede obtener al tomar el valor medio para 3 parámetros, pero variar el cuarto desde su percentil 16 hasta el 84, y ver como cambia el corrimiento al rojo de transición, la forma en la que cambia z_t se muestra en las gráficas de la Figura 6.3, mientras que el rango de valores que toma se muestra en la Tabla 6.3.

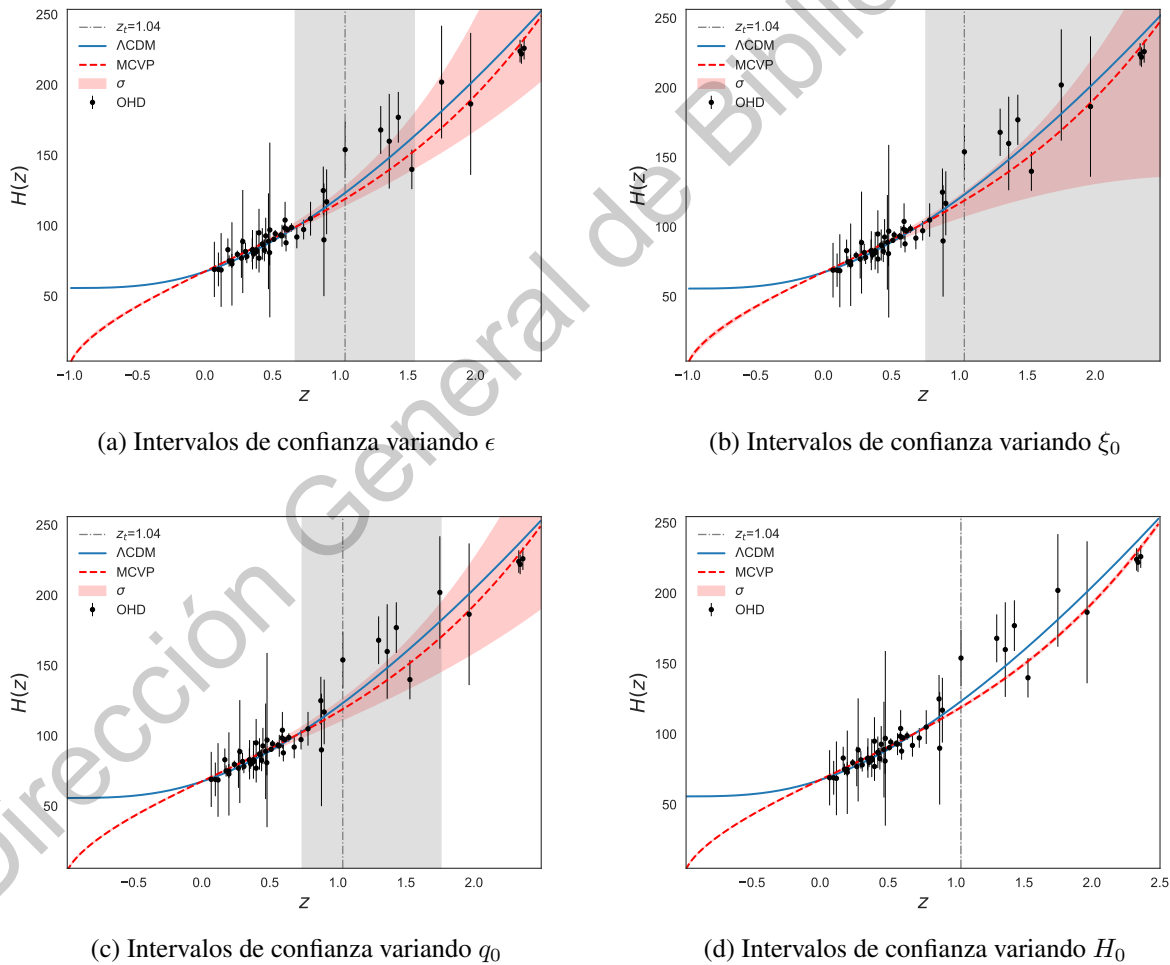
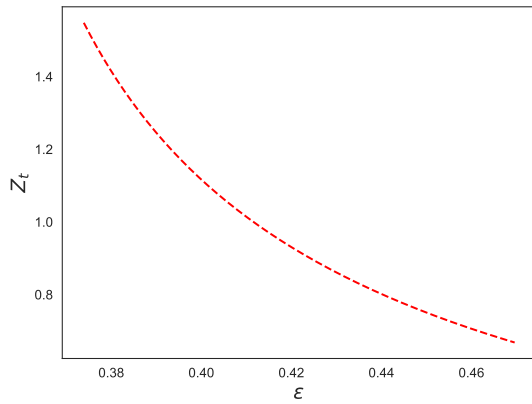


Figura 6.3: Intervalos de confianza para la curva $H(z)$ dejando dos parámetros fijos y variando un tercero

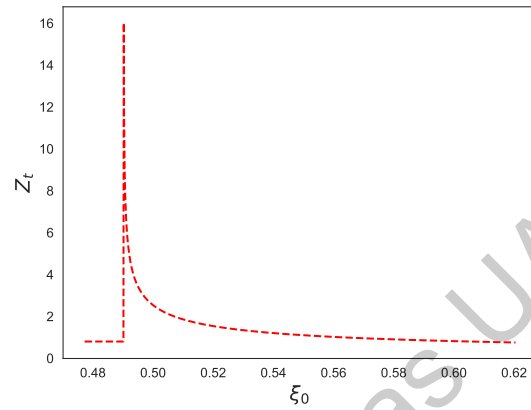
Parámetro	Mejor ajuste	Referencia	Error
q_0	-0.31	-0.38	18.42 %
H_0	67.642	67.66	0.029 %

Cuadro 6.4: Mejores valores ajustados para algunos parámetros y su error respecto a un valor previamente reportado

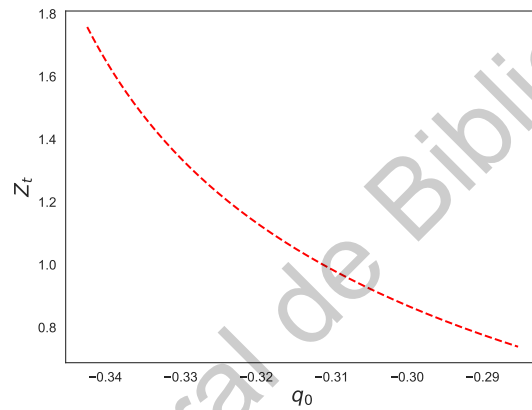
De las gráficas mostradas en la Figura 6.3 es notable que todos los parámetros libres tienen un cierto error, pues la franja de color rojo y la de color gris muestran como se moverían la curva $H(z)$ y el valor z_t , respectivamente, si se varía el parámetro en cuestión, pero el error en z_t es particularmente grande en ϵ y q_0 cuando se toma el valor σ_- , para el parámetro ξ_0 no es tan grande, mientras que se mantiene invariante respecto a H_0 , por lo que si se quiere un valor para H_0 más cercano a la referencia de la Tabla 6.4, se puede incrementar un poco, teniendo muy poca variación en la curva del modelo y nula variación en el corrimiento al rojo de transición. Es posible extraer más información aún, pues es visible que para los intervalos encontrados para z_t no se encontraron valores negativos, lo cual es bueno, pues un valor negativo representaría una transición futura, que aún no ha ocurrido, lo cual quedaría descartado.



(a) Intervalos de confianza variando ϵ



(b) Intervalos de confianza variando ξ_0



(c) Intervalos de confianza variando q_0

Figura 6.4: Corrimiento al rojo de transición z_t en función de un parámetro libre y dejando fijos los otros, no se muestra una curva para H_0 , pues z_t es invariante ante este.

Si bien las figuras y tablas anteriores muestran el rango de valores que puede tomar el parámetro z_t cuando se varían los parámetros libres ajustados en un dominio de su error, también resulta interesante observar la forma en que varía. Las gráficas de la Figura 6.4 muestran como se comporta z_t en función de un parámetro libre (dejando fijo el resto).

Puede apreciarse que el valor para z_t cambia de manera muy similar en función de cualquiera de los parámetros, con la observación de que el parámetro ξ_0 se puede apreciar una discontinuidad cerca a los percentiles más bajos, es por eso que en las gráficas mostradas en la Figura 6.3 la banda gris se sale de los límites.

Para una mejor exploración de los resultados, se puede graficar la curva descrita por la ecuación (5.2), pero utilizando los valores que fueron encontrados usando los datos del OHD

$$\mu_{th}(z) = M + 5 \log_{10} [(d_L(z)/10)], \quad (6.3)$$

el parámetro M es un parámetro de ruido que fue ajustado por mínimos cuadrados pues solo es para variar la altura de la curva y no se esperaría correlación con otros parámetros, su valor obtenido fue $M = -4.5$

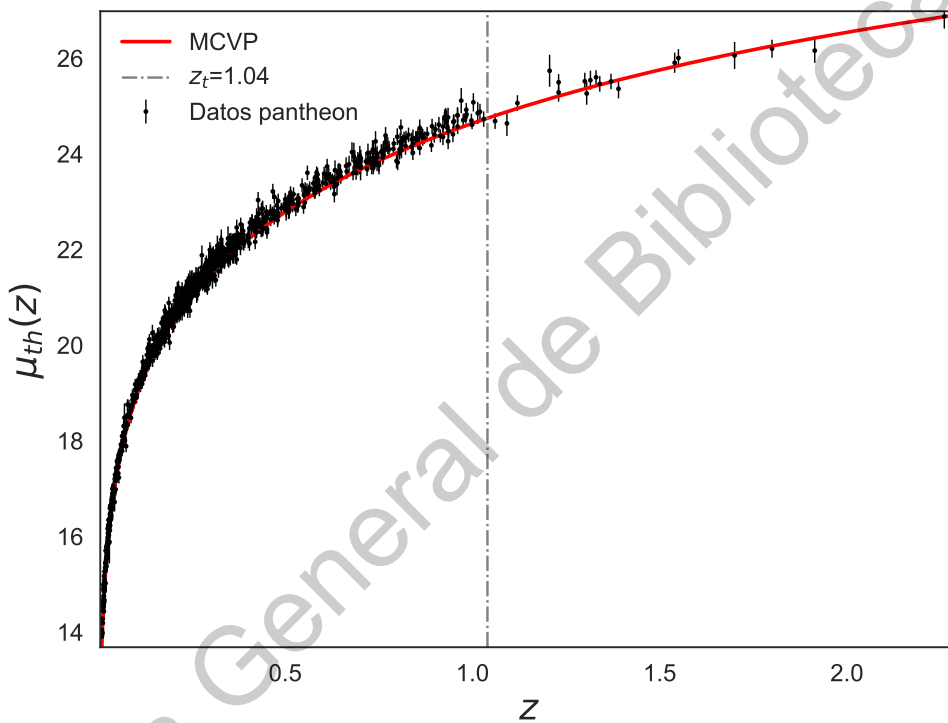


Figura 6.5: Curva descrita por $\mu_{th}(z)$ utilizando los valores que fueron obtenidos utilizando la muestra OHD

Como puede verse en la Figura 6.5, los valores obtenidos para los parámetros libres en el primer análisis, junto con la ecuación 5.2, describen una curva que se acopla aparentemente bien a la base de datos *pantheon* de supernovas tipo Ia

En resumen, al aplicar un método de factorización se ha encontrado una solución general para la ecuación diferencial fundamental de Hubble que puede describir un cambio de aceleración en la expansión del

Universo y se ha conseguido restringir los valores de los parámetros libres del modelo a unos intervalos de confianza bien definidos que están dentro de los dominios teóricos de dichos parámetros. Hay que recalcar que el modelo considera que el fluido del que está lleno el Universo solo contiene materia ordinaria y no considera radiación, por lo que el parámetro ω fue igualado a cero desde un principio, por lo que puede describir la expansión tardía del Universo, es necesario introducir un término de radiación si se quisieran explorar etapas de evolución más tempranas. A pesar de que fue necesario utilizar solo un conjunto de datos para la restricción de parámetros y se obtuvieron valores que conducen a una solución con características deseables, pueden ser utilizados otros conjuntos como la misma base de datos de supernovas en orden de reducir aún más los intervalos de confianza.

Dirección General de Bibliotecas UAO

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Conclusiones

Un objetivo de esta tesis era encontrar una solución exacta para la ecuación diferencial de Hubble que está dentro del formalismo de Israel-Stewart-Hiscock y que dicha solución describa la dinámica evolutiva del Universo, además de que describa el cambio de aceleración en la expansión del mismo, pero el objetivo principal era, dada la solución general, restringir los parámetros libres a unos intervalos de confianza utilizando datos observacionales y algoritmos computacionales.

Así pues la aportación de este trabajo consiste en la aplicación del método de factorización de ecuaciones diferenciales no lineales para resolver el caso particular de la ecuación fundamental de Hubble y posteriormente hacer uso de herramientas computacionales que, mediante estadística Bayesiana, puedan restringir los parámetros libres del modelo a unos intervalos de confianza bien definidos, y que dicha solución tenga las características deseadas.

Como resultado del primer objetivo, la aplicación del método condujo a que la ecuación original (de segundo orden) pudiera ser reducida a una de primer orden, que pudo ser resuelta fácilmente con ayuda de *software* matemático, entonces fue encontrada una solución exacta en términos de tres parámetros cosmológicos y dos constantes de integración, el segundo objetivo fue cumplido al aplicar dos condiciones iniciales, por lo que finalmente se llegó a tener una solución en términos de cinco parámetros cosmológicos, los cuales hablan más sobre el modelo y su interpretación fenomenológica que las constantes.

La solución encontrada resultó ser un caso general del *ansatz* propuesto en [32] que es polinómico y tiene la

forma $H(z) \approx (z + 1)^{-\text{constante}}$, y que puede ser obtenido también utilizando el método de factorización, tal como se mostró en [33], aunque el principal problema, es que dicha solución no presenta una transición continua en el cambio de aceleración de la expansión del Universo, o dicho de otra forma, para ese modelo, el parámetro de desaceleración $q(t) = \text{constante}$, aunque si es posible analizar por separado la etapa de expansión desacelerada y la de expansión acelerada, a través de una transición discontinua.

Una primera exploración de la solución derivada en este trabajo, permitió ver que la función $H(t)$ se comportaba de la manera esperada, que $q = q(t) \neq \text{constante}$, y que en efecto existe una transición continua de la fase desacelerada a la acelerada, los parámetros cosmológicos libres que aparecen en la solución fueron ω (parámetro relacionado a la presión barotrópica del universo), ϵ (parámetro relacionado con la velocidad de las perturbaciones en el fluido), ξ_0 (parámetro relacionado con la densidad de energía), el parámetro de desaceleración al día de hoy q_0 y la constante de Hubble H_0 , que mide la tasa de expansión del Universo al día de hoy. Se asumió que el único componente del universo es la materia sin presión, sin términos de radiación o una constante cosmológica ($\omega = 0$) lo cual simplificó la solución.

Como resultado del tercer objetivo, el resto de los parámetros fueron ajustados utilizando una librería que implementa en *python* un método de ajuste de modelos utilizando cadenas de Markov por Monte Carlo descrito en la sección **Análisis de los datos** en el capítulo de **Metodología**, los valores que se encontraron para los datos cuando $\omega = 0$ y sus intervalos de confianza se mantienen dentro de los límites teóricos y/o reportados en diversos artículos y reportes ($H_0 = 67.51_{-0.40}^{+0.41}$ y $q_0 = -0.31_{-0.02}^{+0.02}$), además de que se comporta bien para la curva que describe las supernovas. Ya obtenidos los valores que mejor se ajustan a los parámetros libres, es sencillo comprobar que se conservaban las características deseadas de la exploración inicial, como la transición de una expansión desacelerada a una acelerada.

Los resultados para un ajuste cuando $\omega \neq 0$ no fueron los esperados, pues la solución general pierde algunas de las características deseadas, lo que abre la puerta a la suposición de que hacen falta nuevas ecuaciones de estado para el fluido viscoso, o bien explorar diferentes valores para el parámetro de viscosidad s , diferentes de $s = 1/2$. Queda también abierta la posibilidad de mejorar los intervalos de confianza en un trabajo a futuro utilizando los datos observacionales de las SNIa, y comprobar si de esta forma los valores de los parámetros q_0 y z_t se acercan aún más a valores reportados por otros modelos, o bien explorar la solución y

su comportamiento para otros casos cuando $\omega \neq 0$.

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Anexos

8.1. Código

A continuación se presenta el código escrito en *Python* que hace uso de la librería *emcee* [44] para realizar ajustes a modelos utilizando cadenas de Markov

```

1 #####
2 #      Universidad Autonoma de Queretaro #
3 #      Licenciatura en Ingenieria Fisica #
4 #      Isaac Guillen Castellanos #
5 #     Codigo para ajustar el modelo #
6 #      A datos observacionales #
7 #####
8
9 # -----Importar librerias -----#
10
11 import corner
12 import emcee
13 import lmfit
14 import math
15 import matplotlib.pyplot as plt
16 import numpy as np
17 import pygtc
18 import scipy.optimize as so
19 import scipy.special as ssp
20 import seaborn as sns

```

```

21
22 import time
23 from multiprocessing import Pool
24 import os
25 os.environ["OMP_NUM_THREADS"] = "1"
26
27 #-----Importar datos observacionales-----#
28
29 sns.set_style("white")
30 zohd, ho, h_err = np.loadtxt('OHD_Data.dat', unpack = True)
31
32 #-----Parametros-----#
33
34 w = 0
35 H0= 67.4
36 Om= 0.315
37
38 z0 = np.arange(-0.99, 2.5, 0.01)
39 z1 = np.arange(0.001, 2.5, 0.01)
40
41 #-----Modelo Lambda-CMD para graficar-----#
42
43 def LCDM(Z):
44     return H0*np.sqrt(Om*(1+Z)**3 + 1 - Om)
45
46 #-----Parametro de desaceleracion-----#
47
48 def Q(Z, ep, xi, q0, H0):
49
50     EE= 1/(Z+1)
51
52     d = (3/4)*((1+w)/(w+0.5))
53
54     a1 = -3 / (2*d)
55
56     a2 = 3/2 + 3*(1+w) - (9/(4*d))*(1+w) + np.sqrt(3)*ep*(1-w**2)/(xi)
57
58     a3 = (9/4)*(1+w) + (9/2)*ep*(1-w**2)*((1+w)/(np.sqrt(3)*xi) - 1)

```

```

59
60 a = (-a2 + np.sqrt(a2**2 - 8*a3 - 4*a1*a3 ) ) / ( 2*(2*a3 + a1*a3 ) )
61
62 p1=a*a3*(2+a1)
63
64 p2=a*(2+a1)
65
66 p3=-(a1/(2+a1))
67
68 c1 = -2*H0**(2+a1) * ((1+q0)+a*a3)
69
70 c2 = ( -H0**(2+a1) * (1 + a*(1+q0)*(2+a1)) ) / (a*a*a3*(2+a1)-1)
71
72 dy = 2*(a*a3*c2**p1 - ((c1**EE**(1/a)) / (2*a*p1-2)))*(c2**EE**p1 - ((c1*p2**EE
** (1/a))/(2*a*p1-2)) )**p3
73
74 y = (c2**EE**p1 - ((c1*p2**EE**(1/a))/(2*a*p1-2)) )**(2/(2+a1))
75
76 return -1-(1/(2*y))*dy
77
78 #-----Modelo desarrollado en la tesis-----#
79
80 def Hubble_Model(params , z):
81     ep, xi, q0, H0 = params
82
83     d = (3/4)*((1+w)/(w+0.5))
84
85     a1 = -3 / (2*d)
86
87     a2 = 3/2 + 3*(1+w) - (9/(4*d))*(1+w) + np.sqrt(3)*ep*(1-w**2)/(xi)
88
89     a3 = (9/4)*(1+w) + (9/2)*ep*(1-w**2)*((1+w)/(np.sqrt(3)*xi) - 1)
90
91     a = (-a2 + np.sqrt(a2**2 - 8*a3 - 4*a1*a3 ) ) / ( 2*(2*a3 + a1*a3 ) )
92
93     p1 = a*(2+a1)*(1+q0+a*a3)*(1+z)**(-1/a)
94
95     p2 = (1+a*(1+q0)*(2+a1))*(1+z)**(-a*a3*(2+a1))

```

```

96
97     p3 = a*a*a3*(2+a1) - 1
98
99     Hubble = H0*((p1-p2)/p3)**(1/(2+a1))
100     return Hubble
101 #-----Likelehood-----#
102
103 def lnlike1(p, zohd, ho, h_err):
104     return -0.5 * np.sum(((ho - Hubble_Model(p, zohd))/h_err) ** 2)
105
106 #-----Prior para los parametros libres-----#
107
108 def lnprior1(p):
109     ep, xi, q0, H0 = p
110
111     # distribucion plana en epsilon, xi_0 y q_0
112     if not (0.0 < ep < 1 and 0.0 < xi < np.sqrt(3)*ep and -1 < q0 < 0.0):
113         return -np.inf
114
115     # distribucion Gaussiana en H_0
116     mu = 67.66
117     sigma = 0.42
118     return np.log(1.0/(np.sqrt(2*np.pi)*sigma)) - 0.5*(H0-mu)**2/sigma**2
119
120 def lnprob1(p, zohd, ho, h_err):
121     lp = lnprior1(p)
122     return lp + lnlike1(p, zohd, ho, h_err) if (np.isfinite(lp) or np.isnan(lp)) else
    -np.inf
123
124 #-----Numero de cadenas-----#
125
126
127 if __name__ == '__main__':
128
129     nwalkers = 50
130
131 #-----Valores iniciales-----#
132

```

```

133 initial = np.array([0.5, 0.5, -0.5, 67.66])
134 ndim = len(initial)
135 J0 = [np.array(initial) + 1e-8 * np.random.randn(ndim) for i in range(nwalkers)]
136
137 sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, lnprob1, args=(zohd, ho, h_err))
138
139 #-----Quemar la cadena-----#
140
141 print("Running burn-in...")
142 J0, _, _ = sampler.run_mcmc(J0, 5000)
143 sampler.reset()
144
145 #-----Corriendo la busqueda-----#
146 start = time.time()
147 print("Running production...")
148 sampler.run_mcmc(J0, 200000)
149 end = time.time()
150
151 print("Transcurred time = ", end - start)
152
153 #-----Sacar los resultados de las cadenas-----#
154
155 samples = sampler.flatchain
156
157 print(samples.shape)
158
159 labels = ['$\\epsilon$', '$\\xi_{0}$', '$q_{0}$', '$H_{0}$']
160
161 trues = []
162
163 for i in range(ndim):
164     mcmc = np.percentile(samples[:, i], [16, 50, 84])
165     q = np.diff(mcmc)
166     txt = "\\mathrm{{{3}}} = {0:.3f} - {{{-1:.3f}}}^{{{2:.3f}}}"
167     txt = txt.format(mcmc[1], q[0], q[1], labels[i])
168     trues.append(mcmc[1])
169     print(mcmc[1], q[0], q[1])
170

```

```

171
172 fig, axes = plt.subplots(4, figsize = (10,7), sharex = True)
173 chains = sampler.chain
174 for i in range(ndim):
175     ax = axes[i]
176     ax.plot(chains[:, :, i].T, 'k', alpha = 0.3)
177     ax.set_xlim(0, len(chains) )
178     ax.set_ylabel( labels[i] )
179
180 axes[-1].set_xlabel("Numero de paso")
181 plt.show()
182
183 #-----Encontra la z de transicion para los-----#
184 #-----valores encontrados-----#
185
186 Zt_ohd = so.fsolve(Q, 0.65, args=(trues[0], trues[1], trues[2], trues[3]))
187
188 print('Transition redshift = ', Zt_ohd)
189
190 #-----Graficar los resultados-----#
191 #-----y el espacio de parametros-----#
192
193 plt.axvline(Zt_ohd, color='gray', linewidth=1, linestyle='-.', label='$z_t$=%2f'
194 %Zt_ohd)
195 plt.errorbar(zohd, ho, yerr=h_err, linewidth=0.6, fmt='k.', label='OHD')
196 plt.plot(z0, LCDM(z0), label='$\Lambda$CDM')
197 plt.plot(z0, Hubble_Model(trues, z0), 'r-', label='MCVP')
198 plt.xlabel('$z$', fontsize = 15)
199 plt.ylabel('$H(z)$', fontsize = 15)
200 plt.legend(frameon=0)
201 plt.show()
202
203 pygtc.plotGTC(chains=[samples], paramNames=labels, truths=trues, nContourLevels=3,
204 chainLabels=('OHD'))
205 corner.corner(samples, show_titles=True, labels=labels, plot_datapoints=True,
206 quantiles=[0.16, 0.5, 0.84], bins = 50)
207 plt.show()

```


8.2. Especificaciones del equipo de cómputo

En este anexo, se muestran las especificaciones del equipo de computo en el que fue ejecutado el código para el ajuste de valores de los parámetros libres

Sistema operativo	Linux Fedora
Procesador	Intel Xeon(R) Silver 4114 2.20 GHz
Procesadores lógicos	20
Memoria RAM	32 Gb
Tarjeta de video	NVIDIA GeForce RTX 2060 6GB

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Dirección General de Bibliotecas UAQ

Bibliografía

- [1] A. Einstein, "The field equations of gravitation," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1915, pp. 844–847, 1915.
- [2] A. Einstein, "Cosmological considerations in the general theory of relativity," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1917, pp. 142–152, 1917.
- [3] A. Friedman, "Über die krümmung des raumes," *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, vol. 10, no. 1, pp. 377–386, 1922.
- [4] V. M. Slipher, "Nebulae," *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 56, pp. 403–409, 1917.
- [5] E. P. Hubble, "Extragalactic nebulae," *The Astrophysical Journal*, vol. 64, 1926.
- [6] E. Hubble, "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929.
- [7] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [8] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. Groom, *et al.*, "Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae," *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, p. 565, 1999.

- [9] T. Abbott, F. Abdalla, A. Alarcon, J. Aleksić, S. Allam, S. Allen, A. Amara, J. Annis, J. Asorey, S. Avila, *et al.*, “Dark energy survey year 1 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing,” *Physical Review D*, vol. 98, no. 4, p. 043526, 2018.
- [10] C. W. Misner, “Neutrino viscosity and the isotropy of primordial blackbody radiation,” *Physical Review Letters*, vol. 19, no. 9, p. 533, 1967.
- [11] L. P. Chimento and A. S. Jakubi, “Relaxation dominated cosmological expansion,” *Physics Letters A*, vol. 212, no. 6, pp. 320–322, 1996.
- [12] C. Eckart, “C. eckart, phys. rev. 58, 919 (1940).,” *Phys. Rev.*, vol. 58, p. 919, 1940.
- [13] M. Kunz, “Degeneracy between the dark components resulting from the fact that gravity only measures the total energy-momentum tensor,” *Physical Review D*, vol. 80, no. 12, p. 123001, 2009.
- [14] S. Chaplygin, “One gas jet,” *Sci. Mem. Mosc. Univ. Math. Phys.*, vol. 21, no. 1, 1904.
- [15] A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, “An alternative to quintessence,” *Physics Letters B*, vol. 511, no. 2-4, pp. 265–268, 2001.
- [16] N. Bilić, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, “Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous chaplygin gas,” *Physics Letters B*, vol. 535, no. 1-4, pp. 17–21, 2002.
- [17] H. Hova and H. Yang, “A dark energy model alternative to generalized chaplygin gas,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 27, no. 01, p. 1750178, 2018.
- [18] A. Hernández-Almada, J. Magaña, M. A. García-Aspeitia, and V. Motta, “Cosmological constraints on alternative model to chaplygin fluid revisited,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, no. 1, p. 12, 2019.
- [19] P.-H. Chavanis, “The logotropic dark fluid as a unification of dark matter and dark energy,” *Physics Letters B*, vol. 758, pp. 59–66, 2016.
- [20] W. Israel and J. Stewart, “Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas,” *Physics Letters A*, vol. 58, no. 4, pp. 213–215, 1976.
- [21] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Stability and causality in dissipative relativistic fluids,” *Annals of Physics*, vol. 151, no. 2, pp. 466–496, 1983.

- [22] W. A. Hiscock and J. Salmonson, “Dissipative boltzmann-robertson-walker cosmologies,” *Physical Review D*, vol. 43, no. 10, p. 3249, 1991.
- [23] W. A. Hiscock and L. Lindblom, “Linear plane waves in dissipative relativistic fluids,” *Physical Review D*, vol. 35, no. 12, p. 3723, 1987.
- [24] R. Maartens, “Dissipative cosmology,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 12, no. 6, p. 1455, 1995.
- [25] O. Cornejo-Pérez and H. C. Rosu, “Nonlinear second order ode’s: factorizations and particular solutions,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 114, no. 3, pp. 533–538, 2005.
- [26] H. C. Rosu, O. Cornejo-Pérez, M. Pérez-Maldonado, and J. Belinchón, “Extension of a factorization method of nonlinear second order ode’s with variable coefficients,” *Revista mexicana de física*, vol. 63, no. 3, pp. 218–222, 2017.
- [27] J. Belinchón and O. Cornejo-Pérez, “Exact solutions of a full causal bulk viscous FRW cosmological model with variable G and Λ through factorization,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 95, no. 6, pp. 559–572, 2017.
- [28] O. Cornejo-Pérez, “Traveling wave solutions for some factorized nonlinear pdes,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 3, p. 035204, 2008.
- [29] D.-S. Wang and H. Li, “Single and multi-solitary wave solutions to a class of nonlinear evolution equations,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 343, no. 1, pp. 273–298, 2008.
- [30] H. C. Rosu and O. Cornejo-Pérez, “Supersymmetric pairing of kinks for polynomial nonlinearities,” *Physical Review E*, vol. 71, no. 4, p. 046607, 2005.
- [31] O. Cornejo-Perez and J. Belinchón, “Exact solutions of a flat full causal bulk viscous FRW cosmological model through factorization,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 22, no. 07, p. 1350031, 2013.
- [32] M. Cruz, N. Cruz, and S. Lepe, “Accelerated and decelerated expansion in a causal dissipative cosmology,” *Physical Review D*, vol. 96, no. 12, p. 124020, 2017.
- [33] N. Cruz, A. Hernández-Almada, and O. Cornejo-Pérez, “Constraining a causal dissipative cosmological model,” *arXiv preprint arXiv:1909.12418*, 2019.

- [34] L. Ryder, *Introduction to general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [35] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [36] R. Maartens, “Causal thermodynamics in relativity,” *arXiv preprint astro-ph/9609119*, 1996.
- [37] S. Weinberg, “Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 168, p. 175, 1971.
- [38] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, *et al.*, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters,” *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018.
- [39] S. Kumar, “Observational constraints on Hubble constant and deceleration parameter in power-law cosmology,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 422, pp. 2532–2538, 05 2012.
- [40] J. Magaña, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta, “The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 476, no. 1, pp. 1036–1049, 2018.
- [41] D. Scolnic, D. Jones, A. Rest, Y. Pan, R. Chornock, R. Foley, M. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. Riess, *et al.*, “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 859, no. 2, p. 101, 2018.
- [42] M. Moresco, L. Pozzetti, A. Cimatti, R. Jimenez, C. Maraston, L. Verde, D. Thomas, A. Citro, R. Tojeiro, and D. Wilkinson, “A 6 % measurement of the hubble parameter at z 0.45: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 05, p. 014, 2016.
- [43] N. Rani, D. Jain, S. Mahajan, A. Mukherjee, and N. Pires, “Transition redshift: new constraints from parametric and nonparametric methods,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2015, no. 12, p. 045, 2015.
- [44] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman, “emcee: The mcmc hammer,” *PASP*, vol. 125, pp. 306–312, 2013.