Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

Propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría Analítica del nivel medio superior empleando conceptos de Geometría Euclidiana

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestro en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Claudia Ayala Giron

Dirigido por:
Doctor Jesús Jerónimo Castro

Dr. Jesús Jerónimo Castro
Presidente

Dr. Víctor Larios Osorio
Secretario

Dra. Lilia Patricia Aké Tec
Vocal

M.C. Luisa Ramírez Granados
Suplente

M.C. Iván González García
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.
Diciembre 2019
México

Resumen

Una Propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría Analítica desde una perspectiva Euclidiana en el nivel medio superior, es un trabajo que brinda actividades de apoyo para abordar algunos temas de la asignatura de Geometría Analítica conectando con ideas y conceptos de la Geometría Euclidiana. Las actividades que se encuentran están fundamentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas, en donde algunas de ellas proponen el uso del software matemático GeoGebra para la visualización y comprobación de las mismas. Es una propuesta didáctica innovadora que busca, a través de la resolución de problemas, mostrar la conexión que se puede dar entre ambos enfoques de la geometría.

Palabras clave: Geometría Analítica, Geometría Euclidiana, Teoría de Situaciones Didáctica.

Abstract

A didactic Proposal for the teaching of Analytical Geometry from a Euclidean perspective in the high school level, is a work that provides activities to address some subjects of the Analytical Geometry, connecting with ideas and concepts of Euclidean Geometry. The activities reflected are based on the Theory of Didactic Situations, where some of the ideas propose the use of Geogebra mathematical software for the visualization and verification of them. It is an innovative teaching proposal that seeks, through problem solving, a connection that can be established between both approaches to geometry.

Keywords: Analytical Geometry, Euclidean Geometry, Teaching Situation Theory.

Agradecimientos

A Dios porque todo lo que soy y tengo, me viene de él.

A mis hijos, Alex y Leo, que han tenido que vivir esta experiencia, llenándome de amor y motivación para no desistir, los amo infinitamente. A mi esposo por su inmenso amor incondicional.

A mi madre y mis hermanas que me han apoyado a lo largo de la vida, ayudándome a sobrepasar muchos de los momentos de la vida.

A mi asesor de tesis, el Dr. Jesús Jerónimo Castro, por su apoyo, tiempo y conocimiento contribuido en la realización del proyecto.

A mis revisores, por sus valiosas aportaciones y su tiempo.

A la Mtra. Alida Pellón y al Dr. Javier Gómez, por su gran apoyo brindado para que pudiese llevar a cabo el estudio de la maestría, facilitándome muchos medios.

A Viviana, que me acompaño en esta experiencia haciéndola mucho mejor.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido mediante la beca para realizar estudios en el programa de maestría.

Contenido

Introducción

La enseñanza de la geometría es un tema que ha sido abordado desde hace más de un siglo por diversos autores. Por ejemplo, Henríquez y Montoya (2015) en su trabajo acerca de espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula, cita a Klein quien fue un autor que inicios del siglo XX escribió, en su obra *Matemática elemental desde un punto de vista superior: Geometría,* acerca de lo sobrecargada que se encuentra la enseñanza y expresaba las exigencias que debe satisfacer un libro de texto. En esta obra también se expresa que la enseñanza de la geometría debe considerar, entre otras, la práctica del profesor, la fusión de diversas ramas de la Matemática, conceder importancia al dibujo y la representación de las figuras geométricas, e introducir antes el concepto de función en geometría analítica (Henríquez Rivas & Montoya Delgadillo, 2015).

Al igual que se ha trabajado sobre la temática de la enseñanza de la geometría, también se ha escrito sobre la falta de complementariedad en el estudio de la Geometría Euclidiana (o sintética) y la Geometría Analítica. Gascón (2002) refiere que principios del siglo XIX, después de más de 100 años de dominio de los métodos analíticos, introducidos por Descartes y Fermat, se empezó a replantear cuál debía ser el papel de los diversos métodos en la construcción de la geometría e, indirectamente, en la educación matemática.

Gascón (2002) ha sido uno de los autores que ha señalado, la falta de esta complementariedad en el estudio de la Geometría, marcando que no se ha dado respuesta a la flagrante discontinuidad entre la geometría sintética de la Educación Secundaria Obligatoria y la geometría analítica del Bachillerato (Gascón, 2002, pág. 14), dejando un espacio entre ambos enfoques como si se tratasen de mundos diferentes, como él mismo lo refiere.

El problema del tratamiento independiente de la geometría sintética y la geometría analítica no es actual sino que se origina en la antigüedad, como remarca Santaló

(1961) quien presenta un recorrido histórico que describe la relación que existió entre la geometría analítica y la geometría sintética desde sus orígenes. El artículo resalta que el uso sistemático de la geometría analítica para resolver problemas llevó a elaborar frondosas fórmulas que complicaban el problema innecesariamente e impedían ver la esencia geométrica del mismo. Sin embargo, al introducir los métodos sintéticos para abordar los problemas se abrían nuevas vías a la investigación geométrica. Del mismo modo, en algunos casos, la geometría sintética se tornaba insuficiente para resolver los problemas y era necesario acudir a la geometría analítica.

Por lo anterior y desde la perspectiva que se tiene, a partir de la práctica docente propia se realiza esta propuesta didáctica, sustentada en la Teoría de Situaciones Didácticas, propuesta por Brousseau, con la cual se espera se contribuya a disminuir la desvinculación existente entre ambos enfoques de la geometría al ser estudiada. En la propuesta didáctica que se desarrolla en el capítulo IV, se busca que con las secuencias se lleve al estudiante a hacer las conexiones de la relación que guardan la Geometría Euclidiana y la Analítica.

Se trabajó sobre algunos los temas que forman parte del programa de Matemáticas IV PRE09 de las escuelas incorporadas a la Universidad Autónoma de Querétaro. En cada uno de ellos se ha organizado cada tema bajo una secuencia y formato similar con el que se considera se logra el objetivo principal que busca este proyecto y que consiste en:

a) Iniciar el tema con un problema o actividad introductoria, que permita generar situaciones de acción y formulación como lo enmarca la TSD, en donde el alumno evoca sus conocimientos previos y/o genera nuevos en la búsqueda de la solución que dé respuesta a lo solicitado en la actividad inicial del tema.
b) Un apartado de análisis y exposición de probables soluciones que un estudiante podría generar como respuesta la primera fase de acción y formulación. En este apartado el docente o el alumno pueda notar los conocimientos que se han tenido que considerar en la solución al problema.

Este apartado también se puede ver como notas que surgen en la práctica docente.

c) Después se encuentra un apartado en el que permite se lleve a cabo una fase de validación y la formalización de los conceptos y definiciones que forman parte del tema que se esté tratando
d) En seguida se encuentra un apartado que se ha denominado Ejercicios y problemas, que tienen como intención se practiquen las definiciones y los aprendizajes que se espera un estudiante pueda aplicar al trabajar en estos ejercicios y problemas propuestos. Este apartado no es exhaustivo, pero da la pauta a que el docente proponga más actividades a sus alumnos.

La Geometría Analítica introducida por Descartes en 1637 proporcionó técnicas que permitieron no sólo abordar muchos de los problemas geométricos no resueltos hasta ese momento, sino también plantear problemas geométricos más profundos (Gascón, 2002). Con esta idea planteada por Gascón se puede pensar que la geometría euclidiana hasta ese momento, no había logrado dar respuesta o interpretación a todos los problemas geométricos conocidos ya que cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética y se introducen variaciones en ellos, se generan nuevos problemas que quedan limitados dentro de este campo y por tanto surge la necesidad de explorar otro campo con el fin de dar solución a estos nuevos problemas, esta necesidad puede llevar entonces a buscar la solución bajo técnicas que la geometría analítica provee.

Al finalizar el trabajo se encuentra la propuesta didáctica (anexo 1) y dos problemas (anexo 2) en los que se muestran dos soluciones a cada uno de estos, una solución bajo técnicas de la Geometría Euclidiana y otra bajo técnicas de la Geometría Analítica, que permiten analizar y contrastar ambos enfoques.

Capítulo I. Trabajos e investigaciones previos

Klein, citado en Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2016), hace una diferencia entre la Geometría sintética (euclidiana) y la Geometría analítica; en el caso de la sintética se refiere a esta como en la cual se estudian las figuras en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas, mientras que en la analítica, estas se aplican constantemente mediante el uso de los sistemas de coordenadas.

En un estudio sobre la enseñanza de la geometría desarrollado por Gascón (2002), se habla sobre la falta de tránsito y complementariedad entre la geometría sintética y la analítica; para Gascón estas geometrías viven en mundos separados. En este mismo estudio, Gascón (2002) expone que cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética aparece la necesidad (como en cualquier proceso de estudio de un campo de problemas) de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y, muy rápidamente, nos encontramos con problemas para los cuales la técnica inicial presenta determinadas limitaciones. Se produce entonces la necesidad epistemológica y didáctica de variar la técnica inicial y esta variación suele desembocar en la producción de técnicas denominadas analíticas cartesianas o algebraicas porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra (Gascón, 2002).

En el trabajo de Henríquez rivas y Montoya Delgadillo (2015) citan a De Villiers (1993) para hablar sobre los intentos por unificar la tradicional geometría sintética con la geometría analítica. De Villiers resalta el poder de las transformaciones geométricas en la matemática escolar. Es decir, que las transformaciones geométricas no solo se lleven a cabo en los tópicos de geometría, sino que su trate también la relación que tienen las con el álgebra y la trigonometría. “De Villiers concluye que la enseñanza de la geometría puede ampliarse y enriquecerse con las transformaciones geométricas y su aplicación en diversas áreas del currículo" (Henríquez Rivas & Montoya Delgadillo, 2015, p.52).

La geometría elemental considerada como la ciencia del espacio, el primer problema que se debe considerar es justamente la relación de la geometría con el espacio. Otro tipo de problemas más abstractos, de segundo nivel, tiene por objeto la naturaleza de los objetos y las relaciones entre los constituyentes del modelo matemático; asimismo, también tiene por objeto su optimización y su coherencia de forma. Desde una perspectiva didáctica de la geometría, estos dos tipos de problemas remiten a un arreglo de la geometría que se enseña, vista como el modelo del espacio, o bien, como un ejemplo de sistema deductivo completo (Kuzniak, Montoya Delgadillo, & Vivier, 2016).

Henríquez Rivas y Montoya Delgadillo (2016) realizaron un análisis sobre cómo es que se lleva o no a cabo el tránsito de una geometría sintética a una geometría analítica, mediante actividades que activan la génesis instrumental, usando un tipo de artefacto simbólico para dar solución a un problema. Con el análisis realizado concluyen que para coordinar el enfoque sintético con el analítico, el uso de signos y la semiótica intencionada son aspectos necesarios que favorecen el tránsito del enfoque sintético al analítico. Y que el cuidado didáctico es fundamental.

> Pues si bien el trabajo podría contribuir, también se podría caer en los cálculos ciegos al resolver ecuaciones, perdiendo el sentido del trabajo geométrico en sí y provocando un cambio de dominio (de geométrico a aritmético/algebraico), sin retorno al dominio fuente. (Henríquez Rivas & Montoya Delgadillo, 2016, p.52)

Entre las conclusiones que hacen Henríquez Rivas y Montoya Delgadillo (2016) se encuentra que la situación de referencia presentada, en general, permitió cumplir con el objetivo en términos de tránsito y complementariedad entre los dos enfoques de la geometría.

Capítulo II. Justificación, Hipótesis y Objetivo

2.1 Descripción del problema

Gascón (2002) refiere la necesidad epistemológica y didáctica que se presenta en el estudio de algunos problemas de la Geometría Euclidiana, de ser estudiados desde un enfoque que provee la Geometría Analítica. Al identificar las diversas causas, fenómenos, hechos o situaciones, que afectan la apropiación de los conceptos geométricos que se estudian en el nivel medio superior, cobra importancia, la falta o carente transición que se hace de un enfoque Euclidiano a un enfoque de coordenadas para que los estudiantes de este nivel logren conectar los conceptos sintéticos en el estudio de la Geometría Analítica.

En la actualidad los jóvenes son muy tecnológicos y requieren de temas y herramientas que despierten su interés. Se debe tomar en cuenta lo antes mencionado, ya que está visto que el uso de tecnología ayuda a desarrollar habilidades y actitudes en los seres humanos.

Los alumnos que ya han llevado un curso de Geometría Analítica, al estudiar asignaturas como cálculo, muestran dificultad en la identificación de elementos de una gráfica y por tanto en su manipulación. Así como una deficiencia en la visualización de comportamientos de las gráficas, debido a una poca o nula comprensión de lo que ya han estudiado en cursos como el de Geometría Analítica.

Por eso, se ha determinado llevar a estudio esta parte de la enseñanza de las matemáticas tratando de dejar atrás viejas prácticas docentes e involucrando las herramientas tecnológicas adecuadas, que muchas veces se dejan de lado por desconocimiento, falta de actualización o simplemente por comodidad de parte de los docentes.

Librar los obstáculos será parte fundamental del proyecto propuesto, por lo que, se pretende llegar a concertar una propuesta basada en situaciones didácticas idóneas y a-didáctica que involucren el manejo de GeoGebra en la resolución de problemas.

De este modo se pretende lograr una actualizada práctica docente que sea llamativa a los ojos de nuestra actual juventud.

2.2 Justificación

La razón por la cual se ha determinado estudiar el tema del presente trabajo es porque de acuerdo con la experiencia obtenida en la práctica de la enseñanza de las matemáticas a nivel medio superior, se ha observado que los alumnos no logran la conexión de los conceptos básicos de la Geometría Euclidiana con los conceptos de Geometría Analítica, al estudiar esta última el curso correspondiente en preparatoria. Por lo que si se quiere que se logre un aprendizaje significativo, los conocimientos adquiridos en ambos cursos deberían estar ligados de manera directa.

En la revisión bibliográfica no se encontró algún material de nivel bachillerato que aborde el planteamiento anterior y que sirva de apoyo al docente en el diseño y puesta en práctica de sesiones de trabajo y así se logre la conexión y vinculación de conocimientos, generando aprendizajes significativos.

Los docentes de esta asignatura muchas veces sólo recurren a la práctica tradicionalista, limitándose en el uso de herramientas de software que favorecen poder llevar a cabo un análisis, tal vez, un poco más profundo sobre las propiedades de estos gráficos. Para resarcir un poco esta dificultad, se propone un manual de trabajo que ayude al docente de esta asignatura a generar situaciones didácticas de trabajo idóneos que involucra el manejo de GeoGebra en la resolución de problemas.

2.3 Hipótesis

La mayoría de los alumnos de bachillerato que cursan Geometría Analítica no logran relacionar estos conceptos con las concepciones euclidianas, estudiadas previamente, por lo que se sostiene que mediante la resolución de problemas que involucren el uso de diversos recursos didácticos y que en su argumentación incluyan conceptos de Geometría Euclidiana, se mejorará el aprendizaje de los contenidos del curso de Geometría Analítica en el nivel medio superior.

2.4 Objetivo general

Desarrollar material didáctico para la enseñanza de la Geometría Analítica del nivel medio superior, empleando conceptos de Geometría Euclidiana para su estudio.

Objetivos particulares

1. Evidenciar que la Geometría Euclidiana y la Geometría Analítica son dos enfoques distintos en el estudio de conceptos geométricos que pueden conjuntarse para lograr una mejor comprensión de la Geometría.
2. Denotar que los conceptos de la Geometría Analítica se pueden analizar apoyándonos en el uso de conceptos y teoremas de la Geometría Euclidiana.
3. Utilizar conceptos de Geometría Analítica en la resolución de problemas geométricos de la Geometría Euclidiana.

Capítulo III. Marco teórico y metodología

3.1 Teoría de situaciones didácticas (TSD)

Para el diseño de la propuesta didáctica, se tomó como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas, que formuló Guy Brousseau, la cual propone una manera de llevar a cabo el trabajo matemático en las aulas, a través de lo que él llamó “situación” en la que se construye el conocimiento y a la que Brousseau (2000) describe como:

> Un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas ‘situaciones’ requieren de la adquisición ‘anterior’ de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso ‘genético’. (Brousseau, 2000, pág. 10)

La situación didáctica es una situación construida intencionalmente con el fin de lograr que los alumnos se apropien de un saber en la que se presentan diferentes factores que van a intervenir en este proceso, como lo son: el alumno y las relaciones que puede establecer con un medio (instrumentos u objetos), un sistema educativo y el profesor.

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central, dentro de la organización de la enseñanza, a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

El reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica), a la cual Brousseau (2007) describe como situación en la que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego.

Lo anterior deja ver que la no intervención del maestro en la situación a-didáctica es importante para lograr el objetivo de esta. En una situación a-didáctica se presenta lo que se denomina “devolución”. La devolución es el acto por el cual el docente hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia (Brousseau, 2007).

3.1.1 Fases de una situación didáctica

La teoría de situaciones didácticas propone que se al plantear a un estudiante un problema matemático el cual debe resolver, la construcción de su solución y con ella su aprendizaje, la situación debe pasar por una situación de acción, formulación, validación e institucionalización.

Situación de acción. Es en la que se pretende un estudiante aplique conocimientos con los que cuenta y que desde estos cree le son útiles para lograr su objetivo. Y que no se trata de una situación de manipulación libre, como Chevallard, Bosch y Gascón (1997) describen en su libro, “que una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, más bien, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación” (p.221).

Situación de formulación. Se caracteriza por la formulación de un conocimiento correspondiente a una capacidad del sujeto para reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico propio; por lo que el medio que exigirá al sujeto usar una formulación deberá entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero comprometerá a comunicarle una información (Brousseau, 2007).

Situación de validación. “La acción y formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales” (Brousseau, 2007, p.26). Para establecer la pertinencia o conveniencia de la solución encontrada u obtenida al problema planteado.

> Pero la validación empírica obtenida en las fases precedentes es insuficiente, el alumno debe demostrar por qué el modelo que ha creado es válido. Para que el alumno construya una demostración y ésta tenga sentido para él es necesario que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. [...] Un estudiante (proponente) somete el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar, si es posible, una validación semántica y una validación sintáctica. El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo). (Chevallard, Bosch, y Gascón, 1997, p.226).

Situación de institucionalización. Es en la que el profesor debe especificar los conceptos, dado que los estudiantes no pueden adjudicar a los nuevos conocimientos un precepto adecuado. El profesor debe puntualizar aquellas actividades realizadas por los estudiantes, sus proposiciones, otorgándoles un estatuto cultural como lo enuncian Chevallard, Bosch y Gascón (1997) citado por Chan y Uicab (2015) en su trabajo sobre una propuesta didáctica.

Bajo la concepción de actividad matemática como principal aspecto en el aprendizaje de las matemáticas, el profesor no debe influenciar al estudiante para generar el surgimiento de los conceptos deseados, debe diseñar problemas que pueda simular con facilidad, de tal forma, que el conocimiento deseado surja como solución al mismo y de esta manera, sea el alumno quien construya poco a poco los conocimientos puestos en la situación (Robayo, 2011).

3.2 La Ingeniería Didáctica como metodología

Se toma a la Ingeniería didáctica como metodología para el diseño de la propuesta, ya que esta “se caracteriza, en primer lugar, por un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995, p.36).

Se trabajará con dos de las fases que sustenta la ingeniería didáctica como metodología para el desarrollo de la propuesta didáctica: Análisis preliminares y análisis a priori de situaciones didácticas, (Godino, y otros, 2013).

En la fase de *Análisis preliminares*, es necesario el análisis preliminar respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema.

En la fase de *Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas*. Comprende una parte descriptiva y una predictiva. En esta etapa previa a la experimentación, se deben considerar cuatro aspectos:

a) Clarificar los fines instruccionales: Aunque los objetivos instruccionales puedan venir marcados por las directrices curriculares, no se deben aceptar de una manera incuestionada, sino que se adopta una postura intervencionista: "intentamos problematizar el problema matemático particular que se considera desde una perspectiva disciplinaria, identificando las ideas organizadoras centrales" (Cobb & Gravemeijer, 2008, p. 69).
b) Documentar los puntos instruccionales iniciales: no sólo el razonamiento inicial de los estudiantes (conocimientos previos) sobre los que el diseñador debe construir su propuesta, sino las restricciones instruccionales existentes para lograrlo.

c) Delimitar una trayectoria de aprendizaje previsto: Se trata de formular hipótesis contrastables sobre los cambios significativos en el razonamiento de los estudiantes y sobre los medios de apoyar y organizar estos cambios: "Típicamente, estos medios de apoyo incluyen los considerados por los desarrolladores de materiales tales como tareas instruccionales y recursos asociados (p. e., recursos manipulativos y basados en los ordenadores)" (Cobb & Gravemeijer, 2008, p.70). También es esencial prever el modo de implementar las tareas y herramientas en la clase, y reconocer las normas y la naturaleza del discurso de la clase como factores condicionantes de los aprendizajes.
d) Situar el experimento en un contexto teórico: Cuando se prepara un experimento, es crítico enmarcarlo explícitamente como caso paradigmático de un fenómeno más amplio. Por ejemplo, se puede enmarcar como un caso de negociación de normas generales de la clase o normas socio matemáticas; de una orquestación productiva o de apoyo a la equidad en el acceso de los estudiantes a ideas matemáticas significativas. Además, una serie de experimentos pueden servir como contexto para el desarrollo y refinamiento de marcos interpretativos o en la generación, selección y evaluación de alternativas de diseño.

Capítulo IV. Diseño de la propuesta didáctica

Considerando las fases de la ingeniería didáctica que aplican en el desarrollo del presente proyecto y que han sido descritas con anterioridad. El diseño de la secuencia didáctica llevada a cabo en el desarrollo de los temas que se seleccionaron de la serie de contenidos que propone el plan curricular para el curso de Geometría Analítica del nivel medio superior, que rige a las escuelas incorporadas a la Universidad Autónoma de Querétaro, quedaría como se describe a continuación.

4.1 Análisis preliminares

En esta etapa y a consecuencia del objetivo que se busca con el proyecto de tesis, se investigó el objetivo general y el perfil de egreso que el plan curricular persigue en su formulación, ya que esto permite contextualizar y corroborar que el estudio de la Geometría Analítica en el nivel medio superior, esta precedido de una serie de asignaturas de matemáticas que dan las bases para que se pueda trabajar lo que se propone con el presente proyecto. Esto fue verificado el plan curricular PRE09, en el apartado que denominan JUSTIFICACIÓN, se enuncia que la Geometría Analítica es una asignatura integradora del Álgebra, la Trigonometría y Geometría Euclidiana, siendo una herramienta básica para el aprendizaje del cálculo Diferencial e integral. Matemáticas IV es la cuarta materia de un conjunto de seis que conforman el Eje Matemático del Mapa Curricular, sus antecedentes son las asignaturas de Matemáticas I, II y III (que corresponden al Álgebra y la Geometría y Trigonometría) donde se considera que los estudiantes adquirieron las bases suficientes para continuar sus estudios en este campo; que les permiten plantear y resolver problemas más complejos y más cercanos a su vida cotidiana (Programa de Matemáticas IV, 2010, págs. 2-3)

También en el mismo plan de estudios, se encuentran enlistadas las competencias disciplinares que se pretende que los estudiantes logren con el estudio de esta asignatura, en estas se encuentran:

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

Considerando lo anterior y se decide trabajar sobre dos de las unidades temáticas del curso de Matemáticas IV que propone el programa de las escuelas incorporadas a la Universidad Autónoma de Querétaro, que se enlistan enseguida:

- Unidad I: Conceptos preliminares
- Unidad IV: Las cónicas

4.2 Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas

Para el diseño de situaciones didácticas y rigiéndonos por la teoría de situaciones didácticas, se propondrán actividades que permitan traer conocimientos previos de la geometría euclidiana, de trigonometría y de algebra. El rescate de conocimientos previos se podrá hacer mediante diferentes estrategias: Lluvia de ideas, preguntas claves y/o situación problema.

De acuerdo con el tema a trabajar se plantea la situación-problema (problema introductorio), la cual estará diseñada de tal manera que, por una parte, el estudiante pueda aplicar los conocimientos matemáticos (de trigonometría, álgebra y/o geometría euclidiana) que se puedan relacionar con los contenidos que se pretenden consolidar de Geometría Analítica, haciéndose presente la complementariedad de ambos enfoques; por otra parte y de manera simultánea se espera surjan cuestionamientos acerca de diferentes situaciones que tienen que ver con los conceptos matemáticos a tratar, favoreciendo la correlación de una Geometría Euclidiana con una Geometría Analítica. Con esto se lleva al estudiante a una situación de acción y formulación.

Las situaciones-problema involucrarán el uso de diversos recursos didácticos, entre ellos el uso de Geogebra, ya que esta última permite una manipulación sobre los objetos geométricos, llevando al estudiante no sólo a una situación de formulación, si no a la par se presenta una situación de validación, ya que al interactuar con el medio propuesto, puede ir verificando si lo que ha formulado aplica o resuelve el problema, como Brousseau (2007) refiere que la validación puede darse de manera empírica.

Una vez que el estudiante ha pasado por situaciones de acción, formulación y validación, el docente debe llevar a cabo la fase de institucionalización de los conceptos que se trabajaron y que concluyen en los conceptos matemáticos que los estudiantes deben consolidar sobre la Geometría analítica. En la propuesta didáctica se dará una forma de cómo llevar a cabo el desarrollo de los conceptos teóricos que ayuden al docente en esta fase.

4.2.1 Propuesta didáctica para el estudio de los conceptos preliminares.

En este apartado se desarrollan algunos de los contenidos que comprende la primera unidad temática del curso de Geometría Analítica denominada *Conceptos preliminares,* bajo el plan de estudios propuesto para el curso de Geometría Analítica que se estudia en el nivel medio superior bajo el plan de estudios al que ya se ha hecho referencia en este trabajo.

Los temas que se encuentran son:

I. Distancia entre puntos
II. División de un segmento en una razón dada
III. Área de un polígono

En cada uno de estos temas a tratar en lo sucesivo, se han organizado bajo una estructura similar y afín con el objetivo principal que busca este proyecto.

I. DISTANCIA ENTRE PUNTOS

Se propone iniciar el tema de distancia entre puntos con la **Actividad 1**, en la que el estudiante aplique conceptos que ya ha estudiado en cursos previos de matemáticas para dar respuesta al problema.

Actividad 1. Resolver el siguiente problema.

Problema. Se quiere mover un objeto pesado que se encuentra en una esquina de un salón (punto A) y se quiere llevar al lado opuesto (punto B) como se puede apreciar en el diagrama (Figura 1). Pero debe llevarse por el camino más corto, tomando en cuenta que no hay obstáculos en ningún camino.

- **a)** Determina cuál es ese camino.
- **b)** Determinar cuál será la distancia que se debe recorrer por ese camino, tomando en cuenta que el salón que mide 5m de lado.
- **c)** Representa el problema en Geogebra trazando segmentos y verifica tu resultado.

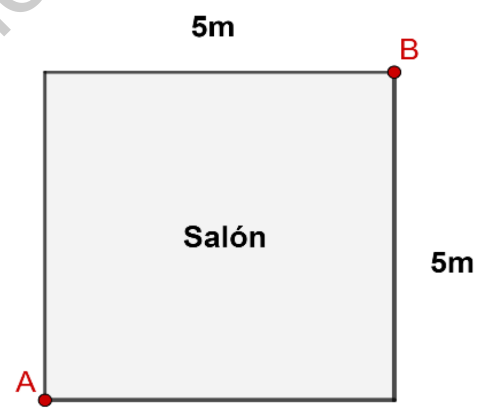

Figura 1. Representación gráfica del problema.

Al proponer esta actividad de apertura del tema se espera que el estudiante analice que el mejor camino es aquel que implique un menor esfuerzo y una menor distancia. Y con esto llevarlo a una situación de acción y formulación que la TSD implica. También se pretende que se den las fases de acción y formulación, ya que es probable que el estudiante determine que el camino más corto para ir de A a B es el segmento que une a A con B, dando respuesta al primer inciso de la actividad.

Para determinar la distancia que hay de A a B, es probable que se observe que se forma un triángulo rectángulo del que se quiere calcular su hipotenusa, por lo que se espera, empleen el Teorema de Pitágoras que permite conocer el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y encontrarán que el segmento $\mathrm{AB} = \sqrt{50}$, lo cual es cierto.

Cuando el estudiante representa en GeoGebra gráficamente el problema, este podrá validar si el resultado que obtuvo en el inciso **b)** (Actividad 1) coincide con lo que la medida que este software indicará del segmento AB. Con esto, se lleva al estudiante a una fase de validación.

Actividad 2.

Ahora se lleva el problema empleando un sistema de coordenadas (Figura 2), en el que las coordenadas de A(0,0) y de B(5,5), ya considerando que el camino más corto es el segmento AB.

a) ¿Cómo se determina la distancia entre el punto A y el punto B a partir de las coordenadas de los puntos?

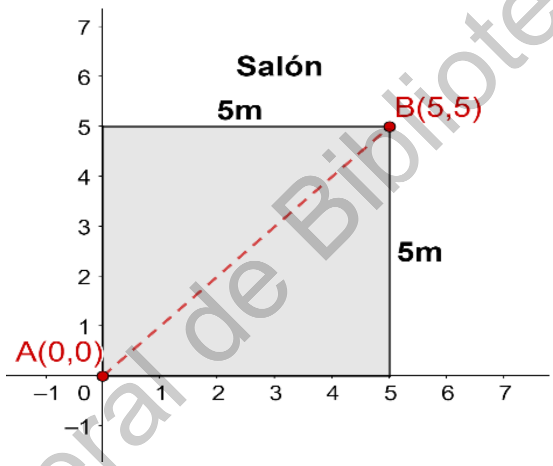

Figura 2. Representación del problema en los ejes coordenados.

Ahora que se busca una solución empleando un sistema de coordenadas, el alumno enfrenta una situación a-didáctica en la que partirá de una solución que le resolvió la primera actividad y ahora deberá llevarla al nuevo problema.

Es probable que el estudiante, no pierda de vista que se sigue visualizando el triángulo rectángulo, por lo que sigue siendo el Teorema de Pitágoras el que resuelve el problema. En donde los catetos del triángulo rectángulo ABC están determinados por $y_2 - y_1$ y por $x_2 - x_1$, como se ve en la Figura 3 dado que el teorema enuncia que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos, se sigue que:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

Así para el problema en particular que se está tratando, al colocar al punto A en las coordenadas (0,0) y al punto B en (5,5), como se puede observar en la Figura 3, la solución quedaría de la siguiente manera:

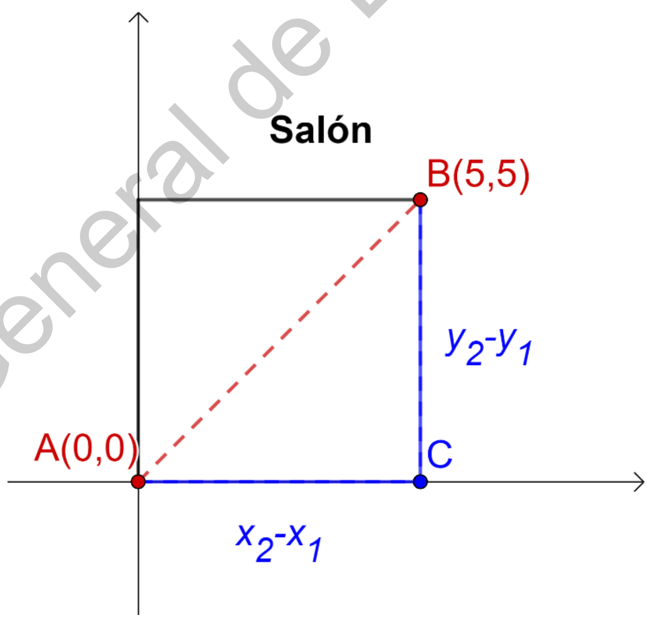

Figura 3. El problema con coordenadas en A y B.

$$AB = \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2}$$

$$AB = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$AB = \sqrt{50}$

Obteniendo así la misma magnitud del segmento AB que ya se había calculado pero ahora empleando un sistema de coordenadas.

Para llevar a cabo la fase de institucionalización se propone lo siguiente:

Conceptualización del tema: Distancia entre dos puntos

Sea P_1P_2 el segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la distancia d la distancia entre ellos, como se ve en la Figura 4.

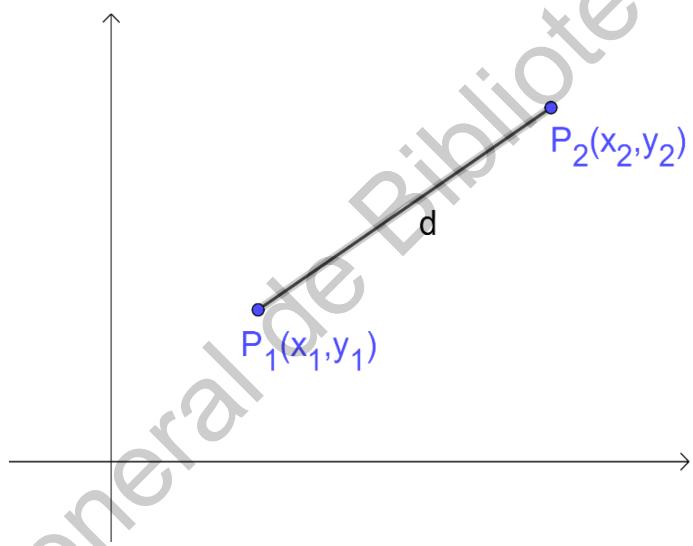

Figura 4. Distancia entre los puntos P_1P_2*.*

Si se trazan los segmentos paralelos a los ejes coordenados y que cortan en Q se tiene el triángulo rectángulo P_1P_2Q en donde los catetos están determinados por $y_2 - y_1$ y por $x_2 - x_1$, como se ve en la Figura 5:

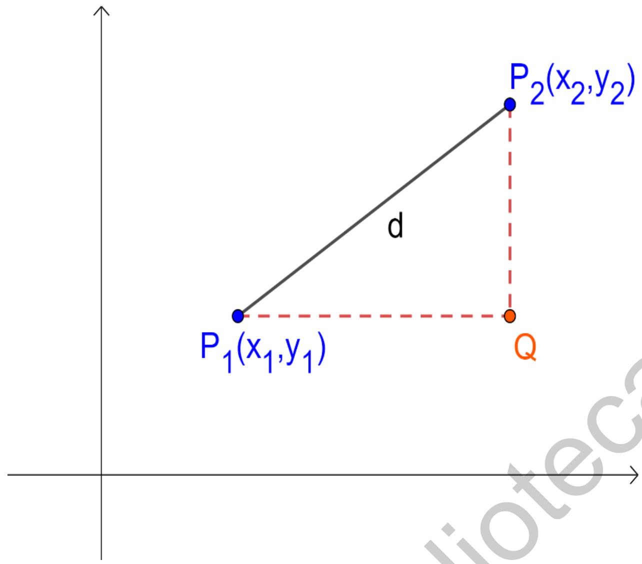

Figura 5. Triángulo rectángulo P_1P_2Q

Por Teorema de Pitágoras la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos, se sigue que

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad (3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4)$$

Lo que permite conocer la distancia entre puntos en un plano cartesiano.

II. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Se ha propuesto iniciar el tema de división de un segmento en una razón dada con la **Actividad 1**, con la que se espera que el estudiante, se encuentre en una situación de acción y formulación y que pueda aplicar los conceptos que previamente ha estudiado en los cursos de algebra, trigonometría y más aún los de geometría Euclidiana al dar una solución al problema.

Actividad 1. Resolver el siguiente problema.

Problema. El señor José tiene dos hijos, Pedro y Juan, a los que quiere repartirles un terreno en forma de rectángulo, en partes iguales. Pero Pedro ha pedido se le deje su parte de terreno en forma rectangular como se muestra en la Figura 6 siguiente:

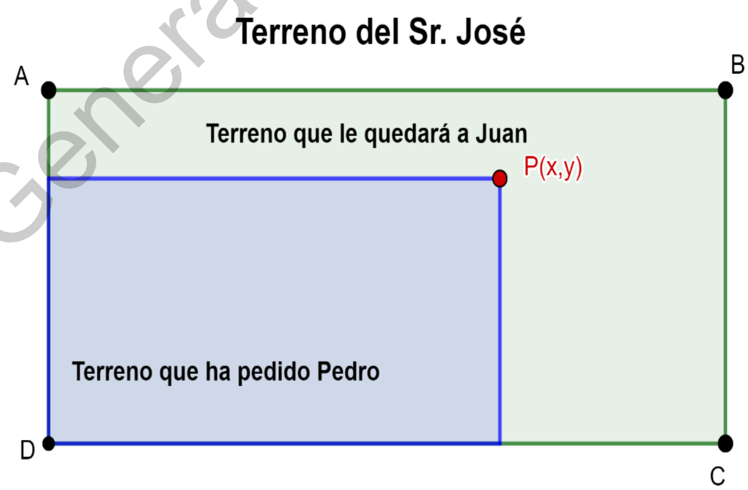

Figura 6. Representación gráfica del problema.

Si se conoce que el largo del terreno quiere Pedro es $\frac{2}{3}$ del largo del terreno completo, determina:

a) ¿Dónde debe estar localizado el punto P, para que el área del terreno de Pedro sea la mitad del área total del terreno?

Ya que el estudiante ha enfrentado una situación de acción y formulación para dar solución al problema, es esperado que emplee conocimientos previos, incluido el uso de coordenadas al proponer una solución. A continuación se muestra una posible solución.

Si el problema se lleva a un sistema de coordenadas, de manera que el origen coincida con la esquina inferior izquierda y los lados del terreno sean paralelos a los ejes, obtenemos la siguiente Figura 7:

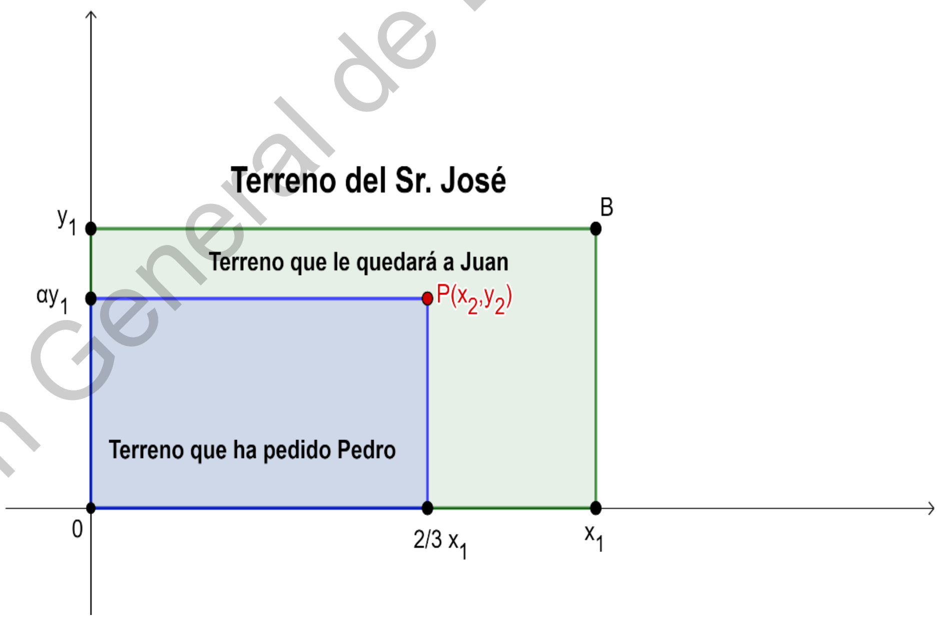

Figura 7. Representación del problema en un sistema de coordenadas

Si $\frac{2}{3}x_1 \cdot \alpha y_1 = \frac{1}{2}x_1 y_1$ (5)

Entonces $\alpha = \frac{3}{4}$

Esto significa que $y_2 = \frac{3}{4}y_1 = \frac{0+3y_1}{1+3}$

ya que $\frac{y_2-0}{y_1-y_2} = \frac{3}{1} = \boldsymbol{\lambda}$ (6)

Una vez que se encuentra $\boldsymbol{\lambda} = \frac{3}{1}$ se puede encontrar el punto $P(x_2, y_2)$ que determina que el área del terreno de Pedro sea la mitad y que tenga la forma rectangular que ha pedido.

Actividad 2. Aplicar la solución encontrada en la actividad anterior empleando las dimensiones del terreno $Largo = 90m\ y\ Ancho = 40m$ (Figura 8):

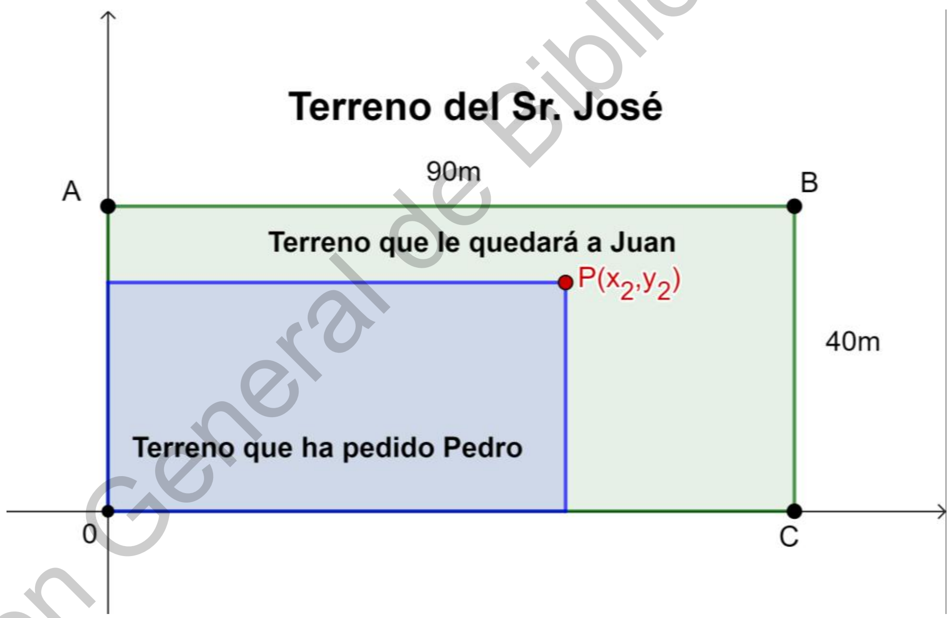

Figura 8. Representación gráfica del problema.

Si se conoce que el largo del terreno quiere Pedro es $\frac{2}{3}$ del largo del terreno completo:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto P, para que el área del terreno de Pedro sea la mitad del área total del terreno?

b) Con el resultado obtenido en el inciso anterior, realiza el cálculo del área del terreno de Pedro y verifica que sea la mitad del área total del terreno del Sr. José.

Si se asignan valores a las dimensiones del terreno del Sr. José, se puede comprobar que se obtiene lo que el problema plantea. Con esto se logra que el estudiante valide su solución al comprobar que resuelve el problema planteado y por lo tanto se estaría propiciando una fase de validación de la TSD que se está empleando en el diseño de la propuesta.

Para llevar a cabo la institucionalización que marca la TSD, se propone la siguiente explicación, ya que en esta se encuentran una de las concepciones euclidianas de muy empleada que es la semejanza de triángulos.

Sean P_1 y P_2 los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto P, divide al segmento P_1P_2 en dos partes proporcionales se define como

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} \qquad (7)$$

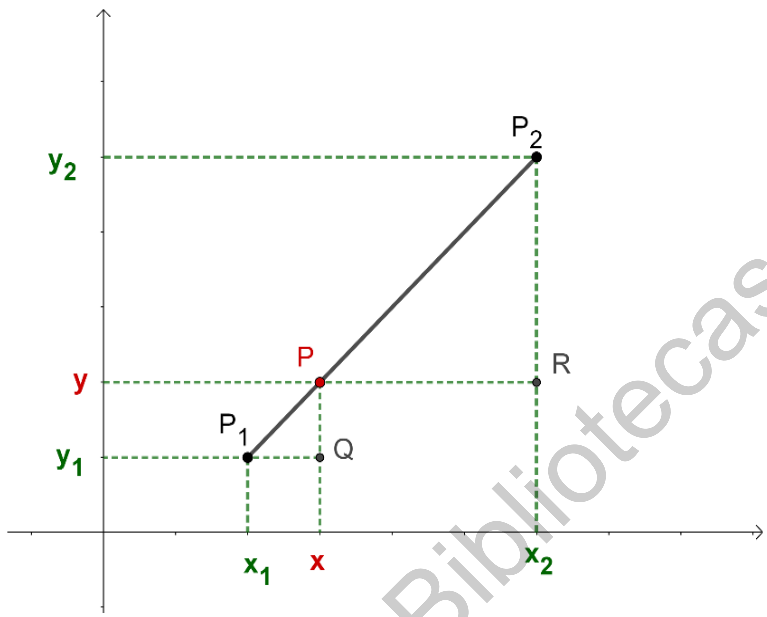

Figura 9. Visualización de los triángulos semejantes

Se tiene los triángulos PQP_1 y P_2RP son semejantes como puede observarse en la Figura 9, entonces r queda definida por:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \qquad (8)$$

De donde se sigue que las coordenadas del punto $P(x, y)$ están determinadas por:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad (9)$$

Cuando $P(x, y)$ está en el segmento P_1P_2, la razón es positiva $(r›0)$, como puede observarse en la Figura 10:

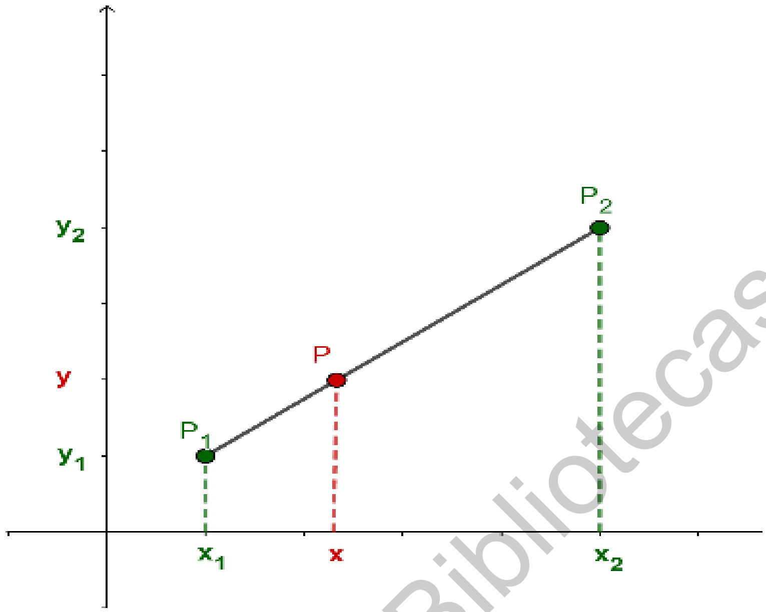

Figura 10. Cuando el punto P está en el segmento P_1P_2.

Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento P_1P_2, la razón es negativa $(r‹0)$ como se puede ver en la Figura 11:

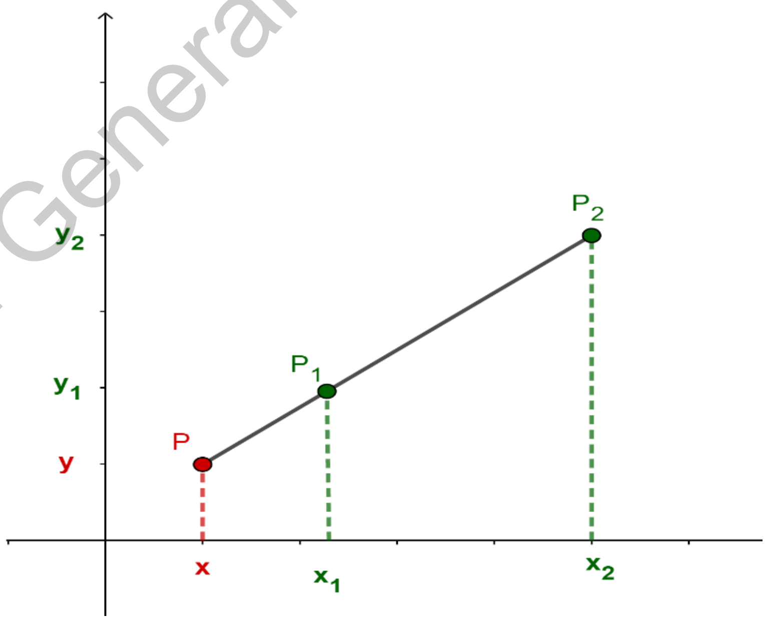

Figura 11. Cuando el punto P está fuera del segmento P_1P_2.

III. ÁREA DE UN POLÍGONO

Se ha propuesto iniciar el tema de división de un segmento en una razón dada con la **Actividad 1**, con la que se espera que el estudiante, se encuentre en una situación de acción y formulación y que pueda aplicar los conceptos que previamente ha estudiado en los cursos de algebra, trigonometría y más aún los de geometría Euclidiana al dar una solución al problema.

Actividad 1. Resolver el siguiente problema.

Problema. Se quiere conocer el área de ciertos espacios de un terreno en donde se quieren crear espacios de recreación. Determina estás áreas si se conocen las coordenadas de sus vértices, como se muestra en la Figura 12:

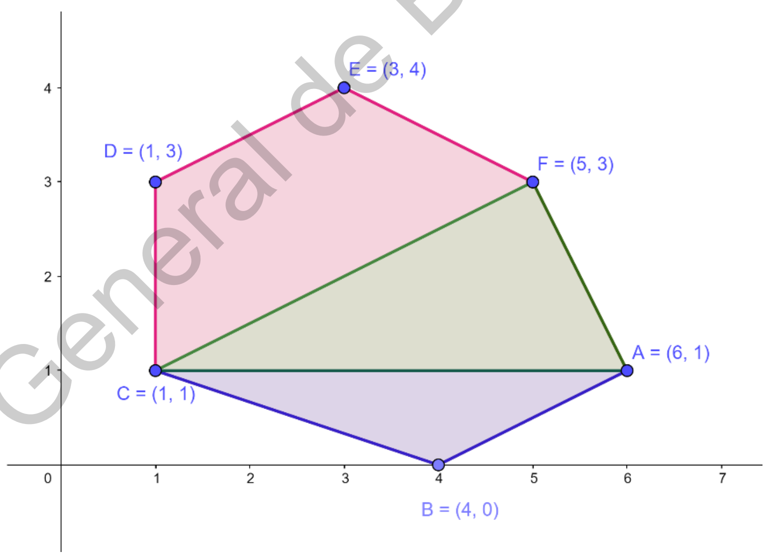

Figura 12. Representación gráfica del problema

En esta situación en la que el estudiante tiene que llevar a cabo la acción y formulación, puede presentarse que al observar que las formas de las diferentes áreas que se resaltan en colores diferentes, son figuras geométricas de las cuales conoce como determinar el área de cada una de ellas y solo tendría que determinar los datos necesarios y hacer una suma de áreas para dar respuesta al problema.

También puede pasar que el estudiante quiera emplear la fórmula de Herón de Alejandría para calcular el área de un triángulo conociendo sus lados, ya que suele revisarse en temas anteriores a este

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (10)$$

Sin embargo es importante hacerle notar al estudiante los inconvenientes de optar por alguna de estas estrategias. Por lo que se propone la **Actividad 2** para llevarlo a un momento de validación de lo que acaba de proponer como solución y con esto

Actividad 2. Realizar lo que se pide en cada punto que se enlista enseguida:

1. En GeoGebra representar el polígono ABCDEF.
2. Ahora trazar los polígonos como se muestra en la Figura 13.
3. Tomando en cuenta la solución propuesta al problema de la Actividad 1, ¿qué tendría que volverse hacer para llegar determinar el área empleando la misma secuencia?

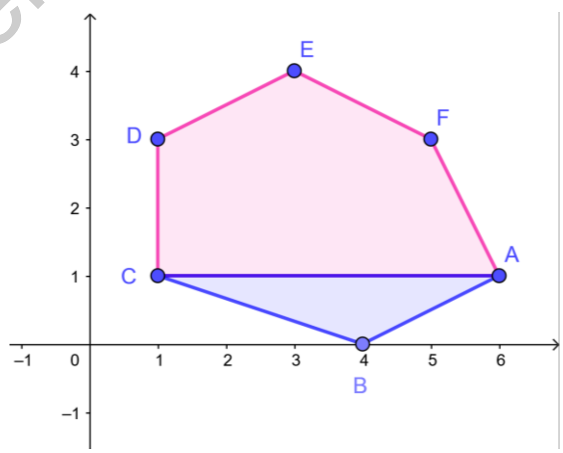

Figura 13. Representación gráfica del problema

promover que se encuentren otras opciones de solución en las que solo se trabaje con las coordenadas de los vértices para determinar el área de algún polígono.

Para llevar a cabo la institucionalización del tema que se está tratando se sugiere llevarla a cabo mediante la presentación de casos que van construyendo de lo particular a lo general, la manera en que se llega a la fórmula para obtener el área de polígonos. Se propone el caso de cómo obtener el área de un trapecio.

Área de un trapecio.

Si para obtener el área de un trapecio cuyos vértices son los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)\ y\ P_4(x_4, y_4)$ para el cual su área se determina por $A = \frac{1}{2}(L + l)h$ es decir: (Figura 14)

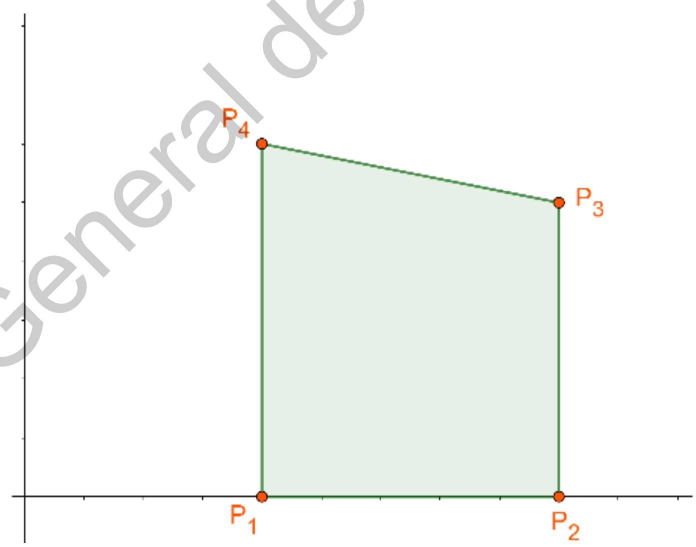

Figura 14. Trapecio en un sistema de coordenadas

$$A = \frac{1}{2}(P_1P_4 + P_2P_3) \cdot P_1P_2 \qquad (11)$$

de donde se tiene que

$P_1P_4 = y_4$, $P_2P_3 = y_3$ y $P_1P_2 = x_2 - x_1$

sustituyendo se tiene

$$A = \frac{1}{2}(y_4 + y_3) \cdot (x_2 - x_1) \qquad (12)$$

$$A = \frac{1}{2}(x_2y_4 + x_2y_3 - x_1y_4 - x_1y_3) \qquad (13)$$

Ya que se analizó el caso de cómo calcular el área de un trapecio de una manera en la que es sencillo determinar el lado mayor, el lado menor y su altura a partir de las coordenadas de los puntos. Ahora podría determinarse el área de un triángulo si éste es llevado a la forma de trapecio. Y de esta manera ir haciendo la construcción del concepto final.

Área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus vértices

El área del triángulo ABC cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ puede conocerse si se proyectan segmentos de recta que van desde sus vértices hasta el eje de las abscisas y de esta manera poder obtener 3 trapecios, ABFD, ACED y BCEF (Figura 15).

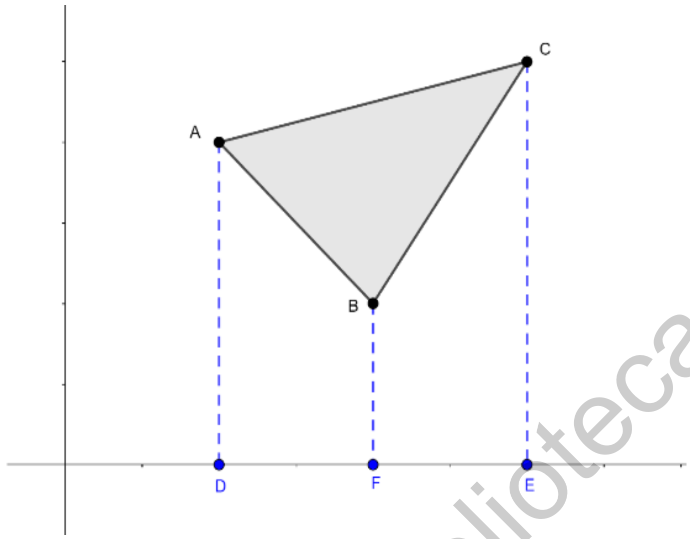

Figura 15. Triángulo en un sistema de coordenadas

de los cuales se puede obtener su área y por tanto poder determinar el área del triángulo, como:

$$|ABC| = |ACED| - [|ABFD| + |BFEC|] \tag{14}$$

Conociendo que el área de un trapecio se obtiene a partir de $\frac{(L+l)h}{2}$, se sigue que

$$|ABC| = \frac{(y_3+y_1)(x_3-x_1)}{2} - \left[\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} + \frac{(y_3+y_2)(x_3-x_2)}{2}\right] \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(x_3y_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1) - (x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2) \\ -(x_3y_3 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_2)\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_3y_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_1 - x_2y_2 \\ +x_1y_2 - x_3y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1] \tag{16}$$

Si denotamos el producto anterior como:

$$[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

entonces el área queda expresada como:

$$|ABC| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (18)$$

Se cree que al llevar al estudiante por este proceso que va de lo particular a lo general y hacer la generalización del concepto, cálculo del área de un polígono conociendo las coordenadas de sus vértices, permite que el estudiante vaya haciendo sus conjeturas hasta recibir un concepto final, que se cree pueda resultarle más sencillo de comprender.

Cálculo del área de un polígono conociendo las coordenadas de sus vértices

Dados los vértices de un polígono P_1, P_2, P_3,…,P_n, su área está determinada por la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan trazar en él desde un sólo vértice. (Figura 16)

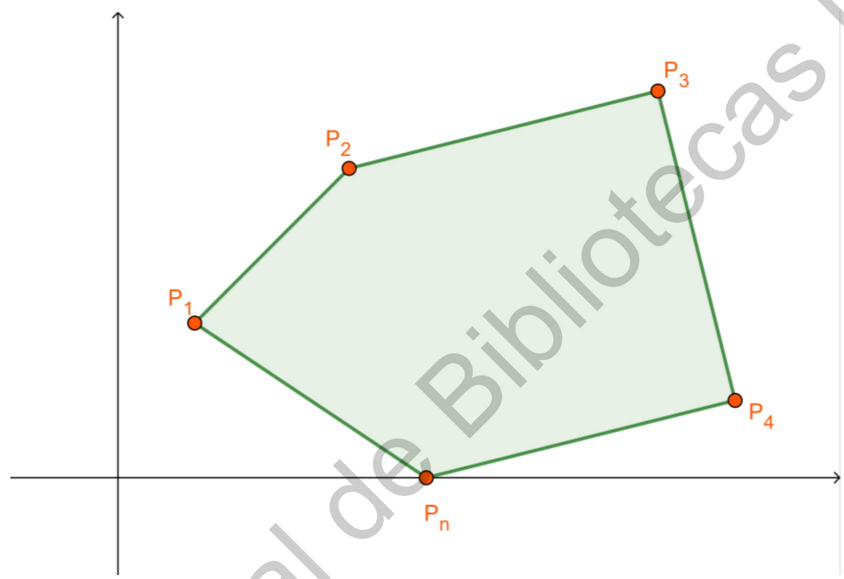

Figura 16. Polígono en un sistema de coordenadas

Lo cual se reduce a la siguiente expresión definido como:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad (19)$$

Cabe hacer mención que el signo resultado dependerá del sentido en el que se consideren los vértices del polígono. Si se toman en sentido de las manecillas del reloj será negativo y si se toman en sentido contrario a las manecillas del reloj el resultado será positivo.

4.2.2 Propuesta didáctica para el estudio de la Circunferencia, Parábola y Elipse.

En este capítulo se desarrollan algunos de los contenidos que comprende la cuarta unidad temática del curso de Geometría Analítica denominada *Las Cónicas,* que se estudia en el nivel medio superior.

Los temas que se encuentran son:

I. Circunferencia
II. Parábola
III. Elipse

I. CIRCUNFERENCIA

Se ha propuesto iniciar el tema de Circunferencia con la **Actividad 1**, en la que se espera el estudiante se encuentre en una situación de acción y formulación y que pueda aplicar los conceptos que previamente ha estudiado en los cursos de algebra, trigonometría y más aún los de geometría Euclidiana al dar una solución al problema.

Actividad 1. Resuelve el problema que se enuncia a continuación:

Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso (Figura 17), ¿qué curva describe la posición del gato?

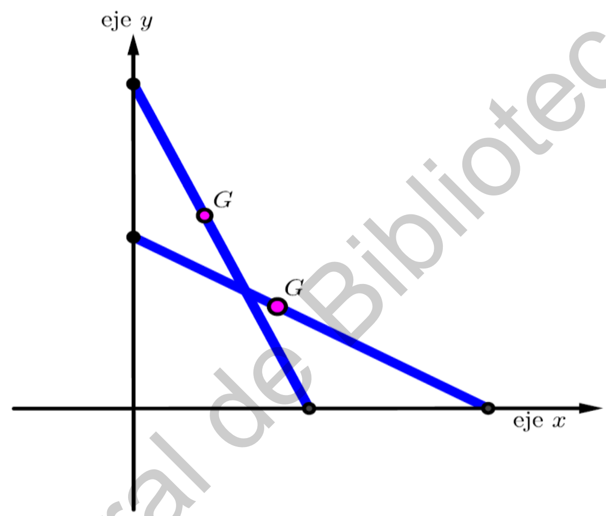

Figura 17. Representación del Gato en la escalera en el plano cartesiano

Se esperaría que al proponer la Activad 1 en la fase de acción y formulación de este tema, un estudiante logre dar una solución empleando ideas de la Geometría Euclidiana. La solución que se presenta a partir del siguiente párrafo, es una solución al problema que usa ideas de la geometría Euclidiana.

Considerando que el gato se encuentra parado sobre el peldaño exactamente a la mitad de la escalera, se puede resolver de manera sencilla usando ideas de Geometría Euclidiana. Como G es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo △OAB, tenemos que el centro de su circunferencia circunscrita (Figura 18) es G, entonces se cumple:

$$\mathrm{GA} = \mathrm{GB} = \mathrm{GO} \qquad (20)$$

Es decir, los triángulos △AOG y △BOG son isósceles. De esto se obtiene que:

$$OG = \frac{1}{2}AB \qquad (21)$$

Es decir, la distancia desde G hasta O es siempre una constante.

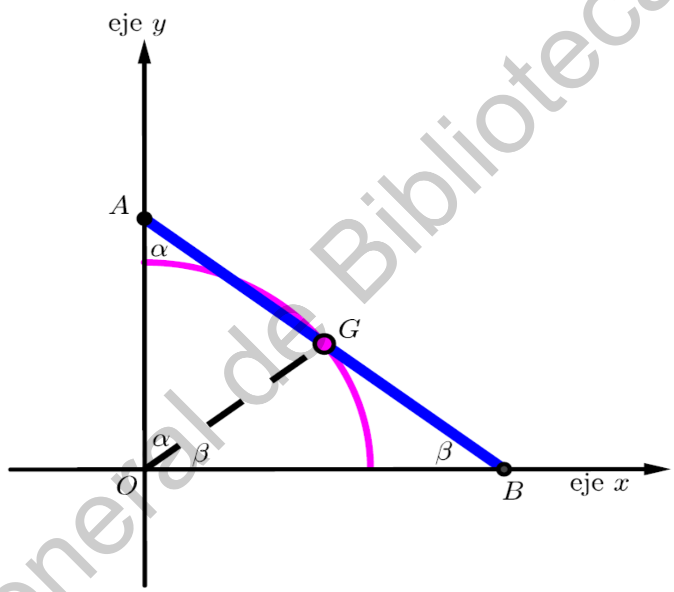

Figura 18. Arco de circunferencia descrita por el Gato en la escalera

Podemos notar que la curva que describe la posición del gato en el problema introductorio, es parte de una circunferencia. En este momento de la secuencia, se propone que el estudiante realice la actividad 2 y pueda llevar a cabo la validación de una manera dinámica empleando su creatividad.

Actividad 2. Construir el problema de la actividad 1, el gato en la escalera, si el gato se encuentra a la mitad de ella y no se mueve de ahí.

a) Sobre una hoja dibuja un punto O, usa un hilo que represente al segmento OG y en un extremo fija un color, pluma, lápiz, etc. Que represente al punto G.
Mueve el lápiz para que vaya dibujando la trayectoria que describe el movimiento del gato.

b) Contesta:

- ¿Qué forma tiene la trayectoria descrita por el gato?
- Si el gato no estuviese a la mitad de la escalera, ¿Cambiaría la forma de su trayectoria. Escribe tus conclusiones de lo que observas.

El caso general es muy difícil de resolver utilizando sólo ideas de Geometría Euclidiana. En este caso, la solución se hace más simple si introduce el sistema de coordenadas y se resuelve el problema en forma paramétrica y se ha propuesto y desarrollado en el tema de Elipse.

La institucionalización del tema puede llevarse a cabo mediante la explicación que se muestra a continuación.

La circunferencia como lugar geométrico

La circunferencia como lugar geométrico se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro. Dicha distancia es el radio de la circunferencia. (Figura 19)

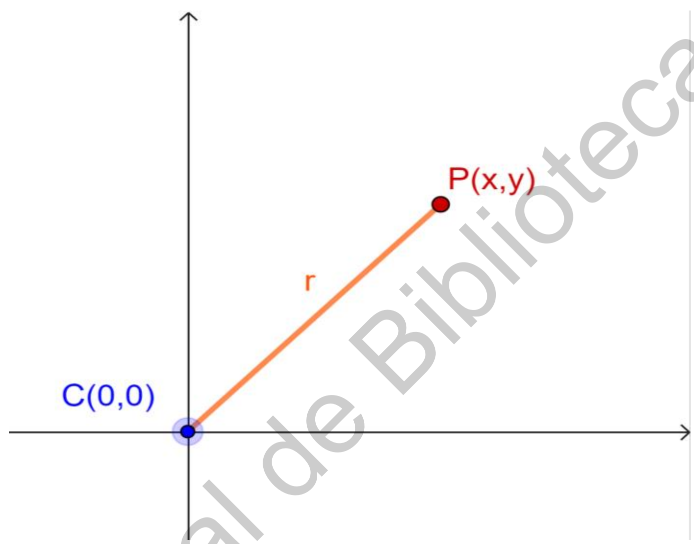

Figura 19. Segmento CP

Sea el punto $C(0,0)$ el centro y $P(x, y)$ un punto de la circunferencia, se tiene el segmento $PC = r$, se sigue:

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (22)$$

Si el centro de la circunferencia es $C(h, k)$ y su radio es r, entonces su ecuación en su forma ordinaria queda definida como:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (23)$$

Para continuar con el estudio y análisis de las cónicas, se propone comenzar con una introducción en la que se defina la excentricidad, en la que no hay un. Debido a que se ha considerado que esto ayudaría a la asimilación de los conceptos de Parábola, Elipse e Hipérbola.

Introducción

¿Cómo es el conjunto de puntos P tales que la razón de la distancia desde P hasta un punto fijo F y la distancia hasta una recta fija, es una constante e?

En otras palabras, $\frac{PF}{PM} = e$, donde e es un número positivo fijo. (Figura 20)

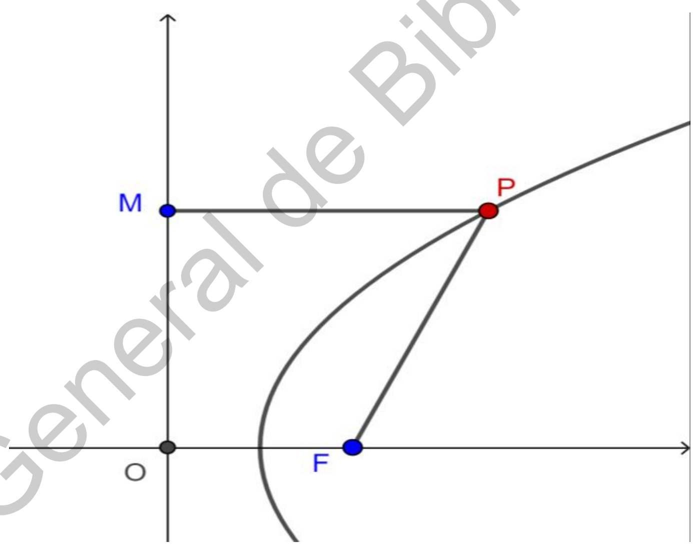

Figura 20. Distancias PF y PM

Si $e = 1$, al conjunto de puntos P se le conoce como Parábola; si $e < 1$ al conjunto de puntos se le conoce como Elipse y si $e > 1$ se le conoce como Hipérbola.

Ahora se propone analizar cada dos de los casos para la excentricidad.

- Cuando $e = 1$ se tiene una Parábola
- Cuando $e > 1$ se tiene una Elipse.

Se ha desarrollado bajo el orden que a continuación se presenta propone en este orden dado que se considera que el estudiante tendría que valerse de otros medios para dar una solución e incluso perderse en la búsqueda.

II. PARÁBOLA

PARÁBOLA cuando $e = 1$

Sea O la proyección de F sobre la recta fija l y sea A el punto medio de FO. Si $AO = AF = a$ y las coordenadas de P son (x, y), entonces como $PM = PF$ tenemos que $PM^2 = PF^2 = PN^2 + FN^2$. (Figura 21)

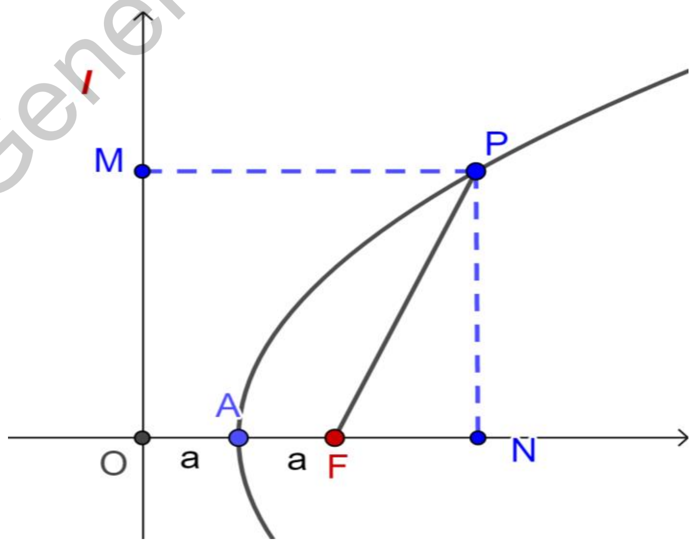

Figura 21. Excentricidad igual 1

Tenemos que $x^2 = y^2 + (x - 2a)^2$ (24)

entonces $y^2 = -(x - 2a)^2 + x^2$

$$y^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + x^2$$

$$y^2 = 4a(x - a) \qquad (25)$$

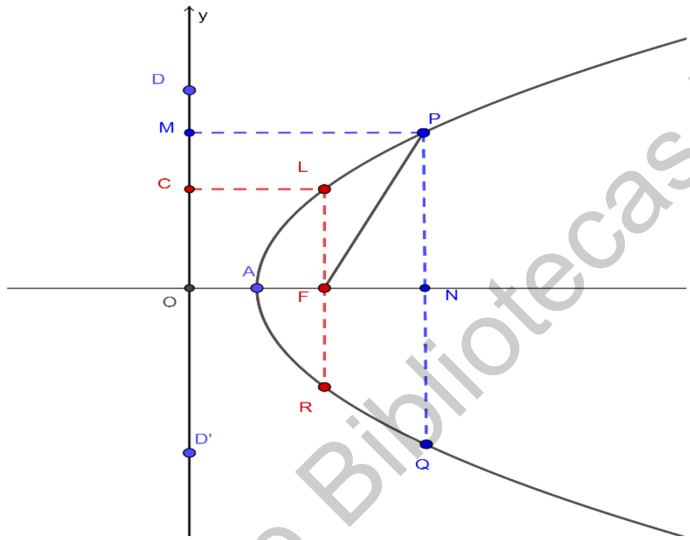

Figura 22. La Parábola

Al punto A se le conoce como vértice de la parábola y al punto F se le llama foco, como se ven representados en la Figura 22. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado $foco$ y de una recta llamada $directriz$.

Una vez analizado lo anterior se puede iniciar con la **Actividad 1** del tema de la parábola, en la que como ya se vio, la excentricidad es 1. Se espera que en esta actividad el estudiante logre formular y validar el concepto de excentricidad de la parábola y aplicarlo en la solución al problema que se propone en la actividad.

Actividad 1. Resuelve el siguiente problema

Se quiere diseñar una estufa que funcione con luz solar. La forma de la estufa es como un tazón y se quiere diseñar de manera que los rayos de la luz reboten siempre hacia un mismo punto, como se ejemplifica en la Figura 23.

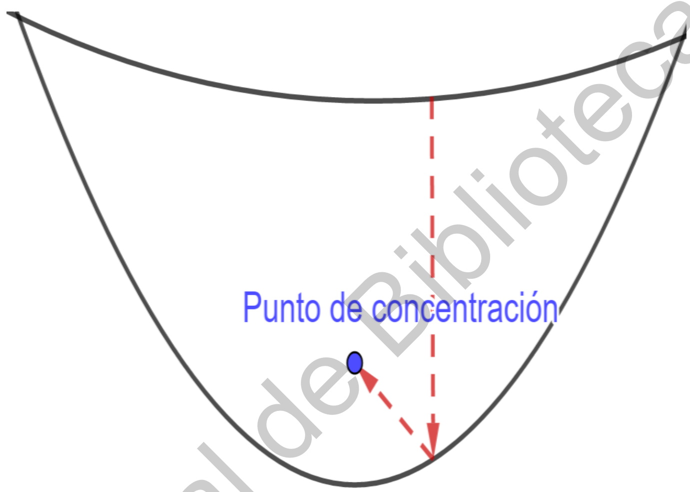

Figura 23. Estufa solar

a) ¿Cómo debe ser la sección transversal de la estufa?

Al proponer la actividad 1 la respuesta esperada estará influenciada por la imagen que sugiere que la estufa solar debe ser de forma parabólica. Pero para llevar al estudiante a una fase de acción y formulación que dé el sustento a la idea que acaba de conjeturar, se propone que se aborde el problema desde la propiedad óptica de la parábola y que con esto el estudiante ya pueda formular y al mismo tiempo validar la solución a lo que se pide en la actividad.

Propiedad Óptica de la Parábola

Veremos que los rayos de luz que son paralelos a la línea FA rebotan en la parábola hacia el foco F.

Sea entonces, F el foco de la parabola que pasa por el punto A, el punto B una proyección de A y P un punto de la parabola con proyección en C. (Figura 24)

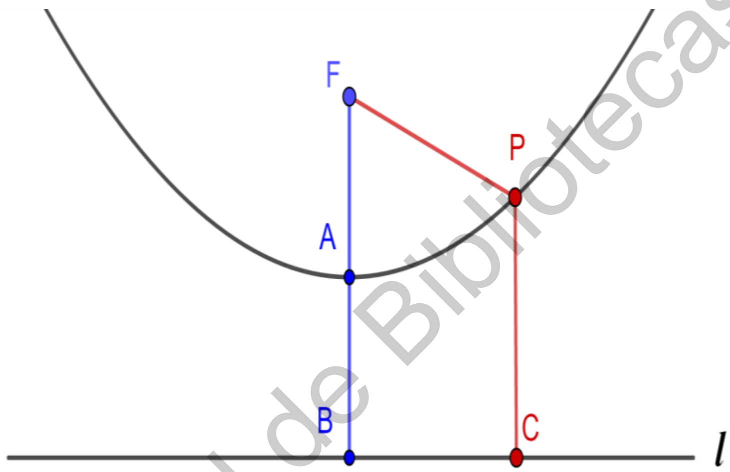

Figura 24. Empleando propiedad óptica de la parábola

Sea l_1 la bisectriz del ángulo FPC, veamos que l_1 es tangente a la parabola en P. De no ser así, supongamos que l_1 corta a la parábola de nuevo en Q, como puede observarse en la Figura 25.

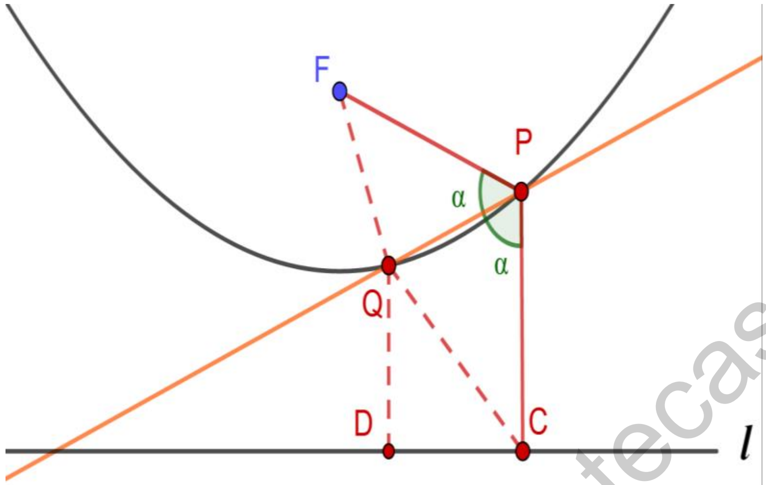

Figura 25. Empleando propiedad óptica de la parábola

Por definición de la parábola se tiene que $FQ = QD$, donde D es la proyección de Q sobre la directriz.

Observemos que $FP = PC, PQ = PQ$ y $FPQ = CPQ = \alpha$, entonces por el criterio de congruencia lal tenemos que loa triángulos $FPQ \cong CPQ$ lo que implica que $FQ = QC$. Se sigue que $QC = QD$, pero QC es la hipotenusa del triángulo rectángulo QDC, por lo que QC no puede ser igual a QD y por lo tanto l_1 es tangente a la parábola en el punto P.

Si prolongamos CP, más allá del punto P, obtenemos una línea paralela a FA, además el ángulo entre esta línea y l_1 es opuesto por el vértice al ángulo entre l_1 y el segmento PC.

De aquí se ve que la línea PC rebota en la parábola hacia F.

Con todo esto, se puede ver que la sección transversal de nuestra estufa solar debe ser una parábola con foco en F y el segmento FA debe ser paralelo a los rayos de luz.

Habiendo tenido ya una situación didáctica que permitiera, a través de sus diferentes momentos, ir conociendo la Parábola como lugar geométrico. Se propone realizar la **Actividad 2** para llevar al estudiante nuevamente a una situación de acción, formulación y validación, que implique se hagan notar la complementariedad entre ambos enfoques.

Actividad 2. Realiza las siguientes actividades

1. Con ayuda de GeoGebra crear un programa que dibuje una parábola sin usar la herramienta del software que ya lo hace.
2. Describe y explica cada paso necesario en la construcción del programa resultante.

Se espera el estudiante pueda concretar la actividad en algo muy similar a lo que se muestra a continuación:

a. Se traza un segmento BC y un punto A que será el punto fijo. (Figura 26)

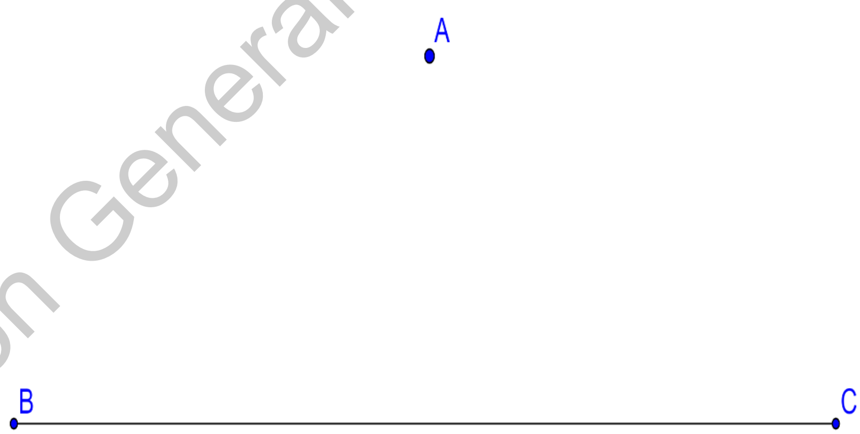

Figura 26. Segmento BC y punto A.

b. Se coloca un punto D sobre el segmento BC. Y se une el punto D con A (Figura 27):

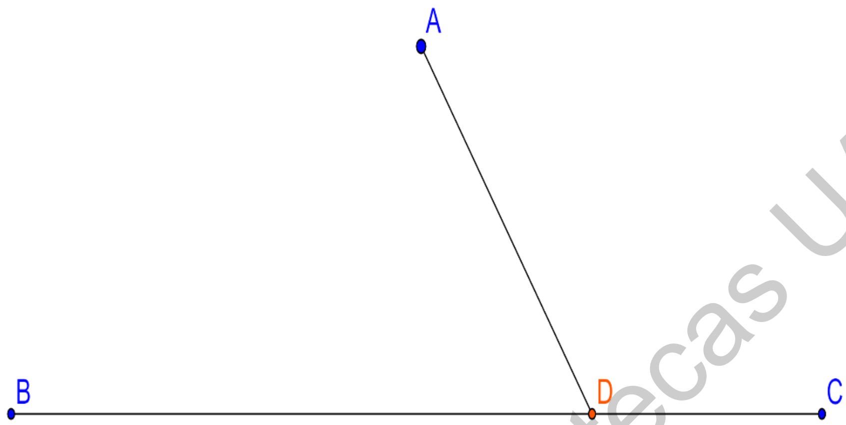

Figura 27. Segmento AD

c. Si se quiere encontrar el punto $P\ (x, y)$ que equidiste del punto A y del punto D. Se debe trazar la mediatriz del segmento AD, ya que es la recta que cumple con esta condición. (Figura 28)

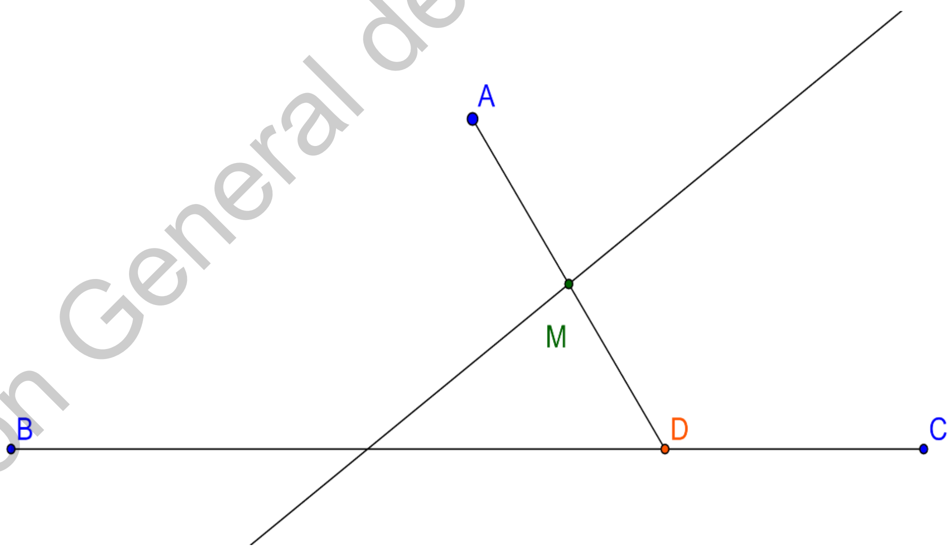

Figura 28. Mediatriz del segmento AD.

d. Para encontrar el punto $P\ (x, y)$ se traza la recta perpendicular a BC en el punto D y en la intersección de la mediatriz y de esta perpendicular se encuentra P. (Figura 29)

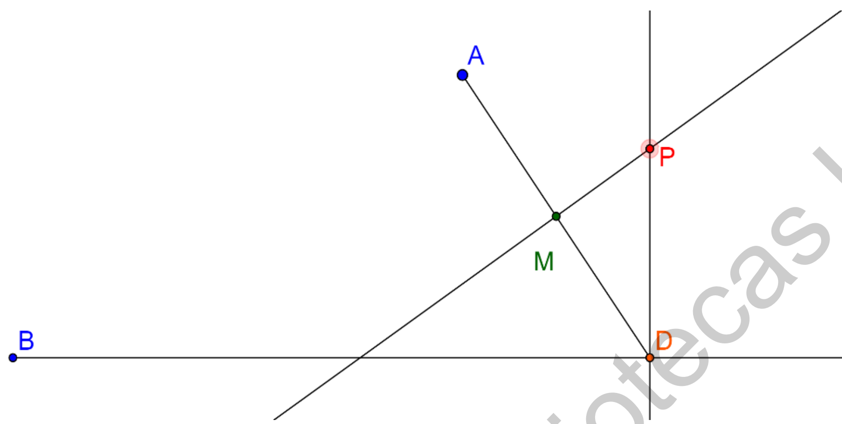

Figura 29. La perpendicular a BC.

e. Con la herramienta lugar geométrico de GeoGebra se comprueba que el punto P es un punto de la parábola. (Figura 30)

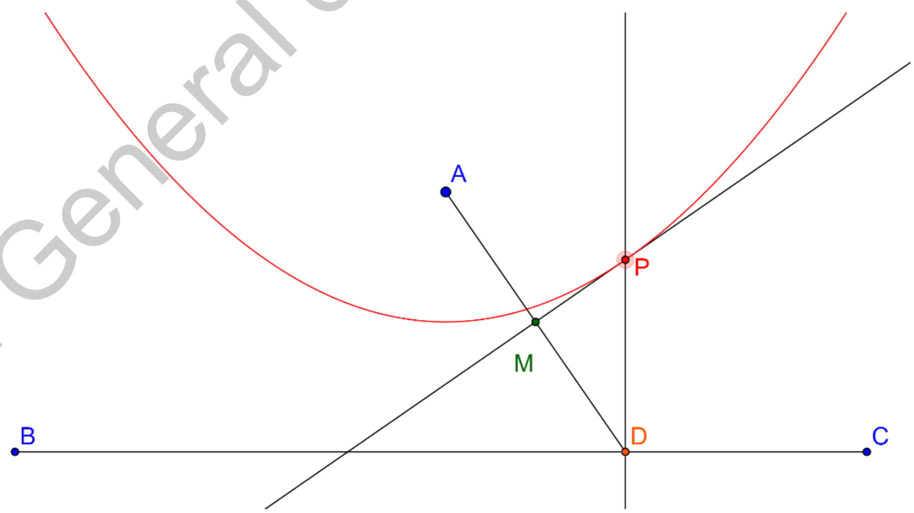

Figura 30. El punto P está en la Parábola.

Partiendo de la introducción que se da para el comenzar a estudiar las cónicas en presente propuesta didáctica, toca analizar entonces cuando $e < 1$, que sería el caso de la Elipse. Se recomienda iniciar con una explicación introductoria al estudio de esta cónica, como se muestra en seguida:

ELIPSE cuando $e < 1$

Sea P un punto sobre la elipse y $F1, F2$ dos puntos fijos con coordenadas (-c,0) y (c,0), como se puede observar en la Figura 31:

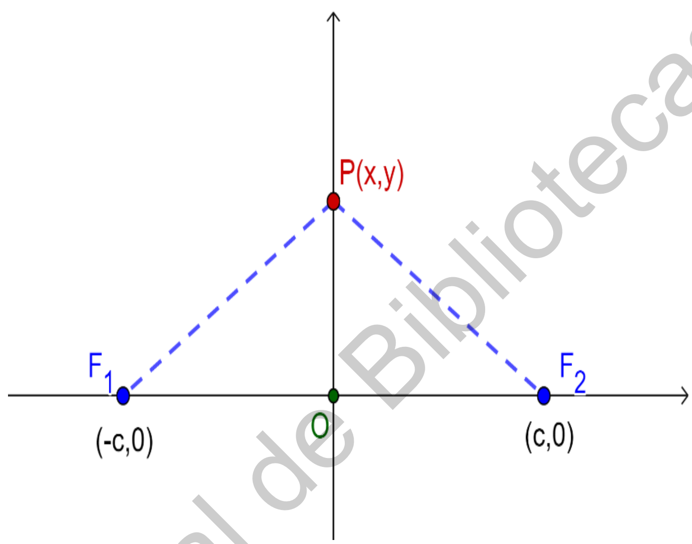

Figura 31. Un punto P de la Elipse.

Por Teorema de Pitágoras $PF_1 + PF_2 = 2a$ (26)

Tenemos que $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)} = \frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)} = 1 \qquad (27)$$

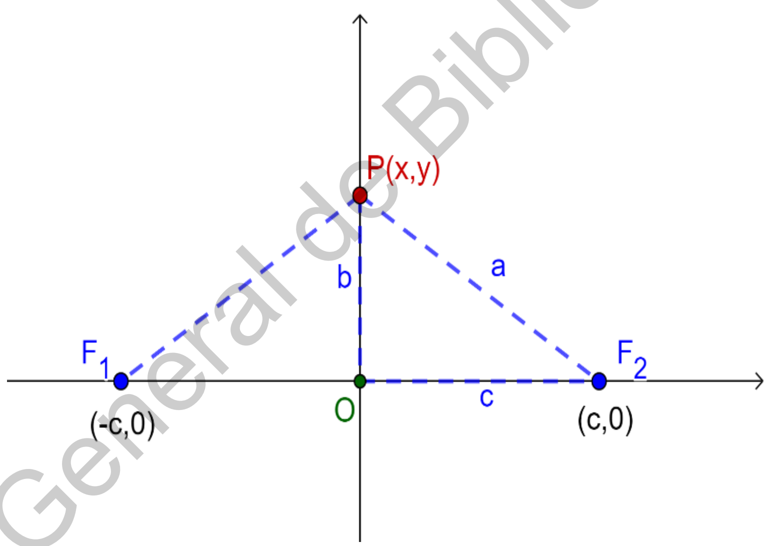

Figura 32. Segmentos a,b,c.

y como $b^2 = a^2 - c^2$

entonces $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (28)

ecuación de la elipse con centro en el origen.

La Elipse es el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ el cual se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados $focos$, siempre es una constante. En la Figura 33 se pueden observar estos elementos de la Elipse.

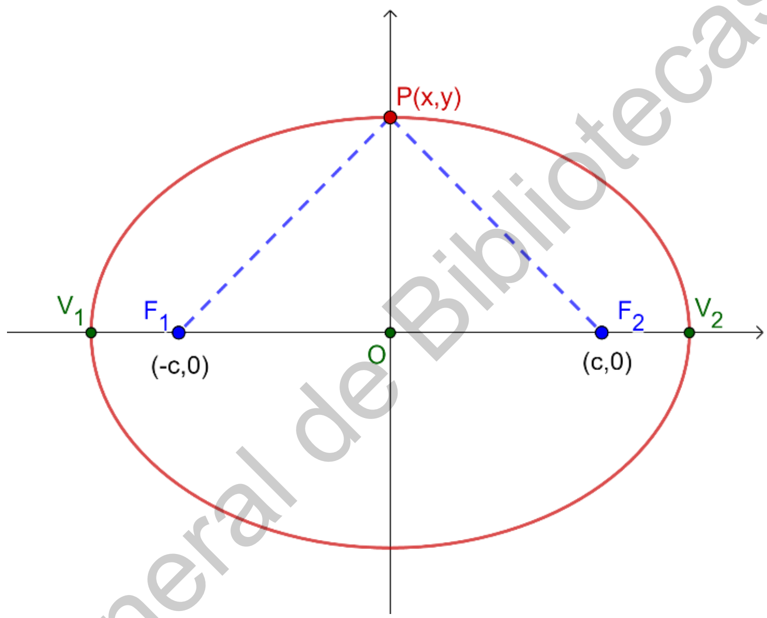

Figura 33. Elipse con centro en el origen.

Se propone que después de haber analizado la deducción de la ecuación de la elipse a partir de la suma de distancias, se realice la **Actividad 1,** que se enuncia a continuación.

Actividad 1. Retomando el problema del gato en la escalera.

Problema. Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso, ver Figura 34, ¿qué curva describe la posición del gato? Si el gato no está a la mitad de la escalera.

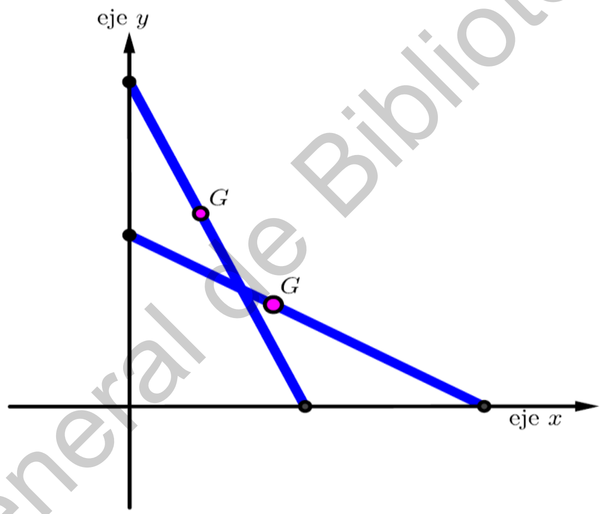

Figura 34. Representación del Gato en la escalera en el plano cartesiano

Cuando se presenta esta actividad a un estudiante que ya ha analizado los demás contenidos que se cubren durante un curso de Geometría Analítica probablemente sus propuestas para resolver el problema ya se orienten más a resolverlos bajo la perspectiva de un sistema de coordenadas. Lo cual es totalmente valido, y que en este caso propuesto se está retomando un problema que se abordó con el tema de circunferencia. En el que justamente se hace alusión a que si se cambia la condición en el problema de que el gato no está a la mitad de la escalera, bajo un enfoque de ideas euclidianas resulta complicado poder determinar una solución.

Por lo que se presenta ahora una solución bajo la perspectiva de la geometría analítica, que permite resolver el problema para el caso general, en el que se considera que el punto en el que está el gato sobre la escalera ya no es el punto medio de esta.

La solución bajo un enfoque de geometría analítica que se espera un estudiante pueda lograr como propuesta de solución, se desarrolla a continuación.

Sea α el ángulo que forma la escalera con la pared. Supongamos que el origen es el punto donde se encuentra la línea de la pared y la línea del piso y que los ejes de coordenadas coinciden con esas líneas. Denotemos las coordenadas del punto G como $x(\alpha)$ y $y(\alpha)$ y denotemos las longitudes constantes AG y GB con a y b, respectivamente.

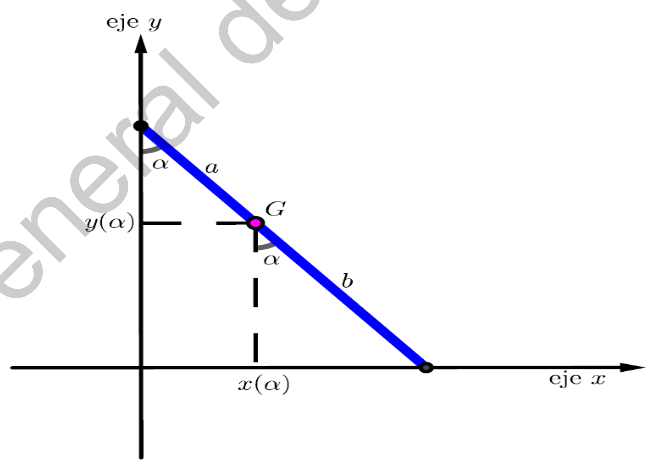

Figura 35. Representación gráfica del problema en el plano cartesiano.

Es fácil ver que

$$\frac{x(\alpha)}{a} = sen\ \alpha \tag{29}$$

$$\frac{y(\alpha)}{b} = cos\ \alpha \tag{30}$$

Por la identidad Pitagórica se tiene que

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

De donde se sigue que,

$$\frac{x(\alpha)^2}{a^2} + \frac{y(\alpha)^2}{b^2} = 1 \qquad (31)$$

Lo que resulta es la ecuación de una elipse centrada en el origen y con semiejes de longitudes a y b, por lo tanto el lugar geométrico descrito por el gato es un arco de elipse.

Después que se ha tenido una fase de acción y formulación y haber logrado llegar a una solución que concluye en que la curva que describe el gato es un arco de elipse, se propone llevar a cabo la Actividad 2. Con la que se llevaría a cabo la validación de lo que se ha propuesto como solución al problema de la actividad 1.

Actividad 2.

En GeoGebra genera un applet que dibuje la trayectoria que describe el problema del gato en la escalera. Considerando que el gato pueda estar en cualquier punto sobre ella**.** ¿La trayectoria que se describe es la misma que concluiste anteriormente?

Al desarrollar la actividad 2 el estudiante podrá verificar que su solución coincide o no con lo verá en el applet. Sería pertinente reflexionar sobre el caso del gato en la escalera cuando está en el punto medio de ella y que se trabajó en el tema de circunferencia y que validará también lo que en ese momento concluyo al respecto.

Comentarios finales.

Si bien se ha discutido la problemática actual que se tiene en el estudio de la geometría, por una periodo de tiempo ya considerable, creo que poco se ha hecho al respecto, ya que desde la búsqueda de trabajos precedentes, encontré muy pocos. Esto dio la pauta al planteamiento del problema, hipótesis y objetivos del trabajo que se desarrolló.

En cuanto a la hipótesis que se planteó, que en una idea sintetizada apunta, a que la mayoría de los alumnos de bachillerato no logran relacionar los conceptos de la Geometría Analítica con los conceptos de la Geometría Euclidiana, y que se cree que con la resolución de problemas que involucren el uso de diversos recursos didácticos se mejorará el aprendizaje de los contenidos del curso. No pudo ser validada, debido al carácter no experimental de la Propuesta Didáctica desarrollada que permitiera mediante resultados obtenidos de la aplicación en la práctica docente y así poder hacer un análisis al respecto.

Respecto a los objetivos que se plantearon al inicio del proyecto, puedo decir que el objetivo general se logró, ya que lo que se ve plasmado en los temas desarrollados en la propuesta didáctica. Cada tema expuesto en ella y que se estudia en el curso de Geometría Analítica involucra conceptos euclidianos, correspondiendo a los dos primeros objetivos particulares que se trazaron al inicio de la investigación.

El tercer objetivo particular que se quiso trabajar, tocante a la utilización de conceptos de Geometría Analítica en la resolución de problemas geométricos de la Geometría Euclidiana, se llevó a cabo en poca medida en el desarrollo de la propuesta, sin embargo en el anexo 2 de este escrito. Se encuentra un trabajo realizado para una publicación, en donde se desarrollaron 2 problemas con soluciones bajo ambos enfoques de la geometría, precisamente con el propósito de hacer notar que hay problemas que bajo un enfoque, ya sea Analítico o Euclidiano, puede resultar fácil o difícil dar solución a un problema matemático.

En la actualidad los docentes que nos encontramos en las aulas, debemos de innovar ideas y/o estrategias que contribuyan a que los conocimientos matemáticos no queden segmentados, como si entre ellos no hubiese alguna correlación.

Sigo con la convicción de que al momento de estudiar Geometría Analítica en cada tema se debe de iniciar con un referente hacia los conceptos de la Geometría Euclidiana, al ir construyendo los nuevos conceptos para lograr que los estudiantes los adquieran de una manera que les signifiquen más. Sin embargo, no resultó sencillo llevar a cabo este cometido en la formulación de las actividades e incluso en las explicaciones de los conceptos que se abordaron en la propuesta didáctica, ya que se enfrentó el reto de tratar de conectar ambos enfoques sin ir a ideas muy complejas.

Nuestros alumnos ya no responden a los contenidos que se presentan de una manera en la que el profesor sólo enlista, recita y explica una serie de teoremas y ejercicios, como suele hacerse. Por lo que considero importante que un profesor, debe de estar renovando e innovando estrategias que atraigan el interés de los estudiantes al momento de abordar un tema matemático, muchas veces esas innovaciones no se encuentran en los libros de texto, pero si son de utilidad para capturar nuevas ideas y mejorarlas en el ejercicio docente.

El trabajo matemático a través de la resolución de problemas, considero que favorece fuertemente el trabajo que se realiza en las aulas, ayudando a que los estudiantes desarrollen un pensamiento analítico y reflexivo, sobre lo que sabe y lo que puede lograr con este saber.

La propuesta didáctica que se desarrolló en este proyecto pretende dar pauta a que los docentes que tengan oportunidad de conocerla, puedan implementarla y adaptarla a sus contextos, a sus alumnos y no considerarla como absoluta.

Referencias bibliográficas.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática* (págs. 33-60). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamericana.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33-115.

Brousseau, G. (Abril de 2000). Educación y didactica de las matemáticas. *Educación y Matemática*, 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas (Traducción por Dilma Fregona)* (1ra ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chan Domínguez, J. B., y Uicab Ballote, G. R. (2015). Regla de los signos de la multiplicación: una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 125-152.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsoni.

Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. *Innovations in Science, Technology,Engineering and Mathematics LLearning and Teaching.*, 68-95.

Escuela de Bachilleres. Salvador Allende. (2010). Programa de Matemáticas IV. *Plan de Estudios PRE09*.

Gascón, J. (Febrero de 2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, 12-25.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M. R. (2013). La Ingeniería Didáctica como investigación basada en el diseño. *“Didactic engineering as design-based research in mathematics education”.* Turqía: CERME 8.

Henríquez Rivas, C., y Montoya Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 51-70.

Henríquez-Rivas, C., y Montoya-Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema*, 45-66.

Kuzniak, A. (2011). *L’espace de travail mathématique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg.

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 5-39.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.*, 237-251.

Robayo, B. J. (2011). Enseñanza de geometría escolar por medio de situaciones didácticas y calculadoras graficadoras. *XIII Conferencia intentamericana de educación matemática.* Recife, Brasil.

Santaló, L. (1961). Geometría analítica y Geometría Sintética. *Ciencia e Investigación*, 145-154.

Anexos

ANEXO 1

En este apartado se encuentran los contenidos desarrollados en la propuesta didáctica:

I. Distancia entre puntos
II. División de un segmento en una razón dada
III. Área de un polígono
IV. Circunferencia
V. Parábola
VI. Elipse

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

Problema introductorio. Se quiere mover un objeto pesado que se encuentra en una esquina del salón (punto A) y se quiere llevar al lado opuesto (punto B) como se puede apreciar en el diagrama. Pero debe llevarse por el camino más corto, tomando en cuenta que no hay obstáculos en ningún camino.

a) Determina cuál es ese camino.
b) Determinar cuál será la distancia que se debe recorrer por ese camino, tomando en cuenta que el salón que mide 5m de lado.
c) Representa el problema en Geogebra trazando segmentos y verifica tu resultado.

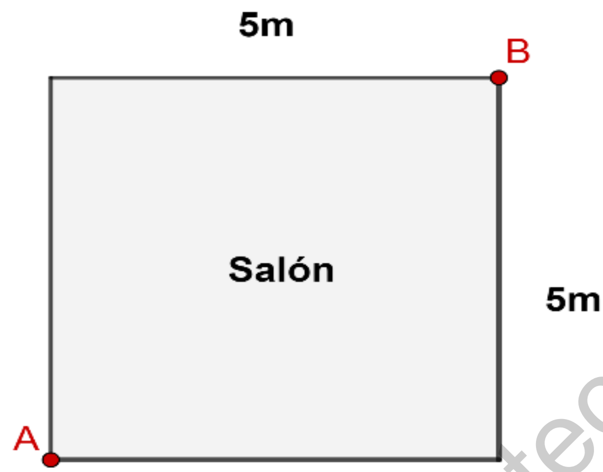

Figura 1. Representación gráfica del problema.

Actividad.

Ahora se busca una solución empleando un sistema de coordenadas, en donde el punto A puede estar o no en las coordenadas (0,0), como se ve en las figuras siguientes.

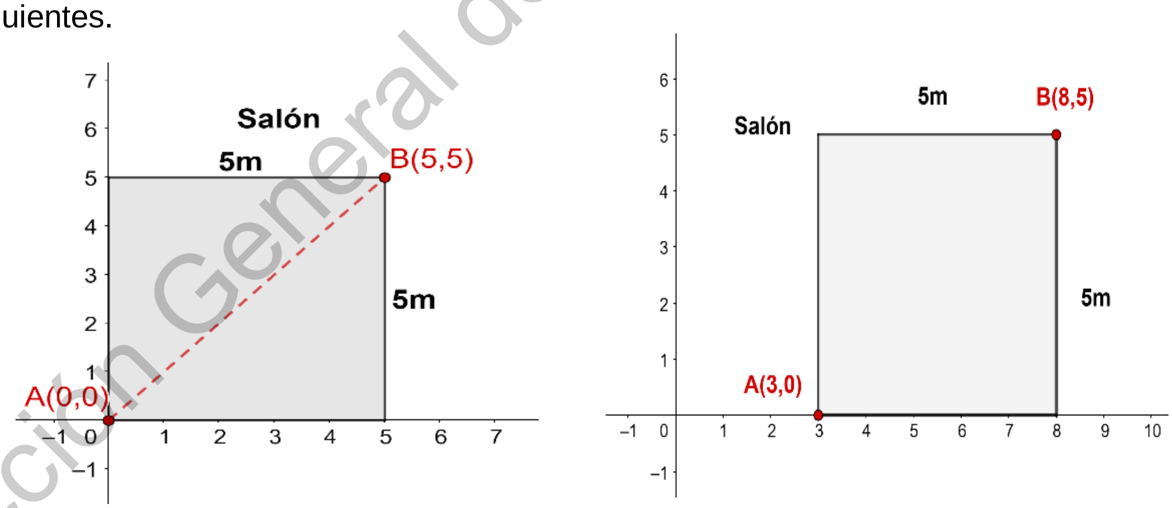

Figura 2. Representación del problema en los ejes coordenados.

De donde es claro ver que se puede seguir empleando el Teorema de Pitágoras, en donde los catetos del triángulo rectángulo ABC están determinados por $y_2 - y_1$y por $x_2 - x_1$, dado que el teorema enuncia que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos, se sigue que:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad (1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Así para el problema en particular que se está tratando, al colocar al punto A en las coordenadas (0,0) y al punto B en (5,5) la solución quedaría de la siguiente manera:

$$AB = \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2}$$

$$AB = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$$AB = \sqrt{50}$$

Obteniendo así la misma magnitud del segmento AB que ya se había calculado pero empleando un sistema de coordenadas.

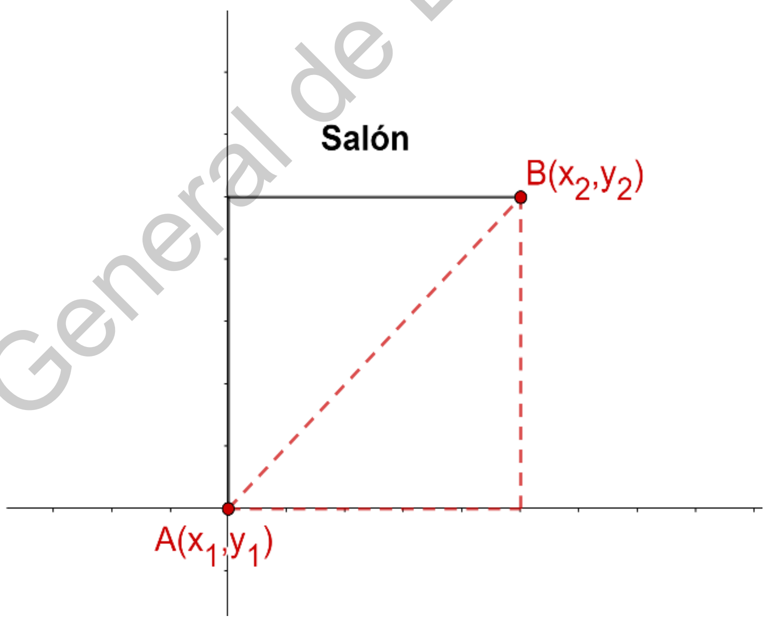

Figura 3. El problema con coordenadas en A y B.

Distancia entre dos puntos

Sea P_1P_2 el segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la distancia d la distancia entre ellos, como se ve en la Figura 4.

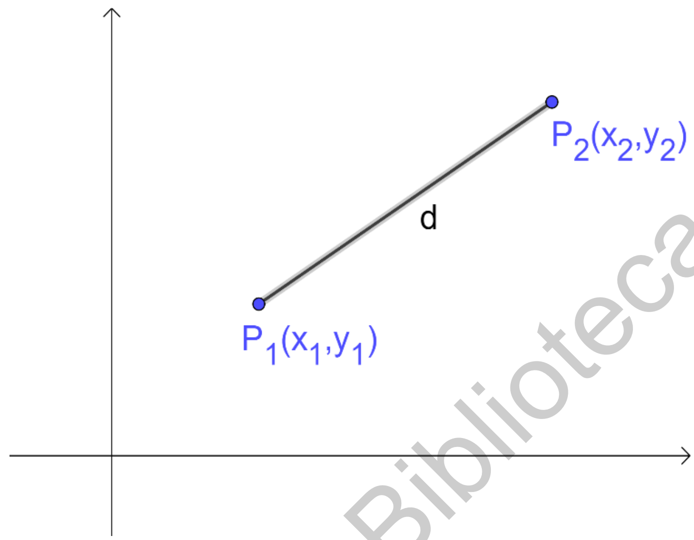

Figura 4. Distancia entre los puntos P_1P_2.

Si se trazan los segmentos paralelos a los ejes coordenados y que cortan en Q se tiene el triángulo rectángulo P_1P_2Q en donde los catetos están determinados por $y_2 - y_1$ y por $x_2 - x_1$, como se ve en la Figura 5:

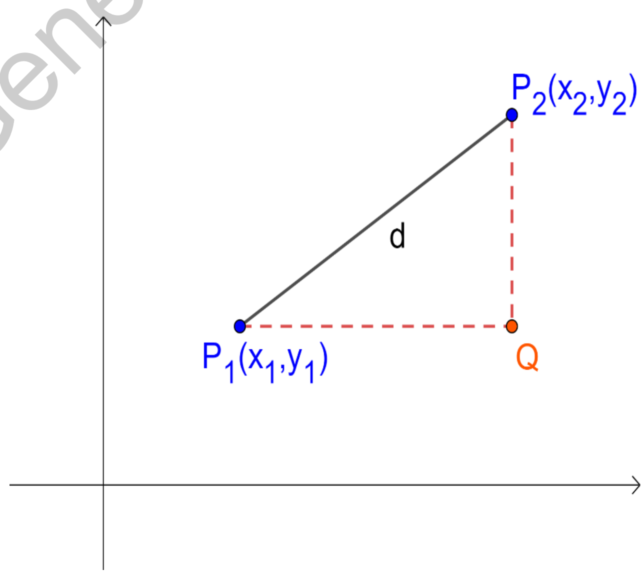

Figura 5. Triángulo rectángulo P_1P_2Q

Por Teorema de Pitágoras la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos, se sigue que

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

Lo que permite conocer la distancia entre puntos en un plano cartesiano.

Ejercicios y problemas

1. **Determina el perímetro de los polígonos a partir de sus vértices los cuales están dados en ese orden:**
   a) A(4,-3), B(7,4), C(-1,6) y D(-4, -1)
   b) A(0,-8), B(-8,0), C(0,8) y D(8,0)
   c) A(7,0), B(3,2), C(0,5), D(-2, 8) y E(-1,-4)
   d) A(-6,-9), B(2,-2), C(3,5), D(0, 9) y E(-3,5)

2. **Resuelve los siguientes problemas**
   a) Demuestra que el punto (-1,-2) es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos (4,-2), (-5,1) y (2,2). Traza su gráfica.
   b) Demuestra cuales de los siguientes triángulos es triángulo rectángulo:
      i. A(2,1), B(5,1) y C(5,4)
      ii. A(-2,2), B(6,2) y C(2,-2)
      iii. A(8,1), B(-4,2) y C(-2,-3)

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Problema introductorio. El señor José tiene dos hijos, Pedro y Juan, a los que quiere repartirles un terreno en forma de rectángulo, en partes iguales. Pero Pedro ha pedido se le deje su parte de terreno en forma rectangular como se muestra en la figura. Si se conoce que el largo del terreno quiere Pedro es $\frac{2}{3}$ del largo del terreno completo, determina:

a) ¿Dónde debe estar localizado el punto P, para que el área del terreno de Pedro sea la mitad del área total del terreno?

b) Con el resultado obtenido en el inciso anterior, realiza el cálculo del área del terreno de Pedro y verifica que sea la mitad del área total del terreno del Sr. José.

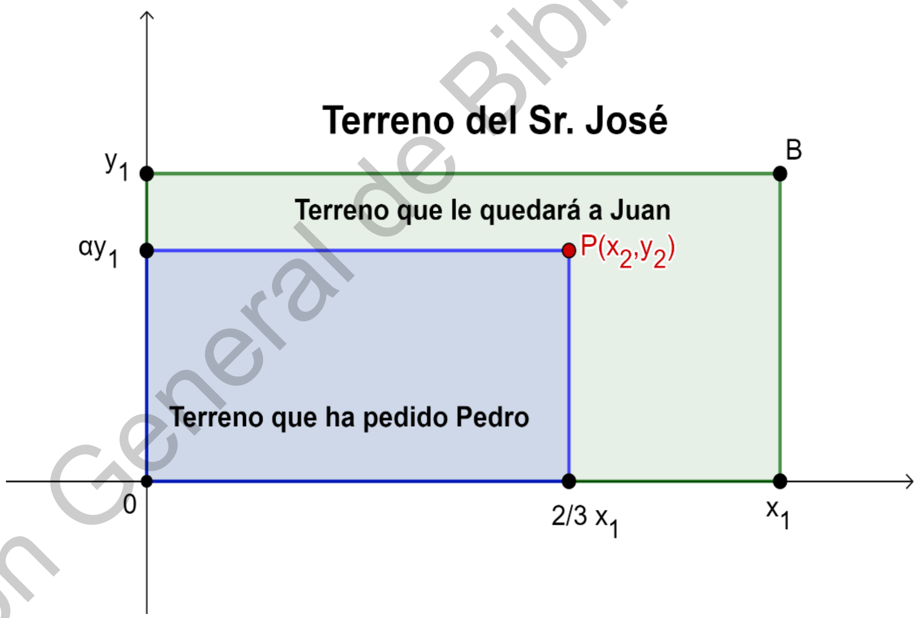

Figura 6. Representación gráfica del problema.

Si el problema se lleva a un sistema de coordenadas, de manera que el origen coincida con la esquina inferior izquierda y los lados del terreno sean paralelos a los ejes, obtenemos la siguiente representación gráfica: (Figura 7)

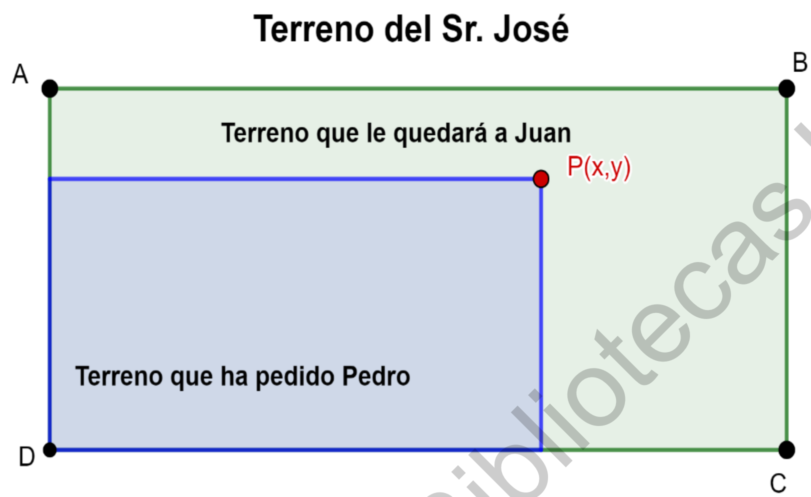

Figura 7. Representación del problema en un sistema de coordenadas

Si $\frac{2}{3}x_1 \cdot \alpha y_1 = \frac{1}{2}x_1 y_1$ (5)

Entonces $\alpha = \frac{3}{4}$

Esto significa que $y_2 = \frac{3}{4}y_1 = \frac{0+3y_1}{1+3}$

ya que $\frac{y_2-0}{y_1-y_2} = \frac{3}{1} = \boldsymbol{\lambda}$ (6)

Una vez que se encuentra $\boldsymbol{\lambda} = \frac{3}{1}$ se puede encontrar el punto $P(x_2, y_2)$ que determina que el área del terreno de Pedro sea la mitad y que tenga la forma rectangular que ha pedido.

Si se asignan valores a las dimensiones del terreno del Sr. José, se puede comprobar que se obtiene lo que el problema plantea.

Actividad. Aplicar la solución encontrada en el problema introductorio empleando las dimensiones del terreno $Largo = 90m \ y \ Ancho = 40m$ (Figura 8).

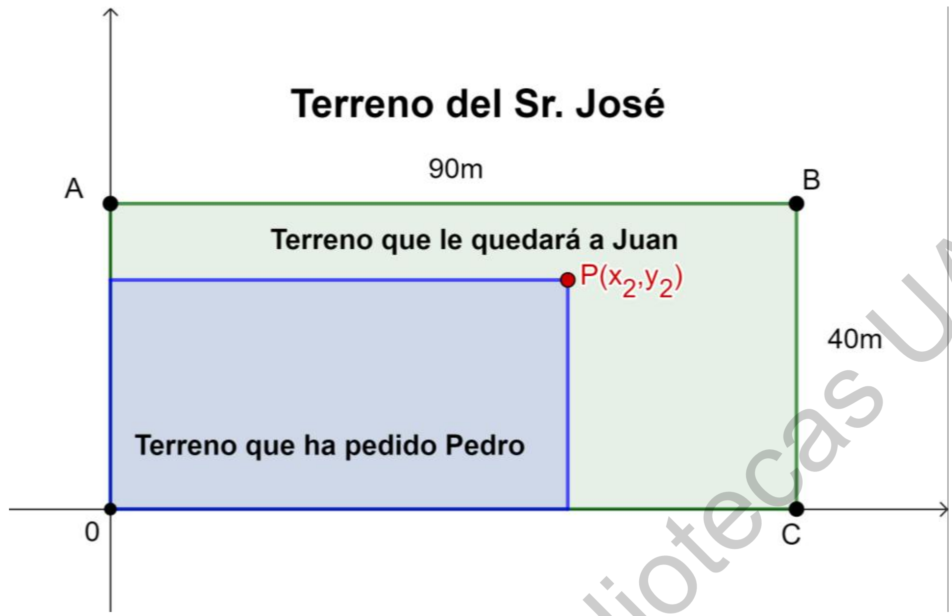

Figura 8. Representación gráfica del problema.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto P, para que el área del terreno de Pedro sea la mitad del área total del terreno?

b) Con el resultado obtenido en el inciso anterior, realiza el cálculo del área del terreno de Pedro y verifica que sea la mitad del área total del terreno del Sr. José.

La generalizando de lo anterior, se puede analizar como se enuncia enseguida:

Sean P_1 y P_2 los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto P, divide al segmento P_1P_2 en dos partes proporcionales se define como

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}. \qquad (7)$$

Se tiene los triángulos PQP_1 y P_2RP son semejantes, entonces r queda definida por (Figura 9):

$$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \qquad (8)$$

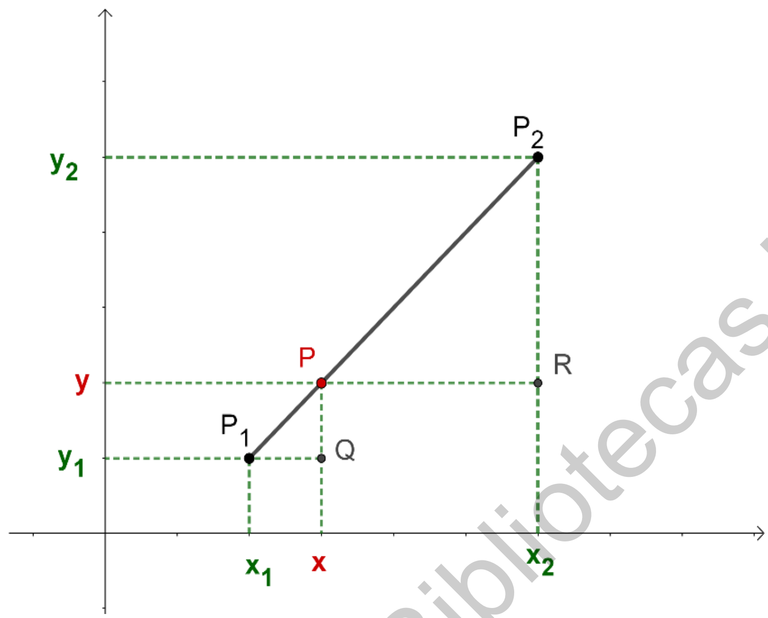

Figura 9. Triángulos semejantes PQP_1 *y* P_2RP.

De donde se sigue que las coordenadas del punto $P(x, y)$ están determinadas por:

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \quad y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r} \tag{9}$$

Cuando $P(x, y)$ está en el segmento P_1P_2, la razón es positiva $(r›0)$, (Figura 10):

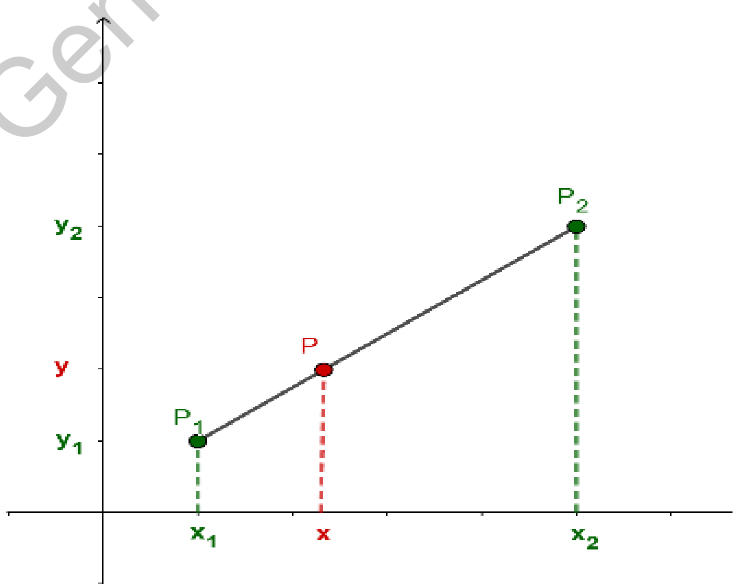

Figura 10. Cuando el punto P está en el segmento P_1P_2.

Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento P_1P_2, la razón es negativa ($r‹0$), (Figura 11):

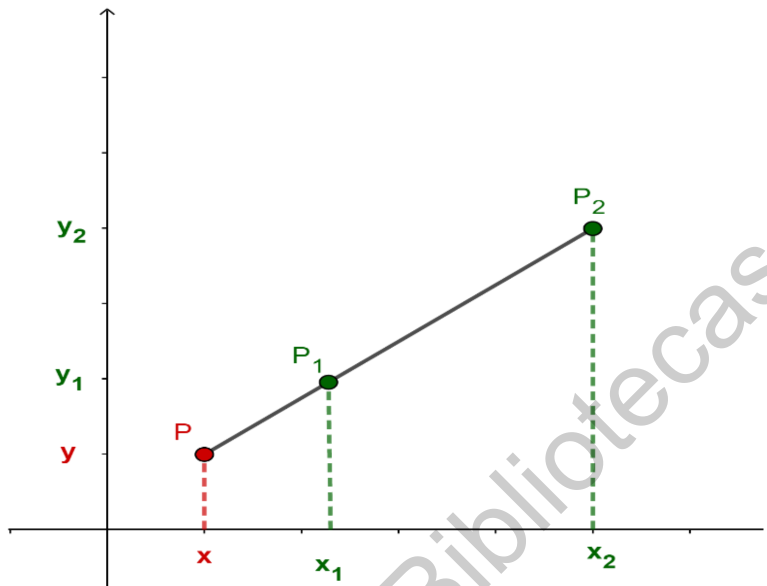

Figura 11. Cuando el punto P está fuera del segmento P_1P_2.

Ejercicios y problemas

1. Dados los puntos, determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento en la razón que se indica en cada inciso y verifica gráficamente que corresponda a tu resultado:
   - **a.** A(4,-3), B(1,4) y la distancia de PA es el triple de la que existe de P a B.
   - **b.** C(5,3), D(-3,-3) y la distancia de PC es el doble de la que existe de P a D.
   - **c.** E(-2,-1), F(4,5) y la distancia de PE sea $\frac{2}{3}$ de la distancia P a F.
   - **d.** G(4,-1), H(-8,2) y la distancia de PG sea $\frac{1}{4}$ de la distancia P a H.
2. El punto (6, 2) divide al segmento P_1P_2 en la razón $r = \frac{3}{2}$ determina las coordenadas de $P_2(x_2, y_2)$ si $P_1(2,4)$.
3. Dados los puntos A(-1,2) y B(3,-3) obtén las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está colocado fuera del segmento AB y se encuentra a una distancia 3 veces mayor a A que a B.
4. Conociendo que el centro de gravedad de un triángulo es el punto que divide cada una de las medianas (segmento que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto) en la razón 2, contando a partir de los vértices.

Calcular las coordenadas del centro de gravedad si los vértices son $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)\ y\ C(x_3, y_3)$.

5. Dado un cuadrilátero, se define la mediana para un vértice dado, como el segmento que une a ese vértice con el centro de gravedad que determinan los otros 3 vértices. El centroide del cuadrilátero se define como el punto de intersección de las 4 medianas y divide a éstas en la razón 3:1 contando a partir de los vértices. Si $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)\ y\ D(x_4, y_4)$, calcular las coordenadas del centroide del cuadrilátero.

ÁREA DE UN POLÍGONO

<u>Actividad introductoria.</u> Se quiere conocer el área de ciertos espacios de un terreno en donde se quieren crear espacios de recreación. Determina estás áreas si se conocen las coordenadas de sus vértices, como se muestra en la Figura 12:

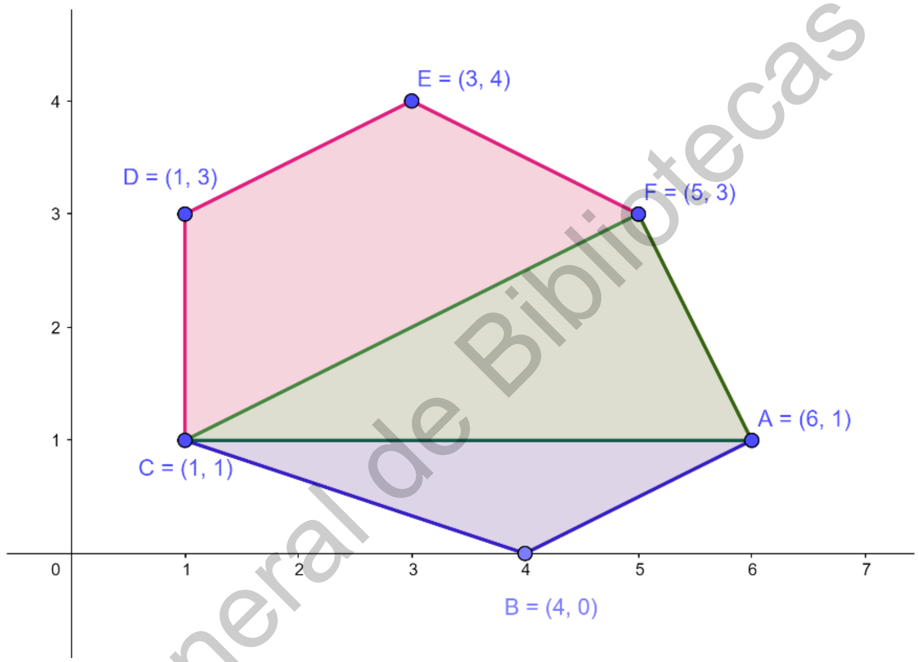

Figura 12. Representación gráfica del problema

Si para obtener el área de un trapecio cuyos vértices son los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)\ y\ P_4(x_4, y_4)$ para el cual su área se determina por $A = \frac{1}{2}(L + l)h$ es decir:

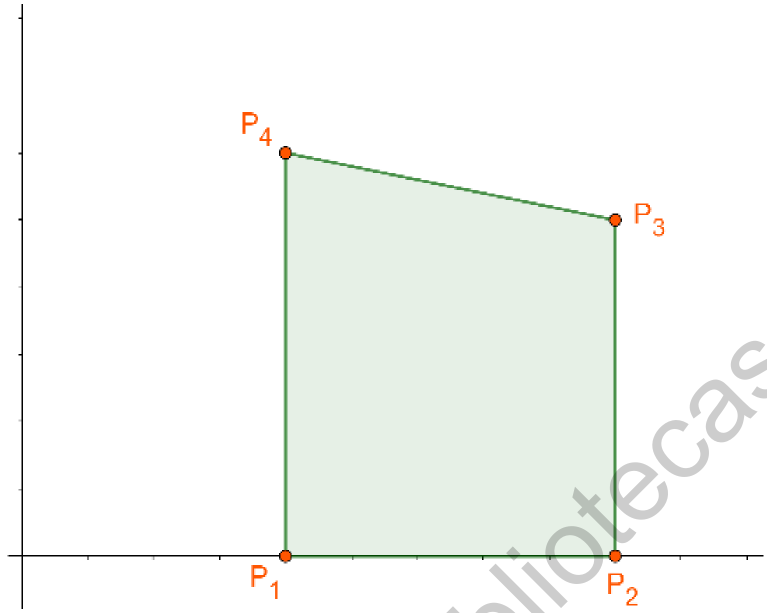

Figura 13. Trapecio en un sistema de coordenadas

$$A = \frac{1}{2}(P_1P_4 + P_2P_3) \cdot P_1P_2 \quad (10)$$

de donde se tiene que $P_1P_4 = y_4$, $P_2P_3 = y_3$ y $P_1P_2 = x_2 - x_1$ (11)

sustituyendo se tiene

$$A = \frac{1}{2}(y_4 + y_3) \cdot (x_2 - x_1)$$

$$A = \frac{1}{2}(x_2y_4 + x_2y_3 - x_1y_4 - x_1y_3) \quad (12)$$

Actividad. Realizar lo que se pide en cada punto que se enlista enseguida:

1. En GeoGebra representar el polígono ABCDEF.
2. Ahora trazar los polígonos como se muestra en la Figura 14.
3. Tomando en cuenta la solución propuesta al problema de la Actividad introductoria, ¿qué tendría que volverse hacer para llegar determinar el área empleando la misma secuencia?

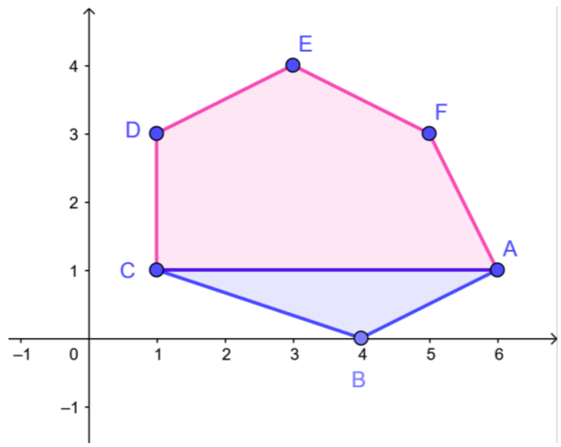

Figura 14. Representación gráfica del problema

Área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus vértices

El área del triángulo ABC cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)\ y\ C(x_3, y_3)$ puede conocerse si se proyectan segmentos de recta que van desde sus vértices hasta el eje de las abscisas y de esta manera poder obtener 3 trapecios, ABED, ACFD y BEFC

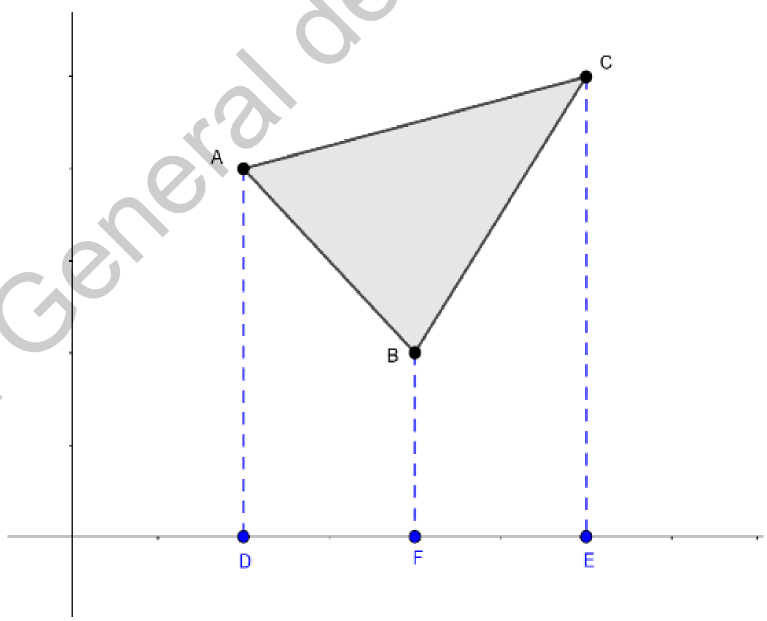

Figura 15. Triángulo en un sistema de coordenadas

de los cuales se puede obtener su área y por tanto poder determinar el área del triángulo, como:

$$|ABC| = |ACED| - [|ABFD| + |BFEC|] \tag{13}$$

Conociendo que el área de un trapecio se obtiene a partir de $\frac{(L+l)h}{2}$, se sigue que

$$|ABC| = \frac{(y_3+y_1)(x_3-x_1)}{2} - \left[\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2} + \frac{(y_3+y_2)(x_3-x_2)}{2}\right] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}[(x_3y_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1) - (x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2) - (x_3y_3 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[x_3y_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_1 - x_2y_2 + x_1y_2 - x_3y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_2]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1]\ . \tag{15}$$

Si denotamos el producto anterior como:

$$[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

entonces el área queda expresada como:

$$|ABC| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

Una vez que se puede calcular el área de un trapecio de una manera en la que es sencillo determinar el lado mayor, el lado menor y su altura a partir de las coordenadas de los puntos. Ahora podría determinarse el área de un triángulo.

Cálculo de área de un polígono conociendo las coordenadas de sus vértices

Dados los vértices de un polígono P_1, P_2, P_3,…,P_n, su área está determinada por la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan trazar en él desde un sólo vértice.

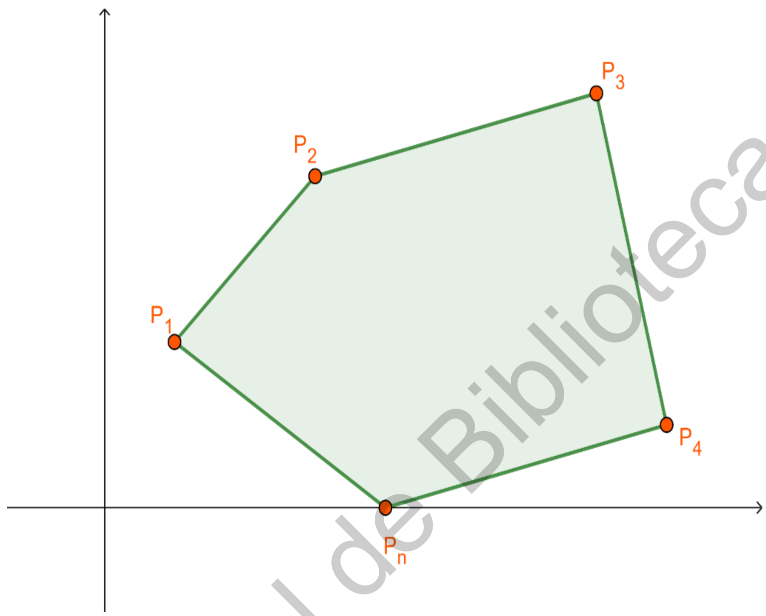

Figura 16. Polígono en un sistema de coordenadas

Lo cual se reduce a la siguiente expresión definido como:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

Cabe señalar que el signo resultado dependerá del sentido en el que se consideren los vértices del polígono. Si se toman en sentido de las manecillas del reloj será negativo y si se toman en sentido contrario a las manecillas del reloj el resultado será positivo.

Ejercicios y problemas

1. Traza el polígono y calcula el área considerando los vértices en el orden mostrado. Observa el signo obtenido en cada caso.
    - **a)** A(-6,0), B(-3,7), C(1,2) y D(0,-5)
    - **b)** A(0,-5), B(1,2), C(-3,7) y D(-6,0)
    - **c)** A(8,0), B(5,-4), C(1,-6) y D(-4, 1)
    - **d)** A(3,3), B(-3,3), C(-3,-3) y D(3,-3)
    - **e)** A(2,0), B(5,2), C(5,5), D(2, 8) y E(-1,4)
    - **f)** A(-6,-9), B(0,-2), C(3,5), D(0, 10) y E(-3,5)

2. Los vértices de un triángulo son A(1,4), B(x,5), C(8,-3) y su área es de 14 unidades cuadradas. Calcula la abscisa del punto B.

CIRCUNFERENCIA

Problema introductorio. Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso, ¿qué curva describe la posición del gato?

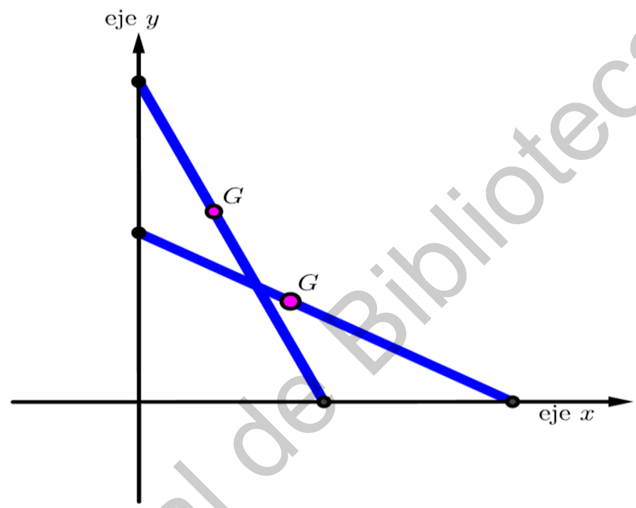

Figura 17. Representación del Gato en la escalera en el plano cartesiano

El caso cuando el gato se encuentra parado sobre el peldaño exactamente a la mitad de la escalera, se puede resolver de manera sencilla usando ideas de Geometría Euclidiana. Como G es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo △OAB, tenemos que el centro de su circunferencia circunscrita es G, entonces se cumple:

$$\mathrm{GA} = \mathrm{GB} = \mathrm{GO} \tag{19}$$

Es decir, los triángulos △AOG y △BOG son isósceles. De esto se obtiene que:

$$OG = \frac{1}{2}AB \tag{20}$$

Es decir, la distancia desde G hasta O es siempre una constante.

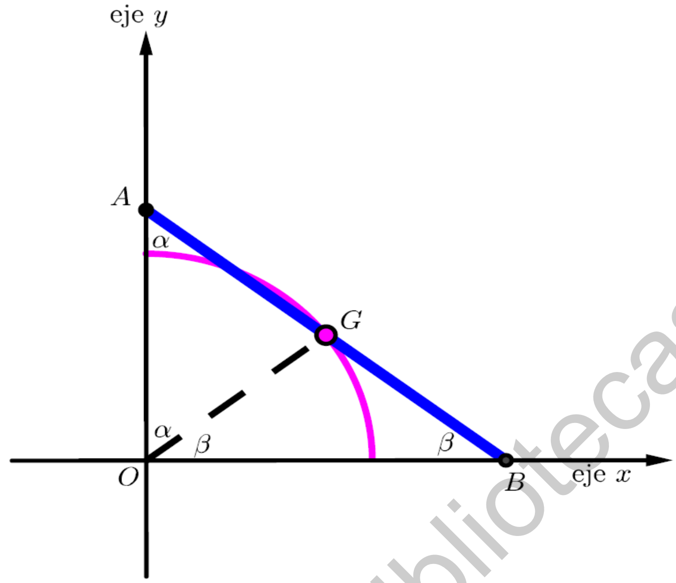

Figura 18. Arco de circunferencia descrita por el Gato en la escalera

Podemos notar que la curva que describe la posición del gato en el problema introductorio, es parte de una circunferencia.

Actividad. Construir el problema de la actividad 1, el gato en la escalera, si el gato se encuentra a la mitad de ella y no se mueve de ahí.

a) Sobre una hoja dibuja un punto O, usa un hilo que represente a el segmento OG y en un extremo fija un color, pluma, lápiz, etc. Que represente al punto G.
Mueve el lápiz para que vaya dibujando la trayectoria que describe el movimiento del gato.

b) Contesta:

- ¿Qué forma tiene la trayectoria descrita por el gato?
- Si el gato no estuviese a la mitad de la escalera, ¿Cambiaría la forma de su trayectoria. Escribe tus conclusiones de lo que observas.

El caso general es muy difícil de resolver utilizando sólo ideas de Geometría Euclidiana. En este caso, vemos que la solución es muy simple si introduce el sistema Cartesiano de coordenadas y resolvemos el problema en forma paramétrica.

La circunferencia como lugar geométrico

La circunferencia como lugar geométrico se define como el conjunto de puntos $P(x, y)$ en un plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro. Dicha distancia es el radio de la circunferencia.

Sea el punto $C(0,0)$ el centro y $P(x, y)$ un punto de la circunferencia, se tiene el segmento $PC = r$, se sigue:

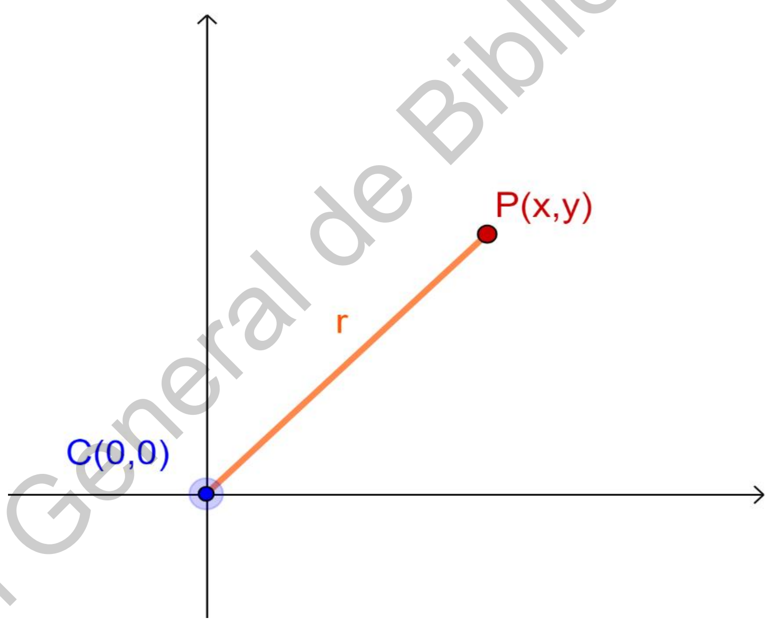

Figura 19. Segmento CP

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \qquad (21)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (22)$$

Ecuación ordinaria de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia es $C(h, k)$ y su radio es r, entonces su ecuación en su forma ordinaria queda definida como:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{23}$$

Ecuación general de la circunferencia

Esta forma de expresar la ecuación de la circunferencia resulta de desarrollar los binomios de la ecuación en su forma ordinaria.

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{24}$$

Ejercicios y problemas

1. Determina la ecuación de la circunferencia, si es tangente a la recta x-y+3=0 en el punto (2,5) y cuyo centro está en la recta x+2y-5=0
2. Una circunferencia tiene su centro en (2,3) y es tangente a la recta 3x+4y-25=0. Determina el radio de la circunferencia.
3. Determina la ecuación general de la circunferencia con centro en C(-4,3) y es tangente a la recta $3x+2y=4$. Traza su gráfica.
4. Una circunferencia tiene su centro en el eje Y y pasa por los puntos A(6,-2) y B(-4,7). Obtén su ecuación general y traza su gráfica.
5. Determina la ecuación general de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $5x+y=2$ y $5x-2y=8$ y es tangente a la recta $4x+2y=6$

INTRODUCCIÓN

¿Cómo es el conjunto de puntos P tales que la razón de la distancia desde P hasta un punto fijo F y la distancia hasta una recta fija, es una constante e?

En otras palabras, $\frac{PF}{PM} = e$ (25)

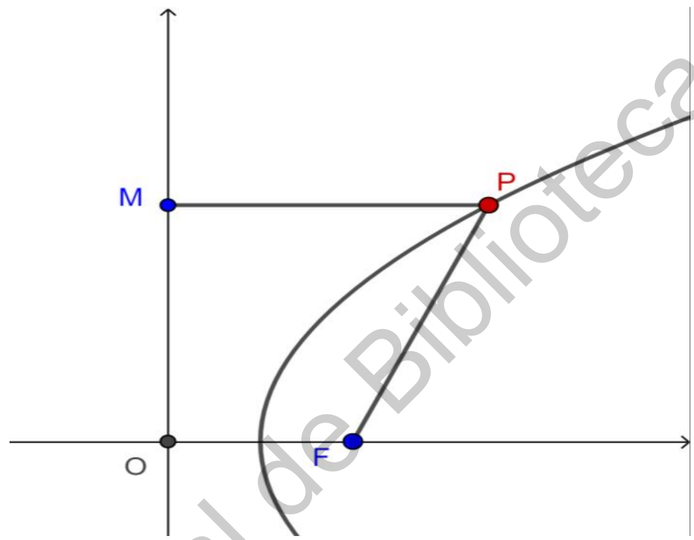

Figura 20. Distancias PF y PM

Si $e = 1$, al conjunto de puntos P se le conoce como Parábola; si $e < 1$ al conjunto de puntos se le conoce como Elipse y si $e > 1$ se le conoce como Hipérbola.

PARÁBOLA cuando $e = 1$

Sea O la proyección de F sobre la recta fija l y sea A el punto medio de FO. Si $AO = AF = a$ y las coordenadas de P son (x, y), entonces como $PM = PF$ tenemos que $PM^2 = PF^2 = PN^2 + FN^2$. (26)

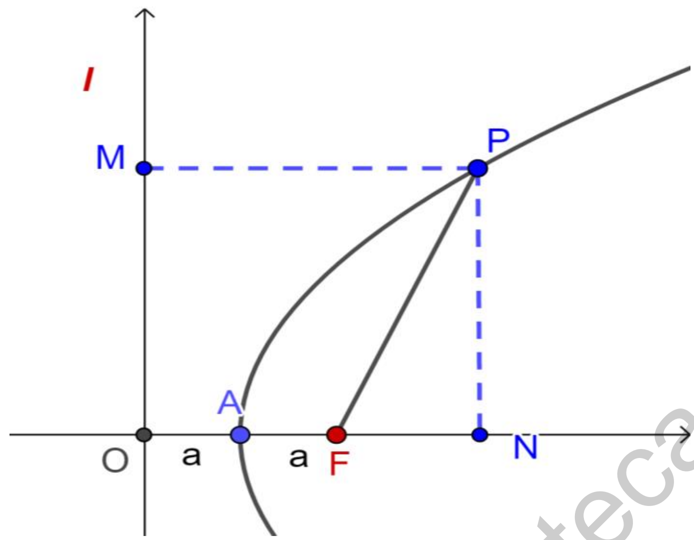

Figura 21. Excentricidad igual 1

Tenemos que $x^2 = y^2 + (x - 2a)^2$ (27)
entonces $y^2 = -(x - 2a)^2 + x^2$

$$y^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + x^2$$

$$y^2 = 4a(x - a) \quad (28)$$

Al punto A se le conoce como vértice de la parábola y al punto F se le llama foco. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado $foco$ y de una recta llamada $directriz$.

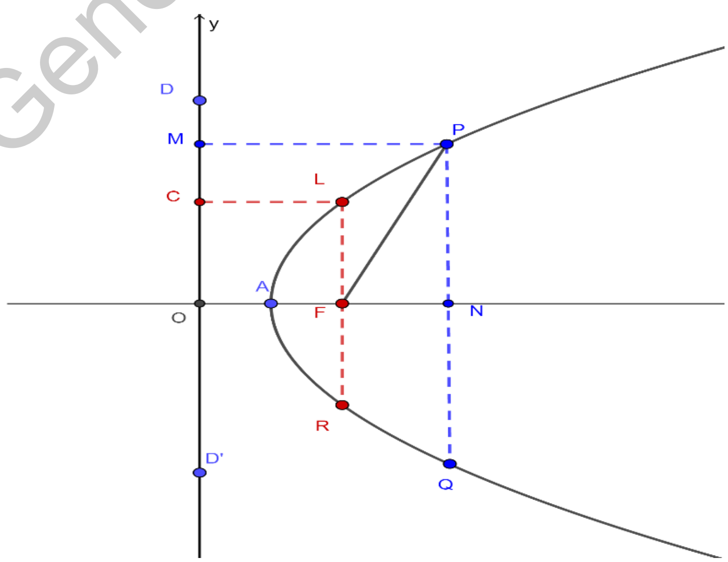

Figura 22. La Parábola

Actividad 1. Resuelve el siguiente problema

Se quiere diseñar una estufa que funcione con luz solar. La forma de la estufa es como un tazón y se quiere diseñar de manera que los rayos de la luz reboten siempre hacia un mismo punto, como se ejemplifica en la Figura 23.

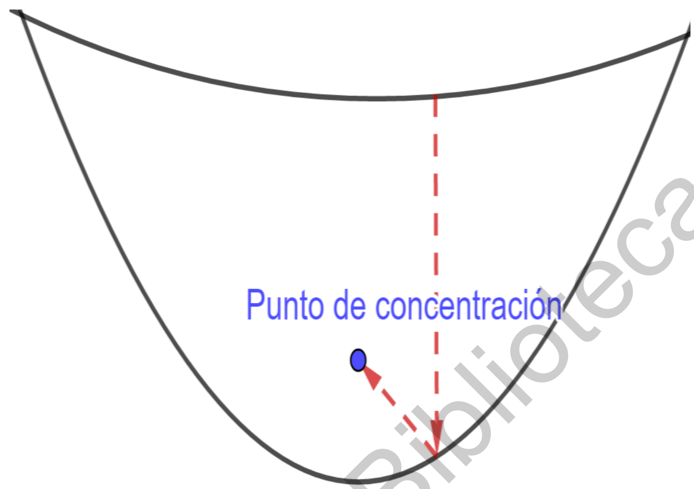

Figura 23. Estufa solar

¿Cómo debe ser la sección transversal de la estufa?

Propiedad Óptica de la Parábola

Veremos que los rayos de luz que son paralelos a la línea FA rebotan en la parábola hacia el foco F.

Sea entonces, F el foco de la parabola que pasa por el punto A, el punto B una proyección de A y P un punto de la parabola con proyección en C.

(Figura 24)

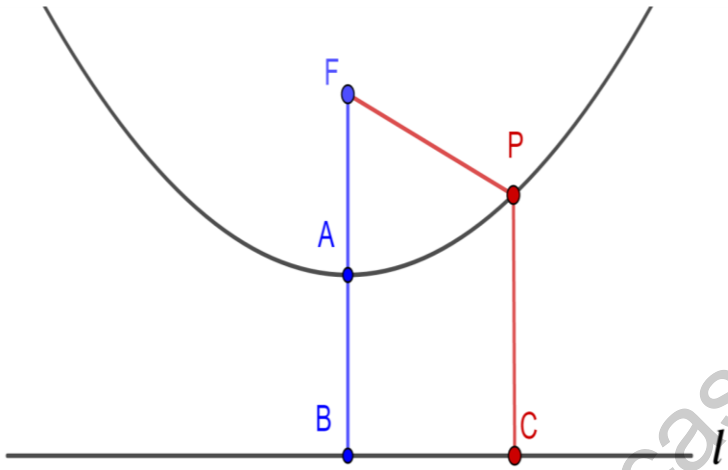

Figura 24. Empleando propiedad óptica de la parábola

Sea l_1 la bisectriz del ángulo FPC, veamos que l_1 es tangente a la parabola en P. De no ser así, supongamos que l_1 corta a la parábola de nuevo en Q, como puede observarse en la Figura 25.

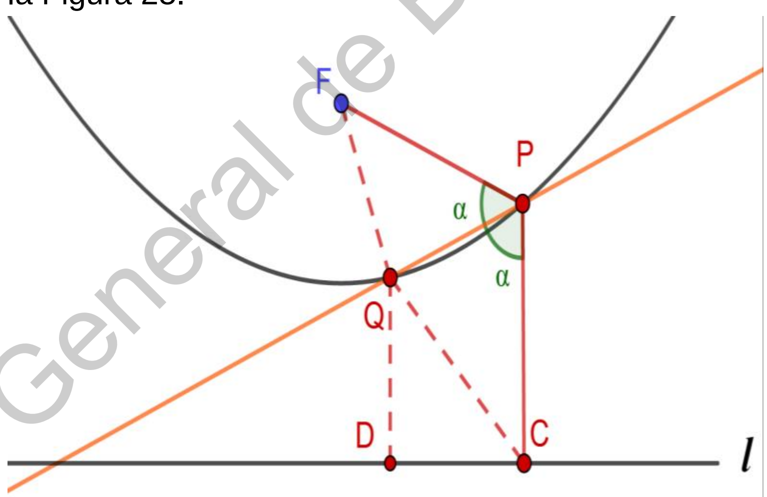

Figura 25. Empleando propiedad óptica de la parábola

Por definición de la parábola se tiene que $FQ = QD$, donde D es la proyección de Q sobre la directriz.

Observemos que $FP = PC, PQ = PQ$ y $FPQ = CPQ = \alpha$, entonces por el criterio de congruencia lal tenemos que loa triángulos $FPQ \cong CPQ$ lo que implica que $FQ = QC$. Se sigue que $QC = QD$, pero QC es la hipotenusa del triángulo rectángulo QDC, por lo que QC no puede ser igual a QD y por lo tanto l_1 es tangente a la parábola en el punto P.

Si prolongamos CP, más allá del punto P, obtenemos una línea paralela a FA, además el ángulo entre esta línea y l_1 es opuesto por el vértice al ángulo entre l_1 y el segmento PC.

De aquí se ve que la línea PC rebota en la parábola hacia F.

Con todo esto, se puede ver que la sección transversal de nuestra estufa solar debe ser una parábola con foco en F y el segmento FA debe ser paralelo a los rayos de luz.

Actividad 2. Realiza las siguientes actividades

1. Con ayuda de GeoGebra crear un programa que dibuje una parábola sin usar la herramienta del software que ya lo hace.
2. Describe y explica cada paso necesario en la construcción del programa resultante.

Ejercicios y problemas

1. Determina la ecuación ordinaria y la ecuación general de la parábola con vértice en el origen, pasa por el punto P(-4,-1) y su eje focal es el eje *x*. Traza su gráfica
2. Obtén la ecuación ordinaria, la ecuación general, las coordenadas del foco, el ancho focal y la gráfica de las siguientes parábolas con vértice en el origen, a partir de su directriz.
   a. Ecuación de la directriz $-3x - 12 = 0$
   b. Ecuación de la directriz $-4y + 10 = 0$
3. La ecuación $x - 3 = 0$ es el eje focal de una parábola que pasa por el punto L(6,5) y su foco está en F(3,5). Determina la ecuación general de la parábola.
4. Obtén la ecuación general y la gráfica de la parábola cuya directriz es $y + 2 = 0$ y su foco está en F(7,3).
5. Determina la ecuación general y la gráfica de la parábola con directriz $y + 5 = 0$ y vértice en V(1,-3).
6. Determina la ecuación general de la parábola cuyo foco es el punto (3,-2) y su vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$.
7. Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice es el punto (5,2) y su foco es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.
8. Traza la gráfica de la parábola $4y^2 + 2x - 8y - 12 = 0$ a partir de su Vértice, su directriz y su foco.

ELIPSE cuando $e < 1$

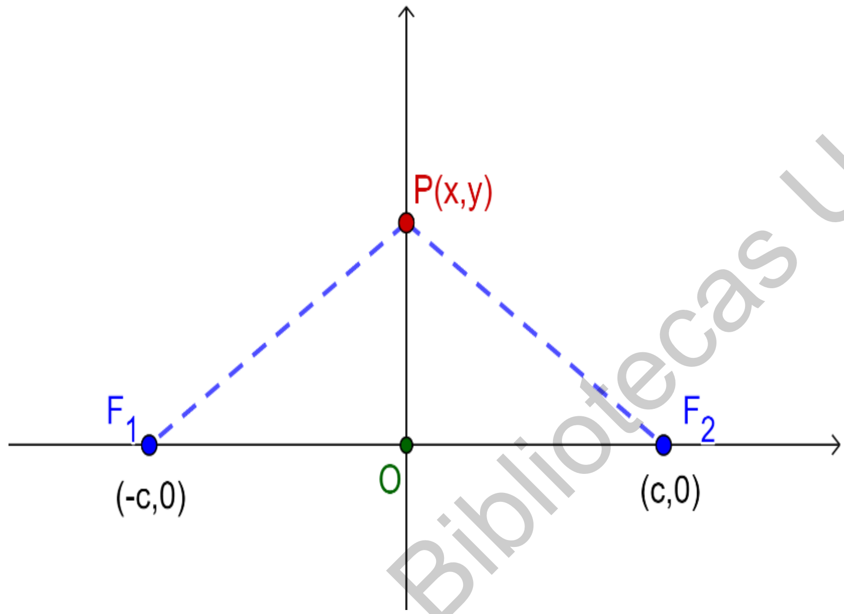

Figura 26. Un punto P de la Elipse.

Por Teorema de Pitágoras $PF_1 + PF_2 = 2a$ (29)

Tenemos que $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ (30)

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)} = \frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)} = 1 \tag{31}$$

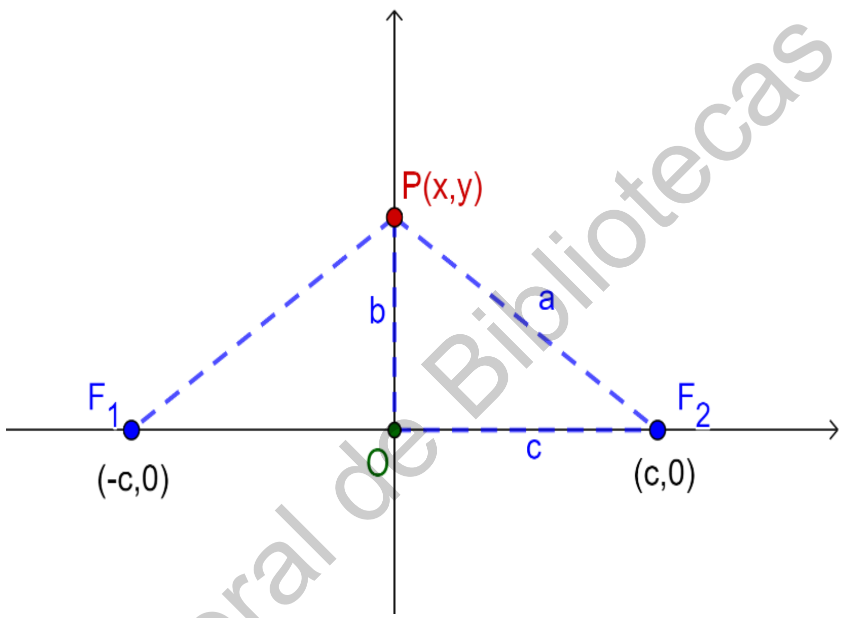

Figura 27. Segmentos a,b,c.

y como $b^2 = a^2 - c^2$

entonces $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (32)

Ecuación de la elipse con centro en el origen.

La elipse es el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ el cual se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados $focos$, siempre es una constante.

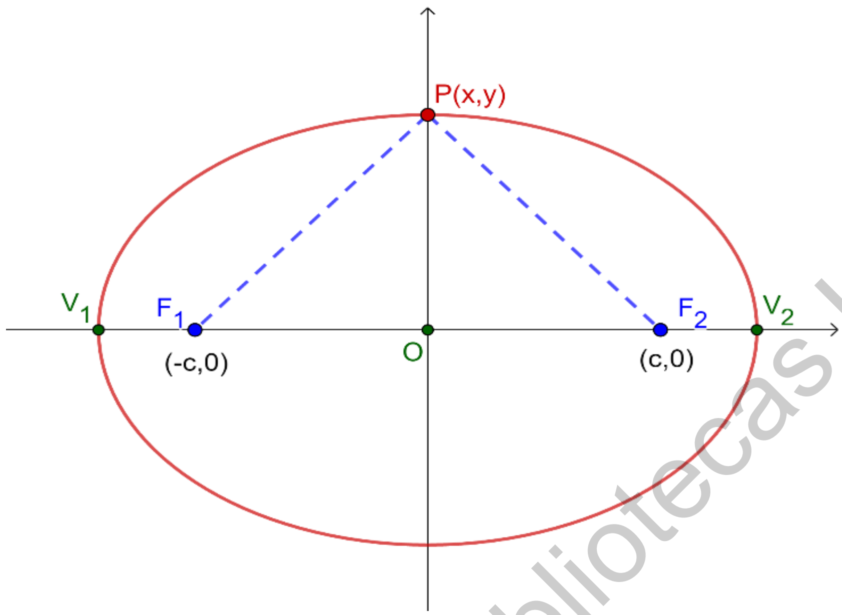

Figura 28. Elipse con centro en el origen.

Actividad 1. Retomando el problema del gato en la escalera.

Problema. Un gato está parado sobre un peldaño de una escalera. Si la escalera resbala de manera que uno de sus extremos siempre está deslizándose por la pared y el otro extremo se desliza por el piso, ver Figura 29, ¿qué curva describe la posición del gato? Si el gato no está a la mitad de la escalera.

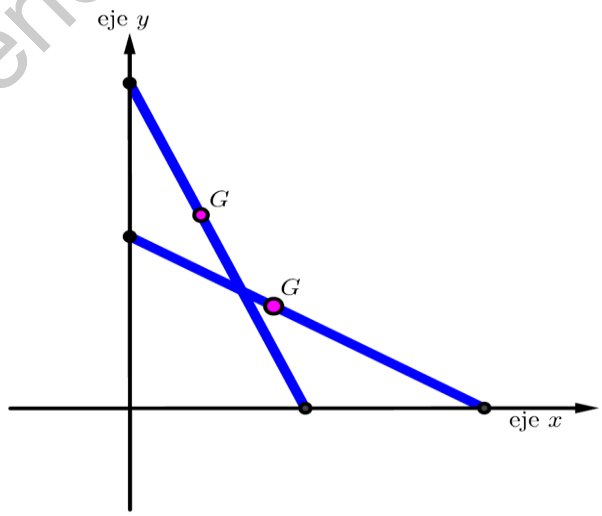

Figura 29. Representación del Gato en la escalera en el plano cartesiano

Se presenta una solución bajo la perspectiva de la geometría analítica, que permite resolver el problema para el caso general, en el que se considera que el punto en el que está el gato sobre la escalera ya no es el punto medio de esta.

Sea α el ángulo que forma la escalera con la pared. Supongamos que el origen es el punto donde se encuentra la línea de la pared y la línea del piso y que los ejes de coordenadas coinciden con esas líneas. Denotemos las coordenadas del punto G como $x(\alpha)$ y $y(\alpha)$ y denotemos las longitudes constantes AG y GB con a y b, respectivamente.

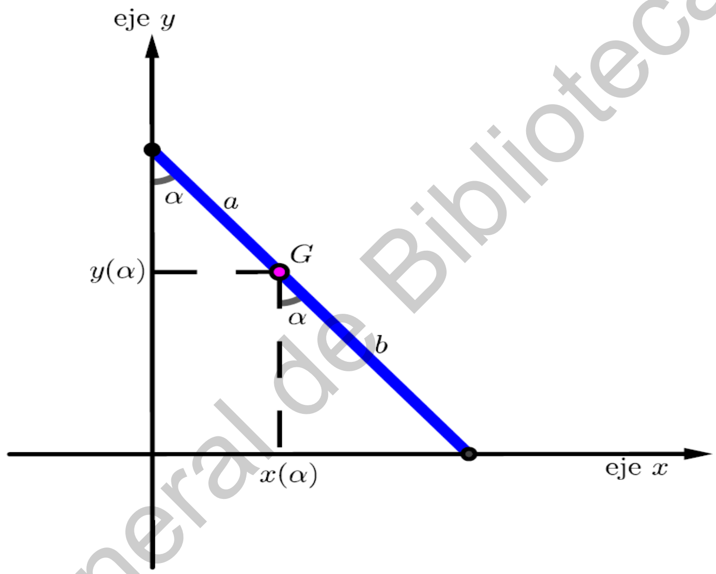

Figura 30. Representación gráfica del problema en el plano cartesiano.

Es fácil ver que

$$\frac{x(\alpha)}{a} = sen\ \alpha \qquad (33)$$

$$\frac{y(\alpha)}{b} = cos\ \alpha \qquad (34)$$

Por la identidad Pitagórica se tiene que

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

De donde se sigue que,

$$\frac{x(\alpha)^2}{a^2} + \frac{y(\alpha)^2}{b^2} = 1 \qquad (35)$$

Lo que resulta es la ecuación de una elipse centrada en el origen y con semiejes de longitudes a y b, por lo tanto el lugar geométrico descrito por el gato es un arco de elipse.

Actividad.

En GeoGebra genera un applet que dibuje la trayectoria que describe el problema del gato en la escalera. Considerando que el gato pueda estar en cualquier punto sobre ella**.** ¿La trayectoria que se describe es la misma que concluiste anteriormente?

Ejercicios y problemas

1. Dada la ecuación de la elipse determina su gráfica con todos sus elementos:

a) $4x^2 + 3y^2 - 40x - 6y + 55 = 0$.
b) $3x^2 + 4y^2 + 6x - 16y - 29 = 0$

2. Obtén la ecuación ordinaria y la general para las elipses, a partir de los elementos dados:

a) Vértices en (3,4), (13,4) y Focos en (6,4), (10,4)
b) Centro en (5,7), $LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{\sqrt{8}}{3}$ y eje focal paralelo al eje x.

3. Determina la ecuación el lugar geométrico de los puntos que cumplen que la suma de las distancias a los puntos fijos (-1,2) y (3,2) es siempre 12.

4. Determina el lugar geométrico que describe un punto P(x,y) que está a la misma distancia de un punto fijo (4,2) y de la recta $x + 3 = 0$.

5. Si graficarás las ecuaciones que encontraste en el ejercicio IX y X ¿qué figuras geométricas deberías ver? Explica

ANEXO 2

En este apartado se presentan tres problemas con su solución mediante geometría sintética y geometría analítica, en las que se muestra, como es que ambos enfoques pueden resolver un mismo problema, sin contraponerse en la resolución, simplemente cada una da una solución de acuerdo a sus técnicas y conceptos elementales.

Con esto se da evidencia de que al querer emplear las ideas intuitivas que sugiere la geometría sintética, puede no ser tan sencillo de lograr llegar a lo que se pide probar en cada uno de los problemas, sin embargo al ser planteados en un plano cartesiano y ver el problema con coordenadas y haciendo uso del álgebra, es decir, empleando las técnicas de la geometría analítica, resulta más sencillo de lograr obtener la respuesta solicitada en cada problema. A continuación se enuncian los problemas y se muestran ambas soluciones paso a paso.

Problema 1. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y sea D el pie de altura desde A. Sea E la proyección de D sobre AC y sea M el punto medio de DE. Entonces se cumple que AM es perpendicular a BE

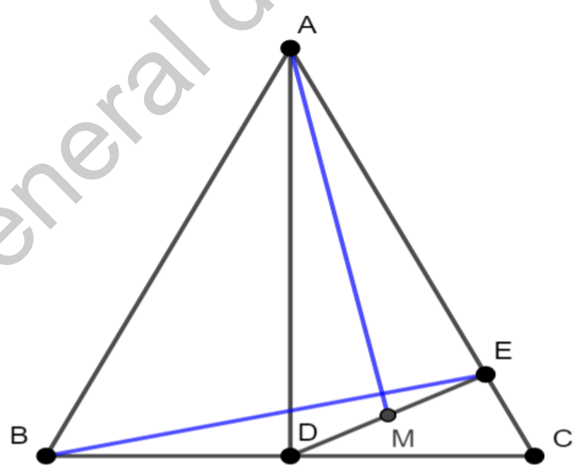

Figura 1. Representación gráfica del problema 1.

Solución sintética. Sea N el punto medio de BD y se traza las línea MN y AN, por el teorema de Tales tenemos que MN∥BE.

Y también podemos observar que △ABD es semejante al △ADE ya que ambos son triángulos rectángulos y $\measuredangle \mathrm{BAD} = \measuredangle \mathrm{DAE} = \alpha$. (1)

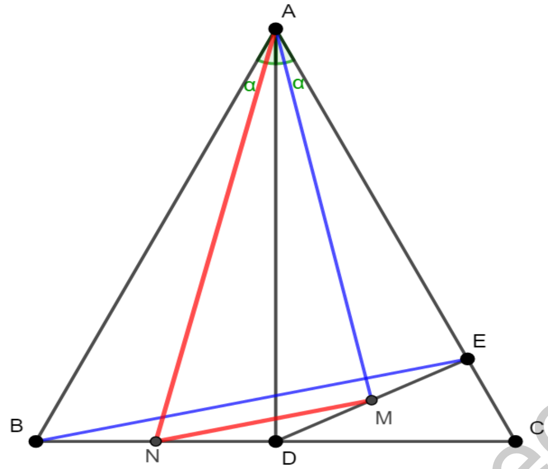

Figura 2. Aplicando Teorema de Tales.

Como N y M son puntos medios de los catetos correspondientes BD y DE, tenemos que:

$\measuredangle \mathrm{NAD} = \measuredangle \mathrm{MAD} = \theta$ (2)

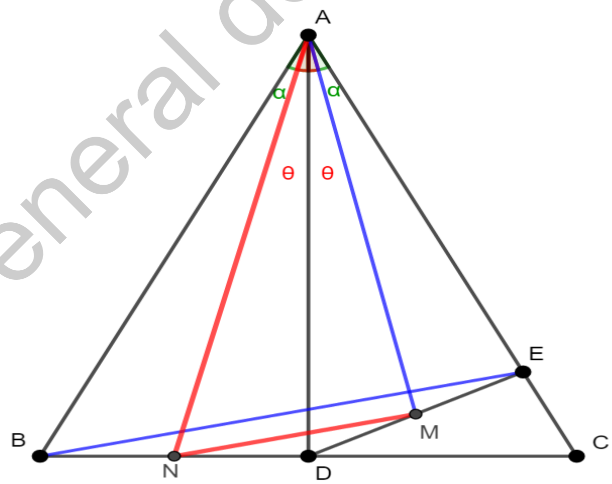

Figura 3. Triángulos semejantes △ABD y △ANM.

Se sigue que $\measuredangle \mathrm{NAM} = \alpha$. Además $\frac{AN}{AM} = \frac{AB}{AD}$ y nótese que $\measuredangle \mathrm{BAD} = \alpha$, entonces tenemos por el criterio lal, que △ABD es semejante al △ANM.

Por lo que se tiene lo que se quería probar: $\measuredangle \mathrm{AMN} = \measuredangle \mathrm{ADB} = 90°$. (3)

Observación. Aunque la solución es aparentemente sencilla, involucrar el punto medio del segmento BD es una idea geométrica que usualmente no se le ocurre a un estudiante con poca experiencia en la solución de problemas de Geometría Euclidiana. El involucrar el punto N puede ser considerado una idea realmente ingeniosa la cual facilita de gran manera la solución del problema.

Solución analítica. Se introduce el sistema de coordenadas de modo que el origen está en D, el eje *x* coincide con el segmento BC y el eje *y* coincide con el segmento AD

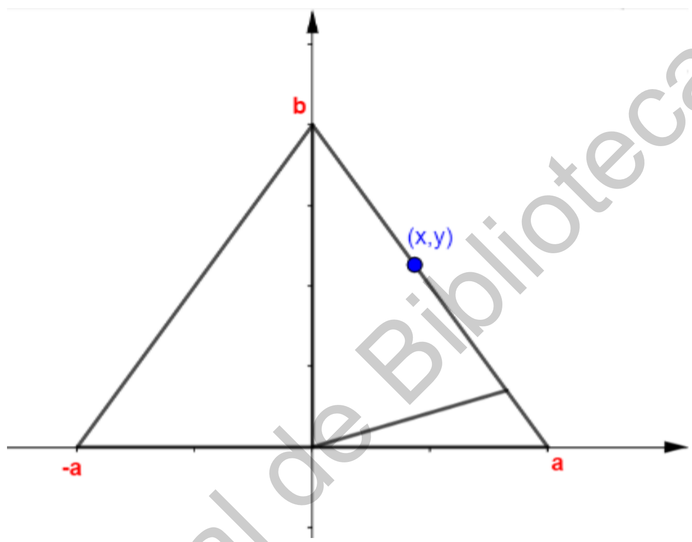

Figura 4. Representación gráfica del problema en el plano cartesiano.

Suponemos que las coordenadas de C son (a,0), de B son (-a,0) y de A son (0,b).

La pendiente de la línea AC es $m_1 = \frac{b}{-a}$ entonces su ecuación es:

$$\frac{b}{-a} = \frac{y-b}{x-0}$$

De donde se sigue,

$$bx = -a(y-b)$$

Y se obtiene

$$bx + ay - ab = 0 \qquad (4)$$

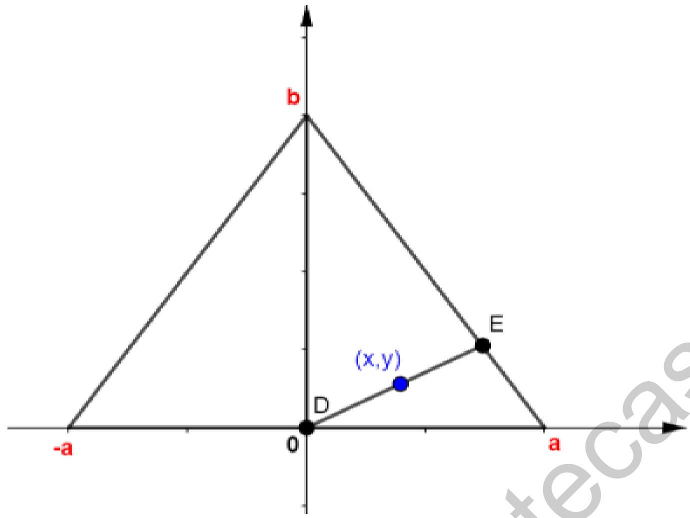

Figura 5. Punto (x, y) sobre la recta DE

Ahora, como la pendiente de DE es $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, por ser perpendicular a AC, y considerando dos puntos sobre DE, (0,0) y (*x,y*).

Se tiene que $m_2 = \frac{a}{b}$, por lo que la ecuación de DE queda defina por:

$$\frac{a}{b} = \frac{y-0}{x-0}$$

De donde se obtiene:

$$ax - by = 0 \tag{5}$$

Como las coordenadas del punto E(x_0,y_0) debe satisfacer las ecuaciones, se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} bx + ay = ab \\ ax - by = 0 \end{cases}$$

Por el método de sustitución se obtiene,

$$x = \frac{by}{a}$$

$$b\left(\frac{by}{a}\right) + ay = ab$$

$$y\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = ab$$

Entonces es claro ver,

$$y = \frac{a^2 b}{a^2+b^2} \tag{6}$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \tag{7}$$

De aquí se tiene que,

$$E(x_0, y_0) = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right) \tag{8}$$

Ahora se obtienen las coordenadas del punto medio (M) de ED, definido por:

$$M = \left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)}\right) \tag{9}$$

Como lo que se quiere es probar que AM y BE son ortogonales, se debe probar que sus pendientes son recíprocas y de signo contrario, es decir, si m_3 es la pendiente de AM y m_4 es la pendiente de BE, debemos probar que $m_3 = -\frac{1}{m_4}$. Entonces para obtener dichas pendientes m_3 y m_4, se toman los puntos A y E, y B y E, respectivamente.

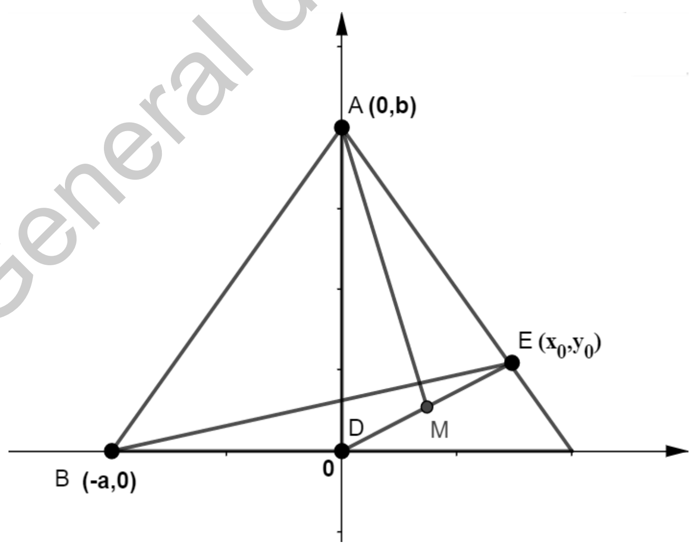

Figura 6. Coordenadas de los puntos A, B y E.

Entonces se tiene que $$m_3 = \frac{\frac{a^2 b}{2(a^2+b^2)} - b}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}} = \frac{-(a^2+2b^2)}{ab} \tag{10}$$

$$m_4 = \frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}+a} = \frac{ab}{a^2+2b^2} \quad (11)$$

Por lo tanto se tiene lo que se quería demostrar: $m_3 = -\frac{1}{m_4}$

Observación. Aunque la solución es más larga y con muchas operaciones algebraicas, cada uno de los pasos se derivan de manera sencilla siguiendo los procedimientos normalmente empleados en Geometría Analítica.

Problema 2. Un grupo de piratas roba el tesoro de un barco y se dirige a una isla desierta a enterrar el tesoro. En la isla había dos palmeras y un roble R. Para enterrar el tesoro, los piratas hicieron lo siguiente: contaron los pasos del roble hasta la palmera P_1, giraron 90◦ en contra de las manecillas del reloj y caminaron la misma cantidad de pasos que habían recorrido entre el roble y la palmera. Ahí pusieron una marca (el punto A). Después hicieron lo mismo con la palmera P_2 pero ahora la rotación fue en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo marcaron una segunda posición (el punto B). El tesoro lo enterraron a la mitad del camino entre las dos marcas (punto X).

Después de algún tiempo, el paso de un huracán se llevó el roble pero las palmeras siguieron en su lugar. Cuando los piratas llegan de nuevo a la isla para recuperar el tesoro se encuentran con la sorpresa de que sólo existen las palmeras. ¿Cómo localizaron el lugar dónde estaba enterrado el tesoro?

Solución sintética. Por alguna razón, entre los piratas había un aficionado a la Geometría y fue este pirata quien resolvió el problema. La solución es la siguiente:

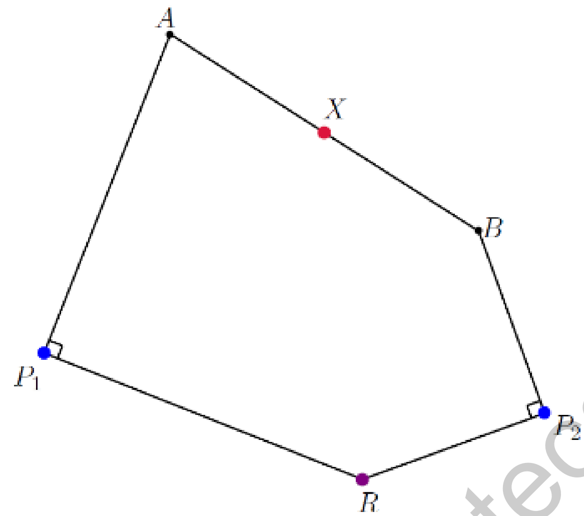

Figura 7. Representación gráfica del problema.

Se trazan perpendiculares a P_1P_2 desde los puntos A, X, R y B, las cuales cortan al segmento en los puntos P, S, T y Q, respectivamente. Se observan las igualdades de ángulos

$$\measuredangle P_1\mathrm{AP} = \measuredangle \mathrm{R}P_1\mathrm{T} \quad (12)$$

$$\measuredangle P_1\mathrm{BQ} = \measuredangle \mathrm{R}P_2\mathrm{T} \quad (13)$$

Además, de las igualdades de longitudes $\mathrm{A}P_1 = P_1\mathrm{R}$ y $\mathrm{B}P_2 = P_2\mathrm{R}$. Se tiene que $\triangle AP_1P$ es congruente a $\triangle P_1RT$ y que $\triangle BP_2Q$ es congruente a $\triangle P_2RT$. De estas congruencias se tiene que:

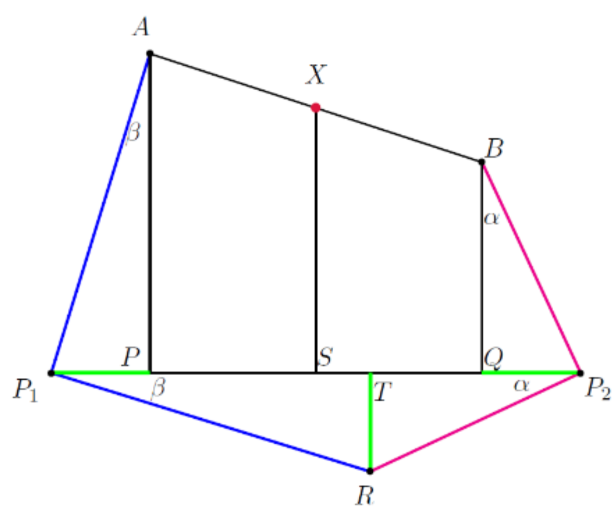

Figura 8. Congruencia de triángulos.

$$P_1\mathrm{P} \ = \ \mathrm{RT} \tag{14}$$

$$\mathrm{Q}P_2 = \ \mathrm{RT} \tag{15}$$

Entonces se cumple que S es el punto medio de los segmentos PQ y P_1P_2. También de estas congruencias de triángulos se tiene que:

$$\mathrm{AP} \ = P_1\mathrm{T}$$

$$\mathrm{BQ} = \mathrm{T}P_2$$

Entonces se tiene que

$$AP + BQ = P_1\mathrm{T} + P_2\mathrm{T} = P_1P_2 \tag{16}$$

Por otro lado, sabemos que

$$XS = \frac{AP+BQ}{2} \tag{17}$$

Lo que implica que

$$XS = \frac{P_1P_2}{2} \tag{18}$$

La solución para el problema es la siguiente: se cuentan los pasos entre las palmeras, se recorre la mitad de esa distancia empezando en la palmera P_1 y en dirección de la palmera P_2, se gira 90◦ en contra de las manecillas del reloj y se camina esa misma cantidad de pasos. El punto al que se llega es donde está enterrado el tesoro.

Observación. En la solución de este problema se han trazado varias líneas auxiliares, las líneas paralelas al segmento que une a los puntos que representan a las palmeras. Al realizar estos trazos, aparecen congruencias de triángulos que sirven en la solución. Sin embargo, hacer este tipo de trazos es una habilidad que solamente quienes tienen mucha experiencia resolviendo problemas geométricos pueden realizar. Aunque la solución usa conceptos básicos de Geometría, de nuevo está el inconveniente del ingrediente de ingenio que requiere una persona para obtener esta solución.

Solución analítica. Se introduce el sistema Cartesiano de coordenadas de manera que el eje *x* coincide con la línea por P_1 y P_2 que el origen está en el punto medio del segmento P_1P_2.

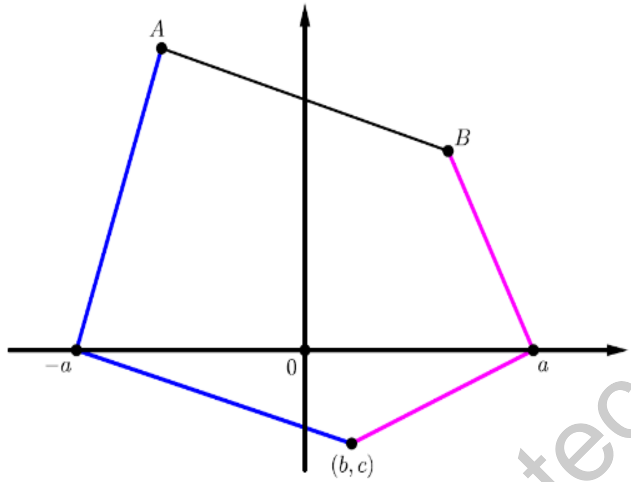

Figura 9. Representación gráfica del problema en el plano cartesiano.

Supongamos que las coordenadas de las palmeras y el roble son:

$P_1 = (-a, 0)$, $P_2 = (a, 0)$, $R = (b, c)$.

Las coordenadas de los puntos A y B se pueden obtener como sigue: trasladamos el segmento P_2R paralelamente de manera que el extremo P_2 coincide con el origen. Las coordenadas del otro extremo de este segmento paralelo son $(b - a, c)$ ya que sólo trasladamos en la dirección del eje *x* una cantidad -a. Rotamos este segmento un ángulo de 90° en sentido de las manecillas del reloj, tomando como centro de rotación al origen.

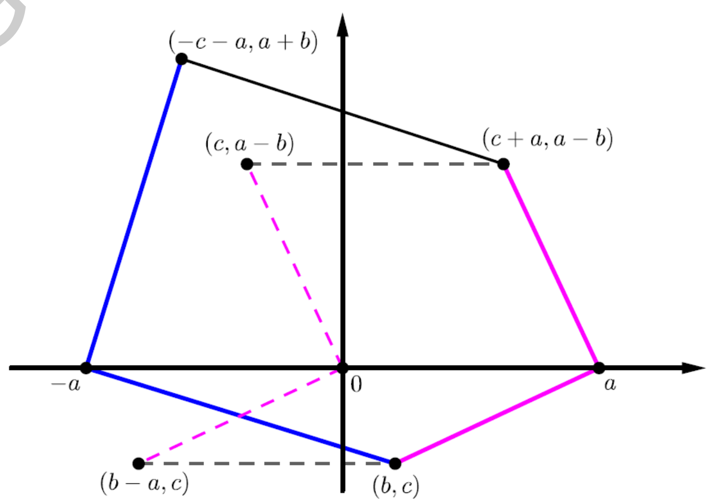

Figura 10. Coordenadas de los puntos a considerar

Recordemos que dado un punto (x,y), el punto que se obtiene rotando 90° en sentido de las manecillas del reloj tiene coordenadas $(y,-x)$, además, el punto que se obtiene al rotar 90° en sentido contrario a las manecillas tiene coordenadas $(-y, x)$.

De lo anterior se sigue que el punto rotado tiene coordenadas (c, a − b), ahora, se traslada de nuevo una distancia a en la dirección horizontal y se obtiene que:

$$\mathrm{B} = (\mathrm{c}+\mathrm{a}, \mathrm{a}-\mathrm{b})$$

De manera análoga, se obtiene:

$$\mathrm{A} = (-\mathrm{c}-\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{b})$$

Se sigue que el punto

$$X = \left(\frac{-c-a+c+a}{2}, \frac{a+b+a-b}{2}\right) = (0, \mathrm{a}) \qquad (19)$$

Es decir, el tesoro se encuentra sobre la línea perpendicular a P_1P_2 a través de su punto medio, y la cantidad de pasos entre el tesoro y el punto medio de P_1P_2 es la mitad de los pasos entre P_1 y P_2. De nuevo, podemos ver que la posición del tesoro no depende de la posición del roble.

Observación. Notemos que la solución algebraica de este problema solamente sigue las ideas y técnicas comunes de la Geometría Analítica, razón por la cual es más probable que una persona con los conocimientos básicos de Geometría Analítica puede llegar a obtener tal solución.