Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería
Maestría en Didáctica de las Matemáticas

El impacto de la Lógica Matemática al resolver problemas matemáticos en bachillerato desde la perspectiva de Teoría de Situaciones Didácticas

Tesis

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de
Maestro en Didáctica de las Matemáticas

Presenta:
Viviana Rivera Monjaras

Dirigido por:
M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga

M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga
Presidente

Dr. Víctor Larios Osorio
Secretario

M.C. Iván González García
Vocal

M.C. Roberto Torres Hernández
Suplente

M.C. Luisa Ramírez Granados
Suplente

Centro Universitario
Querétaro, Qro.
Diciembre, 2019
México

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico especialmente a mis padres quienes creen en mí, tienen la paciencia y el amor para apoyarme en todo momento.

A mis hermanos, porque ellos son una fuente de motivación para superarme cada día y poder dar un buen ejemplo.

A mi esposo que es mi apoyo más grande y a quien admiro infinitamente porque es un gran hombre.

A mis maestros y asesores, que me ayudaron en cada paso brindándome su apoyo y conocimiento.

A mis compañeros y amigos que estuvieron conmigo en esta importante etapa de mi vida, y no dudaron en brindarme su amistad y apoyo.

AGRADECIMIENTOS

Principalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo en esta investigación.

Agradezco a mi asesor de tesis el M.C. Víctor Antonio Aguilar Arteaga por haberme brindado su apoyo, por su esfuerzo y dedicación en este proyecto. Gracias por sus orientaciones, por su paciencia y motivación que ayudaron a concluir este proyecto de Tesis.

Agradezco a mi familia por ser la motivación para concluir esta etapa de mi vida.

Mi más sincero agradecimiento.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

La enseñanza de la lógica matemática en México se ha modificado en el transcurso de los años, en el actual plan de estudio de educación básica no está estructurada como una asignatura. El objetivo de la investigación de la presente tesis es analizar el impacto que puede tener el estudio de la lógica matemática en jóvenes alumnos. Para esto se diseñó un taller sustentado en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) que fue impartido durante 10 sesiones a dos grupos de quinto semestre de bachillerato de la institución SABES El Lindero, de Doctor Mora, Guanajuato y se llevó un registro y control mediante evaluaciones para medir el avance de los alumnos. Los resultados obtenidos reflejan un progreso general en el desarrollo de las habilidades de los alumnos, este fue analizado de forma cualitativa y cuantitativa. El análisis particular arrojó que la mayoría de los alumnos mejoró, y en el caso a nivel general del grupo se mejoró en todos los aspectos considerados; que fueron: promedio general del grupo, menor puntuación, mayor puntuación. Dichos resultados permiten sugerir distintas opciones para poder implementar algún taller de lógica matemática similar con beneficios para los alumnos, profesores y escuelas.

Palabras clave: Educación, lógica matemática, teoría de las situaciones didácticas, enseñanza.

ABSTRACT

The teaching of mathematical logic in Mexico has changed over the years, in the current study basic plan it is not structured as a subject. The objective of the research of this thesis is to analyze the impact that the study of mathematical logic can have on young students. For this, a workshop based on the Theory of Didactic Situations (TDS) was designed, which was taught during 10 sessions to two fifth semester groups of the SABES El Lindero high school, of Dr. Mora, Guanajuato and a registry and control were carried out through assessments to measure student progress. The results obtained reflect general progress in the development of the students' abilities; this was analyzed qualitatively and quantitatively. The particular analysis showed that the majority of the students improved, and in the case, at the general level of the group it was improved in all the aspects considered, which were: the general average of the group, lower score, and higher score. This was analyzed qualitatively and quantitatively. The particular analysis showed that the majority of the students improved, and in the case, at the general level of the group it was improved in all the aspects considered, which were: the general average of the group, lower score, and higher score. These results suggest different options to be able to implement a similar mathematical logic workshop with benefits for students, teachers, and schools.

Keywords: Education, logical mathematical, Theory of Didactic Situations, teaching.

1. INTRODUCCIÓN

En la presente tesis abordaremos la importancia de la enseñanza de la lógica matemática que se ha trabajado desde diferentes perspectivas. Piaget en sus trabajos menciona que el conocimiento lógico-matemático surge al construir la relación entre los objetos que se manipulan y las experiencias obtenidas al ejecutar acciones sobre los mismos (Piaget, 1984). Por otro lado tenemos la propuesta de las Inteligencias Múltiples que definen la inteligencia lógico-matemática como la habilidad de crear soluciones de manera estructurada y con argumentos sólidos (Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando, & Prieto, 2008).

La enseñanza de la lógica matemática tiene como principal meta desarrollar el razonamiento en los alumnos. Llegar a este fin resulta un verdadero reto para el docente y diversas investigaciones presentan que hay poca relación entre el perfil de egreso y el contenido de los programas escolares diseñados para cumplir con las demandas actuales. Sternberg y Spear-Swerling (1999) mencionan en su libro *Enseñar a pensar* que en muchos de los casos los programas están diseñados para preparar a los alumnos a resolver problemas que no se parecen a los que se enfrentarán cuando sean adultos. Por otro lado se puede considerar que los problemas no necesitan presentarse como situaciones de la vida real pero si deben desarrollar las habilidades para resolver cualquier tipo de problemas, es decir, enseñar a los alumnos a razonar e investigar las situaciones presentadas en los problemas.

En México no se prioriza tener la asignatura de Lógica Matemática en el nivel Bachillerato, sin embargo, es una disciplina que permite a los alumnos adquirir herramientas favorables para su formación matemática. Más aún, podría considerarse como un conocimiento que ayuda a la estructuración del pensamiento en los alumnos y también a mejorar la habilidad de resolver problemas. El estudio de la Lógica Matemática va más allá de conocer reglas y algoritmos, por ello no solo se enfoca en estructurar pensamiento lógico, sino también en hacer uso del conocimiento de dichos procesos lógicos, y así aumentar las posibilidades de resolver situaciones correctamente.

La hipótesis que se analiza en la investigación de este trabajo es que desarrollar un pensamiento lógico matemático ofrece nuevos caminos en las soluciones a problemas matemáticos por parte del sujeto cognoscente. Para esto se propone el desarrollo y aplicación de un taller basado en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) cuyo objetivo es analizar el impacto de la lógica matemática en el desarrollo de nuevas ideas durante la solución de problemas matemáticos por parte de alumnos de bachillerato. El taller fue diseñado y aplicado a dos grupos de alumnos de quinto semestre de bachillerato, la institución donde se aplicó está situada en una comunidad rural del estado de Guanajuato.

La investigación se hace desde la perspectiva de la TSD, la cual está basada en el constructivismo, proponiendo que los alumnos logren aprender de una manera más autónoma, construyendo su conocimiento, todo esto a través de un medio didáctico desarrollado por el docente. Usando la metodología de investigación cualitativa con enfoque de intervención en el aula, ya que esta metodología es flexible y además proporciona riqueza interpretativa, profundidad a los datos, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas.

2. ANTECEDENTES

2.1 Lógica Matemática

La lógica tiene sus orígenes en Grecia, en su principio sólo se trataba de problemas de Filosofía, pero considerando que la lógica es el estudio de los razonamientos bien hechos podríamos decir que se encuentra desde el inicio de la humanidad (Vivas, 2004).

La necesidad de justificar la verdad o la falsedad de las afirmaciones matemáticas llevó a conjuntar a la lógica con la matemática. Podemos definir la lógica matemática como el estudio sistemático de axiomatizaciones formales. Se trata de un área de carácter formal que carece de contenido ya que se enfoca en el estudio de las alternativas válidas de inferencia, es decir, propone estudiar los métodos y los principios adecuados para identificar al razonamiento correcto frente al que no lo es (Videla, 1995).

En la vida diaria y sobre todo en la investigación científica, el ser humano le debe sus éxitos y fracasos a la eficacia de sus argumentos y su razonamiento. Es un hecho que los buenos argumentos permiten conocer mejor la realidad y poder evaluarla, los malos argumentos pueden desviar al humano impidiéndole llegar al conocimiento verdadero.

2.2 Intuición- Formalización.

Roldán y Cribeiro (2001, citado por Malaspina, 2007, pág. 368) afirman que "hacer Matemática significa entonces intuir y formalizar. De modo que intuición y formalización son conceptos indisolublemente unidos, siendo así que entrenar la intuición en Matemáticas significa a la vez entrenar la capacidad de concientizar dicha habilidad, para poder formalizar los resultados".

Malaspina (2007) afirmó que un problema importante en la didáctica de las Matemáticas es lograr que los aprendizajes que van acumulando los estudiantes potencien su intuición y capacidad de resolver problemas; por lo que investigó acerca del uso de la intuición, de la formalización y el rigor en la resolución de problemas de optimización.

2.3 Presencia de la Lógica Matemática en bachillerato

En los años sesenta llegó a México la corriente bourbakista, basándose en esta corriente se realizó la reforma educativa de 1971, que resultó ser muy importante para la educación matemática en México ya que con ella se buscaba incluir a la Matemática Moderna en todos los niveles de enseñanza, contemplando que apareciera en el currículo de Matemáticas nuevos temas como Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática (Peña, 1999).

Se pretendía que la Teoría de Conjuntos y la Lógica Matemática fueran la base para formar las teorías matemáticas, algo que para cualquier matemático parecería verdaderamente sensato, entonces, ¿por qué fracasaron las reformas de los años setenta y algunas posteriores? Podríamos encontrar diferentes razones pero haremos énfasis en los puntos mencionados por Peña (1999):

1. Se realizó una reforma profunda después de mucho tiempo sin movimientos importantes y los cambios no fueron ensayados lo suficiente, por lo que difícilmente los profesores estaban preparados para enfrentarse a este cambio y no se contempló su capacitación para realizar dicha labor.
2. Los profesores de diferentes niveles nunca llegaron a comprender los contenidos y mucho menos la importancia de los cambios en las reformas propuestas.
3. Le dieron prioridad a la adquisición de un lenguaje (Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática) y no al desarrollo de habilidades del estudiante.

Para complementar Larios y Díaz (2013) mencionan que los profesores que eran excelentes en la enseñanza de Matemáticas algorítmicas no necesariamente tenían conocimientos de Teoría de Conjuntos o Lógica Matemática y en ocasiones se comenzaron a enseñar conceptos erróneos.

Frente al fracaso en la práctica, la Teoría de Conjuntos y la Lógica Matemática pasaron a ser temas en la formación de los estudiantes sin conexión con el resto de las Matemáticas. Después de este fracaso, las nuevas reformas han tratado de hacer una propuesta de programas de enseñanza que hacen hincapié en la adquisición de habilidades por parte del alumno, aunque todavía tenemos el enorme reto de capacitar a los profesores para que esto pueda cumplirse.

Hoy en día, algunos de los alumnos de bachillerato general y otras modalidades en México tienen la asignatura de Lógica presente en su currícula, pero con un enfoque hacia la historia de la Filosofía, y por lo tanto, el alumno no desarrolla necesariamente las habilidades de deducción y formalización propias de la lógica matemática.

2.4 Perfil de egreso de la educación básica en México

En la actualidad hay investigaciones que muestran la relación entre el conocimiento matemático de los docentes y los logros de los estudiantes, que nos revelan la importancia de que el profesor conozca el material que va a enseñar y el papel de la Matemática en la educación de los alumnos. En la investigación Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro (Larios & Díaz, 2013), hecha por profesores de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ), mencionan que los profesores de primaria del estado de Querétaro creen que estudiar Matemáticas sirve:

- Para desarrollar habilidades y destrezas que le permitan enfrentarse adecuadamente a los problemas de la vida práctica.
- Para desarrollar la capacidad de razonamiento.
- Por su vinculación con las demás ciencias.

Cabe mencionar que el menor porcentaje de las respuestas hace referencia a la última creencia. Con esto podemos inferir que algunos de los profesores no perciben la relación que hay entre la Matemática y las demás asignaturas o no les parece importante. Los profesores que no conocen esta relación difícilmente podrán hacer que sus alumnos se interesen en aprender Matemáticas, además, para los profesores será más complicado crear situaciones en el aula que hagan que el alumno vea la conexión y aplique sus conocimientos. La Lógica Matemática es tal vez el área de la Matemática con mayor relación con otras ciencias, ya que se desarrolla el pensamiento lógico y crítico, que es la base de las investigaciones científicas. Por esto es tan importante que los profesores reconozcan lo necesario que es el aprendizaje de la Lógica Matemática para sus alumnos.

En la investigación también se contempla la opinión de los profesores de secundaria, quienes se enfocan en mencionar las dificultades que tienen los alumnos para aprender Matemáticas y poder resolver problemas. Opinaron que estas dificultades están relacionadas con el desarrollo de habilidades más genéricas:

- La comprensión del texto del problema.
- Capacidad de establecer estrategias adecuadas para la resolución de problemas.

Esta problemática nos lleva a reflexionar sobre si los alumnos están cumpliendo con el perfil de egreso de la educación básica en México (Secretaría de Educación Pública, 2018), en donde se considera el desarrollo de los siguientes ámbitos: pensamiento matemático, pensamiento crítico y solución de problemas. Al término de la educación obligatoria (comprendida por educación básica y media superior) se pretende que los alumnos puedan:

- Valorar las cualidades del pensamiento matemático.
- Plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para modelar y analizar situaciones.
- Formular preguntas para resolver problemas de diversa índole.
- Argumentar las soluciones obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos, presenta evidencias que fundamentan sus conclusiones.
- Reflexionar sobre sus procesos de pensamiento.
- Utilizar el pensamiento lógico y matemático.

- Evaluar objetivos, resolver problemas, elaborar y justificar conclusiones y desarrollar innovaciones.
- Adaptarse a entornos cambiantes.

Lamentablemente, con dificultad los alumnos llegan a desarrollar completamente estas habilidades. Hoy en día las investigaciones educativas y teorías de aprendizaje pretenden ayudar a los profesores a alcanzar las metas planteadas, y si bien estas no son recetas, sí nos permiten trazar pautas que ayudan a las comunidades educativas en la planeación e implementación del currículo.

2.5 Evaluaciones de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

De acuerdo a los resultados del 2015 en la evaluación PISA, México ocupa el lugar 58 de 72 países en el ámbito de Competencia Matemática, promediando un total de 408 puntos por alumno, que lo ubica en el nivel 1, el más bajo de una escala de 6 niveles. La OCDE establece que en el nivel 1: "los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y de desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo" (OCDE, 2015, pág. 16). Además de esto, se reporta que menos del 1% de los alumnos mexicanos alcanza los niveles 5 y 6 de la prueba PISA, considerados de excelencia. Es por esta razón que se cree necesario que los alumnos desarrollen las habilidades que la evaluación de la OCDE marca como estándar para un buen desarrollo social y económico.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Orígenes de la Teoría de las Situaciones Didácticas

El enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) se presenta en la actualidad como un instrumento científico, pues tiene una tendencia a unificar e integrar los aportes de otras disciplinas. Además puede ser una herramienta para proporcionar una mejor comprensión de las posibilidades de avance y regulación en el proceso de enseñanza de las Matemáticas (Brousseau, 2007).

La TSD creada por Guy Brousseau en los años setenta, se diferenciaba de la idea dominante que se tenía en ese momento, donde la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática era una visión cognitiva, fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana. La TSD proponía otro enfoque, en el que la construcción permite comprender las interacciones sociales entre alumno, docentes y saberes matemáticos, donde se condiciona lo que los alumnos aprenden y cómo lo hacen.

3.2 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

Una de las teorías que se han desarrollado en la Didáctica de las Matemáticas en los últimos años es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Esta teoría afirma que el estudiante aprende Matemáticas mediante actividades diseñadas por el docente, en un medio en el que se propone resolver un problema, y en donde el mismo medio comunica al estudiante qué es necesario cambiar o resolver para que el alumno adquiera una nueva estrategia que lo adapte al medio en conflicto (Brousseau, 2007).

La TSD considera un esquema triangular donde participan alumno, docente y saber. Es importante recalcar que en esta teoría se le da mucho peso a la participación del docente, ya que tiene un papel crucial en el proceso de enseñanza-aprendizaje diseñando un ambiente óptimo para que se lleve a cabo (Figura 1).

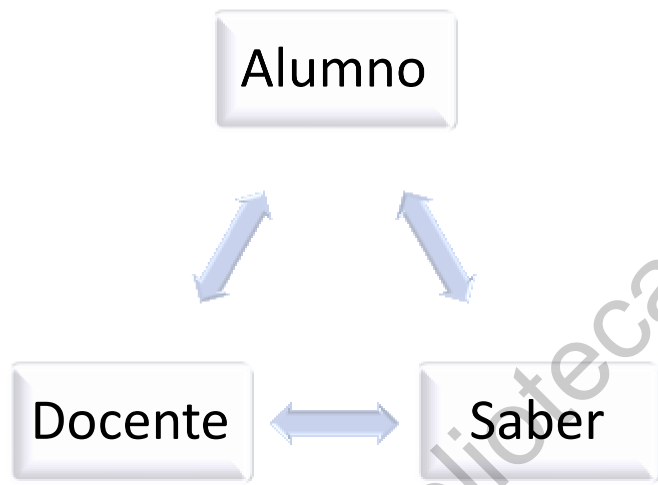


Figura 1. Triada didáctica.

La TSD permite analizar el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje, y cómo el comportamiento de los alumnos revela el funcionamiento del medio, considerado como un sistema donde intervienen las situaciones didácticas y sus elementos.

El docente debe ser consciente que un problema o ejercicio no se puede considerar como una simple reformulación de un saber, sino como un medio para adquirir el conocimiento. Para describir correctamente un medio requerimos considerar las siguientes cualidades:

- Cómo debe interactuar el sujeto para generar la necesidad de adquirir un conocimiento determinado.
- La sucesión de acontecimientos que pueden llevar al sujeto a concebir dicho conocimiento y adaptarlo.
- La información pertinente que obliga al sujeto a llegar a cierto conocimiento.

El alumno se adapta al medio, que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, muy parecido a lo que hace la sociedad humana. Este nuevo saber es fruto de la adaptación, manifestándose en respuestas que son la prueba del aprendizaje. Para lograr correctamente el objetivo del medio el docente deberá ser capaz de diseñar un ambiente adecuado, para completar está labor la TSD describe elementos en las situaciones didácticas que estructuran el diseño y manejo del medio.

3.2.1 Situación didáctica.

Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto, al que denominamos alumno, con un cierto medio que determina un conocimiento dado. Los docentes diseñan situaciones que le ofrecen al alumno la oportunidad de construir el conocimiento de forma autónoma, siendo el alumno quien se enfrenta a la resolución del problema sin que el maestro intervenga de forma directa. Hay situaciones que requieren la adquisición previa de los conocimientos y esquemas necesarios. También hay otras en las que el sujeto tiene la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo y le llamamos situaciones a-didácticas que se encuentran dentro del concepto de situación didáctica.

- Las **situaciones didácticas** se definen como las interacciones entre el alumno y el docente. El alumno de cierta manera hace lo que el docente le dijo entre líneas. Este tipo de situación está construido con el objetivo de hacer que los alumnos adquieran un saber determinado y diseñado por momentos en los cuales el alumno se enfrenta a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.
- Las **situaciones a-didácticas** son las interacciones entre el alumno y el medio, esta fase es parte de la situación didáctica. Aquí ya no existe intervención del docente, así el alumno aprenderá a hacer frente a la realidad y reconoce la necesidad de adquirir el aprendizaje.

La definición de situación a-didáctica contiene aspectos que nos ayudarán a analizar esta fase de la situación didáctica:

1. La necesidad de conocimientos: La situación se diseña de tal manera que el conocimiento que se pretende aprenda el alumno sea completamente necesario para la solución de la situación. El docente debe cuidar que la situación no pueda ser resuelta de manera conveniente sin poner en práctica los conocimientos o el saber que se pretende enseñar.

Es fundamental la comprensión de esta idea para el análisis didáctico de una situación y de los elementos que la conforman. Para diseñar una buena situación a-didáctica es indispensable tener procedimientos necesarios para resolver un problema y no procedimientos posibles.

2. La noción de sanción: Se entiende como la idea de que la situación debe estar organizada de tal forma que el alumno encuentre información en el medio para actuar correctamente y producir el conocimiento necesario. En este sentido los alumnos pueden juzgar sus acciones y evaluar si son convenientes.

La situación a-didáctica es concebida como un momento de aprendizaje y no como un momento de enseñanza, los alumnos deben encontrar por si mismos las relaciones que hay entre sus elecciones y los resultados obtenidos.

3. La no intervención del maestro: Si bien se pide que el maestro no participe de forma directa en la fase de la situación a-didáctica, debemos ser conscientes que es el maestro quien gestiona la entrada a esta fase.

Cada concepto puede presentarse en una o varias situaciones a-didácticas conectadas de forma adecuada y que llamamos situaciones fundamentales.

Las interacciones entre el docente y el alumno se modelan a través del concepto de contrato didáctico. Esta noción describe las reglas del juego no escritas pero implícitas en la situación didáctica, que dirigen el comportamiento tanto del docente como del alumno. En la didáctica moderna se describe la enseñanza como la acción de proporcionar al alumno una situación a-didáctica correcta y el aprendizaje como una adaptación a esa situación (Brousseau, 2000).

Tipología de situaciones

La TSD distingue tres tipos de situaciones a-didácticas:

1. Esquema de acción: El alumno debe actuar sobre un medio determinado y obtener cierta información. En este tipo de situación se validan acciones.
2. Esquema de comunicación: Un alumno o grupo de alumnos (emisor) deben formular un mensaje destinado a otro alumno o grupo de alumnos (receptor) que deben comprender el mensaje y actuar sobre el medio en base al mensaje. En este tipo de situación se validan mensajes.
3. Esquema de validación: Dos o más alumnos deben enunciar afirmaciones y ponerse de acuerdo sobre la veracidad o falsedad de las mismas. Los grupos de alumnos que validan las afirmaciones deben ser capaces de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas u oponer otras afirmaciones que refuten las dichas por sus compañeros. En este tipo de situaciones se validan afirmaciones.

Es conveniente aclarar que no es necesario pasar por estos tres tipos de situaciones para completar el objetivo de la enseñanza y que el alumno adquiera el saber o conocimiento esperado.

Finalizamos el análisis con la noción de *institucionalización*, donde se definen las relaciones que pueden tener los comportamientos o acciones producidas por los alumnos en la fase a-didáctica con el saber o conocimiento científico.

Para ilustrar mejor lo que es una situación didáctica y la interacción del alumno con el medio, presentamos la siguiente situación donde el docente pretende que los alumnos aprendan los que es y cómo funciona una estrategia ganadora.

Situación didáctica: El docente debe crear un ambiente óptimo para desarrollar el problema (situación), en este caso se pide a los alumnos jugar con las monedas como lo especifica el problema. Como el medio debe llevar al alumno a tomar decisiones que ayuden adquirir nuevo conocimiento, el docente debe ser capaz de orientar al alumno a la solución pero sin intervenir directamente.

En la mesa hay 10 monedas con las que A y B juegan alternadamente. En cada turno, un jugador puede tomar 1 o 2 monedas. Si gana aquel que se quede con la última moneda y A comienza el juego, ¿qué jugador puede asegurar la victoria?

Los alumnos entran en la fase de **situación a-didáctica** comenzando a comprender el juego por si solos, jugando en parejas y obteniendo información de la situación en cada partida con su contrincante, ellos deciden si jugar con un solo compañero o buscar partidas con otros compañeros, para comparar diferentes tipos de juegos y encaminarse a la respuesta de la pregunta planteada.

Esquema de **acción:** El alumno adquiere información del juego con los movimientos que emplea o los movimientos que emplean sus compañeros.

Esquema de **comunicación**: Las parejas que juegan pueden compartir intentos de solución y estrategias, así los alumnos obtienen ideas complementarias u opuestas.

Esquema de **validación**: Los alumnos que logran conjeturar una estrategia ganadora exponen su idea y quién es el posible ganador del juego. Los compañeros que escuchan la solución deben validar la veracidad de las afirmaciones del equipo que expone.

Institucionalización: El docente debe complementar las estrategias con preguntas adecuadas o ayudar a los alumnos a comprender como funciona la estrategia ganadora que plantean sus mismos compañeros. Cabe mencionar que aplicar la TSD no implica que el docente proporcione la solución de la situación, sino que debe guiar al alumno y enlazar las ideas generadas por el alumno con el conocimiento que se pretende que el alumno adquiera. Para ello el docente debe conocer la estrategia ganadora que se expone a continuación:

Para saber quién es el jugador que tiene asegurada la victoria cuando hay 10 monedas en la mesa, es conveniente comenzar revisando los casos donde hay menos monedas.

- Una moneda. Cuando hay una moneda gana A porque él es el primer jugador y es quien la puede tomar al principio del juego. Podemos decir entonces que el que haya una moneda es una posición ganadora para A.
- Dos monedas. En este caso también gana A dado que puede tomar las dos monedas. Eso quiere decir que ésta también es una posición ganadora para A.
- Tres monedas. En este caso A tiene dos opciones: tomar una o dos monedas. Si hace lo primero, dejará dos monedas sobre la mesa, y ya sabemos que si a alguien le tocan dos monedas gana. Si hace lo segundo, le dejará a B una moneda, por lo que A perderá. Como sólo tiene esas dos opciones, y ambas lo hacen perder, podemos concluir que tres monedas sobre la mesa hacen perder a A. Es decir, son una posición perdedora para A.
- Cuatro monedas. Si hay cuatro monedas y A toma una, dejará a B con tres monedas y ya sabemos que esa es una posición perdedora (lo que quiere decir que B perderá y A no). Por lo tanto, cuatro monedas son una posición ganadora para A.
- Cinco monedas. En este caso, lo que hará A para asegurar la victoria es dejar a B con tres monedas, sabiendo que éste va a perder.
- Seis monedas. Las dos opciones que tiene A son tomar una moneda o dos monedas. Lo cual dejará a B con cuatro o cinco monedas y sabemos que ambas serán posiciones ganadoras para B. Como A no tiene otra opción, cuando hay cinco monedas la victoria es de B.

Al analizar estos casos podemos apreciar que cuando hay una cantidad múltiplo de tres sobre la mesa, A pierde. ¿Será cierto en todos los casos? Veamos.

Si A tiene originalmente nueve monedas, puede dejarle a B, ya sean 8 o 7 monedas. En cualquiera de los dos casos, B le puede dejar 6 monedas a A. Luego A le puede dejar a B ya sean 5 o 4 monedas y B en su turno le dejará 3 monedas a A. Más tarde, A puede dejar 1 o 2 monedas, pero en ambos casos B le gana. De este modo nos damos cuenta que la estrategia ganadora en este juego consiste en dejar al contrincante con un múltiplo de 3. Si A comienza con 10 monedas, entonces debe tomar una para dejar a B con 9 monedas y así poder ganarle.

Por la estructura de la TSD y sus cualidades se considera que es una buena herramienta para realizar investigaciones en el área de educación, donde el docente puede modelar el medio para facilitar la extracción de los datos, detalles o experiencias.

3.3 Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la Matemática francesa a principios de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero. Los ingenieros, al realizar un proyecto se apoyan en los conocimientos científicos de su dominio, se someten a un control científico, y al mismo tiempo, están obligados a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia.

La ingeniería didáctica desde su origen está fundamentalmente ligada a las intervenciones didácticas (experimentaciones) en las clases. Como características principales en su sentido originario se destacan:

- Está basada en intervenciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

- La validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control).

La ingeniería didáctica aborda estudios de casos en los que se distinguen las siguientes fases (Artegui,1989 citado en Godino,2013) :

1. Análisis preliminares. Es necesario el análisis preliminar respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema.
2. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas. Comprende una parte descriptiva y una predictiva.
3. Experimentación. Implementación del plan de trabajo.
4. Análisis a posteriori y evaluación. Se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, que incluyen las observaciones de las secuencias de enseñanza, y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella.

3.4 Lógica matemática- Lógica simbólica

3.4.1 El objeto de estudio de la lógica

La lógica es una ciencia y su objeto de estudio lo constituyen las formas, estructuras o esquemas del pensamiento.

Una proposición es una oración que se puede determinar como falsa o verdadera pero no ambas. La proposición es un elemento fundamental en el estudio de la Lógica Matemática. Algunos ejemplos son:

1. Querétaro es un estado de Argentina.
2. $5x - 3 > 10$.

3. Los mayas estuvieron en México o en Paraguay.
4. Si p es par, entonces $p + 2$ también es par.

La lógica proposicional es la parte de la lógica que estudia las formas en que se relacionan unas proposiciones con otras y, sobre todo, la relación que se da entre las proposiciones que componen un razonamiento.

Las proposiciones pueden ser de dos tipos: simples (elementales) o compuestas (moleculares). En las simples no es posible distinguir partes componentes que sean, a su vez, también proposiciones, es decir, afirmaciones verdaderas o falsas. En las compuestas es posible distinguir partes que son, a su vez, proposiciones. Examinemos los siguientes ejemplos:

Simples:

1. 8 es un número natural.
2. Los perros son anfibios.
3. Una década dura 10 años.

Compuestos:

1. 5 es un número primo y un número impar.
2. México está en América o México está en Europa.
3. Si un año es bisiesto, entonces febrero tendrá 29 días.

3.4.2 Conectivas lógicas y tablas de verdad

Las proposiciones compuestas requieren una relación entre cada una de las proposiciones independientes, estos son las conectivas lógicas.

Negación	“no”
Conjunción	“y”
Disyunción	“o”
Condicional	“si... entonces”
Bicondicional	“si y sólo si”

Tabla 1 Conectivas lógicas

Negación

En general, la negación puede reducirse a la palabra “no”, que es una conectiva lógica a la que representaremos mediante el símbolo “$\neg$” el cual, por convención, se coloca siempre a la izquierda de la proposición que niega.

Negar una proposición es indicar que es falsa. Si negamos a p, siendo p verdadera (primera posibilidad), obtendremos una proposición falsa; si, por lo contrario, negamos a p, siendo p falsa (segunda posibilidad), obtendremos una proposición verdadera.

Esto se suele representar mediante una tabla de verdad, la cual muestra los posibles valores de verdad (verdadero o falso) de una proposición compuesta:

P	$\neg$p
V	F
F	V

Tabla 2 Negación

Conjunción

Cuando la conectiva "y" es empleada para enlazar dos proposiciones, tiene el sentido de afirmar que son simultáneamente verdaderas. Se simboliza la conjunción mediante el signo "^", el cual se coloca entre las proposiciones conjuntadas, de tal modo que si r y s son las proposiciones, la conjunción de ambas se representará: r ^ s (se lee "r y s").

Puesto que la conjunción de dos proposiciones cualesquiera indica la verdad simultánea de ambas, la proposición compuesta resultante es verdadera si efectivamente son verdaderas ambas. En otro caso, la proposición resultante será falsa. Esto lo podemos resumir en la tabla de verdad de la conjunción:

P	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 3 Conjunción

Disyunción

La conectiva "o", que se simboliza con el signo "v", tiene la función de enlazar dos proposiciones, indicando que al menos una de ellas es verdadera (aunque también pueden serlo ambas). Si r y s son las proposiciones, la disyunción de ambas se representará: r v s (que se lee "r o s"). Como p∨q será verdadera si al menos una de las alternativas es verdadera (y por supuesto, cuando las dos lo sean). Será falsa sólo cuando las dos alternativas sean falsas. La tabla de verdad correspondiente es:

P	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 4 Disyunción

3.4.3 Condicional

La expresión "si… entonces" es la conectiva llamada condicional, que se simboliza con el signo "→", el cual se escribe entre las dos proposiciones relacionadas por esta conectiva. El ejemplo anterior se puede simbolizar: "r→s" y significa "si r, entonces s".

Al relacionar dos proposiciones con esta conectiva es muy importante distinguir la que queda a la izquierda del signo "→" llamada antecedente, de la que queda a la derecha del signo, a la que se llama consecuente.

El sentido de esta conectiva es señalar, que si la proposición antecedente es verdadera, también lo es la proposición consecuente; es decir, basta o es suficiente que el antecedente sea verdadero, para que el consecuente también sea verdadero. De aquí que una proposición compuesta en la que la conectiva es condicional, será falsa si siendo verdadero el antecedente, es falso el consecuente. La proposición será verdadera en los demás casos, en los que no ocurre que el antecedente es verdadero y el consecuente falso. La tabla de verdad de la condicional es:

P	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 5 Condicional

Bicondicional

La expresión “si y sólo si” es una conectiva lógica que se simboliza con el signo “↔” y que al relacionar dos proposiciones indica que el valor de verdad de ambas es el mismo, ya sea verdadero o falso. Así, p↔q (se lee: “p si y sólo si q”) es una proposición que significa que si p es verdadera, entonces q también es verdadera y si q es verdadera, entonces p también es verdadera. En realidad la conectiva bicondicional es la conjunción (y) de dos proposiciones condicionales. La tabla de verdad de la bicondicional es:

P	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 6 Bicondicional

3.4.4 Leyes de Morgan

Las leyes de Morgan son leyes de equivalencia que determinan que dos expresiones tienen la misma tabla de verdad para dos proposiciones dadas.

Las leyes de Morgan son las siguientes:

a) $[\neg (p \wedge q)] \equiv [\neg p \vee \neg q]$
b) $[\neg (p \vee q)] \equiv [\neg p \wedge \neg q]$

Dicho de otra manera, la ley de Morgan enunciada en el inciso a) nos asegura que la negación de una conjunción es la disyunción de las negaciones de las proposiciones. La ley de Morgan del inciso b) nos asegura que la negación de la disyunción de dos proposiciones es equivalente a la conjunción de las negaciones de las mismas.

3.4.5 Cuantificadores

Un cuantificador es una expresión que indica la cantidad de veces que una propiedad P se satisface para un conjunto de elementos determinado.

Los cuantificadores más utilizados son:

- Cuantificador universal: Se representa con el símbolo $\forall$ y significa que todos los elementos de cierto conjunto cumplen la proposición. ($\forall x \in A, Px$) significa que para todo x en el conjunto A se cumple la proposición P.
- Cuantificador existencial: Se representa con el símbolo $\exists$ y significa que existe al menos un elemento de cierto conjunto que cumple una proposición. ($\exists x \in A, Px$) significa que existe al menos un x en el conjunto A que satisface la proposición P.

Las expresiones ($\forall x \in A, Px$) y ($\exists x \in A, Px$) a su vez son también proposiciones y por esto podríamos negarlas, obteniendo las siguientes equivalencias:

$\neg (\forall x \in A, Px) \equiv (\exists x \in A, \neg Px)$ y $\neg (\exists x \in A, Px) \equiv (\forall x \in A, \neg Px)$

La primera equivalencia quiere decir que la negación de “todo x en A cumple P” es igual a decir: “existe al menos un x en A para el que no se cumple P” y la segunda afirma que la negación de “existe al menos un x de A que cumple P” es igual a “todo x en A no cumple P”.

4. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

4.1 Hipótesis:

El dominio de las leyes, formas y operaciones del pensar lógico ofrece nuevos caminos en las soluciones a problemas matemáticos por parte del sujeto cognoscente. Un taller dedicado a la enseñanza de la lógica matemática fortalece el desarrollo de los conceptos matemáticos y el pensamiento lógico matemático, mejora las estrategias y procedimientos para la resolución de problemas, otorga estructura y organización para que el alumno pueda argumentar de manera adecuada la solución de los problemas.

4.2 Objetivo:

Analizar el impacto de la lógica matemática en el desarrollo de nuevas ideas en la solución de problemas matemáticos por parte de alumnos de bachillerato desde la perspectiva de la TSD.

4.2.1 Objetivos particulares

- Diseñar un taller de lógica matemática básica basado en la TSD, que permita que cualquier docente lo pueda impartir.
- Identificar las dificultades que enfrentan los alumnos al resolver problemas de lógica matemática.

5. METODOLOGÍA

5.1 Descripción de la población muestra

Para realizar la investigación se trabajó en el bachillerato SABES El Lindero, dicho plantel está situada en una comunidad rural en el municipio de Dr. Mora, Guanajuato. El sistema avanzado de bachillerato y educación superior (SABES) es una institución pública de Educación Media Superior y Superior, con cobertura única en el estado de Guanajuato.

El taller fue diseñado y aplicado a dos grupos completos de alumnos de quinto semestre de bachillerato. Para conocer más sobre los alumnos se realizó una encuesta socioeconómica. El perfil socioeconómico de los estudiantes fue medido a partir de cuatro variables: la edad de los alumnos, el nivel educativo de ambos padres, el nivel de ingresos mensual familiar y las actividades actuales del alumno. Según los datos obtenidos, los alumnos están dentro del rango de edad de 17 a 19 años, la escolaridad máxima de la mayoría de los padres es secundaria, en cuestión del ingreso mensual familiar es medio o bajo y más del 30% de los alumnos estudian y trabajan. Con respecto al desempeño escolar, la media de los promedios de los alumnos es 7.7 y los profesores comentaron que en los grupos se contaba con algunos problemas de actitud y disciplina.

Dichas características se tomaron en cuenta para realizar el taller, tanto en contenido para mejorar el rendimiento de los alumnos como también para adecuarnos a los objetivos de la investigación. El material usado en cada una de las sesiones fue adecuado a las características de la institución y de los alumnos.

5.2 Estructura de investigación

En las investigaciones basadas en la ingeniería didáctica se consideran cuatro fases, descritas en la sección 3.3. Estas fases facilitan la estructuración de un esquema de trabajo óptimo y completo para la investigación. Las actividades de cada fase se describen a continuación:

5.2.1 Análisis preliminares.

Se aplicó una evaluación diagnóstica (Anexo 1) con 5 problemas matemáticos, a los alumnos de quinto semestre del bachillerato sabes El Lindero. La intención de dicha actividad es determinar los niveles de conocimiento previo que presentan los alumnos, y con ello elaborar actividades del taller adecuadas a sus necesidades, además se pretende analizar un avance en la forma de emplear los razonamientos matemáticos tomando la evaluación diagnóstica y otras dos evaluaciones diseñadas para aplicarse en la mitad del taller y en el final del taller (Anexo 2 y 3).

Presencia de la lógica matemática en el bachillerato Sabes.

Para hacer un análisis más profundo se investigó la presencia de los temas del taller en el currículo de los estudiantes del bachillerato Sabes El Lindero y se encontró que actualmente cursan en el 1er semestre la asignatura Pensamiento lógico que contiene conceptos que se manejan en el taller. El temario se muestra a continuación:

Temario de la asignatura pensamiento lógico

Bloque 1

- Tipos de conocimiento y su conocimiento
- Pensamientos y sus características
- Razonamiento y sus tipos

Bloque 2

- La lógica como ciencia formal y arte del pensamiento
- Importancia del razonamiento verbal
- Representaciones lógicas

  Bloque 3
- La importancia del razonamiento matemático en la comprensión e interpretación del mundo a partir de modelos interdisciplinarios
- Abordaje de problemas y conjeturas de la vida cotidiana analizados desde las matemáticas
- Secuencias lógicas, numéricas y geométricas

Con dicha información se puede percibir que los alumnos tienen conocimiento de los conceptos básicos de la lógica matemática y se puede tomar como premisa para la elaboración del taller.

5.2.2 Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas

En el diseño del taller de lógica matemática se tomaron en cuenta los resultados de la prueba diagnóstico de los alumnos de bachillerato para fortalecer el contenido y la dirección del taller.

Las actividades del taller de lógica matemática están sustentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). Además están diseñadas actividades para cada una de las sesiones semanales como herramientas de análisis. A continuación se presenta las actividades del taller basadas y justificadas por la TSD, con el fin de hacer evidente la presencia de los elementos manejado en la TSD y describir su funcionamiento dentro de las actividades.

Actividades del taller sustentadas en la TSD

Sesión 1: Proposiciones

1.1 La historia

Objetivo: El alumno será capaz de identificar en un conjunto de afirmaciones cuáles de ellas son proposiciones con base en su clasificación como verdaderas, falsas o sin valor de verdad, es decir, no se puede concluir que sea verdadero o falso. Además, el alumno identificará las oraciones que no tengan información suficiente para concluir que es una proposición.

Situación didáctica: El docente entrega a los alumnos la actividad llamada "LA HISTORIA" que describe una situación con cierta información que los alumnos evaluarán. Se dan las indicaciones a los alumnos que consisten en clasificar las afirmaciones del cuestionario como verdaderas, falsas o sin valor de verdad, esta clasificación es acorde a la situación planteada en "LA HISTORIA".

LA HISTORIA

"Un hombre de negocios acababa de apagar las luces de la tienda cuando un hombre apareció y le pidió dinero. El dueño abrió la caja registradora. El contenido de la caja registradora fue extraído y el hombre salió corriendo. Un miembro de la policía fue avisado rápidamente"

Situación a-didáctica: Los alumnos clasificarán las afirmaciones del cuestionario de acuerdo a las indicaciones proporcionadas, se dejará que los alumnos razonen por si solos lo planteado y clasifiquen según su criterio.

Afirmaciones	Verdad	Falso	No sé
1) Un hombre apareció después que el dueño apagó las luces de la tienda.			
2) El ladrón era un hombre.			
3) El hombre que apareció no pidió dinero.			
4) El hombre que abrió la caja registradora era el dueño.			
5) El dueño de la tienda extrajo el contenido de la caja registradora y salió corriendo.			
6) Alguien abrió una caja registradora.			
7) Después de que el hombre que pidió dinero y extrajo el contenido de la caja registradora, huyó a toda carrera.			
8) Aunque la caja registradora contenía dinero, la historia no dice cuánto.			
9) El ladrón pidió dinero al dueño.			
10) Un hombre de negocios acababa de apagar las luces cuando un hombre apareció dentro de la tienda.			
11) Era a plena luz del día cuando el hombre apareció.			
12) El hombre que apareció abrió la caja registradora.			
13) Nadie pidió dinero.			
14) La historia se refiere a una serie de eventos en los cuales únicamente se mencionan tres personas: el dueño de la tienda, un hombre que pidió el dinero y un miembro de la fuerza pública.			
15) Los siguientes eventos ocurrieron: alguien pidió el dinero, una caja registradora fue abierta, su contenido fue extraído y un hombre huyó de la tienda.			

En esta parte de la actividad se hace presente el esquema de **acción** donde los alumnos tienen participación activa y se requiere solamente la puesta en acto de los conocimientos implícitos del alumno.

En la parte final de la actividad se plantea el esquema de **validación** donde los alumnos exponen las diferentes clasificaciones y las razones por las que consideran que son correctas. Las afirmaciones propuestas por cada alumno son sometidas a la consideración del grupo, que debe tener la capacidad de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas o proponer otras aserciones.

Institucionalización: Al final de la actividad será necesario evaluar las clasificaciones. Cada enunciado del cuestionario será mencionado por el docente y se pedirá que levanten la mano los alumnos conforme a su clasificación. Después de registrar las respuestas el docente abrirá una discusión con cuestionamientos que ayuden al alumno a razonar su respuesta y finalmente concluir la clasificación correcta. La clasificación correcta se expone a continuación:

Nota: La clasificación *Sin valor de verdad* es equivalente a que los alumnos clasifiquen el enunciado en la columna de *No sé*, dando a entender que no se puede concluir que sea verdadero o falso.

Razonamiento lógico previo a la valoración de cada afirmación:

1) El hombre de negocios y el dueño ¿son necesariamente la misma persona? **Sin valor de verdad.**
2) ¿Puede hablarse de un robo? Tal vez el hombre que demandó dinero era un cobrador o el hijo del dueño, ellos reclaman dinero a veces. **Sin valor de verdad.**
3) **Falso.**
4) "El dueño abrió la caja registradora". **Verdadero.**
5) La historia no lo excluye, aunque es poco probable. **Sin valor de verdad.**
6) "El dueño abrió la caja registradora". **Verdadero.**
7) No sabemos quién extrajo el contenido de la caja, ni es necesariamente cierto que el hombre haya huido. **Sin valor de verdad.**
8) No sabemos si la caja contenía dinero. **Sin valor de verdad.**
9) No sabemos si fue un robo. **Sin valor de verdad.**
10) ¿Quién dice que entró a la tienda? Pudo haber demandado dinero desde fuera o por la ventana. **Sin valor de verdad.**
11) Las luces generalmente permanecen prendidas durante el día. **Sin valor de verdad.**
12) ¿No sería posible que el hombre que haya aparecido haya sido el dueño? **Sin valor de verdad.**
13) La historia dice que el hombre que apareció demandó dinero. **Falso.**
14) ¿Son el dueño y el hombre de negocios la misma persona, o son dos personas diferentes? Lo mismo puede preguntarse con el hombre de la tienda y el hombre que desapareció. **Sin valor de verdad.**
15) ¿Huyó? ¿No puede haberse alejado a toda carrera en un auto? **Sin valor de verdad.**

Finalmente el docente mencionará que las clasificaciones nos permiten identificar los enunciados que son una proposición tomando en cuenta la siguiente definición:

Una proposición es una oración que se puede determinar como falsa o verdadera pero no ambas.

1.2 Publicidad engañosa

Objetivo: El alumno será capaz de identificar los enunciados que tienen un valor de verdad, con el fin de que se pueda evaluar la veracidad de las proposiciones utilizadas en su vida diaria.

Situación didáctica: El docente entrega a los alumnos una serie de tarjetas que contienen algunos slogans publicitarios, los que deben identificar como proposiciones verdaderas o falsas. Además los alumnos deben decidir hipotéticamente si deben comprar el artículo de venta o no.

Los alumnos identificarán los slogans como proposiciones falsas o proposiciones verdaderas, con esta actividad entran en la fase **a-didáctica**, ya que los alumnos trabajan de manera individual. Al enfrentarse con el reto de clasificar los siguientes slogans se comienza con el esquema de **acción**.

Publicidad engañosa

1. A que no puedes comer solo una.
2. A Duvalin no lo cambio por nada.
3. Hay cosas que el dinero no puede comprar pero para todo lo demás existe mastercard.
4. Red bull te da alas.
5. Probablemente la mejor cerveza del mundo.
6. Si no quedas satisfecho, te devolvemos tu dinero.

Continuando con la **situación didáctica** el docente pide a los alumnos diseñar una proposición en forma de slogan para promocionar un artículo que conozcan, con una proposición verdadera y otro con una proposición falsa.

Los alumnos diseñan publicidad en parejas, compartiendo diferentes experiencias y puntos de vista, con esta actividad se comienza con el esquema de **comunicación**. Continuando con el esquema de **validación** los alumnos presentan la publicidad diseñada y los compañeros validan si son proposiciones verdaderas o falsas, compartiendo sus opiniones y razonamiento empleado.

Institucionalización: Al final se presentará a los alumnos una "frase política", de la cual se analizará el valor de verdad que tiene, generando una discusión entre los alumnos. Con el objetivo de identificar que hay proposiciones con valor verdadero o falso y que existen enunciados que no tienen valor de verdad, haciendo referencia a la definición de proposición de la actividad anterior.

"Ni nos perjudica, ni nos beneficia sino todo lo contrario"

Sesión 2: Negación de proposiciones

2.1 Problema lógica

Objetivo: El alumno será capaz de cambiar el valor de verdad de una proposición dada.

Situación didáctica: El docente llevará tres cajas con una proposición escrita en cada una, y planteará la siguiente situación:

Cada uno de ustedes es un prisionero que tiene la posibilidad de obtener su libertad si escoge una caja adecuada entre las 3 dadas. En cada una de las cajas hay una proposición, pero sólo una de ellas es verdadera, estas son:

- Caja 1: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 no tiene la llave de la libertad.

Tomando en cuenta que solo una caja tiene la llave de la libertad, ¿Cuál caja deben escoger para tener la certeza de alcanzar su libertad?

Situación a-didáctica: Los alumnos comenzarán a resolver el problema de forma individual. Es preciso que el docente aclare todas las dudas que puedan surgir durante el trabajo de los alumnos para llegar a la solución.

Los alumnos se enfrentan a un problema que les permite hacer conjeturas y manejar la negación de proposiciones simples, con ello entra el esquema de **acción**. Cuando el alumno plantea una idea de solución, se darán cuenta que es necesario negar las dos proposiciones que son falsas, el alumno se encuentra con el reto de identificarlas y con ello obtener más información del medio en el que está trabajando.

Se pedirá que ninguno exprese su respuesta y solo la escriba en una hoja de papel. Se recolectaran las respuestas con los nombres de los alumnos para saber quién gana la llave. En manera de sorteo se elige un alumno el cual tiene la posibilidad de dar su respuesta y ver si encuentra la llave.

Esquema de **validación**: Antes de abrir la caja el alumno deberá argumentar su respuesta y los demás alumnos la analizarán, si se llega a la conclusión de que es un buen argumento, se da la oportunidad de abrir la caja. Si el alumno no encuentra la llave, se da la oportunidad a que otro compañero intente encontrarla con su solución.

Institucionalización: El docente se encarga de guiar las participaciones de los alumnos con el fin de que sea claro cuáles argumentos son válidos o no, y el por qué las respuestas que argumentan son o no correctas. Para poder apoyar en este proceso presentamos la solución del problema, que será indispensable que el docente la conozca a detalle para poder realizar correctamente la actividad.

Solución del problema: Si quisiera encontrar la llave solo necesito plantear las proposiciones con valor de verdaderas. Para ello analizaremos los siguientes casos:

Primer caso: la caja 1 dice la verdad, las cajas 2 y 3 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 tiene la llave de la libertad.

Si tomo este caso no puedo asegurar cual caja tiene la llave de la libertad, ya que la 1 y la 2 dicen que tienen la llave de la libertad.

Segundo caso: la caja 2 dice la verdad y las cajas 1 y 3 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 tiene la llave de la libertad.

En este caso es evidente que las proposiciones se contradicen entre sí, por lo cual no puedo asegurar cual caja tiene la llave de la libertad.

Tercer caso: la caja 3 dice la verdad y las cajas 1 y 2 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 no tiene la llave de la libertad.

Con este caso podemos asegurar que la caja dos tiene la llave de la libertad, ya que ninguna proposición se contradice y se puede asegurar que la caja 2 tiene la llave.

Finalmente el docente mencionará los conceptos utilizados en la actividad:

Sea p una proposición. Si negamos a p, siendo p verdadera, obtendremos una proposición falsa; si, por lo contrario, negamos a p, siendo p falsa, obtendremos una proposición verdadera. Esto se puede representar mediante una tabla de verdad, como se indica en la Tabla 2.

Sesión 3: Conectivas lógicas

3.1 Lotería de conjuntos diferentes

Objetivo: El alumno será capaz de identificar conjuntos que cumplan ciertas características, utilizando las conectivas lógicas “y” y “o”.

Situación didáctica: El docente explica las reglas del juego de forma clara con base a las instrucciones:

Se reparten a los alumnos tablas con 16 imágenes de objetos matemáticos como la siguiente:

El docente tendrá 50 cartas en las cuales vendrán escritos enunciados de la siguiente forma:

- Se cumple A y B
- Se cumple A o B

Donde A y B son características de algunos objetos que aparecen en las tablas. El docente comenzará el juego de la lotería mencionando los enunciados de cada carta y gana el alumno que pueda llenar toda su tabla.

Ejemplo:
El docente menciona la carta con el enunciado: Es una ecuación y es de grado 2.
Los alumnos pueden identificar cuáles son los objetos matemáticos que cumplen esas dos características y los marcan en sus tablas.
Después el docente menciona la carta con el enunciado: Es círculo o triángulo
Los alumnos identifican los objetos matemáticos con alguna de las dos características y los marcan en sus tablas.

Situación a-didáctica: Los alumnos al iniciar el juego se enfrentan a dos dificultades:

- Identificar los objetos matemáticos con la descripción que tienen las cartas, en este proceso puede intervenir el docente para apoyarlos.
- Identificar las conectivas lógicas "y" y "o", además el uso adecuado de ellos.

El alumno reconoce y aplica la función de las conectivas lógicas y lleva a cabo el esquema de **acción**.

Institucionalización: Cuando algún alumno gana, se verifica y valida que sean correctas las casillas marcadas y se evidencia el uso correcto de las conectivas lógicas.

Finalmente el docente mencionará los conceptos utilizados en la actividad:

Conjunción: La conectiva "y" es empleada para enlazar dos proposiciones, tiene el sentido de afirmar que son simultáneamente verdaderas.

Disyunción: La conectiva "o" tiene la función de enlazar dos proposiciones, indicando que al menos una de ellas es verdadera (aunque también pueden serlo ambas).

Esto se puede representar mediante una tabla de verdad, como se indica en Tabla 3 y Tabla 4.

3.2 Problemas de lógica

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivas lógicas "y" y "o".

Situación didáctica: El docente plantea dos problemas a los alumnos, se pide que los resuelvan en parejas y escriban el argumento de su respuesta.

Situación a-didáctica: Los alumnos analizan el enunciado de los problemas y deben utilizar las conectivas lógicas "y" y "o", que relacionan la información de cada problema.

Primer problema: Tenemos cuatro perros: un chihuahua, un salchicha, un pitbull y un xoloitzcuintle. Éste último come más que el chihuahua; el pitbull come más que el chihuahua y menos que el salchicha, pero éste come más que el xoloitzcuintle. ¿Cuál de los cuatro será más barato de mantener?

Segundo problema: El caballo de Mario es más oscuro que el de Samuel, pero más rápido y más viejo que el de Juan, que es aún más lento que el de Pedro, que es más joven que el de Mario, que es más viejo que el de Samuel, que es más claro que el de Pedro, aunque el de Juan es más lento y más oscuro que el de Samuel. ¿Cuál es el más viejo, cuál el más lento y cuál el más claro?

Los alumnos al interactuar con los problemas generan preguntas que el docente puede ayudar a disipar, pero no significa que el docente las resuelva sino que los pueda alentar a buscar soluciones con preguntas adecuadas, teniendo presencia en el esquema de **acción**.

En la parte del esquema de **comunicación,** los alumnos resolverán los problemas en pareja. Se necesita que los alumnos complementen su solución generando una discusión con sus compañeros.

Los alumnos exponen las soluciones al grupo y los demás compañeros verifican que las soluciones estén bien argumentadas complementando el esquema de **validación**.

Institucionalización: El docente hace aclaraciones pertinentes conforme a lo expuesto por el alumno y las definiciones presentadas en la actividad anterior, además para ayudar con este proceso se presentan las soluciones de los problemas. Es necesario que el docente conozca bien las soluciones para poder apoyar correctamente a los alumnos.

Solución primer problema:
Con lo anterior tenemos las siguientes desigualdades:

a) X>C
b) P>C y P<S
c) P>X

Tomando b) y c) tenemos S>P>X y P>C, además utilizando la desigualdad a) tenemos que S>P>X>C y P>C por lo tanto el chihuahua es más barato de mantener.

Solución segundo problema:
De la redacción obtenemos la siguiente información:

- Color

M>S, P>S y J>S concluimos que Samuel tiene el caballo más claro.

- Velocidad

M>J, P>J y S>J concluimos que Juan tiene el caballo más lento.

- Edad

M>J, M>P y M>S concluimos que Mario tiene el caballo más viejo.

Sesión 4: Condicional o implicación lógica

4.1 Cliente Satisfecho

Objetivo: El alumno podrá identificar cuando una implicación lógica es verdadera o falsa.

Situación didáctica: El docente plantea a los alumnos la siguiente situación:

Una frase publicitaria que usa el detergente Hariel dice lo siguiente, “Si usa Hariel entonces su ropa quedará blanca”. Se desea saber: ¿bajo qué condiciones podríamos demandar al fabricante?

Situación a-didáctica: El alumno se enfrenta con el conflicto de saber en qué momento la implicación es verdadera o falsa.

Esquema de **acción**: Para analizar esta situación los alumnos necesitan plantear los diferentes casos posibles descritos en la tabla que se muestra a continuación.

Si usa Hariel	⇨	Su ropa quedará blanca	Valor de verdad de la implicación
Verdadero	⇨	Verdadero	Verdadero
Verdadero	⇨	Falso	Falso
Falso	⇨	Verdadero	Verdadero
Falso	⇨	Falso	Verdadero

Esquema de **comunicación**: Después de que ellos hayan analizado la situación se les pedirá que en parejas expliquen la respuesta y lleguen a un acuerdo.

Esquema de **validación**: Los alumnos exponen sus conclusiones y sus compañeros validan sus respuestas.

Institucionalización: El docente les ayudará a analizarlo detenidamente con la tabla, de manera que los alumnos corroboren su respuesta.

Finalmente el docente mencionará los conceptos utilizados en la actividad:

Si se conectan dos enunciados colocando la palabra "si" antes de la condición, llamada antecedente, y después la palabra "entonces", el consecuente; la proposición compuesta resultante se llama un condicional o implicación.

Un condicional de la forma "si p, entonces q", donde "p" y "q" son cualesquiera dos proposiciones, es verdadero si y sólo si el antecedente es falso o el consecuente es verdadero; y es falso si y sólo si el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso.

El manejo de esta conectiva se puede representar con la Tabla 5 y la Tabla del problema del cliente satisfecho de esta actividad con un ejemplo especifico.

4.2 Problema lógica

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivas lógicas.

Situación didáctica: El docente plantea el problema a los alumnos, y se pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

En la mitad de la habitación hay tres cofres cerrados. Entonces llega un hombrecillo y te dice:
-Esto es un tesoro para usted. Para poder llevárselo hay que pasar una prueba de inteligencia, según estipulan las leyes de este país no se puede entregar el tesoro a personas que no tengan un mínimo de inteligencia, porque luego podrían administrarlo mal. Tiene cierta lógica ¿no te parece?
-Bien, bien – le dices al hombrecillo -¿Y cuál es esa prueba?
-Como puede ver, cada cofre lleva adherida una etiqueta en la que se anuncia su contenido.

50 monedas de oro	50 monedas de plata	50 monedas de oro y 50 monedas de plata

Se podrá llevar usted los tres cofres si acierta la solución de este pequeño juego. Pero no se llevará ninguno en caso contrario. La condición establecida para que pueda llevarse los tres es que adivine su contenido, abriendo uno solo de ellos. Pero hay una pequeña dificultad: las etiquetas están cambiadas, ninguna corresponde a su cofre. Así, si una etiqueta pone 50 monedas de plata, puede usted estar seguro de que en ese cofre no hay cincuenta monedas de plata. Puede haber 50 monedas de oro, o bien 50 de oro y 50 de plata. Claro que… hay otra pequeña dificultad: usted podrá señalar el cofre que desee abrir. Luego le vendaré los ojos, abriré el cofre que ha señalado y, a ciegas, extraerá una moneda. Se cerrará el cofre, le quitaré la venda de los ojos y, viendo la moneda que usted tiene en la mano. Podrá decirme cuál es el contenido de cada caja.
Para ganar el juego ¿Cuál cofre elegirías para abrir?

Situación a-didáctica: Los alumnos analizan la información y conjeturan soluciones. Al enfrentarse a la pregunta ¿Cuál cofre elegirías para abrir? analizan sus conjeturas y entran al esquema de **acción**.

Esquema de **validación**: Se elige un alumno para presentar la solución del problema y los alumnos junto con el docente validan los argumentos.

Institucionalización: El docente corrobora que la solución planteada por el alumno quede clara para todos sus compañeros y hace referencia a os conceptos referenciados en las actividades anteriores. Para que el docente realice correctamente la actividad es necesario que conozca la solución del problema.

Respuesta: El cofre que se debe escoger para extraer una moneda es el que dice 50 monedas de oro y 50 monedas de plata. Dado que ninguno de los carteles corresponde al contenido de los cofres, en ese cofre solo puede haber un tipo, nunca una mezcla de monedas de plata y oro. Lo que se puede extraer nos dará información del contenido de los otros cofres.

50 monedas de oro	50 monedas de plata	50 monedas de oro y 50 monedas de plata
•plata •oro y plata	•oro •oro y plata	•oro •plata

Como se muestra en la imagen, cada cofre tiene su respectiva etiqueta pero como está no es verdad las opciones de abajo son las posibles. Entonces si tomamos una moneda de la caja que dice tener una mezcla de monedas de oro y plata, podemos estar seguros que solo tiene un tipo de moneda.

En el primer caso sacamos una moneda de oro del cofre que dice tener monedas de oro y plata, entonces sabemos que el cofre que dice tener monedas de plata tendrá una mezcla de las dos monedas y el cofre que dice tener monedas de oro tendrá de plata.

En el segundo caso donde sacamos una moneda de plata del cofre que dice tener monedas de oro y plata, podemos asegurar que el cofre que dice tener monedas de oro tiene una mezcla de monedas y el cofre que dice tener monedas de plata tiene de oro.

4.3 Problema lógica

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivas lógicas.

Situación didáctica: El docente plantea un problema a los alumnos, y se pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

Un famoso detective busca al culpable de un robo entre 5 sospechosos: Ana, Beto, Claudia, David y Eduardo. Se sabe que el culpable siempre miente y que los demás siempre dicen la verdad.
Ana dice: "¡El culpable es hombre!".
Claudia dice: "Fue Ana o Eduardo";
y Eduardo dice: "Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente".
¿Quién es el culpable?

Situación a-didáctica: Los alumnos al analizar la información del problema, deben comenzar a buscar quién miente, revisando las proposiciones que cada uno de los sospechosos dicen. Al intentar encontrar al mentiroso, comenzarán a sospechar de cada uno y en el proceso ir descartando, con esto entran al esquema de **acción.**

Esquema de **comunicación**: Los alumnos trabajan en parejas compartiendo ideas y validando la información que su compañero analizó.

Esquema de **validación**: Los alumnos exponen su solución y sus compañeros validan sus argumentos.

Institucionalización: El docente ayuda a los alumnos complementando la solución de acuerdo a las definiciones de las conectivas lógicas y las negaciones de las mismas.

Solución:
Primero notamos que Eduardo dice la verdad, “Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente”, ya que la proposición es verdadera independientemente de quien sea el culpable. Si el culpable fuera hombre, Claudia estaría mintiendo y tendríamos dos mentirosos ya que Eduardo no puede ser el culpable. Finalmente si el culpable es mujer tenemos dos casos (Ana o Claudia), si Claudia fuera culpable Ana estaría mintiendo y tenemos dos mentirosas. Por lo que solo queda que Ana sea la culpable.

Sesión 5: Lógica de cuantificadores

5.1 Leyes Constitucionales

Objetivo: El alumno será capaz de identificar los cuantificadores en una proposición, además podrá ejemplificar situaciones donde se usen dichos elementos.

Situación didáctica: El docente entrega a los alumnos la siguiente lista de artículos de la Constitución Mexicana, en los que se utilizan los cuantificadores y además se analizarán en grupo. El docente realizará preguntas que ayuden a ejemplificar como se utilizan los cuantificadores en estos casos.

Lista de artículos constitucionales.

Artículo 1o. En los Estados Unidos Mexicanos todas las personas gozarán de los derechos humanos reconocidos en esta Constitución y en los tratados internacionales de los que el Estado Mexicano sea parte, así como de las garantías para su protección, cuyo ejercicio no podrá restringirse ni suspenderse, salvo en los casos y bajo las condiciones que esta Constitución establece.

Artículo 3o. Toda persona tiene derecho a recibir educación. El Estado -Federación, Estados y Municipios-, impartirá educación preescolar, primaria, secundaria y media superior. La educación preescolar, primaria y secundaria conforman la educación básica; ésta y la media superior serán obligatorias.

Artículo 5o. A ninguna persona podrá impedirse que se dedique a la profesión, industria, comercio o trabajo que le acomode, siendo lícitos.

Artículo 6o. La manifestación de las ideas no será objeto de ninguna inquisición judicial o administrativa, sino en el caso de que ataque a la moral, la vida privada o los derechos de terceros, provoque algún delito, o perturbe el orden público; el derecho de réplica será ejercido en los términos dispuestos por la ley.

Artículo 16. Nadie puede ser molestado en su persona, familia, domicilio, papeles o posesiones, sino en virtud de mandamiento escrito de la autoridad competente, que funde y motive la causa legal del procedimiento.

Las preguntas que se pueden plantear son:

-Si alguno de los mexicanos no tiene oportunidad de estudiar la educación secundaria, ¿se está incumpliendo alguno de los artículos de la constitución?

-Si a algún mexicano se le prohíbe ser doctor por cuestiones de discriminación, ¿se incumple algún artículo de la constitución mexicana?

El docente, después de escuchar sus respuestas y retroalimentar, pregunta si conocen algún ejemplo en el que no se cumpla alguno de los artículos mencionados y pide que se argumente por qué.

Situación **a-didactica:** El alumno contesta las preguntas planteadas por el docente analizando de forma lógica las respuestas y ejemplifica una situación similar.

Esquema de **comunicación** y esquema de **validación**: El alumno comenta y escucha las respuestas de sus compañeros de manera que se puedan validar los mensajes y llegar a una conclusión.

Institucionalización: El docente les indica de qué manera se utilizan los cuantificadores lógicos en los artículos y en general en la vida cotidiana, es decir, para cuáles casos utilizamos el para todo ($\forall$) y el existe ($\exists$).

Cuantificador universal: Se representa con el símbolo $\forall$ y significa que todos los elementos de cierto conjunto cumplen la proposición. ($\forall x \in A, Px$) significa que para todo x en el conjunto A se cumple la proposición P.

Cuantificador existencial: Se representa con el símbolo $\exists$ y significa que existe al menos un elemento de cierto conjunto que cumple una proposición. ($\exists x \in A, Px$) significa que existe al menos un x en el conjunto A que satisface la proposición P.

5.2 Negación de cuantificadores

Objetivo: El alumno será capaz de identificar el valor de verdad de las proposiciones que contengan cuantificadores y además será capaz de modificarlos, al negar las proposiciones.

Situación didáctica: El docente comparte con los alumnos una lista de proposiciones y se pide analizar de manera individual el valor de verdad de cada una de ellas. Es necesario que el docente guie la sesión, ayudando a los alumnos a comprender cada uno de los conceptos mencionados en la lista y de esta forma todos los alumnos completen la clasificación.

- Algunas circunferencias no tienen radio positivo.
- Ningún rectángulo es cuadrado.
- El cuadrado de cualquier número primo es par.
- Ningún triángulo equilátero puede ser isósceles.
- No todos los hombres y mujeres tienen la capacidad de abstraer.
- Para todo número entero hay otro entero tal que al sumarlos resulta cero.
- La suma de algún número entero con cualquiera otro es cero.
- Cualquier estudiante que no se interesa en un tema, si lo estudia lo aprende.

Situación **a-didáctica**: Los alumnos identifican el valor de verdad de las proposiciones, justificando las proposiciones con valor de verdad y cambiando las proposiciones falsas a una proposición equivalente a la negación del enunciado.

Esquema de **acción**: El alumno clasifica las proposiciones con su valor de verdad.

Esquema de **comunicación**: Los alumnos comentan cuales proposiciones son falsas y entre ellos llegan a formular la proposición verdadera.

Esquema de **validación**: Una vez terminada la clasificación, los alumnos exponen sus resultados y los compañeros validan los argumentos mencionados.

Institucionalización: El docente ayuda a los alumnos a analizar las negaciones de los cuantificadores con la siguiente información.

$\neg(\forall x)(Px) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg Px)$: algunos x no cumplen P

$\neg(\exists x)(Px) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg Px)$: ningún x cumple P

$\neg(\exists x)(Px \,\&\, Qx) \Leftrightarrow (\forall x)(Px \rightarrow \neg Qx)$: ningún x que cumple P cumple Q

$\neg(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \Leftrightarrow (\exists x)(Px \,\&\, \neg Qx)$: algún x que cumple P no cumple Q

Sesión 6: Aplicación de los cuantificadores

6.1 Problemas (lógica de cuantificadores)

<u>Objetivo:</u> El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran cuantificadores.

Situación didáctica: El docente plantea el problema a los alumnos y pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

Problema 1. Alain, Bruno y Carlos están platicando y tienen la siguiente conversación:
Alain: “Ninguno de nosotros miente”.
Bruno: “Dos de nosotros están mintiendo”.
Carlos: “Solo uno de nosotros siempre miente”.
¿Quién dice la verdad?

Problema 2. Hay algunas canicas en una bolsa. Con respecto al contenido de la bolsa, tres amigos dijeron lo siguiente:
Andrés dijo: Hay menos de 10 canicas en la bolsa y todas son verdes.
Lucas dijo: Hay 5 canicas verdes y 6 canicas blancas en la bolsa.
Raúl dijo: Hay 7 canicas en la bolsa y todas son verdes.
Se sabe que uno de ellos mintió y los otros dos dijeron la verdad. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

Situación a-didáctica: Los alumnos analizan la información y conjeturan soluciones.

Esquema de **acción:** Los alumnos interactúan con el problema, planteando posibles escenarios de solución.

Esquema de **comunicación**: Los alumnos retroalimentan las conjeturas de sus compañeros y comparten las ideas de solución que tienen.

Esquema de **validación**: Un alumno presenta la solución del problema y los alumnos, junto con el docente, validan los argumentos.

Institucionalización: El docente ayuda a complementar la solución propuesta, enlazando la información expuesta por el alumno con la solución del problema y la aclaración de cómo se están manejando los cuantificadores.

Solución problema 1: Bruno dice la verdad y quienes mienten son Alain y Carlos. Entonces las proposiciones verdaderas son de la siguiente manera:
Alain: “Al menos uno de nosotros miente”.
Bruno: “Dos de nosotros están mintiendo”.
Carlos: “Dos o más de nosotros mienten o ninguno miente”.
Con estas proposiciones no se contradicen y podemos concluir que efectivamente Bruno es el que dice la verdad.

Solución problema 2: Andrés miente y quienes dicen la verdad son Lucas y Raúl. Entonces las proposiciones verdaderas son de la siguiente manera:
Andrés: Hay más de 10 canicas en la bolsa o alguna no es verde.
Lucas: Hay 5 canicas verdes y 6 canicas blancas en la bolsa.
Raúl: Hay 7 canicas en la bolsa y todas son verdes.
Con estas proposiciones no se contradicen y podemos concluir que efectivamente Andrés es el que miente.
Nota: La negación de lo que dijo Andrés se puede realizar usando la leyes de De Morgan las cuales afirman que $\neg(A\ y\ B) = \neg A\ o\ \neg B$ siendo A y B las proposiciones y $\neg$ el signo de negación.

Sesiones 7, 8, 9 y 10

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran diferentes contextos lógicos.

Situación didáctica: El docente plantea los siguientes problemas a los alumnos, y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta. El docente ayudará a los alumnos a resolver los problemas, realizando preguntas y guiando a los alumnos para razonar correctamente.

Los alumnos llegan a la fase de **situación a-didactica** en el momento en que comienzan a trabajar con las variables y la información del problema, es necesario que quede claro para todos lo que pide el problema, para que esto suceda el docente debe intervenir explicando de la manera más clara el problema y su objetivo, esto sin darle al alumno un camino de solución.

Esquema de **acción**: Los alumnos razonan el contexto del problema y generan aproximaciones de solución.

Esquema de **comunicación**: Los alumnos pueden comentar en grupos diferentes ideas de solución para poder construir soluciones más completas.

Esquema de **validación**: Los alumnos exponen las soluciones con argumentos lógicos que sus compañeros evalúan y validan.

Institucionalización: El docente es el encargado de completar o mediar los comentarios de los alumnos, y es el encargado de evidenciar si algún argumento no es válido, siempre y cuando los alumnos que están evaluando no se percaten de las inconsistencias de los argumentos.

Sesión 7: Argumentación 1

7.1 Problemas matemáticos

Cada una de seis personas trata de adivinar el número de dulces dentro de una caja. Sus conjeturas fueron 52, 59, 62, 65, 49 y 42. Las seis se equivocaron y sus errores (por exceso o por defecto) en algún orden fueron 1, 4, 6, 9, 11 y 12 dulces. ¿Cuántos dulces había en la caja?

Cuatro alumnos responden un cuestionario de opción múltiple de cuatro preguntas. En cada pregunta hay 5 posibles respuestas: A, B, C, D y E. El primer estudiante responde DDAE, el segundo CBAD, el tercero CDAC y el cuarto BBCC. Si cada uno acertó exactamente dos respuestas, dar las cuatro respuestas correctas.

Sesión 8: Argumentación 2

8.1 Problemas matemáticos

Julieta, Abigail, Nayeli y Vivian estaban sentadas platicando de sus gustos musicales.

La que se sentó a la izquierda de Abigail, solo escucha One Direction.

Julieta estaba en frente de la que escucha banda.

La que estaba a la derecha de Vivian es fan de los cumbiones.

La que escucha heavy metal y la que escucha cumbiones estaban sentadas frente a frente.

¿Qué escucha Julieta?

Germán y Orlando platican sobre un problema que desean poner en un examen. Germán hace las siguientes afirmaciones para tratar de convencerlo:

Si es de Geometría es fácil.

Si es difícil, entonces es de Aritmética.

Es de Geometría o de Combinatoria.

Si es de Combinatoria, es difícil.

Es difícil o fácil.

Sesión 9: Argumentación 3

9.1 Problemas matemáticos

En la Isla de Caballeros y Villanos cada ciudadano es un Caballero (quien siempre dice la verdad) o un Villano (quien siempre miente), pero no ambos. En la isla hay 7 personas sentadas alrededor de una fogata. Todos dicen: Estoy sentado entre dos Villanos.
¿Cuántos Villanos hay?

En el bosque hay 20 duendes. Algunos son verdes, otros son amarillos y otros son morados. Se les hicieron 3 preguntas. Los verdes siempre dijeron la verdad, los morados siempre mintieron, y cada uno de los amarillos eligió entre mentir y decir la verdad al responder la primera pregunta y, a partir de ahí alternó entre verdad y mentira.
La primera pregunta que se le hizo a cada uno fue "¿Eres verde?", a lo que 17 de ellos respondieron "Sí". La segunda pregunta fue "¿Eres amarillo?" y 12 de ellos respondieron "Sí". La tercera pregunta fue "¿Eres morado?" y 8 de ellos respondieron "Sí". ¿Cuántos duendes son amarillos?

Sesión 10: Argumentación 4

10.1 Problemas matemáticos

En una mesa hay tres sombreros negros y dos blancos. Tres señores en fila india se ponen un sombrero al azar cada uno y sin mirar el color. Se le pregunta al tercero de la fila, que puede ver el color del sombrero del segundo y el primero, si puede decir el color de su sombrero, a lo que responde negativamente. Se le pregunta al segundo que ve solo el sombrero del primero y tampoco puede responder a la pregunta. Por último el primero de la fila que no ve ningún sombrero responde correctamente de qué color es el sombrero que tenía puesto.
¿Cuál es este color y cuál es la lógica que uso para saberlo?

Llegan 4 niños a una fiesta y hay 6 gorros; 3 verdes y 3 rojos. A cada niño se le coloca su gorro respectivo con los ojos vendados y se sientan en una mesa circular de forma que cada niño ve los gorros de los otros tres pero no puede ver su gorro. Empezando con el niño 1 y en sentido de las manecillas del reloj a cada niño se le hace la pregunta: "¿Sabes ya de qué color es tu gorro?". Todos escuchan la respuesta hasta que alguien contesta afirmativamente. Además el primer niño dice que no. ¿Quién de estos niños es seguro que contestará afirmativamente?

Actividades del Taller de lógica matemática

En este apartado se muestran las actividades del taller de lógica matemática, descritas como se aplicaron en el aula, con la idea de proporcionarles a los profesores una guía del taller de forma sencilla con objetivos y las actividades.

Sesión 1: Proposiciones

1.1 La historia

Objetivo: El alumno será capaz de identificar en un conjunto de afirmaciones cuáles de ellas son proposiciones con base en su clasificación como verdaderas, falsas o sin valor de verdad, es decir, no se puede concluir que sea verdadero o falso. Además, el alumno identificará las oraciones que no tengan información suficiente para concluir que es una proposición.

Actividad:

1.- Se entrega a los alumnos la actividad llamada "LA HISTORIA" que describe una situación con cierta información que los alumnos evaluarán.

LA HISTORIA

"Un hombre de negocios acababa de apagar las luces de la tienda cuando un hombre apareció y le pidió dinero. El dueño abrió la caja registradora. El contenido de la caja registradora fue extraído y el hombre salió corriendo. Un miembro de la policía fue avisado rápidamente"

2.- Se les pedirá a los alumnos clasificar las afirmaciones del cuestionario como verdaderas, falsas o sin valor de verdad, esta clasificación es acorde a la situación planteada en "LA HISTORIA" (Anexo 4), se dejará que los alumnos razonen por si solos la situación y clasifiquen según su criterio.

Afirmaciones:

1) Un hombre apareció después que el dueño apagó las luces de la tienda.
2) El ladrón era un hombre.
3) El hombre que apareció no pidió dinero.
4) El hombre que abrió la caja registradora era el dueño.
5) El dueño de la tienda extrajo el contenido de la caja registradora y salió corriendo.
6) Alguien abrió una caja registradora.
7) Después de que el hombre que pidió el dinero y extrajo el contenido de la caja registradora, huyó a toda carrera.
8) Aunque la caja registradora contenía dinero, la historia no dice cuánto.
9) El ladrón le pidió dinero al dueño.
10) Un hombre de negocios acababa de apagar las luces cuando un hombre apareció dentro de la tienda.
11) Era a plena luz del día cuando el hombre apareció.
12) El hombre que apareció abrió la caja registradora.
13) Nadie pidió dinero.
14) La historia se refiere a una serie de eventos en los cuales únicamente se mencionan tres personas: el dueño de la tienda, un hombre que pidió el dinero y un miembro de la fuerza pública.
15) Los siguientes eventos ocurrieron: alguien pidió dinero, una caja registradora fue abierta, su contenido fue extraído y un hombre huyó de la tienda.

3.- Al final de la actividad será necesario evaluar las clasificaciones. El docente pedirá que los alumnos compartan su clasificación de forma sincera y sin modificar sus resultados. Cada proposición del cuestionario será mencionada por el docente y se pedirá que levanten la mano los alumnos conforme a su clasificación. Después de registrar las respuestas, el docente abrirá una discusión con cuestionamientos que ayuden al alumno a razonar su respuesta y finalmente concluir la clasificación correcta.

Razonamiento lógico previo a la valoración de cada afirmación:

Razonamiento lógico previo a la valoración de cada afirmación:

1. El hombre de negocios y el dueño ¿son necesariamente la misma persona? **Sin valor de verdad.**
2. ¿Puede hablarse de un robo? Tal vez el hombre que demandó dinero era un cobrador o el hijo del dueño, ellos reclaman dinero a veces. **Sin valor de verdad.**
3. **Falso.**
4. "El dueño abrió la caja registradora". **Verdadero.**
5. La historia no lo excluye, aunque es poco probable. **Sin valor de verdad.**
6. "El dueño abrió la caja registradora". **Verdadero.**
7. No sabemos quién extrajo el contenido de la caja, ni es necesariamente cierto que el hombre haya huido. **Sin valor de verdad.**
8. No sabemos si la caja contenía dinero. **Sin valor de verdad.**
9. No sabemos si fue un robo. **Sin valor de verdad.**
10. ¿Quién dice que entró a la tienda? Pudo haber demandado dinero desde fuera o por la ventana. **Sin valor de verdad.**
11. Las luces generalmente permanecen prendidas durante el día. **Sin valor de verdad.**
12. ¿No sería posible que el hombre que haya aparecido haya sido el dueño? **Sin valor de verdad.**
13. La historia dice que el hombre que apareció demandó dinero. **Falso.**
14. ¿Son el dueño y el hombre de negocios la misma persona, o son dos personas diferentes? Lo mismo puede preguntarse con el hombre de la tienda y el hombre que desapareció. **Sin valor de verdad.**
15. ¿Huyó? ¿No puede haberse alejado a toda carrera en un auto? **Sin valor de verdad.**

2.2 Publicidad engañosa

Objetivo: El alumno será capaz de identificar los enunciados que tienen un valor de verdad, con el fin de que se pueda evaluar la veracidad de las proposiciones utilizadas en su vida diaria.

Actividad:

1.- El docente entrega a los alumnos una serie de tarjetas que contienen algunos slogans publicitarios, los cuales deben identificar como proposiciones verdaderas o falsas. Además los alumnos deben decidir hipotéticamente si deben comprar el artículo de venta o no.

Publicidad engañosa

1. A que no puedes comer solo una.
2. A Duvalin no lo cambio por nada.
3. Hay cosas que el dinero no puede comprar pero para todo lo demás existe mastercard.
4. Red bull te da alas.
5. Probablemente la mejor cerveza del mundo.
6. Si no quedas satisfecho te devolvemos tu dinero.

2.- Después de analizar el slogan, los alumnos diseñarán la publicidad para un artículo que conozcan, con una proposición verdadera y otro con una proposición falsa.

3.- Al final se presentará a los alumnos una "frase política", de la cual se analizará el valor de verdad que tiene, generando una discusión entre los alumnos cuyo objetivo es evidenciar que hay proposiciones sin valor de verdad.

"Ni nos perjudica, ni nos beneficia sino todo lo contrario".

Sesión 2: Negación de proposiciones

2.1 Problema lógica

Objetivo: El alumno será capaz de cambiar el valor de verdad de una proposición dada.

Actividad:

1.- El docente llevará tres cajas con una proposición escrita en cada una y planteará la siguiente situación:

Cada uno de ustedes es un prisionero que tiene la posibilidad de obtener su libertad si escoge una caja adecuada entre las 3 dadas. En cada una de las cajas hay una proposición, pero sólo una de ellas es verdadera, estas son:

- Caja 1: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 no tiene la llave de la libertad.

Tomando en cuenta que solo una caja tiene la llave de la libertad, ¿Cuál caja deben escoger para tener la certeza de alcanzar su libertad?

2.- Se pedirá que ninguno exprese su respuesta y solo la escriba. Se recolectarán las respuestas con los nombres de los alumnos para saber quién gana la llave. En manera de sorteo se elige un alumno el cual tiene la posibilidad de dar su respuesta y ver si encuentra la llave. Antes de abrir la caja deberá argumentar su respuesta y los demás alumnos la analizarán, si se llega a la conclusión de que es un buen argumento se da la oportunidad de abrir la caja. Si el alumno no encuentra la llave, se da la oportunidad de que otro alumno intente encontrarla con su respuesta.

Solución de la situación: Si quisiera encontrar la llave solo necesito plantear las proposiciones con valor de verdaderas. Para ello analizaremos los siguientes casos:

Primer caso: La caja 1 dice la verdad, las cajas 2 y 3 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 tiene la llave de la libertad.

Si tomo este caso no puedo asegurar cual caja tiene la llave de la libertad, ya que la 1 y la 2 dicen que tienen la llave de la libertad.

Segundo caso: la caja 2 dice la verdad y las cajas 1 y 3 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 tiene la llave de la libertad.

En este caso es evidente que las proposiciones se contradicen entre sí, por lo cual no puedo asegurar cual caja tiene la llave de la libertad.

Tercer caso: la caja 3 dice la verdad y las cajas 1 y 2 dicen mentiras.

Esto es que las proposiciones verdaderas serían:

- Caja 1: Esta caja no tiene la llave de la libertad.
- Caja 2: Esta caja tiene la llave de la libertad.
- Caja 3: La caja 1 no tiene la llave de la libertad.

Con este caso podemos asegurar que la caja dos tiene la llave de la libertad, ya que ninguna proposición se contradice y se puede asegurar que la caja 2 tiene la llave.

Sesión 3: Conectivas lógicas

3.1 Lotería de conjuntos diferentes

Objetivo: El alumno será capaz de identificar conjuntos que cumplan ciertas características, utilizando las conectivas lógicas “y” y “o”.

Actividad:

Se reparten a los alumnos tablas en forma de lotería con diferentes objetos matemáticos. El docente tendrá 50 cartas en las cuales vendrán escritos enunciados de la siguiente forma:

- Se cumple A y B
- Se cumple A o B

Siendo A y B características de algunos objetos que aparecen en las tablas, el docente comienza el juego de la lotería mencionando los enunciados de cada carta, y gana el alumno que pueda llenar toda su tabla.

Ejemplo:

El docente menciona la carta con el enunciado: Es una ecuación y es de grado 2

Los alumnos pueden identificar cuáles son los objetos matemáticos que cumplen esas dos características y los marcan en sus tablas.

Después el docente menciona la carta con el enunciado: Es círculo o triángulo

Los alumnos identifican los objetos matemáticos con alguna de las dos características y los marcan en sus tablas.

3.2 Problemas de lógica

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivas lógicas.

Actividad: Se plantean dos problemas a los alumnos, y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

Primer problema: Tenemos cuatro perros: un chihuahua, un salchicha, un pitbull y un xoloitzcuintle. Éste último come más que el chihuahua; el pitbull come más que el chihuahua y menos que el salchicha, pero éste come más que el xoloitzcuintle. ¿Cuál de los cuatro será más barato de mantener?

Solución propuesta:

Con lo anterior tenemos las siguientes desigualdades:

a) X>C
b) P>C y P<S
c) P>X

Tomando b) y c) tenemos S>P>X y P>C, además utilizando la desigualdad a) tenemos que S>P>X>C y P>C por lo tanto el chihuahua es más barato de mantener.

Segundo problema: El caballo de Mario es más oscuro que el de Samuel, pero más rápido y más viejo que el de Juan, que es aún más lento que el de Pedro, que es más joven que el de Mario, que es más viejo que el de Samuel, que es más claro que el de Pedro, aunque el de Juan es más lento y más oscuro que el de Samuel. ¿Cuál es el más viejo, cuál el más lento y cuál el más claro?

Solución propuesta:

De la redacción obtenemos la siguiente información:

- Color

M>S, P>S y J>S concluimos que Samuel tiene el caballo más claro.

- Velocidad

M>J, P>J y S>J concluimos que Juan tiene el caballo más lento.

- Edad

M>J, M>P y M>S concluimos que Mario tiene el caballo más viejo.

Sesión 4: Condicional o implicación lógica

4.1 Cliente Satisfecho

Objetivo: El alumno podrá identificar cuando una implicación lógica es verdadera o falsa.

Actividad:

Se plantea a los alumnos la siguiente situación:

Una frase publicitaria que usa el detergente Hariel dice lo siguiente: “Si usa Hariel entonces su ropa quedará blanca”. Se desea saber ¿bajo qué condiciones podríamos demandar al fabricante?

Para analizar esta situación los alumnos necesitan plantear los diferentes casos posibles. Después de que ellos lo hayan analizado se les pedirá que escriban la respuesta a la pregunta.

Después el docente les ayudará a analizarlo detenidamente con una tabla, de manera que los alumnos corroboren su respuesta.

Si usa Hariel	→	Su ropa quedará blanca	Valor de verdad de la implicación
Verdadero	→	Verdadero	Verdadero
Verdadero	→	Falso	Falso
Falso	→	Verdadero	Verdadero
Falso	→	Falso	Verdadero

Tabla 7 Tabla de Cliente satisfecho

4.2 Problema lógica

<u>Objetivo:</u> El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivas lógicas.

<u>Actividad:</u>

Se plantean el problema a los alumnos, y se pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

En mitad de la habitación hay tres cofres cerrados. Entonces llega un hombrecillo y te dice:

-Esto es un tesoro para usted. Para poder llevárselo hay que pasar una prueba de inteligencia, según estipulan las leyes de este país: no se puede entregar el tesoro a personas que no tengan un mínimo de inteligencia, porque luego podrían administrarlo mal. Tiene cierta lógica ¿no te parece?

-Bien, bien – le dices al hombrecillo -¿Y cuál es esa prueba?

-Como puede ver, cada cofre lleva adherida una etiqueta en la que se anuncia su contenido

50 monedas de oro	50 monedas de plata	50 monedas de oro y 50 monedas de plata

Se podrá llevar usted los tres cofres si acierta la solución de este pequeño juego. Pero no se llevará ninguno en caso contrario. La condición establecida para que pueda llevarse los tres es que adivine su contenido, abriendo uno solo de ellos. Pero hay una pequeña dificultad: las etiquetas están cambiadas, ninguna corresponde a su cofre. Así, si una etiqueta pone 50 monedas de plata, puede usted estar seguro de que en ese cofre no hay cincuenta monedas de plata. Puede haber 50 monedas de oro, o bien 50 de oro y 50 de plata. Claro que… hay otra pequeña dificultad: usted podrá señalar el cofre que desee abrir. Luego le vendaré los ojos, abriré el cofre que ha señalado y, a ciegas, extraerá una moneda. Se cerrará el cofre, le quitaré la venda de los ojos y, viendo la moneda que usted tiene en la mano. Podrá decirme cuál es el contenido de cada caja.

Para ganar el juego ¿Cuál cofre elegirías para abrir?

Respuesta: El cofre que se debe escoger para extraer una moneda es el que dice 50 monedas de oro y 50 monedas de plata. Dado que ninguno de los carteles corresponde al contenido de los cofres, en ese cofre solo puede haber un tipo, nunca una mezcla de monedas de plata y oro. Lo que se puede extraer nos dará información del contenido de los otros cofres.

50 monedas de oro	50 monedas de plata	50 monedas de oro y 50 monedas de plata
• plata • oro y plata	• oro • oro y plata	• oro • plata

Como se muestra en la imagen, cada cofre tiene su respectiva etiqueta, pero como está no indica la verdad, las opciones de abajo son las posibles. Entonces si tomamos una moneda de la caja que dice tener una mezcla de monedas de oro y plata, podemos estar seguros que solo tiene un tipo de moneda.

En el primer caso sacamos una moneda de oro del cofre que dice tener monedas de oro y plata, entonces sabemos que el cofre que dice tener monedas de plata tendrá una mezcla de las dos monedas y el cofre que dice tener monedas de oro tendrá de plata.

En el segundo caso sacamos una moneda de plata del cofre que dice tener monedas de oro y plata, podemos asegurar que el cofre que dice tener monedas de oro tiene una mezcla de monedas y el cofre que dice tener monedas de plata tiene de oro.

4.3 Problema lógica

<u>Objetivo:</u> El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con conectivos lógicos.

<u>Actividad</u>:

Se plantea un problema a los alumnos y se pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

Un famoso detective busca al culpable de un robo entre 5 sospechosos: Ana, Beto, Claudia, David y Eduardo. Se sabe que el culpable siempre miente y que los demás siempre dicen la verdad. Ana dice: "¡El culpable es hombre!". Claudia dice: "Fue Ana o Eduardo"; y Eduardo dice: "Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente". ¿Quién es el culpable?

Solución:

Primero notamos que Eduardo dice la verdad, "Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente", ya que la proposición es verdadera independientemente de quien sea el culpable. Si el culpable fuera hombre, Claudia estaría mintiendo y tendríamos dos mentirosos ya que Eduardo no puede ser el culpable. Finalmente si el culpable es mujer tenemos dos casos (Ana o Claudia), si Claudia fuera culpable Ana estaría mintiendo y tenemos dos mentirosas. Por lo que solo queda que Ana sea la culpable.

Sesión 5: Lógica de cuantificadores

5.1 Leyes Constitucionales

Objetivo: El alumno será capaz de identificar los cuantificadores en una proposición, además podrá ejemplificar situaciones donde se usen dichos elementos.

Actividad:

El docente entregará a los alumnos la siguiente lista de artículos de la Constitución Mexicana, en los que se utilizan los cuantificadores, además se analizarán en grupo. El docente realizará preguntas que ayuden a ejemplificar como se utilizan los cuantificadores en estos casos.

Lista de artículos constitucionales.

Artículo 1o. En los Estados Unidos Mexicanos todas las personas gozarán de los derechos humanos reconocidos en esta Constitución y en los tratados internacionales de los que el Estado Mexicano sea parte, así como de las garantías para su protección, cuyo ejercicio no podrá restringirse ni suspenderse, salvo en los casos y bajo las condiciones que esta Constitución establece

Artículo 3o.Toda persona tiene derecho a recibir educación. El Estado -Federación, Estados y Municipios-, impartirá educación preescolar, primaria, secundaria y media superior. La educación preescolar, primaria y secundaria conforman la educación básica; ésta y la media superior serán obligatorias.

Artículo 5o. A ninguna persona podrá impedirse que se dedique a la profesión, industria, comercio o trabajo que le acomode, siendo lícitos.

Artículo 6o. La manifestación de las ideas no será objeto de ninguna inquisición judicial o administrativa, sino en el caso de que ataque a la moral, la vida privada o los derechos de terceros, provoque algún delito, o perturbe el orden público; el derecho de réplica será ejercido en los términos dispuestos por la ley.

Artículo 16. Nadie puede ser molestado en su persona, familia, domicilio, papeles o posesiones, sino en virtud de mandamiento escrito de la autoridad competente, que funde y motive la causa legal del procedimiento.

Las preguntas que se pueden plantear son:

-Si alguno de los mexicanos no tiene oportunidad de estudiar la educación secundaria, ¿se está incumpliendo alguno de los artículos de la constitución?

-Si a algún mexicano se le prohíbe ser doctor por cuestiones de discriminación, ¿se incumple algún artículo de la constitución mexicana?

El docente, después de escuchar sus respuestas y retroalimentar, preguntará si conocen algún ejemplo en el que no se cumpla alguno de los artículos mencionados.

5.2 Negación de cuantificadores

Objetivo: El alumno será capaz de identificar el valor de verdad de las proposiciones que contenga cuantificadores y además será capaz de modificarlos negando las proposiciones.

Actividad:

Mostrar a los alumnos una lista de proposiciones y discutir cuál de ellas son verdaderas.

- Algunas circunferencias no tienen radio positivo.
- Ningún rectángulo es cuadrado.
- El cuadrado de cualquier número primo es par.
- Ningún triángulo equilátero puede ser isósceles.
- No todos los hombres y mujeres tienen la capacidad de abstraer.
- Para todo número entero hay otro entero tal que al sumarlos resulta cero.
- La suma de algún número entero con cualquiera otro es cero.
- Cualquier estudiante que no se interesa en un tema, si lo estudia lo aprende.

Las proposiciones falsas tendrán que cambiarse por proposiciones equivalentes a la negación del enunciado.

Sesión 6: Aplicación de los cuantificadores

6.1 Problemas (lógica de cuantificadores)

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran proposiciones con cuantificadores.

Actividad:

Se plantean dos problemas a los alumnos y se pide que lo resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta.

Problema 1. Alain, Bruno y Carlos están platicando y tienen la siguiente conversación:

- Alain: “Ninguno de nosotros miente”.
- Bruno: “Dos de nosotros están mintiendo”.
- Carlos: “Solo uno de nosotros siempre miente”.

¿Quién dice la verdad?

Solución: Bruno dice la verdad y quienes mienten son Alain y Carlos. Entonces las proposiciones verdaderas son de la siguiente manera:

- Alain: “Al menos uno de nosotros miente”.
- Bruno: “Dos de nosotros están mintiendo”.
- Carlos: “Dos o más de nosotros mienten o ninguno miente”.

Con estas proposiciones no se contradicen y podemos concluir que efectivamente Bruno es el que dice la verdad.

Problema 2. Hay algunas canicas en una bolsa. Con respecto al contenido de la bolsa, tres amigos dijeron lo siguiente:

- Andrés dijo: Hay menos de 10 canicas en la bolsa y todas son verdes.
- Lucas dijo: Hay 5 canicas verdes y 6 canicas blancas en la bolsa.
- Raúl dijo: Hay 7 canicas en la bolsa y todas son verdes.

Se sabe que uno de ellos mintió y los otros dos dijeron la verdad. ¿Cuántas canicas hay en la bolsa?

Solución:

Andrés miente y quienes dicen la verdad son Lucas y Raúl. Entonces las proposiciones verdaderas son de la siguiente manera:

- Andrés: Hay más de 10 canicas en la bolsa o alguna no es verde.
- Lucas: Hay 5 canicas verdes y 6 canicas blancas en la bolsa.
- Raúl: Hay 7 canicas en la bolsa y todas son verdes.

Con estas proposiciones no se contradicen y podemos concluir que efectivamente Andrés es el que miente.

Nota: La negación de lo que dijo Andrés se puede realizar usando la leyes de De Morgan las cuales afirman que $\neg(A \; y \; B) = \neg A \; o \; \neg B$ siendo A y B las proposiciones y ¬ el signo de negación.

Sesión 7: Argumentación 1

7.1 Problemas matemáticos

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucran diferentes contextos lógicos.

Actividad:

Se plantean los siguientes problemas a los alumnos, y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta. El docente ayudará a los alumnos a resolver los problemas, realizando preguntas y guiando a los alumnos para razonar correctamente.

Problema 1: Cada una de seis personas trata de adivinar el número de dulces dentro de una caja. Sus conjeturas fueron 52, 59, 62, 65, 49 y 42. Las seis se equivocaron y sus errores (por exceso o por defecto) en algún orden fueron 4, 6, 1, 9, 12 y 11 dulces. ¿Cuántos dulces había en la caja?

Problema 2: Cuatro alumnos responden un cuestionario de opción múltiple de cuatro preguntas. En cada pregunta hay 5 posibles respuestas: A, B, C, D y E. El primer estudiante responde DDAE, el segundo CBAD, el tercero CDAC y el cuarto BBCC. Si cada uno acertó exactamente dos respuestas, dar las cuatro respuestas correctas.

Sesión 8: Argumentación 2

8.1 Problemas matemáticos

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucren diferentes contextos lógicos.

Actividad:

Se plantean los siguientes problemas a los alumnos y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta. El docente ayudará a los alumnos a resolver los problemas, realizando preguntas y guiando a los alumnos para razonar correctamente.

Problema 1: Julieta, Abigail, Nayeli y Vivian estaban sentadas platicando de sus gustos musicales. La que se sentó a la izquierda de Abigail, solo escucha One Direction. Julieta estaba en frente de la que escucha banda. La que estaba a la derecha de Vivian es fan de los cumbiones. La que escucha heavy metal y la que escucha cumbiones estaban sentadas frente a frente. ¿Qué escucha Julieta?

Problema 2: Germán y Orlando platican sobre un problema que desean poner en un examen. Germán hace las siguientes afirmaciones para tratar de convencerlo:

- Si es de Geometría es fácil.
- Si es difícil, entonces es de Aritmética.
- Es de Geometría o de Combinatoria.
- Si es de Combinatoria, es difícil.

- Es difícil o fácil.

¿De qué área y dificultad es el problema?

Sesión 9: Argumentación 3

9.1 Problemas matemáticos

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucren diferentes contextos lógicos.

Actividad:

Se plantean los siguientes problemas a los alumnos y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta. El docente ayudará a los alumnos a resolver los problemas, realizando preguntas y guiando a los alumnos para razonar correctamente.

Problema 1: En la Isla de Caballeros y Villanos cada ciudadano es un Caballero (quien siempre dice la verdad) o un Villano (quien siempre miente), pero no ambos. En la isla hay 7 personas sentadas alrededor de una fogata. Todos dicen Estoy sentado entre dos Villanos.

¿Cuántos Villanos hay?

Problema 2: En el bosque hay 20 duendes. Algunos son verdes, otros son amarillos y otros son morados. Se les hicieron 3 preguntas. Los verdes siempre dijeron la verdad, los morados siempre mintieron, y cada uno de los amarillos eligió entre mentir y decir la verdad al responder la primera pregunta y, a partir de ahí alternó entre verdad y mentira.

La primera pregunta que se le hizo a cada uno fue “¿Eres verde?”, a lo que 17 de ellos respondieron “Sí”. La segunda pregunta fue “¿Eres amarillo?” y 12 de ellos respondieron “Sí”. La tercera pregunta fue “¿Eres morado?” y 8 de ellos respondieron “Sí”. ¿Cuántos duendes son amarillos?

Sesión 10: Argumentación 4

10.1 Problemas matemáticos

Objetivo: El alumno será capaz de resolver problemas de lógica que involucren diferentes contextos lógicos.

Actividad:

Se plantean los siguientes problemas a los alumnos y se pide que los resuelvan escribiendo el argumento de su respuesta. El docente ayudará a los alumnos a resolver los problemas, realizando preguntas y guiando a los alumnos para razonar correctamente.

Problema 1: En una mesa hay tres sombreros negros y dos blancos. Tres señores en fila india se ponen un sombrero al azar cada uno y sin mirar el color. Se le pregunta al tercero de la fila, que puede ver el color del sombrero del segundo y el primero, si puede decir el color de su sombrero, a lo que responde negativamente. Se le pregunta al segundo que ve solo el sombrero del primero y tampoco puede responder a la pregunta. Por último el primero de la fila que no ve ningún sombrero responde correctamente de qué color es el sombrero que tenía puesto. ¿Cuál es este color y cuál es la lógica que uso para saberlo?

Problema 2: Llegan 4 niños a una fiesta y hay 6 gorros; 3 verdes y 3 rojos. A cada niño se le coloca su gorro respectivo con los ojos vendados y se sientan en una mesa circular de forma que cada niño ve los gorros de los otros tres pero no puede ver su gorro. Empezando con el niño 1 y en sentido de las manecillas del reloj a cada niño se le hace la pregunta:"¿Sabes ya de qué color es tu gorro?" Y todos escuchan la respuesta hasta que alguien contesta afirmativamente. Además el primer niño dice que no. ¿Quién de estos niños es seguro que contestará afirmativamente?

5.2.3 Implementación

Los talleres se imparten a dos grupos de quinto semestre del bachillerato Sabes El Lindero.

Se aplicaron tres evaluaciones con 5 problemas matemáticos para medir el avance de los alumnos en la comprensión de los conceptos matemáticos y el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, además se busca identificar mejora en las estrategias, procedimientos y organización de las ideas para argumentar de manera adecuada una solución. Estos exámenes se aplicaron al inicio del taller (diagnóstico) Anexo 1, a la mitad del taller (evaluación intermedia) Anexo 2 y al final del taller (evaluación final) Anexo 3.

Duración del taller: 13 sesiones de 1 hora y 30 minutos con cada grupo durante el semestre Enero-Junio 2019.

5.2.1 Análisis a posteriori y evaluación

Las evaluaciones (Anexo 1, 2 y 3) fueron analizadas por problema y cada uno se calificó con puntuación entre 0 y 3 puntos de acuerdo al avance en la solución, ya que en estas evaluaciones no se espera solamente una respuesta correcta sino que parte importante en la solución es la justificación que se pueda dar a la misma. Dicho avance se podía determinar según los anexos 4, 5 y 6 excepto el problema 5 que fue una actividad en clase que se describirá en el final de este capítulo.

La cantidad total de alumnos que participaron en todo el taller fue de 30. Teniendo en cuenta que el total de puntos posibles en cada evaluación es de 12, se obtuvieron los siguientes resultados: el 26.7% no tuvo un avance significativo en la cantidad de los puntos obtenidos en las evaluaciones, esto quiere decir que no avanzaron más de un punto del primer examen (realizado antes de la implementación del taller) al tercero (realizado al finalizar). El 30% tuvo un avance de entre 2 y 5 puntos y finalmente, el 43.3% tuvo un avance de entre 6 y 9 puntos.

Avance poco significativo

De acuerdo a estos porcentajes el 73.3% de los alumnos avanzó de una forma positiva, además, cabe señalar que en algunos casos no se vio un avance notorio ya que los alumnos comenzaron con una puntuación considerablemente buena y su avance fue poco. Este es el caso del alumno número 1, que no tuvo un avance notorio en la obtención de puntos, pero él comenzó con 4 puntos, la segunda mayor puntuación en la primera evaluación, lo que refleja que ya contaba con un desarrollo previo en el análisis y resolución de problemas. Dicho alumno, en la evaluación 2 avanzó un punto en comparación al anterior y en la tercera avanzó otro punto respecto a la evaluación 2.

La siguiente imagen nos muestra el problema 1 de su primera evaluación, que resuelve de forma correcta pero sin justificar el procedimiento para poder obtener todos los puntos.

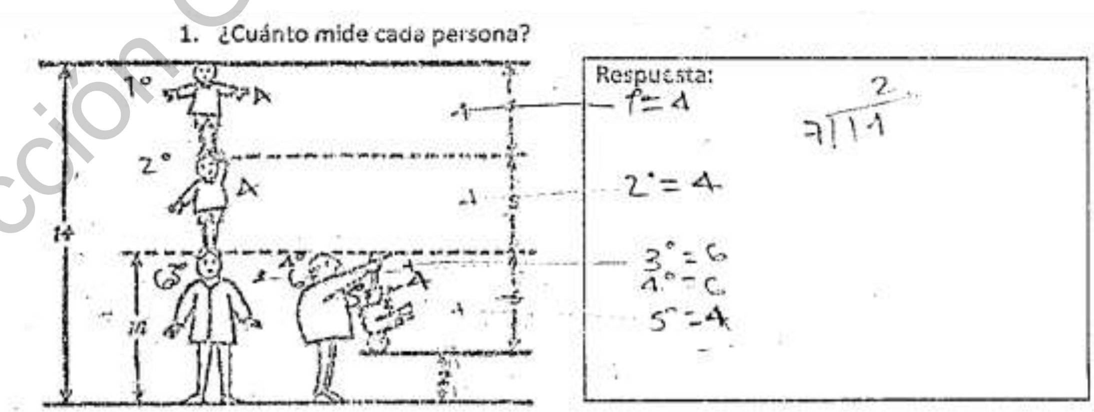
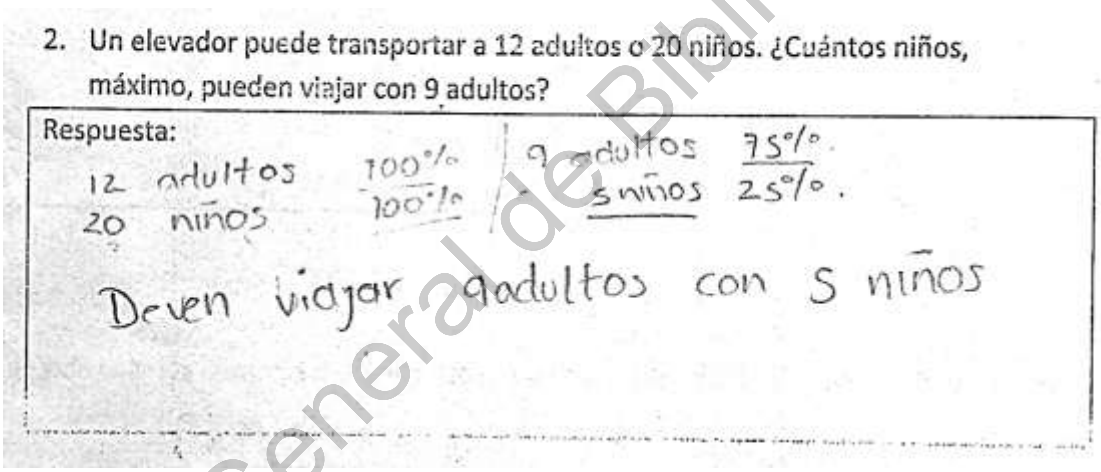


Imagen 1

En esta imagen se puede observar una división que le ayudó al alumno a intuir la respuesta a la pregunta del problema, dividiendo la altura de 14 entre dos y aproximando las alturas de las personas de la imagen. Uno de los objetivos del taller es desarrollar la generación de ideas para resolver problemas y además estructurarlas de una forma lógica. La manera de plasmar la solución en un principio carece de estructura de ideas e implicaciones lógicas pero tiene un resultado correcto.

Para el problema 2 de su primera evaluación sucede algo similar, ya que tiene un resultado correcto y el análisis reflejado en sus notas es correcto pero no estructura una solución justificada.


2. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?

Respuesta:

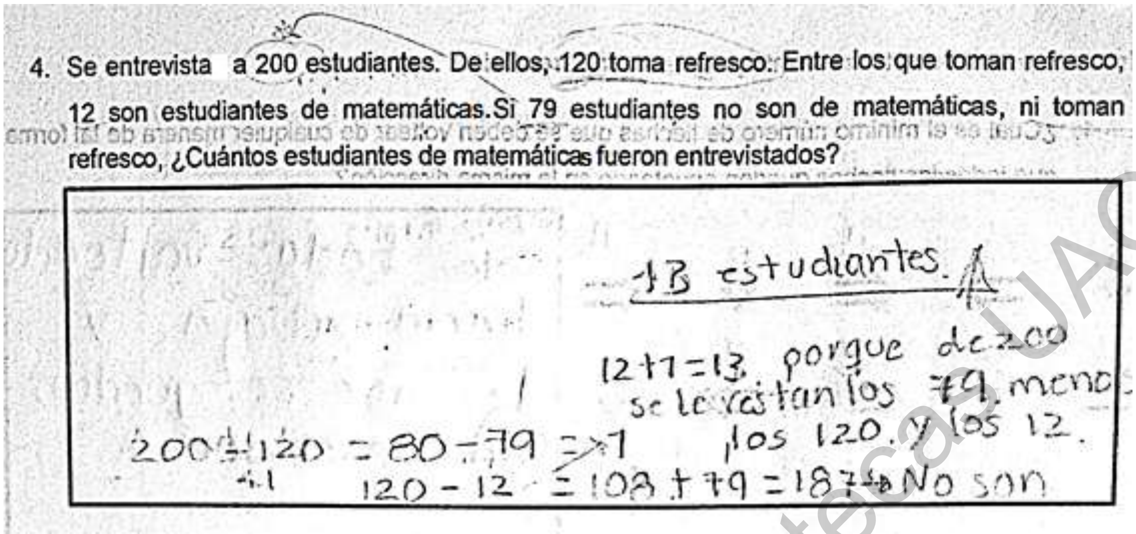
12 adultos 100%
20 niños 100%

9 adultos 75%
5 niños 25%.

Deven viajar 9 adultos con 5 niños

Imagen 2

Para el problema 4 de la tercera evaluación se refleja avance en el análisis de los problemas y la forma de redactar la solución. Aunque se puede trabajar más en el desarrollo de la habilidad de estructurar una explicación, el alumno en ese momento ya identifica los elementos importantes de la solución y los ilustra en su respuesta al problema.



4. Se entrevista a 200 estudiantes. De ellos, 120 toma refresco. Entre los que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas. Si 79 estudiantes no son de matemáticas, ni toman refresco, ¿Cuántos estudiantes de matemáticas fueron entrevistados?

13 estudiantes.

12+1=13 porque de 200 se le restan los 79 menos los 120 y los 12.

200-120 = 80-79 = 1

120 - 12 = 108 + 79 = 187 No son

Imagen 3

Este caso se repite en otros alumnos y es importante recalcar que si bien el avance no fue el esperado, el alumno participó en el taller de forma activa y resolvió muchas de las situaciones planteadas en él.

Avance no significativo

Algunos de los alumnos no mostraron avance, específicamente el 26.7% de todos los que participaron en el taller no avanzaron de forma positiva, si bien es cierto que en algunas sesiones participaron activamente, estos alumnos no mostraron gran interés al taller ya que no presentaba un impacto directo a las calificaciones de sus materias. A pesar de esto los alumnos se presentaron a todas las evaluaciones y eso nos permite analizar sus soluciones y las tendencias que se mostraron en ellas. Comenzaremos con un alumno que presentó respuestas a los problemas sin argumentar y algunas otras con errores que también se encuentran frecuentemente en las evaluaciones de sus demás compañeros.

Primera evaluación

En la primera imagen se muestra el problema 1 de la primera evaluación y es notorio que se tiene el resultado correcto, pero no tiene argumentos que respalden la respuesta, pues no se explica el por qué llega a esos resultados.

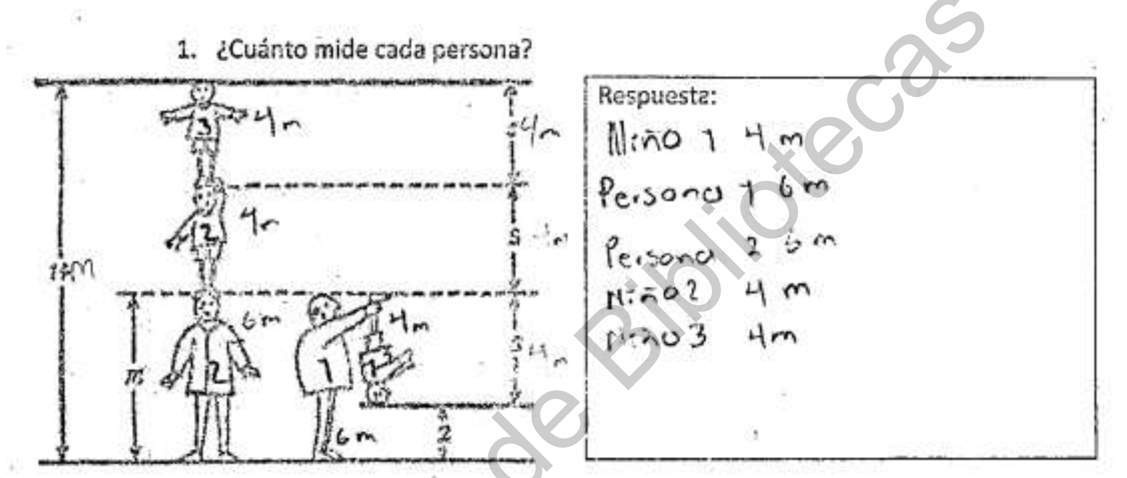
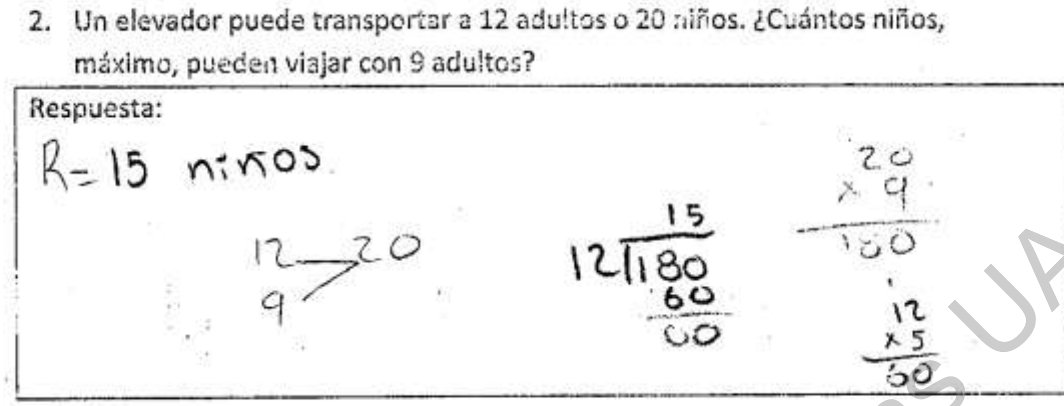


Imagen 4

En el segundo problema de la evaluación se presenta un escenario recurrente en el grupo, los alumnos saben que el problema se refiere a proporciones y encuentran la correspondencia de 9 adultos que equivalen a 15 niños, pero no toman en cuenta la pregunta que se hace: ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?, para ello es necesario ver que efectivamente 15 niños equivalen 9 adultos y que los adultos que faltan para completar los 12 que pueden viajar en el elevador son 3, donde esos tres equivalen a 5 niños, entonces la respuesta son 5 niños y no es 15 niños. En este y otros problemas los alumnos ignoran la pregunta del problema, lo que los lleva a resolver de forma errónea ya que no tienen conocimiento del objetivo principal del problema, el cual se refleja en la pregunta y nos ayuda a estructurar una solución con ideas lógicas.



2. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?

Respuesta:

R= 15 ninos

12 → 20
9

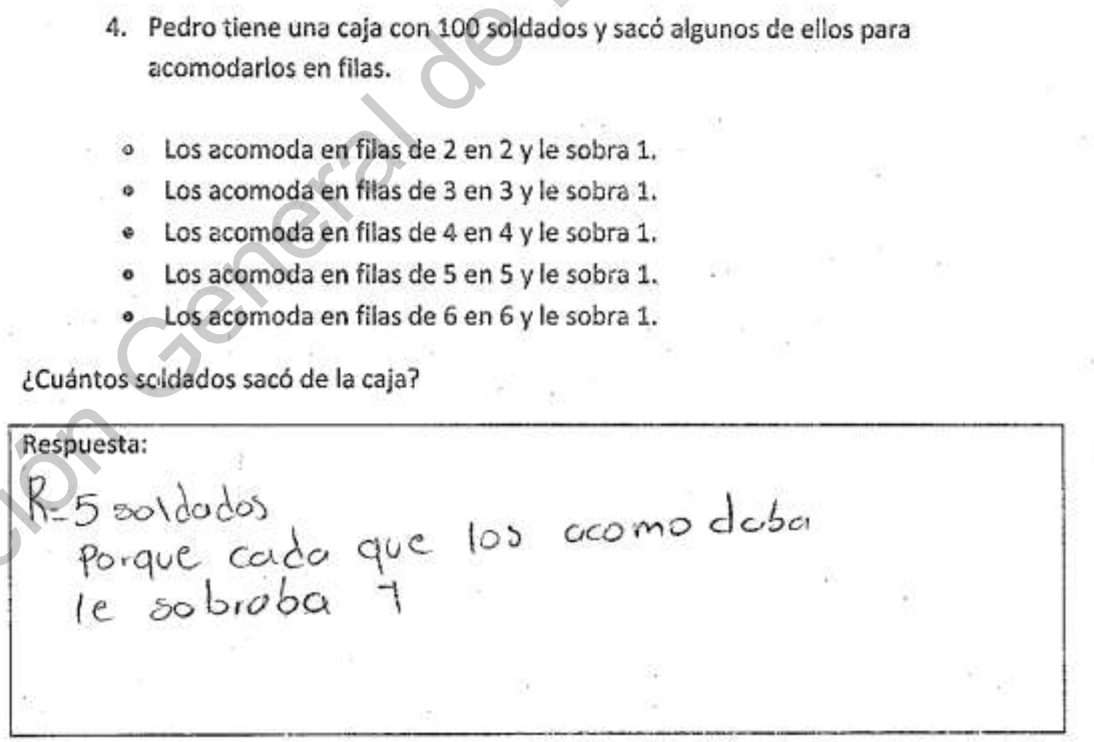
$12\overline{)180}$ = 15
60
00

20 × 9 = 180

12 × 5 = 60

Imagen 5

Analizando todos los problemas de la primera evaluación, tenemos que el alumno no presenta solución en el problema 3 y que en el problema cuatro no identifica el objetivo y por consecuencia da una respuesta errónea.



4. Pedro tiene una caja con 100 soldados y sacó algunos de ellos para acomodarlos en filas.

- Los acomoda en filas de 2 en 2 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 3 en 3 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 4 en 4 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 5 en 5 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 6 en 6 y le sobra 1.

¿Cuántos soldados sacó de la caja?

Respuesta:

R-5 soldados
porque cada que los acomodaba
le sobraba 1

Imagen 6

Segunda evaluación

El alumno en esta evaluación no presenta avance notorio ya que sigue sin justificar las respuestas de forma lógica. En el problema 1 no es clara su respuesta y su explicación no refleja el razonamiento utilizado, si bien intenta buscar un patrón general no hace referencia a los que se ilustran en la imagen, con el fin de poder contestar la pregunta.

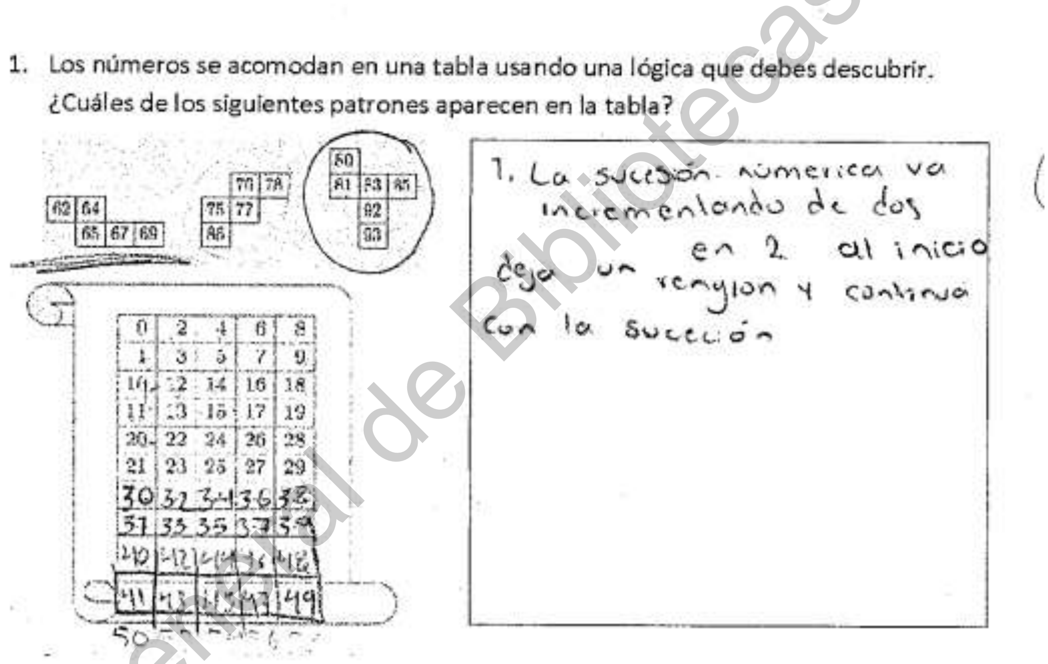


Imagen 7

Analizando el problema número 2, nos damos cuenta que el alumno tiene una respuesta que aparece con frecuencia en soluciones de otros compañeros. Esta respuesta es errónea ya que el enunciado no se comprende en su totalidad puesto que cada hijo tiene las mismas dos hermanas. Muchos alumnos dan esta respuesta sin analizar las afirmaciones y el contexto del problema.

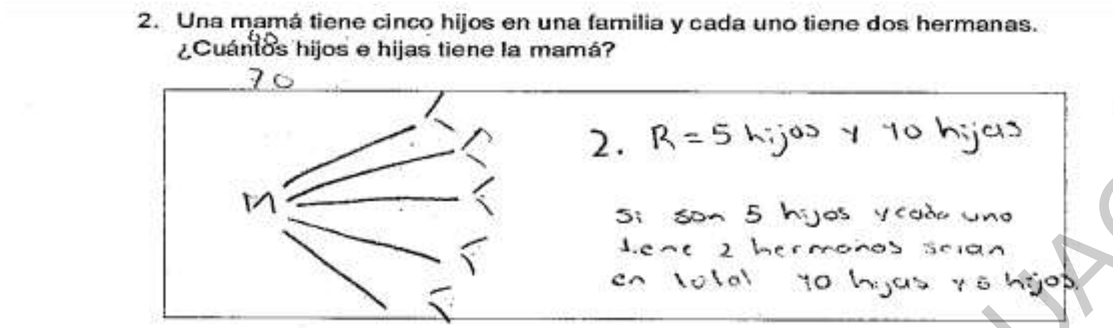


Imagen 8

Los siguientes problemas de la evaluación 2, presentan soluciones donde, como en los primeros, no se comprende el enunciado y las respuestas son erróneas.

Tercera evaluación

En la última evaluación, analizamos los dos primeros problemas que presentan respuestas correctas pero siguen la misma línea de no justificar las soluciones.

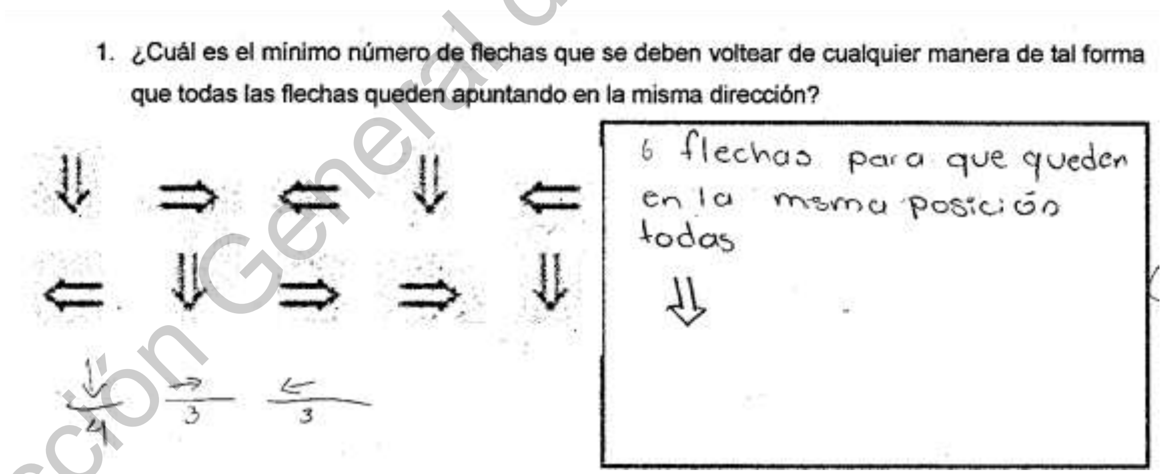
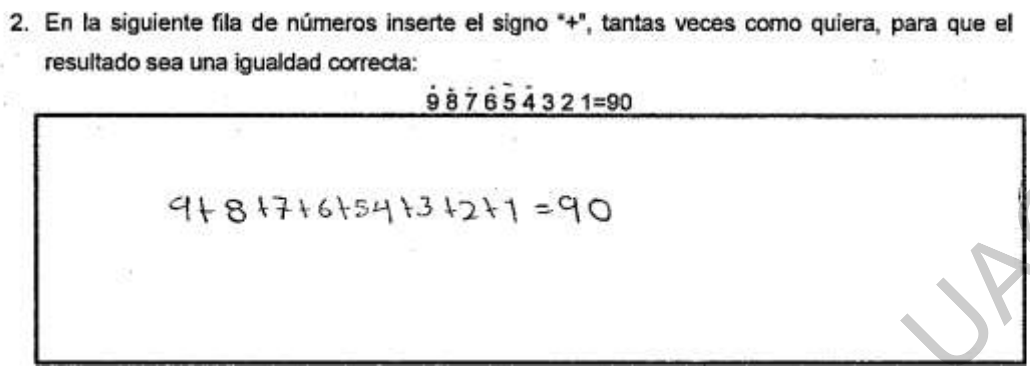


Imagen 9



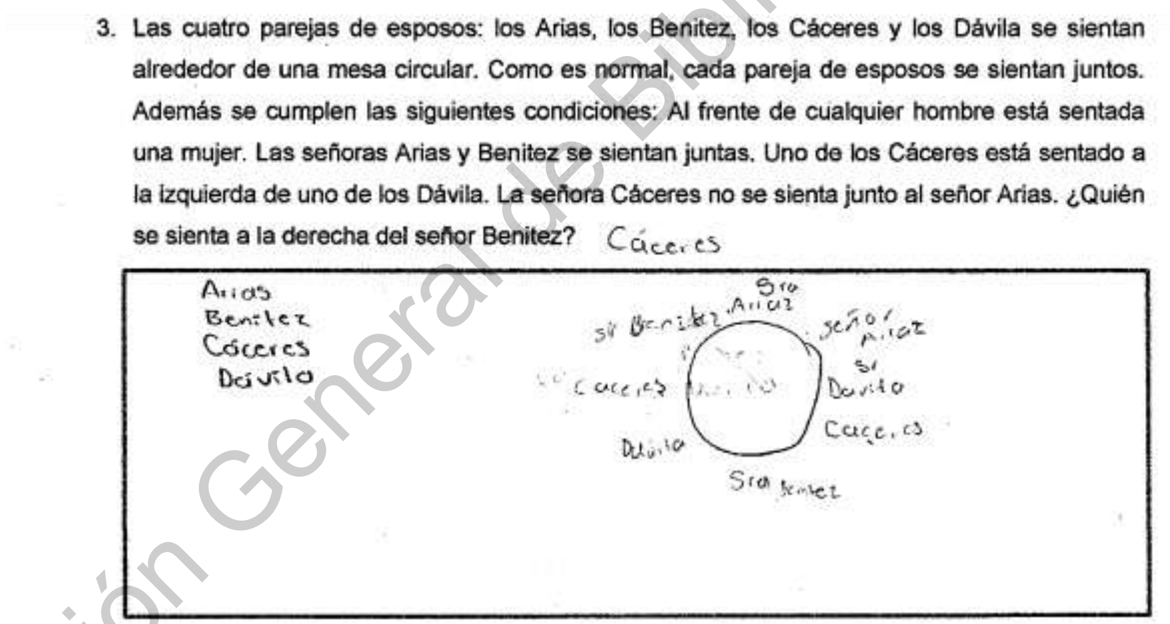
2. En la siguiente fila de números inserte el signo "+", tantas veces como quiera, para que el resultado sea una igualdad correcta:

9 8 7 6 5 4 3 2 1=90

9+8+7+6+54+3+2+1 =90

Imagen 10

En el problema 3 se pretende ilustrar la situación del problema pero carece de sentido para poder llegar a una solución.



3. Las cuatro parejas de esposos: los Arias, los Benitez, los Cáceres y los Dávila se sientan alrededor de una mesa circular. Como es normal, cada pareja de esposos se sientan juntos. Además se cumplen las siguientes condiciones: Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer. Las señoras Arias y Benitez se sientan juntas. Uno de los Cáceres está sentado a la izquierda de uno de los Dávila. La señora Cáceres no se sienta junto al señor Arias. ¿Quién se sienta a la derecha del señor Benitez? Cáceres

Imagen 11

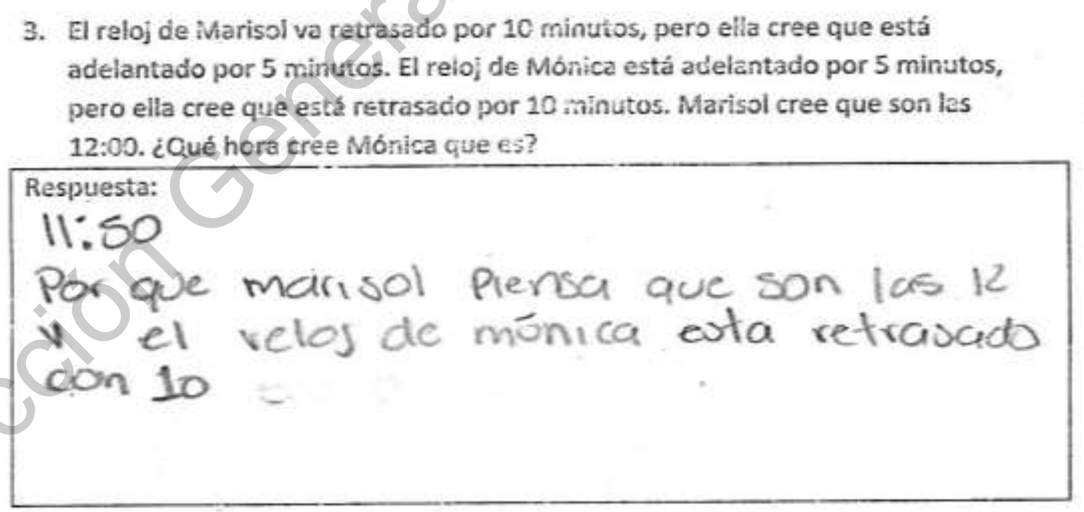
De este análisis podemos concluir que el alumno no tuvo un avance sobresaliente en las tres evaluaciones, sin embargo, se exhibieron algunas necesidades que tienen los alumnos y en las cuales se puede trabajar para mejorar el taller.

Avance significativo

Algo notorio en la mayoría de los alumnos es que en un inicio era muy complicado entender los problemas y por consecuencia las soluciones a éstos eran erróneas o no sabían cómo explicarlas. Para ejemplificar esta situación recurrente, analizaremos las respuestas en el problema 3 de cada examen, donde los alumnos tuvieron dificultades al entender el enunciado del problema. Los problemas número 3 tienen un nivel de dificultad similar entre ellos, aunque no tienen características iguales. Para este análisis tomamos como muestra dos alumnos que presentaron respuestas recurrentes y el avance descrito en esta parte.

Primera evaluación

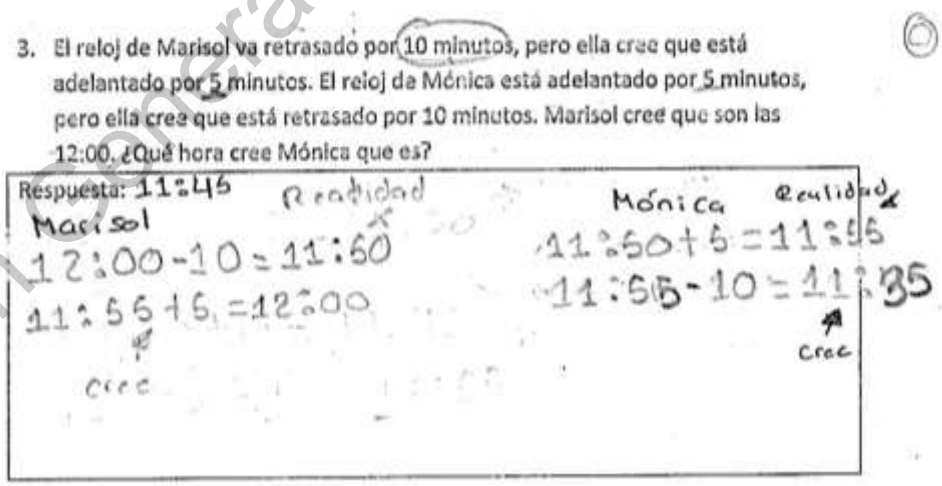
El primer alumno muestra que las implicaciones de los enunciados no eran claras, y para resolver el problema no toma en cuenta todas las premisas y con ello crea conclusiones erróneas.


3. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Marisol cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Mónica que es?

Respuesta:
11:50
Porque marisol Piensa que son las 12
y el reloj de mónica esta retrasado
con 10

Imagen 12

Para el siguiente alumno fue muy complicado organizar la información conforme a la redacción del problema y conectar las implicaciones directas de los enunciados. Para el alumno era evidente que debía saber la hora real y con ello deducir la hora que creen tener cada una. Aunque esto como premisa es una buena idea para resolver el problema, necesita poder identificar la forma de obtener la hora real. Una solución consiste en poner atención en lo que cree Marisol, pues contamos con esta información y con la cantidad de minutos en la que está desfasado su reloj. Si ella cree que son la 12:00 entonces lo que tiene en su reloj son 12:05 (ella cree que su reloj esta adelantado por 5 minutos) y en realidad son las 12:15 (porque su reloj va retrasado con 10 minutos), teniendo la hora real se puede encontrar la hora que cree Mónica que es, por lo tanto ella tiene en su reloj las 12:20 (ya que el reloj de Monica está adelantado por 5 minutos) y cree que son las 12:30 (porque cree que su reloj está retrasado por 10 minutos). Se aprecia que el alumno no utilizó este análisis y esto refleja que al leer el problema no identifica la información importante, la que permite deducir afirmaciones que no están explicitas en la redacción del problema y son necesarias para obtener la solución.


3. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Marisol cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Mónica que es?

Respuesta: 11:45

Imagen 13

Segunda evaluación

Esta evaluación muestra un mejor nivel de comprensión de los problemas, las siguientes imágenes son exámenes de los mismos dos alumnos, se observa, en su solución gráfica, que para ellos es clara la situación del problema.

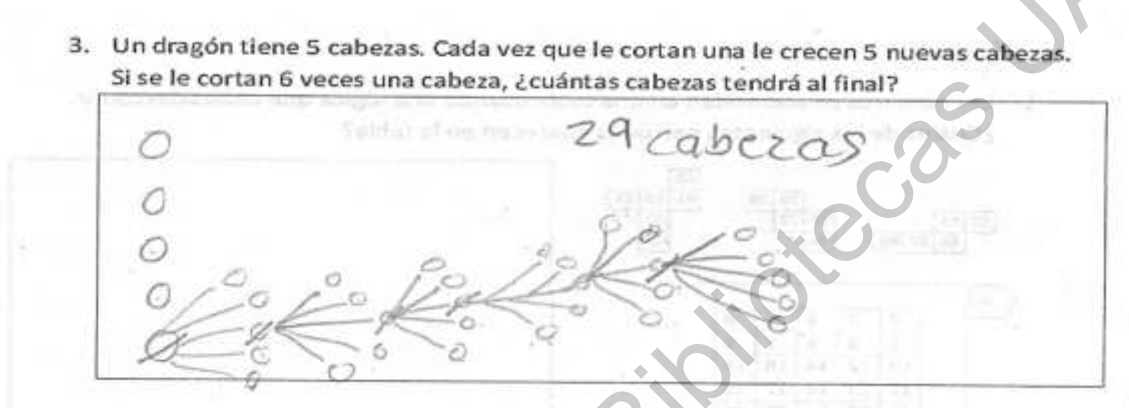


Imagen 14

El primer alumno muestra gráficamente lo que describe el problema y con ello puede obtener una sucesión que describe la cantidad de cabezas en cada corte, para el primer corte obtiene 9 cabezas, para el segundo corte 13 cabezas y así sucesivamente hasta llegar al sexto corte, en donde obtiene 29 cabezas que son todos los circulitos que no están tachados en la imagen.

De igual manera el segundo alumno trata de ilustrar su análisis de forma gráfica, pero no concluye la solución de forma correcta porque tiene una confusión en los cortes asignados ya que en el último corte no agrega las 5 cabezas que crecen, además en la parte izquierda muestra una lista de números con el que concluye su aparente respuesta.

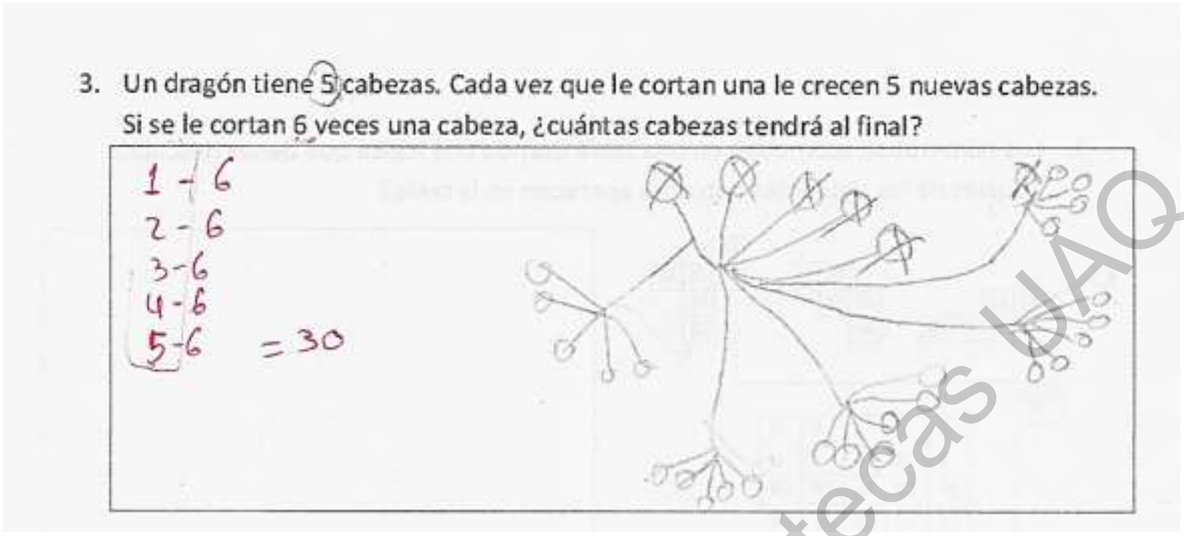
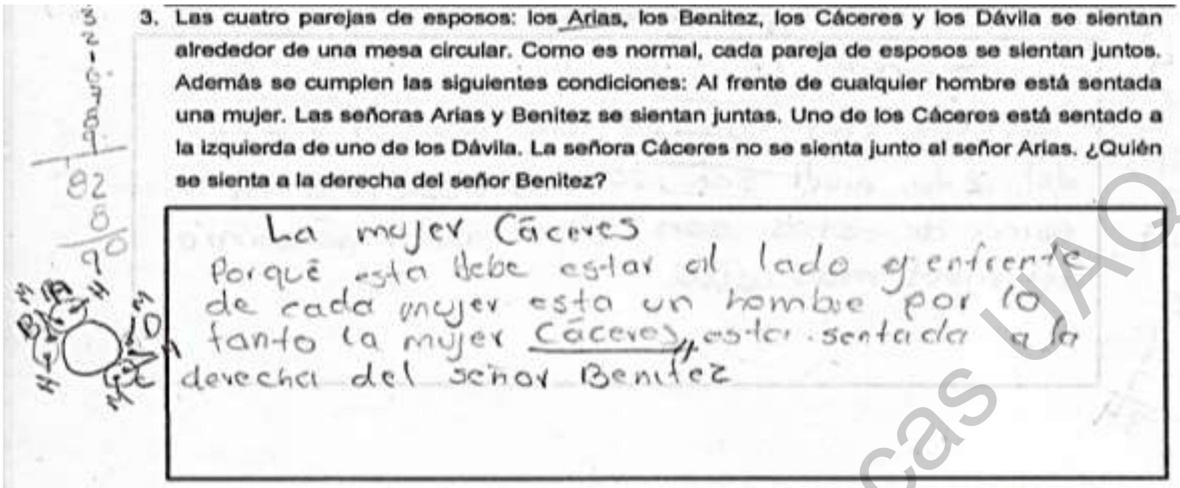


Imagen 15

Tercera evaluación

En la última evaluación se analiza el problema 3, que nos presenta una situación donde los alumnos deben utilizar correctamente las afirmaciones y concluir la solución. El primer alumno refleja un buen manejo de los conectivos lógicos ya que el dibujo de la parte izquierda representa las posiciones correctas que describen las afirmaciones. Es claro que puede concluir tomando en cuenta la afirmación escrita en la solución puesto que es el enunciado que acomoda a la pareja de los Cáceres.

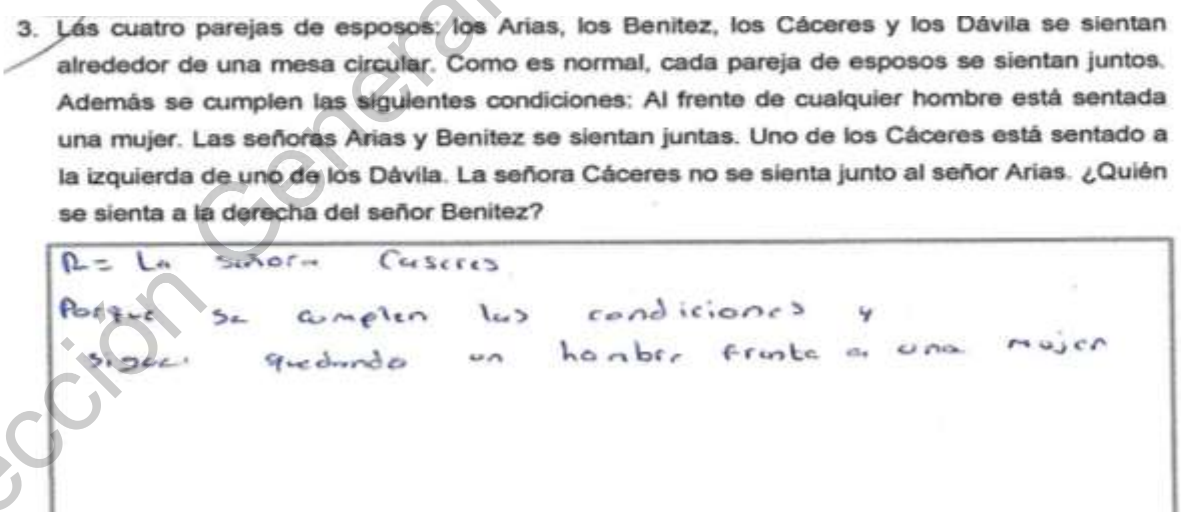


3. Las cuatro parejas de esposos: los Arias, los Benitez, los Cáceres y los Dávila se sientan alrededor de una mesa circular. Como es normal, cada pareja de esposos se sientan juntos. Además se cumplen las siguientes condiciones: Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer. Las señoras Arias y Benitez se sientan juntas. Uno de los Cáceres está sentado a la izquierda de uno de los Dávila. La señora Cáceres no se sienta junto al señor Arias. ¿Quién se sienta a la derecha del señor Benitez?

La mujer Cáceres
Porqué esta debe estar al lado y enfrente de cada mujer esta un hombre por lo tanto la mujer Cáceres esta sentada a la derecha del señor Benitez

Imagen 16

El segundo alumno no refleja una solución clara aun cuando tiene la respuesta correcta. La redacción de la solución deja obviando las conclusiones y es difícil analizar como llego a la solución.

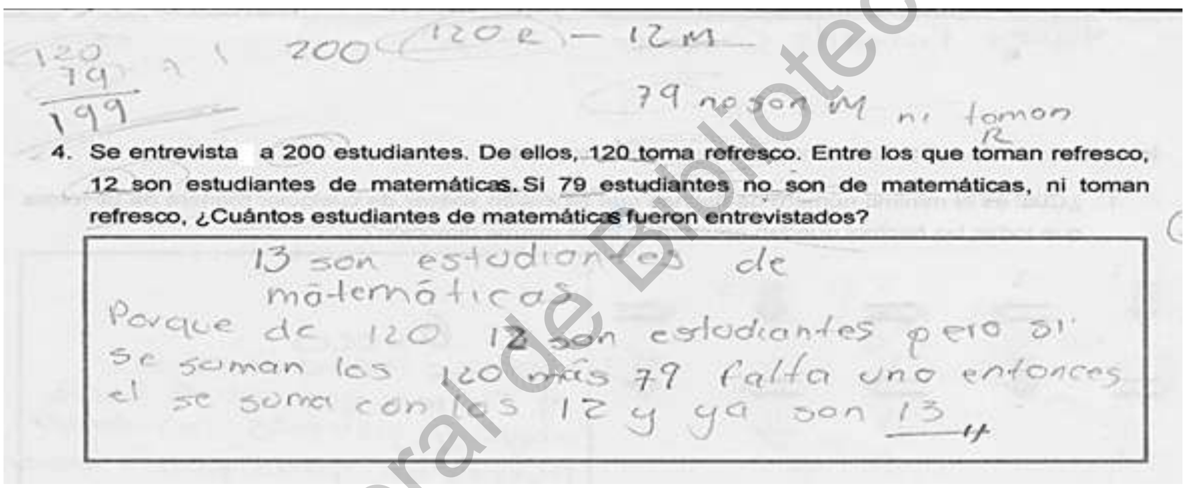


3. Las cuatro parejas de esposos: los Arias, los Benitez, los Cáceres y los Dávila se sientan alrededor de una mesa circular. Como es normal, cada pareja de esposos se sientan juntos. Además se cumplen las siguientes condiciones: Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer. Las señoras Arias y Benitez se sientan juntas. Uno de los Cáceres está sentado a la izquierda de uno de los Dávila. La señora Cáceres no se sienta junto al señor Arias. ¿Quién se sienta a la derecha del señor Benitez?

R= La señora Caseres
Porque se cumplen las condiciones y sigue quedando un hombre frente a una mujer

Imagen 17

Para extender el análisis, es necesario trabajar de igual forma en el problema 4 de la tercera evaluación, que tiene un nivel de dificultad parecido a los problemas 3 antes mencionados y nos da la oportunidad de observar la forma en que los alumnos trabajan los datos así como las conexiones que hacen entre ellos para obtener sus soluciones. El primer alumno muestra un manejo de la información que le permite hacer deducciones y concluir de una manera adecuada. La información que maneja no está de forma ordenada pero los conjuntos que el alumno clasificó son disjuntos, y esto permite que las operaciones tengan sentido.

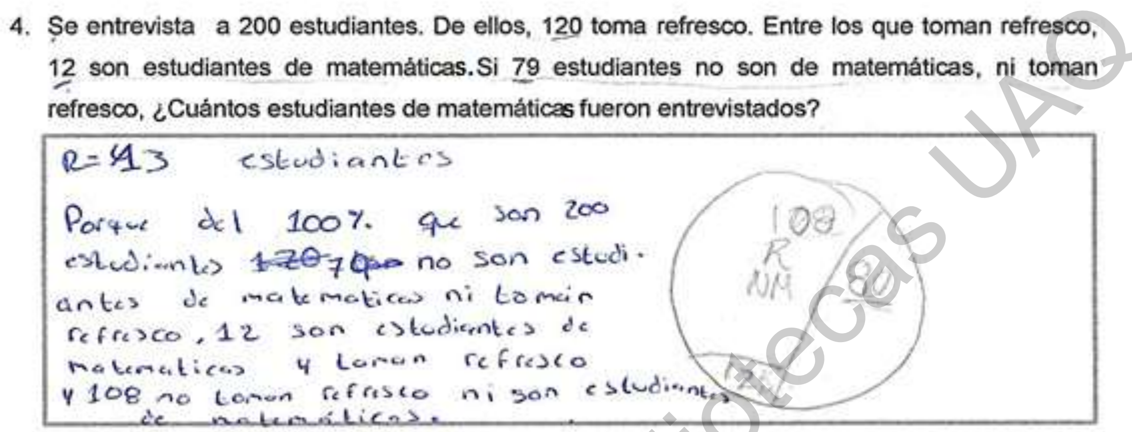

120
79
199
200 (120 R — 12 M
79 no son M ni toman R

4. Se entrevista a 200 estudiantes. De ellos, 120 toma refresco. Entre los que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas. Si 79 estudiantes no son de matemáticas, ni toman refresco, ¿Cuántos estudiantes de matemáticas fueron entrevistados?

13 son estudiantes de matemáticas
Porque de 120 12 son estudiantes pero si se suman los 120 más 79 falta uno entonces el se suma con los 12 y ya son 13

Imagen 18

La solución del problema se puede estructurar de la siguiente manera: los alumnos necesitan crear dos conjuntos de personas entrevistadas, identificando los 120 estudiantes que toman refresco como el primer conjunto y los 80 estudiantes que no toman refresco como el segundo conjunto. Analizando el primer conjunto y según la redacción, de los 120 podemos deducir que 12 son estudiantes de matemáticas y 108 no lo son. Del segundo conjunto, de los 80 que no toman refresco, 79 no son estudiantes de matemáticas y 1 sí lo es. Por lo tanto se puede concluir que 13 entrevistados son estudiantes de matemáticas. Esta solución está descrita por el segundo alumno, quien de forma gráfica expone la interpretación de los datos y redacta, con algunos errores, una solución en la que no explica en realidad por qué son 13 los estudiantes de matemáticas.



4. Se entrevista a 200 estudiantes. De ellos, 120 toma refresco. Entre los que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas. Si 79 estudiantes no son de matemáticas, ni toman refresco, ¿Cuántos estudiantes de matemáticas fueron entrevistados?

R= 13 estudiantes

Porque del 100% que son 200 estudiantes ~~120~~ 79 no son estudiantes de matematicas ni toman refresco, 12 son estudiantes de matematicas y toman refresco y 108 no toman refresco ni son estudiantes de matematicas.

Imagen 19

El segundo alumno muestra la solución antes mencionada en el dibujo que presenta en su solución, con ello describe los dos conjuntos disjuntos y es clara la forma en que trabaja con ellos, a pesar de eso la estructura de la conclusión es un poco desordenada pero tiene todos los elementos necesarios para poder concluir correctamente.

Con estos ejemplos podemos darnos cuenta que aunque se desarrolló el razonamiento al resolver los problemas, la forma de estructurar las soluciones aún tiene muchos aspectos en los que se puede mejorar. Al mismo tiempo se aprecia una mejora en el entendimiento de los problemas y con ello un avance notorio en la forma de resolver problemas y generar ideas de solución.

Casos extremos

Tomando como referencia la primera evaluación, podemos encontrar los casos extremos que resultaron en el puntaje más alto que fue 5 puntos y el puntaje más bajo que fue 0 puntos. Analizaremos estos casos como sucesos particulares y se dará un análisis cualitativo.

Puntaje más alto

El alumno con el puntaje mayor de la primera evaluación forma parte del 26.7% de los alumnos que no tuvieron un avance significativo, en la primera evaluación obtiene 5 puntos y en las siguientes dos obtiene 4 puntos en cada una.

La forma de resolver los problemas no muestra evolución, en la primera evaluación presenta en sus soluciones un buen manejo para analizar los problemas con redacciones con poco nivel de complejidad, por lo que logra resolver el primer problema, y el segundo problema lo explora acorde a la redacción, pero presenta una solución errónea, al no poder identificar correctamente lo que la pregunta solicitaba. Recordemos que esto fue una situación recurrente en la primera evaluación.

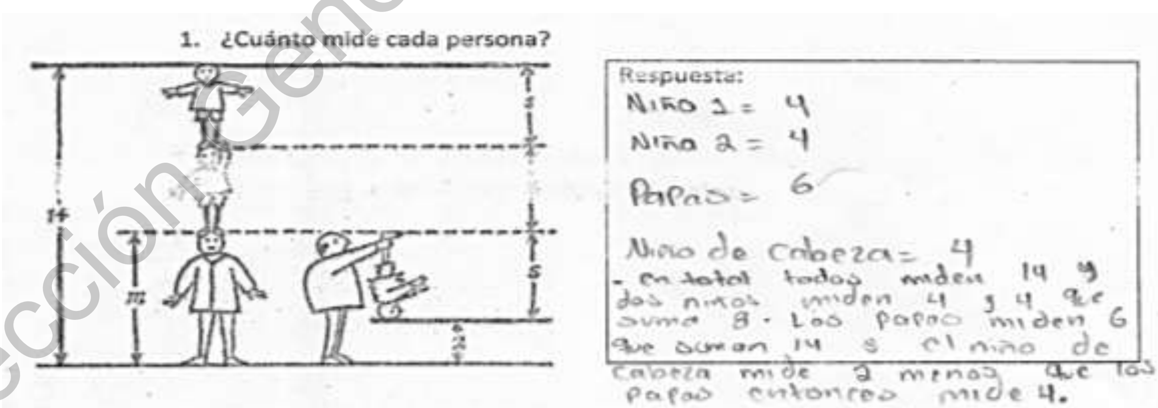
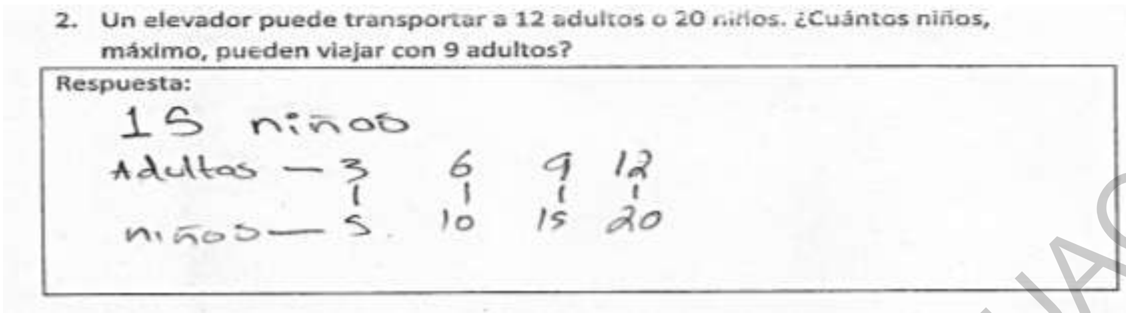


Imagen 20


2. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?

Respuesta:

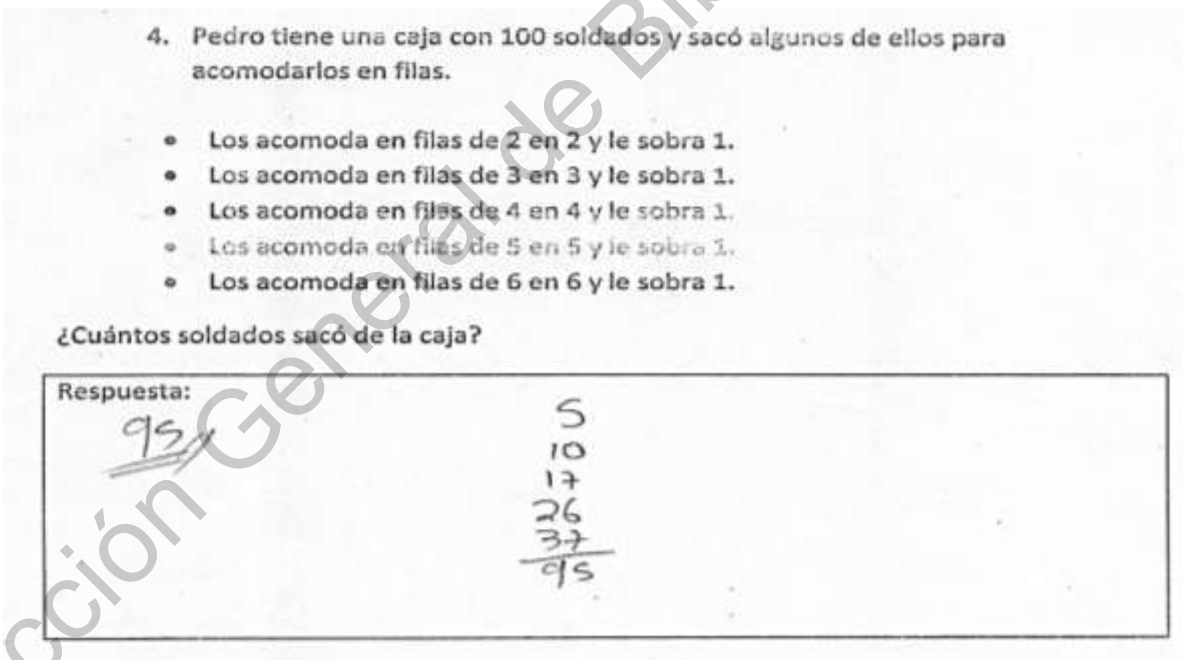
15 niños

Adultos — 3 6 9 12

niños — 5 10 15 20

Imagen 21

El alumno además presenta dificultades para resolver problemas con redacción más compleja, en el que ni siquiera plasma ideas o avances como sí lo hizo en otros y simplemente busca una forma de encontrar un valor numérico con los datos proporcionados.


4. Pedro tiene una caja con 100 soldados y sacó algunos de ellos para acomodarlos en filas.

- Los acomoda en filas de 2 en 2 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 3 en 3 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 4 en 4 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 5 en 5 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 6 en 6 y le sobra 1.

¿Cuántos soldados sacó de la caja?

Respuesta:

95

5
10
17
26
37
95

Imagen 22

De la misma manera trabaja en las siguientes dos evaluaciones, y a pesar de presentar un buen desempeño al inicio del taller la evolución no fue la esperada.

Puntajes más bajo

En la primera evaluación se presentaron dos alumnos que obtuvieron 0 puntos. Estos dos casos evolucionaron de manera muy diferente, uno de ellos obtuvo 1 punto en la segunda evaluación y en la tercera fue de las mejores puntuaciones obteniendo 9 puntos que representan resolver tres problemas de 4 en total. El desempeño de este alumno se analizó en el caso de avance significativo siendo uno de los dos alumnos mencionado en ese apartado.

Para el segundo alumno las cosas fueron diferentes ya que en la segunda evaluación llego a obtener 6 puntos que representan dos problemas resueltos de 4 en total, pero la tercera evaluación solo pudo obtener 1 punto.

Problemas número 5 de las evaluaciones

En el problema número 5 de cada evaluación se trabajó en una sesión con los dos grupos, resolviendo los problemas en el pizarrón y con la participación de todos los alumnos. De esta manera se pretende escuchar las soluciones e ideas necesarias para resolverlos y se analiza el desarrollo de la habilidad que tienen al expresar soluciones de forma verbal. El problema 5 fue seleccionado con las siguientes características: una situación que genere un tipo de rompecabezas y que pueda plantearse una solución un poco más estructurada que en los problemas anteriores de tal manera que sea posible evaluar la forma de enlazar las ideas de la solución.

Primera evaluación, Cuadrado Mágico

Los cuadrados mágicos son números naturales consecutivos, comenzando por el 1, organizados en celdas formando un cuadrado, de manera que las sumas de cada renglón, columna y diagonal sean iguales. Si la condición no se cumple para las diagonales le llamamos cuadrados latinos.

El origen de los cuadrados mágicos es muy antiguo, tanto que en la China y la India ya los conocían antes de la era cristiana. Los cuadrados mágicos se pueden clasificar según la cantidad de celdas en sus columnas y renglones. Por muchos años los matemáticos los han estudiado para encontrar aplicaciones, si bien es cierto que no existen tantas aplicaciones, el juego es muy interesante y puede ayudar a las personas a desarrollar ciertas habilidades de razonamiento.

Para la primera evaluación se eligió un derivado de los cuadrados mágicos, un cuadrado latino de 3x3, pensando en que sea llamativo para los alumnos y con ello poder obtener su atención y la participación de todos, pero además esta herramienta es un juego que nos permite desarrollar el pensamiento lógico matemático.

A continuación se presenta el problema:

Completar la cuadricula con los números del 1 al 9 sin repetir de forma que las sumas de cada renglón y cada columna sean 15.

	2	
		3

Al comienzo se les pide a los alumnos que llenen el cuadro en su libreta y empiecen a generar ideas para resolverlo con el fin de exponerlas frente al grupo.

Las ideas que plantearon los alumnos fueron:

- Llenar la cuadricula en diagonal, ordenando 1, 2 y 3 en la misma, pero se presentó un problema al ordenar el número 4 y 5, ya que no sabían dónde ponerlos y si tenían que seguir algún orden.

1		
	2	
		3

Imagen 23

- Algunos alumnos trataron de poner números al azar, comenzando por la esquina superior izquierda, un alumno trato de completarlo con el 6 en la primera celda y se encontraron 2 números que podían sumarse al 6 y obtener 15. Se acomodaron de dos maneras y se dieron cuenta que no era posible llenarlo de esa forma, ya que el número en rojo se repetía.

6	4	5
	2	
3	9	3

6	5	4
	2	
4	8	3

Imagen 24

- Uno de los alumnos comento que podrían tomar como referencia el número 2 y tratar de completar la suma de 15 con los dos números que faltaban en la columna, con ayuda de sus compañeros se hicieron las siguientes listas:
    - 2→4 y 9
    - 2→5 y 8
    - 2→6 y 7

Decidieron tomar el 5 y 8 para resolver el cuadrado y comenzaron a llenarlo, el problema fue que al final se repetía el número 3. Lo cual no estaba permitido y además no se usaba el número 1. La siguiente imagen muestra los acomodos que los alumnos hicieron.

6	8	3
4	2	9
7	5	3

Imagen 25

- Por ultimo decidieron tomar los números 9 y 4 para la columna del dos y lograron llenar el cuadrado mágico.

1	9	5
6	2	7
8	4	3

Imagen 26

Además, algunos alumnos presentaron soluciones diferentes y uno de los alumnos comentó que la idea de la diagonal si podía funcionar pero no sabía por qué funcionaba.

1	6	8
9	2	4
5	7	3

Imagen 27

Comentarios sobre la participación de los alumnos:

- Los alumnos se mostraban renuentes a participar y expresar las ideas que tenían, para mejorar esta situación, el instructor del taller planteó preguntas directas a los alumnos para comenzar la participación.
- La mayoría de los alumnos intentaron resolver el problema escribiendo números y esperando encontrar una estrategia que resuelva el problema, sin embargo, los demás solo llenaron las celdas con números al azar.
- Participaron menos del 50% de los alumnos.

Segunda evaluación, Sudoku

El Sudoku es un rompecabezas matemático de colocación de origen japonés que surgió por primera vez en la década de 1970, se popularizó en Japón en 1986 y se dio a conocer de forma internacional en 2005, en el momento en que los periódicos comenzaron a publicarlo en el apartado de pasatiempos. El sudoku tiene variantes que dependen de la dificultad, pueden ser de 4x4, 6x6 y 9x9, conforme aumentan las celdas aumenta la dificultad del mismo, tomando en cuenta también la cantidad de números conocidos inicialmente. Un sudoku está bien planteado si la solución es única (Gago, Hartillo, & Martín, 2006)

En el problema 5 de la segunda evaluación se presenta un mini-Sudoku que es un derivado de los Sudokus que normalmente se utilizan que son una cuadrícula de 9x9. La idea de utilizar este Mini-sudoku en la evaluación es medir la habilidad que tienen los alumnos para plantear estrategias para resolverlo de una forma lógica y no solo poniendo números al azar en cada una de las celdas, no hay que perder de vista que el objetivo de estas evaluaciones es analizar la evolución del impacto que tiene la lógica matemática presentada en los talleres.

A continuación se presenta el problema:

- Rellenar la cuadrícula de 6x6 celdas, dividida en subcuadrículas de 3×2, con las cifras del 1 al 6 sin repetir por fila, columna o subcuadrícula, partiendo de algunos números ya colocados en algunas de las celdas.

				4	
					5
3	5		2		
1	4		5		
					3
				1	

De igual manera que en el problema anterior, se les pidió a los alumnos comenzar a solucionar el problema en el cuaderno para después comentar las ideas que se vayan generando.

Las ideas que plantearon los alumnos fueron:

- Algunos alumnos comenzaron a llenar por subcuadriculas, pero era muy caótico pues se generaban más opciones y crecía el problema.
- Un alumno sugirió comenzar a llenar las columnas o reglones que tienen más números. Se optó por llenar los dos renglones del centro. Como se muestra en la siguiente imagen se tenían 3 números como opciones para llenar las tres celdas faltantes.

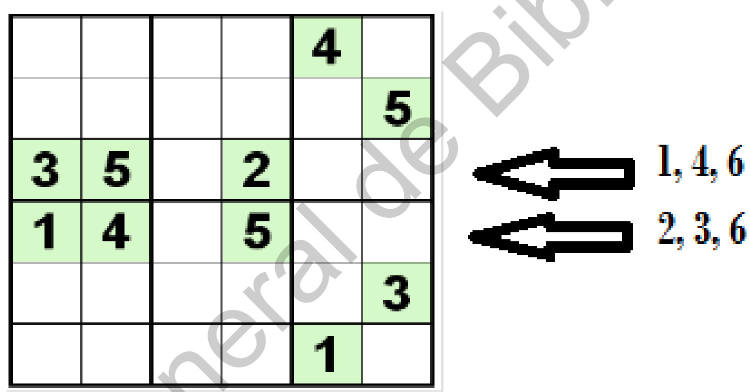


Imagen 28

- Se comenzó con el reglón superior, algunos alumnos se dieron cuenta que el número 4 tenía solo una opción, ya que aparecía en la subcuadricula superior derecha. Entonces solo quedaba acomodar el 1 y 6 sin que se repitieran en las columnas.

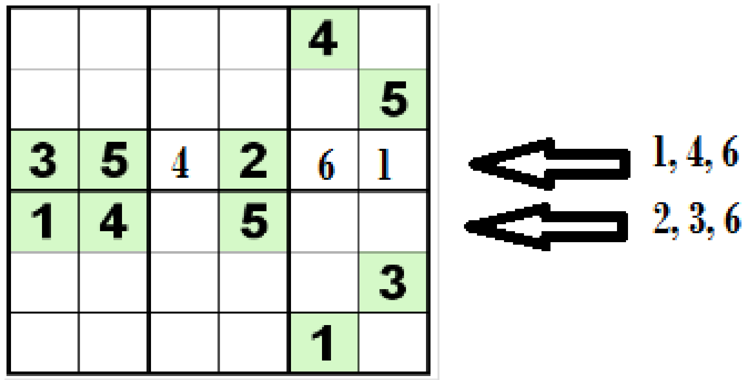


Imagen 29

- De la misma forma y con la misma lógica se llenó el segundo renglón.

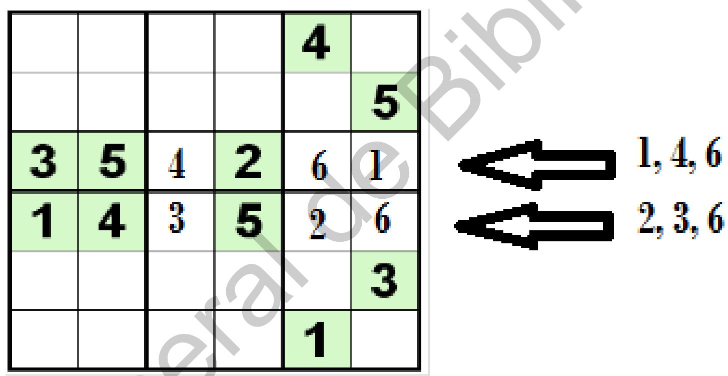


Imagen 30

- Ahora tomaron en cuenta las dos columnas señaladas en la siguiente imagen, donde solo faltaban 2 números por rellenar.

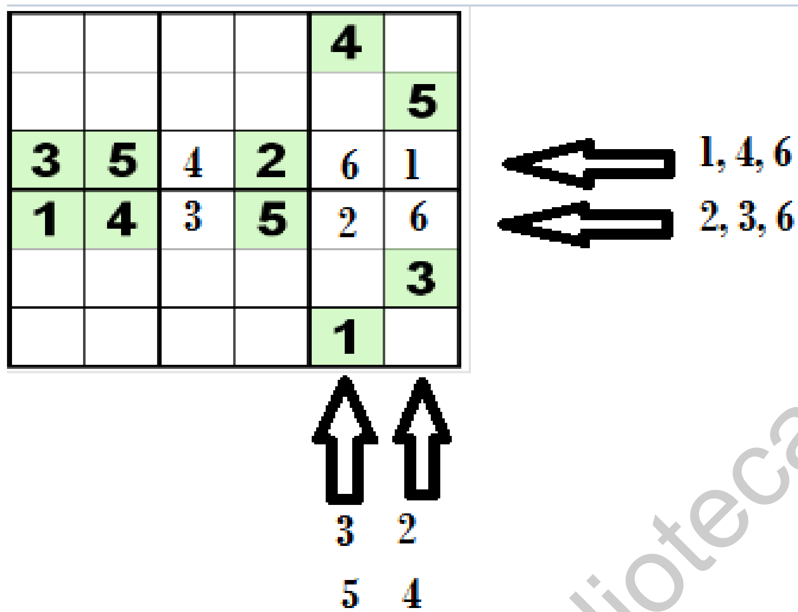


Imagen 31

- Uno de los alumnos planteó que era mejor comenzar con la columna que da más información, la de la derecha, donde acomodar 2 y 4 es fácil ya que están determinados por los números que aparecen en las subcuadrículas. De esta manera es posible llenar en seguida la otra columna.

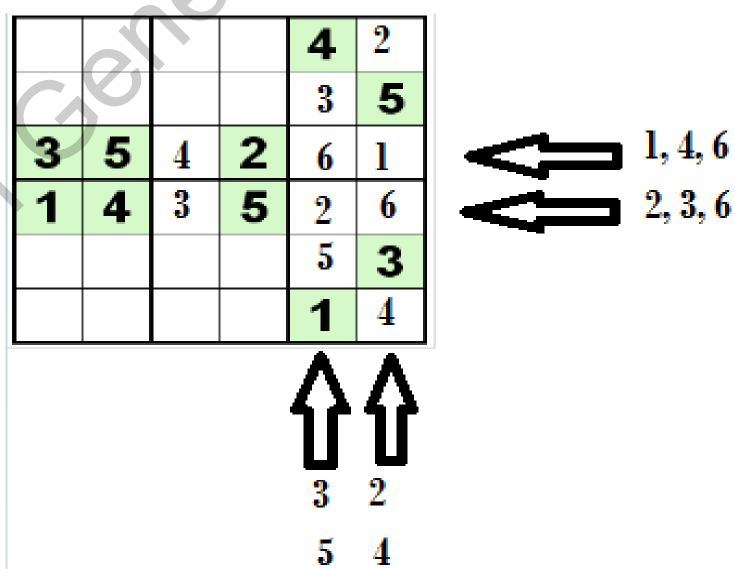


Imagen 32

- Algunos alumnos comentaron que se podía llenar por subcuadriculas o por renglones, después de un momento en que los alumnos trabajaron con el cuadro mágico presentaron la solución presentada en la siguiente imagen, se dieron cuenta que se repetían parejas en la cuadricula y con esa idea terminaron de llenar el mini-sudoku.

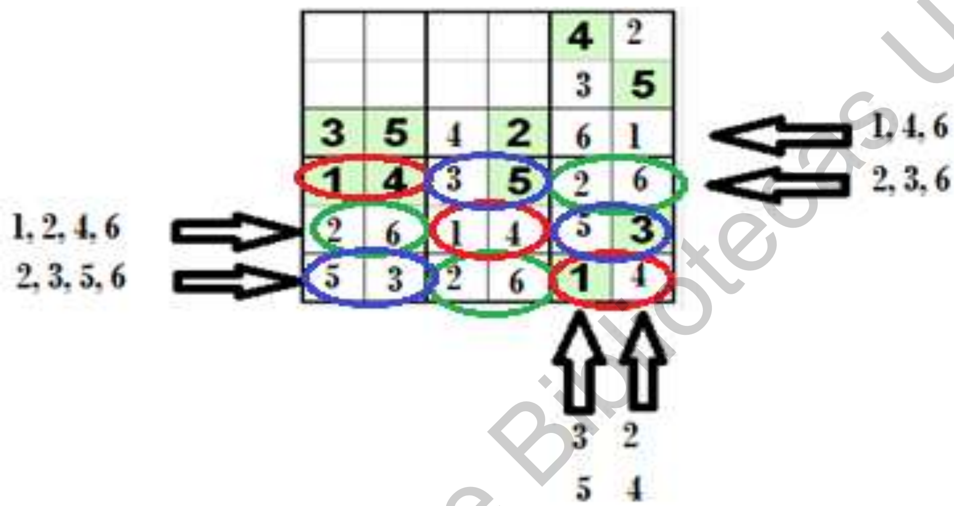


Imagen 33

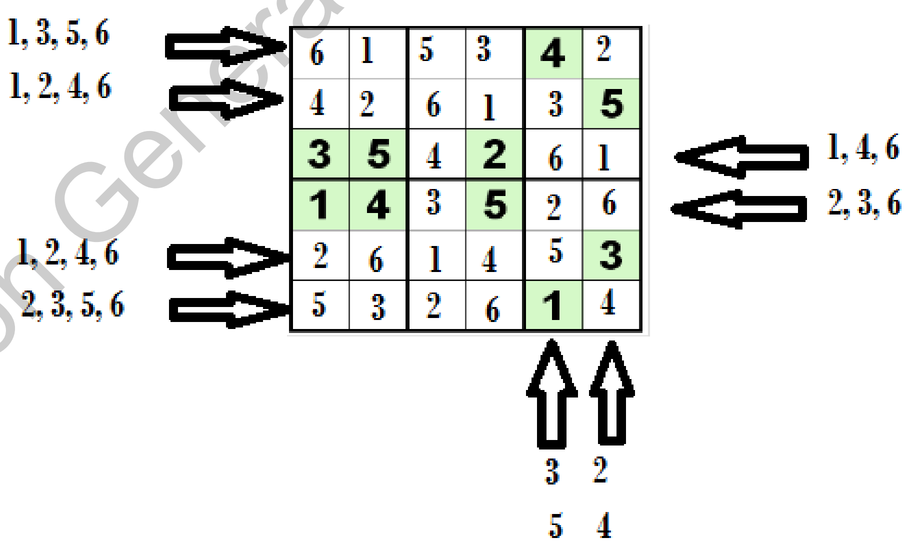


Imagen 34

Comentarios sobre la participación de los alumnos:

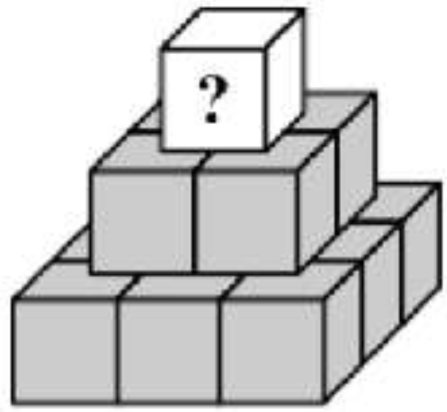
- Los alumnos necesitaron tiempo para generar ideas y validarlas, por ello la sesión fue un poco larga.
- Algunos alumnos seguían con la idea de poner números al azar.
- Solo un alumno tenía conocimiento previo de cómo solucionar los sudokus.
- La partición del grupo mejoro notoriamente a comparación de la evaluación anterior, se tuvo una participación de aproximadamente el 70% de los alumnos.

Tercera evaluación, problema matemático

Para la última evaluación se presenta un problema, también en forma de rompecabezas, siguiendo la misma línea de las dos evaluaciones anteriores. Este problema tiene un enunciado un poco más complicado, lo cual lo convierte en un problema de mayor dificultad.

A continuación se presenta el problema:

Víctor escribe un número positivo en cada uno de los catorce cubos de la pirámide que se muestra en la figura. La suma de los nueve enteros escritos en los cubos del nivel más bajo es 50. Los enteros escritos en cada uno de los otros cubos es igual a la suma de los cuatro enteros escritos en los cubos que están abajo de él. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener escrito el cubo del nivel más alto?



Para resolver el problema era necesario que todos los alumnos comprendieran la redacción y para ello se planteó un ejemplo con ayuda de los alumnos. La suma de los nueve enteros del nivel de abajo es 50 entonces necesitamos 9 números que sumados den 50, los cuales se muestran en la siguiente imagen. En el segundo nivel tenemos 4 cubos, cada uno con un entero que es la suma de los 4 enteros debajo de él, y por último tenemos el nivel superior con el número 102, que es la suma de los 4 debajo de él. Lo que necesitamos es maximizar el número en el nivel superior.

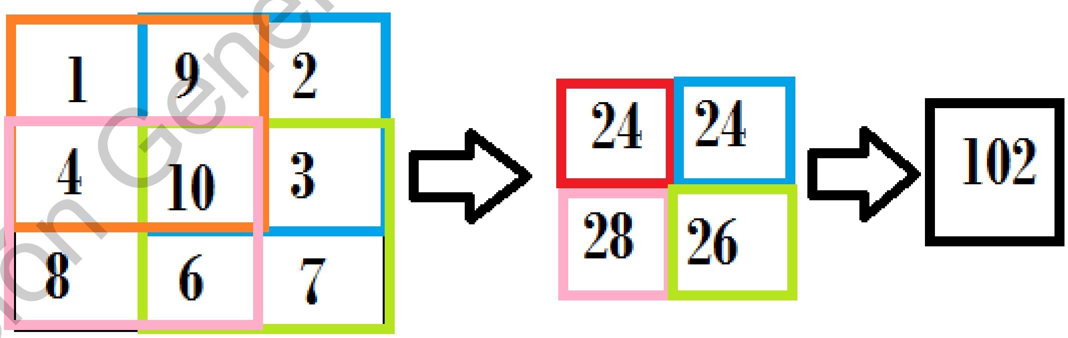


Imagen 35

Con este ejemplo los alumnos comenzaron a resolverlo dando diferentes combinaciones de números como la siguiente.

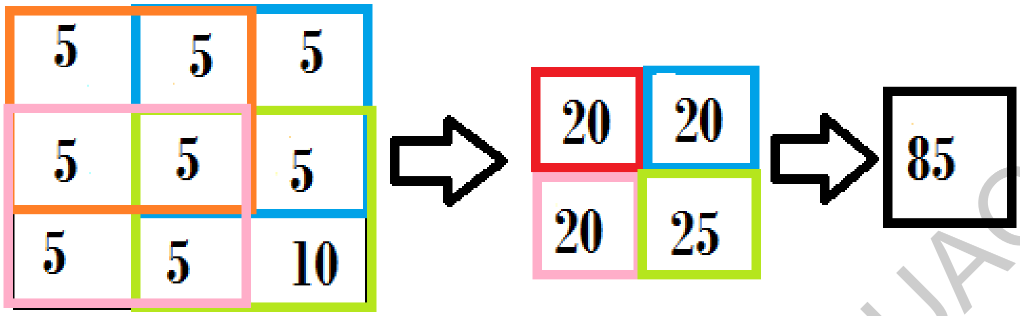


Imagen 36

Un grupo de alumnos conjeturó que si ponemos el número más grande en el centro puede ser mayor el número final, como se muestra en la siguiente imagen.

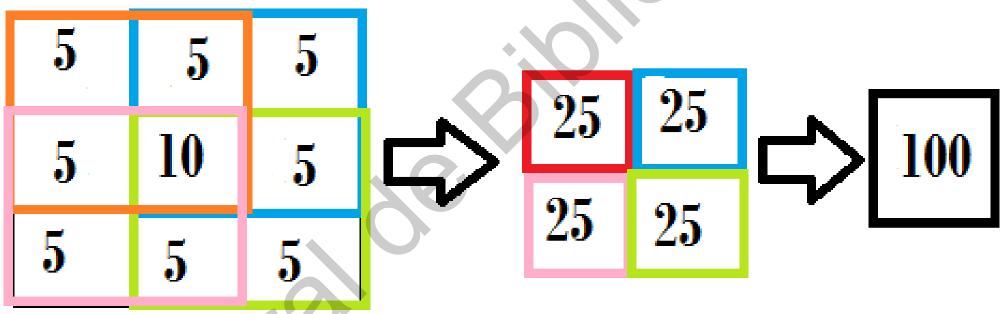


Imagen 37

Al final un alumno sugirió que el cubo del centro tenga el número más grande posible para poder obtener el máximo valor del cubo superior. El número del centro es 42 y los demás deben ser 1. De esta forma obtenemos 180 como el máximo valor para el cubo superior, como se muestra en la siguiente imagen.

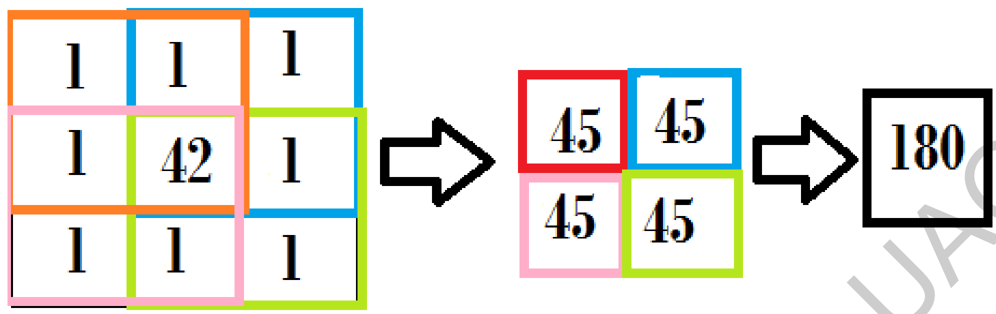


Imagen 38

El argumento lógico al que llegaron los alumnos, mencionado por uno de ellos fue: “como el cubo del centro tiene a los 4 cubos sobre él, es necesario que ese sea el mayor para que pueda sumarse en los cuatro cubos y obtener la suma más grande.”

Comentarios sobre la participación de los alumnos:

- Los alumnos en su mayoría se mostraron participativos.
- Encontrar la solución les tomó mucho tiempo ya que tuvieron que hacer muchos ejemplos para deducir la solución.
- Se argumentó de forma lógica la solución del problema.

Evaluaciones

Además de revisar caso por caso, se presenta un análisis de los resultados, tomando al grupo de estudio como una unidad.

A continuación se muestran las gráficas de cada una de las evaluaciones realizadas.

En la evaluación 1 hay un alto porcentaje de alumnos que obtuvieron de 0 a 2 puntos (72.41 %) y la puntuación más alta es de solo 5 puntos, la cual es presentada por un grupo muy pequeño de alumnos (3.45 %).

Imagen 39. Evaluación 1

Después de 5 sesiones se realizó la segunda evaluación en donde el porcentaje de puntuaciones bajas se redujo a menos de la mitad, es decir, de 72.41 % cambió al 34.49 %, además comienzan a aparecer puntuaciones altas, de 6 a 9 puntos, este tipo de calificaciones no aparecieron en la primera evaluación, sin embargo, poco más de un cuarto de los alumnos la alcanzaron (27.59 %).

Imagen 40. Evaluación 2

Finalmente, pasadas otras 5 sesiones de trabajo, cuando se realizó la tercera y última evaluación, observamos que no hubo calificaciones en cero y las puntuaciones bajas se redujeron a casi la mitad, esto es, del 34.49 % a un 17.24 %. Por otro lado, puntuaciones superiores a 5 (la puntuación más alta en la evaluación 1) se obtuvieron por más de la mitad de los alumnos (58.62 %).

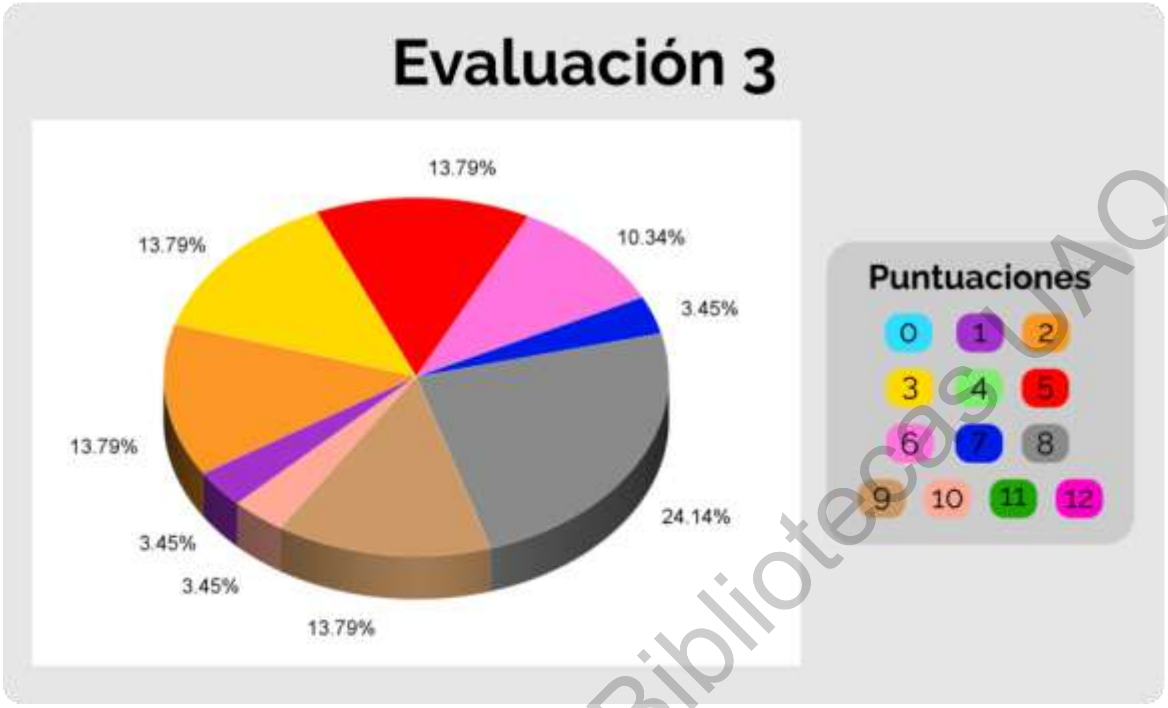


Imagen 41. Evaluación 3

6. CONCLUSIONES

En el análisis por casos, aunque la mayoría de los alumnos mejoró, en algunos otros el taller no fue significativo, sin embargo al analizar los grupos como unidad se puede percibir una mejora en todos los parámetros medidos: promedio general del grupo, porcentaje de avance, porcentaje de alumnos por debajo de los 3 puntos y porcentaje de alumnos por arriba de los 6 puntos. Estas razones nos hacen pensar que la implementación de un taller igual o similar al propuesto en este trabajo podría ayudar a mejorar las habilidades de razonamiento y de argumentación, y con ello poder cumplir con el perfil de egreso que marca la Secretaria de Educación Pública.

De acuerdo a la experiencia, documentación y testimonios durante la implementación del taller se podrían considerar tres alternativas para el desarrollo del mismo. La primera es la forma propuesta en esta tesis, en la que se desarrolló de manera independiente por un experto que no era el titular de la materia. Las ventajas de esta primera forma es que el tallerista se puede concentrar exclusivamente en el buen funcionamiento de las actividades y en el seguimiento del taller. La principal desventaja es que al no ser una materia con valor curricular hay alumnos y maestros que no lo toman con suficiente importancia.

La segunda forma es incluir la asignatura Lógica Matemática como parte de la currícula de los alumnos, sin embargo, esta alternativa representa un reto mayor ya que es necesaria más investigación sobre el tema, planeación de la materia en mucho niveles del sistema educativo y la capacitación adecuada de los profesores.

Por último se propone incluir las actividades del taller en la materia de matemáticas en la que el maestro dedique dos sesiones al mes para en un semestre concluir con el taller y que sea parte de la calificación de la materia.

Esta investigación puede ser un precedente para continuar con el análisis de la enseñanza de la lógica matemática. Un siguiente paso para ampliar esta investigación es analizar el desempeño de los alumnos actividad por actividad, sus actitudes y las experiencias recogidas en el aula. Con esto podemos determinar la utilidad de cada situación y el impacto final que cada una de ellas tuvo en el aprendizaje del alumno, y así poder diseñar talleres específicos más a la medida de las necesidades de cada institución, escuela o grupo.

7. REFERENCIAS

Alberro, A., Figueroa, M. A., Rubio, C. J., & Ruiz, F. (2012). Problemas de practica . *TZALOA Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, 10.

Arnaz, J. A. (1989). *INICIACIÓN A LA LÓGICA SIMBÓLICA.* México: Trillas.

Brousseau, G. (2000). EDUCACIÓN Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. *Educación Matemática, 12*(1), 5-38.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas .* Buenos Aires : Libros del Zorzal.

Carroll, L. (2002). *El juego de la Lógica .* México: TOMO.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática). Vol. 17, n° 1*, 87-106.

Fernández, A. (2004). *Test de lógica e inteligencia.* Madrid: LIBSA.

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., & Prieto, M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, 213-222.

Gago, J., Hartillo, I., & Martín, J. (2006). Sudokus and Gröbner bases: not only a divertimento. *Computer Algebra in Scientific Computing, 9th International Workshop.*, 155-165.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). Working Group 16 Papers*, (pag. 1-10). Antalya, Turquía: European Society for Research in Mathematics Education.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2016). *México en PISA 2015.* México: INEE.

Larios, V., & Díaz, A. J. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro.* Querétaro: Editorial Universitaria.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3), 365-399.

Organización para la Coperación y el Desarrollo Económicos. (2015). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve.* Santillana.

Peña, J. A. (1999). La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas. *Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México*, 12-18.

Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño.* Madrid: Morata.

Secretaría de Educación Pública. (2018). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: SEP.

Sternberg, R. J., & Spear-Swerling, L. (1999). *Enseñar a pensar.* España: Santillana.

Vargas, L., & Bustillos, G. (1990). *Técnicas participativas para la Educación Popular.* Santiago de Chile: Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación.

Videla, C. (1995). *Un curso de Lógica Matemática.* México: Sociedad Matemática Mexicana.

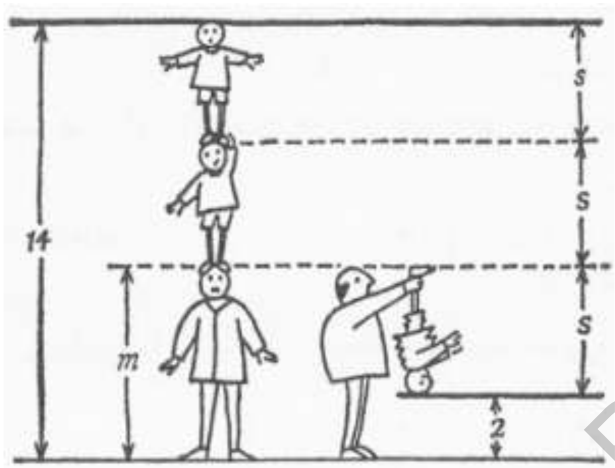
Vivas, A. (2004). *Test de Lógica e Inteligencia.* Madrid: LIBSA.

8. ANEXOS

Anexo 1: Evaluación diagnóstica.

Instrucciones: Lee detenidamente y contesta en el recuadro.

1. ¿Cuánto mide cada persona?



2. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?

3. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos.
   Marisol cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Mónica que es?

4. Pedro tiene una caja con 100 soldados y sacó algunos de ellos para acomodarlos en filas.

- Los acomoda en filas de 2 en 2 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 3 en 3 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 4 en 4 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 5 en 5 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 6 en 6 y le sobra 1.

¿Cuántos soldados sacó de la caja?

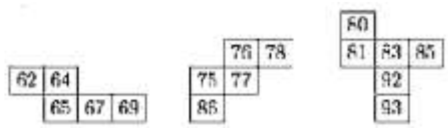
Completar la cuadrícula con los números del 1 al 9 sin repetir, de forma que las sumas de cada renglón y cada columna sean 15.

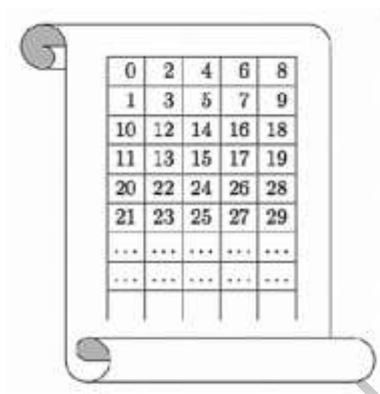
	2	
		3

Anexo 2 Evaluación intermedia

Instrucciones: Lee detenidamente y contesta en el recuadro.

1. Los números se acomodan en una tabla usando una lógica que debes descubrir. ¿Cuáles de los siguientes patrones aparecen en la tabla?





2. Una mamá tiene cinco hijos en una familia y cada uno tiene dos hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas tiene la mamá?

3. Un dragón tiene 5 cabezas. Cada vez que le cortan una le crecen 5 nuevas cabezas. Si se le cortan 6 veces una cabeza, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

4. En una fiesta, hay 8 niñas y 5 niños. Cada niña le da un regalo a cada niño y cada niño le da un regalo a cada niña. ¿Cuántos regalos hubo en total?

Mini-Sudoku

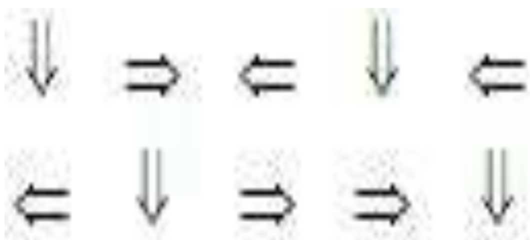
Rellenar la cuadrícula de 6x6 celdas, dividida en subcuadrículas de 3×2, con las cifras del 1 al 6 sin repetir por fila, columna o subcuadrícula, partiendo de algunos números ya colocados en algunas de las celdas.

				4	
					5
3	5		2		
1	4		5		
					3
				1	

Anexo 3: Evaluación final.

Instrucciones: Lee detenidamente y contesta en el recuadro.

1. ¿Cuál es el mínimo número de flechas que se deben voltear de cualquier manera de tal forma que todas las flechas queden apuntando en la misma dirección?



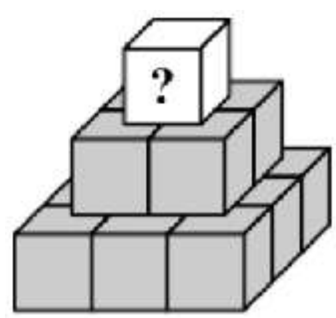
2. En la siguiente fila de números inserte el signo "+", tantas veces como quiera, para que el resultado sea una igualdad correcta:

9 8 7 6 5 4 3 2 1=90

3. Las cuatro parejas de esposos: los Arias, los Benitez, los Cáceres y los Dávila se sientan alrededor de una mesa circular. Como es normal, cada pareja de esposos se sientan juntos. Además se cumplen las siguientes condiciones: Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer. Las señoras Arias y Benitez se sientan juntas. Uno de los Cáceres está sentado a la izquierda de uno de los Dávila. La señora Cáceres no se sienta junto al señor Arias. ¿Quién se sienta a la derecha del señor Benitez?

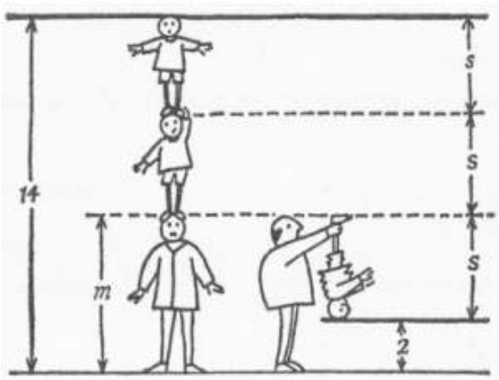
4. Se entrevistan a 200 estudiantes. De ellos, 120 toma refresco. Entre los que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas. Si 79 estudiantes no son de matemáticas, ni toman refresco, ¿Cuántos estudiantes de matemáticas fueron entrevistados?

5. Víctor escribe un número positivo en cada uno de los catorce cubos de la pirámide que se muestra en la figura. La suma de los nueve enteros escritos en los cubos del nivel más bajo es 50. Los enteros escritos en cada uno de los otros cubos es igual a la suma de los cuatro enteros escritos en los cubos que están abajo de él. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener escrito el cubo del nivel más alto?



Anexo 4 : Evaluación diagnóstico (Soluciones y distribución de puntos).

1. ¿Cuánto mide cada persona?



-Plantear $3s-2=14$ (1 punto)

-Plantear $2s+m=14$ (1 punto)

-Encontrar m y s, resolviendo el sistema de ecuaciones con los puntos anteriores (1 punto)

2. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños, máximo, pueden viajar con 9 adultos?

-Plantea la siguiente relación: 12 adultos equivale 20 niños y 9 adultos equivale X niños (1 punto)

-Resolver la equivalencia y concluir 9 adultos equivalen 15 niños (1 punto)

-Concluir que 3 adultos equivale 5 niños y que es la cantidad de niños que puede subir al elevador con 9 adultos. (1 punto)

3. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Marisol cree que son las 12:00. ¿Qué hora cree Mónica que es?

-Analizar el caso de Marisol. Si ella cree que son la 12:00 entonces lo que tiene es su reloj son 12:05 y en realidad son las 12:15 (1 punto)

-Analizar el caso de Mónica, en base a la hora real 12:15

Mónica tiene en el reloj las 12:20(1 punto) y cree que son las 12:30 (1 punto)

4. Pedro tiene una caja con 100 soldados y sacó algunos de ellos para acomodarlos en filas.

- Los acomoda en filas de 2 en 2 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 3 en 3 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 4 en 4 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 5 en 5 y le sobra 1.
- Los acomoda en filas de 6 en 6 y le sobra 1.

¿Cuántos soldados sacó de la caja?

-Encontrar el mínimo común múltiplo de 2,3,4,5 y 6 (2 puntos) -61 es la cantidad de soldados que cumple con todos los puntos (1 punto)

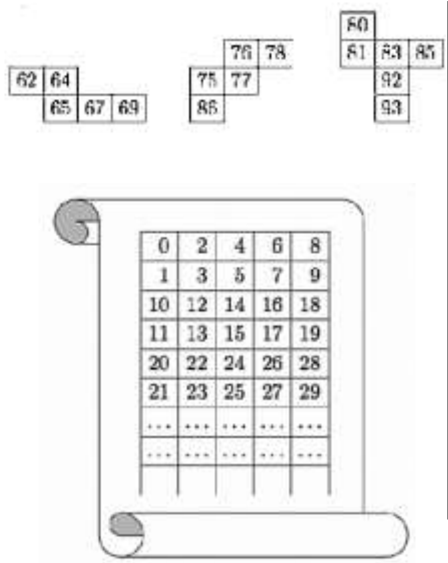
Completar la cuadrícula con los números del 1 al 9 sin repetir de forma que las sumas de cada renglón y cada columna sean 15.

	2	
		3

Anexo 5: Evaluación intermedia

Instrucciones: Lee detenidamente y contesta en el recuadro.

1. Los números se acomodan en una tabla usando una lógica que debes descubrir. ¿Cuáles de los siguientes patrones aparecen en la tabla?



- Analizar que cada dos renglones cambia el valor de las decenas (1 punto). - Analizar el patrón de las cifras de las unidades que va de dos en dos (1 punto). - Concluir que la figura 1 y 3 corresponde al patrón (1 punto).

2. Una mamá tiene cinco hijos en una familia y cada uno tiene dos hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas tiene la mamá?

- Analizar que los cinco hijos pueden tener en común las dos hermanas (1 punto) - Analizar el caso en que no tienen hermanas en común (1 punto) - Concluir que tiene 5 hijos y 2 hijas (1 punto)

3. Un dragón tiene 5 cabezas. Cada vez que le cortan una le crecen 5 nuevas cabezas. Si se le cortan 6 veces una cabeza, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

- Encontrar el patrón que siguen los cortes: Primer corte 9 cabezas, segundo corte 13 cabezas, tercer corte 17 cabezas, cuarto corte 21 cabezas, … (2 puntos) - Concluir que al final del sexto corte quedan 29 cabezas (1 punto)

4. En una fiesta, hay 8 niñas y 5 niños. Cada niña le da un regalo a cada niño y cada niño le da un regalo a cada niña. ¿Cuántos regalos hubo en total?

- Las 8 niñas dan 5 regalos cada niño en total son 40 regalos (1 punto)
- Los 5 niños dan 8 regalos cada niña en total son 40 regalos (1 punto)
- Hubo 80 regalos en total (1 punto)

Mini-Sudoku

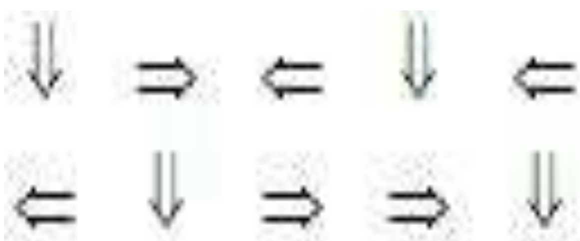
Rellenar la cuadrícula de 6x6 celdas, dividida en subcuadrículas de 3×2, con las cifras del 1 al 6 sin repetir por fila, columna o subcuadrícula, partiendo de algunos números ya colocados en algunas de las celdas.

				4	
					5
3	5		2		
1	4		5		
					3
				1	

Anexo 6: Evaluación final.

Instrucciones: Lee detenidamente y contesta en el recuadro.

1. ¿Cuál es el mínimo número de flechas que se deben voltear de cualquier manera de tal forma que todas las flechas queden apuntando en la misma dirección?



- Las flechas que deben moverse son las de menor cantidad. (1 punto)
- Por lo tanto se mueven 6 flechas (=>) (<=) se cambian a flechas con dirección hacia abajo (2 puntos)

2. En la siguiente fila de números inserte el signo “+”, tantas veces como quiera, para que el resultado sea una igualdad correcta:

9 8 7 6 5 4 3 2 1=90

-Si se utilizan en todos los espacios el signo “+” nos queda la siguiente igualdad 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 (1 punto)
-Identificar que 9+8+7+6+5+4+3+2+1+45=45+45=90, esos 45 se pueden obtener quitando el signo entre el 5 y 4, ya que 54=45+5+4 y concluir que 9+8+7+6+54+3+2+1=90 (2 puntos)

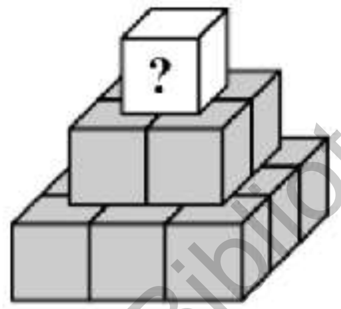
3. Las cuatro parejas de esposos: los Arias, los Benitez, los Cáceres y los Dávila se sientan alrededor de una mesa circular. Como es normal, cada pareja de esposos se sientan juntos. Además se cumplen las siguientes condiciones: Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer. Las señoras Arias y Benitez se sientan juntas. Uno de los Cáceres está sentado a la izquierda de uno de los Dávila. La señora Cáceres no se sienta junto al señor Arias. ¿Quién se sienta a la derecha del señor Benitez?

- Comenzar ordenando a las parejas Arias y Benitez según las afirmaciones. Puede ser con dibujos que lo ilustren. (1 punto)
- Decidir el lugar de los Cáceres y Dávila tomando en cuenta la afirmación que "Al frente de cualquier hombre está sentada una mujer" y que "La señora casares no se sienta junto al señor Arias" (1 punto)
- Concluir el acomodo correcto (1 punto).

4. Se entrevista a 200 estudiantes. De ellos, 120 toma refresco. Entre los que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas. Si 79 estudiantes no son de matemáticas, ni toman refresco, ¿Cuántos estudiantes de matemáticas fueron entrevistados?

- Identificar que 120 estudiantes toman refresco y 80 estudiantes no toman refrescos (1 punto).
- De los 120 que toman refresco, 12 son estudiantes de matemáticas y 108 no lo son (1 punto).
- De los 80 que no toman refresco, 79 no son estudiantes de matemáticas y 1 si lo es. Por lo tanto 13 entrevistados son estudiantes de matemáticas (1 punto).

5. Víctor escribe un número positivo en cada uno de los catorce cubos de la pirámide que se muestra en la figura. La suma de los nueve enteros escritos en los cubos del nivel más bajo es 50. Los enteros escritos en cada uno de los otros cubos es igual a la suma de los cuatro enteros escritos en los cubos que están abajo de él. ¿Cuál es el máximo valor posible que puede tener escrito el cubo del nivel más alto?



Anexo 7: Hoja para alumnos.

LA HISTORIA

"Un hombre de negocios acababa de apagar las luces de la tienda cuando un hombre apareció y le pidió dinero. El dueño abrió la caja registradora. El contenido de la caja registradora fue extraído y el hombre salió corriendo. Un miembro de la policía fue avisado rápidamente"

Afirmaciones	**Verdad**	**Falso**	**No sé**
1) Un hombre apareció después que el dueño apagó las luces de la tienda.			
2) El ladrón era un hombre.			
3) El hombre que apareció no pidió dinero.			
4) El hombre que abrió la caja registradora era el dueño.			
5) El dueño de la tienda extrajo el contenido de la caja registradora y salió corriendo.			
6) Alguien abrió una caja registradora.			
7) Después de que el hombre que pidió dinero y extrajo el contenido de la caja registradora, huyó a toda carrera.			
8) Aunque la caja registradora contenía dinero, la historia no dice cuánto.			
9) El ladrón pidió dinero al dueño.			
10) Un hombre de negocios acababa de apagar las luces cuando un hombre apareció dentro de la tienda.			
11) Era a plena luz del día cuando el hombre apareció.			
12) El hombre que apareció abrió la caja registradora.			
13) Nadie pidió dinero.			
14) La historia se refiere a una serie de eventos en los cuales únicamente se mencionan tres personas: el dueño de la tienda, un hombre que pidió el dinero y un miembro de la fuerza pública.			
15) Los siguientes eventos ocurrieron: alguien pidió el dinero, una caja registradora fue abierta, su contenido fue extraído y un hombre huyó de la tienda.			