



**Universidad Autónoma de Querétaro**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Maestría en Ciencias (Estructuras)**

Desarrollo de un sistema tensegrity estable ante efectos ambientales dinámicos, acoplado a la superestructura de un puente peatonal

**Tesis**

Que como parte de los requisitos para obtener el Grado de **Maestro en Ciencias (Estructuras)**

Presenta:

**Ing. Ángel Otoniel González Martínez**

Dirigido por:

**Dr. Jaime Moisés Horta Rangel**

Dr. Jaime Moisés Horta Rangel  
Presidente

Dr. Miguel Ángel Pérez Lara y Hernández  
Secretario

Dr. Guadalupe Moisés Arroyo Contreras  
Vocal

Dr. Juan Bosco Hernández Zaragoza  
Suplente

M. en V. Humberto Uehara Guerrero  
Suplente

Centro Universitario, Querétaro, Qro.  
Octubre de 2019.  
México.

## RESUMEN

En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de un sistema *tensegrity* acoplado a la superestructura de un puente peatonal. La superestructura del puente peatonal, se conforma por una malla espacial metálica y 5 módulos *tensegrity*, denominados X-T. El sistema *tensegrity* es un conjunto de barras metálicas aisladas, unidas a través de una red de cables sujetos a tensión; las barras, a su vez trabajan normalmente a compresión. Estos dos sistemas, tanto la malla espacial como el *tensegrity* se fusionan para generar un sistema híbrido. Las acciones a considerar para el estudio dinámico han sido los efectos de viento, así como los cambios de temperatura. Las cargas vivas que son transmitidas por los usuarios y las cargas asociadas al viento, se han considerado conforme a las normas reglamentarias en la materia. Se incluyen los pesos propios de todos los elementos estructurales, incluyendo el sistema de piso y elementos secundarios. Para establecer el equilibrio del sistema *tensegrity* se aplica el método de doble descomposición de valores singulares, de esta manera se determinan las coordenadas y las fuerzas internas. Posteriormente, se evalúa el comportamiento del sistema *tensegrity* mediante modelos dinámicos no lineales. Por otra parte, la malla espacial soportante de la pasarela peatonal, se analiza mediante el método de elementos finitos (MEF) aplicable a barras articuladas en el espacio. Empleando una metodología basada en el principio de superposición de efectos y en el movimiento de la base, se realizó el acoplamiento de ambos sistemas. Los resultados obtenidos establecen el nivel de presfuerzo máximo en cada elemento del sistema *tensegrity*, así como los desplazamientos nodales máximos y las secciones transversales de barras y tensores. De manera gráfica, se muestran las variaciones de la fuerza axial y de la posición de los nodos durante el tiempo de aplicación de las acciones dinámicas, así como la vibración residual.

**(Palabras clave:** *Estructura tensegrity; Puente peatonal; Dinámica no lineal; Cargas por viento; Variación de temperatura; Estabilidad estructural; Movimiento de la base*).

## SUMMARY

In this work, the dynamic behavior of a tensegrity system coupled to the superstructure of a pedestrian bridge is studied. Superstructure of the pedestrian bridge is composed by a spatial double-layer grid and five tensegrity modules, named X-T. Tensegrity system is a set of isolated bars, working normally in compression, linked through a continuous cable net subjected to tension. These systems, both the spatial double-layer grid and tensegrity are merged to generate a hybrid system. Actions to consider for the dynamic study are wind effects as well as changes in temperature. Live loads that are transmitted by users and wind loads, have been considered in accordance with the regulations and building codes for bridges projects. Self-weight of all the structural elements, floor system and secondary elements are included. In order to establish equilibrium initial conditions of the tensegrity system, a method based on double decomposition of singular values is applied, in this way coordinates and internal forces are determined. Subsequently, dynamical behavior of tensegrity system is evaluated using nonlinear dynamic models. On the other hand, spatial double-layer grid is analyzed by the finite element method, defined as a system of bars articulated in space. Applying a methodology based on the principle of superposition of effects and base motion, coupling of both systems was carried out. Obtained results establish the maximum stress level in each element of tensegrity system, as well as the maximum nodal displacements and the required cross section of bars and cables. Graphically, variations of both axial force and positions of nodes are shown during application period of dynamical actions, as well as residual vibrations.

**(Key words:** *Tensegrity structure; Pedestrian bridge; Non-linear dynamics; Wind load effects; Variation of temperature; Structural Stability; Base Motion Method*).

## AGRADECIMIENTOS

A mi madre, por su amor, su apoyo incondicional en todos los proyectos que he emprendido, por haber fomentado con su ejemplo el gusto por el estudio, por los valores y las convicciones que me ha transmitido toda la vida.

A mi novia, por su amor, su incondicional compañía, apoyo y comprensión. Por su motivación por emprender juntos un nuevo reto personal y profesional.

A mi familia, quienes me han apoyado y ayudado en los retos personales y profesionales a los que me he enfrentado.

Al Dr. Jaime Moisés Horta Rangel, por sus enseñanzas, su continuo apoyo y sus consejos. Por motivarme a desarrollar este proyecto de investigación y por el conocimiento que me transmitió como director de tesis y como profesor.

Al M.I. Humberto Uehara Guerrero, quién me impulsó a enfocar este proyecto de investigación sobre estructuras especiales, y me motivo a transmitir este conocimiento con sus alumnos.

Al Dr. Guadalupe Moisés Arroyo Contreras y al Dr. Miguel Ángel Pérez Lara y Hernández, por haber fungido como asesores y profesores durante la maestría.

A mis amigos de la Maestría en Estructuras, por todo su apoyo y amistad, dentro y fuera de la escuela.

Al M.C. Alejandro Moreno, al M.C. Francisco Moreno y al M.C. Álvaro Vera, por amistad, sus enseñanzas y apoyo durante toda la maestría.

Al Dr. Irineo Torres Pacheco, por recibirme en sus clases, y orientarme en los ámbitos de la investigación.

A los alumnos del grupo de arquitectura, quienes participaron en la elaboración de estructuras *tensegrity*.

A los catedráticos de la Universidad Autónoma de Querétaro por los conocimientos y experiencias transmitidas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ) por el apoyo brindado para la realización de este proyecto y para la obtención del grado de Maestro en Ciencia con línea terminal en Estructuras.

*El equilibrio, es una condición de la naturaleza que ha contribuido a que el universo sea como es, que, en él, la materia cobrara conciencia, y, que la conciencia perciba lo que se conoce. El ser humano, ha replicado esta característica a diversas áreas de su desarrollo, desde la manera en que concibe su existencia, a su entorno, y, el conocimiento que tiene de él.*

## TABLA DE CONTENIDOS

<b>1.</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>19</b>
1.1	JUSTIFICACIÓN.....	21
1.2	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	22
1.3	HIPÓTESIS Y OBJETIVOS.....	24
1.3.1	<i>Hipótesis.</i> .....	24
1.3.2	<i>Objetivo general.</i> .....	24
1.3.3	<i>Objetivos particulares.</i> .....	24
<b>2.</b>	<b>REVISIÓN DE LA LITERATURA.....</b>	<b>26</b>
2.1	DEFINICIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS. ....	26
2.2	EVOLUCIÓN Y AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN.....	30
2.2.1	<i>Etapa inicial (1950 – 1990/2003).</i> .....	30
2.3	ETAPA ACTUAL .....	33
2.4	APLICACIONES.....	36
2.5	DESCRIPCIÓN DE MÉTODOS DE BÚSQUEDA DE FORMA .....	38
2.5.1	<i>Métodos cinemáticos para la búsqueda de forma</i> .....	39
2.5.1.1	Soluciones analíticas.....	39
2.5.1.2	Programación no lineal .....	41
2.5.1.3	Relajación dinámica .....	41
2.5.2	<i>Métodos estáticos para la búsqueda de forma</i> .....	42
2.5.2.1	Soluciones analíticas .....	42
2.5.2.2	Densidad de fuerza .....	43
<b>3.</b>	<b>FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA .....</b>	<b>45</b>
3.1	CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....	45
3.1.1	<i>Indeterminación estática y cinemática</i> .....	45
3.1.2	<i>Pretensado y autotensado</i> .....	47
3.1.3	<i>Estabilización de mecanismos infinitesimales</i> .....	49
3.1.4	<i>Conectividad</i> .....	51
3.1.5	<i>Sistema de ecuaciones de equilibrio mediante el principio del trabajo virtual</i> .....	52
3.1.6	<i>Coefficientes de densidad de fuerza y geometría</i> .....	56

3.1.7	<i>Grado de indeterminación estática y cinemática de las estructuras tensegrity</i> .....	60
3.1.8	<i>Requerimientos de rango</i> .....	64
3.1.9	<i>Búsqueda de forma y de niveles de presfuerzo (BFF)</i> .....	65
3.1.10	<i>Descomposición de valores singulares</i> .....	66
3.1.11	<i>Doble descomposición de valores singulares (DDVS)</i> .....	68
3.2	<b>MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO</b> .....	72
3.2.1	<i>Análisis estático no lineal</i> .....	73
3.2.2	<i>Análisis dinámico no lineal</i> .....	74
3.2.3	<i>Excitación tipo pulso</i> .....	75
3.2.4	<i>Método de integración directa Beta - Newmark</i> .....	75
3.2.5	<i>Movimiento de la base</i> .....	77
3.3	<b>ESTABILIDAD ESTRUCTURAL</b> .....	78
4.	<b>METODOLOGÍA</b> .....	80
4.1	<b>MATERIALES Y EQUIPO</b> .....	87
5.	<b>RESULTADOS Y DISCUSIONES</b> .....	88
5.1	<b>DESCRIPCIÓN DEL MÓDULO TENSEGRITY</b> .....	88
5.2	<b>FORMA Y FUERZAS EN EQUILIBRIO DEL MÓDULO X-T</b> .....	90
5.3	<b>ANÁLISIS ESTÁTICO NO LINEAL (AENL) POR EFECTOS GRAVITACIONALES DEL MÓDULO X-T</b> .....	92
5.4	<b>EVALUACIÓN DE LOS ELEMENTOS MECÁNICOS Y LOS DESPLAZAMIENTOS DEL MÓDULO X-T, PRODUCIDOS POR LOS EFECTOS AMBIENTALES</b> .....	97
5.5	<b>SUPERESTRUCTURA DEL PUENTE PEATONAL</b> .....	120
5.5.1	<i>Descripción de la superestructura</i> .....	120
5.5.2	<i>Análisis de la superestructura ante efectos gravitacionales y ambientales</i> .....	121
5.6	<b>ACOPLAMIENTO DE SISTEMAS</b> .....	126
5.6.1	<i>Dispositivos de acoplamiento mecánico</i> .....	126
5.6.2	<i>Criterio para el acoplamiento de los sistemas</i> .....	128
5.6.3	<i>Efectos del acoplamiento</i> .....	131
6.	<b>CONCLUSIONES</b> .....	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
7.	<b>APÉNDICES</b> .....	156

7.1	ALGORITMO DEL PROCESO DE BÚSQUEDA DE FORMA (MATLAB).....	156
7.1.1	<i>Tabla de Excel para el algoritmo de Matlab</i> .....	159
7.2	ANÁLISIS DE LAS CARGAS ACTUANTES DEL VIENTO (SCT 6.01.004-VIENTO) .....	161
7.2.1	<i>Ubicación</i> .....	161
7.2.2	<i>Método estático</i> .....	161
7.3	REGISTRO TIEMPO-HISTORIA .....	164
8.	REFERENCIAS .....	194

Dirección General de Bibliotecas UAG



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1. <i>Características mecánicas de los materiales componentes de la ET.</i> ...	82
Tabla 4-2. <i>Combinaciones de grados de libertad para los nodos de apoyo de la ET.</i> .....	83
Tabla 4-3. <i>Características mecánicas de los materiales de la SPP.</i> .....	83
Tabla 4-4. <i>Combinaciones de carga para la ET y la SPP</i> (Secretaría de Comunicaciones y Transportes, 2016). .....	84
Tabla 5-1. <i>Conectividad del módulo "X-T".</i> .....	89
Tabla 5-2. <i>Coordenadas nodales de la ET resultantes del procedimiento de búsqueda de forma.</i> .....	90
Tabla 5-3. <i>Coefficientes de presfuerzo resultantes del proceso de búsqueda de forma (BFF).</i> .....	91
Tabla 5-4. <i>Desplazamiento de los nodos de apoyo de la ET.</i> .....	92
Tabla 5-5. <i>Coordenadas nodales de la ET, resultantes del análisis estático no lineal, considerando las condiciones de apoyo del caso 2.</i> .....	93
Tabla 5-6. <i>Comparativa de la variación de fuerza axial entre los resultados del proceso de búsqueda de forma (BFF) contra las fuerzas axiales resultantes del AENL por los efectos del peso propio PP.</i> .....	94
Tabla 5-7. <i>Fuerzas axiales máximas a compresión de los elementos tipo barra en los casos de carga 1, 2 y 3.</i> .....	97
Tabla 5-8. <i>Fuerzas axiales a tensión de los elementos tipo cable en los casos de carga 1, 2 y 3.</i> .....	102

Tabla 5-9. <i>Resumen de los decrementos máximos de fuerza axial en los elementos cable, para los casos 1, 2 y 3.</i> .....	108
Tabla 5-10. <i>Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 1 por la acción del viento.</i> .....	109
Tabla 5-11. <i>Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 2 por la variación térmica y la acción del viento.</i> .....	112
Tabla 5-12. <i>Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 3 por la variación térmica y la acción del viento.</i> .....	113
Tabla 5-13. <i>Secciones transversales de los elementos barra de la ET.</i> .....	117
Tabla 5-14. <i>Relación demanda / capacidad de los elementos cable de la ET.</i> ....	118
Tabla 5-15. <i>Frecuencias y periodos modales de la SPP.</i> .....	122
Tabla 5-16. <i>Desplazamientos máximos de la SPP en condiciones de servicio.</i> ..	123
Tabla 5-17. <i>Elementos mecánicos máximos actuantes en la SPP.</i> .....	124
Tabla 5-18. <i>Fuerzas máximas en los nodos de apoyo de la ET.</i> .....	126
Tabla 5-19. <i>Frecuencias y periodos modales de la ET.</i> .....	128
Tabla 5-20. <i>Comparativa de variaciones de la fuerza axial en la SPP al incluir los efectos del módulo X-T.</i> .....	131
Tabla 5-21. <i>Desplazamientos máximos de los nodos receptores de la ET.</i> .....	132
Tabla 5-22. <i>Desplazamientos diferenciales máximos de los nodos receptores de la ET.</i> .....	132
Tabla 5-23. <i>Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo efectos gravitacionales, antes y después del acoplamiento con la SPP.</i> .....	134

Tabla 5-24. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo efectos gravitacionales, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	134
Tabla 5-25. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo los efectos del viento, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	135
Tabla 5-26. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo los efectos del viento, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	136
Tabla 5-27. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.....	137
Tabla 5-28. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable ante un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.....	138
Tabla 5-29. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	139
Tabla 5-30. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo la integración de las fuerzas de viento y un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	140
Tabla 5-31. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	141
Tabla 5-32. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	142
Tabla 5-33. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP. ....	143

Tabla 5-34. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.....	144
Tabla 5-35. Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento del caso 1.....	145
Tabla 5-36. Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento y la variación térmica del caso 2. ....	146
Tabla 5-37. Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento y la variación térmica del caso 3. ....	146

Dirección General de Bibliotecas UAO

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Esculturaestructura de Loganson, (Gengnagel, 2002).....	26
Figura 2.2. Snelson's X-piece, 1948. Estructura tridimensional estable formada de dos cuerpos rígidos, (Skelton y De Oliveira, 2009). ....	27
Figura 2.3. Sistema <i>tensegrity</i> octaedro, (Skelton y De Oliveira, 2009).....	28
Figura 2.4. Sistemas <i>tensegrity</i> clase 1, (Skelton y De Oliveira, 2009).....	29
Figura 2.5. Sistemas <i>tensegrity</i> clase 2 y 3, (Skelton y De Oliveira, 2009).....	29
Figura 2.6. "Free Ride Home" por Kenneth Snelson's, 1974, estructura <i>tensegrity</i> clase 1, (Skelton y De Oliveira, 2009).....	36
Figura 2.7. Cúpula geodésica de Fuller y estadio olímpico de Munich, (Gengnagel, 2002).....	37
Figura 2.8. Modelos biomecánicos de partes del cuerpo humano, (Caluwaerts et al., 2014).....	37
Figura 2.9. Robot <i>tensegrity</i> esférico, (Agogino, 2013).....	38
Figura 2.10. Estructura en <i>tensegrity</i> simple, basada en un prisma rectangular con radio $r$ y altura $h$ , (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017). ....	39
Figura 3.1. Mecanismo finito (a) y mecanismo infinitesimal (b) (adaptado de Zhang y Ohsaki, 2015).....	46
Figura 3.2. Movimiento de cuerpo rígido en un espacio bidimensional, (a) corresponde a una traslación en dirección X, (b) corresponde a una traslación en la dirección Z, y (c) a una rotación alrededor de un punto arbitrario (adaptado de Zhang y Ohsaki, 2015).....	47
Figura 3.3. Sistema reticular presforzado (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017). ....	48

<b>Figura 3.4. Análisis de presfuerzo a tracción (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).</b> .....	50
Figura 3.5. Análisis de presfuerzo a compresión (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).....	50
Figura 3.6. Equilibrio de un nodo libre. ....	57
Figura 3.7. Ilustración gráfica de la DVS de la matriz [A], figura adaptada de Pellegrino (1993).....	67
Figura 3.8. Gráfica de función tipo pulso. ....	75
Figura 3.9. Sistema representativo del problema dinámico de movimiento de la base. ....	77
Figura 3.10. Dependencia de estabilidad en la posición polar. Los sistemas A y B, son estables; el sistema C, es marginalmente estable; y el sistema D y E son inestables (adaptado de De Silva, 2018). ....	79
Figura 4.1. Diagrama de flujo de la metodología. ....	80
Figura 4.2. Diagrama de flujo del algoritmo DDVS propuesto por Yuan <i>et al.</i> (2007). ....	81
Figura 5.1. Vista en perspectiva y numeración de nodos del módulo “X-T”.....	88
Figura 5.2. Dimensiones totales y del espacio interior libre para la circulación peatonal del módulo “X-T”. ....	89
Figura 5.3. Esquema de la distribución del presfuerzo resultante del proceso de búsqueda de forma y fuerzas en equilibrio del módulo “X-T”.....	91
Figura 5.4. Desplazamiento de nodos de apoyo de la ET, vista en planta. ....	92

Figura 5.5. Fuerzas axiales a compresión (Ton) de los elementos barra, por los efectos del PP.....	94
Figura 5.6. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 6 al 13, por los efectos del PP.....	95
Figura 5.7. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 14 al 21, por los efectos del PP.....	95
Figura 5.8. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 22 al 27, por los efectos del PP.....	96
Figura 5.9. Registro tiempo-historia de los elementos barra para el caso 1. ....	98
Figura 5.10. Registro tiempo-historia de los elementos barra 1 y 3 para los casos 2 y 3.....	101
Figura 5.11. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para el caso 1. ....	104
Figura 5.12. Registro tiempo-historia de los elementos cable 17, 18, 26 y 27 para los casos 2 y 3.....	107
Figura 5.13. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	111
Figura 5.14. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	115
Figura 5.15. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y3. ....	116
Figura 5.16. Vista en perspectiva y componentes de la SPP. ....	121
Figura 5.17. Vista en planta y dimensiones de la SPP. ....	121

Figura 5.18. Vista longitudinal deformada de la SPP, desplazamientos verticales amplificados 1:10.....	123
Figura 5.19. Fuerzas axiales máximas en la cuerda superior, combinación 6 para los casos $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ . .....	125
Figura 5.20. Fuerzas axiales máximas en las diagonales, combinaciones 5 y 6 para los casos $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ . .....	125
Figura 5.21. Fuerzas axiales máximas en la cuerda inferior, combinación 6 para los casos $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ .....	126
Figura 5.22. Vistas en elevación de las caras laterales de la articulación esférica. .....	127
Figura 5.23. Vistas en planta de las caras inferior y superior de la articulación esférica. ....	128
Figura 5.24. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos tensegrity sobre la SPP, vista en perspectiva. ....	129
Figura 5.25. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos tensegrity sobre la SPP, vista transversal. ....	130
Figura 5.26. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos tensegrity sobre la SPP, vista longitudinal. ....	130
Figura 5.27. <i>Desplazamientos diferenciales máximos de los nodos receptores de la ET</i> , amplificados 1:100. ....	133
Figura 7.1. Registro tiempo-historia de los elementos barra para el caso 1. ....	164
Figura 7.2. Registro tiempo-historia de los elementos cable 6 a 9 (grupo A), para el caso 1. ....	165



Figura 7.3. Registro tiempo-historia de los elementos cable 10 a 13 (grupo B), para el caso 1. ....	166
Figura 7.4. Registro tiempo-historia de los elementos cable 14 a 17 (grupo C), para el caso 1. ....	167
Figura 7.5. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para el caso 1. ....	168
Figura 7.6. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para el caso 1. ....	169
Figura 7.7. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para el caso 1. ....	170
Figura 7.8. Registro tiempo-historia de los elementos barra 1, 2 y 3 para los casos 2 y 3. ....	171
Figura 7.9. Registro tiempo-historia de los elementos barra 4 y 5, para los casos 2 y 3. ....	172
Figura 7.10. Registro tiempo-historia de los elementos cable 6 a 9 (grupo A), para los casos 2 y 3. ....	173
Figura 7.11. Registro tiempo-historia de los elementos cable 10 a 13 (grupo B), para los casos 2 y 3. ....	174
Figura 7.12. Registro tiempo-historia de los elementos cable 14 a 17 (grupo C), para los casos 2 y 3. ....	175
Figura 7.13. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para los casos 2 y 3. ....	176
Figura 7.14. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para los casos 2 y 3. ....	177

Figura 7.15. Registro tiempo-historia de los elementos cable 26 a 27 (grupo F), para los casos 2 y 3. ....	178
Figura 7.16. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 2 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	179
Figura 7.17. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 3 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	180
Figura 5.27. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 4 en la dirección Y, para el caso 1.....	181
Figura 7.19. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 6 en la dirección Y, para el caso 1.....	181
Figura 7.20. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 5 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	182
Figura 7.21. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	183
Figura 7.22. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 9 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	184
Figura 7.23. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 10 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.....	185
Figura 7.24. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 2 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	186
Figura 7.25. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 3 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	187
Figura 7.26. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 4 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	188

Figura 7.27. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 6 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	188
Figura 7.28. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 5 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	189
Figura 7.29. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	190
Figura 7.30. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	191
Figura 7.31. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 9 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	192
Figura 7.32. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 10 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3. ....	193

## 1. INTRODUCCIÓN.

A finales de los años 40's, una nueva noción de equilibrio fue propuesta por el arquitecto R. B. Fuller, quién planteo a sus alumnos, la idea de representar los principios estructurales de la naturaleza. A partir de esta idea, R. B. Fuller y su alumno, el escultor, Kenneth Snelson, desarrollaron múltiples modelos con el fin de materializar sus ideas (Jáuregui-Gómez, 2004). De esta manera, surgió una nueva propuesta para configurar sistemas estructurales, llamado *tensegrity*.

Las estructuras *tensegrity* (ET), son sistemas reticulares articulados con apoyos libres, compuestos por una red continua de elementos cable trabajando bajo fuerzas de tensión, en la cual, se encuentran inmersos elementos barra aislados, los cuales trabajan ante fuerzas de compresión (Motro et al., 2003). Su nombre fue propuesto por R. B. Fuller, como una contracción de "*tensional integrity*".

Las ET poseen características mecánicas que las hacen sobresalir de los sistemas y mecanismos convencionales. Una de ellas, es la capacidad de inducir presfuerzos a los elementos del sistema, principio que brinda la posibilidad de controlar la rigidez local y global, y, generar estados de equilibrio en ausencia de apoyos fijos (De-Boeck, 2013). Esto permite la creación de estructuras de alta resistencia con menor cantidad de material.

Se considera que la invención de las ET fue en el área de las artes plásticas, sin embargo, en el área de arquitectura e ingeniería civil, se han desarrollado sistemas estructurales que se basan, parcialmente, en el comportamiento mecánico de ET, tales como las cubiertas ligeras del estadio "La Plata" y el "Georgia Dome" (Lazzari et al., 2003); o como el puente Kurilpa (Australian Steel Institute, 2010), que se considera el primer sistema híbrido en implementar ET en una pasarela peatonal elevada.

En las áreas de ingeniería mecánica e ingeniería aeroespacial, las ET se han implementado como estructuras plegables e “inteligentes”, ya que presentan la capacidad de modificar su forma, mediante técnicas de control del presfuerzo de los elementos cable (Bel Hadj Ali y Smith, 2010). El robot “*super ball bot*” es una de las máximas aplicaciones desarrolladas dentro de estas áreas de la ingeniería. Fue creado por la NASA como un robot de exploración planetaria (Chen et al., 2017).

La estabilidad es una característica de los sistemas estructurales que tienen la capacidad de regresar a su posición inicial, después de que se retiran las cargas actuantes (Zhang y Ohsaki, 2015). Este fenómeno físico es un problema fundamental en el área de análisis estructural, que debe ser evaluado para garantizar la seguridad de las estructuras contra el colapso (Bazı̇, 2000). El fenómeno de la inestabilidad se define como la amplificación desproporcional de la respuesta de la estructura debido a perturbaciones de bajo o alto grado (Atig et al., 2017).

El puente peatonal (PP) es la infraestructura destinada para la circulación de los peatones sobre obstáculos que ponen en riesgo su integridad, como cuerpos de agua, vías para la circulación de vehículos de motor o depresiones del terreno. Este tipo de estructuras están expuestas a cargas y vibraciones generadas por el paso de los usuarios, y, a múltiples efectos relacionados con las condiciones ambientales del medio en que se encuentran, tales como, las fuerzas que ejercen las corrientes de viento sobre el PP y los esfuerzos producidos en sus componentes por las variaciones de temperatura ambiental (Secretaria de Comunicaciones y Transportes, 2001a).

Las cargas y acciones de origen ambiental, son variables en el tiempo y resulta conveniente representarlas mediante modelos matemáticos dinámicos, a partir de los cuales, es posible observar y evaluar la respuesta de los sistemas estructurales.

En el estudio que aquí se aborda, se desarrolló un sistema *tensegrity* estable ante acciones dinámicas de origen ambiental, el cual será acoplado a la superestructura de un puente peatonal (SPP).

## 1.1 Justificación

La competitividad de los productos de la industria de la construcción (viviendas, edificios, cubiertas, naves industriales, vialidades, puentes vehiculares, puentes peatonales, entre otros), es afectada por una gran cantidad de factores, que, a la vez, influyen en el proceso de toma de decisiones del cliente o usuario, sobre si llevar a cabo o no un proyecto, o bien, de elegir un proyecto sobre otros. Algunos de estos factores son: el monto total de la inversión, la relación costo-beneficio, la ubicación del proyecto, funcionabilidad, innovación, atractivo visual, el impacto ambiental y social, entre otros.

A través del diseño arquitectónico y del diseño estructural, es posible controlar muchos de los factores mencionados previamente, y de esta manera, brindar cualidades a los productos de la industria de la construcción, que resulten atractivos para los usuarios y satisfagan sus necesidades.

Debido al crecimiento urbano, cada año se incrementa la construcción de carreteras o vías rápidas que generan divisiones de zonas altamente urbanizadas, para dar prioridad al movimiento de vehículos motorizados. Esto modifica las trayectorias de circulación peatonal, y da origen a la necesidad de implementar puentes peatonales (Hidalgo-Solórzano et al., 2010). Sin embargo, esta medida, tiene como repercusiones: recorrer largas distancias para acceder al PP, diseños con poca practicidad para usuarios con limitantes físicas, su uso implica mayor esfuerzo, tiempo y en ciertos casos, son inseguros. Esto que propicia que los peatones no hagan uso de los PP y expongan su integridad al utilizar rutas de movilidad que implican un riesgo mayor, pero comprenden trayectorias cortas.

En México, los atropellamientos corresponden al 35% de lesiones causadas por tráfico (LCT) y al 49% de muertes por LCT. Además de los riesgos a la salud causados por las LCT, como traumatismos físicos y mentales, a corto, mediano o largo plazo, este tipo de lesiones, representan un fuerte gasto económico para el país. Se estima que, de los 7 598 millones de dólares gastados en el año 2007, por LCT, 2 660 millones fueron causados por atropellamientos (Hijar Medina, 2014).

Una solución alternativa para atender estas necesidades planteadas, es la implementación de sistemas *tensegrity* en los PP, ya que, además de ser sistemas atractivos para los usuarios, con los que se propicie e incremente el uso de espacios y de la infraestructura; estos sistemas brindan la capacidad de generar proyectos constructivos novedosos, ya que presentan características mecánicas que muchos de los sistemas estructurales convencionales no poseen. Adicionalmente, dada su composición, estos sistemas permiten el uso de materiales sustentables y la implementación de procesos constructivos eficaces, ya que, gran parte de la estructura se elabora en taller; y en campo, únicamente se realiza el montaje de la superestructura y la construcción de la cimentación.

## 1.2 Descripción del problema

Los sistemas *tensegrity* (ST), representan un área de oportunidad donde es conveniente enfocar las líneas de investigación de la ingeniería civil. El amplio potencial que representan estos sistemas, yace en la reducida gama de aplicaciones en las que se ha implementado.

Las investigaciones actuales proponen diversas técnicas y metodologías para realizar los modelos numéricos (Tran y Lee, 2011), analizar el comportamiento de sistemas *tensegrity* adaptados para funcionar ante cargas estáticas gravitacionales (Murakami, 2001a; Murakami, 2001b), fuerzas de viento de tipo estático y dinámico (Lazzari et al., 2003; Lu et al., 2012), y la caracterización de los

parámetros modales considerando variaciones de la temperatura ambiental (Ashwear y Eriksson, 2015). Sin embargo, de la revisión de la literatura, se observa que, en las investigaciones actuales, poco se ha estudiado sobre la interacción de los efectos ambientales y las posibles combinaciones de dichas cargas, que actuarían sobre una ET expuesta a la intemperie (Zhang et al., 2007). La integración de estas variables puede llevarse a cabo mediante modelos dinámicos no lineales, y permiten aproximar en mayor grado el comportamiento que tendrá una ET en condiciones de trabajo.

Cabe señalar, el nulo alcance que presentan las normativas de construcción y diseño nacionales e internacionales, con respecto al comportamiento de las estructuras *tensegrity*, el cual, es uno de los principales aspectos que limita su implementación en estructuras de uso civil.

Las ET han sido estudiadas, considerando la idealización de que sólo actúan fuerzas estáticas axiales y que los nodos de la estructura no tienen restricciones de desplazamiento. Sin embargo, las cargas y las vibraciones reales que actúan sobre el sistema son variables en el tiempo; además, son propensos a presentar inestabilidades materiales y/o geométricas, globales o locales, tales como: la amplificación de desplazamientos, la fluencia de los materiales, pandeo de los elementos barra, deformaciones permanentes, y, el relajamiento o la ruptura de los cables (Atig et al., 2017).



### **1.3 Hipótesis y objetivos**

#### **1.3.1 Hipótesis.**

La interacción entre las fuerzas de viento con las variaciones de la temperatura ambiental, representada mediante funciones dinámicas en un modelo de elementos finitos, permite determinar la respuesta estructural y los elementos mecánicos máximos, para desarrollar una estructura *tensegrity* estable, acoplada a la superestructura de un puente peatonal.

#### **1.3.2 Objetivo general.**

Determinar la respuesta estructural y los elementos mecánicos máximos, originados por la interacción de los efectos ambientales que actúan en una estructura *tensegrity*, para generar un sistema estable y acoplarlo a la superestructura de un puente peatonal.

#### **1.3.3 Objetivos particulares.**

- Proponer una estructura *tensegrity*, determinar su forma en equilibrio, y realizar el análisis estático no lineal, considerando los efectos del peso propio.
- Proponer la estructuración y el dimensionamiento de la superestructura del puente peatonal.

- Evaluar las condiciones de frontera de los nodos de apoyo de la ET para establecer el acoplamiento mecánico entre la ET y la superestructura del puente peatonal.
- Efectuar análisis estáticos y dinámicos no lineales, de la SPP y de la ET, respectivamente, considerando variaciones de la temperatura ambiental y las fuerzas de viento actuantes en cada sistema.
- Caracterizar los efectos generados por acoplamiento entre los sistemas.
- Llevar a cabo el análisis y el diseño estructural tanto de la ET como de la SPP.

Dirección General de Bibliotecas UAO

## 2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

### 2.1 Definición y conceptos básicos.

El concepto *tensegrity*, resulta de la combinación de las palabras “*tensile integrity*”, la cual se emplea para definir a los sistemas estructurales estables que alcanzan su equilibrio a partir de la interacción de elementos aislados actuando bajo fuerzas de compresión (barras) y una red continua de elementos bajo fuerzas de tensión (cables), donde los cables son componentes flexibles y globales, mientras que las barras son elementos rígidos y locales en el sistema. Se adjudica este término a Richard Buckminster Fuller (1965) quien realizó una de las primeras patentes de este tipo de sistemas estructurales.

Se considera que los tres personajes principales en la invención de los sistemas *tensegrity* son: Richard Buckminster Fuller, David Georges Emmerich y Kenneth D. Snelson. Sin embargo, Motro *et al.* (2003) menciona que Emmerich (1966) reporta que el primer sistema prototipo de un sistema *tensegrity*, fue creado por Karl Loganson en 1920, al cual denominó "Gleichgewichtskonstruktion" (estructura de equilibrio).

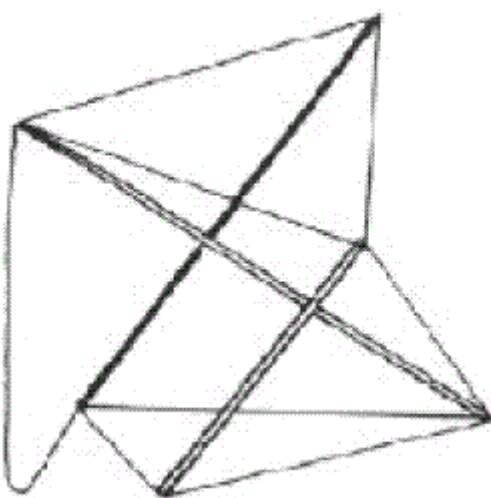


Figura 2.1. Esculturaestructura de Loganson, (Gengnagel, 2002).

No obstante, dada las características de este prototipo, muchos autores reconocen que la primera estructura *tensegrity*, llamada “x-piece”, fue elaborada por Kenneth Snelson en 1948, alumno de R. B. Fuller, quién trataba de responder la pregunta: “¿Es posible construir una estructura que ilustre los principios estructurales de la naturaleza?, la cual se observa que depende de esos continuos abrazos de tensión aislando elementos a compresión”.



**Figura 2.2. Snelson's X-piece, 1948. Estructura tridimensional estable formada de dos cuerpos rígidos, (Skelton y De Oliveira, 2009).**

Investigadores como Motro *et al.*, (2003) presentan la siguiente definición:

“Los sistemas *tensegrity* son sistemas reticulares especiales en un estado de presfuerzo. Todos sus elementos presentan una fibra media recta (sección transversal constante y recta) y son de tamaño equivalente. Los elementos tensionados no presentan rigidez ante fuerzas de compresión y constituyen un sistema continuo. Los elementos comprimidos, son discontinuos en el sistema. Cada nodo recibe únicamente un elemento comprimido”.

Por otra parte, Skelton y De Oliveira (2009), presentan la siguiente definición:

“En la ausencia de fuerzas externas, establezcamos un grupo de cuerpos rígidos en una configuración determinada sin que se presente algún torque en sus extremos. Entonces, esta configuración forma un sistema *tensegrity* si dicha configuración puede estabilizarse mediante un conjunto de elementos internos tensados, es decir, conectando los cuerpos rígidos. La configuración no es un sistema *tensegrity* si no se requieren o no existen miembros tensados que estabilicen el sistema”.

Ya que hay tantas definiciones como investigadores y autores en este tema, de manera general, tomaremos las siguientes características para reconocer un sistema *tensegrity* básico (Zhang y Ohsaki, 2015):

- La estructura se encuentra en equilibrio sin soporte alguno.
- Los miembros estructurales son rectos.
- Sólo hay dos tipos diferentes de elementos estructurales: las barras que soportan la compresión y los cables que soportan la tensión.
- Las barras no entran en contacto unas con otras en sus extremos.



Figura 2.3. Sistema *tensegrity* octaedro, (Skelton y De Oliveira, 2009).

Además, Skelton y De Oliveira (2009) aportan la siguiente definición como punto de partida para establecer una clasificación:

“Una configuración *tensegrity* que no tiene contacto entre sus cuerpos rígidos, es un sistema *tensegrity* clase 1, y un sistema *tensegrity* con  $k$  cuerpos rígidos en contacto es un sistema clase  $k$ ”.

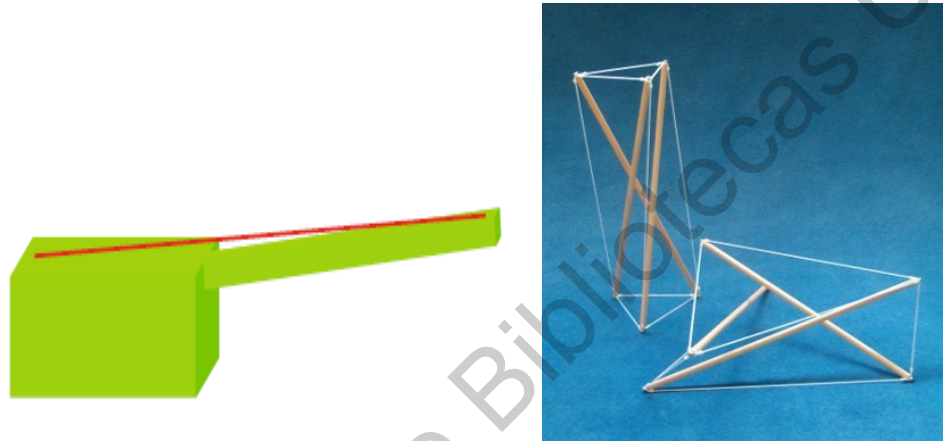


Figura 2.4. Sistemas *tensegrity* clase 1, (Skelton y De Oliveira, 2009).

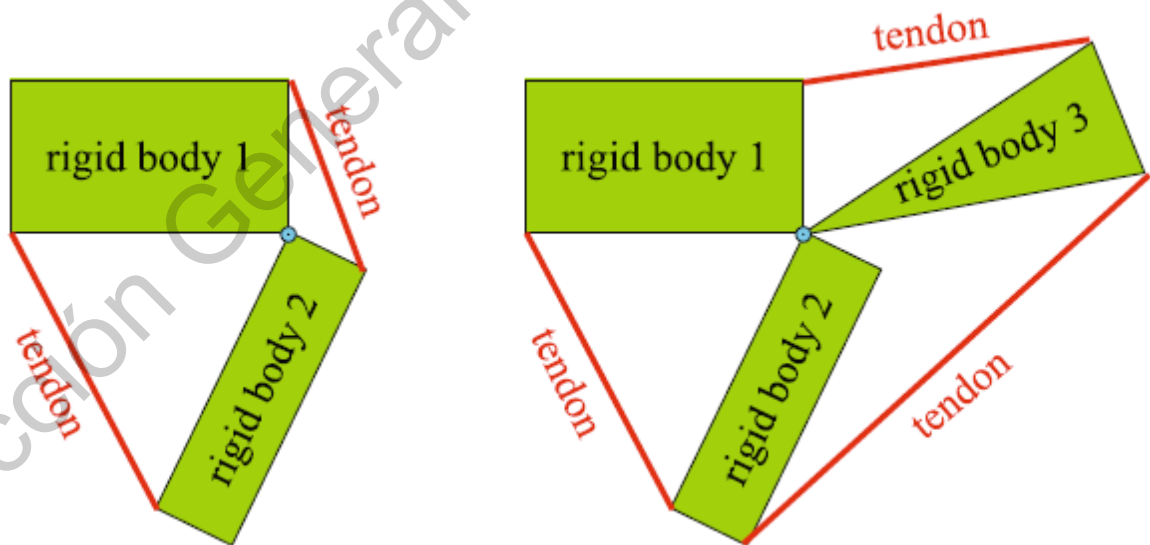


Figura 2.5. Sistemas *tensegrity* clase 2 y 3, (Skelton y De Oliveira, 2009)

## 2.2 Evolución y avances de la investigación

La investigación en este tema, naturalmente, ha evolucionado desde su descubrimiento, es por ello, que resulta conveniente identificar los avances que se tienen al respecto, a partir de los cuales se puedan identificar las áreas de oportunidad, las dificultades que se han presentado y las necesidades que requieren atención.

A continuación, se presentan de manera cronológica, los estudios y resultados que se han reportado de acuerdo a Motro (1992).

### 2.2.1 Etapa inicial (1950 – 1990/2003).

- Arte y geometría.

La solución para la mayoría de los sistemas desarrollados en la época, se basan en la geometría del poliedro (Motro, 1992). Se identifican dos corrientes principales: definiciones geométricas a partir de módulos elementales y, la combinación o división de estas unidades elementales para generar nuevas formas (Motro, 1992).

Los trabajos más trascendentes en geometría fueron desarrollados por Fuller (1965) y Emmerich (1950), donde Emmerich, fue quién aportó importantes avances en la definición de los módulos elementales.

De manera formal, Pugh (1976), realiza distinciones apropiadas entre tres tipos de sistemas conforme a sus patrones geométricos: “diamante”, “circuito” y “zigzag”. Además de esta clasificación, describió los principios constitutivos de los sistemas geodésicos, los cuales se implementarían como los primeros domos de grandes dimensiones por Kenner (1970).

- Teoría gráfica y topología.

El trabajo más importante en este rubro debe acreditarse al Grupo de Investigación de Topología Estructural en Canadá, quienes, en su propia revista, mediante estudios matemáticos, presentan las características constitutivas de los sistemas de *tensegrity* que permiten modelar su topología mediante la teoría de grafos.

- Mecánica.

Los conceptos fundamentales del análisis mecánico y del modelado de los sistemas *tensegrity*, son logros adjudicados al trabajo de Motro *et al.* (2003), quién, mediante el uso de las herramientas del álgebra lineal con aplicaciones estructurales (análisis matricial de estructuras), plantea que la configuración geométrica y el análisis de estabilidad son los criterios básicos para determinar la forma en auto equilibrio (Form-finding, FF), del cual se determinan los diversos estados posibles de presfuerzo y los mecanismos presentes en la estructura. La metodología planteada es la siguiente:

Si  $\{t\}$  representa los vectores de tensiones en los elementos constitutivos y si  $[A]$  es la matriz de equilibrio del sistema, en general, el equilibrio de un sistema de barras se expresa mediante:

$$[A]\{t\} = \{F\} \quad (2.1)$$

donde  $\{F\}$  representa el vector de acciones externas, que es el vector cero en sistemas de *tensegrity*; esto significa que la matriz  $[A]$  debe ser singular en el caso de estados de presfuerzo diferentes a la solución trivial, es decir, que no se tengan estados de pre esfuerzo.

Con respecto a los estudios relacionados a la búsqueda del auto equilibrio de estas estructuras, Motro *et al.* (2003), reporta que, previamente a su trabajo, se habían reportado métodos con la propiedad de establecer conjuntos de



coordenadas que aseguraban la singularidad de las matrices de equilibrio, sin embargo, recomienda que el enfoque respecto a este tema, debe ampliarse y considerar lo siguiente:

- Determinar conjuntos de coordenadas que aseguren la singularidad de la matriz de equilibrio.
  - Identificar los posibles estados de presfuerzo parcial o total.
  - Identificar los mecanismos internos originados por la configuración geométrica.
  - Determinar los estados de presfuerzo que eliminan estos mecanismos.
  - Asegurar que, para estos estados de presfuerzo, exista congruencia entre los esfuerzos y la rigidez de los elementos.
- *Búsqueda de la forma en auto equilibrio (Form-finding, FF).*

Hasta antes del trabajo de Motro *et al.* (2003) las investigaciones llevadas a cabo en este ámbito son las siguientes:

- Análisis estáticos de módulos simples por Motro (1987).
- Soluciones mediante la programación no lineal por (Pellegrino, 1986).
- Métodos basados en la relajación dinámica con amortiguamientos virtuales, Motro *et al.* (2003).
- La técnica anterior fue mejorada por Belkacem (1987), mediante un procedimiento sin amortiguamiento y atenuación de energía cinética, previamente usada por Barnes en el auto equilibrio de textiles bajo tensión.

- Modelado mecánico (presfuerzo y mecanismos internos).

El análisis del comportamiento de las estructuras *tensegrity*, requiere la implementación de modelos que tomen en cuenta las características no lineales y los estados de presfuerzo que proporcionen la rigidez adecuada al sistema, Motro et al. (2003).

Calladine (1978) mostró que es posible encontrar al menos un estado de presfuerzo que estabilice varios de los modos de estos mecanismos. Posteriormente Pellegrino y Calladine (1985) proponen un método que lleva a la determinación de los estados de presfuerzo y el número de mecanismos en casos generales, para lo cual, se debe determinar el rango de la matriz de equilibrio, y los deducir los valores buscados a través de propiedades del algebra lineal, específicamente con la descomposición de esta matriz en cuatro subespacios.

Mohri (1990) demostró que el rango de la matriz debe ser estudiado considerando en las fuerzas en los mecanismos inducidas por el presfuerzo, además propone un algoritmo que permite identificar los estados de presfuerzo compatibles con la rigidez que proveen los cables.

### 2.3 Etapa actual

Se puede considerar que la obra "*Tensegrity: Structural Systems for the future*" de René Motro, es el parte aguas en el estudio de estos sistemas estructurales, ya que, en este libro, se recopilan los fundamentos matemáticos y mecánicos que se habían desarrollado hasta la época.

Una vez formalizados estos métodos de análisis, las investigaciones fueron ampliándose a las siguientes áreas:

Autores como Zhang y Ohsaki (2006), presentan un método numérico para la búsqueda de forma de estructuras *tensegrity*, adaptando el método de

densidades de fuerzas. El análisis de valores propios y descomposición espectral, se llevan a cabo de manera iterativa, para encontrar la combinación de densidades de fuerzas que satisfagan los requerimientos de la deficiencia de rango de la matriz de equilibrio con respecto a las coordenadas nodales. Se demuestra que la matriz de equilibrio corresponde a la matriz geométrica de rigideces en la notación convencional del método del elemento finito.

Lee y Han (2011) propone un método basado en la matriz de densidad de fuerza, donde la derivada tiene una naturaleza simétrica y en bandas para asegurar su efectividad en un procedimiento iterativo.

Gidak y Fresl (2012) desarrollaron un algoritmo para determinar la forma en equilibrio basándose en la similitud del método de desplazamientos y el método de densidad de fuerza.

Aboul-Nasr y Mourad (2015), estudia redes de cables presforzados. Para las redes pretensadas, se introducen restricciones en los nodos para modificar la forma después de una revisión preliminar, resultado de un análisis lineal de la distribución asumida de la densidad de fuerzas en los cables.

Paul et al. (2005), investiga la aplicación de algoritmos evolutivos para la búsqueda de forma de estructuras *tensegrity*. Pagitz y Mirats Tur (2009), presenta un método novedoso para determinar la forma en equilibrio de estructuras *tensegrity* basándose en el método del elemento finito.

Rhode-Barbarigos et al. (2010), se enfocan en la búsqueda estocástica para el diseño de sistemas *tensegrity*, el primer método se aproxima a la práctica actual en las oficinas de diseño estructural, específicamente, en el análisis paramétrico. Los estudios paramétricos se ejecutan para cada parámetro del sistema con el fin de identificar su influencia en la respuesta. El segundo método usa una estrategia de búsqueda estocástica llamada "*Probabilistic Global Search Lausanne*" (PGSL).

Ambos métodos proporcionan configuraciones factibles que cumplen con los criterios de seguridad y servicio.

Yamamoto *et al.* (2011) presentan una búsqueda de forma en equilibrio basada en algoritmos genéticos, con el objetivo de apoyar a los diseñadores a obtener estructuras *tensegrity* con menor número de variables de diseño.

De acuerdo a (Jáuregui Gómez, 2004), y a lo plasmado en los antecedentes presentados es posible identificar las siguientes propiedades en las estructuras *tensegrity*:

- Son estructuras muy ligeras a comparación de otras estructuras con la misma resistencia, es decir, presentan resistencias mayores en comparación con estructuras del mismo peso, (Bin Bing, 2013).
- No tienen partes redundantes, (Kenner, 1976).
- Es posible elaborar estructuras de alto grado de complejidad con la unión de módulos simples.
- La capacidad resistente de la estructura es directamente proporcional al nivel de presfuerzo de los cables (De Boeck, 2013).
- El grado de presfuerzo en los componentes es proporcional al espacio que ocupan (De Boeck, 2013).
- Ya que los componentes a compresión son discontinuos, sólo trabajan de manera local. La compresión se localiza en líneas de acción específicas y cortas, por lo que los elementos no presentan problemas de pandeo, ni de torque (De Boeck, 2013).
- La rigidez de la estructura depende de los materiales empleados, del método de ensamble y del nivel de presfuerzo, por lo que tienen la versatilidad de poder ser flexibles o rigidez.
- Debido a las características anteriores, son sensibles ante vibraciones dinámicas.

- Tienen la capacidad de actuar como un todo, por lo que los esfuerzos locales se transmiten de manera uniforme y se absorben por toda la estructura

## 2.4 Aplicaciones

Dado que estas estructuras se originaron en el campo de la arquitectura, sus primeras aplicaciones fueron como esculturas desarrolladas por Fuller y Snelson.

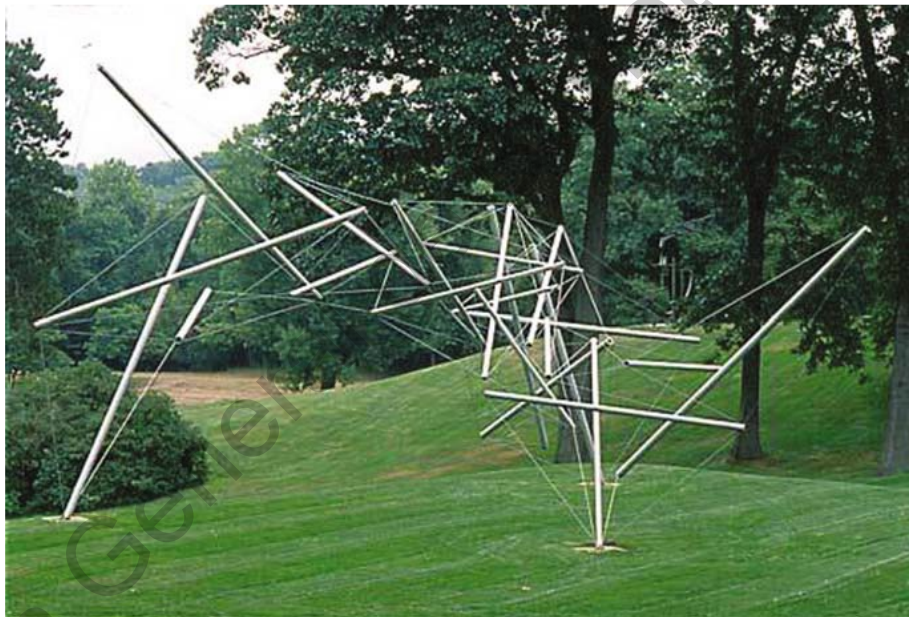


Figura 2.6. “Free Ride Home” por Kenneth Snelson’s, 1974, estructura *tensegrity* clase 1, (Skelton y De Oliveira, 2009).

Debido a su alta relación entre capacidad resistente y bajo peso, los sistemas *tensegrity*, presentan un gran potencial para implementarse en estructuras que requieran cubrir grandes claros, es por ello, que las cubiertas y los domos han sido la principal aplicación donde se han explotado el uso de estos sistemas de manera funcional.



Figura 2.7. Cúpula geodésica de Fuller y estadio olímpico de Munich, (Gengnagel, 2002).

Se ha descubierto una estrecha relación entre las estructuras *tensegrity* con los sistemas biológicos, desde el cito esqueleto de algunas células hasta sistemas fisiológicos de mamíferos, (Caluwaerts et al., 2014). Las nuevas teorías biomecánicas están cambiando el enfoque de los modelos centrados en los huesos a los modelos centrados en la fascia. La fascia es el tejido conectivo de nuestros cuerpos (incluidos músculos, ligamentos, tendones, etc.) que forma una red continua de tensión, brindando y dando soporte a los huesos, que, a diferencia de los sistemas mecánicos tradicionales, no tienen conexiones rígidas entre ellos. En el modelo emergente de "*bio-tensegrity*", los huesos todavía están bajo compresión, pero no están pasando cargas de compresión entre sí; más bien, son las redes de tensión continua de la fascia las principales portadoras.

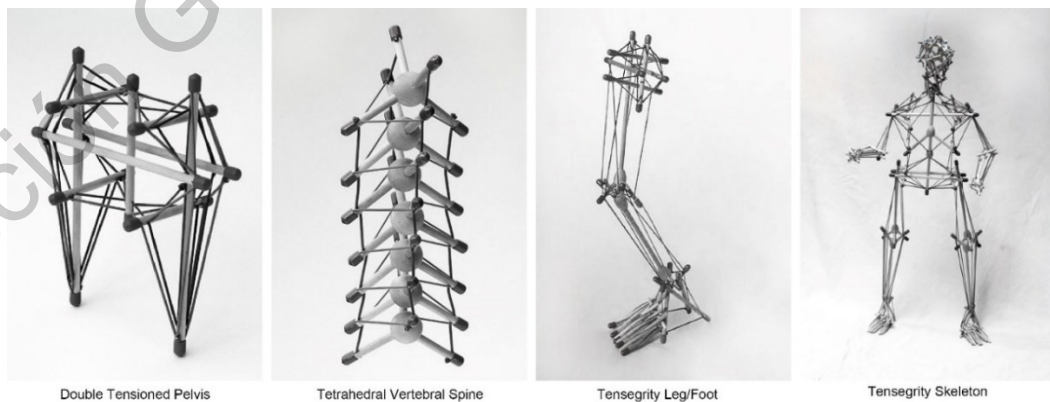


Figura 2.8. Modelos biomecánicos de partes del cuerpo humano, (Caluwaerts et al., 2014).

En los años recientes, la NASA (National Aeronautics and Space Administration) en conjunto con universidades de Estados Unidos, han invertido en robots para la exploración espacial.

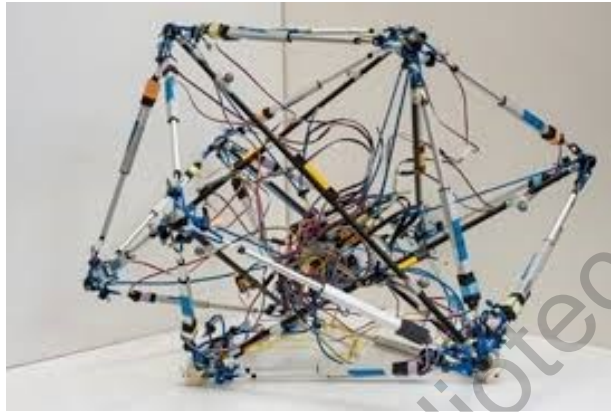


Figura 2.9. Robot *tensegrity* esférico, (Agogino, 2013).

## 2.5 Descripción de métodos de búsqueda de forma

Los primeros métodos desarrollados para solucionar esta etapa, únicamente toman en cuenta argumentos geométricos, los cuales proporcionan como resultado la forma de la estructura. Existen otros métodos que consideran parámetros de fuerza y geometría, que, además de permitir conocer la forma en equilibrio inicial del ensamble, es posible determinar la distribución de las fuerzas de cada elemento, es decir, el modo de pretensado para el cual la estructura este en equilibrio (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).

Pellegrino (2011) presenta una revisión y clasificación de los métodos empleados para esta etapa, clasificándolos en dos grandes grupos, los cinemáticos y los estáticos; en cada uno de los cuales se presentan soluciones analíticas de sistemas en *tensegrity* básicos, que resultan factibles de aplicar para casos con pocos elementos. Sin embargo, cuando incrementa la complejidad de los sistemas,

y con ello, el número de elementos, dichos métodos analíticos resultan poco prácticos.

### 2.5.1 Métodos cinemáticos para la búsqueda de forma

El objetivo principal de estos métodos está orientado a la minimización de la energía potencial del sistema, mediante procesos de minimización de longitud de elementos tensados o de maximización de la longitud de elementos en compresión, tomando en cuenta únicamente consideraciones geométricas. Los métodos principales para la búsqueda de forma son los siguientes:

#### 2.5.1.1 Soluciones analíticas.

Consideremos una estructura simple (figura 2.10), que consiste en cables que conectan los vértices (nodos)  $v$  de un polígono regular de la parte inferior del sistema, con los vértices del polígono de la cara superior. De acuerdo a la cantidad de nodos conectados por un elemento barra, existe un ángulo de giro  $\theta$  entre el polígono inferior y el polígono superior, en el cual, el sistema tiene la capacidad de mantener el auto equilibrio.

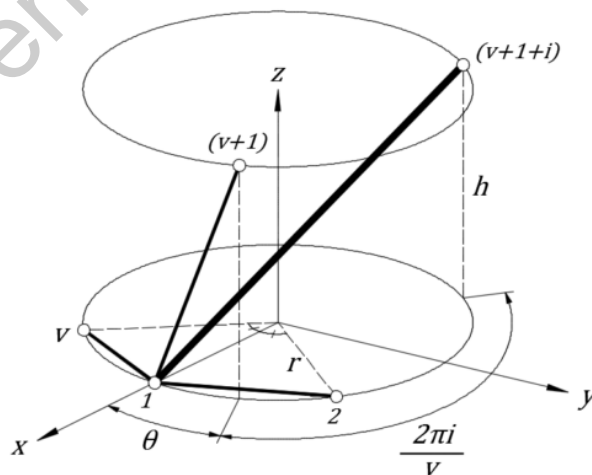


Figura 2.10. Estructura en *tensegrity* simple, basada en un prisma rectangular con radio  $r$  y altura  $h$ , (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).



En el estado inicial del sistema, el elemento que va del nodo 1 al nodo (n+1) corresponde a un cable lateral vertical. El ángulo horizontal formado entre los extremos del elemento que va del nodo 1 al nodo (n+1+i) es  $2\pi i/v$ , donde i es un número entero menor que el número de vértices; y el elemento en cuestión corresponde a una barra. El giro entre el polígono de la cara superior y el de la cara inferior, denotado por  $\theta$ , corresponde al ángulo de rotación para la cual, el sistema se encuentra en equilibrio.

Para el sistema de la figura 2.10, la longitud del cable diagonal  $l_c$ , que va del vértice 1 al (v+1) se calcula como:

$$l_c^2 = 2r^2(1 - \cos\theta) + h^2 \quad (2.2)$$

Mientras que la longitud del elemento barra  $l_b$ , el cual conecta el nodo 1 y el nodo (v+i+1), se define mediante:

$$l_b^2 = 2r^2 \left( 1 - \cos \left( \theta - \frac{2\pi i}{v} \right) \right) + h^2 \quad (2.3)$$

Mediante las ecuaciones (2) y (3), es posible describir la longitud del elemento barra en función de la longitud del elemento cable, como:

$$l_b^2 = 4r^2 \text{sen} \left( \theta - \frac{2\pi i}{v} \right) \text{sen} \left( \frac{\pi i}{v} \right) + l_c^2 \quad (2.4)$$

La longitud de la barra  $l_b$ , para una longitud de cable  $l_c$  y con un radio r, es la máxima cuando:

$$\theta = \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (2.5)$$

La aplicación de este método resulta práctica para sistemas con un alto grado de simetría, que puedan describirse en función de uno o dos parámetros. Sin embargo, para sistemas con un mayor número de elementos y/o con un bajo grado de simetría, este método perdería su factibilidad.

### 2.5.1.2 Programación no lineal

En esta metodología, propuesta por Pellegrino (1986), se aborda la búsqueda de forma como un problema de minimización restringido. Considerando una configuración estructural con coordenadas conocidas, se define la longitud de los elementos barra en función de los elementos cable, y manteniendo fija dicha relación, se incrementa la longitud de las barras hasta una configuración en que sus longitudes son las máximas.

El problema de minimización restringido se define como:

- Minimizar la función objetivo:  $f(x,y,z)$
- Sujeto a las restricciones (longitudes fijas de los cables):  $g_i(x,y,z) = 0$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 2.5.1.3 Relajación dinámica

Este procedimiento propuesto por Motro (1977), para el análisis de redes de cables y membranas, fue adaptado por Motro (1988) y Belkacem (1987) como un método general para la búsqueda de forma de estructuras *tensegrity* Tibert y Pellegrino, (2011).

La configuración en equilibrio de una estructura, bajo cargas externas conocidas, puede calcularse mediante:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (2.6)$$

Donde  $M$  es la matriz de masas,  $C$  la matriz de amortiguamiento,  $K$  la matriz de rigidez,  $f$  el vector de fuerzas externas,  $\ddot{u}$  el vector de aceleración,  $\dot{u}$  el vector de velocidad y  $u$  el vector de desplazamientos de la configuración inicial. La solución del problema se determina con la elección de los coeficientes de amortiguamiento, mediante los cuales se alcance el equilibrio.

## 2.5.2 Métodos estáticos para la búsqueda de forma

La aplicación de estos métodos consiste en establecer una relación entre las configuraciones de la estructura cuando alcanza el equilibrio y las fuerzas en sus elementos en dicho instante (Tibert y Pellegrino, 2011).

### 2.5.2.1 Soluciones analíticas

La simetría y el equilibrio de los nodos son las características que se toman en cuenta para obtener las soluciones. Retomando el ejemplo de la figura 28, es posible expresar el equilibrio del nodo libre mediante la relación entre la fuerza interna del elemento y la longitud del mismo (coeficiente de densidad de fuerza). De dicha figura se pueden clasificar sus elementos en tres grupos, los cables horizontales tanto de la base inferior como de la superior del prisma, los cables diagonales que conectan el polígono inferior con el polígono superior, y las barras diagonales. Los coeficientes de densidad de fuerza de cada grupo de elementos se designarán como  $t_h$ ,  $t_c$  y  $t_b$ , respectivamente.

Con respecto al nodo 1, las componentes de las fuerzas en barra diagonal y en el cable diagonal, tanto en la dirección Z como en la dirección Y, deberán ser iguales para garantizar el equilibrio de dicho nodo. A partir de este análisis, se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio para dichas direcciones:

$$t_c h + t_b h = 0 \quad (2.7)$$

$$t_c r \text{sen} \theta + t_b r \text{sen} \left( \theta + \frac{2\pi i}{v} \right) = 0 \quad (2.8)$$

De las ecuaciones anteriores, se obtiene que:

$$t_c \left[ \text{sen} \theta - \text{sen} \left( \theta + \frac{2\pi i}{v} \right) \right] = 0 \quad (2.9)$$

La solución de la ecuación (9) se reduce a:

$$\theta = \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (2.10)$$

Qué es idéntico a la solución obtenida en la ecuación (2.5).

### 2.5.2.2 Densidad de fuerza

El método de densidades de fuerza para redes de cables, propuesto por Linkwitz y Schek (1971), emplea un simple truco matemático para transformar las ecuaciones de equilibrio no lineal de los nodos en un conjunto de ecuaciones lineales. Por ejemplo, la ecuación de equilibrio en la dirección X para el nodo i es:

$$\sum_j \frac{t_{ij}}{l_{ij}} (x_i - x_j) = f_{ix} \quad (2.11)$$

Donde el nodo i está conectado a j nodos por cables o barras, y f, es la fuerza axial en cada elemento. Aunque esto puede parecer una ecuación lineal en las coordenadas nodales, en realidad no es lineal, ya que las longitudes en el denominador también son funciones de las coordenadas. Estas ecuaciones pueden linealizarse introduciendo para cada elemento la densidad de fuerza:

$$\frac{t_{ij}}{l_{ij}} = q_{ij} \quad (2.12)$$

Cuyos valores son indispensables conocer para comenzar el proceso de búsqueda de forma.

Para una estructura con b elementos y n nodos, las ecuaciones de equilibrio en la dirección X son:

$$[C_s]^T [Q] [C_s] \{x_s\} = \{f_x\} \quad (2.13)$$

Dónde:  $C_s$  es la matriz de incidencia, Q una matriz diagonal que contiene los valores de densidad de fuerza,  $x_s$  un vector de coordenadas "x" y  $f_x$  un vector de

fuerzas nodales externas. Estas ecuaciones pueden ser idénticas para términos de las coordenadas “y” y “z”.

La matriz de incidencia  $C_s$ , de tamaño  $b \times n$ , describe la conectividad de la estructura. Si las coordenadas de alguno de los nodos están referenciados a algún tipo de apoyo o restricción,  $C_s$  puede separarse en:

$$[C_s] = [C \quad C_f] \quad (2.14)$$

Donde los nodos restringidos se colocan en la posición final de la secuencia numérica. La ecuación de equilibrio puede transformarse de la siguiente manera:

$$[C]^T [Q] [C] \{x\} = \{f_x\} - [C]^T [Q] [C_f] \{x_f\} \quad (2.15)$$

Una vez determinados los valores de densidad de fuerzas, junto con las ecuaciones análogas para las direcciones “y” y “z”, es posible resolver el sistema para encontrar las coordenadas nodales. Usualmente durante el proceso de la búsqueda de forma, no se consideran las cargas externas ni el peso propio de la estructura.

### 3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

#### 3.1 Conceptos fundamentales

Las estructuras *tensegrity* pertenecen a un subconjunto de sistemas reticulares articulados, por lo que principalmente se generan fuerzas axiales (tensión o compresión) en sus elementos.

Dada su composición estructural, son sistemas estáticamente indeterminados, lo que les brinda la capacidad de admitir estados de presfuerzo. A comparación con otras estructuras reticulares articuladas, tienen la capacidad de estar en equilibrio sin la necesidad de soportes fijos.

##### 3.1.1 Indeterminación estática y cinemática.

Los conceptos de determinación estática y cinemática son puntos clave para comprender el comportamiento mecánico de ensamblajes reticulares articulados.

Si las ecuaciones de equilibrio estático son suficientes para determinar las fuerzas internas y los desplazamientos de un sistema estructural, ante una fuerza externa, se considera que es una estructura estáticamente determinada e implica la existencia de una solución única para dicho conjunto de cargas externas (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017). Sin embargo, una estructura es estáticamente indeterminada, si tiene más elementos de los mínimos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio, por lo que no existe una solución única, es decir, pueden existir múltiples soluciones. Esta característica implica, que la estructura tenga la capacidad de admitir presfuerzos, y que sus elementos puedan estar esforzados, aún, en la ausencia de fuerzas externas (Schenk, 2005).

Una estructura se denomina cinemáticamente determinada si para cambiar su posición espacial, se requiere agregar energía al sistema, y presenta

movimientos de traslación o rotación, corresponden a los de un cuerpo rígido se requiere añadir energía al sistema para modificar su geometría.

Si se realiza un ensamble con elementos rígidos, la longitud de cada elemento y la manera en que se defina su conectividad, puede causar que la geometría en equilibrio de la estructura, no esté definida por un solo conjunto de coordenadas nodales, e implica que se puede pasar de una posición espacial a otra sin añadir energía al sistema (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017), lo cual es denominado como un sistema cinemáticamente indeterminado. Se dice entonces, que la totalidad de la estructura, o parte de ella forma un mecanismo interno. Los mecanismos se clasifican en finitos e infinitesimales (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).

Si el cambio de la posición espacial no genera ninguna variación en la longitud de los elementos, el mecanismo se denomina finito (figura 3.1 a). En este mecanismo los nodos pueden moverse libremente en una distancia finita (Pellegrino y Calladine, 1985). Sin embargo, si el cambio de posición provoca que pequeñas variaciones en longitud de los elementos (variaciones infinitesimales), y además estas variaciones son de menor orden que el desplazamiento, el mecanismo se conoce como infinitesimal (figura 3.1 b), (Pellegrino y Calladine, 1985).

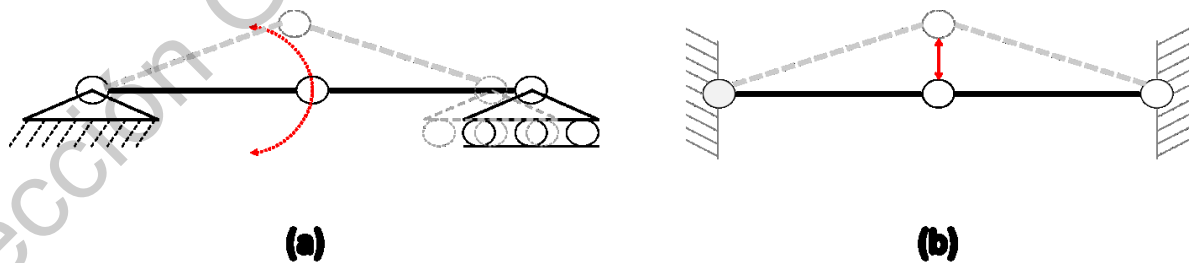


Figura 3.1. Mecanismo finito (a) y mecanismo infinitesimal (b) (adaptado de Zhang y Ohsaki, 2015).

A diferencia de los mecanismos anteriores, los movimientos de cuerpo rígido (figura 3.2), se refieren a los movimientos que no cambian la distancia entre ningún par de nodos, sin importar si el par de nodos está interconectado mediante algún elemento. Dicho movimiento puede ser la traslación en cualquier dirección, rotación alrededor de algún eje arbitrario, y la combinación de ambos movimientos.

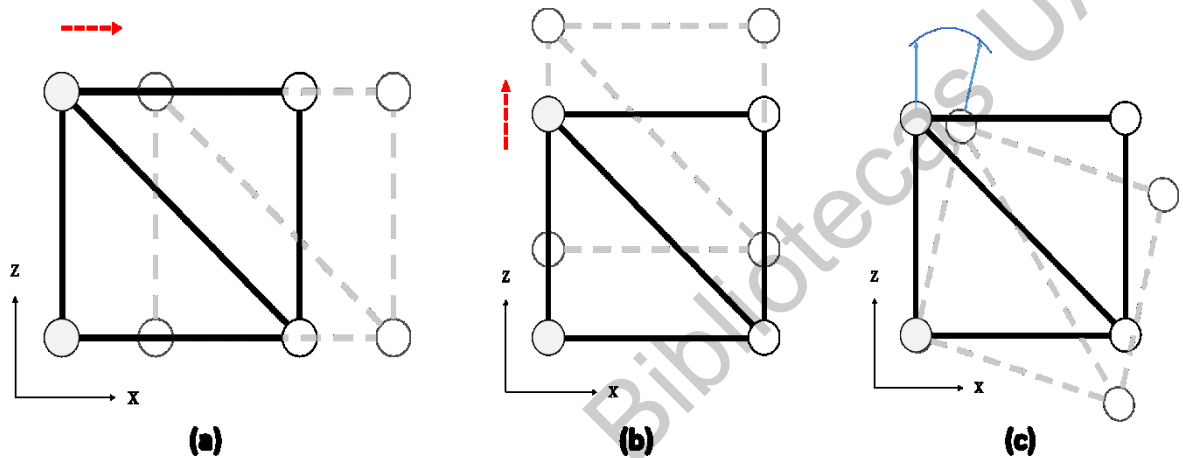


Figura 3.2. Movimiento de cuerpo rígido en un espacio bidimensional, (a) corresponde a una traslación en dirección X, (b) corresponde a una traslación en la dirección Z, y (c) a una rotación alrededor de un punto arbitrario (adaptado de Zhang y Ohsaki, 2015).

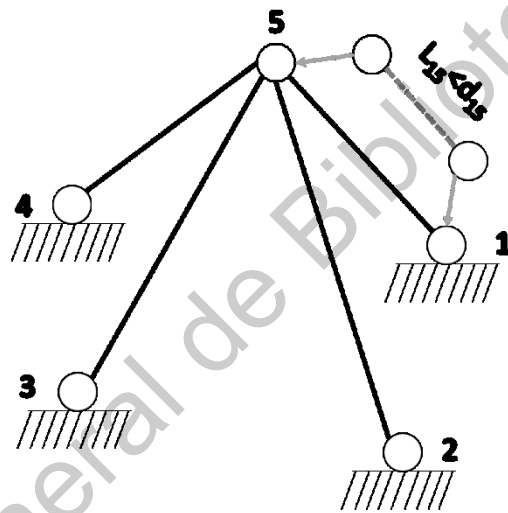
### 3.1.2 Pretensado y autotensado

La posición inicial (en equilibrio) de una estructura *tensegrity*, no es posible definirla únicamente con su geometría, ya que, en ausencia de fuerzas externas, el sistema presentará fuerzas internas originadas por el presfuerzo. El estado de presfuerzo brinda el equilibrio y la rigidez del sistema estructural mediante la estabilización de mecanismos infinitesimales.

Considerando el sistema de la figura 3.3, que consta de cuatro elementos localizados en distintos planos. Cada uno de estos elementos conecta los nodos 1, 2, 3, y 4 (nodos sobre el mismo plano horizontal) con el nodo libre 5 (ubicado en un plano vertical diferente a los nodos 1, 2, 3, y 4). Definiendo a  $d_{ij}$  como la distancia



geométrica entre los nodos  $i$  y  $j$ , y, a  $l_{ij}$  como la longitud inicial del elemento que conecta dichos nodos. Al hacer que  $l_{15} < d_{15}$ , se inducirá un estado de presfuerzo en el sistema, ya que, el elemento 1-5, debe alargarse hasta una distancia  $d_{15}$ , para conectar los nodos 1 y 5. Si no se sobrepasa el límite elástico, el elemento intentará recobrar su longitud inicial, forzando a los nodos acercarse, no obstante, los elementos restantes impiden el movimiento del nodo libre (5), lo que provoca fuerzas en dichos elementos, y a la vez, proveen el equilibrio de dicho nodo, (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).



**Figura 3.3. Sistema reticular presforzado (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).**

Motro (2006) define como pretensado, a las fuerzas internas que se inducen en la estructura, cuando se tienen nodos fijos (apoyos) para generar el esfuerzo inicial de los elementos (figura 3.3). Además, realiza la distinción, en el caso de que la estructura sea capaz de presentar esfuerzos iniciales en sus elementos en ausencia de fuerzas externas y de nodos fijos, estado al que denomina de autotensado.

### 3.1.3 Estabilización de mecanismos infinitesimales

La estabilización de los mecanismos infinitesimales puede realizarse mediante la inducción de estados de pretensado o de autotensado. Esto implica que, si en el sistema, se aplicaran fuerzas externas que activen los mecanismos, se provocarán diversos desplazamientos nodales. Sin embargo, al retirar las fuerzas externas los mecanismos regresaran a su posición inicial por la acción del presfuerzo.

Se definirá este concepto mediante el ejemplo que proporcionan autores como Motro (2006) y Ochoa Peralta y Orellana Ochoa (2017). Considerando el sistema de la figura 3.1b, se revisará el comportamiento ante presfuerzos tanto a tensión como a compresión.

Es posible generar presfuerzos a tensión, definiendo las longitudes iniciales de los elementos menores que la distancia geométrica de los nodos que conecta (figura 3.4a), es decir, que  $l_{12} = l_{23}$  y que  $l_{12} + l_{23} < d_{13}$ . Si se aplicara una fuerza que activará el mecanismo infinitesimal, la energía potencial del sistema aumentará, sin embargo, cuando cesé la acción externa, el nodo libre regresará a su posición inicial, estado conocido como energía potencial mínima. Haciendo un análisis del equilibrio del nodo desplazado a la posición 2' (figura 3.4b), se obtiene que las fuerzas axiales internas ( $t$ ) de los elementos 1-2 y 2-3 (figura 3.4c), presentan una componente en la dirección de la fuerza  $F$ , pero de sentido contrario. Por lo que, a un mayor nivel de pretensado, se tendrá una mayor rigidez del sistema (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).

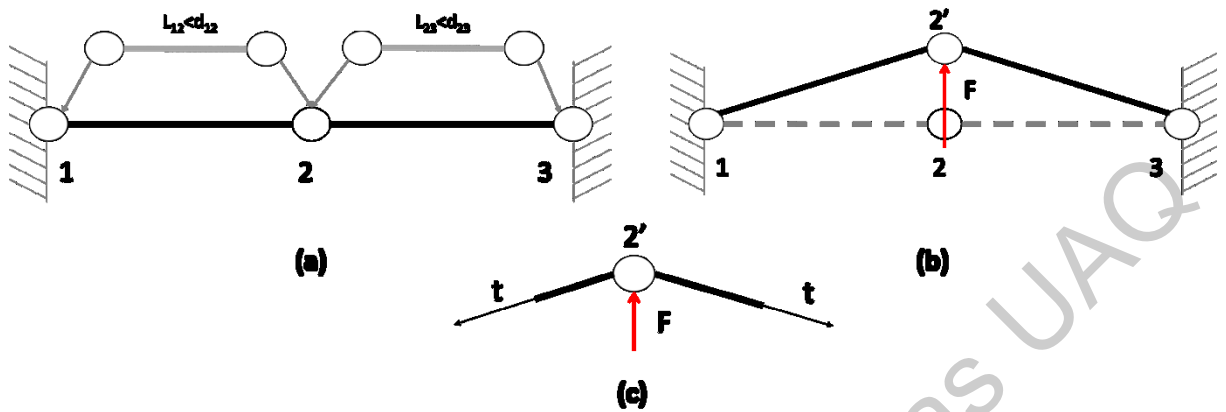


Figura 3.4. Análisis de presfuerzo a tracción (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).

Por el contrario, al definir las longitudes iniciales de los elementos, mayores que las distancias geométricas entre los nodos que las conectan, es decir  $l_{12} = l_{23}$  y que  $l_{12} + l_{23} > d_{13}$  (figura 3.5a), se genera un estado de pretensado a compresión. Bajo estas condiciones, el nodo libre se encuentra en equilibrio inestable, y ante cualquier perturbación, en dirección perpendicular a los elementos, provocará que las fuerzas internas de los elementos, alejen al central de la posición 2 a hasta 2' (figura 3.5b, 3.5c). Una vez que se retiran las cargas del sistema, la distancia entre los nodos (1 a 2' y 2' a 3) será igual a la longitud inicial de los elementos, por lo que las fuerzas internas serán nulas.

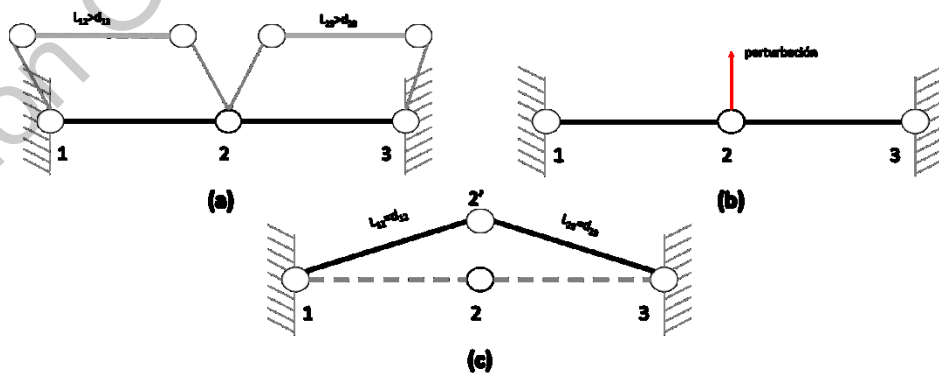


Figura 3.5. Análisis de presfuerzo a compresión (adaptado de Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017).

De este análisis, se puede concluir que no todos los estados de presfuerzo estabilizan los mecanismos infinitesimales, y las funciones de los elementos con presfuerzo a tracción y a compresión.

### 3.1.4 Conectividad

La conectividad, o topología, de una estructura, define cómo los elementos conectan a los nodos. Dicha conectividad y las direcciones de los elementos pueden describirse mediante la matriz de conectividad  $[C] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Esta matriz únicamente tiene dos tipos de valores de entrada distintos de cero en cada renglón, 1 y -1, correspondientes a los dos nodos conectados por un elemento específico; todas las demás entradas de la matriz en el mismo renglón, son cero.

Por ejemplo, consideremos que el  $k$ -ésimo elemento ( $k = 1, 2, 3, \dots, m$ , donde  $m =$  número de elementos), conecta al nodo  $i$  y al nodo  $j$ , ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , donde  $n =$  número de nodos). Los componentes del  $k$ -ésimo renglón  $C(k,p)$  de la matriz de conectividad  $C$ , se definen como:

$$C_{(k,p)}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{signo}(j - p), \text{ si } p = i; \\ \mathbf{signo}(i - p), \text{ si } p = j; \\ \mathbf{0}, \text{ cual quier otro caso;} \end{bmatrix}$$

donde  $p = 1, 2, \dots, n$  y:

$$\mathbf{signo}(j - i) = \begin{matrix} \mathbf{1}, \text{ si } j > i; \\ \mathbf{-1} \text{ si } j < i; \end{matrix}$$

### 3.1.5 Sistema de ecuaciones de equilibrio mediante el principio del trabajo virtual

Supongamos que una estructura está sometida a los desplazamientos virtuales  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ , y  $\delta z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 3n$ , donde  $n =$  número de nodos), los cuales causan extensiones longitudinales  $\delta l_k$  en cada uno de los elementos ( $k = 1, 2, 3, \dots, b$ , con  $b =$  número de elementos). Así, el trabajo virtual total  $\delta \Pi$ , debido a los desplazamientos virtuales y a la extensión longitudinal de los elementos, puede definirse como:

$$\delta \Pi = \sum_{k=1}^m s_k * \delta l_k - \sum_{i=1}^n f_i^x * \delta x_i - \sum_{i=1}^n f_i^y * \delta y_i - \sum_{i=1}^n f_i^z * \delta z_i \quad (3.1)$$

donde:

$s_k$  = fuerza interna del elemento  $k$

$\delta l_k$  = extensión del elemento  $k$

$l_k$  = longitud del elemento  $k$

$f_i^x, f_i^y, f_i^z$  = carga externa en el nodo  $i$ , en las direcciones X, Y y Z, respectivamente.

Que debería ser igual a cero para valores arbitrarios de  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  y  $\delta l_k$ , ya que la estructura está en equilibrio, de acuerdo al principio del trabajo virtual (Lanczos, 1970), es decir:

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.2)$$

Mediante la diferencia de coordenadas  $u_k$ ,  $v_k$  y  $w_k$ , en cada dirección del  $k$ -ésimo elemento, se establece la siguiente relación, a partir de la definición de la longitud del  $k$ -ésimo elemento (3.3):

$$l_k^2 = u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 \quad (3.3)$$

$$\delta l_k^2 = \delta u_k^2 + \delta v_k^2 + \delta w_k^2 \quad (3.4)$$

donde:

$u_k$  = Diferencia de coordenadas en el eje x.  $u_k = x_j - x_i = [C]\{x\}$

$v_k$  = Diferencia de coordenadas en el eje y.  $v_k = y_j - y_i = [C]\{y\}$

$w_k$  = Diferencia de coordenadas en el eje z.  $w_k = z_j - z_i = [C]\{z\}$

$l_k$  = longitud del elemento k.

Lo que resulta en:

$$l_k \delta l_k = u_k \delta u_k + v_k \delta v_k + w_k \delta w_k \quad (3.5)$$

Sustituyendo la ecuación (3.5) en las ecuaciones (3.1) y (3.2), tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k u_k}{l_k} \delta * u_k - \sum_{i=1}^n f_i^x * \delta_{xi} \right) + \\ & + \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k v_k}{l_k} \delta * v_k - \sum_{i=1}^n f_i^y * \delta_{yi} \right) + \\ & + \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k w_k}{l_k} \delta * w_k - \sum_{i=1}^n f_i^z * \delta_{zi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ya que  $u_k$ ,  $v_k$  y  $w_k$ , están en función de coordenadas en las direcciones X, Y y Z, respectivamente, y aún más,  $\delta_{xi}$ ,  $\delta_{yi}$ , y  $\delta_{zi}$  son valores arbitrarios (virtuales), las siguientes ecuaciones independientes deben cumplirse de simultáneamente, de manera que la ecuación (3.6) se cumpla:

$$\text{Dirección X: } \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k u_k}{l_k} \delta * u_k - \sum_{i=1}^n f_i^x * \delta_{xi} \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{Dirección Y: } \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k v_k}{l_k} \delta * v_k - \sum_{i=1}^n f_i^y * \delta_{yi} \right) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

$$\text{Dirección Z: } \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k w_k}{l_k} \delta * w_k - \sum_{i=1}^n f_i^z * \delta_{zi} \right) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

El siguiente procedimiento, se desarrollará considerando la ecuación (3.7) para la dirección X, sin embargo, las ecuaciones para las direcciones Y y Z, pueden obtenerse de manera similar.

Si el elemento  $k$  se conecta por los nodos  $i$  y  $j$ , entonces la diferencia de coordenadas puede calcularse empleando los componentes  $C_{(k,i)}$  y  $C_{(k,j)}$  del  $k$ -ésimo renglón de la matriz de conectividad  $[C]$ :

$$u_k = C_{(k,j)} x_j - C_{(k,i)} x_i \quad (3.10)$$

Por lo tanto, su variación es:

$$\delta u_k = C_{(k,j)} \delta x_j - C_{(k,i)} \delta x_i \quad (3.11)$$

Ya que la suma de todas las entras del  $k$ -ésimo renglón de  $C$ , (excepto para  $C_{(k,i)}$  y  $C_{(k,j)}$ ) son cero, podemos expresar la ecuación (3.11) como:

$$\delta u_k = \sum_{i=1}^n C_{(k,i)} \delta x_i \quad (3.12)$$

Sustituyendo la ecuación (3.12) en la ecuación (3.7), tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^b \sum_{i=1}^n \frac{s_k u_k}{l_k} C_{(k,i)} \delta * x_i - \sum_{i=1}^n f_i^x \delta x_i \\ = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^m \frac{s_k u_k}{l_k} C_{(k,i)} - f_i^x \right) \delta x_i = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ya que  $\delta x_i$  son valores arbitrarios, tendremos  $n$  ecuaciones de equilibrio:

$$\delta \left( \sum_{k=1}^b \frac{s_k \mathbf{u}_k}{l_k} \mathbf{C}_{(k,i)} - \mathbf{f}_i^x \right) = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Que pueden simplificarse de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^b \frac{s_k \mathbf{u}_k}{l_k} \mathbf{C}_{(k,i)} = ([\mathbf{C}]^T)_i [\mathbf{U}][\mathbf{L}]^{-1} \{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{f}_i^x\} \quad (3.15)$$

donde:

$[\mathbf{U}]$  = Matriz diagonal de diferencia de coordenadas en dirección X = [diag {u}]

$[\mathbf{L}]$  = Matriz diagonal de longitudes de elemento = [diag {l}]

{s} = Vector de fuerzas internas

{f<sup>x</sup>} = Vector de cargas externas en el nodo *i* con dirección X

Ensamblando las ecuaciones de equilibrio con dirección X, para todos los nodos, a manera matriz, obtenemos lo que se denomina matriz de equilibrio **[A]**:

$$[\mathbf{A}^x] \{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{f}^x\} \quad (3.16a)$$

donde:

$$[\mathbf{A}^x] = [\mathbf{C}]^T [\mathbf{U}][\mathbf{L}]^{-1} \{\mathbf{s}\} \quad (3.17a)$$

De manera similar, podemos establecer las ecuaciones de equilibrio para las direcciones Y y Z, obteniendo:

$$[\mathbf{A}^y] \{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{f}^y\} \quad (3.16b)$$

$$[\mathbf{A}^z] \{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{f}^z\} \quad (3.16c)$$

Con

$$[\mathbf{A}^y] = [\mathbf{C}]^T [\mathbf{V}][\mathbf{L}]^{-1} \{\mathbf{s}\} \quad (3.17b)$$



$$[A^z] = [C]^T [W] [L]^{-1} \{s\} \quad (3.17c)$$

donde:

[V] = Matriz diagonal de diferencia de coordenadas en dirección Y. [V] = [diag (v)]

[W] = Matriz diagonal de diferencia de coordenadas en dirección Z. [W] = [diag (w)]

Las ecuaciones de equilibrio de una estructura articulada, con respecto al vector de fuerzas internas {s}, pueden expresarse como:

$$[A]\{s\} = \{f\} \quad (3.18)$$

con:

$$[A] = \begin{bmatrix} A^x \\ A^y \\ A^z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f^x \\ f^y \\ f^z \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.1.6 Coeficientes de densidad de fuerza y geometría

Para deducir las ecuaciones relacionadas al equilibrio estático de un nodo libre, considerado el principio del trabajo virtual, partiremos de la figura 3.6.

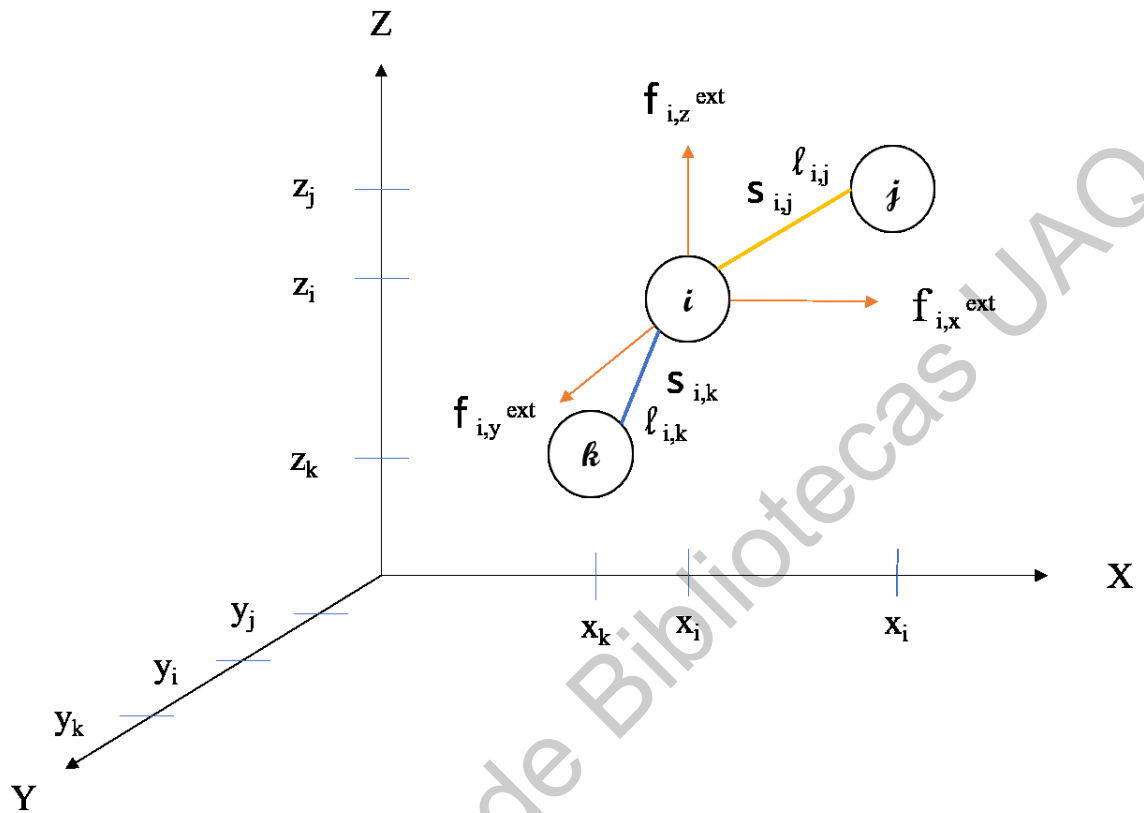


Figura 3.6. Equilibrio de un nodo libre.

El nodo de referencia  $i$ , se conecta a los nodos  $j$  y  $k$ , por los miembros  $ij$  e  $ik$ .

Las ecuaciones de equilibrio se definen como:

$$s_{i,j} \frac{(x_i - x_j)}{l_{i,j}} + s_{i,k} \frac{(x_i - x_k)}{l_{i,k}} = f_{i,x}^{ext} \quad (3.21a)$$

$$s_{i,j} \frac{(y_i - y_j)}{l_{i,j}} + s_{i,k} \frac{(y_i - y_k)}{l_{i,k}} = f_{i,y}^{ext} \quad (3.21b)$$

$$s_{i,j} \frac{(z_i - z_j)}{l_{i,j}} + s_{i,k} \frac{(z_i - z_k)}{l_{i,k}} = f_{i,z}^{ext} \quad (3.21c)$$

donde  $s_{i,j}$  representa la fuerza interna del elemento  $ij$ , y  $l_{AB}$  su longitud.

Simplificando la expresión con la notación  $q_{ij} = s_{ij} / l_{ij}$ , conocido como coeficiente de tensión o coeficiente de densidad de fuerza. Las ecuaciones (3.21a, 3.21b y 3.21c) resultarían:

$$q_{i,j}(x_i - x_j) + q_{i,k}(x_i - x_k) = f_{i,x}^{ext} \quad (3.22a)$$

$$q_{i,j}(y_i - y_j) + q_{i,k}(y_i - y_k) = f_{i,y}^{ext} \quad (3.22b)$$

$$q_{i,j}(z_i - z_j) + q_{i,k}(z_i - z_k) = f_{i,z}^{ext} \quad (3.22c)$$

O como:

$$(q_{i,j} + q_{i,k})x_i - q_{i,j}x_j - q_{i,k}x_k = f_{i,x}^{ext} \quad (3.23a)$$

$$(q_{i,j} + q_{i,k})y_i - q_{i,j}y_j - q_{i,k}y_k = f_{i,y}^{ext} \quad (3.23b)$$

$$(q_{i,j} + q_{i,k})z_i - q_{i,j}z_j - q_{i,k}z_k = f_{i,z}^{ext} \quad (3.23c)$$

Sean  $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ ,  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T$  y  $\{Z\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$  los vectores de coordenadas cartesianas para los  $n$  nodos en las direcciones X, Y y Z, respectivamente. Empleando la matriz de conectividad  $[C]$ , las longitudes proyectadas  $(x_i - x_j)$ , pueden representarse de manera vectorial como  $\{CX\}$ ,  $\{CY\}$  y  $\{CZ\}$ .

Es posible expresar de manera matricial el sistema de ecuaciones (3.23), al factorizar las longitudes proyectadas, y agrupar los coeficientes de densidad de fuerza en un vector  $\{q\}$ , de la siguiente manera:

$$[A]\{q\} = \begin{pmatrix} [C]^T \text{diag}\{CX\} \\ [C]^T \text{diag}\{CY\} \\ [C]^T \text{diag}\{CZ\} \end{pmatrix} \{q\} = 0 \quad (3.24)$$

De manera similar, si factorizamos los coeficientes de densidad de fuerza, su representación matricial asocia una matriz simétrica  $[D]$ , conocida como matriz de densidades de fuerza:

$$[D][X Y Z] = ([C]^T \mathit{diag}(\{q\})[C])[X Y Z] = [0 \ 0 \ 0] \quad (3.25)$$

La ecuación (3.24) relaciona las longitudes proyectadas con los coeficientes de densidades de fuerza, mientras que la ecuación (3.25) asocia los coeficientes de densidad de fuerza con las coordenadas nodales (Gomez Estrada, 2007). A la matriz  $D$ , se le conoce como matriz de densidades de fuerzas.

La ecuación (3.25) tiene la forma cuadrática  $x D x^T = \sum t_{ij} (x_i - x_j)^2$ , donde la sumatoria se da en los pares de nodos conectados  $\{i,j\}$ . Notemos, que la matriz de densidades fuerza puede expresarse como

$$D = ([C]^T [Q] [C]) \quad (3.26)$$

donde  $[Q]$  es una matriz diagonal de  $\{q\}$ ; además, que dicha matriz  $[D]$  es simétrica, positiva y semi-definida.

Las ecuaciones (3.24) y (3.25) pueden vincularse mediante la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} C^T \mathit{diag}(CX) \\ C^T \mathit{diag}(CY) \\ C^T \mathit{diag}(CZ) \end{pmatrix} q = 0 \quad (3.26)$$

Notemos que el vector  $\{s\}$  de fuerzas internas, empleado en la sección 3.1.6 corresponde al vector de densidades de fuerza  $\{q\}$ , por lo que su uso podría ser indistinto, sin embargo, para mantener la nomenclatura de una manera unificada a la empleada en la mayoría de las investigaciones en este tema, los siguientes procedimientos se realizarán empleando el vector  $\{q\}$ .

### 3.1.7 Grado de indeterminación estática y cinemática de las estructuras *tensegrity*

Para evaluar correctamente el grado de determinación estática y cinemática de una estructura en *tensegrity*, es necesario investigar el rango de la matriz de equilibrio  $[A]$ , o de manera equivalente, el rango de la matriz de compatibilidad  $[A]^T$ , la transpuesta de la matriz de equilibrio (Zhang y Ohsaki, 2015).

Cuando no hay cargas externas aplicadas a la estructura, es decir  $\{p\} = \{0\}$ , es posible expresar el sistema de ecuaciones de equilibrio, con respecto al vector de presfuerzas (fuerzas internas o densidades de fuerzas)  $\{q\}$ , de la siguiente manera:

$$[A]\{q\} = \{0\} \quad (3.27)$$

Denotaremos a  $rA$  como el rango de la matriz de equilibrio  $[A] \in \mathbb{R}^{dn \times b}$

$$rA = \text{rango}(A) \quad (3.28)$$

Cuyas dimensiones son:

$$rA < \min(dn, b) \quad (3.29)$$

donde  $d$  representa la dimensión del espacio,  $n$  el número total de nodos y  $b$  el número total de elementos.

El rango  $rA$  de la matriz de equilibrio es, de hecho, el número de ecuaciones independientes. Así, el número de modos independientes de presfuerzo  $rQ$ , o grado de indeterminación estática se calcula como:

$$rQ = b - rA \quad (3.30)$$

Además, hay dos casos relacionados al posible número de presfuerzas, considerando el valor de  $rA$  en comparación con el número de presfuerzas  $m$ :

- **$rA < b$  o  $rQ > 0$**  (Estáticamente indeterminado): en este caso, existen  **$b - rA$**  soluciones no triviales independientes (modos de presfuerzo en los elementos). Las posibles soluciones del sistema de la ecuación (3.27) se encuentran en el espacio nulo de **[A]**, abarcado por los modos de pretensado independientes si ( **$i = 1, 2, \dots, m - rA$** ) de la siguiente manera:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{n^q} \alpha_i q_i \quad (3.31)$$

donde  $\alpha_i$  son coeficientes arbitrarios, y los modos de presfuerzo independientes  $q_i$  satisfacen:

$$[A]\{q\} = \{0\} \quad (3.27)$$

$$q_i^T q_j = \delta_{ij} \quad (3.32)$$

y  $\delta_{ij}$  se refiere a la delta de Kronecker.

Por lo tanto, la estructura es estáticamente indeterminada en este caso, ya que no podemos determinar de manera única los presfuerzos de la estructura sin información adicional.

- **$rA = b$  o  $rQ = 0$**  (Estáticamente determinado): Por el contrario, en el caso de que  **$rA = b$** , la estructura no puede contener ningún presfuerzo distinto de cero mientras no se aplique alguna carga externa.

El grado de indeterminación cinemática se calculará de la siguiente manera:

Sea  $\{desp\} \in \mathbb{R}^{dn}$  el vector de desplazamientos nodales (infinitesimales) debido a las cargas externas aplicadas a la estructura, y sea  $e \in \mathbb{R}^b$  el vector de las elongaciones en los elementos, que están relacionadas con los pequeños desplazamientos  $d$  mediante la relación cinemática (en términos de la matriz de compatibilidad  $[H] \in \mathbb{R}^{b \times dn}$ ):

$$[H]\{desp\} = \{e\} \quad (3.33)$$

Considerando el principio del trabajo virtual, tenemos que el trabajo virtual hecho por las cargas externas  $\{f\}$  es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas  $\{s\}$ . Por lo tanto, los desplazamientos virtuales  $\{\delta d\}$  (los cuales pueden ser de valor arbitrario) y las correspondientes elongaciones virtuales  $\{\delta e\}$ , son:

$$\{f^T\}\{\delta d\} = \{s^T\}\{\delta e\} \quad (3.34)$$

Sustituyendo la ecuación (3.33) en (3.34), resulta:

$$\{f^T\}\{\delta d\} = \{s^T\}[H]\{\delta d\} \quad (3.34)$$

Ya que  $[H]$  es una matriz constante sujeta a desplazamientos virtuales arbitrarios, simplificamos la expresión (3.34), como:

$$\{f^T\} = \{s^T\}[H] \quad (3.34)$$

De la relación entre las cargas externas  $\{f\}$  y las fuerzas internas  $\{s\}$ , ecuación (3.18), obtenemos que:

$$\{f^T\} = \{s^T\}[H] = \{s^T\}[A^T] \quad (3.35)$$

Debido a que los desplazamientos virtuales  $\{\delta d\}$  son arbitrarios, las ecuaciones (3.34) y (3.35), nos llevan a:

$$\{s^T\}[A^T] = \{s^T\}[H] \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) siempre se cumplirá solamente si la matriz de compatibilidad  $[H]$ , es exactamente la transpuesta de la matriz de equilibrio, es decir:

$$[H] = [A]^T \quad (3.37)$$

Y la relación cinemática de la estructura, ecuación (3.33), puede expresarse como:

$$[A^T]\{desp\} = \{e\} \quad (3.38)$$

Los movimientos de cuerpo rígido de una estructura libre de soporte, no generan extensiones de los elementos, por lo que, se excluyen de los análisis de indeterminación cinemática. Consecuentemente, el grado total de una estructura libre de apoyos es  $dn - n^m$ , donde se excluye el número de movimientos de cuerpo libre  $n^m$ . Si un movimiento de cuerpo no rígido, no conduce a la elongación de algún elemento, es decir:

$$[A^T]\{desp\} = \{0\} \quad (3.39)$$

Entonces,  $\{desp\}$  es un mecanismo, denotado como  $\{d_{mec}\}$

Además, es fácil de visualizar que el rango de la matriz de compatibilidad  $[H]$  es igual al rango de la matriz de equilibrio  $[A]$ :

$$rango[A^T] = rango[H] = rango[A] = rA \quad (3.40)$$

Por lo tanto, el número de mecanismos infinitesimales independientes, o grado de indeterminación cinemática,  $n^b$ , de una estructura sin apoyos se calcula como:

$$n^b = dn - n^m - rA \quad (3.41)$$

Para una estructura, en la cual los movimientos de cuerpo rígido están restringidos por nodos fijos,  $n^m$  desaparece de la ecuación (3.41). Además, se presentan los siguientes casos para el valor de  $n^m$ :

- $r^A < dn + n^m$  o  $n^b > 0$  (cinemáticamente indeterminada): Existen  $n^m$  desplazamientos independientes no triviales  $\{m_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, n^m$ , que no son movimientos de cuerpo rígido, que preservan la longitud de los elementos, es decir;

$$[A]^T\{m_i\} = 0 \quad (3.42)$$



Por lo tanto, la estructura es cinemáticamente indeterminada. Además, un mecanismo  $\{\mathbf{d}_{mec}\}$  puede expresarse como una combinación lineal de los mecanismos independientes  $\{\mathbf{m}_i\}$ :

$$\{\mathbf{d}_{mec}\} = \sum_{i=1}^{n^m} \beta_i \{\mathbf{m}_i\} \quad (3.43)$$

Donde  $\beta_i$  representa coeficientes arbitrarios, y los mecanismos independientes  $\{\mathbf{m}_i\}$  son normalizados como:

$$\{\mathbf{m}_i\}^T \{\mathbf{m}_i\} = [\delta_{ij}] \quad (3.44)$$

- $rD = dn - n^m$  o  $n^b = \mathbf{0}$  (cinemáticamente determinada): La estructura es cinemáticamente determinada, ya que no existen desplazamientos no triviales que preserven la longitud de los elementos, excepto por los movimientos de cuerpo rígido.

Las estructuras *tensegrity*, al ser estática y cinemáticamente indeterminadas poseen mecanismos infinitesimales. Por lo que su estabilidad, depende de que exista un modo de pretensado que sea capaz de estabilizar dichos mecanismos, y, a la vez, este modo de pretensando debe presenten congruencia con la rigidez unilateral de los elementos, es decir, que las barras actúen únicamente en compresión y los cables a tensión.

### 3.1.8 Requerimientos de rango

Dos condiciones de rango necesarias a satisfacer en una estructura  $d$ -dimensional que está en estado de presfuerzo o auto esfuerzo son las siguientes:

- Existencia de al menos un estado de presfuerzo:

$$rA = \text{rango}(A) < b \quad (3.44)$$

Esta condición se emplea para asegurar que existe, por lo menos, una solución no trivial del sistema. La deficiencia de rango provee el número de estados

de presfuerzo linealmente independientes,  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{rA} > \mathbf{1}$ , y el número de mecanismos infinitesimales es  $\mathbf{m} = \mathbf{dn} - \mathbf{rA}$  (Street y Cb, 1978).

- La segunda condición de rango se relaciona a la matriz semi-definida  $[\mathbf{D}]$ , de la ecuación (3.25), para un arreglo geométrico contenido en  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathbf{rD} = \mathbf{rango}(\mathbf{D}) < \mathbf{n} - \mathbf{d} \quad (3.44)$$

A través de esta condición de rango, se determina que la nulidad de  $[\mathbf{D}]$ , es  $\mathbf{d}+1$ .

### 3.1.9 Búsqueda de forma y de niveles de presfuerzo (BFF)

El análisis de las ET, requiere la implementación de un procedimiento inicial de búsqueda de forma (*Form-finding*) y del nivel de presfuerzo (*Force-finding*) requerido para alcanzar el estado de equilibrio (Gomez Estrada et al., 2006). Este procedimiento consiste en calcular, parámetros que se asocian al equilibrio estático del sistema, como ángulos de giro, la relación entre las longitudes cable-barra o la relación entre la fuerza axial y la longitud (éste último parámetro es conocido como coeficiente de densidad de fuerza).

Los métodos de BFF para las ET han sido investigados por una gran cantidad de autores (Tibert y Pellegrino, 2003), y pueden clasificarse de acuerdo al enfoque en el que brinden la solución al problema. De manera general, se pueden identificar dos grupos de metodologías, las cinemáticas y las estáticas.

Los métodos cinemáticos asocian la solución de una ET predeterminada, maximizando la longitud de los elementos barra y manteniendo constante la longitud de los cables. La solución de este grupo de métodos se expresa en función de ángulos de rotación de algunos de los elementos con respecto al sistema completo o directamente mediante la relación entre la longitud de los elementos cable entre la longitud de los elementos barra. Los métodos estáticos proveen la solución del

sistema de ecuaciones de equilibrio de una ET con topología definida, mediante una relación entre la fuerza de cada elemento y las configuraciones en equilibrio de la estructura.

Para el análisis de la forma en equilibrio y de los valores de presfuerzo de la estructura propuesta, se aplicará el método estático conocido como densidades de fuerza (Schek, 1974), para la formulación del sistema de ecuaciones, mientras que para la resolución de dicho sistema se empleará el método algebraico desarrollado por Yuan et al (Yuan et al., 2007), denominado “Doble Descomposición de Valores Singulares” (DDVS).

### 3.1.10 Descomposición de valores singulares

La descomposición de valores singulares (DVS), propuesta por Pellegrino [24], ha resultado en un método eficaz para encontrar el vector  $\{q\}$  y establecer una solución no trivial de la ecuación (3.24). Este método consiste en:

Una matriz  $[A]$  de dimensiones  $3n * b$  (donde  $n$  es el número de nodos y  $b$  el número de elementos), contiene  $rA$  valores singulares  $V_i$ , distintos de cero, ordenados de manera decreciente, que a su vez son las raíces cuadradas de los eigenvalores  $\lambda_i$  del producto matricial  $[A]^T[A]$ .

La factorización DVS de la matriz  $[A]$  se da, de la siguiente manera:

$$[A] = [U][V][W]^T \quad (3.45)$$

donde  $[U] = [u_1 \dots u_{3n}]$  es una matriz ortogonal de dimensiones  $3n*3n$ , con vectores  $\{u_i\}$  ortonormales.  $[W] = [w_1 \dots w_b]$  es una matriz ortogonal de dimensiones  $b*b$ . La matriz ortogonal  $[V]$ , de dimensiones  $3n*b$ , contiene una cantidad  $rA$  de elementos distintos de cero en la diagonal principal (dichas columnas corresponden a los vectores singulares del lado derecho de A), y, elementos cero en los demás componentes de la matriz (figura 9). Los vectores  $\{u_i\}$  y  $\{w_i\}$ ,

corresponden a los vectores singulares del lado izquierdo y del lado derecho. Además, a partir de esta factorización, Pellegrino (Pellegrino, 1993), plantea las siguientes ecuaciones:

$$[A]\{w_i\} = \begin{cases} v_{ii}u_i & i = 1, \dots, rA \\ 0 & i = rA + 1, \dots, 3n \end{cases} \quad (3.46)$$

$$[A]\{u_i\} = \begin{cases} v_{ii}w_i & i = 1, \dots, rA \\ 0 & i = rA + 1, \dots, b \end{cases} \quad (3.47)$$

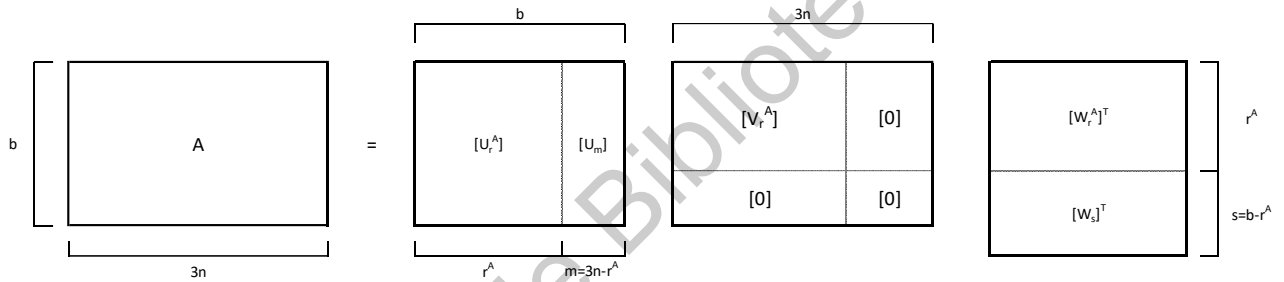


Figura 3.7. Ilustración gráfica de la DVS de la matriz  $[A]$ , figura adaptada de Pellegrino (1993).

La interpretación física que propone Pellegrino (Pellegrino, 1986) de la ecuación (3.46) (orientada a la parte estática del problema mecánico), es: “De la ecuación 1 a la  $rA$  se tiene que los primeros  $rA$  vectores singulares izquierdos son las cargas del sistema en equilibrio con los esfuerzos del sistema correspondientes a los vectores singulares del lado derecho, multiplicados por los valores singulares correspondientes”. Así resulta en  $rA$  conjuntos ortogonales de carga y sus correspondientes esfuerzos ortogonales. Sin embargo, las  $m=3n-rA$  ecuaciones restantes, establecen que los últimos  $m=3n-rA$  vectores singulares derechos, corresponden a las fuerzas internas equilibrantes del sistema.

Para la ecuación (3.47), Pellegrino (Pellegrino, 1986) brinda la siguiente interpretación: “Las primeras  $rA$  ecuaciones, establecen que los primeros  $rA$  vectores izquierdos, son los desplazamientos del sistema compatibles con las

deformaciones del sistema correspondientes a los vectores del lado derecho, divididos por sus respectivos valores singulares”. Las últimas  $\mathbf{s}=\mathbf{b}-\mathbf{rA}$  ecuaciones, establecen que los últimos  $\mathbf{s}=\mathbf{b}-\mathbf{rA}$  vectores singulares del lado izquierdo son libres de deformación, o modos de desplazamiento de energía cero.

Sin embargo, ya que los sistemas *tensegrity* pueden tener más de un modo de presfuerzo independiente, resulta conveniente determinar el modo de presfuerzo óptimo del sistema, para lo cual se empleará la técnica de doble descomposición de valores singulares, propuesta por Yuan et al (Yuan et al., 2007).

### 3.1.11 Doble descomposición de valores singulares (DDVS).

La técnica denominada “Doble Descomposición de Valores Singulares” (DDVS), fue propuesta por Yuan et al. (Yuan et al., 2007), para determinar el nivel de presfuerzo óptimo de domos *tensegrity*, sin embargo, su eficacia no se limita únicamente a este tipo de estructuras, ya que en investigaciones como la de Ochoa (Ochoa Peralta y Orellana Ochoa, 2017) y en Cobos (Cobos, 2018), se demostró su efectividad en aplicaciones distintas a las propuestas por Yuan et al.

Este método se basa en encontrar los siguientes modos de pretensado (Yuan et al., 2007):

Modo de pretensado independiente (MPI): Este modo se obtiene directamente de la DVS de la matriz de equilibrio  $[\mathbf{A}]$ , y satisface únicamente la condición de equilibrio de la ecuación (3.24). A este modo de presfuerzo se le designará como  $[\mathbf{T}]$ .

Modo de pretensado integral (MPIN): Es la combinación lineal del MPI, que además de satisfacer la condición de equilibrio, toma en cuenta la simetría de la estructura. A este modo de presfuerzo se le designará como  $[\mathbf{G}]$ .

Modo factible de presfuerzo integral (MFPI): Es la combinación del MPIN, que cumple con la condición de rigidez unilateral de los elementos, este modo de presfuerzo satisface la condición de que los elementos barra trabajan a compresión y los cables trabajan bajo tensión. A este modo de presfuerzo se le designará como **[TF]**.

El procedimiento de optimización se describe a continuación. Posteriormente de aplicar la DVS de la matriz **[A]** y determinar el o los MPI, procederemos a determinar el MPIN. Se designará a los **s** últimos vectores de la matriz **[W]** como los modos de pretensado independientes **[T]**.

El MPIN puede expresarse como la combinación lineal de los diversos MPI, es decir:

$$G = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s \quad (3.48)$$

donde  $\alpha_i$  es una constante denominada coeficiente de participación de los modos de presfuerzo.

Para considerar las características geométricas de simetría del ensamble, los elementos con posición similar (simétrica), se agruparán en un mismo conjunto y tendrán el mismo nivel de presfuerzo. Para una estructura con  $g$  grupos de simetría, el modo de pretensado es:

$$G = \{G_1 \ G_1 \ G_1 \ \dots \ G_i \ G_i \ G_i \ \dots \ G_g \ G_g \ G_g\}^T \quad (3.49)$$

$$G_{bx1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ G_g \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

que puede expresarse empleando los vectores bases de fuerzas internas (vectores canónicos) **{ei}**, de valor unitario en la posición  $i$ , y con valores de cero en las demás posiciones, de la siguiente manera:

$$G_{bx1} = \{e_1 \quad \dots \quad e_i \quad \dots \quad e_g\} \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ G_g \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Igualando las ecuaciones (3.48) y (3.51), tenemos:

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s = e_1 g_1 + e_2 g_2 + \dots + e_g g_g \quad (3.52)$$

$$\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_s T_s + (-e_1 g_1) + (-e_2 g_2) + \dots + (-e_g g_g) = 0 \quad (3.52)$$

La ecuación (3.52) puede expresarse de manera matricial como:

$$[P]\{\omega\} = 0 \quad (3.53)$$

donde **[P]** es una matriz de dimensiones  $b * (s+g)$ , que se compone como:

$$[P] = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_i \ \dots \ T_s \ -e_1 \ -e_2 \ \dots \ -e_g] \quad (3.54)$$

y  $\{\omega\}$  es un vector de dimensión  $(s+g)$ , que se compuesto de la siguiente manera:

$$\{\omega\} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_i \ \dots \ \alpha_s \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_g]^T \quad (3.55)$$

Al aplicar la descomposición de valores singulares a la matriz **[P]**, tenemos que la factorización es de la forma:

$$[P] = [U'][V'][W']^T \quad (3.56)$$

Las matrices **[U']**, **[V']** y **[W']**, tiene las mismas características y el mismo significado que las descritas previamente. El rango de la matriz **[P]** será  $rP$ . Los vectores  $\{w_i'\}$ , con  $rP + 1 < i < (s + g)$ , corresponden al llamado MPIN, los cuales conducen a la siguiente ecuación:

$$[P]\{w_i'\} = 0 \quad (3.57)$$

De la ecuación (3.55) tenemos que los vectores  $\{\mathbf{w}_i\}$  son la solución de  $\{\omega\}$ . La cantidad de MPIN del ensamble corresponde a:

$$s' = s + g - r^P \quad (3.58)$$

De acuerdo al valor de  $s'$ , las posibles respuestas son:

**$s'=1$** . Si sólo existe un MPIN, y cumple con las condiciones de unilateralidad de los elementos cable y los elementos barra, este modo corresponde al MFPI. Directamente el vector  $\{\mathbf{w}_i\}$  que cumpla la condición corresponde a  $\{\mathbf{w}_i\} = \{\mathbf{G}\} = \{\mathbf{TF}\}$ . En caso de que no se cumpla la condición de rigidez unilateral, se considera que el ensamble no es presforzable, ya que no existe ningún MFPI, por lo que es necesario modificar la configuración del sistema (coordenadas de los nodos, la longitud de los elementos o la conectividad).

**$s'=0$** . En este caso no existe un MFPI, por lo que se tienen que modificar la configuración del sistema (coordenadas de los nodos, la longitud de los elementos o la conectividad).

**$s' > 1$** . Existen múltiples MPIN, es decir,  $\{G_1\}, \dots, \{G_{s'}\}$ . Para determinar el MFPI

$$\{\mathbf{TF}\} = \{\mathbf{TF}_1\}\beta_1 + \dots + \{\mathbf{TF}_{s'}\}\beta_{s'} \quad (3.59)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de participación de los MPIN.

El procedimiento de búsqueda de forma y de fuerzas en equilibrio se llevó a cabo, mediante algoritmos desarrollados en el software Matlab.



### 3.2 Método del Elemento Finito

El método de los elementos finitos (MEF), es un procedimiento numérico empleado para encontrar la solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales que permiten modelar un sistema físico (Cook y Saunders, 2009). El modelo discreto correspondiente al comportamiento mecánico de un sistema es el siguiente:

$$\left\{ \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV + \int_V [\mathbf{G}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{G}] dV \right\} \{\mathbf{U}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} dV + \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} dV + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

donde  $[\mathbf{B}]$  es la matriz de derivadas de funciones de forma,  $[\mathbf{E}]$  es la matriz de constantes elásticas del material,  $[\mathbf{G}]$  matriz de derivadas parciales de funciones de forma,  $[\mathbf{M}]$  es la matriz de fuerzas de membrana,  $\{\mathbf{U}\}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $[\mathbf{N}]$  es la matriz de funciones de forma,  $\{b_x \ b_y \ b_z\}^T$  es el vector de fuerzas de cuerpo,  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}$  es el vector de esfuerzos residuales asociado a la variación de la temperatura y  $\{F_x \ F_y \ F_z\}^T$  es el vector de fuerzas externas nodales.

El modelo matemático de la ecuación 3.60 puede representarse de manera simplificada como:

$$[\mathbf{K}_t] \{\mathbf{U}\} = \{[\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_G]\} \{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3.61)$$

donde  $[\mathbf{K}_t]$  es la matriz tangente de rigidez,  $[\mathbf{K}]$  es matriz de rigidez elástica,  $[\mathbf{K}_G]$  es la matriz de rigidez geométrica,  $\{W_x \ W_y \ W_z\}^T$  es el vector de fuerzas asociadas al peso propio de cada elemento,  $\{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z\}^T$  es el vector de fuerzas residuales asociadas a la variación de la temperatura ambiental.

### 3.2.1 Análisis estático no lineal

Las ET presentan un comportamiento no lineal ante cargas externas, debido a que, tanto la rigidez del sistema como las cargas, están en función de los desplazamientos y/o las deformaciones. Adicionalmente, el presfuerzo de sus elementos es un efecto de origen geométrico no lineal que brinda el equilibrio del sistema (Khellaf y Kebiche, 2014). En este trabajo se considerarán únicamente los efectos de origen geométrico no lineal.

La solución de la ET se llevará a cabo empleando un método de iterativo-incremental de análisis estructural no lineal, denominado Newton-Raphson (Cook y Saunders, 2009). El sistema de ecuaciones, empleando la formulación del método de elementos finitos, se expresa como:

$$[K_t]\Delta\{U\}^j = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

donde  $\Delta$  simboliza el cambio en la iteración "j" del vector de desplazamientos  $\{U\}$ .

Para elementos barra, donde únicamente obran efectos axiales, las matrices de rigidez se estructuran de la siguiente manera:

$$[K] = \left(\frac{EA}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$[K_G] = \left(\frac{T}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $A$  es el área de la sección transversal del cada elemento,  $L$  es la longitud del elemento y  $T$  es la fuerza de membrana interna, valor que se asocia naturalmente al presfuerzo del sistema.

La fuerza interna  $T$ , corresponde al presfuerzo de los elementos cable, y su valor inicial, en el elemento  $i$ , corresponde directamente con el componente  $i$  del vector  $\{TF\}$ , obtenido en el proceso de búsqueda de forma en equilibrio.

### 3.2.2 Análisis dinámico no lineal

Se emplearán modelos dinámicos no lineales para representar los efectos del viento y el acoplamiento entre sistemas, como fuerzas y desplazamientos en función del tiempo. La ecuación característica de los problemas de equilibrio dinámico es:

$$[M]\{\ddot{U}\}_{n+1}^j + [C]\{\dot{U}\}_{n+1}^j + [K_t]\{U\}_{n+1}^j = P(t) \quad (3.65)$$

con  $P(t)$  definido como:

$$P(t) = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{Bmatrix}_{n+1} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{n+1} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{n+1}^j \quad (3.66)$$

donde  $[M]$  es la matriz de masas,  $\{\ddot{U}\}$  es el vector de aceleraciones,  $[C]$  es la matriz de coeficientes de amortiguamiento,  $\{\dot{U}\}$  es el vector de velocidades. “ $n$ ” representa el paso incremental actual y “ $j$ ” representa el siguiente paso incremental (Craig y Kurdila, 2011).

### 3.2.3 Excitación tipo pulso

Particularmente, la fuerza del viento que actúa sobre la estructura, se representará con una función de excitación tipo pulso, con el objetivo de idealizar una ráfaga de viento que actuará durante un intervalo  $t = 4 \text{ s}$ , y posteriormente cesará. La figura 3.8 muestra el diagrama de la función propuesta para modelar la ráfaga de viento (Craig y Kurdila, 2011).

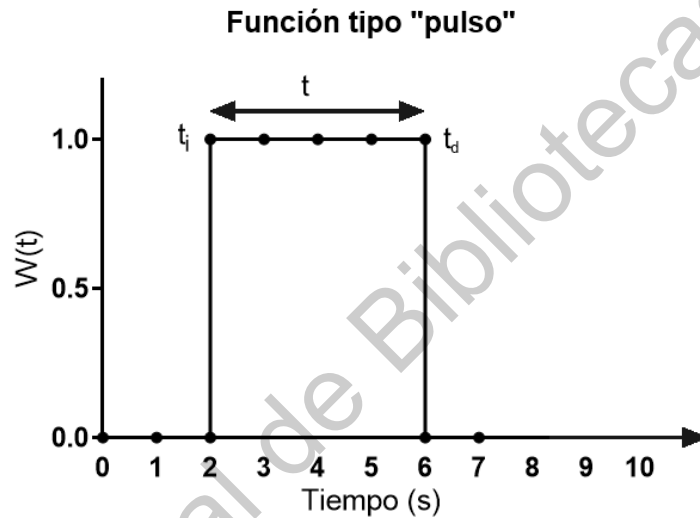


Figura 3.8. Gráfica de función tipo pulso.

Considerando las condiciones iniciales  $u(0) = 0$ , y  $\dot{u}(0) = 0$ , y un amortiguamiento menor a 0.1, la solución para este tipo de excitación es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left[ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right) \right] \quad (3.67)$$

### 3.2.4 Método de integración directa Beta - Newmark

Los métodos de integración directa se emplean para resolver problemas de valor inicial mediante la integración paso a paso con respecto al tiempo (Clough y Penzien, 1995; Craig y Kurdila, 2011). Se asume que tanto los desplazamientos  $\{U\}$

como las velocidades  $\{\dot{\mathbf{U}}\}$  se conocen en un tiempo dado  $t = 0$  s. La solución obtenida con este método se da a través de un proceso de aproximación incremental.

El método Beta-Newmark establece que, considerando el teorema del valor medio, la primera derivada del desplazamiento, puede resolverse como:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_\gamma \quad (3.67)$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{u}}_\gamma = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.68)$$

con  $0 < \gamma < 1$ . De esta manera:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (3.69)$$

Ya que la aceleración también varía con el tiempo, se empleará nuevamente el teorema del valor medio y calcular la segunda derivada del desplazamiento.

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_\beta \quad (3.70)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_\beta = (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.71)$$

con  $0 < 2\beta < 1$ . De esta manera:

Para este método se sugiere un valor de  $\gamma$  igual a **0.5** y para  $\beta$  de **0.25**, lo que le brinda estabilidad al método. De manera que:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (3.72)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1 - 2\beta}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (3.73)$$

### 3.2.5 Movimiento de la base

Cuando los soportes de un sistema estructural producen o transmiten acciones al sistema estructural, a manera de movimiento, resulta conveniente plantear la ecuación (3.65), en función de los desplazamientos relativos como sigue (Clough y Penzien, 1995; Craig y Kurdila, 2011):

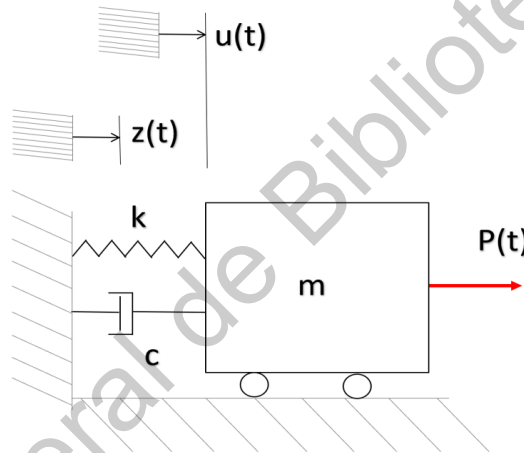


Figura 3.9. Sistema representativo del problema dinámico de movimiento de la base.

$$[M]\{\ddot{U}\}_{n+1}^j + [C]\{\dot{U} - \dot{Z}\}_{n+1}^j + [K_t]\{U - Z\}_{n+1}^j = P(t) \quad (3.74)$$

Expresando la ecuación (3.73) como un desplazamiento relativo  $W = U - Z$ ,  $\dot{W} = \dot{U} - \dot{Z}$  y  $\ddot{W} = \ddot{U} - \ddot{Z}$ , tenemos:

$$[M]\{\ddot{W}\}_{n+1}^j + [C]\{\dot{W}\}_{n+1}^j + [K_t]\{W\}_{n+1}^j = P(t) - [M]\{\ddot{Z}\}_{n+1}^j \quad (3.75)$$

### 3.3 Estabilidad estructural

La estabilidad estructural, es una rama de la mecánica estructural, que asocia el comportamiento de una estructura o de elementos estructurales con las acciones externas (Simiteses y Hodges, 2006).

Se dice que un sistema es estable, si al aplicarse una carga sobre él, el sistema se deforma de manera elástica, pero una vez que se retira la carga, el sistema reacciona deformándose de manera oscilatoria, alrededor de la posición en equilibrio (Simiteses y Hodges, 2006). Por otro lado, un sistema se considera inestable, si al retirarse la carga del sistema, el sistema permanece en la posición deformada, o bien la reacciona diverge o tiende a divergir de la posición en equilibrio.

En la mayoría de los elementos o sistemas estructurales, la pérdida de estabilidad se asocia con la tendencia de pasar de un patrón de deformación a otro diferente. Por ejemplo, cuando una columna cargada axialmente, pasa de trabajar del estado de compresión pura, a un estado de flexocompresión. El valor de la carga, que causa esta transición de estados, se denomina como carga crítica (Simiteses y Hodges, 2006).

Para los ensambles estructurales, al generar el sistema de ecuaciones (3.61), puede determinarse el valor de la carga crítica, obteniendo los valores característicos de dicho sistema matricial. Donde el menor positivo de la parte real de estos valores, corresponde al de la carga crítica (Simiteses y Hodges, 2006). De esta manera la respuesta de un sistema estructural se rige por el signo de la parte real de los eigenvalores, el cual, puede ser representado de acuerdo a las gráficas de la figura 3.10 (De Silva, 2018).

El criterio general para determinar el grado de estabilidad o inestabilidad, es el siguiente: si la parte real del valor característico es negativa (figura 3.10-a, b) se considera que el sistema es estable. Si la parte real del valor característico es cero,

se dice que el sistema es marginalmente estable. Si la parte real del valor característico es positiva, es sistema es inestable.

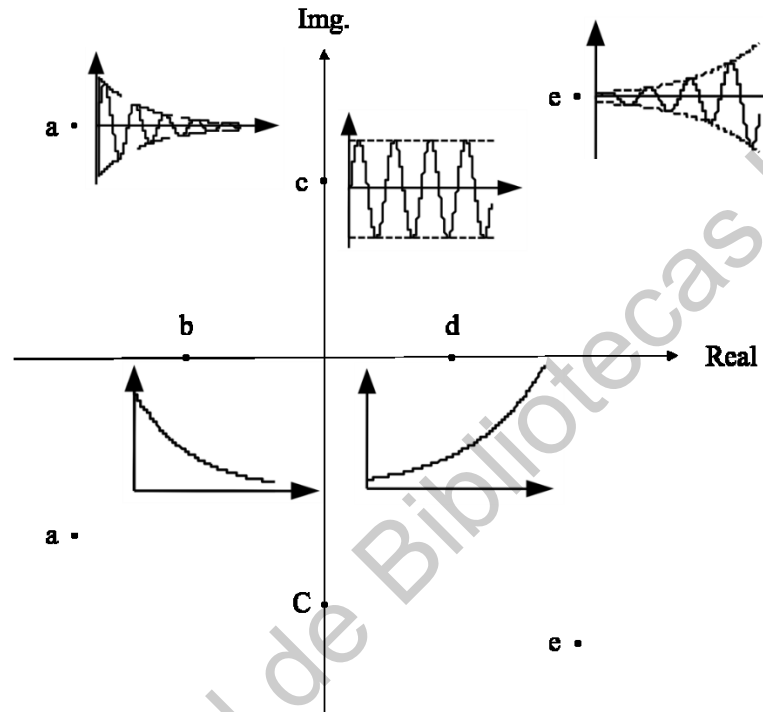


Figura 3.10. Dependencia de estabilidad en la posición polar. Los sistemas A y B, son estables; el sistema C, es marginalmente estable; y el sistema D y E son inestables (adaptado de De Silva, 2018).



## 4. METODOLOGÍA

La figura 4.1 muestra el diagrama de flujo de las etapas que constituyen la presente investigación.

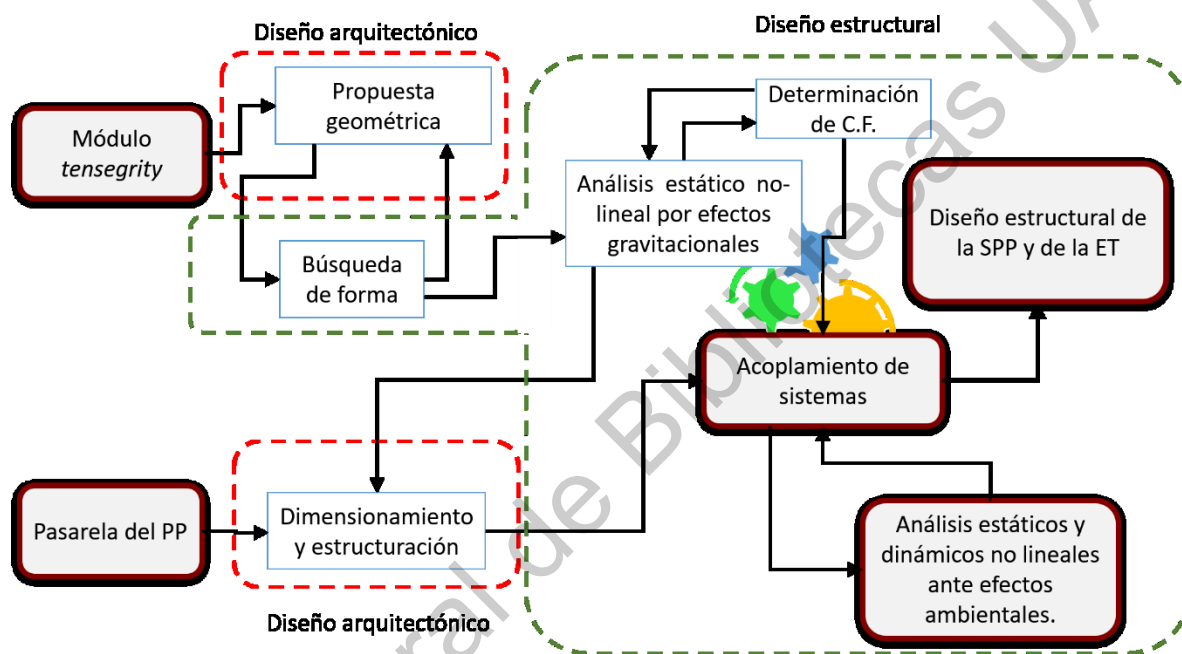


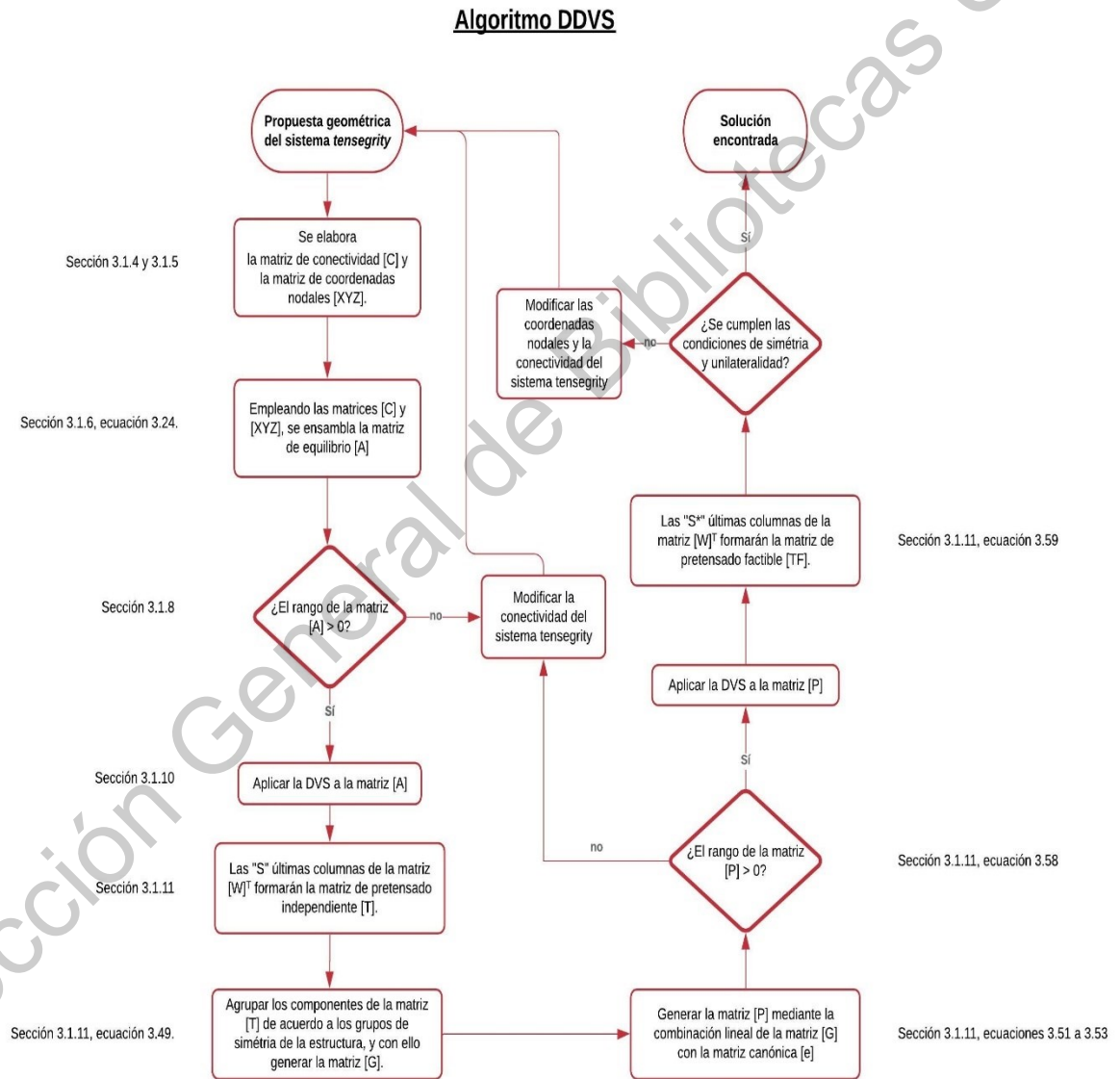
Figura 4.1. Diagrama de flujo de la metodología.

**Etapas 1.** Proponer una ET y determinar su forma en equilibrio (*Form-finding*).

Para proponer una ET, se deberán considerar los requerimientos geométricos y arquitectónicos para el área de circulación sobre la pasarela del puente peatonal (Secretaría de Comunicaciones y Transportes, 2001b). Tomando en cuenta la topología y la geometría de ET ya existentes, se generará un nuevo sistema que cumpla con la función especificada.

Se empleó la técnica “densidad de fuerza” (*force-density*) para formular el sistema de ecuaciones de equilibrio estático. El fundamento matemático de esta

técnica se describe en las secciones 3.1.5 y 3.1.6. Para determinar la solución de este sistema de ecuaciones se implementó en el programa Matlab, el algoritmo “Doble descomposición de valores singulares” (DDVS), propuesto por Yuan *et al.* (2007). En las secciones 3.1.10 y 3.1.11, se muestra la fundamentación teórica del algoritmo, y en la figura 4.2, se muestra el diagrama de flujo.



**Figura 4.2. Diagrama de flujo del algoritmo DDVS propuesto por Yuan *et al.* (2007).**

**Etapa 2.** Realizar el análisis estático no lineal de la ET propuesta, considerando los efectos del peso propio.

La configuración espacial del módulo “X-T” y los valores de presfuerzo inicial, obtenidos del proceso de búsqueda de forma (etapa 1), son los parámetros iniciales para realizar el análisis estático no lineal. Las características mecánicas de los materiales empleados para el análisis estructural se muestran en la tabla 4-1.

**Tabla 4-1.** Características mecánicas de los materiales componentes de la ET.

Propiedades	Elementos Barra	Elementos cable
Normativa ASTM	Aluminio 6063T6	A586 Clase A
Módulo de elasticidad (kg/cm <sup>2</sup> )	710100.3	1687367.1
Esfuerzo de fluencia (kg/cm <sup>2</sup> )	1757.67	10546
Esfuerzo promedio de ruptura (kg/cm <sup>2</sup> )	2109.21	15467.5

Se realizará un modelo en el programa de elementos finitos SAP2000, donde se analice el comportamiento estático que los efectos gravitacionales generan en la ET (ver sección 3.2). Mediante este análisis podrá corroborarse la aproximación del método de búsqueda de forma, al comparar dichos resultados contra las coordenadas nodales y las fuerzas axiales obtenidas del análisis estático no lineal.

**Etapa 3.** Evaluar las condiciones de frontera de los nodos de apoyo para acoplar la ET a la superestructura del puente peatonal.

Mediante el modelo de elementos finitos de la ET elaborado en la etapa 2, se evaluarán los casos 1 y 2 de la tabla 4-2, a partir de donde se seleccionarán los grados de libertad con los que se cumplan los siguientes requerimientos:

1. La ET deberá conservar la capacidad de auto equilibrio.

2. Deberán restringirse todos los desplazamientos verticales de los nodos de apoyo.
3. Podrá fijarse un nodo de apoyo restringido a los desplazamientos horizontales en ambas direcciones.

**Tabla 4-2.** *Combinaciones de grados de libertados para los nodos de apoyo de la ET.*

Nodo	Caso 1			Caso 2		
	ux	uy	uz	ux	uy	uz
1	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido	Restringido
4	Libre	Libre	Restringido	Restringido	Libre	Restringido
6	Libre	Libre	Restringido	Restringido	Libre	Restringido

**Etapas 4.** Proponer la estructuración y el dimensionamiento de la superestructura del puente peatonal (SPP).

Para proponer las dimensiones y la estructuración de la SPP, se deberán considerar los requerimientos geométricos y arquitectónicos para el área de circulación sobre la pasarela del puente peatonal (Secretaría de Comunicaciones y Transportes, 2001b). Adicionalmente, se considerará la posición de los nodos de apoyo del ST, con el fin de que haya correspondencia con los nodos de la SPP.

La tabla 4-3 muestra las características mecánicas de los diversos tipos de elementos estructurales empleados.

**Tabla 4-3.** *Características mecánicas de los materiales de la SPP.*

Propiedades	HSS Redondos	HSS Rectangulares	Tubos Redondos
Normativa ASTM	A500 Gr 42	A500 Gr 46	A53 Gr. B
Esfuerzo de fluencia <b>F<sub>y</sub></b>	2952 kg/cm <sup>2</sup>	3234 kg/cm <sup>2</sup>	2460 kg/cm <sup>2</sup>
Esfuerzo último <b>F<sub>u</sub></b>	4077 kg/cm <sup>2</sup>	4077 kg/cm <sup>2</sup>	4218 kg/cm <sup>2</sup>

En esta etapa se realizará un análisis y diseño estructural preliminar, considerando las cargas de servicio, de acuerdo a la normativa de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (2001a).

**Etapa 5.** Efectuar el análisis estático no lineal de la ET y de la SPP, considerando variaciones de la temperatura ambiental y las fuerzas de viento.

Las acciones accidentales por efectos ambientales, ya sean variaciones de temperatura o fuerzas originadas por el viento (ver apéndice 7.2), se considerarán de acuerdo a las siguientes combinaciones de carga (Secretaria de Comunicaciones y Transportes, 2016):

**Tabla 4-4.** *Combinaciones de carga para la ET y la SPP* (Secretaria de Comunicaciones y Transportes, 2016).

Combinaciones de carga			
Grupo: Cargas de trabajo		Grupo: Factores de carga	
CT-2	$\zeta^* (VE)$	FC-2	$\gamma^* (\beta_{CM} CM + VE)$
CT-3	$\zeta^* (CM + CV + 0.3VE + VCV)$	FC-3	$\gamma^* (\beta_{CM} CM + 1.2CV + 0.3VE + VCV)$
CT-5	$\zeta^* (CM + VE + T)$	FC-5	$\gamma^* (\beta_{CM} CM + VE + T)$
CT-6	$\zeta^* (CM + CV + 0.3VE + VCV + T)$	FC-6	$\gamma^* (\beta_{CM} CM + 1.2CV + 0.3VE + VCV + T)$

La nomenclatura de las cargas consideradas es la siguiente:

CM = Carga muerta.

CV = Carga viva.

VE = Fuerza de viento sobre la estructura.

VCV = Viento sobre la carga viva

T = Temperatura.

$\zeta$  = Facto de incremento de esfuerzos. Para las combinaciones CT-2 y CT-3, tendrá un valor de 1.25, y, de 1.40 para las combinaciones CT-5 y CT-6. Su aplicación corresponde a la etapa del diseño estructural.

$\gamma$  = Facto de carga. Para las combinaciones FC-2 y FC-3, tendrá un valor de 1.30, y, de 1.25 para las combinaciones FC-5 y FC-6. Su aplicación corresponde a la etapa del diseño estructural.

El coeficiente  $\beta_{CM}$  es 1.0 para elementos a flexión y tensión pura. Mientras que para elementos sujetos a flexocompresión, se tienen los siguientes casos:

1.  $\beta_{CM} = 1.0$ , para la condición de carga axial máxima y mínimo momento flexionante.
2.  $\beta_{CM} = 0.75$ , para la condición de carga axial mínima y máximo momento flexionante.

**Etapa 6.** Realizar el análisis dinámico no lineal de la ET considerando cambios de la temperatura ambiental y fuerzas dinámicas de viento como una función tipo pulso.

Considerando las combinaciones de carga definidas en la etapa 5 (ver tabla 4-4), se proponen tres casos de estudio principales, los cuales se describen a continuación:

- Caso 1: La estructura fue sometida ante fuerzas de viento dinámicas, y se consideró constante la temperatura ambiental ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ ).
- Caso 2: Se indujo un incremento de  $16^{\circ}\text{C}$  de la temperatura ambiental ( $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ ) y posteriormente se aplicó la fuerza del viento como una función dinámica.
- Caso 3: Se consideró un decremento de  $16^{\circ}\text{C}$  de la temperatura ambiental ( $\Delta T=-16^{\circ}\text{C}$ ), previo, a la aplicación de las fuerzas del viento sobre el sistema.

A diferencia del caso estático, en el caso dinámico la fuerza del viento será modelada como la función tipo pulso definida en la sección 3.2.2.

### **Etapa 7.** Evaluar la estabilidad de la ET

La comprobación de estabilidad del sistema *tensegrity*, se realizará evaluando los siguientes parámetros:

1. El sistema recupera la geometría inicial aún después de la aplicación de las cargas.
2. Cada elemento presenta un comportamiento dentro del rango elástico.

### **Etapa 8.** Desarrollar el acoplamiento mecánico de las estructuras.

Se definirá el mecanismo de conexión que permita esta transferencia de cargas considerando las condiciones de frontera definidas en la etapa 4.

Con el objetivo de incluir las acciones que la ET genere sobre la SPP, se transmitirán como fuerzas puntuales, las reacciones de los nodos de apoyo de la ET al modelo de elementos finitos de la SPP, empleando el principio de superposición de efectos.

Para transmitir los efectos que la SPP genera sobre el módulo X-T, se emplearán modelos dinámicos no lineales, donde los desplazamientos diferenciales que sufren los nodos de apoyo, serán representados como movimientos de la base.

### **Etapa 9.** Realizar el diseño estructural de la ET y de la SPP

Realizar el diseño estructural de los sistemas, aplicando la normativa correspondiente y considerando la envolvente de los elementos mecánicos máximos de cada uno de los componentes estructurales.

#### 4.1 Materiales y equipo

- Materiales

Barras de aluminio de múltiples diámetros

Cable de acero galvanizado de 1/16 plg de diámetro

Conectores para cables de 1/16 plg de diámetro

- Equipo

Laptop Acer Aspire E-15 E5-553-1786, 15.6 Pulgadas, AMD A12, 8 GB RAM, 1 TB Disco Duro.

Matlab 2015a

SAP2000 20

AUTOCAD v 2016



## 5. RESULTADOS

### 5.1 Descripción del módulo *tensegrity*

El módulo *tensegrity* desarrollado en este trabajo, se denominará, como “X-T”, únicamente por fines de simplicidad. Se concibe que, el módulo “X-T”, es una adaptación al espacio tridimensional, del módulo denominado “X-Cross”, el cual se considera como el sistema *tensegrity* más simple en un espacio geométrico bidimensional (Zhang y Ohsaki, 2015). Esta adaptación al espacio 3D, tiene el fin de generar un sistema *tensegrity*, con características geométricas y arquitectónicas, que permitan su implementación en una pasarela peatonal.

La topología del módulo “X-T” se describe en la tabla 5-1, y, en la figura 5.1, se muestra la numeración de los nodos.

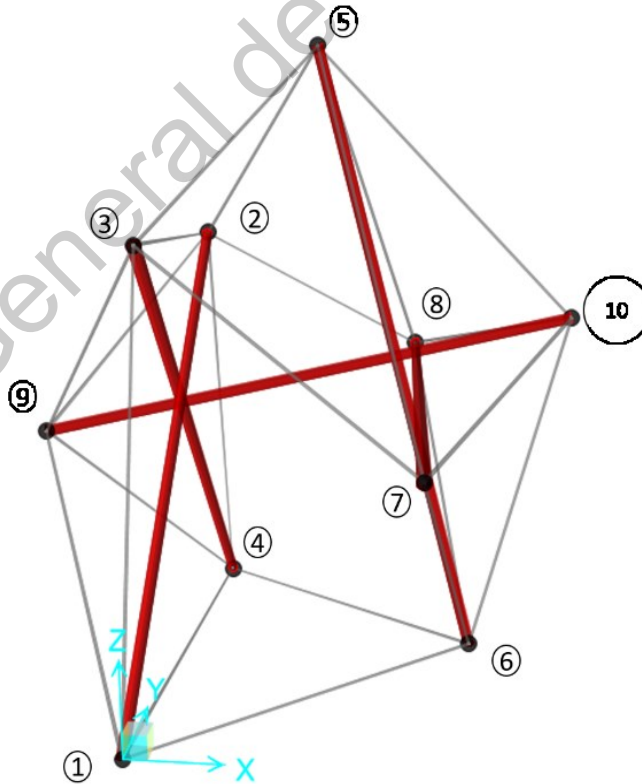


Figura 5.1. Vista en perspectiva y numeración de nodos del módulo “X-T”.

Tabla 5-1. Conectividad del módulo "X-T".

N° de elemento	Nodo inicial	Nodo final	N° de elemento	Nodo inicial	Nodo final	N° de elemento	Nodo inicial	Nodo final
1	1	2	11	7	6	21	10	8
2	3	4	12	6	8	22	3	7
3	5	6	13	8	5	23	2	8
4	7	8	14	1	9	24	2	5
5	9	10	15	9	2	25	5	3
6	1	4	16	3	9	26	1	6
7	4	2	17	9	4	27	6	4
8	2	3	18	5	10	-	-	-
9	3	1	19	10	6	-	-	-
10	5	7	20	7	10	-	-	-

El espacio libre interior del módulo "X-T", para la circulación de los peatones (figuras 5.2a y 5.2b), es de 2.70 m de ancho y de 2.80 m de altura, el ancho total es de 4.90 m y la altura total es de 5.45 m.

El módulo "X-T" se compone de 27 elementos, de los cuales, 5 elementos son tipo barra y los 22 elementos restantes son tipo cable, los cuales convergen a 10 nodos.

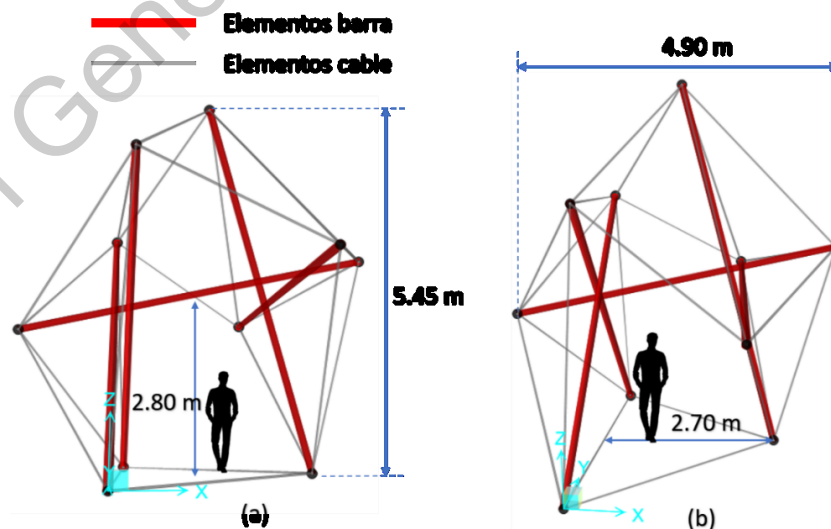


Figura 5.2. Dimensiones totales y del espacio interior libre para la circulación peatonal del módulo "X-T".

## 5.2 Forma y fuerzas en equilibrio del módulo X-T

Una vez definida la conectividad del sistema *tensegrity* (sección 5.1), se elaboró la matriz de equilibrio [A], mediante la ecuación (3.24). Se evaluó la cantidad de estados de presfuerzo independientes con la ecuación (3.30), que, para este caso es igual a 3. Posteriormente se realizó la primera DVS a la matriz de equilibrio, y se designó a los últimos 3 vectores de la matriz  $[W]^T$  como la matriz de MPI [T]. Dado que la estructura propuesta es asimétrica, se tendrán 27 grupos de simetría, uno por cada elemento.

Continuando el procedimiento algebraico hasta la ecuación (3.56), se aplica la DVS a la matriz [P]. La cantidad de MPIN es igual a 3, los cuales corresponden a los últimos 3 vectores de la matriz  $[W]^T$ . Mediante la combinación lineal de dichos vectores, se determinó el MFPI, el cual, cumple la condición de unilateralidad de los elementos barras y cables, respectivamente, y corresponde al vector {TF}.

El proceso anterior se llevó a cabo de manera iterativa en el programa Matlab, modificando las coordenadas nodales, hasta que cumplieran las condiciones de equilibrio, simetría y unilateralidad, requeridas por el procedimiento de BFF.

Las coordenadas resultantes se muestran en la tabla 5-2.

**Tabla 5-2.** Coordenadas nodales de la ET resultantes del procedimiento de búsqueda de forma.

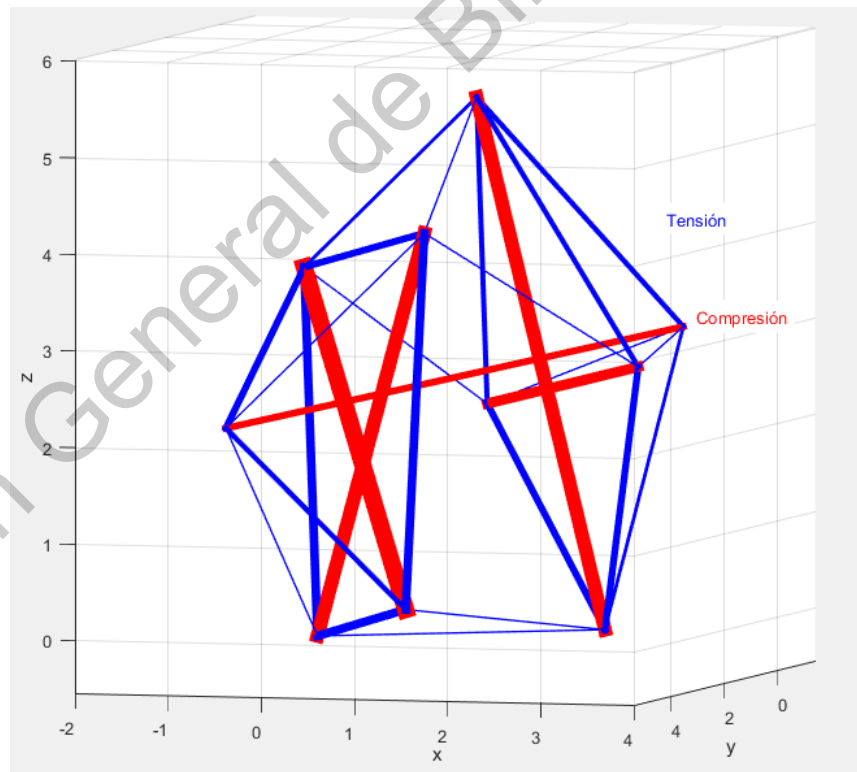
Nodo	Coordenadas			Nodo	Coordenadas		
	X	Y	X		X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000	6	2.800	2.300	0.000
2	0.000	3.800	3.800	7	2.261	-0.829	2.500
3	0.200	0.000	3.900	8	2.261	4.829	2.500
4	0.200	4.000	0.000	9	-1.300	2.200	2.000
5	1.336	2.000	5.464	10	3.613	2.200	3.146

Los valores de presfuerzo resultantes del proceso de BFF se muestran en la tabla 5-3.

**Tabla 5-3. Coeficientes de presfuerzo resultantes del proceso de búsqueda de forma (BFF).**

N° de elemento	Presfuerzo (Ton)	N° de elemento	Presfuerzo (Ton)	N° de elemento	Presfuerzo (Ton)	N° de elemento	Presfuerzo (Ton)
1	-1.000	8	0.438	15	0.391	22	0.062
2	-0.807	9	0.527	16	0.107	23	0.078
3	-0.771	10	0.256	17	0.073	24	0.152
4	-0.611	11	0.387	18	0.293	25	0.123
5	-0.398	12	0.378	19	0.250	26	0.088
6	0.453	13	0.276	20	0.134	27	0.102
7	0.517	14	0.294	21	0.150	-	-

La figura 5.3 muestra un esquema de los resultados del proceso de BFF del módulo "X-T".



**Figura 5.3. Esquema de la distribución del presfuerzo resultante del proceso de búsqueda de forma y fuerzas en equilibrio del módulo "X-T".**

### 5.3 Análisis estático no lineal (AENL) por efectos gravitacionales del módulo X-T

Empleando el programa computacional SAP2000, basado en el método de elementos finitos, se analizaron 2 combinaciones diferentes de las condiciones de apoyo del sistema para los nodos 1, 4 y 6 (ver tabla 4.1). Los grados de libertad (GL) de los 3 nodos, asociados a los giros, se mantuvieron libres en todos los casos. Para el nodo 1 se restringieron los GL asociados a los desplazamientos, tanto para el caso 1 como para el caso 2. La tabla 5-4 y la figura 5-4, muestran los desplazamientos de los nodos apoyo, donde  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$ , son los desplazamientos en las direcciones X, Y y Z, respectivamente.

La convergencia del análisis no lineal, se obtuvo en un total de 10 pasos o iteraciones.

Tabla 5-4. Desplazamiento de los nodos de apoyo de la ET.

Nodo	Caso 1		Caso 2	
	$u_x$ (m)	$u_y$ (m)	$u_x$ (m)	$u_y$ (m)
4	-4.086	0.2049	0	0.004
6	-2.349	2.860	0	0.003

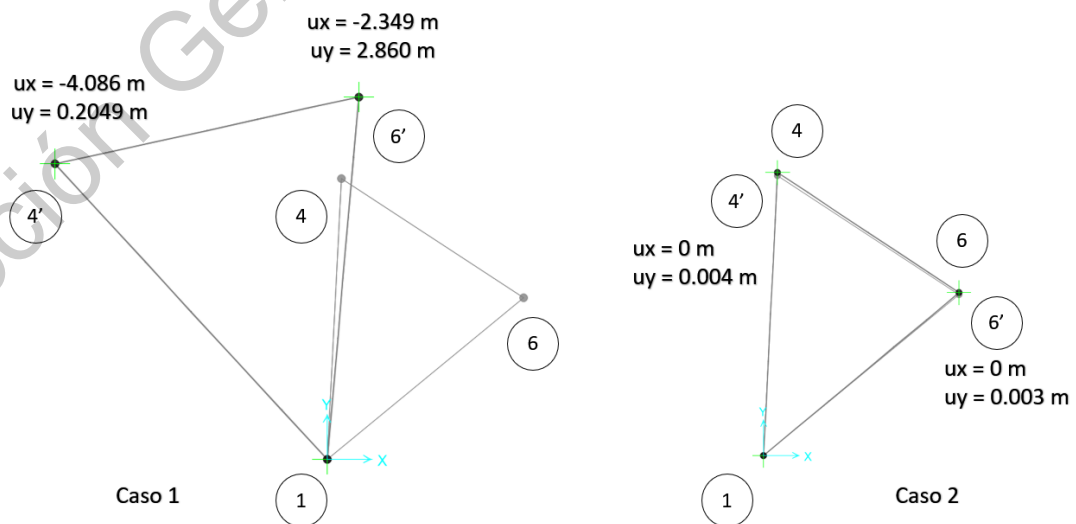


Figura 5.4. Desplazamiento de nodos de apoyo de la ET, vista en planta.

Dado que el módulo va a ser implementado en una pasarela peatonal, se seleccionará la configuración de grados de libertad del caso 2, cuyos desplazamientos son menores a 1 cm. Para el caso 1, los desplazamientos son excesivos y se desfasan del área de la pasarela, por lo que se descartará de este análisis.

El desplazamiento máximo de los nodos libres, para las condiciones de frontera del caso 2, se da en el nodo 7, con un valor de -0.39 cm en la dirección X. Sin embargo, no se altera de manera significativa el área designada para el paso peatonal. Las coordenadas resultantes del análisis no lineal se muestran en la tabla 5-5.

**Tabla 5-5.** *Coordenadas nodales de la ET, resultantes del análisis estático no lineal, considerando las condiciones de apoyo del caso 2.*

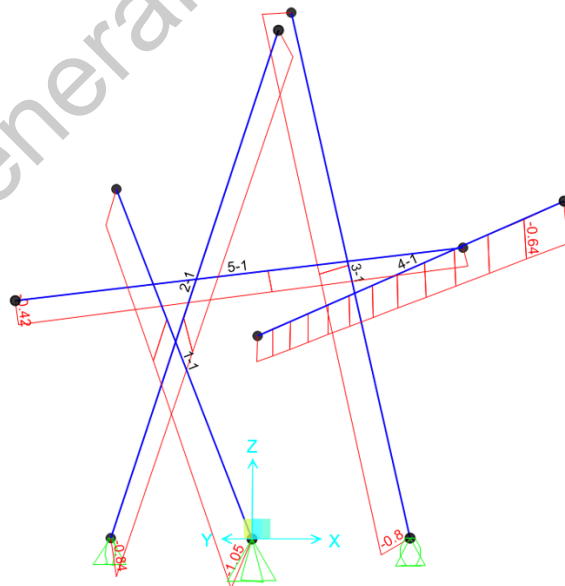
Nodo	Coordenadas			Nodo	Coordenadas		
	X	Y	Z		X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000	6	2.800	2.301	0.000
2	-0.004	3.801	3.799	7	2.256	-0.828	2.498
3	0.196	0.000	3.899	8	2.284	4.877	2.525
4	0.200	4.000	0.000	9	-1.302	2.200	1.998
5	1.332	2.000	5.463	10	3.610	2.200	3.146

Debido a que en el AENL se considera el efecto gravitacional sobre el sistema, se presenta una redistribución de fuerzas axiales en cada miembro del módulo X-T. La variación máxima de fuerza axial para los elementos barra se presenta en el elemento 1, donde se da un incremento 47 kg, equivalente al 4.7%. En los elementos cable, el incremento máximo ocurre en el elemento 21, con un valor de 30 kg, correspondiente a un incremento de 22.6%.

La tabla 5-6 muestra una comparativa de la variación de la fuerza axial en cada uno de los elementos, y en las figuras 5.5 a 5.8, se muestran los valores de fuerza axial de los elementos del módulo "X-T".

**Tabla 5-6. Comparativa de la variación de fuerza axial entre los resultados del proceso de búsqueda de forma (BFF) contra las fuerzas axiales resultantes del AENL por los efectos del peso propio PP.**

N° de elemento	Presfuerzo de BFF (kg)	Presfuerzo por PP (kg)	Variación porcentual	N° de elemento	Presfuerzo de BFF (kg)	Presfuerzo por PP (kg)	Variación porcentual
1	-1000	-1047	4.7%	15	391	414	6.0%
2	-807	-834	3.3%	16	107	121	12.8%
3	-771	-804	4.2%	17	73	71	-3.3%
4	-611	-639	4.6%	18	293	292	-0.4%
5	-398	-418	4.9%	19	250	221	-11.5%
6	453	472	4.3%	20	134	164	22.6%
7	517	501	-3.2%	21	150	182	21.4%
8	438	458	4.7%	22	62	75	20.8%
9	527	505	-4.1%	23	78	94	20.6%
10	256	263	2.9%	24	152	149	-1.7%
11	387	377	-2.5%	25	123	115	-6.8%
12	378	371	-2.0%	26	88	96	9.0%
13	276	280	1.4%	27	102	107	4.7%
14	294	298	1.5%	-	-	-	-



**Figura 5.5. Fuerzas axiales a compresión (Ton) de los elementos barra, por los efectos del PP.**

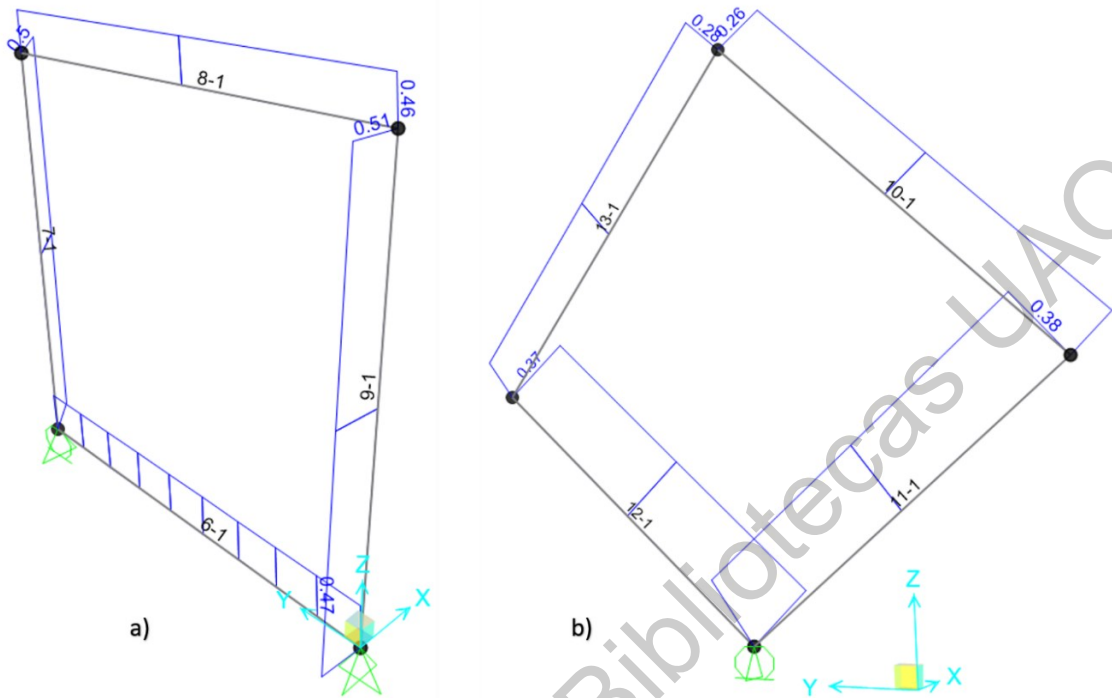


Figura 5.6. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 6 al 13, por los efectos del PP.

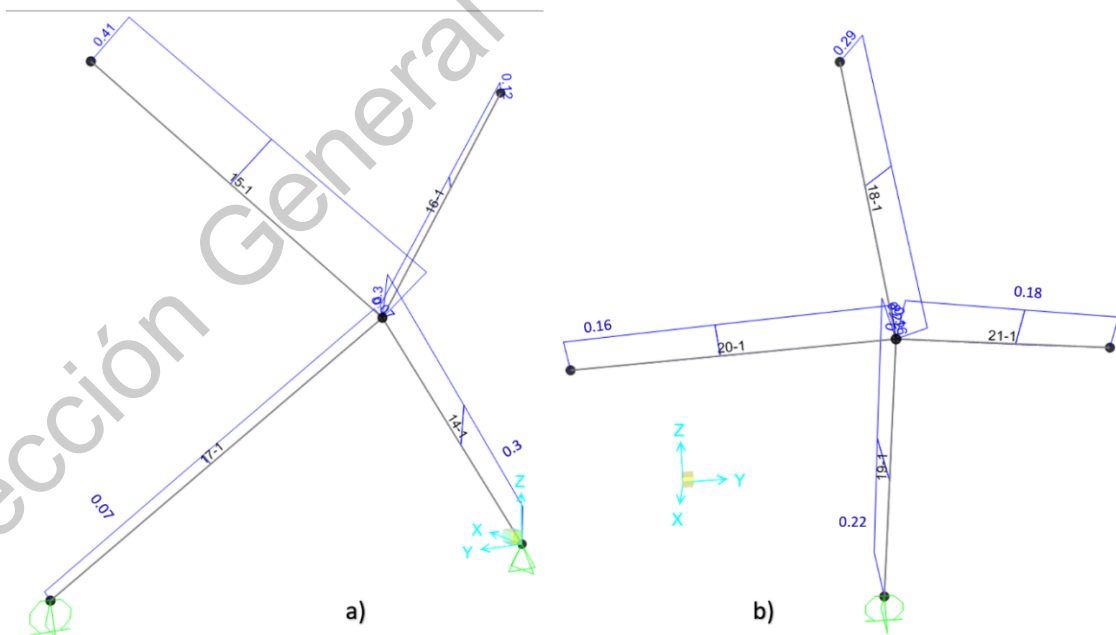


Figura 5.7. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 14 al 21, por los efectos del PP.



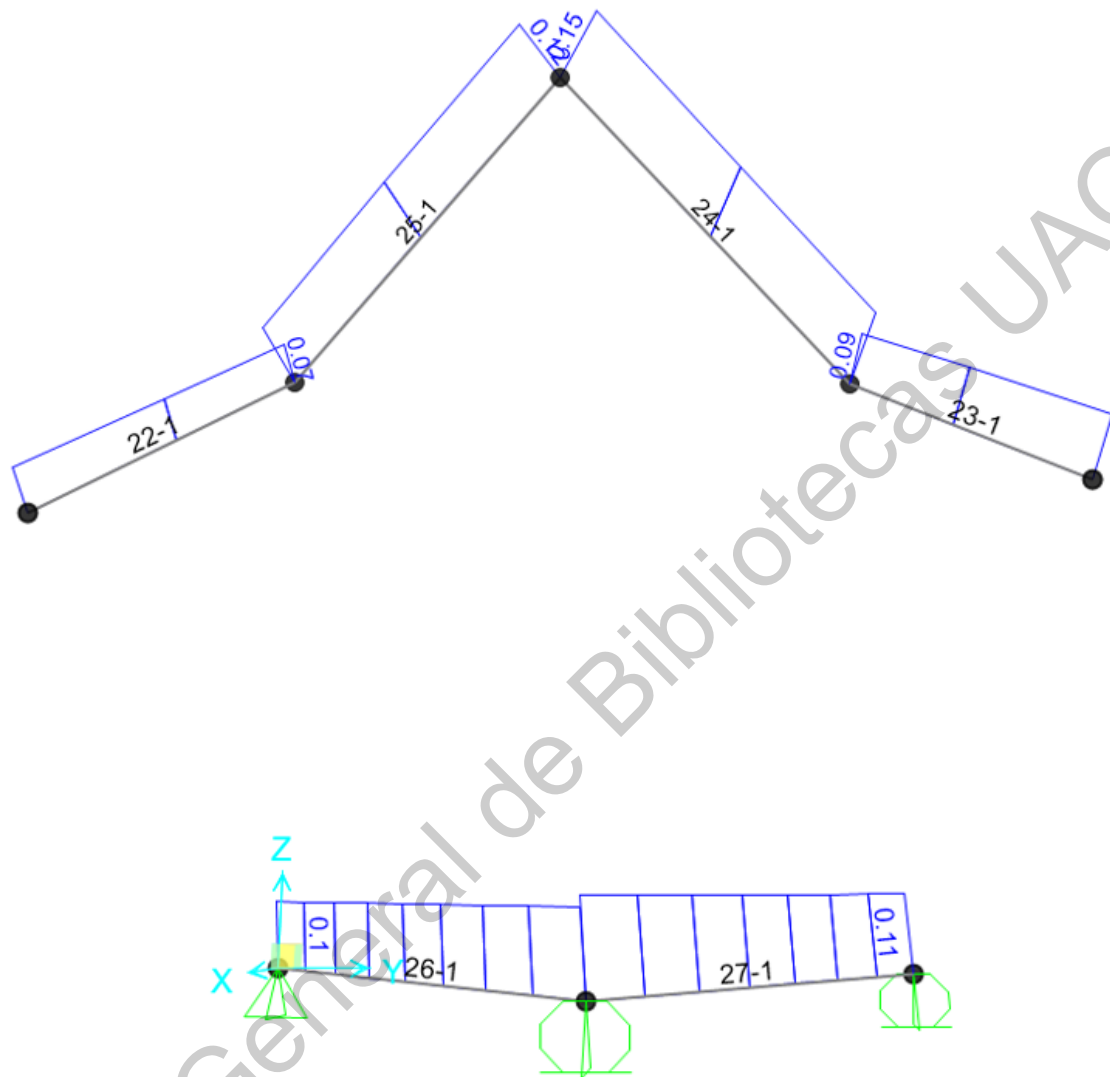


Figura 5.8. Fuerzas axiales a tensión (Ton) de los elementos cable 22 al 27, por los efectos del PP.

De manera general se observa que el método de búsqueda de forma y fuerzas, en promedio, tiene una aproximación del 96.4%, con respecto a las fuerzas axiales requeridas por el sistema para mantener el equilibrio cuando se consideran el efecto gravitacional actuando sobre el sistema.

#### 5.4 Evaluación de los elementos mecánicos y los desplazamientos del módulo X-T, producidos por los efectos ambientales.

Mediante modelos dinámicos no lineales, se generaron tres casos de estudio principales, en los que el módulo X-T, fue sometido a solicitaciones de origen ambiental, de acuerdo a lo definido en la sección 3.2.2 y 3.2.3, y considerando los aspectos metodológicos de la etapa 6, en el capítulo 4.

Considerando las características implícitas de un sistema *tensegrity*, los elementos mecánicos que predominan en el comportamiento del sistema son las fuerzas axiales, de las cuales, en las tablas 5-7 y 5-8, se reportan los incrementos máximos generados en cada uno de los tres casos.

**Tabla 5-7. Fuerzas axiales máximas a compresión de los elementos tipo barra en los casos de carga 1, 2 y 3.**

N° de elemento	Ppo + Presf.	Caso 1 ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ )		Caso 2 ( $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ )			Caso 3 ( $\Delta T=-16^{\circ}\text{C}$ )		
		Efectos por viento		Efectos térmicos	Efectos térmicos + viento		Efectos térmicos	Efectos térmicos + viento	
	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante
1	1047	1369	W-Yn	1663	2002	WTI-Yn	423	1263	WTD-X
2	834	1044	W-Y	1337	1560	WTI-Y	317	969	WTD-X
3	804	2450	W-X	1541	2422	WTI-X	177	2357	WTD-X
4	639	1022	W-Xn	1164	1543	WTI-Xn	152	875	WTD-Xn
5	418	1091	W-X	916	1110	WTI-Xn	123	1101	WTD-X

Del caso 1 ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ ), los elementos tipo barra (ver tabla 5-7), presentan incrementos de fuerzas axiales desde un 25% en la barra 2, hasta 205% en la barra 3. Se observa que, en cada uno de los elementos, predomina una dirección del viento en específico, de acuerdo a su posición geométrica, es decir, para cualquier barra del sistema, ciertas direcciones del viento producen incrementos de carga, mientras que otras producen decrementos. La barra 3, es el elemento más

esforzado en este caso, y trabaja ante una fuerza de 2450 kg, que es 1646 kg mayor que en el caso gravitacional (AENL).

La figura 5.9 muestra el diagrama tiempo-historia del elemento 3. Una vez que cesa la carga del viento ( $t=6s$ ), se observan variaciones residuales de la fuerza axial de +/- 250 kg, con tendencia asintótica, alrededor de la fuerza axial del estado en equilibrio (AENL), producto de los procesos de reequilibrio del módulo X-T. Para las barras 1, 2 y 5, dichas oscilaciones son de +/- 50kg, y de +/- 200 kg para la barra 4, todas con tendencia decreciente.

El punto de inicio del registro tiempo-historia, de la figura 5.9, corresponde al valor resultante del AENL (ver tabla 5-6).

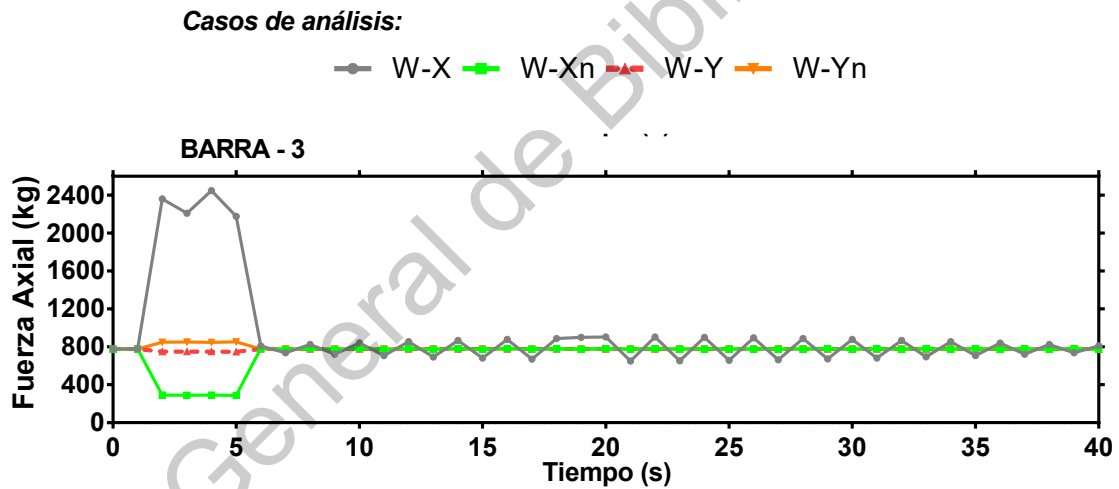


Figura 5.9. Registro tiempo-historia de los elementos barra para el caso 1.

El incremento de  $16^{\circ}\text{C}$  en la temperatura ambiental, naturalmente, genera incrementos de fuerza axial en todos los elementos barra, debido a la expansión volumétrica que se tiene en cada componente. La variación de la fuerza axial, se da, de manera heterogénea en el sistema, aumentando porcentualmente desde 59% hasta 119%, donde, el máximo incremento es de 737 kg, en la barra 3. Sin

embargo, el elemento más esforzado es la barra 1 que alcanza una compresión de 1663 kg.

Al incorporar las fuerzas del viento actuando sobre el módulo X-T (caso 2), la variación de fuerza axial es cercana al 90% para las barras 1 y 2; en el elemento 3 es de 201%; y, en los elementos 4 y 5, es de 141% y 166%, todo esto, con respecto al estado de equilibrio (AENL, ver tabla 5-6). Para este caso, la barra 3 se vuelve en el elemento que recibe la mayor fuerza a compresión, de una magnitud de 2422 kg. Se observa que cada una de las barras se rige por una dirección específica del viento.

En los elementos 1 al 4, se conservan las mismas direcciones del viento gobernantes que en el caso 1; a diferencia del elemento 5, donde se invierte el sentido del viento que rige al elemento, es decir pasa de X a Xn. Adicionalmente, en los elementos 1, 2 y 3 se percibe una disminución de carga axial, en los casos asociados a las direcciones Y, Yn y Xn, respectivamente; mismas que en el caso 1.

De la figura 5.10, se aprecia que las oscilaciones residuales de fuerza axial, ocurren en un orden menor a 10 kg, lo cual se considera como un comportamiento estable.

En contra parte, el decremento de 16°C en la temperatura ambiental, ocasiona disminución de fuerza axial en todos los elementos barra, originado por la contracción volumétrica que tienen los elementos. En este caso, la variación porcentual de la fuerza axial, se da, de manera aproximadamente homogénea desde -60% hasta -78%, donde, el máximo decremento en magnitud, es de 627 kg, en la barra 3.

Correspondiente a la integración de los efectos del viento con la variación de la temperatura ambiental de -16°C (caso 3), se obtuvieron variaciones de fuerza axial desde 16% hasta 193%. De manera similar al caso 2, el elemento 3, es el que sufre el mayor incremento, alcanzando un valor total de 2357 kg; seguido por las

barras 1 y 5, con 1263 kg y 1101 kg, y de menor orden, en los elementos 2 y 4, de acuerdo a la tabla 5-7.

Considerando los registros tiempo-historia de la figura 5.10, se aprecia que, durante el periodo de acción de las cargas por viento, la barra 1 disminuye a 272 kg (WTD-Y), que equivale a una variación de -74%, con respecto al caso gravitacional, y de -36% con respecto a la compresión producida únicamente por el efecto  $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ .

Cabe resaltar, que en ninguna de las barras se presenta un cambio de signo en la fuerza axial o reducción hasta 0 kg. Las oscilaciones registradas en este caso son menores a 20 kg y ocurren alrededor del estado de equilibrio, tendiendo a disminuir en el tiempo.

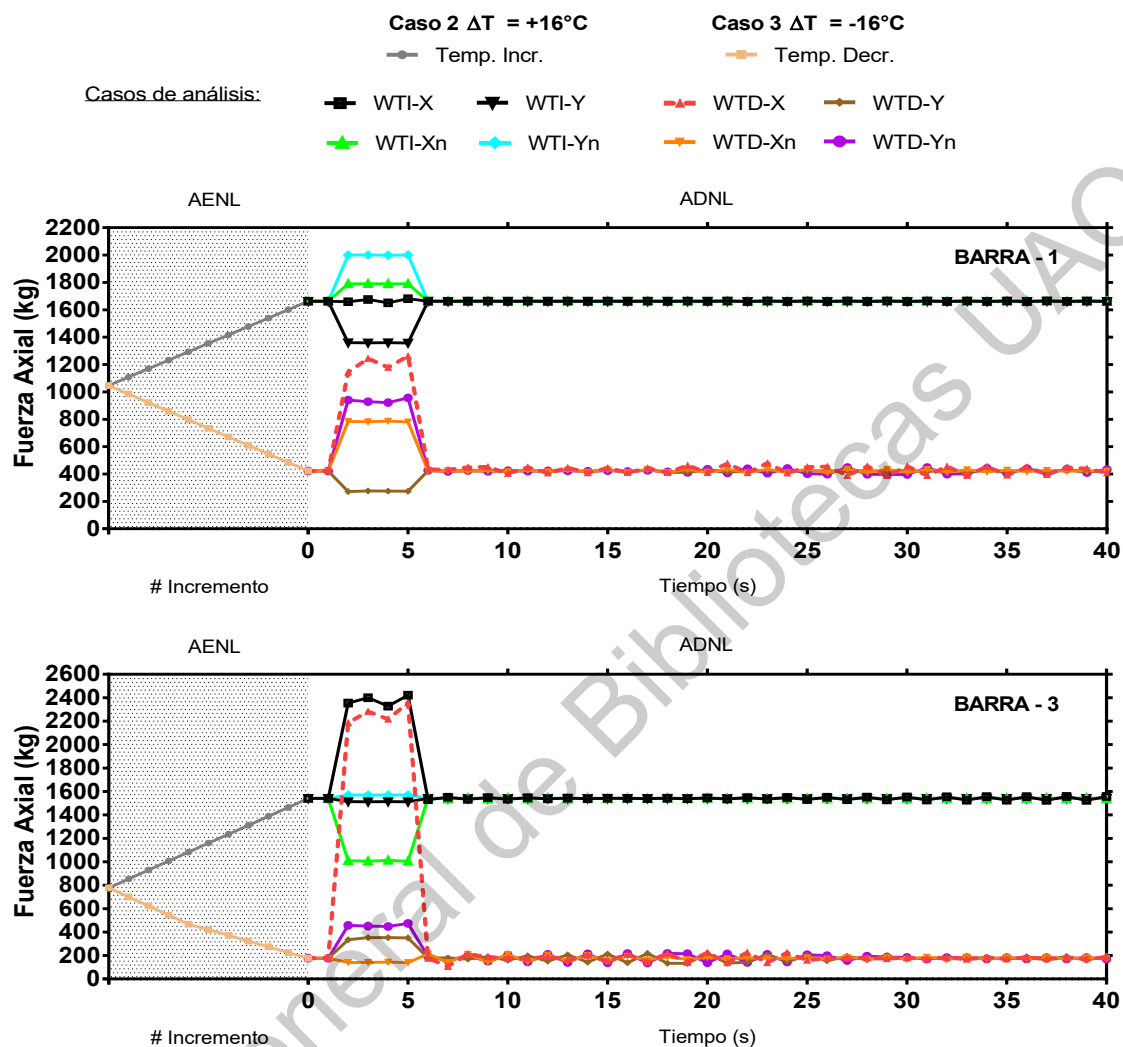


Figura 5.10. Registro tiempo-historia de los elementos barra 1 y 3 para los casos 2 y 3.

Los resultados correspondientes a los elementos tipo cable, para los tres casos de carga, se muestran en la tabla 5-8. Para el análisis del comportamiento de este tipo de elementos, resulta conveniente agruparlos de acuerdo a su ubicación espacial (ver figura 5.1 y tabla 5-1).

Tabla 5-8. Fuerzas axiales a tensión de los elementos tipo cable en los casos de carga 1, 2 y 3.

Grupo	N° de elemento	Ppo + Presf.	Caso 1 ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ )		Caso 2 ( $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ )			Caso 3 ( $\Delta T=-16^{\circ}\text{C}$ )		
			Efectos por viento		Efectos térmicos	Efectos térmicos + viento		Efectos térmicos	Efectos térmicos + viento	
		Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante
A	6	472	662	W-Y	782	963	WTI-Yn	116	354	WTD-Y
	7	501	675	W-X	747	937	WTI-Y	191	640	WTD-X
	8	458	624	W-Xn	588	774	WTI-Xn	211	359	WTD-Xn
	9	505	677	W-X	771	921	WTI-X	183	652	WTD-X
B	10	263	594	W-X	445	620	WTI-X	54	544	WTD-X
	11	377	653	W-X	697	804	WTI-Xn	67	581	WTD-X
	12	371	629	W-X	677	779	WTI-Xn	64	563	WTD-X
	13	280	618	W-X	470	639	WTI-X	52	544	WTD-X
C	14	298	566	W-X	566	680	WTI-Yn	96	600	WTD-X
	15	414	868	W-X	812	950	WTI-Yn	141	896	WTD-X
	16	121	500	W-X	346	489	WTI-Y	25	502	WTD-X
	17	71	365	W-X	346	489	WTI-Y	25	502	WTD-X
D	18	292	1194	W-X	676	1143	WTI-X	77	1205	WTD-X
	19	221	1109	W-X	552	1060	WTI-X	35	1119	WTD-X
	20	164	557	W-Xn	309	689	WTI-Xn	61	547	WTD-Xn
	21	182	585	W-Xn	347	734	WTI-Xn	67	574	WTD-Xn
E	22	75	282	W-Xn	152	348	WTI-Xn	29	283	WTD-Xn
	23	94	327	W-Xn	192	411	WTI-Xn	36	326	WTD-Xn
	24	149	631	W-X	336	614	WTI-X	35	640	WTD-X
	25	115	508	W-X	268	485	WTI-X	22	505	WTD-X
F	26	96	253	W-Y	6	181	WTI-Y	175	347	WTD-Y
	27	107	201	W-Yn	2	200	WTI-Yn	199	261	WTD-Xn

Para el caso 1, se registró que en el grupo A, integrado por los cables del 6 al 9, se exhibe un incremento de fuerza axial, de 166 a 190 kg. El análisis en la dirección Yn produce decrementos de fuerza axial en los cables 6 y 9. Los casos W-X y W-Xn, generan un efecto similar en los cables 8, 7 y 9, respectivamente.

En el grupo B, el máximo incremento de fuerza axial, se origina en el caso W-X, el cual varía de 258 a 338 kg. La aplicación de la fuerza del viento en dirección Xn ocasiona la disminución de fuerza axial de mayor magnitud para este grupo. El grupo C, presenta un comportamiento análogo al grupo B, y el incremento de fuerza axial va, de 268 a 454 kg. Sin embargo, los máximos decrementos surgen en las direcciones W-Y y W-Yn.

Dentro del grupo D, se observa similitud entre los cables 18 y 19, y, entre 20 y 21. Para el primer par de elementos, la variación corresponde a 888 kg y 902 kg (W-X), y, para el segundo par, es de 393 kg y 403 (W-Xn). Además, el comportamiento de estos pares de cables, es inverso entre sí, ya que para los elementos 18 y 19, el decremento se presenta en W-Xn, y para los cables 20 y 21, ocurre en el caso W-X. Este comportamiento también es percibido en los grupos E y F.

Se observa que en el grupo A, cada elemento responde de manera diferente a las cuatro direcciones de análisis. Mientras que en los grupos B y C predominan los efectos de la dirección X. Los grupos D y E responden de manera similar ante las direcciones X y Xn; y, las direcciones Y y Yn, rigen el comportamiento de los elementos del grupo F.

A partir de las gráficas tiempo-historia de la figura 5.11, se identificó que, la máxima tensión registrada ocurre en el elemento 18, de una magnitud de 1194 kg, y es producida por los efectos del viento en la dirección Xn. De dichos registros tiempo-historia, sobresale que, para el caso W-X, se presentan oscilaciones residuales de tensiones en todos los elementos cable. Las oscilaciones de mayor magnitud se presentan en los elementos 20 y 21, con un valor de 200 kg. Ya que dichas variaciones ocurren alrededor del estado de equilibrio, y se presenta una tendencia decreciente, en todos los elementos, se infiere que el comportamiento de los elementos es estable.



Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

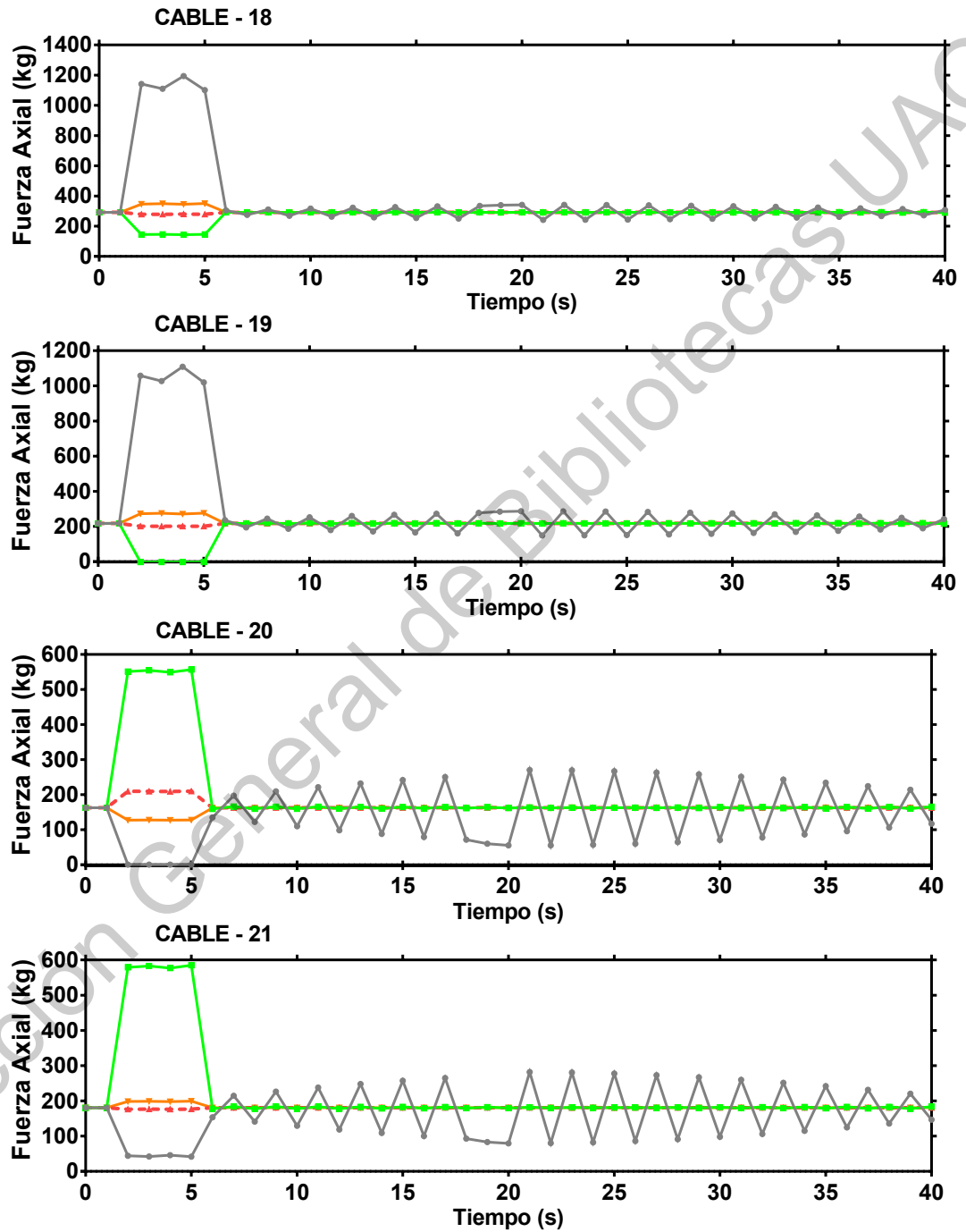


Figura 5.11. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para el caso

1.

De acuerdo a los resultados de la tabla 5-8, al evaluar los efectos generados únicamente por la variación térmica  $\Delta T = +16^{\circ}\text{C}$ , del caso 2, en los elementos del grupo A se aprecia un incremento desde 130 kg hasta 310 kg (de 28% a 66%), donde el cable 6 adquiere una tensión de 782 kg. En el grupo B, la variación es desde 182 kg a 320 kg (68% a 85%), siendo el cable 11 el más esforzado, con un valor de 697 kg. El máximo incremento ocurre en el grupo C, desde 225 kg a 398 kg (de 90% hasta 387%); en este grupo, el elemento 15 logra una tensión de 812 kg. Para los cables del grupo D y E, los incrementos de fuerza axial van desde 145 kg hasta 384 kg (88% a 150%), y de 77 kg a 187 kg (103% a 133%).

El equilibrio del sistema genera un estado donde se disminuye la fuerza axial en los elementos de grupo F, en promedio un -96%. De este grupo, el cable 26 permanece con una tensión de 6 kg, y el cable 27 con una tensión de 2 kg, lo cual se considera como una fuerza axial prácticamente nula.

Mediante la inclusión de la acción dinámica del viento en el caso 2, se producen incrementos de fuerza axial en la mayor parte del sistema. Se observa un comportamiento homogéneo entre los elementos de los grupos A, B, E y F; mientras que en los grupos C y D, los elementos muestran incrementos con mayor diferencia. Los rangos de variación en dichos grupos son: grupo A, 316 kg a 491 kg; grupo B, 357 kg a 427 kg; grupo C, 368 kg a 536 kg; grupo D: 525 kg a 851 kg; grupo E, 273 kg a 465 kg; y, grupo F: 85 kg a 93 kg.

En esta condición de análisis, el máximo incremento se presenta en el elemento 17 (grupo C), con un valor de 589%, correspondiente a 490 kg. Sin embargo, la máxima fuerza axial se presenta en el elemento 18 (grupo D), de una magnitud de 1143 kg. Además, en los elementos 6, 11 y 12, se produce un cambio de sentido en la dirección del viento predominante; y, en los cables 7, y del 14 al 17, se produce un cambio en la dirección del viento que rige el comportamiento de dichos elementos.

Adicionalmente, dentro de este caso de análisis, se observa las direcciones de viento X y Y, son las únicas que producen incrementos de carga en el cable 26, las cuales se reducen a la tensión originada por la variación térmica de 6 kg. Lo mismo ocurre para el elemento 27, sin embargo, las direcciones de viento que producen el incremento de carga temporal, son Xn y Yn.

El relajamiento total del elemento 26 ocurre cuando el viento actúa en las direcciones Xn, y, en Yn; mientras que, para el cable 27, el relajamiento ocurre cuando el viento actúa en la dirección Y.

De los registros tiempo-historia (figuras 5.12) se observa que la rigidez de los cables en el caso 2, es tal, que las oscilaciones residuales de fuerza axial alrededor de la posición en equilibrio cuando la temperatura ambiental incrementa 16°C, son menores a 5 kg, por lo que se considera que el comportamiento es estable.

En contra parte, al analizar la variación térmica  $\Delta T = -16^\circ\text{C}$ , se observa un comportamiento relativamente homogéneo en el sistema, donde la fuerza axial disminuye desde -54% hasta -83%, en los elementos de los grupos A, B, C, D y E. De manera análoga que en el caso 2, los cables del grupo F, presentan un comportamiento inverso a los demás grupos, ya que la fuerza axial incrementa un 88%, con respecto, a las fuerzas del estado en equilibrio sin variación de temperatura (ver figura 5.12).

Al incorporar los efectos del viento en el caso 3 ( $\Delta T = -16^\circ\text{C}$ ), se muestra que el mayor incremento de fuerza axial se presenta en el grupo D; donde el elemento 18, es el cable que sufre la fuerza axial máxima, alcanzando un valor de 1205 kg, al aplicar la fuerza del viento en la dirección X. En dicha tabla, se muestra que, en el resto de los cables, existen casos de análisis donde la fuerza axial varía de manera positiva, los cuales son de menor magnitud que en el caso 2, pero, la diferencia consiste, en que, en el caso 3 se mantienen las mismas direcciones de viento predominantes que en el caso 1.

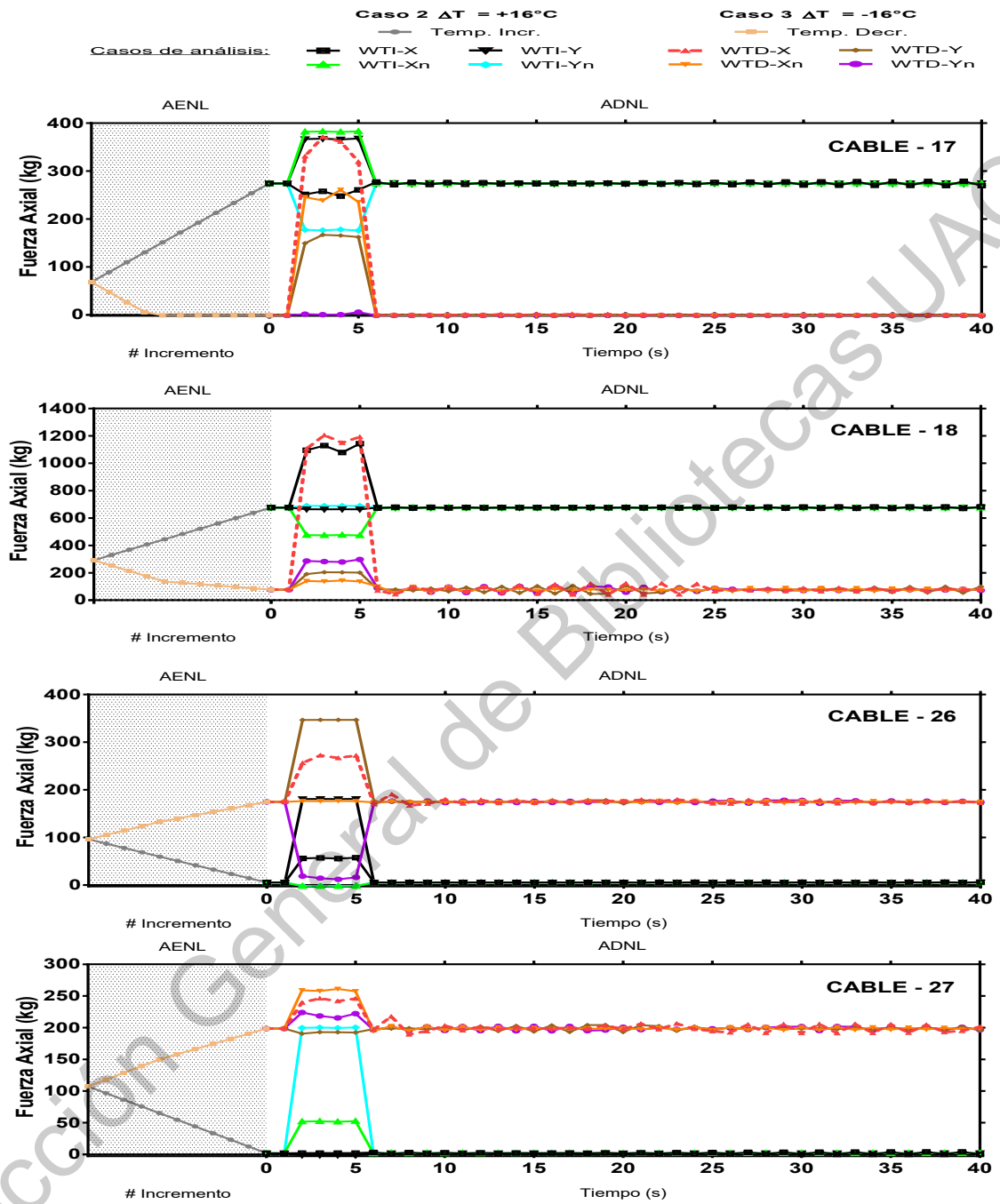


Figura 5.12. Registro tiempo-historia de los elementos cable 17, 18, 26 y 27 para los casos 2 y 3.

Cabe resaltar que en el caso 3, se presentan las máximas disminuciones de fuerza axial en los elementos cable. Con excepción de los elementos 7, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 21 y 23 (ver tabla 5-9), durante el periodo que actúa la ráfaga de viento, en cada uno de los cables, existen lapsos de inactividad, asociados a diferentes direcciones de viento, es decir, que la fuerza axial en dichos elementos es de 0 kg. Los registros tiempo-historia de la figura 5.10, son representativos para todo el sistema, en estas condiciones de carga, y permiten apreciar que las variaciones residuales de fuerza axial, oscilan en un rango de 50 a 100 kg, y tienden a disminuir en el tiempo.

La tensión de los elementos tipo cable tiene una relación directa con la rigidez global del sistema, por lo que, ante una disminución de fuerza axial, la rigidez del sistema será menor. En la tabla 5-9, se muestran los casos y direcciones de viento que originan inactividad de los miembros tipo cable, durante el lapso que la ráfaga actúa sobre el sistema. Se resalta que en los elementos 16, 17, 19, 20, 22 y 26, existen periodos de inactividad, aun cuando no hay variaciones de temperatura. Complementando esta información con los registros tiempo-historia de las figuras 5.9 a 5.12, se observa que, a pesar de dicha inactividad, los elementos recuperan la fuerza axial en estado de equilibrio.

**Tabla 5-9.** Resumen de los decrementos máximos de fuerza axial en los elementos cable, para los casos 1, 2 y 3.

Grupo	N° de elemento	Decremento máximo de fuerza axial		
		Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Caso de análisis
A	6	0	-100%	WTD-Yn
	7	57	-89%	WTD-Xn
	8	0	-100%	WTD-X
	9	125	-75%	WTD-Xn
B	10	0	-100%	WTD-Y / WTD-Xn
	11	92	-76%	WTD-Y
	12	62	-83%	WTD-Yn
	13	0	-100%	WTD-Yn / WTD-Xn
C	14	68	-77%	WTD-Y

	15	127	-69%	WTD-Y
	16	4	-97%	W-Yn / WTD-Yn
	17	0	-100%	W-Yn / WTD-Yn
D	18	138	-53%	WTD-Xn
	19	0	-100%	W-Xn / WTD-Xn
	20	0	-100%	W-X / WTI-X / WTD-X
	21	41	-77%	W-X / WTI-X / WTD-X
E	22	2	-97%	W-X / WTI-X / WTD-X
	23	27	-71%	W-X / WTI-X / WTD-X
	24	0	-100%	WTD-Y
	25	0	-100%	WTD-Y
F	26	0	-100%	W-Yn / WTI-Xn / WTI-Yn
	27	0	-100%	WTI-X / WTI-X

La respuesta estructural del módulo "X-T" de los tres casos de carga analizados, expresada en función de los desplazamientos nodales, se muestra a continuación.

La tabla 5-10 contiene los desplazamientos máximos de cada nodo en las direcciones X, Y y Z, adicionalmente, la dirección del viento causante de los mismos, todo ello, para el caso 1.

**Tabla 5-10.** Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 1 por la acción del viento.

Nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	3.23	-0.19	0.19	W-X
3	3.29	-0.13	-0.14	W-X
4	-	-0.05	-	W-Yn
5	2.68	-0.3	0.63	W-X
6	-	-0.07	-	W-Yn
7	3.92	-0.16	0.76	W-X
8	3.66	-0.16	1	W-X
9	1.59	-0.08	1.19	W-X
10	1.93	-1.35	-0.4	W-X

El nodo 7, es el que sufre el mayor desplazamiento global, de una magnitud de 3.92 cm en la dirección X, vinculado a la dirección del viento X. Se observa que los nodos 2, 3, 5 y 8, presentan un comportamiento similar. La figura 5.13, muestra el registro tiempo-historia del nodo 7.

Del análisis de este registro, se observan desplazamientos de carácter residual, los cuales oscilan en un rango de +/- 0.13 cm alrededor de la posición inicial. El nodo 7, corresponde al vínculo entre el elemento barra 4, con los elementos cable 10, 11, 20 y 22. A diferencia del comportamiento de miembros estructurales, que presentan oscilaciones en un rango medianamente amplio, de +/- 200 kg de fuerza axial, las oscilaciones del nodo 7 alrededor de la posición inicial (+/- 0.13 cm) se consideran de un rango bajo. Cabe resaltar, que, el desplazamiento de este nodo es el mayor de todos, dado que, en los cables 20 y 22, se reduce la fuerza axial a 0 kg, es decir, durante el periodo en que se aplica la carga del viento (desde 2 s hasta 6 s, en los registros tiempo-historia) los cables entran en un estado de inactividad.

### Nodo 7

Casos de análisis:

W-X

W-Xn

W-Y

W-Yn

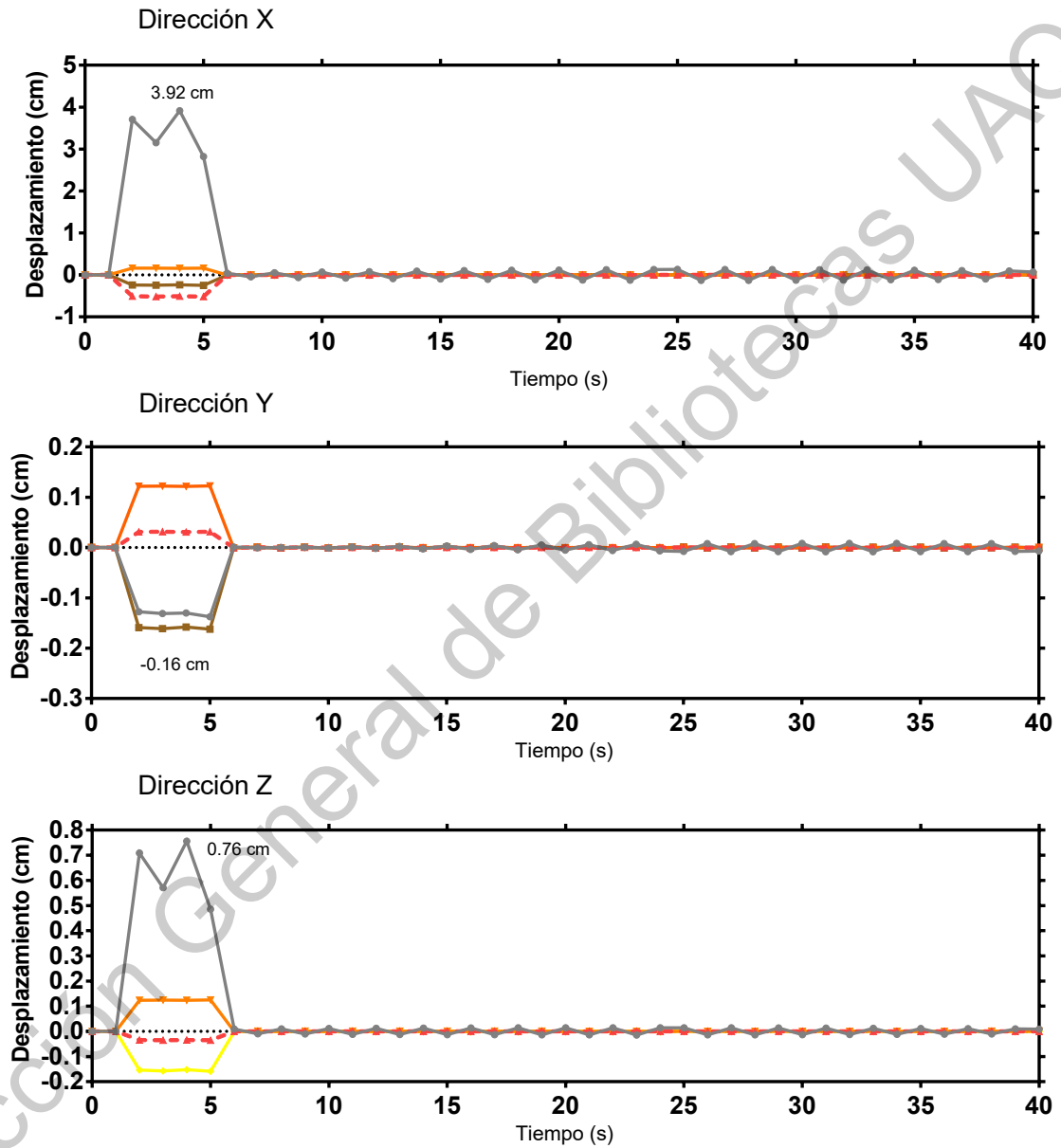


Figura 5.13. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.



Ante los efectos producidos por la variación térmica y la acción del viento del caso 2, en la tabla 5-11, se muestra la respuesta del módulo “X-T” expresada en función de los desplazamientos nodales.

**Tabla 5-11.** Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 2 por la variación térmica y la acción del viento.

Nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	1.25	0.17	0.22	WTI-X
3	1.18	0.08	0.15	WTI-X
4	-	0.18	-	WTI-Y
5	1.07	0.2	0.43	WTI-X
6	-	0.13	-	WTI-Y
7	-0.43	-0.21	0.21	WTI-Xn
8	1.44	0.27	0.49	WTI-X
9	0.59	0.1	0.5	WTI-X
10	0.88	-0.38	0.14	WTI-X

El nodo 8, es el que sufre el mayor desplazamiento global, de una magnitud de 1.44 cm en la dirección X, vinculado a la dirección del viento X. Sin embargo, todos los desplazamientos son menores que en el caso 1. Se observa que en todos los nodos disminuyen la magnitud de los desplazamientos en las direcciones X y en Z. En los nodos 2 a 6, 8 y 9, se invierte el sentido de los desplazamientos en la dirección Y (DY).

A diferencia de los nodos libres, donde la magnitud de los desplazamientos es menor, en los nodos de apoyo 4 y 6, se aprecia una amplificación de los desplazamientos en la dirección libre (DY), únicamente durante el periodo de aplicación de la carga de viento.

En la tabla 5-12, se incluyen los desplazamientos nodales asociados al caso 3.

En primera instancia, se denota, que, los mayores desplazamientos del sistema se generan en este caso, lo cual se asocia a la disminución de la rigidez global. El nodo 7 presenta el máximo desplazamiento registrado, de 6.74 cm en la dirección X, inducido por fuerzas de viento aplicadas en la dirección X.

A diferencia de los casos 1 y 2, en el caso 3, se observan desplazamientos mayores en las direcciones Y y Z. Los cuales son de -2.46 cm en el nodo 10 (DY) y de 1.96 cm para el nodo 9 (DZ).

Adicionalmente, de la tabla 5-12, se observa que las direcciones de viento dominantes del caso 3, son iguales a las del caso 1. Los nodos libres se rigen por la dirección de viento X, mientras que los nodos de apoyo por la dirección Yn.

En relación a los nodos de apoyo 4 y 6, se obtuvieron desplazamientos de -0.34 cm y de -0.26 cm, respectivamente.

**Tabla 5-12.** Desplazamientos nodales máximos asociados al caso 3 por la variación térmica y la acción del viento.

Nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	5.57	-0.53	0.24	WTD-X
3	5.74	-0.19	-0.35	WTD-X
4	-	-0.34	-	WTD-Yn
5	4.68	-1.07	0.93	WTD-X
6	-	-0.26	-	WTD-Yn
7	6.74	-0.49	1.25	WTD-X
8	6.23	-0.77	1.62	WTD-X
9	2.75	-0.19	1.96	WTD-X
10	3.17	-2.46	-0.82	WTD-X

Mediante los registros tiempo-historia, de las figuras 5.14 y 5.15, se muestra el comportamiento de los nodos 7 y 8, los cuales son representativos tanto para el caso 2 como para el caso 3.

De la gráfica 5.14, se observa que, ante un incremento de temperatura, los desplazamientos del nodo 7 se restringen a un rango de 0.43 cm en la dirección X, mientras que en las direcciones Y y Z, se acotan a un rango de +/- 0.21 cm; con oscilaciones residuales alrededor de la posición en equilibrio menores a 0.01 cm.

En contra parte, cuando la temperatura disminuye, el nodo 7 presenta el máximo desplazamiento registrado en la dirección X, de 6.74 cm. Así mismo, el rango de las oscilaciones residuales, alrededor de la posición en equilibrio, se amplifican hasta en 2 cm en la dirección X, y de 0.94 cm en la dirección Z, generadas por las direcciones de viento X y Xn. Este comportamiento se vincula a que, el nodo 7, corresponde al punto de intersección de los elementos 4, 10, 11, 20 y 22, en los cuales se presentan oscilaciones de fuerza axial de +/- 100 kg, lo que genera que las vibraciones nodales tardan un lapso de tiempo mayor en estabilizarse.

El nodo 8 (ver figura 5.15), presenta alta sensibilidad a las variaciones de temperatura, ya que, en este punto, se dan los desplazamientos de mayor magnitud del caso 2, siendo de 1.44 cm en la dirección X. De manera similar, en el caso 3, presenta desplazamientos de 6.23 cm. La diferencia que se aprecia entre ambos casos, radica, en el rango de las oscilaciones residuales, ya que en el caso 2 son de 0.01 cm, de manera homogénea en el sistema, mientras que para el caso 3, son de 2 cm en la dirección X y de 0.91 cm para la dirección Z, comportamiento análogo al del nodo 7.

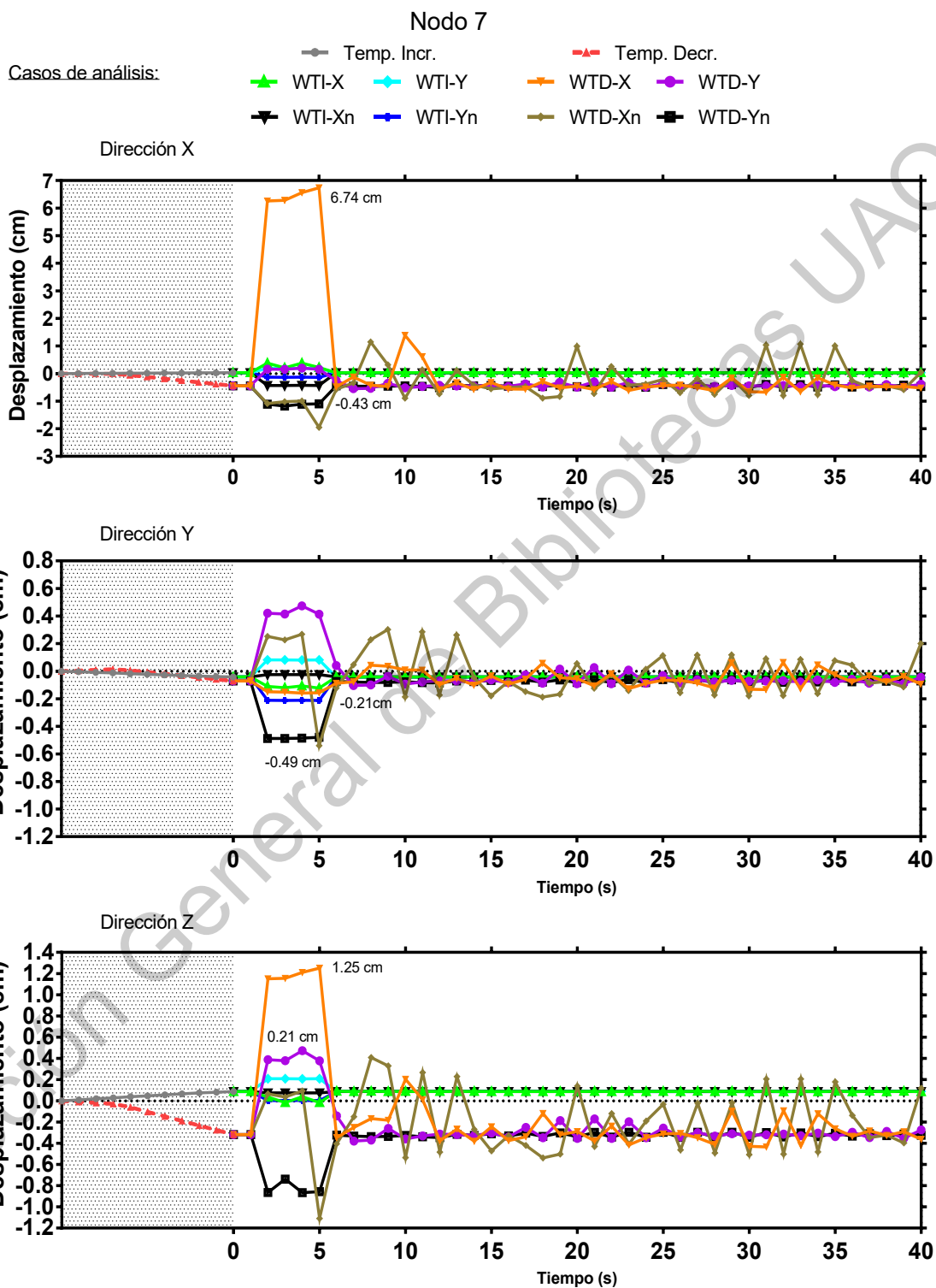


Figura 5.14. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

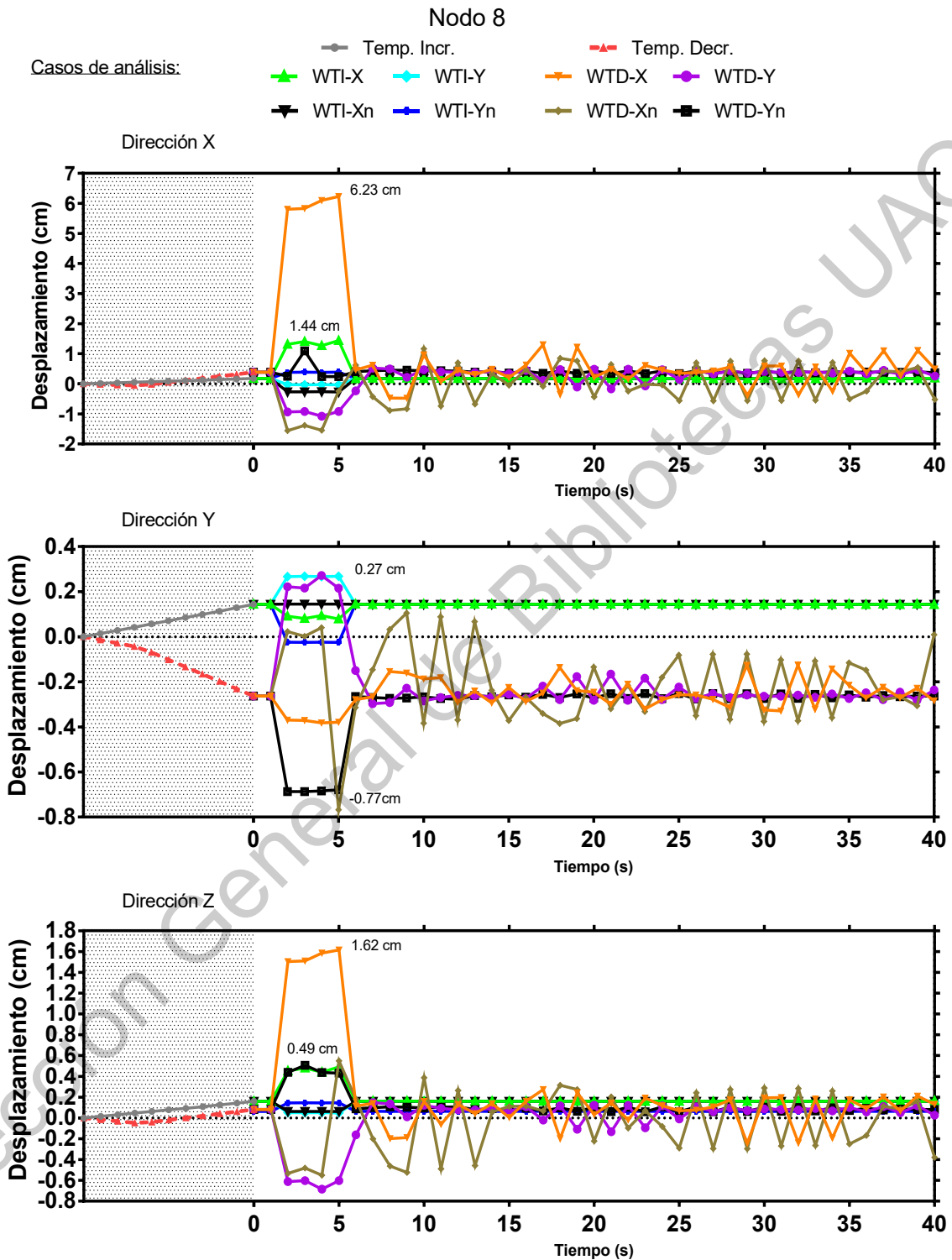


Figura 5.15. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

El diseño a compresión de los elementos barra se realizó considerando el manual de diseño de aluminio (The Aluminum Association, 2010). La resistencia de diseño de dichos elementos se define como la resistencia nominal reducida por un factor de resistencia ( $\phi$ ), cuyo valor es 0.90. Sin embargo, dado que el principio de estructuración de los sistemas *tensegrity*, predominan efectos axiales, se debe asegurar que los elementos mantengan una relación de esbeltez menor a 200, para evitar posibles efectos de pandeo.

Para todos los elementos barra se propone una sección redonda hueca. Las propiedades geométricas se muestran en la tabla 5-13.

**Tabla 5-13.** Secciones transversales de los elementos barra de la ET.

N° de elemento	Diámetro exterior (cm)	Espesor de pared (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Demanda / Capacidad
1	10.16	0.602	18.08	0.78
2	10.16	0.602	18.08	0.72
3	12.70	0.655	24.79	0.48
4	10.16	0.602	18.08	0.76
5	10.16	0.602	18.08	0.39

El diseño a tensión de los elementos cable del módulo "X-T", se llevó a cabo considerando las combinaciones de carga de la normativa ASCE/SEI 19-10 (American Society of Civil Engineers, 2010). La resistencia de diseño de los cables, se define como la resistencia nominal del cable (dato proporcionado por el fabricante) reducida, ya sea por el factor de ajuste  $N_f$  o por el factor deflector  $N_d$ . La resistencia de diseño debe ser 2.2 veces mayor o igual que el esfuerzo generado por la combinación de carga factorizada.

Para los elementos cable es requerida una sección redonda sólida, de diámetro 1.27 cm, con un área de 1.27 cm<sup>2</sup>. En la tabla 5-14, se muestra la relación demanda / capacidad de cada uno de los elementos cable.

**Tabla 5-14.** Relación demanda / capacidad de los elementos cable de la ET.

N° de elemento	Demanda / Capacidad	N° de elemento	Demanda / Capacidad	N° de elemento	Demanda / Capacidad	N° de elemento	Demanda / Capacidad
6	0.48	12	0.40	18	0.35	24	0.27
7	0.43	13	0.45	19	0.40	25	0.25
8	0.44	14	0.34	20	0.35	26	0.30
9	0.44	15	0.31	21	0.31	27	0.22
10	0.44	16	0.31	22	0.20	-	-
11	0.48	17	0.26	23	0.22	-	-

La discusión a resaltar, hasta esta fase del análisis, es la siguiente:

Los modelos de elementos finitos definidos para los tres casos de análisis presentan congruencia con las investigaciones de Ashwear y Eriksson (2015), donde se estudió el comportamiento de estructuras *tensegrity* ante variaciones de temperatura. Así como, con lo reportado por Lazzari et al. (2003), y por Lu et al. (2012), quienes evaluaron la respuesta de sistemas *tensegrity* híbridos, ante cargas producidas por el viento.

Debido a las condiciones frontera de los nodos de apoyo de la estructura, así como por las condiciones asimétricas del ensamble, cada elemento se rige por una dirección de viento en específico.

El incremento de temperatura, propicia aumentos de rigidez globales; sin embargo, pueden generarse disminuciones de fuerza axial en algunos elementos tipo cable, debido a los procesos internos de reequilibrio, característicos en los sistemas *tensegrity*. De manera análoga, los decrementos de temperatura repercuten en la disminución de la rigidez de la estructura, sin embargo, por los procesos de reequilibrio, pueden inducirse incrementos de fuerza axial en algunos elementos.

El aumento de la temperatura, disminuye tanto la magnitud de los desplazamientos, como la magnitud de las vibraciones residuales. Ante

disminuciones de temperatura, se registraron desplazamientos mayores, el rango de las oscilaciones residuales de los nodos es de mayor amplitud y se prolonga el tiempo de estabilización.

La representación de las fuerzas de viento como funciones tipo pulso, mediante modelos dinámicos, permitió conocer la respuesta del sistema, de donde se obtuvieron los elementos mecánicos y los desplazamientos máximos. Además, se observó que el ensamble tiene la capacidad de regresar a su estado en equilibrio, aún en la presencia de grandes desplazamientos nodales, por lo que se determinó, que la estructura propuesta es estable.

Los códigos de construcción y diseño estructural establecen valores límite de desplazamientos permisibles, que no deben ser sobrepasados, con el fin de garantizar la seguridad y el confort de los usuarios, además de evitar el colapso de la estructura. Para los sistemas estructurales que son sometidos ante los efectos del viento se tienen los siguientes valores límite:

Cuando no existan elementos internos que puedan dañarse como consecuencia de las deformaciones,  $\Delta_{perm} = \text{Altura} * 0.005$

Cuando existan elementos internos que puedan dañarse como consecuencia de las deformaciones,  $\Delta_{perm} = \text{Altura} * 0.002$

En los sistemas estructurales convencionales, al tener desplazamientos superiores a los límites establecidos previamente, provocaría la fluencia de los materiales y la formación de articulaciones plásticas en los miembros. Esto implica que se tendrían deformaciones irreversibles que disminuyen la capacidad de carga de la estructura.

Aplicando estos criterios, el  $\Delta_{perm}$  correspondiente al módulo X-T es de 2.73 cm. Sin embargo, la mayoría de las ET, incluyendo el sistema aquí estudiado, tienen la capacidad de soportar grandes deformaciones, mantener un comportamiento



estable y permanecer dentro del límite elástico. Desafortunadamente, los códigos de construcción y de diseño estructural, aún no incluyen en sus alcances, lineamientos relacionados a ET.

Considerando los resultados obtenidos, se sugiere que sean tolerables los grandes desplazamientos, mientras no existan colisiones entre elementos o con sistemas aledaños, o bien, se afecte el espacio destinado a los usuarios. Además, el sistema debe presentar un comportamiento estable en todas las condiciones de carga a las que este sujeto, en las cuales deberá garantizarse que cada uno de los componentes estructurales se encuentre dentro del rango elástico. Adicionalmente se sugiere que los desplazamientos oscilatorios residuales sean menores a la relación Longitud máxima / 200.

## **5.5 Superestructura del puente peatonal**

### **5.5.1 Descripción de la superestructura**

La superestructura del puente peatonal (figura 5.16) se compone por una tridilosa unifilar, la cuál será denominada cómo “triditrabe”. La longitud total es de 28.0 m, el ancho de la triditrabe es de 2.80 m y tiene 1.50 m de altura. Cubriendo un claro de 22.0 m. Se propone un sistema de piso con paneles prefabricados tipo “W”, con un peso de 200 kg/m<sup>2</sup>, el cual, se encontrará montado sobre un sistema portante que permita su instalación. La carga viva actuante, de acuerdo a la normativa (AASHTO, 2009), es de 440 kg/m<sup>2</sup>.

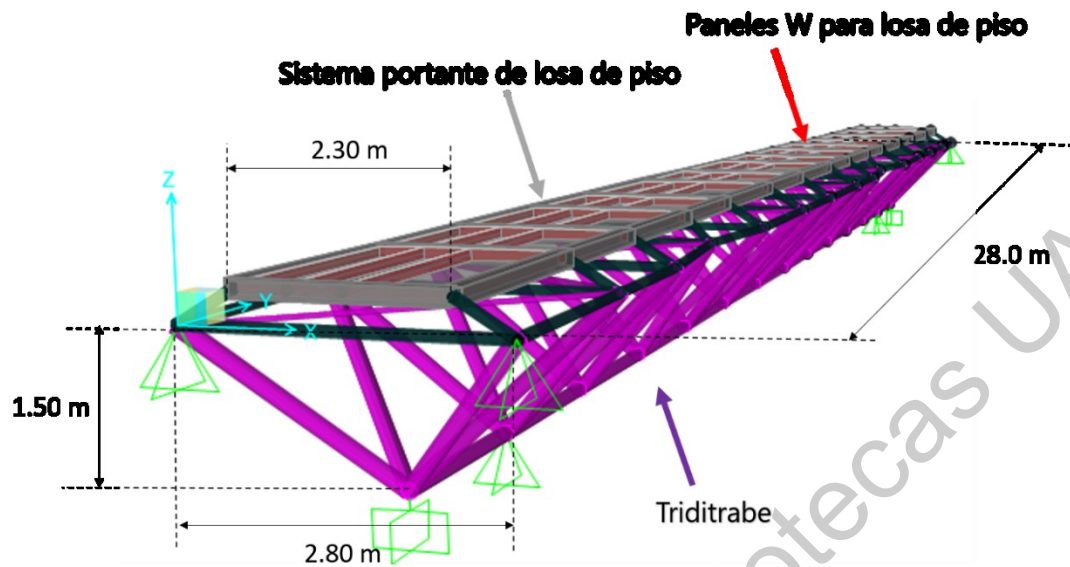


Figura 5.16. Vista en perspectiva y componentes de la SPP.

Se propone la configuración geométrica de la figura 5.17, para la superestructura del puente peatonal. Mediante dicha estructuración, se dispone de un sistema con las características geométricas que permitan acoplar el módulo X-T.

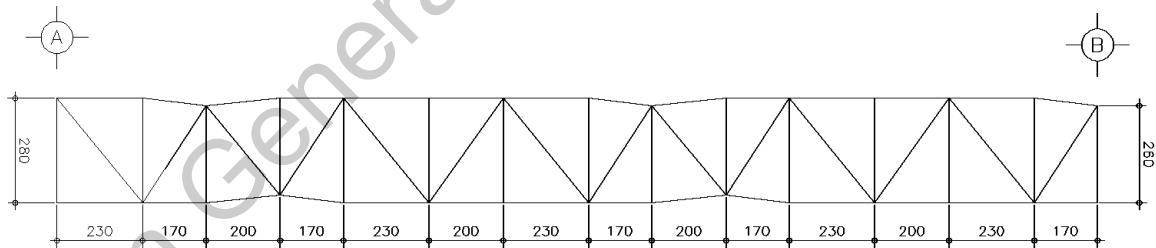


Figura 5.17. Vista en planta y dimensiones de la SPP.

### 5.5.2 Análisis de la superestructura ante efectos gravitacionales y ambientales.

La superestructura del puente peatonal (SPP), fue modelada como un sistema espacial articulado. Además de las cargas gravitacionales descritas en la

sección 5.5.1, se consideraron las variaciones de temperatura de un rango  $\Delta T = \pm 16^\circ\text{C}$ , y las fuerzas del viento de tipo estático. En el apéndice 7.2, se muestra la deducción de las fuerzas del viento, de acuerdo a la normativa SCT, y, en el capítulo 4, etapa 5, se describen las combinaciones de carga consideradas.

El primer aspecto a atender de la SPP, es el comportamiento modal del sistema. La normativa AASHTO (2009), establece que, para los puentes de uso peatonal, se deben elaborar sistemas cuya frecuencia fundamental en el sentido vertical sea superior a los 3 Hz, y en el sentido horizontal, mayor a 1.3 Hz. Las principales frecuencias fundamentales de la SPP propuesta, se muestran en la tabla 5-15. El modo 1 con una frecuencia de 5.49 Hz, y un periodo de 0.182 s, corresponde a la dirección horizontal X, el modo 2 presenta una frecuencia de 8.81 Hz y un periodo de 0.113 s, relativo a la dirección vertical Z, mientras que el modo 11, con frecuencia de 33.49 Hz y periodo de 0.030 s, se asocia a la dirección horizontal Y. De esta manera, se asegura que el sistema tenga menor posibilidad de presentar efectos de resonancia, y se brinda la sensación de seguridad y confort al peatón.

**Tabla 5-15.** Frecuencias y periodos modales de la SPP.

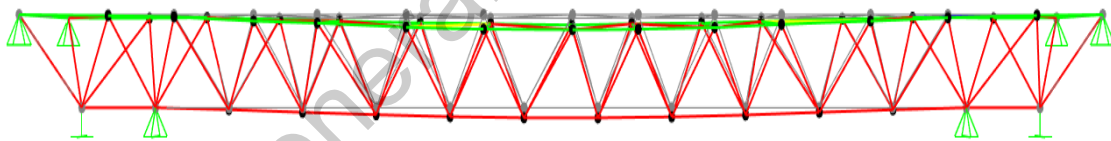
N° de modo	Frecuencia (Hz)	Periodo (s)
1	5.49	0.182
2	8.81	0.113
3	11.21	0.089
4	13.64	0.073
5	17.30	0.058
6	20.71	0.048
11	33.49	0.030

Los desplazamientos de la triditrabe de acuerdo a cada combinación de servicio, se muestran en la tabla 5-16. De acuerdo a la normativa AASHTO (2009), los desplazamientos verticales no deben exceder  $1/360$  de la longitud del claro, equivalente a 6.11 cm, mientras que los horizontales deberán ser menores a  $1/220$

de la longitud del claro, correspondiente a 10 cm. En este caso, el máximo desplazamiento vertical es de -2.34 cm (ver figura 5.18), mientras que, en la dirección horizontal, es de -0.64 cm, valores que se encuentran dentro de los límites permisibles por condiciones de servicio.

**Tabla 5-16.** Desplazamientos máximos de la SPP en condiciones de servicio.

Combinación de Servicio	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)
2	-0.24	-0.24	0.18
3	-0.61	-0.62	-2.17
5 ( $\Delta T = 0^{\circ}\text{C}$ )	-0.28	-0.28	-0.93
5 ( $\Delta T = 16^{\circ}\text{C}$ )	-0.29	-0.31	-0.77
5 ( $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ )	-0.29	-0.31	-1.10
6 ( $\Delta T = 0^{\circ}\text{C}$ )	-0.61	-0.62	-2.17
6 ( $\Delta T = 16^{\circ}\text{C}$ )	-0.62	-0.64	-2.00
6 ( $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ )	-0.60	-0.64	-2.34



**Figura 5.18.** Vista longitudinal deformada de la SPP, desplazamientos verticales amplificados 1:10.

En la tabla 5-17 y en las figuras 5.19 a 5.21, se muestran los elementos mecánicos máximos del sistema. Debido a las condiciones de frontera de los componentes, en los sistemas articulados espaciales, predominan las componentes de fuerza axiales. Los componentes de fuerza cortante y de momento flexionante son originados por la aplicación de las fuerzas de viento sobre la estructura, pero su magnitud es tan baja que pueden ser considerados prácticamente nulos.

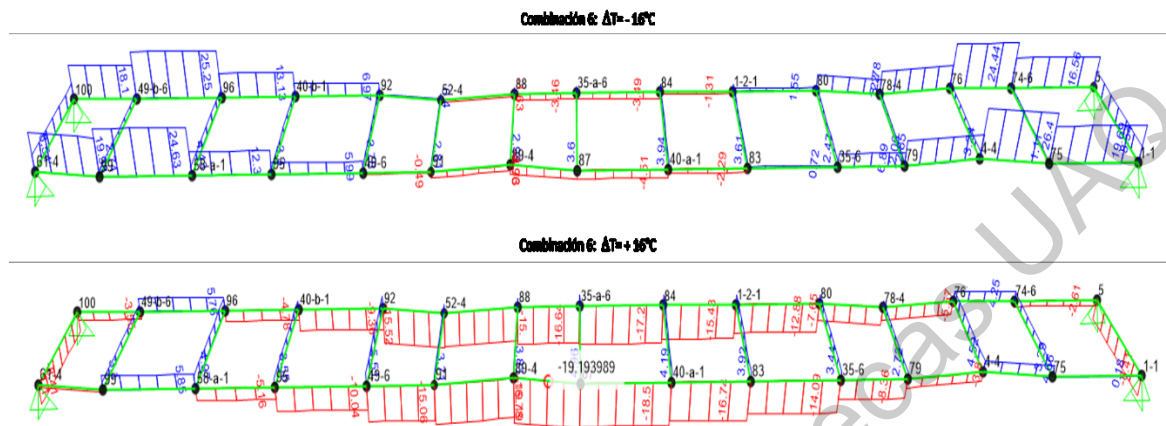
**Tabla 5-17. Elementos mecánicos máximos actuantes en la SPP.**

Tipo de elemento	Fuerza axial (Ton)	Cortante Y (Ton)	Cortante Z (Ton)	Momento Y (Ton-m)	Momento Z (Ton-m)	Localización	Combinación
Cuerda superior	26.40	0.030	0.014	0	0.021	Extremos	6, $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$
	-19.20	-0.030	-0.014	-0.008	0	Centro del claro	6, $\Delta T = +16^{\circ}\text{C}$
Diagonales	13.28	0.03	0.010	0.006	0.023	Extremos	5, $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$
	-15.81	-0.039	-0.01	-0.006	-0.0045	Extremos	6, $\Delta T = +16^{\circ}\text{C}$
Cuerda inferior	33.66	0.034	0.012	0	0.017	Centro del claro	6, $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$
	-42.95	-0.034	-0.012	-0.006	0	Extremos	6, $\Delta T = +16^{\circ}\text{C}$

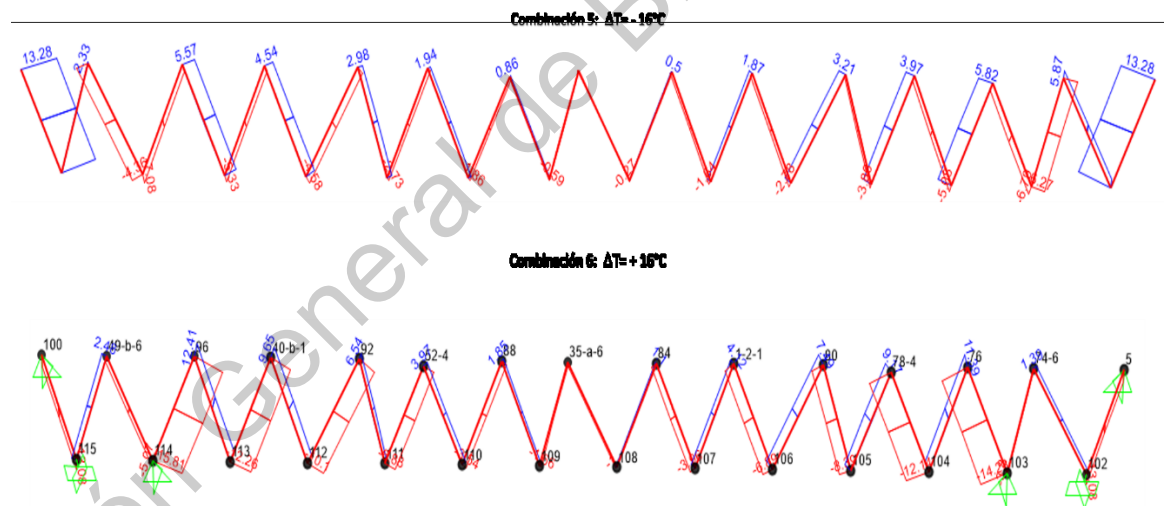
El diseño estructural de la SPP, se llevó a cabo considerando las combinaciones de carga del capítulo 4, etapa 5. Donde los elementos mecánicos de cada elemento, se factorizaron de acuerdo a cada grupo de carga.

Para la cuerda superior se requiere una sección circular hueca 10.16 cm, con espesor de pared de 0.953 cm y un área transversal de 27.55 cm<sup>2</sup> (HSS 4 plg x 0.375 plg). Para la cuerda inferior y las diagonales, se requiere una sección circular hueca, con diámetro de 15.24 cm, espesor de pared de 0.953 cm, y área de la sección transversal de 47.75 cm<sup>2</sup> (HSS 6 plg x 0.375 plg). En la cuerda superior, el elemento más esforzado trabaja a un 55% de su capacidad; mientras que en la cuerda inferior y en las diagonales los elementos trabajan cerca del 65% de su capacidad. Sin embargo, estas secciones transversales son requeridas para controlar los desplazamientos y las deflexiones totales de la SPP.

Para la estructura portante de la losa, se requieren secciones circulares huecas de 10.16 cm de diámetro con 0.953 cm de espesor de pared y área transversal de 27.55 cm<sup>2</sup> (HSS 4 plg x 0.375 plg). Además, de sección cuadradas huecas con lados de 15.24 cm, espesor de pared de 0.953 cm y área transversal de 54.44 cm<sup>2</sup> (PTR 6 plg x 0.375 plg). Estos elementos trabajan a un 90% y a un 30% de su capacidad, respectivamente. Pese a que los elementos PTR 6 plg, trabajan a un 30% de su capacidad, se requiere esta sección por cuestiones constructivas para la instalación del panel W.



**Figura 5.19. Fuerzas axiales máximas en la cuerda superior, combinación 6 para los casos  $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ .**



**Figura 5.20. Fuerzas axiales máximas en las diagonales, combinaciones 5 y 6 para los casos  $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ .**

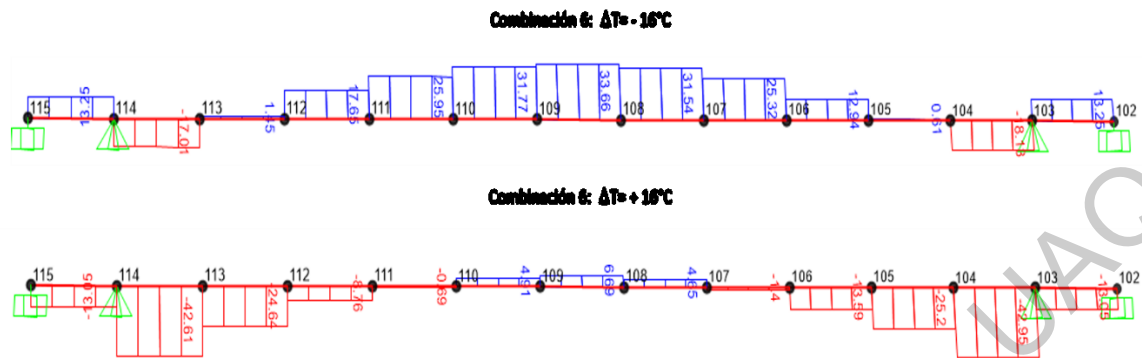


Figura 5.21. Fuerzas axiales máximas en la cuerda inferior, combinación 6 para los casos  $\Delta T = + / - 16^{\circ}\text{C}$ .

## 5.6 Acoplamiento de sistemas

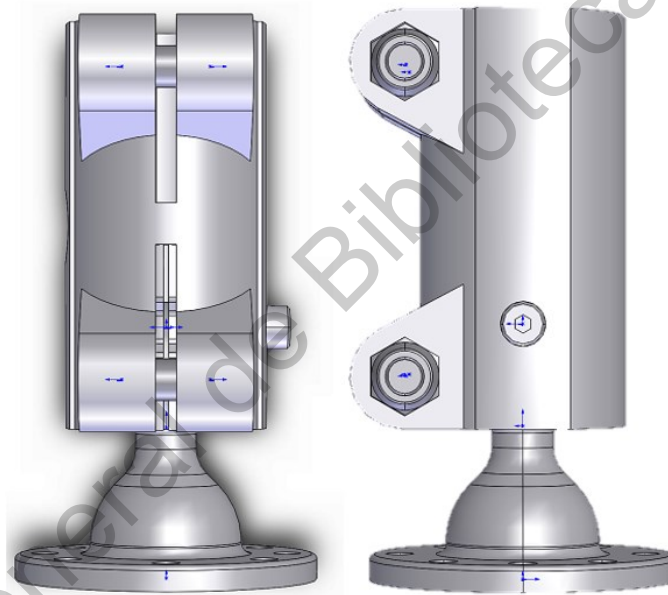
### 5.6.1 Dispositivos de acoplamiento mecánico

Para realizar el acoplamiento del módulo X-T, con la superestructura del puente peatonal (SPP), se determinaron las fuerzas nodales que serán transmitidas del primer sistema al segundo, y con ello diseñar las conexiones de los nodos base, considerando los grados de libertad de cada nodo. La tabla 5-18, muestra las fuerzas máximas afectadas por el factor de seguridad en cada uno de los nodos de apoyo.

Tabla 5-18. Fuerzas máximas en los nodos de apoyo de la ET.

N° de nodo	Fx (kg)	Fy (kg)	Fz (kg)
1	422	645	460
4	369	0	490
6	992	0	690

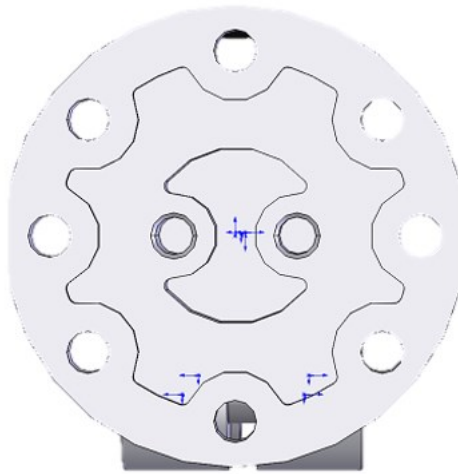
Para generar las condiciones de frontera de los nodos de apoyo, se propone una articulación esférica para brindar la capacidad de rotación. En el caso del nodo 1, este dispositivo tendrá limitados los desplazamientos en las direcciones X, Y y Z, mientras que, para los nodos 4 y 6, únicamente se limitará el movimiento en las direcciones X y Z. En la dirección Y, el nodo podrá deslizarse hasta 2.5 cm en cada sentido. Este dispositivo se muestra en las figuras 5.22 y 5.23.



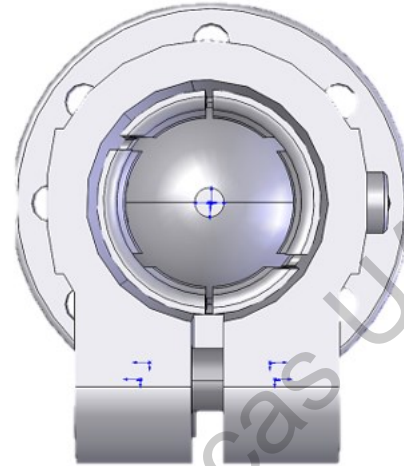
Vistas en elevación de caras laterales

Figura 5.22. Vistas en elevación de las caras laterales de la articulación esférica.





Vista en planta de cara inferior



Vista en planta de cara superior

Figura 5.23. Vistas en planta de las caras inferior y superior de la articulación esférica.

### 5.6.2 Criterio para el acoplamiento de los sistemas

Para garantizar el comportamiento idóneo de ambos sistemas, y evitar la amplificación extraordinaria de los desplazamientos, por el efecto de resonancia, debe ser verificado que las frecuencias naturales de cada sistema, sean diferentes entre sí. De manera tal, que la relación entre la frecuencia de la vibración inducida y la natural del sistema, sea diferente de 1. En la tabla 5-19, se muestran las principales frecuencias naturales y periodos de vibración del módulo X-T.

Tabla 5-19. Frecuencias y periodos modales de la ET.

N° de modo	Frecuencia (Hz)	Periodo (s)
1	10.57	0.095
2	10.98	0.091
3	30.71	0.032
4	39.59	0.025
5	49.10	0.020
6	65.23	0.015
10	106.50	0.010

El modo 1 y 2, con frecuencias de 10.57 Hz y 10.98 Hz, corresponden a la dirección horizontal X. El modo 3, cuya frecuencia es de 30.71 Hz, se asocia a la dirección horizontal Y. En la dirección vertical, predomina el modo 10 con una frecuencia de 106.50 Hz.

La relación entre la frecuencia de vibración inducida y la frecuencia natural del sistema, debidas al acoplamiento de los sistemas, para la dirección X es de 1.92, para la dirección Y es de 1.10, y para la dirección Z es de 12.08. De esta manera, se aminora la presencia de los efectos de resonancia, originados por el ensamble de los sistemas.

Como resultado del acoplamiento de ambos sistemas, se genera el sistema híbrido de las figuras 5.24 a 5.26.

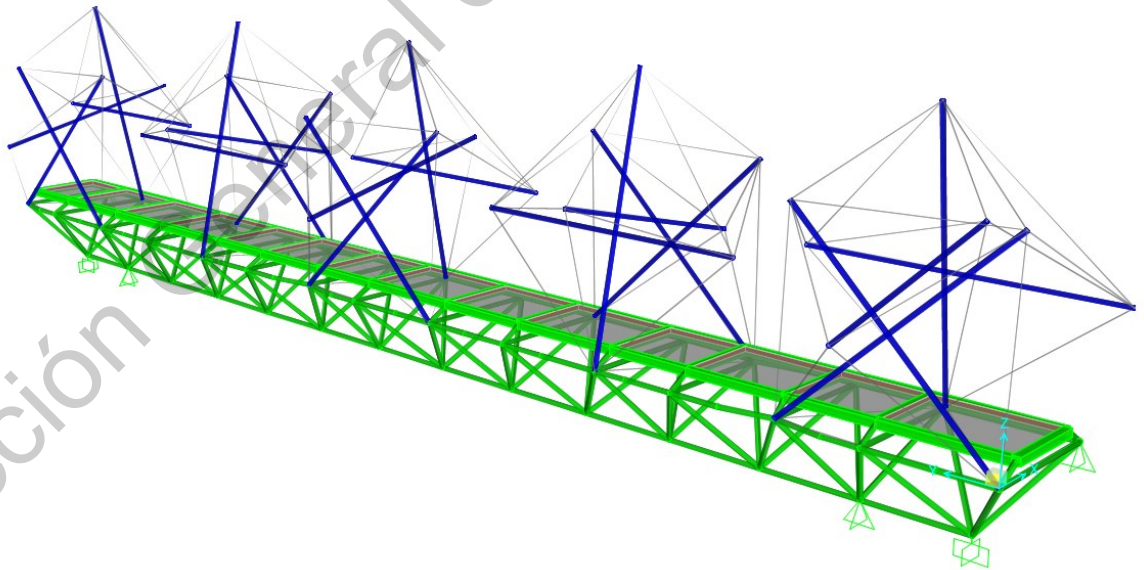


Figura 5.24. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos *tensegrity* sobre la SPP, vista en perspectiva.

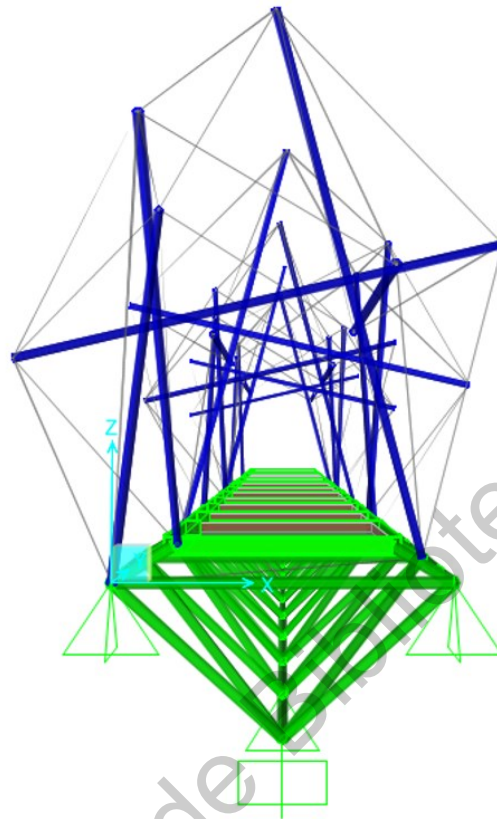


Figura 5.25. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos *tensegrity* sobre la SPP, vista transversal.

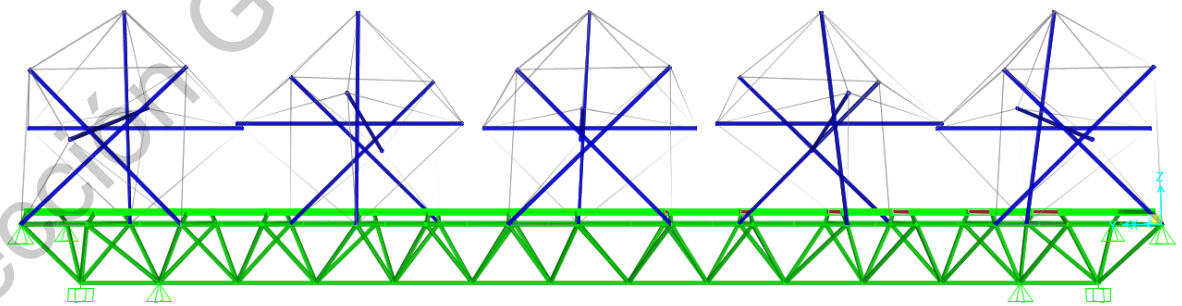


Figura 5.26. Esquema estructural del acoplamiento de los módulos *tensegrity* sobre la SPP, vista longitudinal.

### 5.6.3 Efectos del acoplamiento.

En primera instancia, se transmitieron las reacciones de los nodos de apoyo del módulo X-T, como fuerzas puntuales en la SPP. La fuerza máxima en la dirección X es de 708 kg transmitida por el nodo 6. El nodo 1 transmite la mayor fuerza en la dirección Y, de 460 kg, y, en la dirección Z, el nodo 6 transmite una fuerza de -492 kg.

Los efectos transmitidos a la SPP producen incrementos en la magnitud de los desplazamientos del sistema, ya que, en la dirección horizontal, se registró un desplazamiento de -0.78 cm, mientras que en la dirección vertical es de -2.47 cm. Sin embargo, la magnitud de estos desplazamientos no sugiere un cambio radical en la SPP, ya que el incremento máximo es de 0.13 cm en la dirección Z.

Con respecto a los elementos mecánicos, en la tabla 5-20, se aprecia que los efectos generados por un incremento de 16°C en la temperatura ambiental sobre los sistemas *tensegrity*, puede aumentar hasta 1180 kg (4%) en la fuerza axial de los elementos de la cuerda superior de la SPP. Además, la acción del viento en la dirección Y sobre los módulos X-T, aunado a un incremento de temperatura, induce un incremento de 360 kg (2%) en las diagonales de la SPP. De manera análoga, al integrar la acción de viento en la dirección X con un incremento o un decremento de temperatura, aplicado en los módulos X-T, puede incrementar hasta 950 kg (2%) en la fuerza axial de los elementos de la cuerda inferior de la SPP.

**Tabla 5-20.** Comparativa de variaciones de la fuerza axial en la SPP al incluir los efectos del módulo X-T.

Tipo de elemento	Fuerza axial SPP (Ton)	Fuerza axial Acoplamiento (Ton)	Variación porcentual	Combinación	Caso
Cuerda superior	26.40	27.58	4%	6	Temp. Incr.
	-19.20	-19.52	2%	6	WTI-Y
Diagonales	13.28	13.28	0%	5	Temp. Decr.
	-15.81	-16.17	2%	6	WTI-Yn
	33.66	34.39	2%	6	WTD-X

Cuerda inferior	-42.95	-43.90	2%	6	WTI-X
-----------------	--------	--------	----	---	-------

Por otro lado, los efectos que la SPP transmite a los módulos X-T, son desplazamientos diferenciales de los nodos de apoyo, los cuales se muestran en las tablas 5-21 y 5-22, y en la figura 5.27. El mayor diferencial de desplazamientos en la dirección X es de 0.978 cm, en la dirección Y es de 0.453 cm, y, en la dirección Z es de -1.39 cm. Este comportamiento es homogéneo en el sistema y de magnitud similar en todas las combinaciones de servicio.

**Tabla 5-21. Desplazamientos máximos de los nodos receptores de la ET.**

N° de nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)
1	0.514	0.092	-1.898
4	0.137	-0.361	-0.883
6	-0.464	-0.147	-0.504

**Tabla 5-22. Desplazamientos diferenciales máximos de los nodos receptores de la ET.**

$\Delta D$	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)
1 a 4	0.378	0.453	-1.015
1 a 6	0.978	0.239	-1.394
4 a 6	0.601	-0.214	-0.379

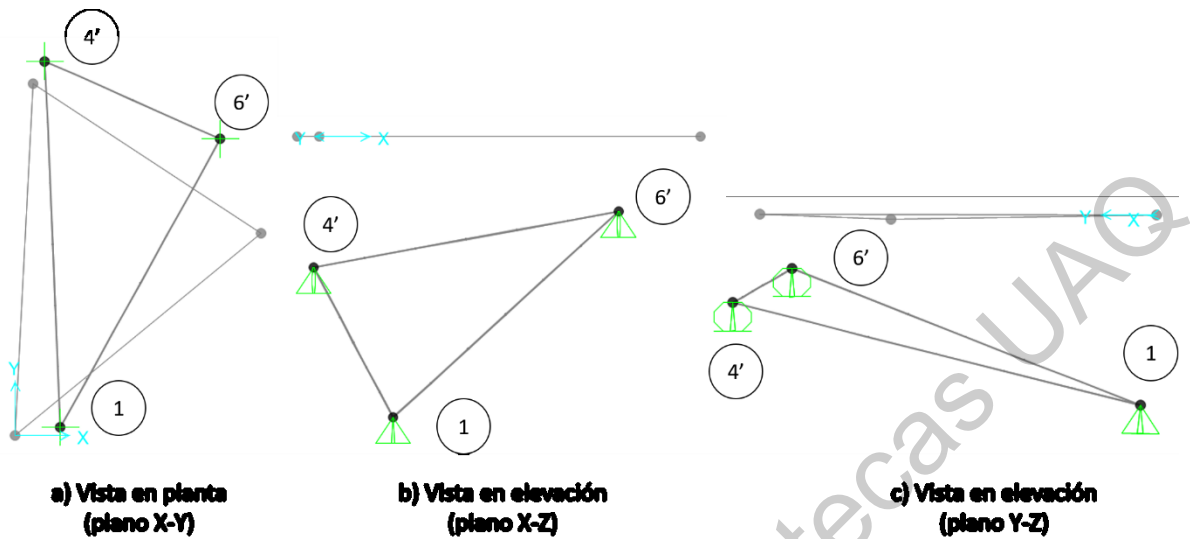


Figura 5.27. Desplazamientos diferenciales máximos de los nodos receptores de la ET, amplificados 1:100.

Al incluir estos desplazamientos diferenciales en los nodos de apoyo del módulo X-T, se inducen fuerzas adicionales en el sistema, que son distribuidas a cada uno de los elementos. Para conocer la manera en que se modifica el comportamiento del módulo X-T, se hará una comparativa entre las fuerzas axiales obtenidas en las secciones 5.3 y 5.4, contra los valores resultantes del acoplamiento de los sistemas.

Al evaluar el comportamiento del módulo X-T ante efectos de gravitacionales (ver sección 5.3), y considerando el acoplamiento de los sistemas, se presenta la distribución de fuerzas mostrada en las tablas 5-23 y 5-24.

Se observa que la compresión actuante sobre los elementos tipo barra (ver tabla 5-23), difiere en un rango desde -4% hasta 0%, donde el decremento máximo es de 31 kg en la barra 1.

**Tabla 5-23. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo efectos gravitacionales, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

N° de elemento	Antes del acoplamiento	Sistema acoplado	
	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
1	1047	1024	-2%
2	834	806	-3%
3	804	773	-4%
4	639	639	0%
5	418	417	0%

Con respecto a los elementos tipo cable (ver tabla 5-24), se aprecia que, en los cables 7 a 25, la diferencia de fuerzas axiales, en promedio, es de -1%, donde la variación máxima es de 19 kg (-4%) en el cable 9. El cable 6 presenta un incremento del 10%, mientras que, en los cables 26 y 27, se da una disminución de -98% y -100%, respectivamente. Esto indica que los cables 26 y 27, entrarán en un estado de inactividad durante los lapsos en que la SPP se deforme hasta los valores límite de la tabla 5-21.

**Tabla 5-24. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo efectos gravitacionales, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

N° de elemento	Antes del acoplamiento	Sistema acoplado	
	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
6	472	517	10%
7	501	486	-3%
8	458	445	-3%
9	505	486	-4%
10	263	262	0%
11	377	377	0%
12	371	369	-1%
13	280	279	0%

14	298	292	-2%
15	414	410	-1%
16	121	124	2%
17	71	71	0%
18	292	290	-1%
19	221	216	-3%
20	164	164	0%
21	182	182	0%
22	75	76	1%
23	94	95	1%
24	149	145	-3%
25	115	112	-3%
26	96	4	-96%
27	107	0	-100%

Al considerar los efectos del viento del caso 1 (ver sección 5.4) sobre el módulo X-T, junto con los desplazamientos diferenciales de los nodos de apoyo, se presenta la distribución de fuerzas axiales muestra en las tablas 5-25 y 5-26. De este análisis, se observa variaciones de -1% a 0% en la compresión que reciben los elementos barra (ver tabla 5-25). Además, se conserva la dirección del viento que gobierna el comportamiento de cada elemento.

**Tabla 5-25.** Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo los efectos del viento, antes y después del acoplamiento con la SPP.

Efectos por viento, caso 1 ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ )					
Antes del acoplamiento			Sistema acoplado		
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
1	1369	W-Yn	1367	0%	W-Yn
2	1044	W-Y	1030	-1%	W-Y
3	2450	W-X	2439	0%	W-X
4	1022	W-Xn	1008	-1%	W-Xn
5	1091	W-X	1080	-1%	W-X



En los elementos tipo cable (tabla 5-26), se presentan diferencias desde -3% hasta 5% en la fuerza axial debido al acoplamiento de los sistemas; con la excepción del cable 26, donde la variación es de -29%. En contraste con los elementos barra, en el cable 7, se presentan un cambio en la dirección dominante del viento.

**Tabla 5-26. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo los efectos del viento, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

Efectos por viento, Caso 1 ( $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$ )					
Antes del acoplamiento			Sistema acoplado		
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
6	662	W-Y	698	5%	W-Y
7	675	W-X	662	-3%	W-Yn
8	624	W-Xn	608	-3%	W-Xn
9	677	W-X	659	-3%	W-X
10	594	W-X	597	0%	W-X
11	653	W-X	654	0%	W-X
12	629	W-X	631	0%	W-X
13	618	W-X	620	0%	W-X
14	566	W-X	560	-1%	W-X
15	868	W-X	859	-1%	W-X
16	500	W-X	496	-1%	W-X
17	365	W-X	362	-1%	W-X
18	1194	W-X	1184	-1%	W-X
19	1109	W-X	1098	-1%	W-X
20	557	W-Xn	555	0%	W-Xn
21	585	W-Xn	583	0%	W-Xn
22	282	W-Xn	281	0%	W-Xn
23	327	W-Xn	327	0%	W-Xn
24	631	W-X	626	-1%	W-X
25	508	W-X	502	-1%	W-X
26	253	W-Y	181	-29%	W-Y
27	201	W-Yn	200	0%	W-Yn

Las diferencias entre las fuerzas axiales en el módulo X-T, antes y al establecer el acoplamiento, cuando se considera un incremento de 16°C en la temperatura ambiental, se muestra en las tablas 5-27 y 5-28.

Ante estas solicitaciones, se observa que los elementos tipo barra presentan diferencias de mayor orden entre el caso acoplado y antes del acoplamiento (tabla 5-27). La barra 3 es el elemento más esforzado del grupo, con una fuerza axial de 2220 kg, equivalente a un incremento de 679 kg. La barra 4 sufre un incremento de la misma magnitud, y la compresión máxima que actúa en este elemento es de 1412 kg. La barra 1, no muestra un cambio considerable, ya que la fuerza axial aumenta 15 kg (1%).

**Tabla 5-27.** Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.

Variación térmica $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ (Caso 2)			
Antes del acoplamiento		Sistema acoplado	
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
1	1663	1678	1%
2	1337	1669	25%
3	1541	2220	44%
4	1164	1412	21%
5	916	1595	74%

En los elementos cable (tabla 5-28), también se exhiben incrementos de fuerza axial. En el cable 15 se da un incremento de 473 kg (58%), lo que origina una carga total de 1285 kg. En los elementos 18 y 19, la tensión incrementa 559 kg (83%) y 502 kg (91%), por lo que estos elementos son sometidos a una fuerza de 1235 kg y 1054 kg. En los cables 6, 7 y 10, no se identifican diferencias considerables, ya que el incremento porcentual en estos elementos va de -5% a 7%.

**Tabla 5-28. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable ante un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

N° de elemento	Variación térmica $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ (Caso 2)		
	Antes del acoplamiento	Sistema acoplado	
	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
6	782	837	7%
7	747	775	4%
8	588	448	-24%
9	771	845	10%
10	445	422	-5%
11	697	813	17%
12	677	779	15%
13	470	420	-11%
14	566	861	52%
15	812	1285	58%
16	346	723	109%
17	346	543	57%
18	676	1235	83%
19	552	1054	91%
20	309	468	51%
21	347	533	54%
22	152	260	71%
23	192	325	69%
24	336	595	77%
25	268	479	79%
26	6	4	-33%
27	2	0	-100%

Al integrar los incrementos de temperatura con la acción del viento, en el sistema acoplado, se obtuvieron los resultados de las tablas 5-29 y 5-30. En relación a los elementos tipo barra (ver tabla 5-29), la barra 5 registra un incremento de 672 kg (61%), trabajando bajo una compresión de 1782 kg. Sin embargo, el elemento más esforzado es la barra 3, donde actúan una fuerza axial de 2736 kg, que es 314

kg (13%) mayor que la obtenida antes de acoplar el sistema. Adicionalmente, en la barra 1, ocurre un cambio en la dirección del viento que rige al elemento.

**Tabla 5-29.** Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.

Efectos por viento + variación térmica $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ (Caso 2)					
Antes del acoplamiento			Sistema acoplado		
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
1	2002	WTI-Yn	2141	7%	WTI-Xn
2	1560	WTI-Y	1883	21%	WTI-Y
3	2422	WTI-X	2736	13%	WTI-X
4	1543	WTI-Xn	1780	15%	WTI-Xn
5	1110	WTI-Xn	1782	61%	WTI-Xn

Estas condiciones de carga, provocan un estado de equilibrio en el que los cables 6, 7, 9, 10 y, 13 (ver tabla 5-30), trabajan bajo una fuerza similar, a la actuante sin considerar el acoplamiento. En los cables 11, 12, 17 y 20 al 25, la fuerza axial presenta incrementos un incremento promedio de 132 kg; mientras que, en el elemento 8, esta diferencia es de -116 kg. Para los cables 14 y 19, dicha fuerza aumenta 260 kg. El mayor incremento ocurre en el cable 15, donde la tensión aumenta 457 kg. El cable 18 es el más esforzado para este caso, ya que trabaja ante una fuerza de 1444 kg. Los elementos 6, 7, 8, 14, 15 y 17 experimentan cambios en la dirección del viento causante de la fuerza máxima en el elemento.

**Tabla 5-30. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo cable bajo la integración de las fuerzas de viento y un incremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

N° de elemento	Efectos por viento + variación térmica $\Delta T=+16^{\circ}\text{C}$ (Caso 2)				
	Antes del acoplamiento		Sistema acoplado		
	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
6	963	WTI-Yn	1018	6%	WTI-Y
7	937	WTI-Y	980	5%	WTI-Yn
8	774	WTI-Xn	658	-15%	WTI-Yn
9	921	WTI-X	979	6%	WTI-X
10	620	WTI-X	587	-5%	WTI-X
11	804	WTI-Xn	911	13%	WTI-Xn
12	779	WTI-Xn	868	11%	WTI-Xn
13	639	WTI-X	594	-7%	WTI-X
14	680	WTI-Yn	935	37%	WTI-Xn
15	950	WTI-Yn	1407	48%	WTI-Xn
16	489	WTI-Y	865	77%	WTI-Y
17	489	WTI-Y	649	33%	WTI-Xn
18	1143	WTI-X	1444	26%	WTI-X
19	1060	WTI-X	1327	25%	WTI-X
20	689	WTI-Xn	847	23%	WTI-Xn
21	734	WTI-Xn	919	25%	WTI-Xn
22	348	WTI-Xn	456	31%	WTI-Xn
23	411	WTI-Xn	544	32%	WTI-Xn
24	614	WTI-X	748	22%	WTI-X
25	485	WTI-X	597	23%	WTI-X
26	181	WTI-Y	181	0%	WTI-Y
27	200	WTI-Yn	201	0%	WTI-Yn

Por otro lado, al inducir un decremento de 16°C en la temperatura ambiental, una vez que el módulo X-T es acoplado con la SPP, se generan las distribuciones de fuerzas de las tablas 5-31 y 5-32.

La fuerza axial de los elementos barra (ver tabla 5-31), resulta menor que aquella generada por los incrementos de temperatura (tabla 5-27). Sin embargo, al compararla contra las fuerzas antes del acoplamiento, se perciben notables diferencias, ya que en los elementos 1, 2, 3 y 5, actúan fuerzas desde 365 kg hasta 497 kg. El aumento de esta magnitud implica variaciones porcentuales desde 17% hasta 197%.

**Tabla 5-31. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

N° de elemento	Variación térmica $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ (Caso 3)		
	Antes del acoplamiento	Sistema acoplado	
	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
1	423	497	17%
2	317	397	25%
3	177	366	107%
4	152	209	38%
5	123	365	197%

Respecto a los elementos tipo cable (tabla 5-32), se observan dos tendencias de manera general. En los cables 7 al 10, 13, 26 y 27, la fuerza axial es menor al compararla contra los valores obtenidos sin el acoplamiento de los sistemas. En los elementos 26 y 27 se observa que entran en un periodo de inactividad al disminuir la fuerza a 4 kg y 0 kg. Los cables restantes, presentan valores superiores respecto al punto de comparación, donde el mayor incremento es de 200 kg en el cable 18.

**Tabla 5-32. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra ante un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

Variación térmica $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ (Caso 3)			
Antes del acoplamiento		Sistema acoplado	
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual
6	116	209	80%
7	191	165	-14%
8	211	126	-40%
9	183	176	-4%
10	54	14	-74%
11	67	73	9%
12	64	65	2%
13	52	2	-96%
14	96	192	100%
15	141	299	112%
16	25	165	560%
17	25	114	356%
18	77	276	258%
19	35	217	520%
20	61	113	85%
21	67	128	91%
22	29	67	131%
23	36	84	133%
24	35	125	257%
25	22	96	336%
26	175	4	-98%
27	199	0	-100%

La inclusión de los efectos del viento con decrementos de temperatura en el acoplamiento del módulo X-T, produce el estado de equilibrio de fuerzas que se describe en las tablas 5-33 y 5-34.

Se observa que para los elementos tipo barra (tabla 5-33), las diferencias de fuerza axial que se presentan al considerar los efectos del acoplamiento son

menores a 117 kg, equivalente a -5% para la barra 3. En esta condición de carga, es modificada la dirección del viento crítica para la barra 4.

**Tabla 5-33.** Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.

Efectos por viento + variación térmica $\Delta T = -16^\circ\text{C}$ (Caso 3)					
Antes del acoplamiento			Sistema acoplado		
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
1	1263	WTD-X	1328	5%	WTD-X
2	969	WTD-X	1034	7%	WTD-X
3	2357	WTD-X	2240	-5%	WTD-X
4	875	WTD-Xn	866	-1%	WTD-Y
5	1101	WTD-X	1197	9%	WTD-X

Para los elementos cables (ver tabla 5-34), se identificó que la diferencia de mayor consideración se da en el cable 26, donde la fuerza axial disminuye 314 kg (-90%). En los elementos del 10 a 13, y en el 27, se muestran diferencias negativas cercanas a 165 kg. Los cables 18 y 19 son los únicos elementos donde se dan incrementos de fuerza axial de 98 kg y 94 kg. En el resto de los elementos las variaciones de fuerza axial son de un orden de +/- 50 kg. En los cables 6, 26 y 27 se identificaron modificaciones en la dirección del viento que producen las tensiones máximas.



**Tabla 5-34. Comparativa de fuerzas axiales de los elementos tipo barra bajo la integración de las fuerzas de viento y un decremento de 16°C, antes y después del acoplamiento con la SPP.**

Efectos por viento + variación térmica $\Delta T = -16^{\circ}\text{C}$ (Caso 3)					
Antes del acoplamiento			Antes del acoplamiento		
N° de elemento	Fuerza axial (kg)	Dirección del viento dominante	Fuerza axial (kg)	Variación Porcentual	Dirección del viento dominante
6	354	WTD-Y	275	-22%	WTD-X
7	640	WTD-X	664	4%	WTD-X
8	359	WTD-Xn	303	-16%	WTD-Xn
9	652	WTD-X	672	3%	WTD-X
10	544	WTD-X	386	-29%	WTD-X
11	581	WTD-X	423	-27%	WTD-X
12	563	WTD-X	399	-29%	WTD-X
13	544	WTD-X	374	-31%	WTD-X
14	600	WTD-X	620	3%	WTD-X
15	896	WTD-X	949	6%	WTD-X
16	502	WTD-X	551	10%	WTD-X
17	502	WTD-X	405	-19%	WTD-X
18	1205	WTD-X	1303	8%	WTD-X
19	1119	WTD-X	1213	8%	WTD-X
20	547	WTD-Xn	539	-1%	WTD-Xn
21	574	WTD-Xn	568	-1%	WTD-Xn
22	283	WTD-Xn	281	-1%	WTD-Xn
23	326	WTD-Xn	323	-1%	WTD-Xn
24	640	WTD-X	672	5%	WTD-X
25	505	WTD-X	535	6%	WTD-X
26	347	WTD-Y	33	-90%	WTD-X
27	261	WTD-Xn	86	-67%	WTD-Yn

Además de las variaciones registradas en la fuerza axial de los componentes del módulo X-T, se identifican diferencias relacionadas a la dirección y la magnitud de los desplazamientos nodales.

La tabla 5-35, muestra los desplazamientos de cada nodo, resultante del acoplamiento del módulo X-T y de los efectos del viento del caso 1.

En primer lugar, se resalta la disminución de los desplazamientos en la dirección X, dicha reducción es de un orden de -0.13 cm. En las direcciones Y y Z se observa un ligero incremento de 0.62 cm y 0.11 cm, respectivamente. Además, se presenta un cambio en la dirección del viento que produce los desplazamientos mayores.

**Tabla 5-35.** Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento del caso 1.

N° de nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	3.1	-0.2	0.18	W-X
3	3.17	-0.13	-0.13	W-X
4	-	-0.4	-	W-Yn
5	2.56	-0.29	0.61	W-X
6	-	-1.47	-	W-Xn
7	3.74	-0.78	0.87	W-X
8	3.51	-0.78	0.97	W-X
9	1.51	-0.08	1.14	W-X
10	1.84	-1.3	-0.38	W-X

Los movimientos nodales por la unión de los dos sistemas, la variación térmica y la fuerza del viento, asociados al caso 2, están contenidos en la tabla 5-36. Para la dirección X, se reportan diferencias menores a -0.33 cm. En los nodos libres sobresalen incrementos de hasta 0.91 cm en la dirección Y, y de 1.05 cm en la dirección Z. En este grupo de nodos (con excepción del nodo 7), se producen cambios en el sentido de la dirección crítica del viento.

**Tabla 5-36.** Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento y la variación térmica del caso 2.

N° de nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	-0.75	0.06	-0.07	WTI-Xn
3	-0.76	-0.08	0.02	WTI-Xn
4	-	-0.05	-	WTI-Yn
5	-0.77	-0.18	0.1	WTI-Xn
6	-	-2.12	-	WTI-Xn
7	0.45	-1.12	1.26	WTI-Xn
8	-0.81	-1.12	-1.17	WTI-Xn
9	-0.43	0.02	-0.29	WTI-Xn
10	-0.54	-0.74	0.14	WTI-Xn

En relación a los resultados correspondientes al acoplamiento de sistemas con las condiciones de carga del caso 3, se presenta la tabla 5-37. La distribución de fuerzas que se da en el sistema bajo estas condiciones, conlleva a la reducción de los desplazamientos de -1.15 cm en promedio. En el nodo 7 se registró una disminución hasta de -1.66 cm. A diferencia de los casos anteriores, no se alteran las direcciones y los sentidos del viento que producen los desplazamientos máximos.

**Tabla 5-37.** Desplazamientos nodales del módulo X-T acoplado a la SPP, ante los efectos del viento y la variación térmica del caso 3.

N° de nodo	DX (cm)	DY (cm)	DZ (cm)	Dirección del viento
2	4.32	-0.35	0.3	WTD-X
3	4.35	-0.1	-0.13	WTD-X
4	-	-0.1	-	WTD-Yn
5	3.67	-0.38	0.9	WTD-X
6	-	-2.11	-	WTD-Yn
7	5.08	-1.29	1.21	WTD-X
8	4.8	-1.29	1.29	WTD-X
9	2.09	-0.06	1.53	WTD-X
10	2.54	1.77	-0.56	WTD-X

De manera particular, se evaluaron los desplazamientos de los nodos de apoyo, ya que presentan un comportamiento diferente al de los nodos libres. Tanto el nodo 4 como el nodo 6, tienen libertad de movimiento en la dirección Y, por ello, del caso 1, se aprecian incrementos de 0.35 cm y de 1.40 cm, respectivamente.

En el caso 2, se decrece hasta en -0.13 cm la magnitud del desplazamiento del nodo 4. Sin embargo, el nodo 6, se presenta la máxima variación de 1.99 cm, que implica un desplazamiento de 2.12 cm. De manera análoga, en el caso 3, en el nodo 4 se da una disminución de -0.24 cm, y el nodo 6, presenta un incremento de 1.85 cm.

Los efectos más drásticos que implica el acoplamiento del módulo X-T con la SPP, se observan en la magnitud del desplazamiento de 2.12 cm del nodo 6, ya que la distancia que recorre este nodo, repercute en el diseño de las distancias libres de deslizamiento para la conexión de los sistemas. Sin embargo, todos los nodos oscilan alrededor de la posición de equilibrio durante el periodo de vibración libre, con una tendencia decreciente, por lo que no se observan modificaciones permanentes de la configuración espacial.

Adicionalmente, la compresión de la barra 3, aumenta hasta 2736 kg, y, la tensión del cable 18 aumenta a 1444 kg, ambas alteraciones en el caso 2, lo que repercute en la etapa del diseño estructural.

Resulta de particular interés, resaltar las siguientes discusiones sobre la metodología propuesta para el acoplamiento de los sistemas.

La SPP, es un sistema que presenta un comportamiento lineal dentro del rango elástico. Por ende, resulta factible emplear el principio de superposición de efectos, para transmitir las cargas generadas por el sistema *tensegrity*. Ello permitió conocer los desplazamientos y los elementos mecánicos desarrollados en la SPP.

Sin embargo, para el módulo X-T, aunque sus componentes permanecen dentro del rango elástico, el sistema es intrínsecamente no lineal y manifiesta

grandes desplazamientos, por lo que el principio de superposición de efectos, no es apto para modelar el acoplamiento.

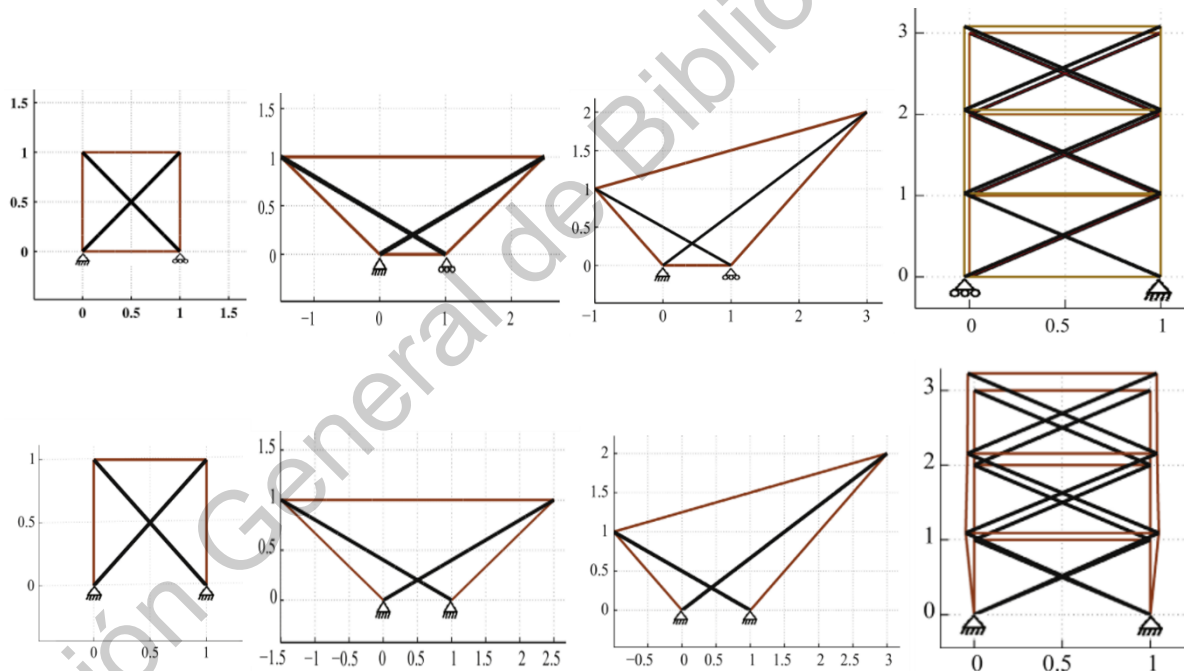
Por ello, el método empleado para determinar con aproximación mayor, las fuerzas axiales y los movimientos nodales, que se producen en el módulo X-T, por causa del acoplamiento, fue mediante modelos dinámicos no lineales, representando las acciones de la SPP, como un movimiento de la base. La limitante que se tiene de implementar estos métodos, es que se desconoce el comportamiento modal del ensamble completo.

Dirección General de Bibliotecas UNO

## 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

De este proyecto de investigación, se resalta como discusión que los resultados obtenidos muestran congruencia y amplían lo reportado por las investigaciones de Ashwear y Eriksson (2017), y con las de Lazzari *et al.*, (2003).

La investigación de Ashwear y Eriksson (2017), se orienta en el estudio de los sistemas tensegrity 2D de la figura 6.1 ante variaciones de temperatura asociadas a decrementos de temperatura de  $45^{\circ}\text{C}$  y a incrementos de  $26^{\circ}\text{C}$ .



**Figura 6.1.** *Sistemas tensegrity 2D, adaptados del módulo X (adaptados de Ashwear y Eriksson, 2017).*

Sus resultados se resumen en la figura 6-2. Se reporta que, de acuerdo a las condiciones de frontera de los nodos de apoyo, y, a la relación entre el coeficiente de expansión térmica de las barras con el de los cables, el comportamiento del

ensamble puede describirse mediante una de las categorías mostradas en la figura 6-2.

	$\alpha_b = \text{Coef. Exp. Barras}$	$\alpha_c = \text{Coef. Exp. Cables}$
CONDICIONES	1) Art. - Libre	2) Art. – Art. 2) Art – Art. Conectados a los apoyos.
1) $\alpha_b = \alpha_c$	No se muestra variación	No se muestra variación
2) $\alpha_b < \alpha_c$	Fuerzas internas (-) si la temperatura (+) Fuerzas internas (+) si la temperatura (-)	Fuerzas internas (+) si la temperatura (+) Fuerzas internas (-) si la temperatura (-)
3) $\alpha_b > \alpha_c$	Fuerzas internas (+) si la temperatura (+) Fuerzas internas (-) si la temperatura (-)	Fuerzas internas (-) si la temperatura (+) Fuerzas internas (+) si la temperatura (-)

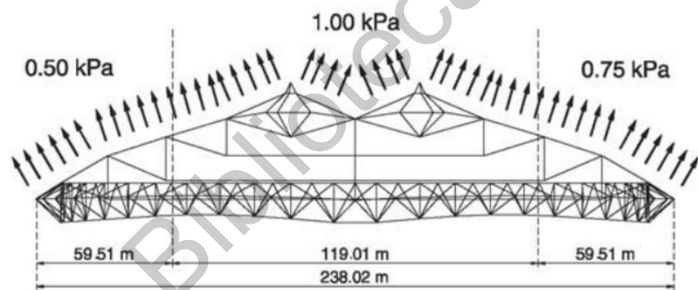
**Figura 6.2.** Comportamientos registrados de sistemas tensegrity 2D ante variaciones térmicas, de acuerdo a las condiciones de frontera de los nodos de apoyo, y a los coeficientes de expansión térmica de las barras y los cables (adaptados de Ashweat y Eriksson, 2017).

Considerando las características del módulo X-T, propuesto en nuestra investigación, donde se tiene un apoyo articulado, dos apoyos con restricciones en las direcciones X y Z, y libertad de movimiento en la dirección Y; y el coeficiente de expansión térmica de las barras es mayor que el de los cables, se observa que el comportamiento del módulo X-T corresponde al caso 3 de la tabla. Sin embargo, se destaca que al realizar el análisis de un sistema 3D, se identificaron rasgos adicionales a los reportados por Ashweat. Ya que, aunque de manera global el sistema se comporta de acuerdo al caso 3, se observa que, ante un incremento de temperatura, la fuerza axial de algunos elementos puede disminuir, mientras que, ante un decremento de temperatura, la fuerza axial de ciertos elementos aumenta.

Este fenómeno ocurre, debido a que, la posición espacial del módulo X-T ante dichas variaciones de temperatura, implica que los nodos que definen los

elementos 26 y 27 se acerquen o se alejen, lo que provoca aumentos o disminución de fuerza axial.

En la investigación de Lazzari *et al.*, (2003) se realizaron análisis cuasi-estáticos de los efectos del viento sobre la cubierta del estadio la plata (figura 3). El viento fue considerado como puntos aleatorios durante un lapso de tiempo de 40 s, en representación de la naturaleza estocástica del viento, con un comportamiento logarítmico.

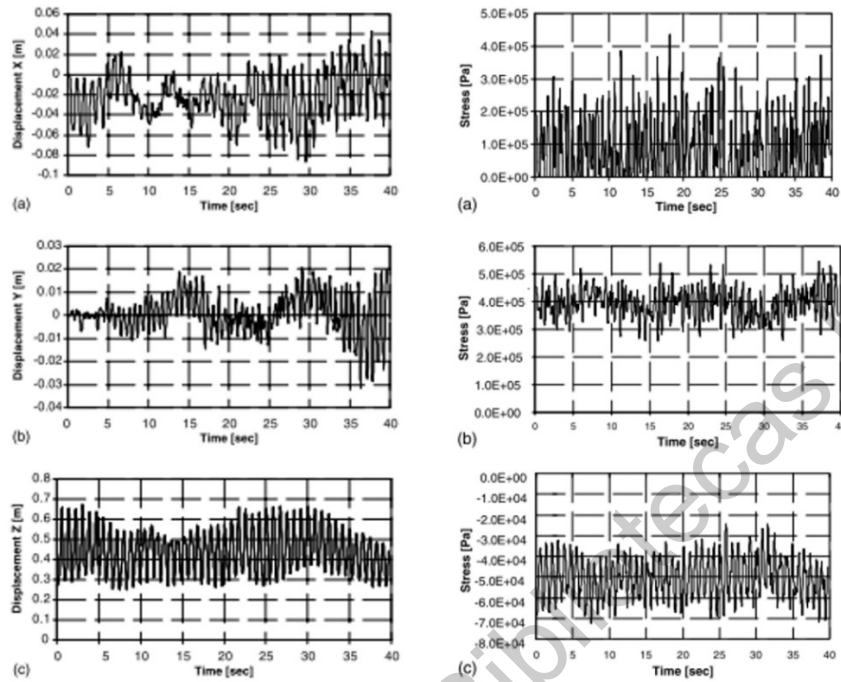


**Figura 6.3.** Cubierta ligera del estadio “La Plata”, Argentina.

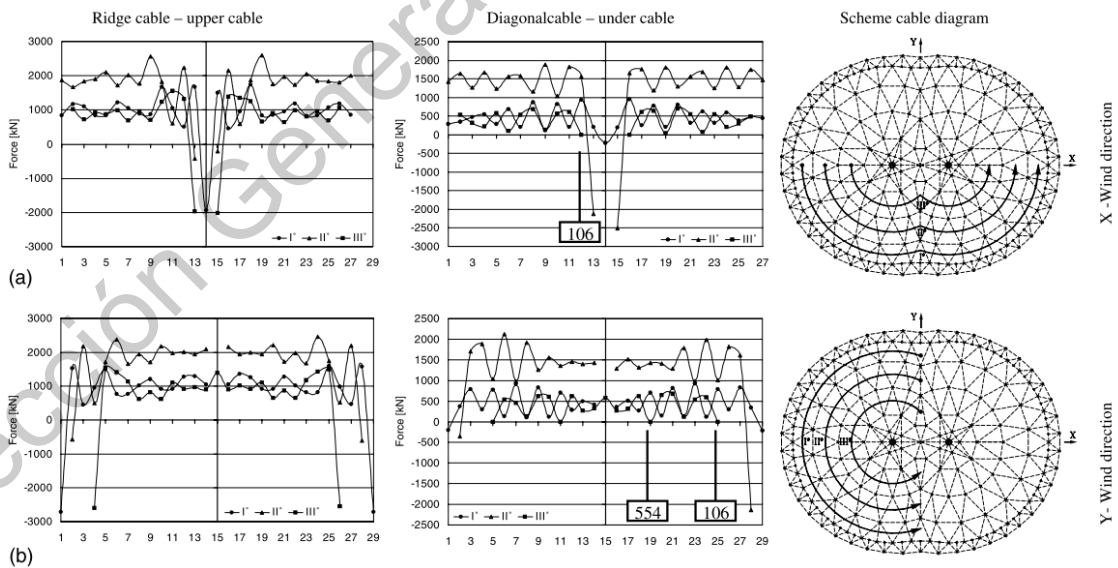
De sus resultados, se resalta que al emplear dicha metodología se logró identificar los desplazamientos nodales y los esfuerzos máximos en las barras y cables (figura 6.4). Además, se identificó que en algunos elementos tipo cable se reducen a un valor nulo las tensiones, ante direcciones de viento particulares (figura 6.5).

Este comportamiento concuerda con los resultados obtenidos la presente investigación, ya que, debido a las condiciones y a la asimetría del ensamble, cada elemento se rige por una dirección de viento en específico. La ventaja que se observa, de emplear modelos dinámicos, es que se tiene la capacidad de evaluar el comportamiento del sistema, en el periodo de vibración libre, con lo que se determina de una manera simple, la estabilidad del ensamble.





**Figura 6.4.** Desplazamientos nodales máximos registrados en las direcciones X (a), Y (b) y Z (c), lado izquierdo. Esfuerzos máximos registrados en los cables 106 (a), 107 (b) y barra 95 (c), lado derecho.



**Figura 6.5.** Diagrama de esfuerzos de los cables superiores e inferiores bajo cargas estáticas de viento en las direcciones x (a) y Y (b).

## 7. CONCLUSIONES

A través de la metodología empleada en este trabajo, los resultados obtenidos y la discusión generada de los mismos, se concluye que la hipótesis planteada se ha cumplido. Es decir, al determinar la respuesta estructural y los elementos mecánicos máximos, originados por la interacción de los efectos ambientales, se ha desarrollado un sistema *tensegrity* estable, que fue acoplado a la superestructura de un puente peatonal.

Se aplicó un método de búsqueda de forma y de fuerzas en equilibrio, basado en la doble descomposición de valores singulares para definir un módulo *tensegrity* que cumpla con restricciones geométricas predefinidas. Este método resulta factible para estructuras *tensegrity* en las que se requiere mantener una posición espacial definida, sin embargo, requiere de múltiples iteraciones para definir un sistema de coordenadas nodales con las que se cumplan las condiciones de equilibrio, simetría y de unilateralidad.

Mediante el análisis estático no lineal se definió la combinación de los grados de libertad adecuados para acoplar el sistema *tensegrity* a la superestructura del puente peatonal. Restringir los grados de libertad en la dirección vertical (dirección Z) y en la dirección transversal (dirección X) reduce los desplazamientos de los nodos de apoyo del módulo X-T, con lo que se preserva el área interna designada al paso peatonal. Además, permite que el sistema distribuya las fuerzas internas de manera uniforme y que el ensamble continúe trabajando de acuerdo a los principios mecánicos de las estructuras *tensegrity*, es decir, que los elementos tipo barra trabajen únicamente a compresión y los cables bajo fuerzas de tensión.

Por medio de análisis estáticos de la superestructura del puente peatonal, y de análisis dinámicos no lineales de la estructura *tensegrity*, se obtuvieron los elementos mecánicos y la respuesta estructural, generados por la integración de las

variaciones en la temperatura ambiental y las fuerzas de viento actuantes en cada sistema.

La metodología empleada para desarrollar el acoplamiento de los módulos *tensegrity* con la superestructura del puente peatonal, permitió conocer los efectos que se originan por la interacción de ambos sistemas. Así como los desplazamientos y elementos mecánicos máximos en cada sistema. Mediante esta metodología se lograron definir las características necesarias para generar los dispositivos de conexión, de acuerdo a las idealizaciones realizadas en los modelos de elementos finitos.

Del análisis dinámico no lineal realizado para el módulo X-T, se resalta la capacidad que presenta el módulo X-T de regresar al estado de equilibrio inicial, una vez concluido el lapso de excitación. De los análisis y las discusiones realizadas, se define que el sistema *tensegrity* generado, muestra un comportamiento estable ante las condiciones de trabajo planteadas.

Al conocer la fuerza axial máxima en cada miembro del módulo, se definieron las secciones geométricas transversales, que aseguran un comportamiento en el rango elástico de cada elemento, y de esta manera se evitar sobrepasar la carga crítica que produciría inestabilidades en el sistema, como efectos de pandeo en los elementos tipo barra; mientras que, en los cables se prevé la fluencia y ruptura de los mismos.

El presente trabajo de investigación, brinda la pauta para desarrollar trabajos futuros, donde, mediante el acoplamiento de sistemas *tensegrity*, se busque la mejora de las características estructurales de sistemas convencionales de construcción, ya que, sistemas *tensegrity* proveen la versatilidad de controlar la rigidez de la estructura, y, además, brindan la capacidad de disipar la energía. El trabajar en el desarrollo de dispositivos con estas funciones, ampliaría el conocimiento que se tiene sobre los sistemas *tensegrity*, además de generar posibles desarrollos tecnológicos.

Otra área de estudio donde se sugiere indagar, corresponde, en identificar las cargas inducidas en este tipo de sistemas durante las etapas constructivas, así como las técnicas y los métodos de construcción idóneos, que brinden precisión y agilicen los procesos de ensamblado de este tipo de sistemas. Con especial atención en dispositivos de conexión que resulten prácticos para la construcción y el mantenimiento en campo necesarios en estas estructuras.

Dirección General de Bibliotecas UFRGS

## 8. Apéndices

### 8.1 Algoritmo del proceso de búsqueda de forma (MATLAB)

```
clear all
close all
clc
%
% DATOS DE ENTRADA:
%
MCON=xlsread('FF_prisma.xlsx',1); %Tabla de conectividad
MCOOR=xlsread('FF_prisma.xlsx',2); %Tabla de coordenadas.
VNL=xlsread('FF_prisma.xlsx',3); %Vector de nodos libres.
nb=size(MCON,1); %Numero de elementos.
nnl=size(VNL,1); %Número de nodos libres.
MCONNECT=zeros(nb,nnl); %Matriz de conectividad.
for i=1:size(MCONNECT,1)
MCONNECT(i,min(MCON(i,2:3)))=1;
MCONNECT(i,max(MCON(i,2:3)))=-1;
end
% %
%ENSAMBLE DE LA MATRIZ EQUILIBRIO MA
%
%Longitud de los elementos:
for i=1:size(MCON,1)
    NIn=MCON(i,2); %Nodo inicial del elemento.
    NFn=MCON(i,3); %Nodo final del elemento.
    rowNI = find( MCOOR(:,1)==NIn); %Posición fila del nodo inicial.
    rowNF = find( MCOOR(:,1)==NFn); %Posición fila del nodo final.
    CNIn=MCOOR(rowNI,2:4); %Coordenadas x y z del nodo inicial.
    CNFn=MCOOR(rowNF,2:4); %Coordenadas x y z del nodo final.
    %Longitud del elemento:
    LONGB(i,1)=(CNFn(1)-CNIn(1))^2+(CNFn(2)-CNIn(2))^2+(CNFn(3)-
CNIn(3))^2)^(1/2);
end

LONGB=diag(LONGB);
%Matriz de Equilibrio (Ecuaciones 3.17-a,b,c):
MA=[(MCONNECT'*diag(MCONNECT*MCOOR(:,2))*inv(LONGB))',(MCONNECT'*diag(MCONEC
T*MCOOR(:,3))*inv(LONGB))',(MCONNECT'*diag(MCONNECT*MCOOR(:,4))*inv(LONGB))
''];
%
%
%MODOS DE PRETENSADO INDEPENDIENTE:
%
rMA=rank(MA); %Rango de la Matriz MA (Ecuación 3.28).
rQ=nb-rMA;%Número de modos independientes de presfuerzo (Ecuación 3.30)
[~,~,V]=svd(MA); %Descomposición en Valores Singulares de la matriz de
equilibrio MA (Ecuación 3.45).
MT=V(:,rMA+1:nb); %Modos de Pretensado Independiente
%
```

```

%
%MODOS DE PRETENSADO INTEGRAL
%
[a,e]=size(MT); %Dimensiones de la matriz MT.
nnl=max(MCON(:,4)); %Cantidad de grupos de simetría.
ME=zeros(a,nnl); %Matriz con los vectores -e del método.
i=1; %Inicialización de variable.
j=1; %Inicialización de variable.

%Ensamblaje de los vectores -e del método:
for k=1:nnl;
    while (MCON(j,4)-k)==0;
        ME(j,i)=-1;
        j=j+1;
    if j==a+1;
        j=1;
    end
    end
    i=i+1;
end

%
MP=[MT ME]; %Matriz MP (Ecuación 3.53).
[~,S,V2] = svd(MP); % Descomposición en Valores Singulares (Ecuación
3.55).
rP=rank(MP); %Rango de la matriz MP.
VCMP=size(MP,2); %Cantidad de vectores columna de la matriz MP.
MPIN=rQ+nnl-rP; %Número de modos de pretensado integral (Ecuación 3.57).
Tr=V2(:,rP+1:VCMP);
MTF=ME*Tr(size(MT,2)+1:VCMP,:); %Modo de pretensado integral óptimo
(Ecuación 3.58).

%Grupos de simetría:
for i=1:size(MTF,1);
    if i==1
        W(i,1)=MTF(i);
    else
        if MTF(i)==MTF(i-1)%<1.01&W1(i)/W1(i-1)>0.99
            W(i,1)=0;
        else W(i,1)=MTF(i);
        end
    end
end
h=find(W==0); %Cálculo de lugares vacios en la matriz.
W(h)=[]; %Coeficientes del modo de pretensado según el grupo de simetría.
%El siguiente if calcula la distribución relativa de pretensado con
%respecto al valor mas grande.
if abs(min(W))>max(W)
    W=W/abs(min(W));
else W=W/max(W);
end

%VECTOR DE FUERZAS EN EQUILIBRIO NORMALIZADO

```

```

W
%
%MODELO GRÁFICO REPRESENTANTIVO 3D:
%
nb=size(MCON,1);
%DIMENSIONES DE LA VENTANA:
dimx=(max(MCOOR(:,2))-min(MCOOR(:,2)))/10;
dimy=(max(MCOOR(:,3))-min(MCOOR(:,3)))/10;
dimz=(max(MCOOR(:,4))-min(MCOOR(:,4)))/10;
dimxmin=min(MCOOR(:,2))-dimx;
dimxmax=max(MCOOR(:,2))+dimx;
dimymin=min(MCOOR(:,3))-dimy;
dimymax=max(MCOOR(:,3))+dimy;
dimzmin=min(MCOOR(:,4))-dimz;
dimzmax=max(MCOOR(:,4))+dimz;
%
%title('','fontsize',20,'linewidth',0.7)
text((dimxmax-0.5*dimx),(dimymax-3*dimy),(dimzmax-
3*dimz),'Tensión','color','b','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);
text((dimxmax-0.5*dimx),(dimymax-5*dimy),(dimzmax-
5*dimz),'Compresión','color','r','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);
%text((xmax-0.5*dx),(ymax-7*dy),(zmax-
7*dz),'','color','k','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);
%
for i=1:nb;
    x=[MCOOR(MCON(i,2),2),MCOOR(MCON(i,3),2)];
    y=[MCOOR(MCON(i,2),3),MCOOR(MCON(i,3),3)];
    z=[MCOOR(MCON(i,2),4),MCOOR(MCON(i,3),4)];
    hold on;
    grid on;
    axis([dimxmin dimxmax dimymin dimymax dimzmin dimzmax]);
    if W(MCON(i,4))<0.000000000000000001 && W(MCON(i,4))>-
0.000000000000000001;
        plot3(x,y,z,'k','linewidth',2);
    elseif W(MCON(i,4))>0;
        g=round(abs(W(MCON(i,4))*10)); %Grosor de línea
        if g==0;
            g=0.5;
        end;
        plot3(x,y,z,'b','linewidth',g);
    elseif W(MCON(i,4))<0 ;
        g=round(abs(W(MCON(i,4))*10)); %Grosor de línea
        if g==0;
            g=0.5;
        end;
        plot3(x,y,z,'r','linewidth',g);
    end
end
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
axis equal

```

### 8.1.1 Tabla de Excel para el algoritmo de Matlab

La hoja 1 del documento de Excel, contiene la tabla de conectividad. La primera columna corresponde al número de elemento. La segunda columna el nodo inicial, y la tercera columna el nodo final. La cuarta columna indica el grupo de simetría del elemento.

1	1	2	1
2	3	4	2
3	5	6	3
4	7	8	4
5	9	10	5
6	1	4	6
7	4	2	7
8	2	3	8
9	3	1	9
10	5	7	10
11	7	6	11
12	6	8	12
13	8	5	13
14	1	9	14
15	9	2	15
16	3	9	16
17	9	4	17
18	5	10	18
19	10	6	19
20	7	10	20
21	10	8	21
22	3	7	22
23	2	8	23
24	2	5	24
25	5	3	25
26	1	6	26
27	6	4	27



La hoja 2 del documento de Excel, contiene la tabla de coordenadas nodales.

1	0.000	0.000	0.000
2	0.000	3.800	3.800
3	0.200	0.000	3.900
4	0.200	4.000	0.000
5	1.336	2.000	5.464
6	2.800	2.300	0.000
7	2.261	-0.829	2.500
8	2.261	4.829	2.500
9	-1.300	2.200	2.000
10	3.613	2.200	3.146

La hoja 3 del documento de Excel, indica los nodos libres de la estructura.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

## 8.2 Análisis de las cargas actuantes del viento (SCT 6.01.004-Viento)

### 8.2.1 Ubicación

Juriquilla, Querétaro, México.

Longitud 100°26'23.04"O, Latitud 20°41'39.67"N, ASNM (m): 1,890

### 8.2.2 Método estático

#### Clasificación de la estructura:

- Según importancia: Tipo A
- Según la respuesta a la acción del viento: Tipo 1V. Rel. Largo/ancho = 8.8

#### Velocidad de diseño

$$V_D = (F_T) (F_\alpha) (V_R)$$

#### **Velocidad regional del viento ( $V_R$ )**

$$V_R = 135 \text{ km/hr, } TR = 200 \text{ años}$$

#### **Factor de topografía local ( $F_T$ )**

$F_T = 1.0$ . Correspondiente a sitio con topografía normal

#### **Factor de exposición ( $F_\alpha$ )**

Factor del tamaño de la estructura ( $T_c$ ) = 0.95

Factor de rugosidad ( $F_{rz}$ )

Altura  $\delta = 455 \text{ m}$

Exponente  $\alpha = 0.177$

Z = Altura del centro de gravedad del área expuesta sobre el nivel del terreno (m).

$$Frz = 1.56 (Z/\delta)^\alpha = 1.56 (10 \text{ m} / 455 \text{ m})^{0.177} = 0.7937$$

$$F\alpha = (F_c) (Frz) = (0.95) (0.7937) = 0.7540$$

$$V_D = (F_T) (F\alpha) (V_R) = (1.0) (0.7540) (135 \text{ km/hr}) = 101.80 \text{ km/hr}$$

### Presión Dinámica de base

$$q_z = 0.049 G V_D^2$$

#### **Factor de corrección por la altura sobre el nivel del mar (G)**

$$hm = 1.890 \text{ km}$$

$$G = (8 + hm) / (8 + 2hm) = 0.501$$

$$q_z = 0.049 (0.501) (101.80)^2 = 254.41 \text{ Pa}$$

### Presión Actuante

$P_z = C_p q_z$ , con  $C_p = 3$ , para armaduras y arcos.

$$\text{Para los grupos de cargas 2 y 5: } P_z = (3) (254.41) = 763.23 \text{ Pa} = 77.83 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{Para los grupos de cargas 3 y 6: } P_z = (0.70) (3) (254.41) = 534.26 \text{ Pa} = 54.48 \text{ kg/m}^2$$

Se añade una fuerza viento sobre la carga viva (VCV), normal al eje longitudinal de la estructura, con una intensidad de 150 kg/m, actuando a 1.80 m sobre la rasante.

$$VCV = (150 \text{ kg/m}) (1.80 \text{ m} + 0.90 \text{ m}) = 405 \text{ kg/m}^2$$

### Viento vertical

$$\text{Para los grupos de cargas 2 y 5: } P_z = (0.8) (254.41) = 203.53 \text{ Pa} = 20.75 \text{ kg/m}^2$$

Para los grupos de cargas 3 y 6:  $P_z = (0.8) (0.7) (254.41) = 142.47 \text{ Pa} = 14.53 \text{ kg/m}^2$

Dirección General de Bibliotecas UAQ

### 8.3 Registros tiempo-historia

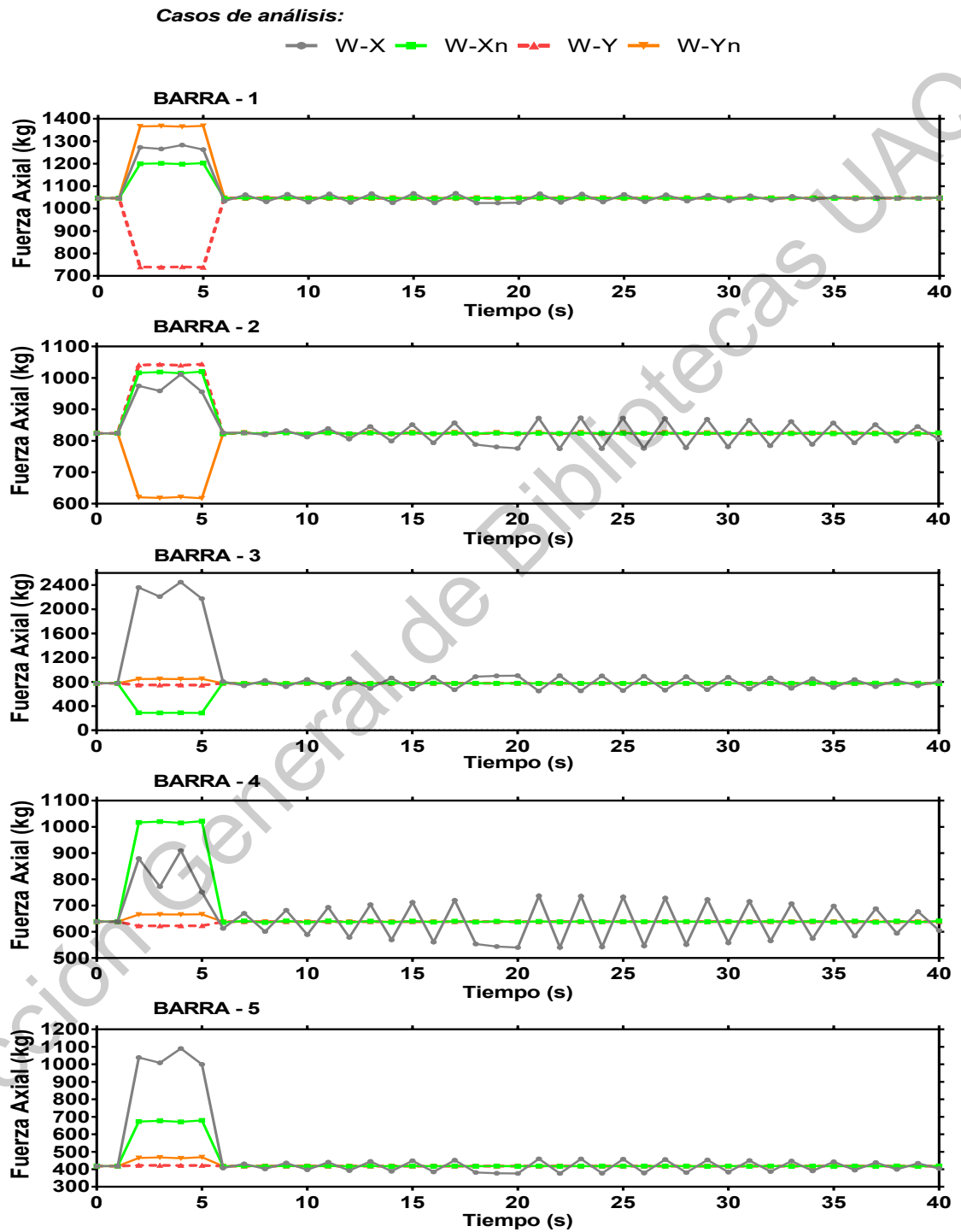


Figura 8.1. Registro tiempo-historia de los elementos barra para el caso 1.

Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

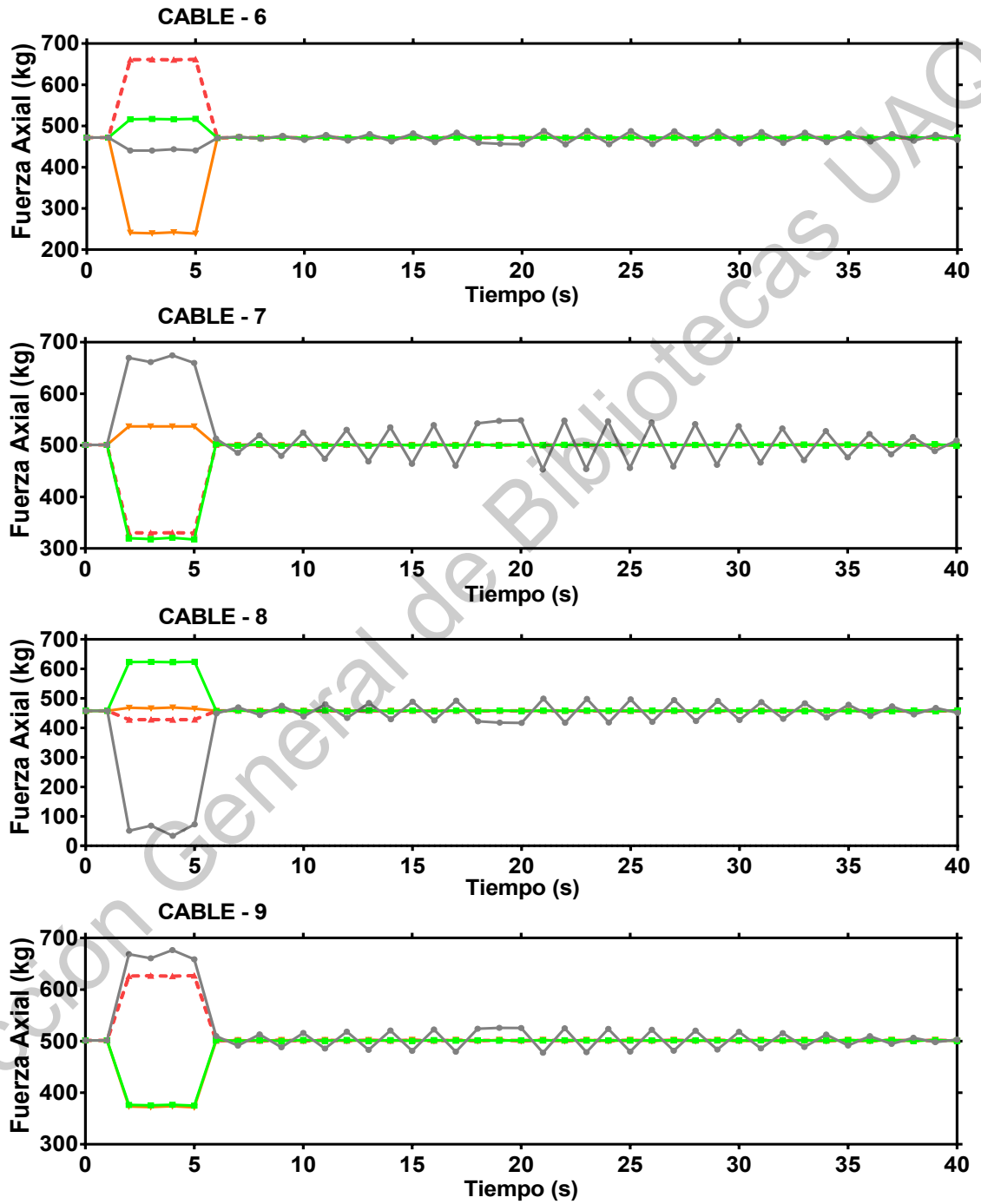


Figura 8.2. Registro tiempo-historia de los elementos cable 6 a 9 (grupo A), para el caso 1.

Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

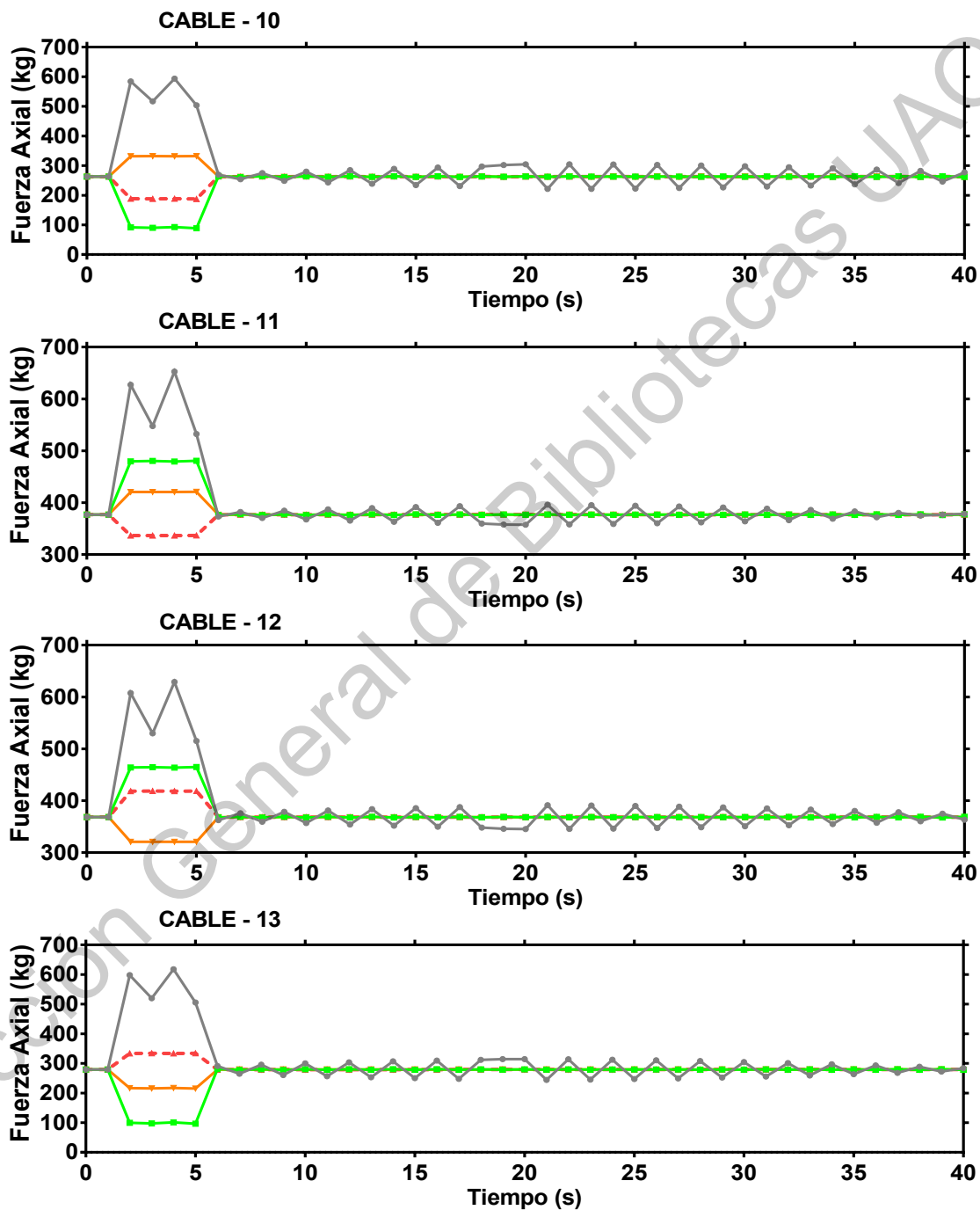


Figura 8.3. Registro tiempo-historia de los elementos cable 10 a 13 (grupo B), para el caso 1.

Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

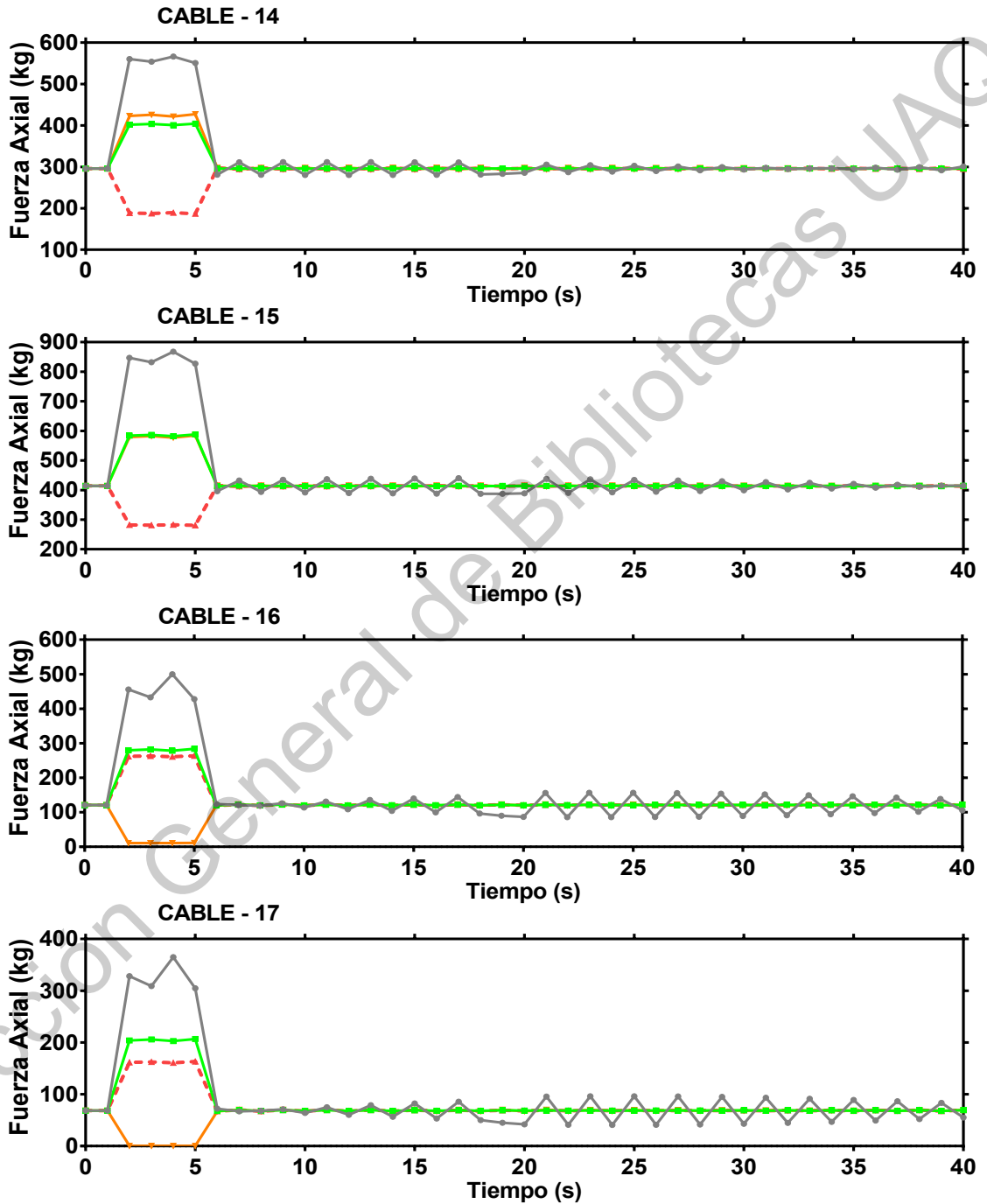


Figura 8.4. Registro tiempo-historia de los elementos cable 14 a 17 (grupo C), para el caso 1.



Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

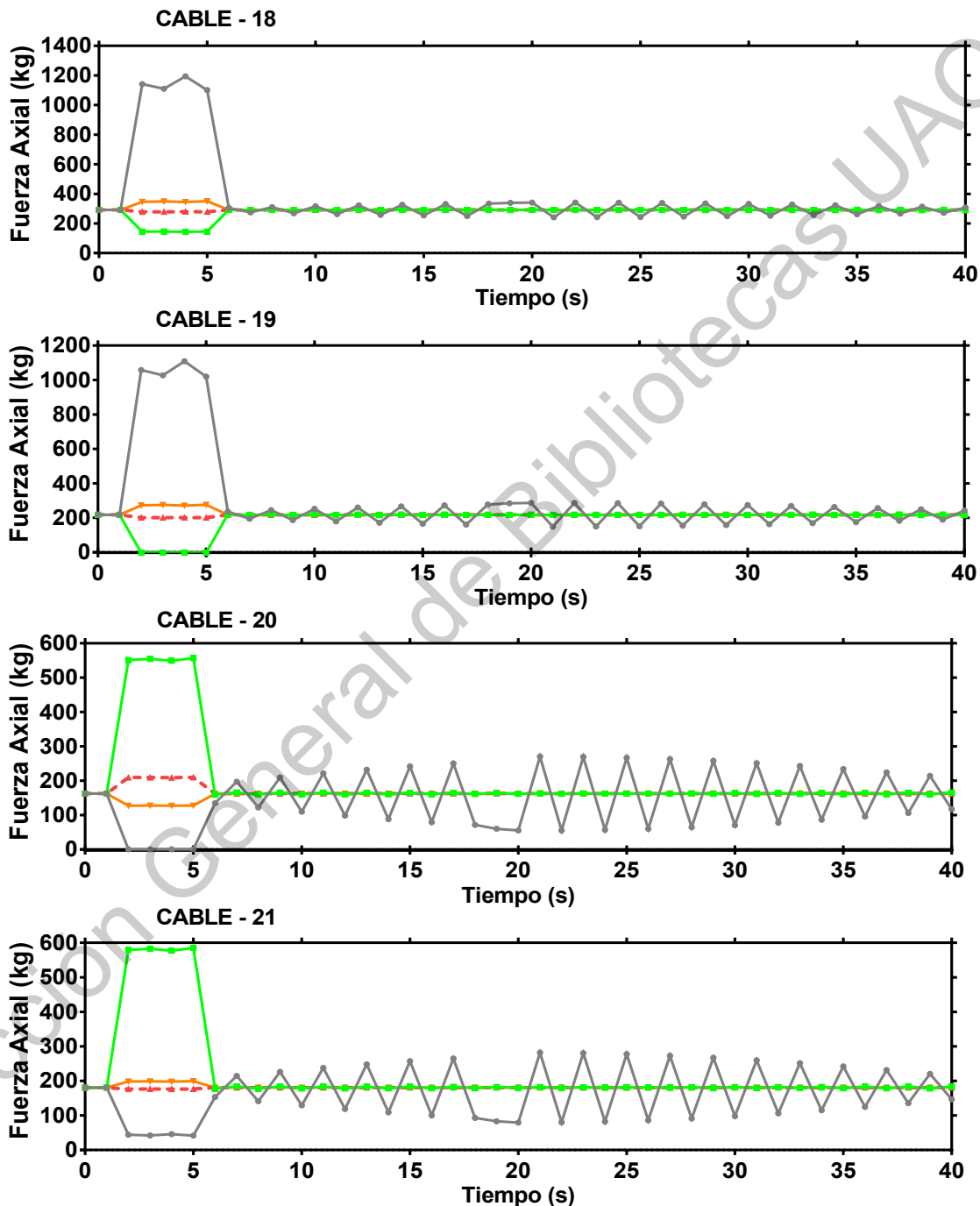


Figura 8.5. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para el caso 1.

Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

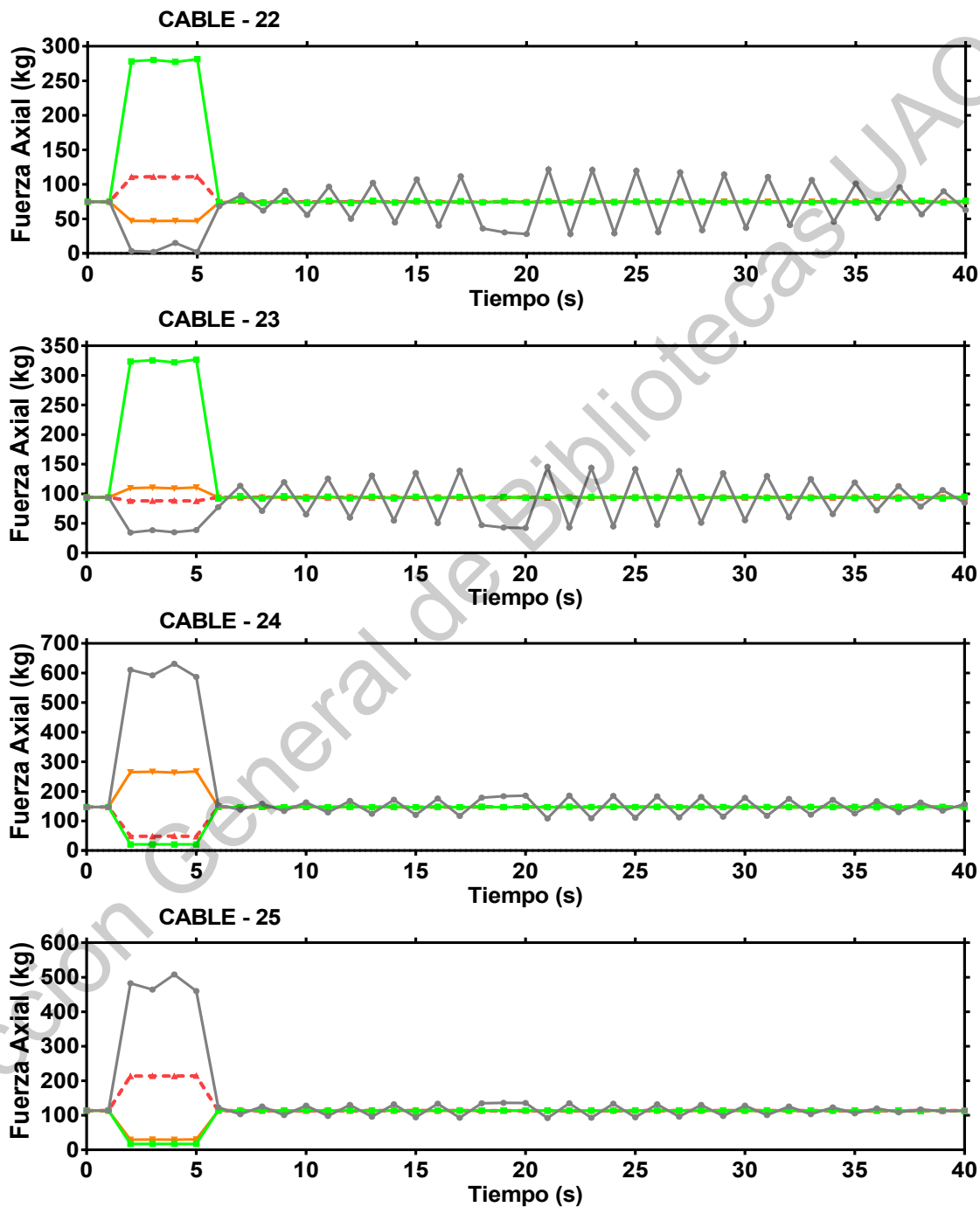


Figura 8.6. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para el caso 1.

Casos de análisis:

W-X W-Xn W-Y W-Yn

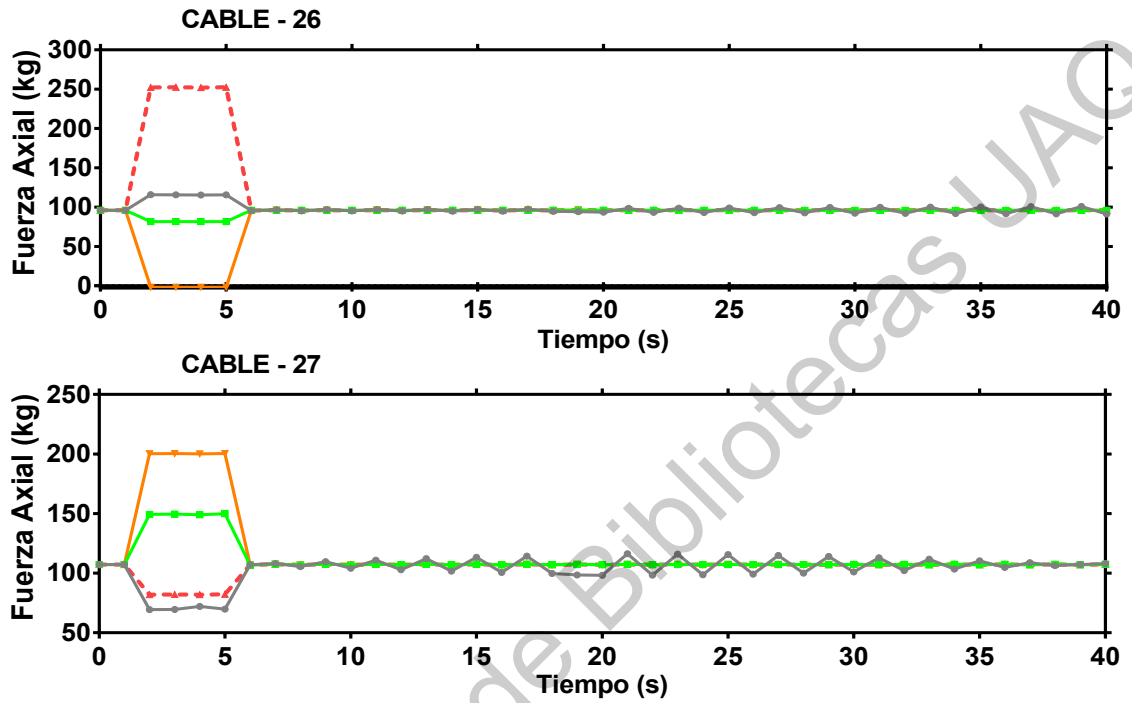


Figura 8.7. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para el caso 1.

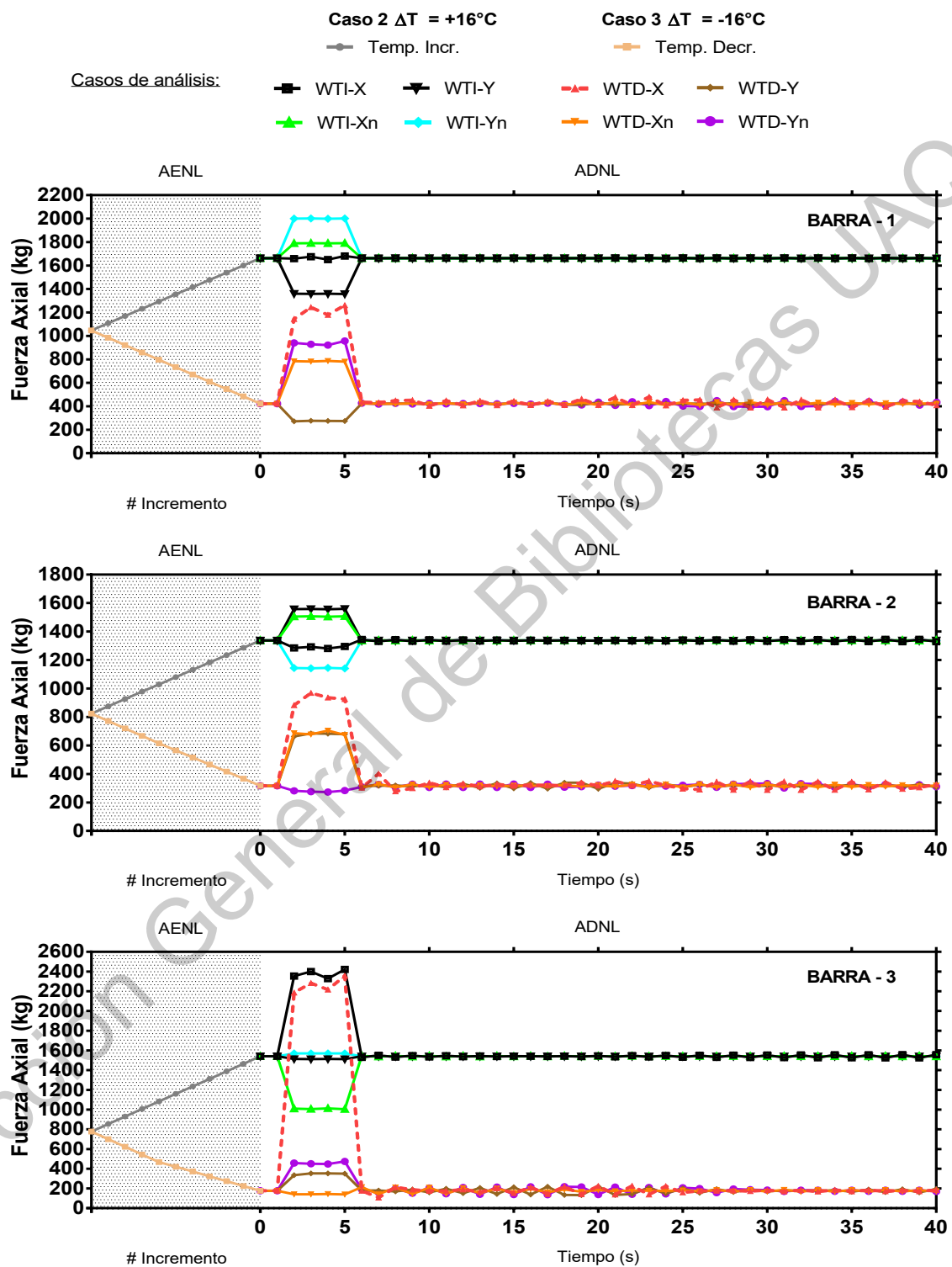


Figura 8.8. Registro tiempo-historia de los elementos barra 1, 2 y 3 para los casos 2 y 3.

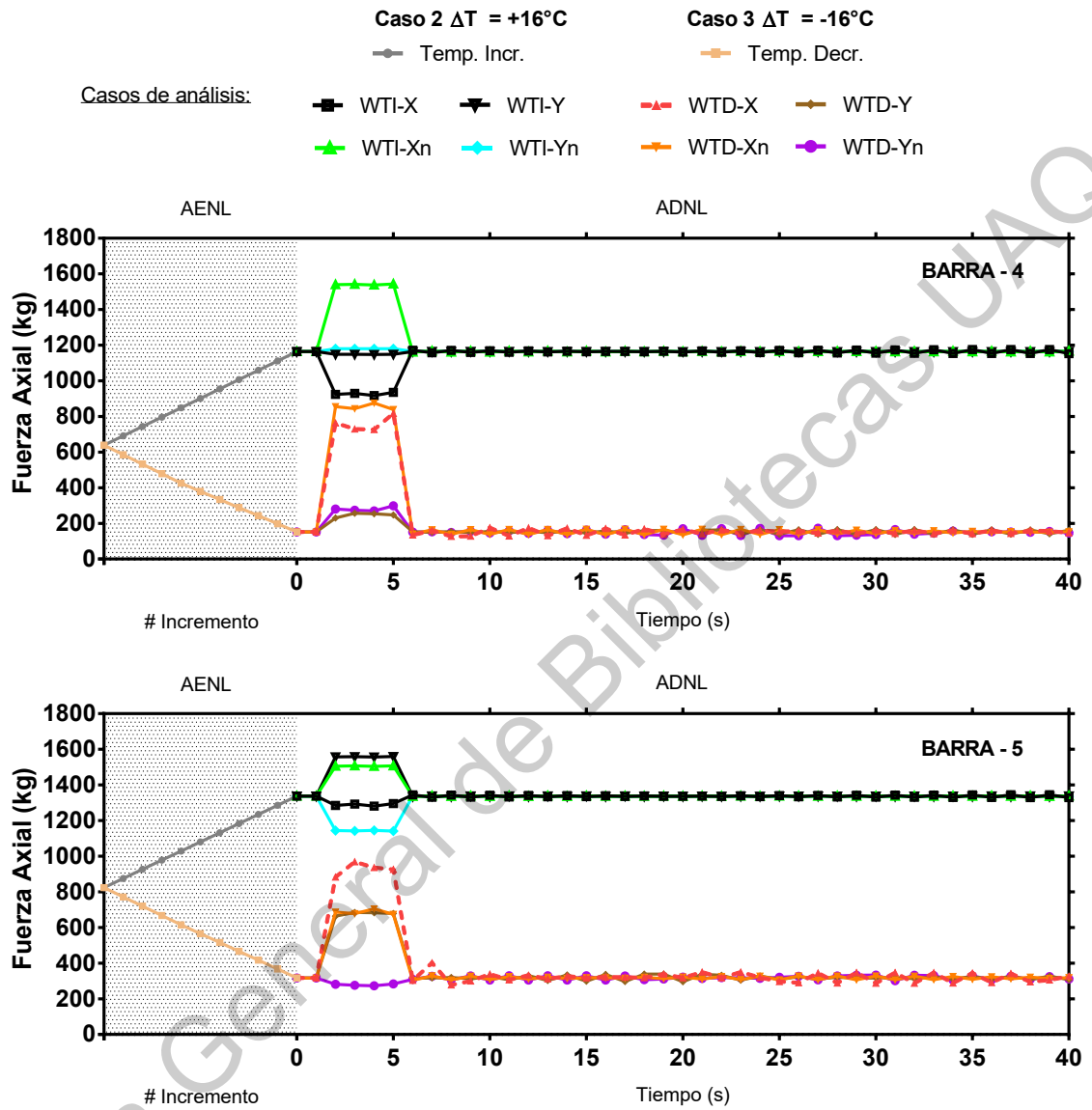


Figura 8.9. Registro tiempo-historia de los elementos barra 4 y 5, para los casos 2 y 3.

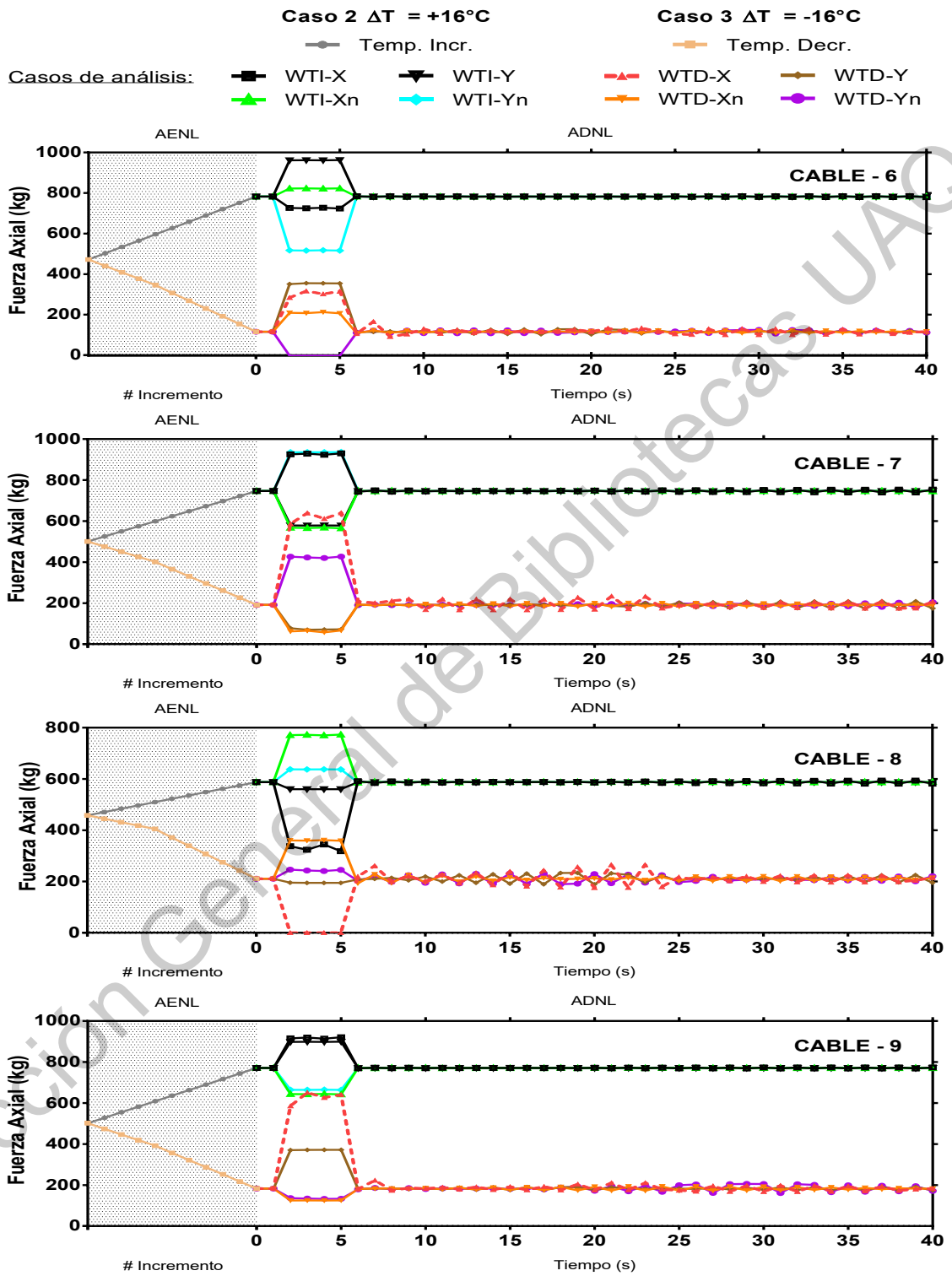


Figura 8.10. Registro tiempo-historia de los elementos cable 6 a 9 (grupo A), para los casos

2 y 3.

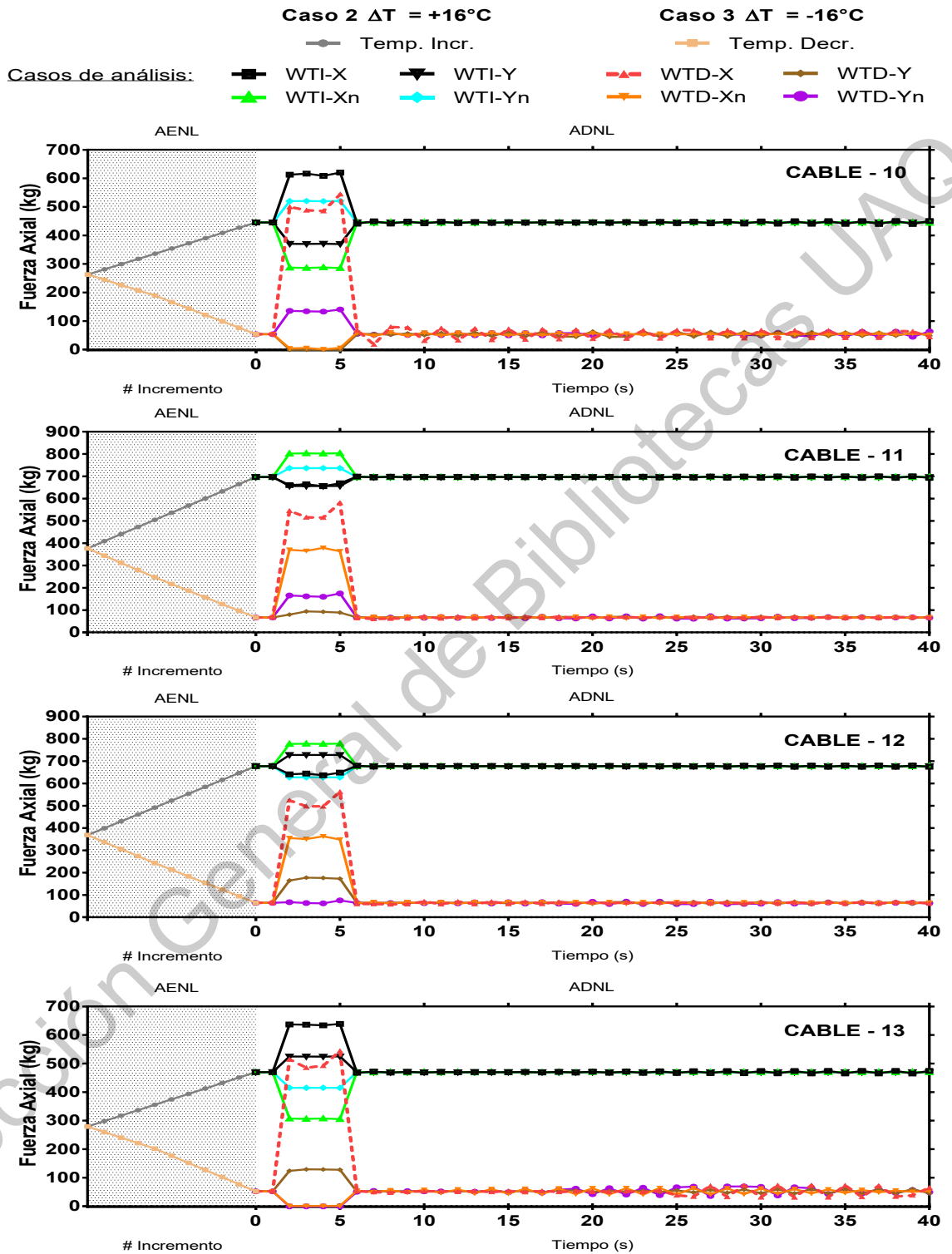


Figura 8.11. Registro tiempo-historia de los elementos cable 10 a 13 (grupo B), para los casos 2 y 3.

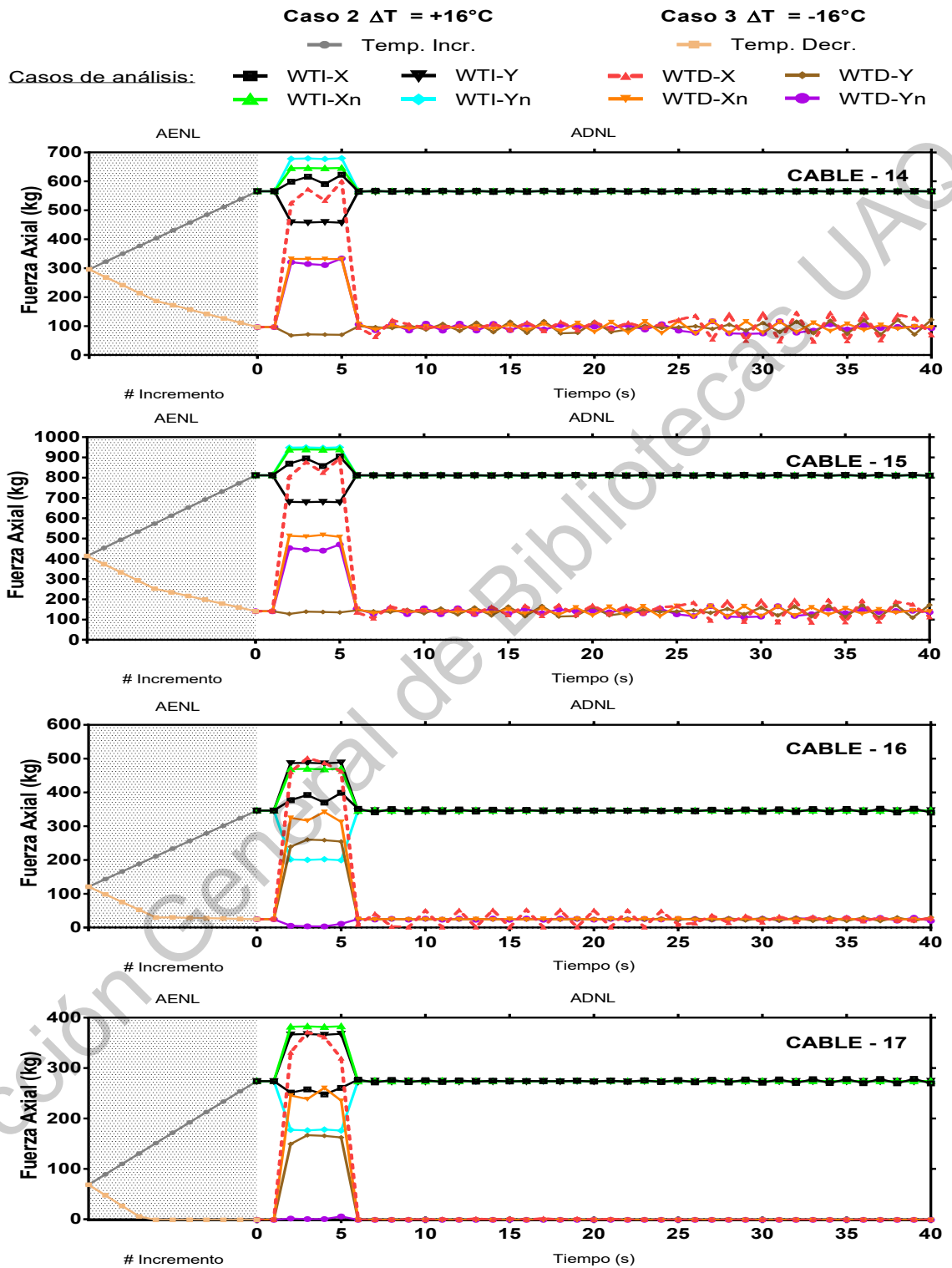


Figura 8.12. Registro tiempo-historia de los elementos cable 14 a 17 (grupo C), para los casos 2 y 3.



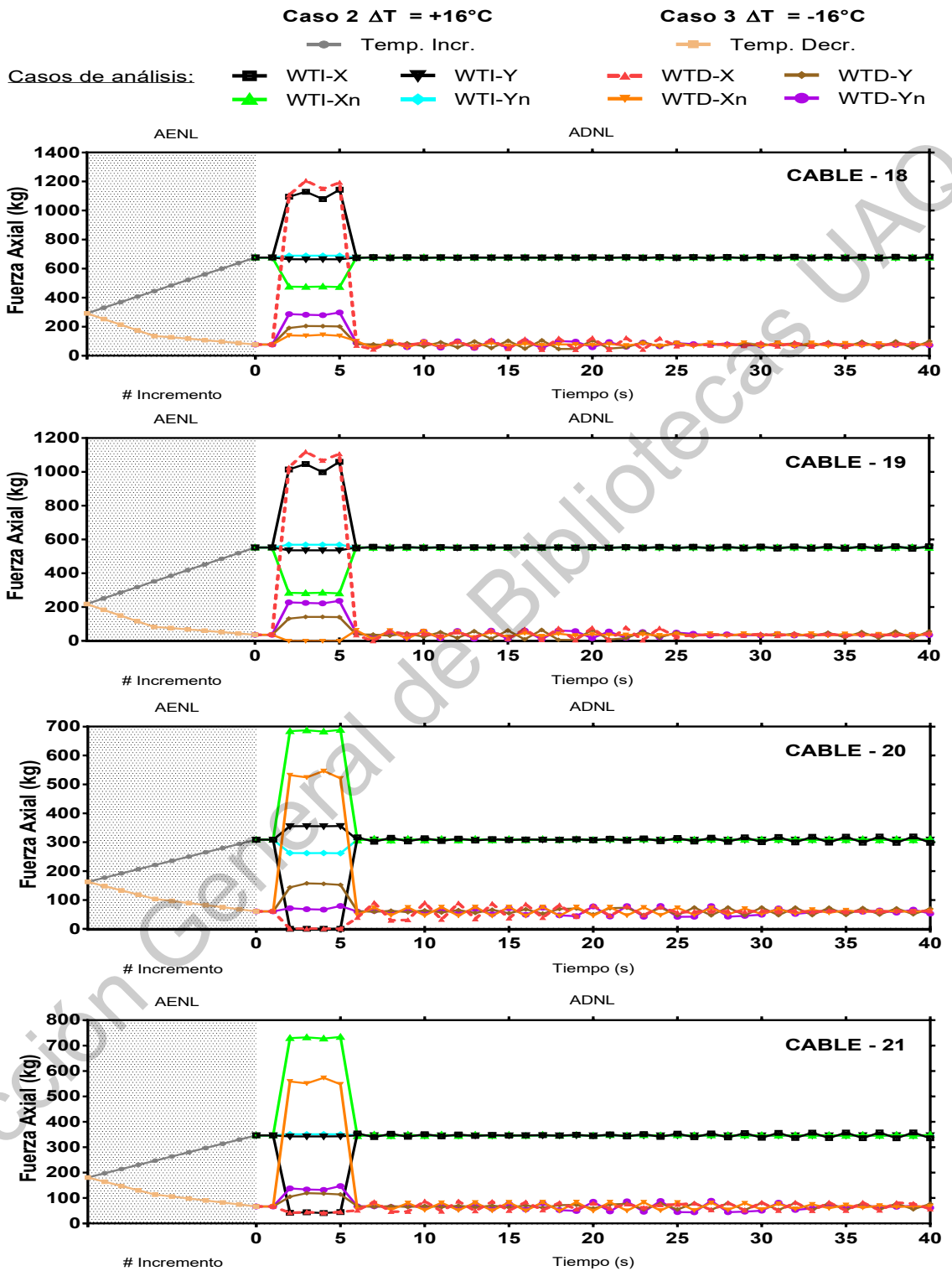


Figura 8.13. Registro tiempo-historia de los elementos cable 18 a 21 (grupo D), para los casos 2 y 3.

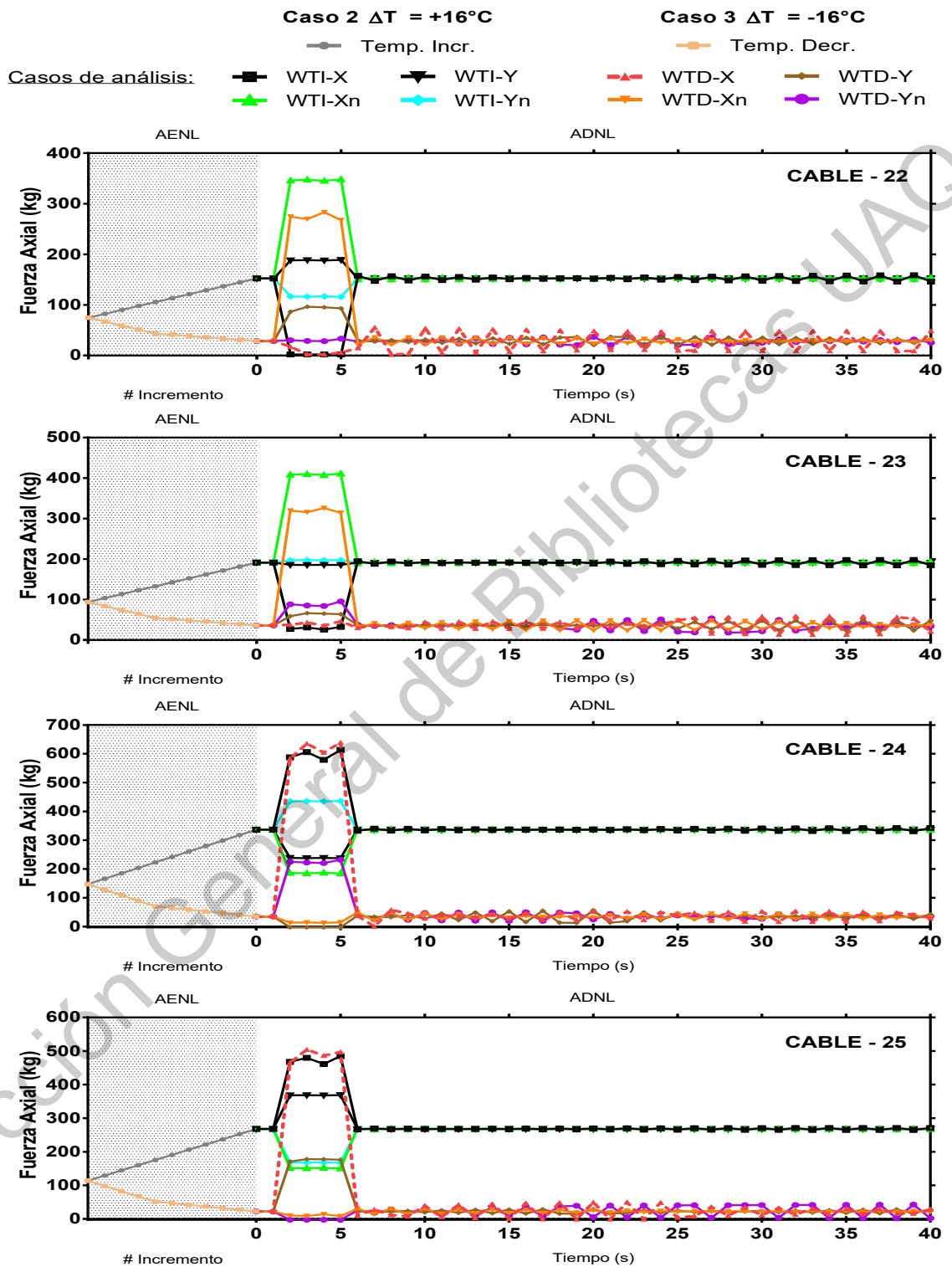


Figura 8.14. Registro tiempo-historia de los elementos cable 22 a 25 (grupo E), para los casos 2 y 3.

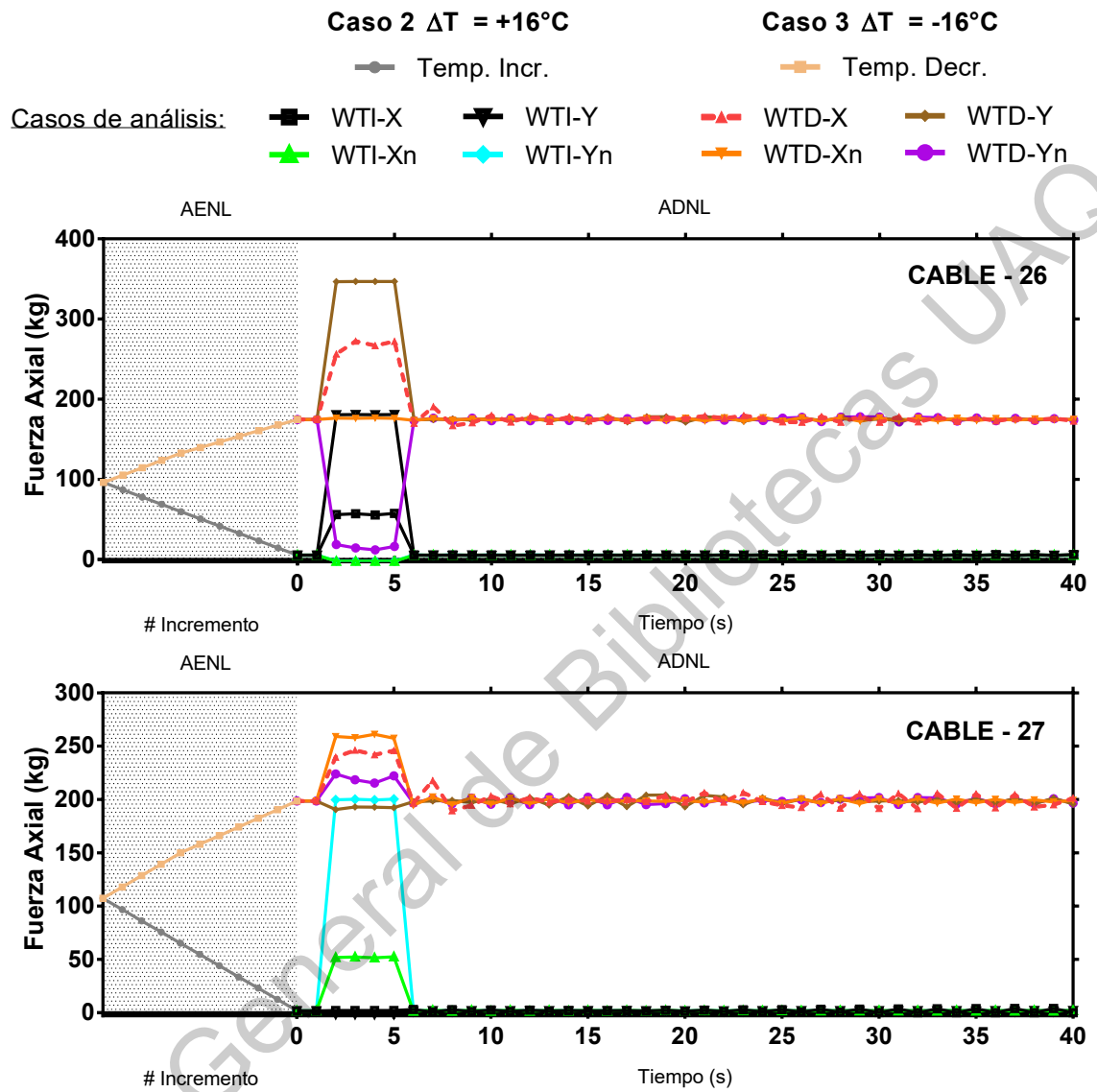


Figura 8.15. Registro tiempo-historia de los elementos cable 26 a 27 (grupo F), para los casos 2 y 3.

Nodo 2

Casos de análisis:      —●— W-X      -▲- W-Xn      -■- W-Y      -■- W-Yn

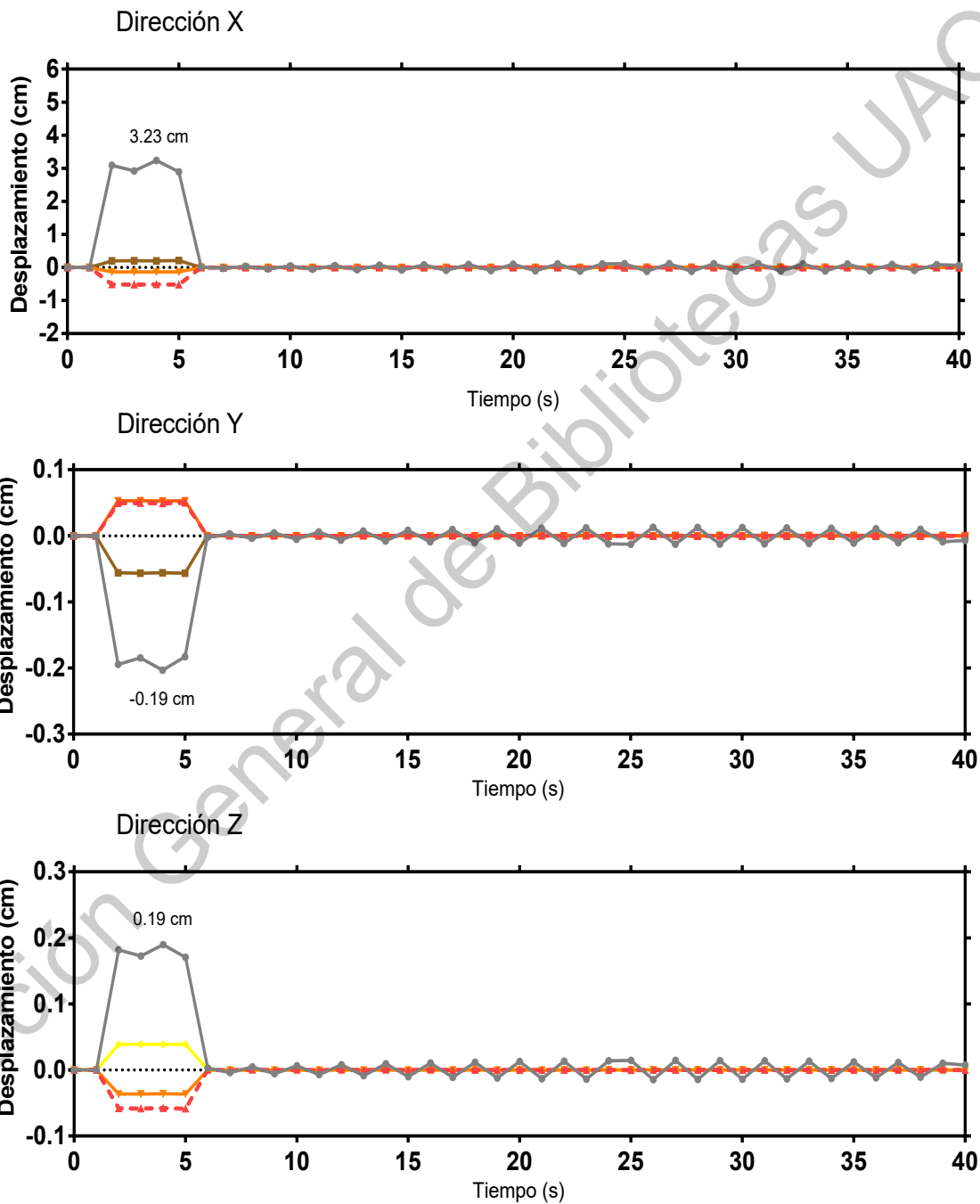


Figura 8.16. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 2 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.

### Nodo 3

Casos de análisis:

—●— W-X

-▲- W-Xn

-■- W-Y

-■- W-Yn

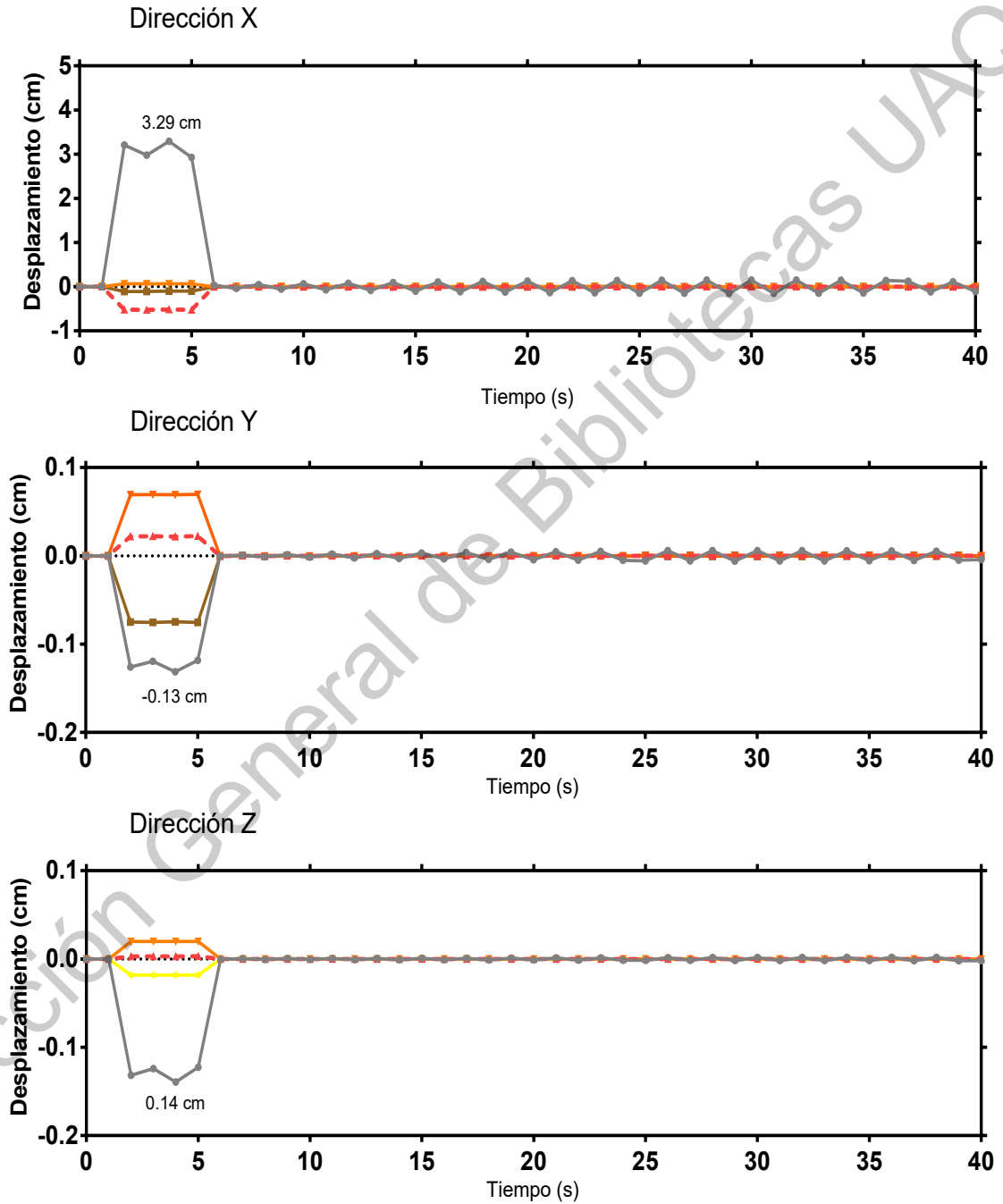
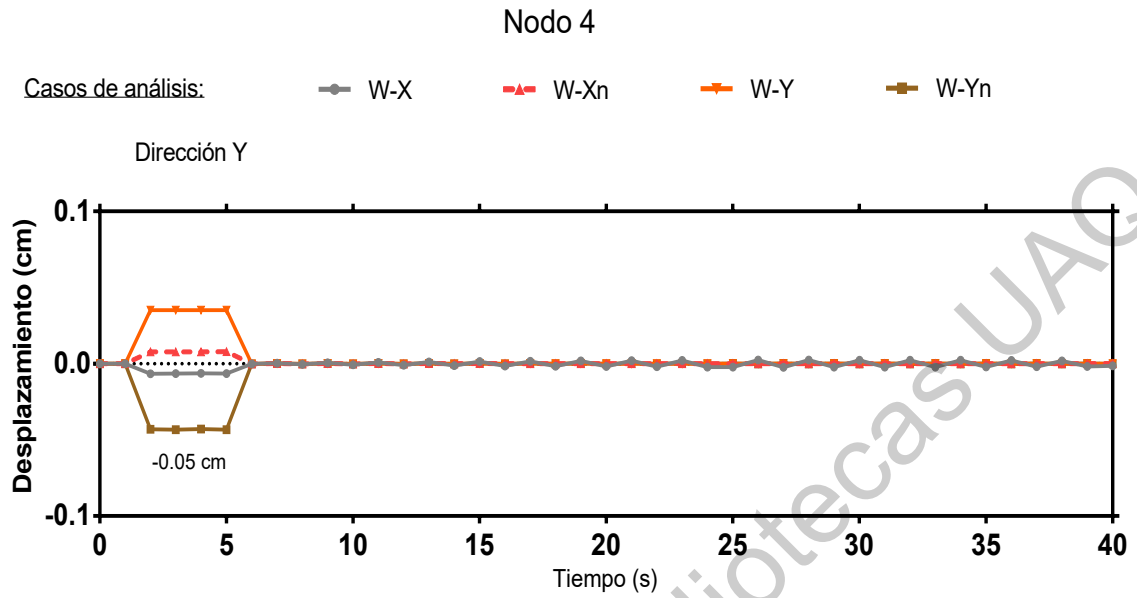
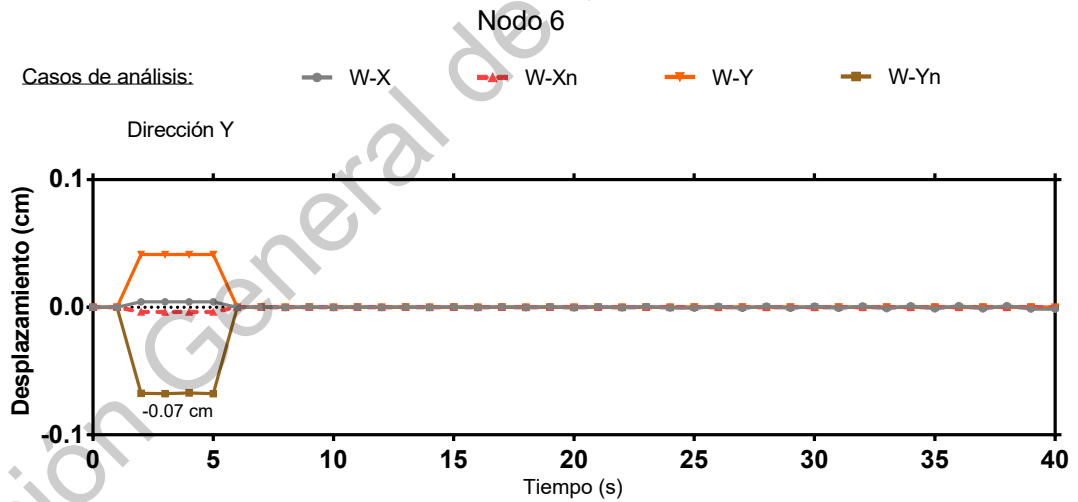


Figura 8.17. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 3 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.



**Figura 8.18. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 4 en la dirección Y, para el caso 1.**



**Figura 8.19. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 6 en la dirección Y, para el caso 1.**

Nodo 5

Casos de análisis:

W-X

W-Xn

W-Y

W-Yn

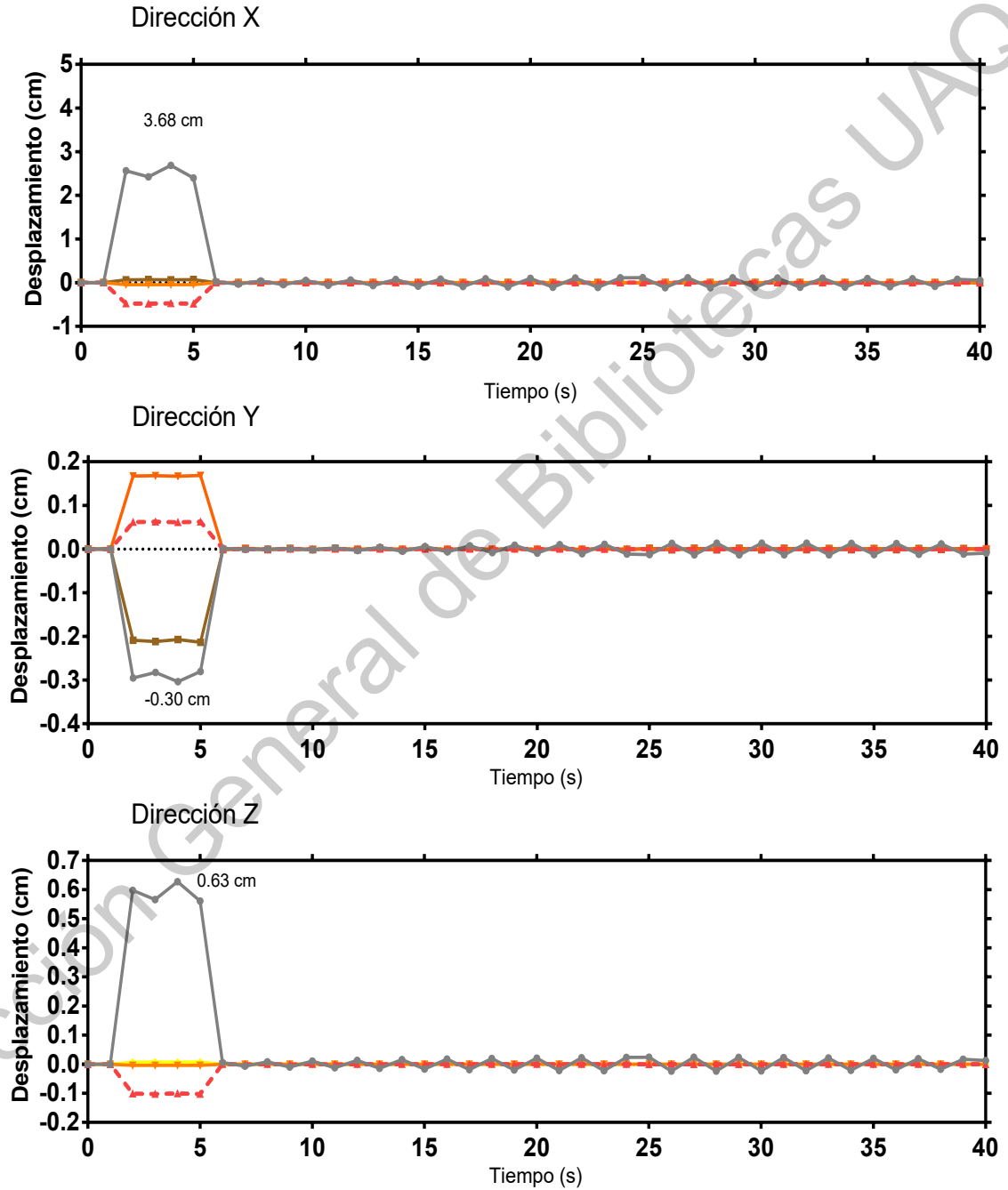


Figura 8.20. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 5 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.

### Nodo 8

Casos de análisis:

— W-X

- - W-Xn

- - W-Y

- - W-Yn

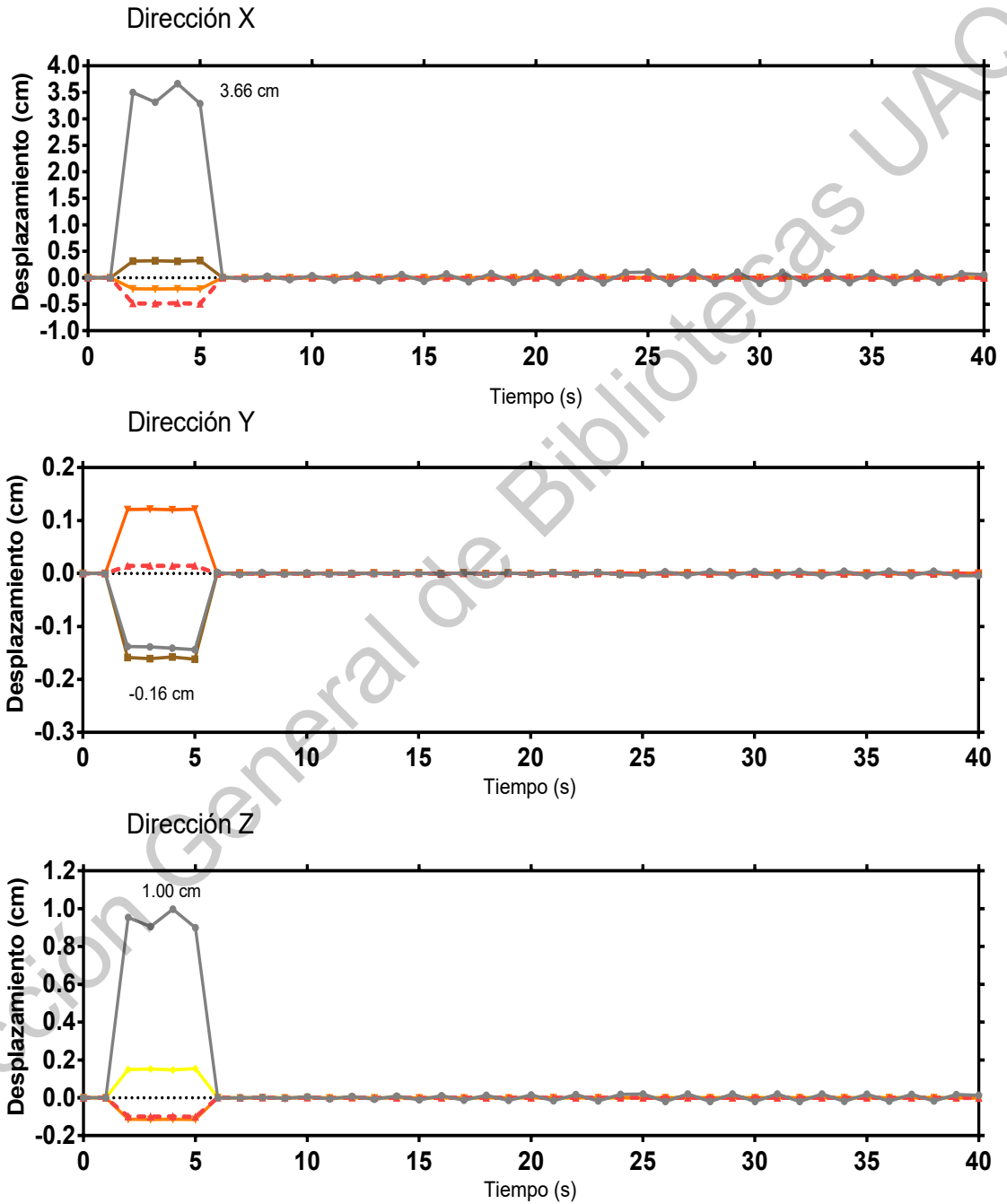


Figura 8.21. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.



### Nodo 9

Casos de análisis:

—●— W-X

-▲- W-Xn

-■- W-Y

-■- W-Yn

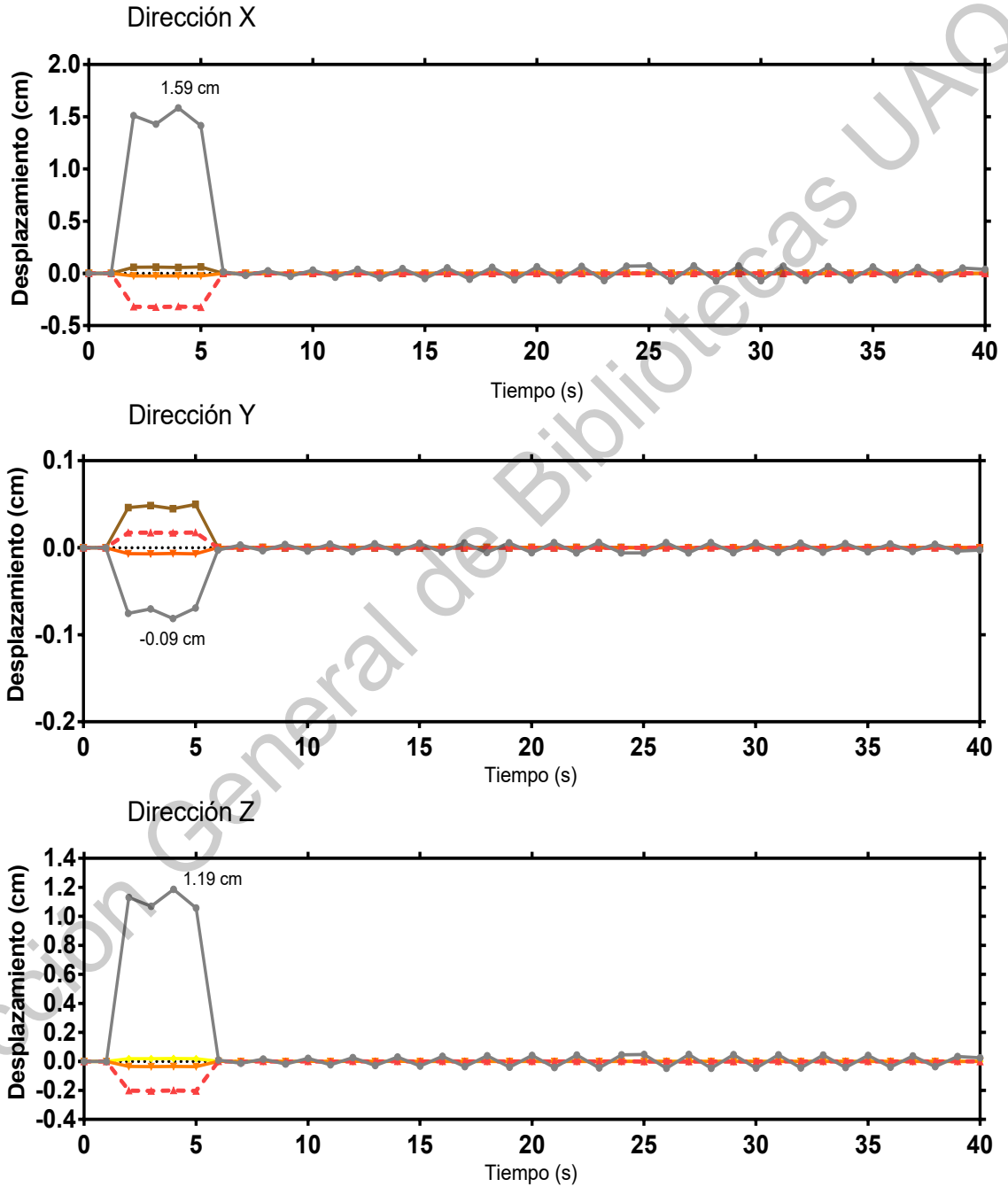


Figura 8.22. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 9 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.

### Nodo 10

Casos de análisis:

—●— W-X

-▲- W-Xn

-■- W-Y

-■- W-Yn

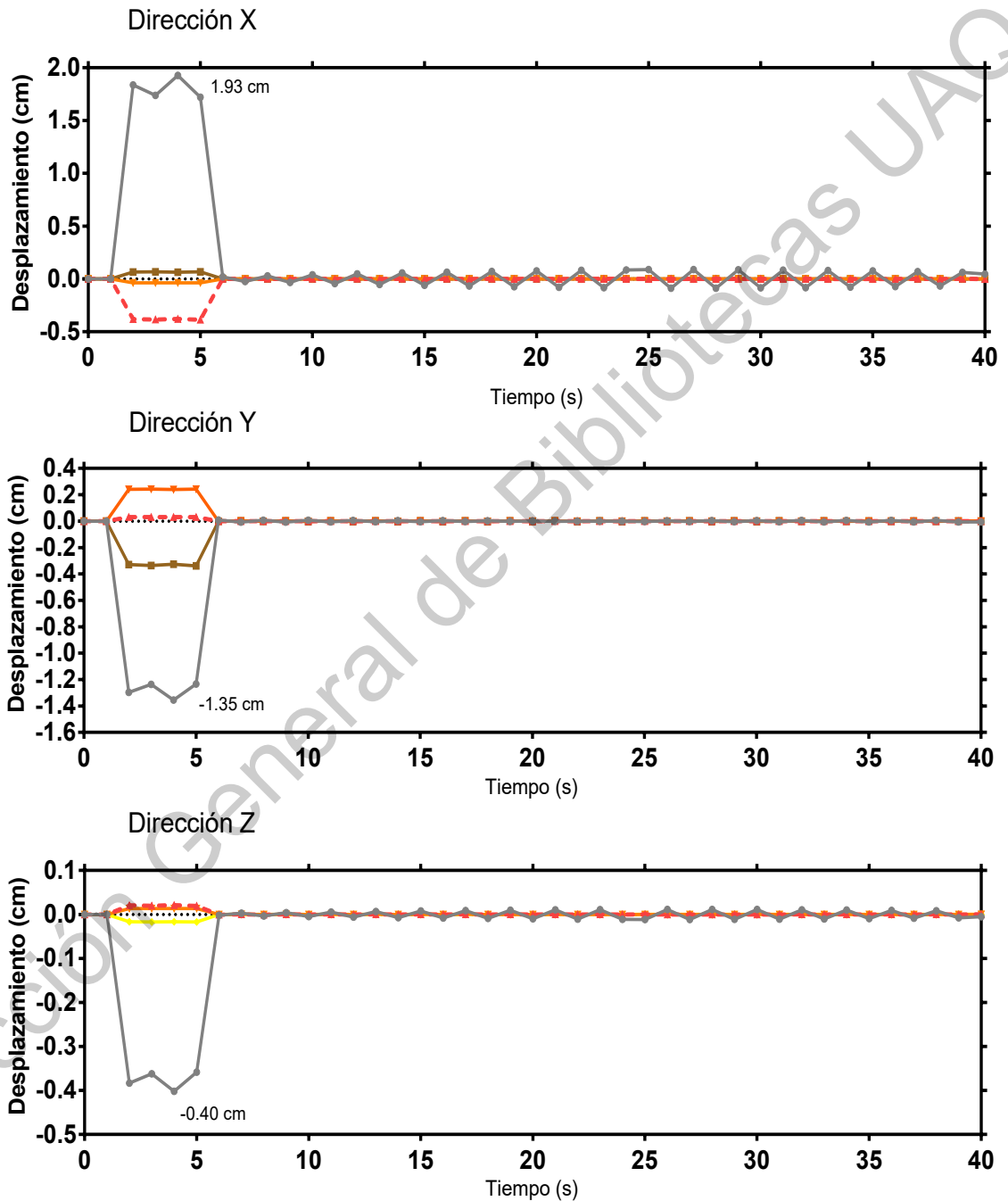


Figura 8.23. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 10 en las direcciones X, Y y Z, para el caso 1.

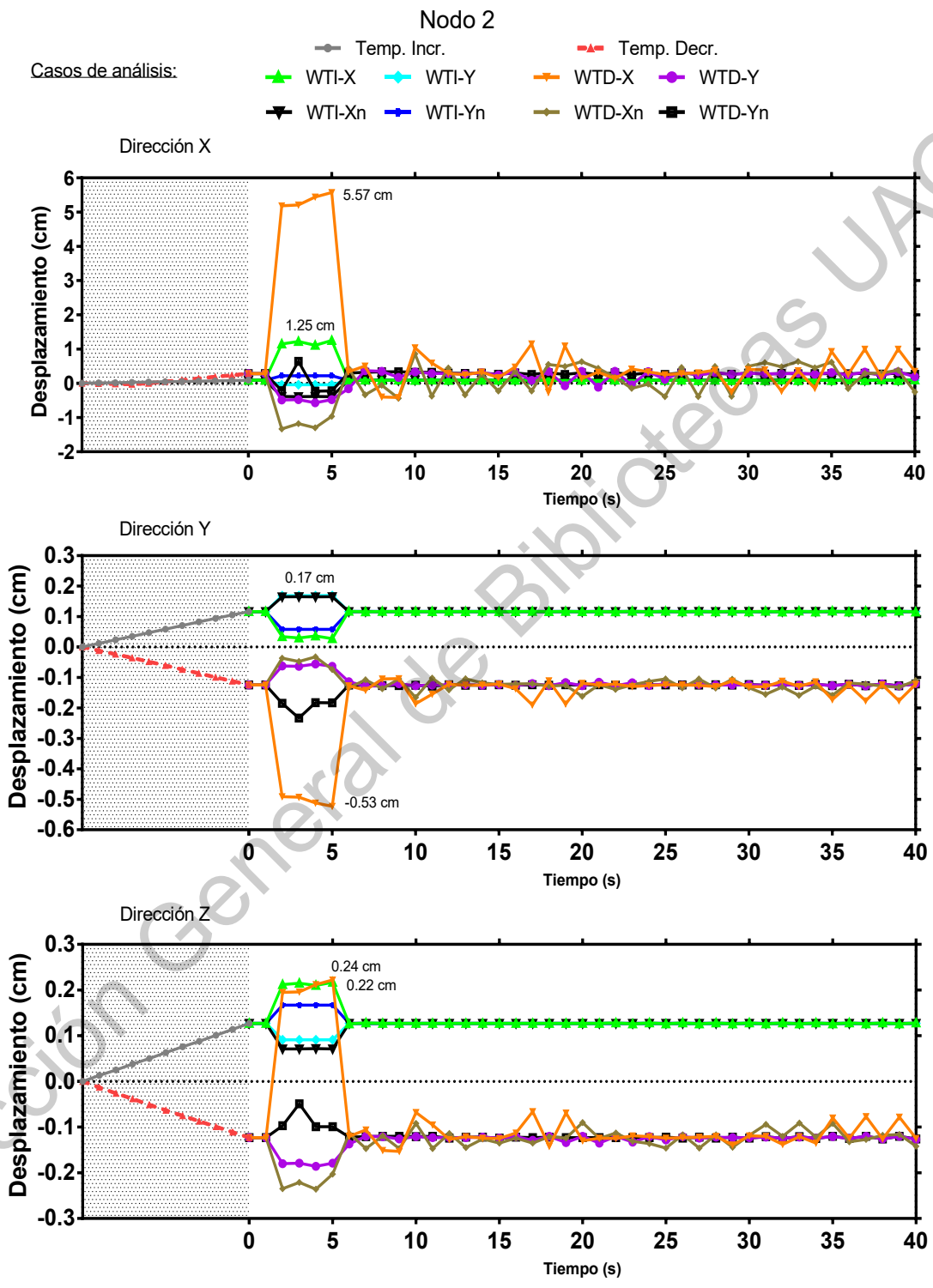


Figura 8.24. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 2 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

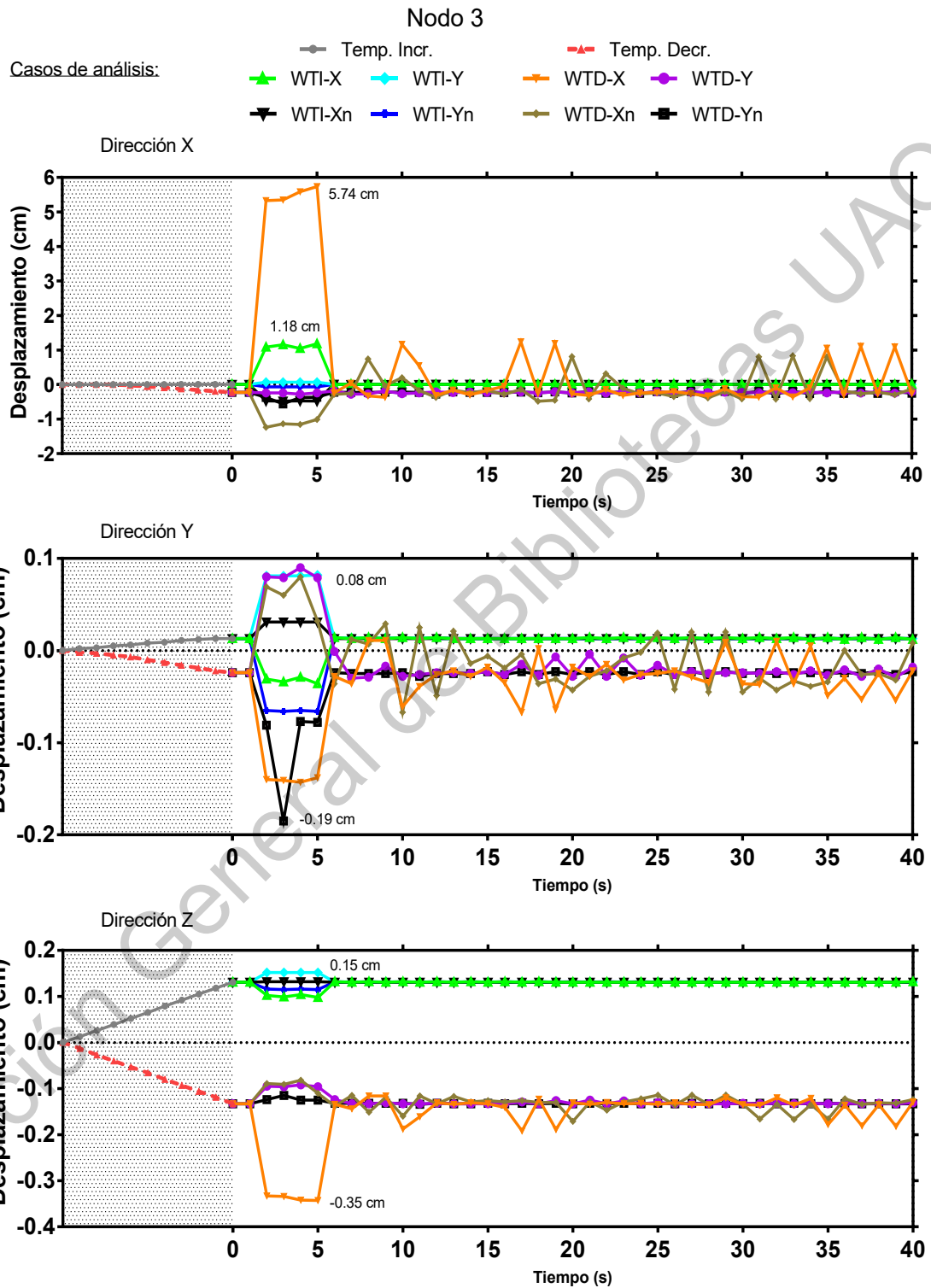


Figura 8.25. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 3 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

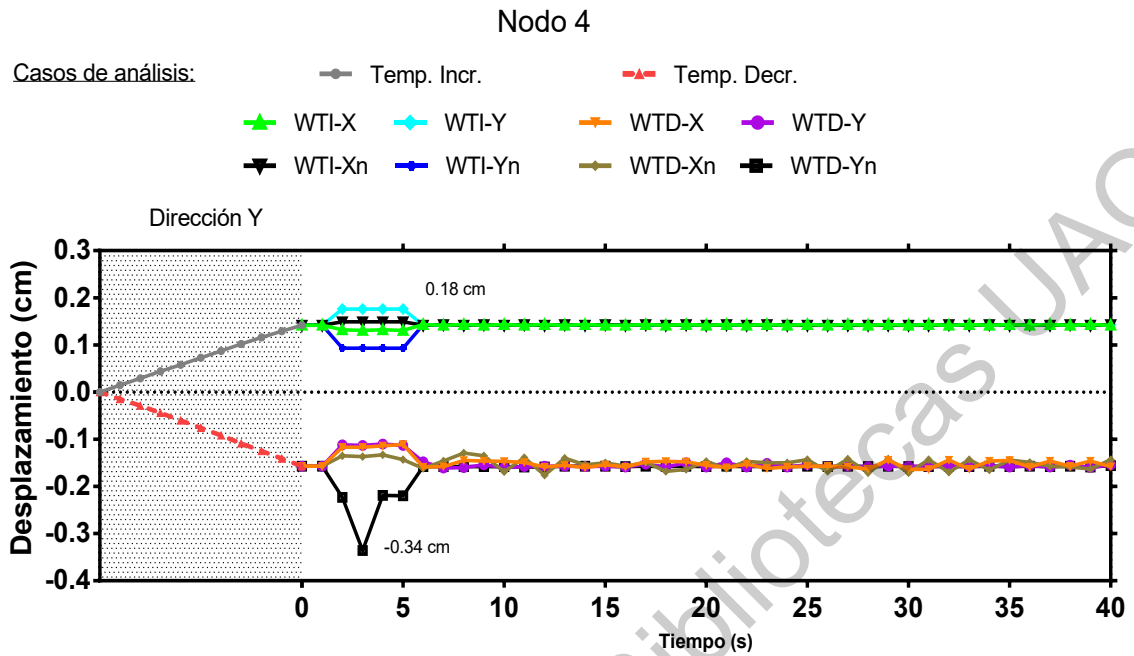


Figura 8.26. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 4 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

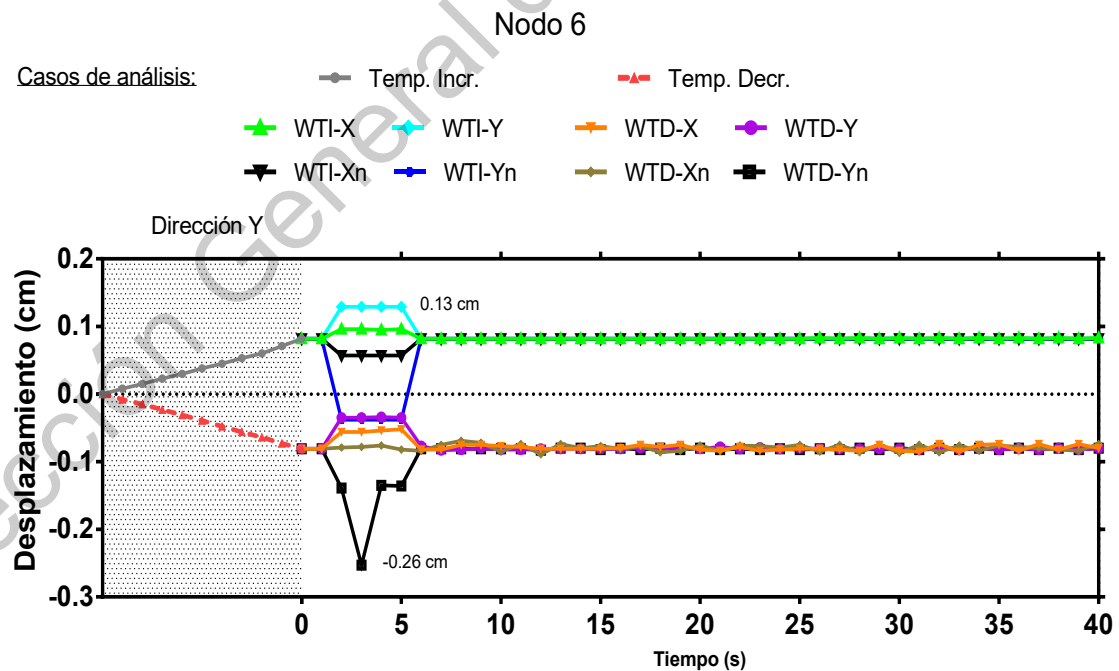


Figura 8.27. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 6 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

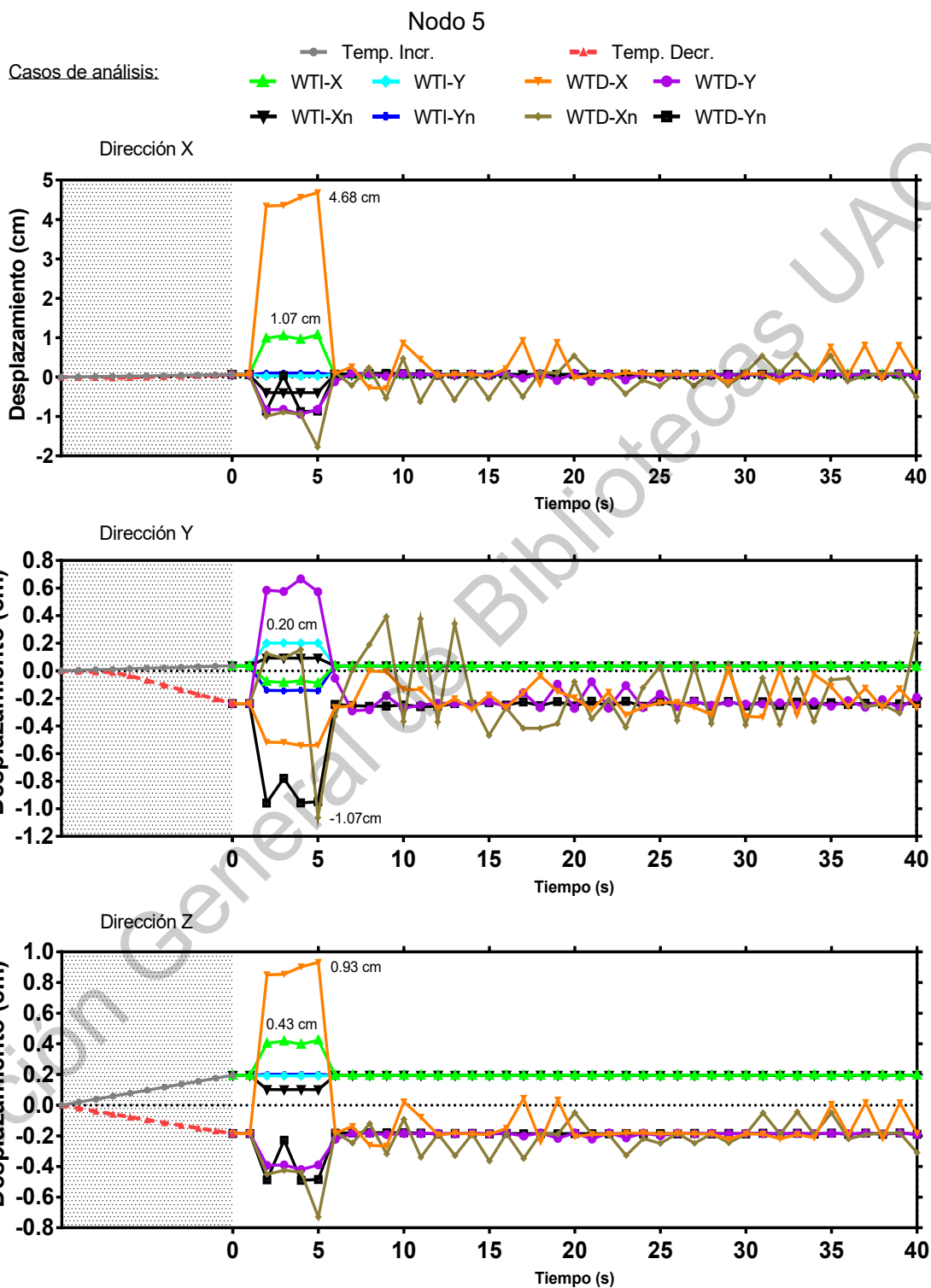


Figura 8.28. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 5 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

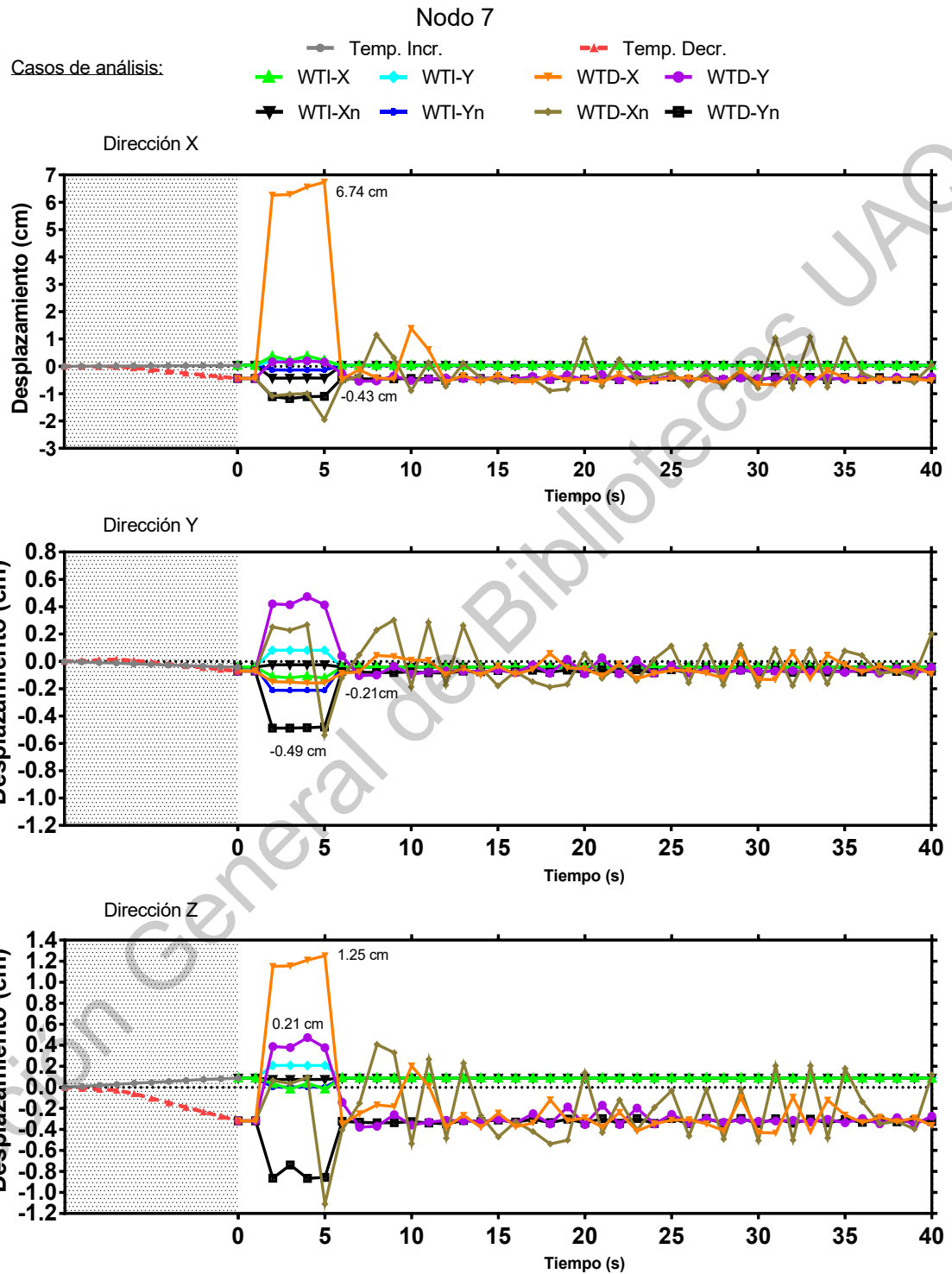


Figura 8.29. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 7 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

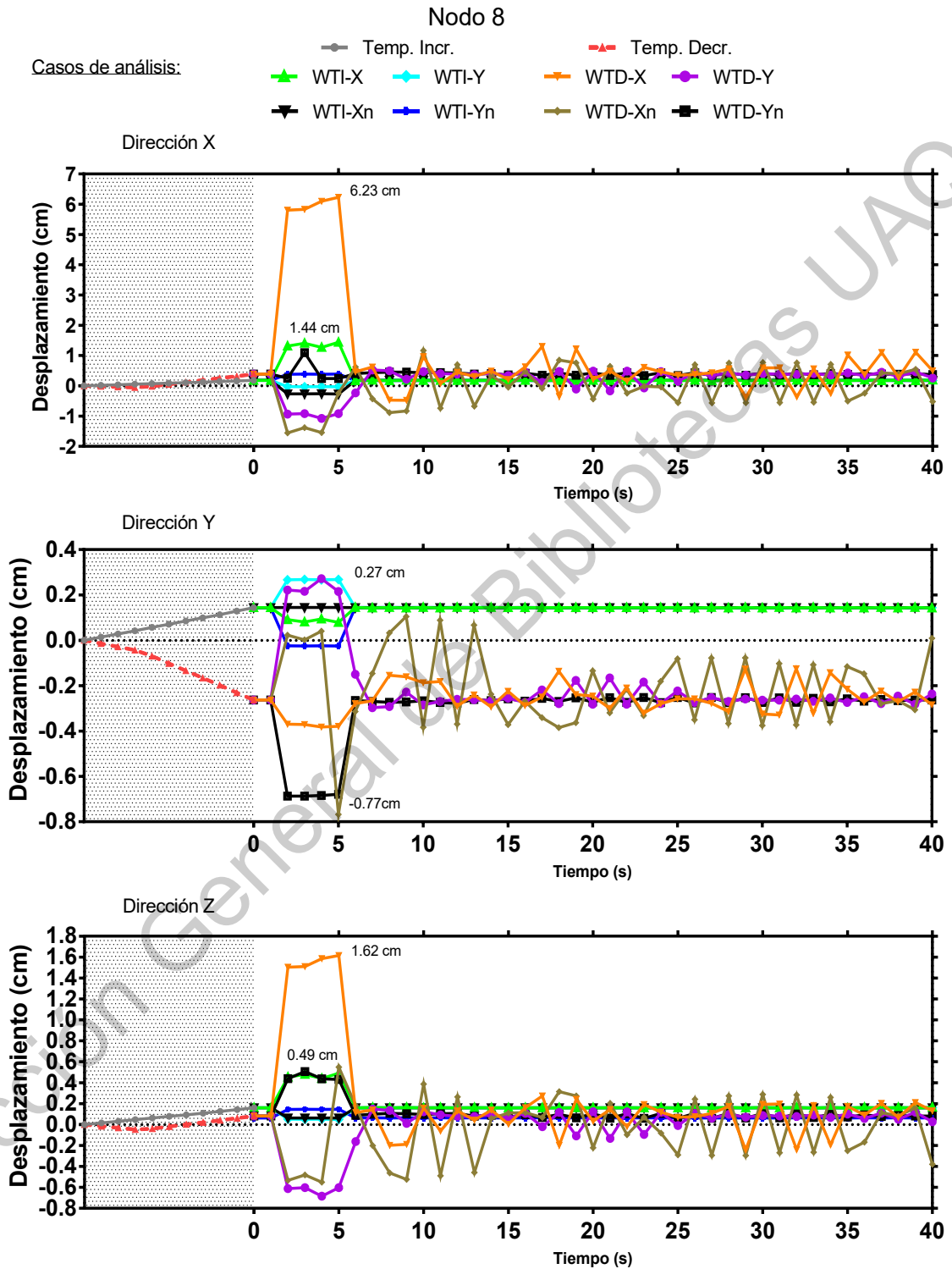


Figura 8.30. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 8 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.



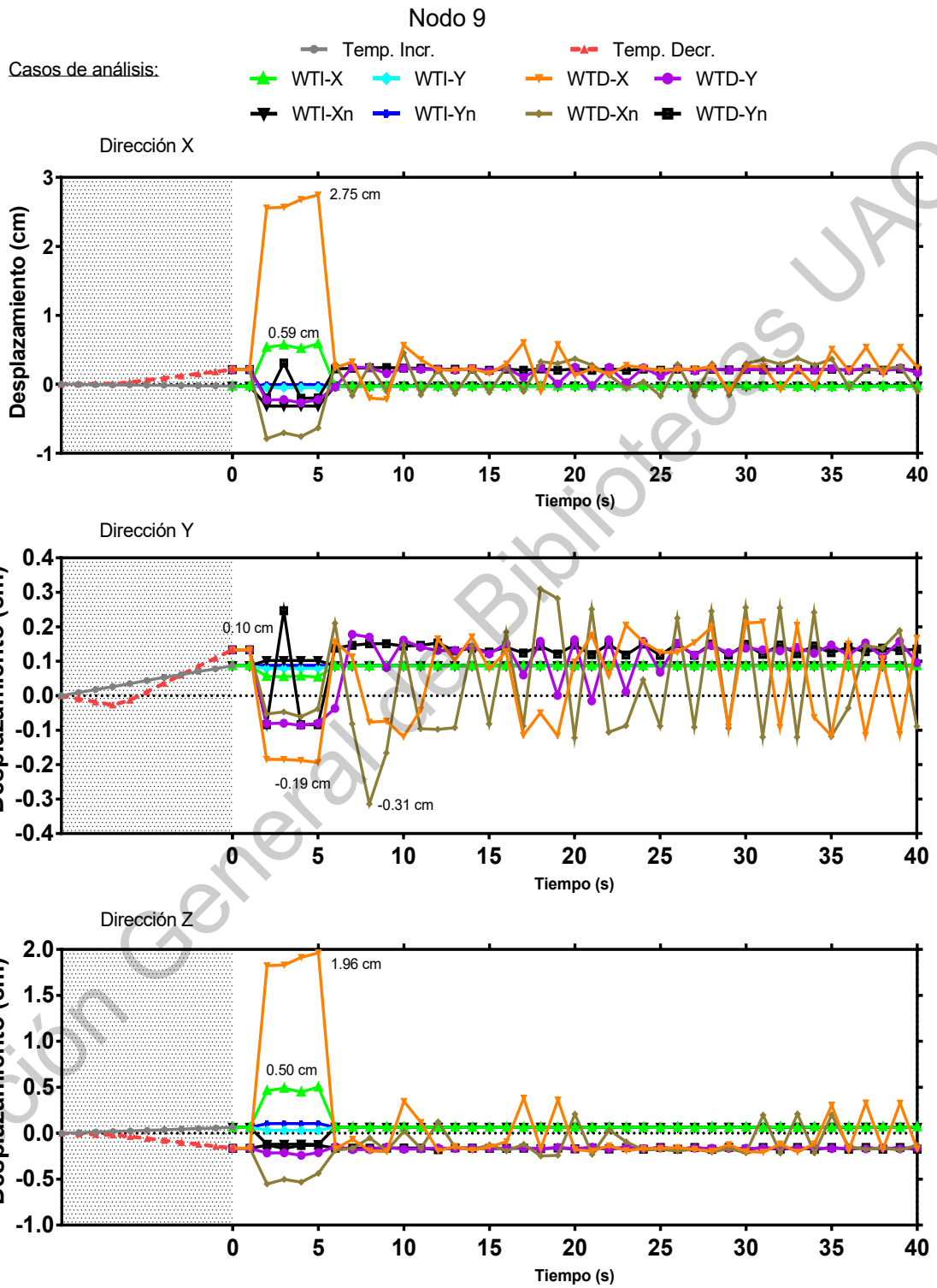


Figura 8.31. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 9 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

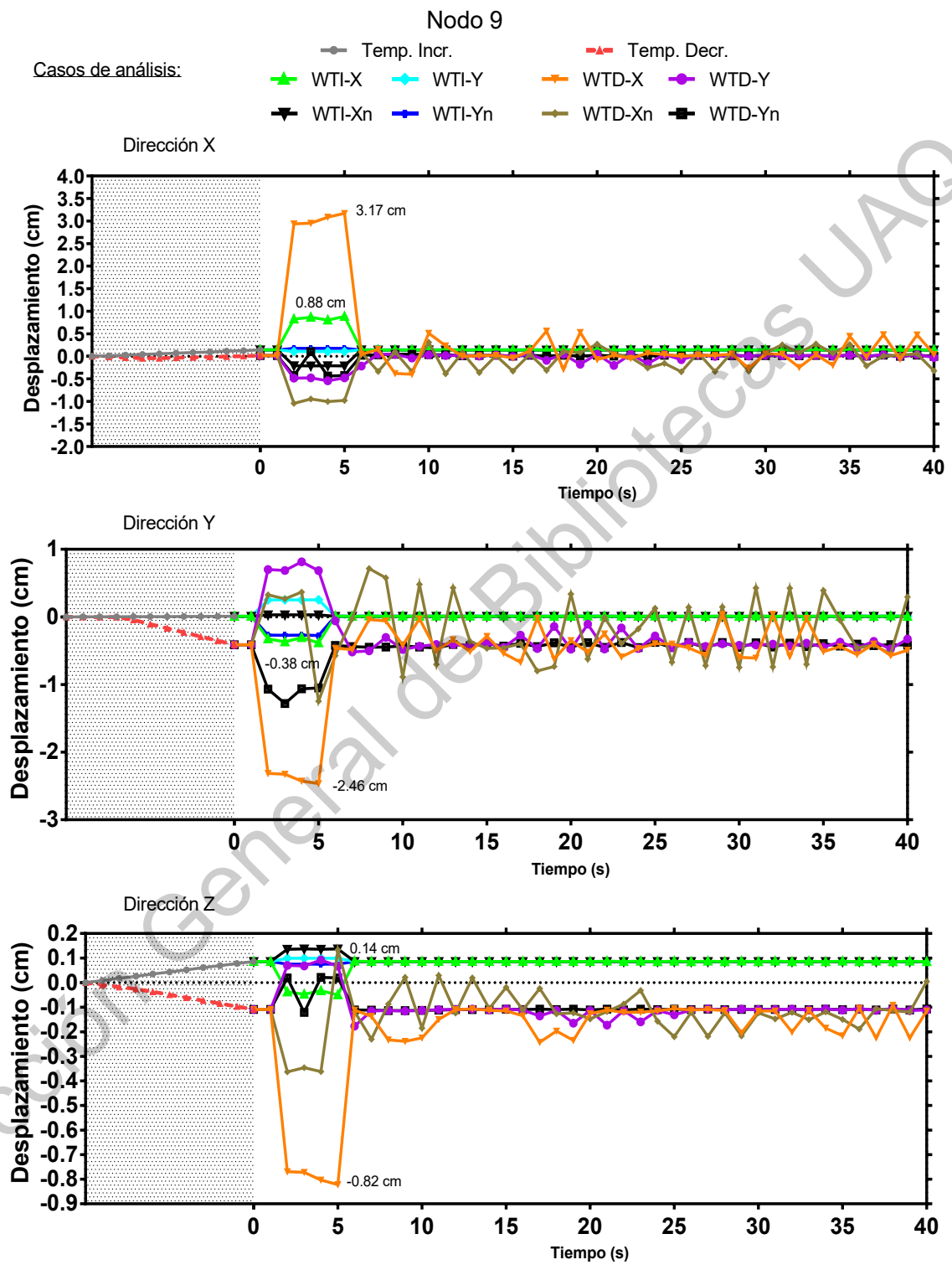


Figura 8.32. Registro tiempo-historia de los desplazamientos del nodo 10 en las direcciones X, Y y Z, para los casos 2 y 3.

## 9. REFERENCIAS

AASHTO. 2009. Guide Specifications for Design of Pedestrian Bridges.

Aboul-Nasr, G., and S. A. Mourad. 2015. An extended force density method for form finding of constrained cable nets. *Case Stud. Struct. Eng.* 3:19–32. doi:10.1016/j.csse.2015.02.001. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.csse.2015.02.001>

Agogino, A. 2013. NASA Innovative Advanced Concepts (NIAC). NASA Ames Res. Cent.

American Society of Civil Engineers. 2010. Structural Applications of Steel Cables for Buildings.

Ashwear, N., and A. Eriksson. 2015. Influence of temperature on the vibration properties of tensegrity structures. *Int. J. Mech. Sci.* 99:237–250. doi:10.1016/j.ijmecsci.2015.05.019. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.05.019>

Ashwear, N., and A. Eriksson. 2017. Vibration health monitoring for tensegrity structures. *Mech. Syst. Signal Process.* 85. doi:10.1016/j.ymsp.2016.08.039.

Atig, M., M. H. El Ouni, and N. Ben Kahla. 2017. Dynamic stability analysis of tensegrity systems. *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 8189:1–18. doi:10.1080/19648189.2017.1304275. Available from: <http://dx.doi.org/10.1080/19648189.2017.1304275>

Australian Steel Institute. 2010. Kurilpa Bridge , Brisbane Structural Engineering Award 2010 ( Qld ). 2010.

Bazĭ, Z. P. 2000. Structural stability. *Int. J. Solids Struct.* 37:55–67.

Bel Hadj Ali, N., and I. F. C. Smith. 2010. Dynamic behavior and vibration control of

a tensegrity structure. *Int. J. Solids Struct.* 47:1285–1296.  
doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.01.012. Available from:  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.01.012>

Belkacem, S. 1987. Recherche de forme par relaxation dynamique de systemes reticules spatiaux autocontraints. Universite Paul Sabatier.

Bin Bing, W. 2013. Free-standing Tension Structures.

De Boeck, J. 2013. Tensegrity bridges. Delft. University of Technology.

Calladine, C. R. 1978. Buckminster Fuller ' S " Tensegrity " Structures and Clerk Maxwell ' S Rules for the Construction of Stiff Frames. *Int. J. Solids Struct.* 14:161–172.

Caluwaerts, K., J. Despraz, A. I cen, A. P. Sabelhaus, J. Bruce, B. Schrauwen, and V. SunSpiral. 2014. Design and control of compliant tensegrity robots through simulation and hardware validation. *J. R. Soc. Interface.* 11:20140520–20140520.  
doi:10.1098/rsif.2014.0520. Available from:  
<http://rsif.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rsif.2014.0520>

Chen, L.-H., K. Kim, E. Tang, K. Li, R. House, E. L. Zhu, K. Fountain, A. M. Agogino, A. Agogino, V. Sunspiral, and E. Jung. 2017. Soft Spherical Tensegrity Robot Design Using Rod-Centered Actuation and Control. *J. Mech. Robot.* 9.  
doi:10.1115/1.4036014.

Clough, R. W., and J. Penzien. 1995. Dynamics of structures. Computers & Structures, Inc.

Cobos, J. I. 2018. Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales. UNIVERSIDAD DE CUENCA.

Cook, R. D., and H. Saunders. 2009. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. (J. W. & Sons, editor.).

Craig, R. R. J., and A. J. Kurdila. 2011. *Fundamentals of Structural Dynamics*. John Wiley & Sons.

Emmerich, D. G. 1966. "Reseaux." In: Blackwell, editor. 1<sup>st</sup> International Conference on Space Structures. Makowski ed. Battersea College.

Gengnagel, C. 2002. Arbeitsblätter "Tensegrity." Technische Universität München.

Gidak, P., and K. Fresl. 2012. Programming the Force Density Method. 0–7.

Gomez Estrada, G. 2007. Analytical and numerical investigations of form-finding methods for tensegrity structures. 152.

Gomez Estrada, G., H. J. Bungartz, and C. Mohrdieck. 2006. Numerical form-finding of tensegrity structures. *Int. J. Solids Struct.* 43:6855–6868. doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012.

Hidalgo-Solórzano, E., J. Campuzano-Rincón, J. M. Rodríguez-Hernández, L. Chias-Becerril, H. Reséndiz-López, H. Sánchez-Restrepo, B. Baranda-Sepúlveda, C. Franco-Arias, and M. Híjar. 2010. Motivos de uso y no uso de puentes peatonales. *Salud Publica Mex.* 52:502–10. Available from: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21271008>

Híjar Medina, M. C. 2014. Los accidentes como problema de salud pública en México, retos y oportunidades. Available from: <http://mcr.aacrjournals.org/lookup/doi/10.1158/1541-7786.MCR-16-0293>

Jáuregui Gómez, V. 2004. Tensegrity Structures and their Application to Architecture. 1–239. Available from: [http://www.tensegridad.es/Publications/MSc\\_Thesis-Tensegrity\\_Structures\\_and\\_their\\_Application\\_to\\_Architecture\\_by\\_GOMEZ-JAUREGUI.pdf](http://www.tensegridad.es/Publications/MSc_Thesis-Tensegrity_Structures_and_their_Application_to_Architecture_by_GOMEZ-JAUREGUI.pdf)

Khellaf, N., and K. Kebiche. 2014. Geometric and Material Nonlinear Analysis of

Square-Based Tensegrity Ring Structures. Arab. J. Sci. Eng. 39:5979–5989. doi:10.1007/s13369-014-1196-2.

Lanczos, C. 1970. The Variational Principles of Mechanics. 4th ed. (U. of T. Press, editor.). University of Toronto Press, Toronto.

Lazzari, M., R. V. Vitaliani, M. Majowiecki, and A. V. Saetta. 2003. Dynamic behavior of a tensegrity system subjected to follower wind loading. Comput. Struct. 81:2199–2217. doi:10.1016/S0045-7949(03)00291-8.

Lee, K. S., and S. E. Han. 2011. Advanced shape finding algorithm of force density method based on FEM. Adv. Steel Constr. 7:313–329.

Linkwitz, V. K., and H. J. Schek. 1971. Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen. Springer-Verlag.

Lu, C. J., X. D. Wang, and S. N. Lu. 2012. Wind-Induced Dynamic Analysis of the Flat Tensegrity Structures in Time Domain. Appl. Mech. Mater. 166–169:140–143. doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.166-169.140. Available from: <http://www.scientific.net/AMM.166-169.140>

Mohri, F. 1990. Analyse Theorique et Experimentale des Systemes Reticules Autocontraints. Montpellier.

Motro, R. 1977. Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation. City University of London.

Motro, R. 1987. Tensegrity Systems for Double Layer Space Structures. In: B. H. V. Topping, editor. Proceedings of the International Conference on the Design and Construction of Non Conventional Structures. London. p. 43–51.

Motro, R. 1988. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. Comput. Struct. 30:685–695. doi:10.1016/0045-7949(88)90304-5.

Motro, R. 1992. Tensegrity systems: the state of the art. *Int. J. Sp. Struct.* 7:75–83.

Motro, R. 2006. *Tensegrity: structural systems for the future.*

Motro, R., V. Raducanu, and R. B. Fuller. 2003. *Tensegrity Systems.* 18:77–84.

Murakami, H. 2001a. Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion. *Int. J. Solids Struct.* 38:3599–3613. doi:10.1016/S0020-7683(00)00232-8.

Murakami, H. 2001b. Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part II. Quasi-static analysis. *Int. J. Solids Struct.* 38:3615–3629. doi:10.1016/S0020-7683(00)00233-X.

Ochoa Peralta, L. A., and P. F. Orellana Ochoa. 2017. *Tensegriedad como sistema estructural alternativo aplicado a cubiertas.* Universidad de Cuenca.

Pagitz, M., and J. M. Mirats Tur. 2009. Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures. *Int. J. Solids Struct.* 46:3235–3240. doi:10.1016/j.ijsolstr.2009.04.018. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.04.018>

Paul, C., H. Lipson, and F. J. V. Cuevas. 2005. Evolutionary form-finding of tensegrity structures. *Proc. 2005 Conf. Genet. Evol. Comput. - GECCO '05.* 3. doi:10.1145/1068009.1068011. Available from: <http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=1068009.1068011>

Pellegrino, S. 1986. *Mechanics of kinematically indeterminate structures.* University of Cambridge.

Pellegrino, S. 1993. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix. *Int. J. Solids Struct.* 30:3025–3035. doi:10.1016/0020-7683(93)90210-X.

Pellegrino, S., and C. R. Calladine. 1978. and S. 4.

Pellegrino, S., and C. R. Calladine. 1985. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *Int. J. Solids Struct.* 22:409–428.

Pugh, A. 1976. *An introduction to tensegrity*. Univ. Calif. Press Berkeley.

Rhode-Barbarigos, L., N. B. Hadj Ali, R. Motro, and I. F. C. Smith. 2010. Designing tensegrity modules for pedestrian bridges. *Eng. Struct.* 32:1158–1167. doi:10.1016/j.engstruct.2009.12.042.

Schek, H. J. 1974. The force density method for form finding and computation of general networks. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 3:115–134. doi:10.1016/0045-7825(74)90045-0.

Schenk, M. 2005. *Statically Balanced Tensegrity Mechanisms - A literature Review*. Delft Univ. Technol. 1–62. Available from: <http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Statically+Balanced+Tensegrity+Mechanisms+A+literature+review#0>

Secretaria de Comunicaciones y Transportes. 2001a. N·PRY·CAR·6·01·003/01 Cargas y Acciones. In: *Proyectos de Nuevos Puentes y Estructuras Similares*. p. 1–25.

Secretaria de Comunicaciones y Transportes. 2001b. N·PRY·CAR·6·01·002/01 Características Generales de Proyecto. In: *Proyectos de Nuevos Puentes y Estructuras Similares*. p. 1–13.

Secretaria de Comunicaciones y Transportes. 2016. N·PRY·CAR·6·01·006/16 Combinaciones de Cargas. In: *Ejecución de Proyectos de Nuevos Puentes y Estructuras Similares*.

De Silva, C. W. 2018. *Modeling of Dynamic Systems*. (T. & F. Group, editor.). CRC Press.

Simitises, G. J., and D. H. Hodges. 2006. *Fundamentals of Structural Stability*.



Skelton, R. E., and M. C. De Oliveira. 2009. Tensegrity systems, vol. 1.

The Aluminum Association. 2010. Aluminum Design Manual 2010.

Tibert, A. G., and S. Pellegrino. 2003. Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. 18:209–223.

Tibert, A. G., and S. Pellegrino. 2011. Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. *Int. J. Sp. Struct.* 26:241–255. doi:10.1260/0266-3511.26.3.241. Available from: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1260/0266-3511.26.3.241>

Tran, H. C., and J. Lee. 2011. Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures. *Acta Mech. Sin. Xuebao.* 27:938–949. doi:10.1007/s10409-011-0520-2.

Yamamoto, M., B. S. Gan, K. Fujita, and J. Kurokawa. 2011. A genetic algorithm based form-finding for tensegrity structure. *Procedia Eng.* 14:2949–2956. doi:10.1016/j.proeng.2011.07.371. Available from: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.371>

Yuan, X., L. Chen, and S. Dong. 2007. Prestress design of cable domes with new forms. *Int. J. Solids Struct.* 44:2773–2782. doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.08.026.

Zhang, J. Y., and M. Ohsaki. 2006. Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures. *Int. J. Solids Struct.* 43:5658–5673. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.10.011.

Zhang, J. Y., and M. Ohsaki. 2015. Tensegrity Structures.